数值分析

第9章：常微分方程初值问题数值解法

张亚楠[1]

苏州大学数学科学学院

May 27, 2020

[1]Email: ynzhang@suda.edu.cn

微分方程数值解分类

1 常微分方程
  (a) 初值问题
    (i) 一阶初值问题
      ❶ 单步法：Euler 法，梯形法，Runge-Kutta法
      ❷ 多步法(本课程不讲)： Adams method 。。。
    (iii) 高阶初值问题 (本课程不涉及，略相关)
  (b) 边值问题（本课程不涉及）

2 偏微分方程（本课程不涉及）

主要借助于单步法介绍以下概念:

1 局部截断误差（相容性）

2 收敛性

3 稳定性
  (1) 一般稳定性（0稳定、Lax-stable）：对输入数据(初值)扰动的敏感程度
  (2) 绝对稳定（A-稳定）；稳定域（ 稳定区间）

Tips: A-stable(Asymptotically stable) 针对方程本身而言，不是数值算法；Globally A-stable，locally A-stable；与本

Contents

问题描述

考虑如下初值问题

$$\begin{cases} y^{'}(x) = f(x,\, y), & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

已知：$f(x, y)$关于x连续，关于y满足Lipschitz条件。

上述问题在有限区间内存在唯一解

$$y = y(x),\ \&\ x \in [a, b]$$

在无法(或者无需)给出解析表达式的时候如何利用数值方法求出近似解?

Theorem 1

若$f(x,y)$关于x 连续，关于y 满足Lipschitz条件, 则

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,\, y), \qquad x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

存在唯一解。（给出唯一性证明）

Hint: 假设上述问题的初值为z_0, 则相应的解记为$z(x)$, 满足

$$z'(x) = f(x,\, z)$$

现考察$z(x) - y(x)$的性质; 记

$$r(x) = z(x) - y(x)$$

有

$$\begin{cases} r'(x) & = f(x,z) - f(x,y) \\ r(a) & = z(0) - y(0) \end{cases}$$

或者

$$\boxed{r'(x) = \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z - y} r(x) := h(x,r) * r(x)}$$

记

$$H(x) = \int_a^x h(x)dx = \int_a^x h(t)dt$$

改写目标为

$$r^{'}(x)e^{-H(x)} = e^{-H(x)} * h(x) * r(x)$$

得到

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-H(x)} * r(x)\right) = 0 \to e^{-H(x)} * r(x) = constant$$

即

$$e^{-H(x)} * r(x) = e^{-H(a)} * r(a) = z_0 - y_0 \to r(x) = e^{H(x)} * (z_0 - y_0)$$

进而

$$|z(x) - y(x)| = e^{\int_0^x h(t)dt} * |z_0 - y_0| \leq e^{L*(x-a)} * |z_0 - y_0|$$

在有限区间[a,b]上寻求方程

$$\begin{cases} y^{'}(x) = f(x, y), & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

的 解$y(x)$ 在一系列点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

上的近似值

$$y_1, y_2, ..., y_n \quad 即 \quad y_k \approx y(x_k), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

本文约定，<u>形如上式左端的符号为数值解，右端为精确解.</u>

简单起见， 将区间 $[a, b]$ N等分, 记$h = \dfrac{b-a}{N}$ 为网格步长，记

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, ..., N$$

为网格节点. 所谓数值解：寻找一个网格函数(只在网格节点处有定义的函数)，也即是一个向量 $\{y_k\}_{k=1}^{N}$, 使得

$$y_k \approx y(x_k), \quad k = 1, 2, ..., N.$$

Contents

$$\text{网格节点} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \quad x_{j+1} - x_j = h = \frac{b-a}{N}$$

$$\text{方程} \quad y' = f(x, y), \quad a < x < b$$

设$y(x) \in C^2[a, b]$, 由Taylor expansion

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \\ &= y(x_k) + f(x_k,\, y(x_k))h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k) \end{aligned}$$

略去小量项，可得

(向前)Euler方法

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(x_k,\, y_k), \\ y_0 = y(a) \text{ 初值已知} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

求解上式即得到网格函数（向量） $[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N]^{\mathrm{T}}$

思考： 所得向量是否为有效近似？精度如何？

$$\varepsilon_k = y(t_k) - y_k \quad \rightarrow \quad 0?, \quad \text{as} \quad h \rightarrow 0$$

Example 2

求解初值问题

$$\begin{cases} y^{'} = y - \frac{2x}{y} & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Matlab : Forward_Euler.m 两个发现

1. 误差随自变量增长而变大
2. 步长缩小，误差减小

WHY? 误差和步长h有何关系？能否量化？

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k))h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

记$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k$,得到误差方程

$$\boxed{\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h\varepsilon_k F_k + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k)}$$

其中

$$F_k = \frac{f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)}{y(x_k) - y_k}$$

进而得到

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{k+1}| &\le (1+hL)|\varepsilon_k| + \frac{1}{2}\|y''\|_\infty h^2 := A|\varepsilon_k| + B \\ &\le A(A|\varepsilon_{k-1}| + B) + B \\ &\le A^2|\varepsilon_{k-1}| + (1+A)B \le A^{k+1}|\varepsilon_0| + (1 + A + \ldots + A^k)B \\ &= \cancel{A^{k+1} * \varepsilon_0} + \frac{A^{k+1}-1}{A-1}B \le C(L, y, b-a) * h = \left(e^{(b-a)L} * \frac{\|y''\|_\infty}{2L}\right) * h\end{aligned}$$

Euler方法收敛！ 1阶精度！

Euler方法的（Lax ）稳定性 (零稳定)

假设给定Euler格式两个不同初值z_0，y_0, 若$|\varepsilon_0| = |z_0 - y_0|$比较小， $\varepsilon_k = z_k - y_k$是否也比较小?

$$z_{k+1} = z_k + hf(x_k, z_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

两式相减得到扰动方程

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h\varepsilon_k F_k \\ \varepsilon_0 = z_0 - y_0 \end{cases}}$$

其中

$$F_k = \frac{f(x_k, z_k) - f(x_k, y_k)}{z_k - y_k}$$

进而得到

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq (1 + hL)|\varepsilon_k| + \cancel{\|y''\|_\infty h^2} := A|\varepsilon_k| + \cancel{B}$$
$$\cancel{\leq A(A|\varepsilon_{k-1}| + B)} + B$$
$$= A^{k+1} * \varepsilon_0 + \cancel{\frac{A^{k+1} - 1}{A - 1}} B \leq e^{(b-a)L}\varepsilon_0$$

Definition 3

Euler格式

$$y_{k+1} = y_k + h * f\Big(x_k, y_k\Big)$$

的LTE

$$T_{k+1} = y(x_{k+1}) - \Big[y(x_k) + h * f\Big(x_k, y(x_k)\Big)\Big]$$

这是教材定义：（解释）why Local？Why error？

Definition 4

Euler格式(规范化 normalized)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f\Big(x_k, y_k\Big)$$

的Normalized - LTE

$$\tau_{k+1} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - f\Big(x_k, y(x_k)\Big)$$

两种定义方式仅仅是定义或者记号，不影响数值计算和误差估计！ 后者与PDE的LTE定义一致！！

教材上的定义方式

$$T_{k+1} = y(x_{k+1}) - \left[y(x_k) + h * f\left(x_k, y(x_k)\right)\right]$$

利用Taylor展开

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= y\left(x_k + h\right) - \left[y\left(x_k\right) + h \cdot y'\left(x_k\right)\right] \\ &= y\left(x_k\right) + h \cdot y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''\left(\xi_k\right) - \left[y\left(x_k\right) + h \cdot y'\left(x_k\right)\right] \\ &= \frac{h^2}{2} y''\left(\xi_k\right) \end{aligned}$$

教材上

若数值格式的局部截断误差满足

$$T = \boldsymbol{O}(h^{p+1})$$

则称之为p阶格式

如果上述LET采用规范化的定义方式，则

$$\tau = \boldsymbol{O}(h^p) \rightarrow \text{p阶精度！}$$

相容性:

$$\tau \rightarrow y^{'} - f(x, y) \quad \text{as} \quad h \rightarrow 0$$

Contents

教材例子发现：Euler方法计算出了错误结果！

Example 5

应用Euler方法计算

$$y' = -100y,\ y(0) = 1$$

精确解为$y(x) = e^{-100x}$ 取步长h = 0.025, 则Euler格式

$$y^{j+1} = -1.5 * y^j$$

得到

$$y^j = (-1.5)^j$$

why? 相容、收敛、lax 稳定, 条件都满足，为何算不好?

如何解决:

1. 加细步长h , 若不行再加细
2. 换方法

在区间$[x_j, x_{j+1}]$上积分得到:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y'(x)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx$$

左端可以Newton-Leibniz 写出，右端采用数值积分公式

$$y(x_{j+1}) - y(x_j) = \frac{h}{2}\Big[f(x_j, y(x_j)) + f(x_{j+1}, y(x_{j+1}))\Big] + \frac{h^3}{12}y''(\xi_j)$$

丢掉小量项得梯形方法:

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\Big[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\Big]}$$

Newton 法、割线法、~~二分法~~ 都可以用于计算。更为常用的简单迭代算法如下:

$$\begin{cases} y_{j+1}^{(0)} = y_j \quad \text{OR} \quad y_j + hf(x_j, y_j) \\ y_{j+1}^{(k+1)} = y_j + \frac{h}{2}\Big[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(k)})\Big], \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Matlab 演示精度:

在区间$[x_j, x_{j+1}]$上积分得到：

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y^{'}(x)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx$$

左端可以Newton-Leibniz 写出，右端采用右矩形公式

$$y(x_{j+1}) - y(x_j) = h * f(x_{j+1}, y(x_{j+1})) + \frac{h^2}{2} y^{''}(\xi_j)$$

丢掉小量项得 backward Euler method

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + h * f(x_{j+1}, y_{j+1})}$$

Newton 法、割线法、或者简单迭代算法均可用于求解上述非线性方程组

$$\begin{cases} y_{j+1}^{(0)} = y_j \\ y_{j+1}^{(k+1)} = y_j + h * f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Matlab 演示精度

1. Forward Euler $y_{j+1} = y_j + h * f(x_j, y_j)$
2. Backward Euler $y_{j+1} = y_j + h * f(x_{j+1}, y_{j+1})$
3. Trapezoid $y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} * \Big(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\Big)$

Table: 三个方法对比

方法	是否要解方程	计算效果(直观)
向前Euler	否(显格式)	一般
向后Euler	是(隐格式)	一般
梯形方法	是(隐格式)	好

对比之后，取其精华, 得到

改进的Euler公式

$$\begin{cases} y_{pred} = y_j + h * f(x_j, y_j) \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{pred})\right] \end{cases}$$

改进的Euler公式

$$\begin{cases} y_{pred} = y_j + h * f(x_j, y_j) \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{pred})\right] \end{cases}$$

改进的Euler也是预测-校正，也是2阶RK；编程时按照如下方式进行

$$\begin{cases} K_1 = f(x_j, y_j) \\ K_2 = f(x_{j+1}, y_j + h * K_1) \\ y_{j+1} = y_j + h\dfrac{K_1 + K_2}{2} \end{cases}$$

由微分中值定理

$$y_{j+1} = y_j + h * y^{'}(\xi_j)$$

观察并思考

上述算法中的K_1，K_2 是什么的近似?

多找几个平均值是否效果会更好?

$$\begin{cases} K_1 = f\left(x_k, y_k\right) \\ K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_2\right) \\ K_4 = f\left(x_k + h, y_k + h K_3\right) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \end{cases}$$

检验计算效果： Matlab： Euler_back.m

Table: 5种方法对比

方法	是否要解方程	计算效果(直观)
向前Euler	否(显格式)	一般
向后Euler	是(隐格式)	一般
梯形方法	是(隐格式)	良好
改进Euler方法	否(显格式)	良好
RK4方法	否(显格式)	优秀

Table: 5种方法对比

方法	是否要解方程	计算效果(直观)
向前Euler	否(显格式)	一般
向后Euler	是(隐格式)	一般
梯形方法	是(隐格式)	良好
改进Euler方法	否(显格式)	良好
RK4方法	否(显格式)	优秀

五种方法的共同点：单步法！ WHY?

$$y_{j+1} = y_j + h * \boxed{\varphi(y_j, y_{j+1}, x_j, h)}$$

1. 读者自己写出5种方法对应的φ, 并给出前四种方法的LTE(借助于Taylor展开)
2. LTE(教材定义)

$$T_j = y(x_{j+1}) - \left[y(x_j) + h * \varphi\Big(y(x_j),\ y(x_{j+1}),\ x_j,\ h \Big) \right]$$

Table: 5种方法对比

方法	是否要解方程	计算效果(直观)
向前Euler	否(显格式)	一般
向后Euler	是(隐格式)	一般
梯形方法	是(隐格式)	良好
改进Euler方法	否(显格式)	良好
RK4方法	否(显格式)	优秀

五种方法的共同点：单步法！ WHY?

$$y_{j+1} = y_j + h * \boxed{\varphi(y_j, y_{j+1}, x_j, h)}$$

利用前文推导出的局部截断误差，得到误差方程，通过分析误差方程得到误差估计； 证明过程与Euler方法的误差分析一样，只会用到φ满足lipschitz条件

考虑针对梯形方法演示一遍

梯形公式:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\Big)$$

的LTE:

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= y(x_{k+1}) - \left\{ y(x_k) + \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\Big] \right\} \\
&= \left[\cancel{y} + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \mathcal{O}(h^3)\right]_{x_k} - \left\{ \cancel{y} + \frac{h}{2}\Big[y'(x_k) + y'(x_{k+1})\Big] \right\} \\
&= \frac{h}{2}\Big[y'(x_k) + hy''(x_k) - y'(x_{k+1})\Big] + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}$$

记

$$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N,$$

得到梯形方法的误差方程

$$\boxed{\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{h}{2}\Big(H_1 * \varepsilon_k + H_2 * \varepsilon_{k+1}\Big) + T_{k+1}}$$

其中

$$H_1 = \frac{f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)}{y(x_k) - y_k}, \quad H_2 = \frac{f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_{k+1}, y_{k+1})}{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{h}{2}\Big(H_1 * \varepsilon_k + H_2 * \varepsilon_{k+1}\Big) + T_{k+1}}$$

$$|\varepsilon_{k+1}| \le |\varepsilon_k| + \frac{hL}{2}\Big(|\varepsilon_k| + |\varepsilon_{k+1}|\Big) + ch^3$$

$$\text{i.e.,} \qquad (1 - \frac{hL}{2})|\varepsilon_{k+1}| \le (1 + \frac{hL}{2})|\varepsilon_k| + ch^3$$

$$|\varepsilon_{k+1}| \le \underline{(1 + \frac{3hL}{2})}|\varepsilon_k| + \underline{\underline{\frac{3}{2}ch^3}}, \quad \text{when} \quad hL \le 1/6$$

得到如下形式

$$|\varepsilon_{k+1}| \le \underline{A}|\varepsilon_k| + \underline{B}$$

借助于Gronwall不等式或者直接递推，可得

梯形方法误差估计: $\boxed{|\varepsilon_{k+1}| \le ch^2}$, $\quad 0 \le k \le N-1.$

2阶收敛！！

学习目标:

Table: 5种方法对比

方法	编程实现	LTE推导	误差估计(收敛性)	零(Lax)稳定性
向前Euler	要求	要求（已给出）	要求（已给出）	要求（已给出）
向后Euler	要求	要求	要求	要求
梯形方法	要求	要求（已给出）	要求（已给出）	要求（已给出）
改进Euler方法	要求	要求	要求	要求
RK4方法	要求	-	-	-

- 完成以上步骤，基本掌握了一阶ODE初值问题的单步法;
- 但是、实际计算问题时仍然可能遇到问题或者困难：回忆Euler方法出错的例子！

Contents

Definition 6

对固定步长h和复数λ, 应用数值方法

$$y_{j+1} = y_j + h * \varphi(y_j, y_{j+1}, h)$$

到模型问题:

$$y^{'} = \lambda y$$

求解，若得到的数值解y_j一致有界，即

$$|y^j| < const, j = 1, 2, ...$$

则称该数值方法对一组数$h\&\lambda$ 是绝对稳定的(A-stable); 满足格式绝对稳定条件的$h\lambda$所在复平面的一个区域称为：稳定性区域.

两点解释:

- 为何只考虑线性问题?
- λ为何可以取复数?

针对非线性问题可采用局部线性化方法：

$$\begin{aligned} y' =& f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})\cdot(y-\bar{y}) + \dots \\ \approx& Ay + Bx + C \end{aligned}$$

记(待定系数法)：

$$z = y + Dx + E = y + \frac{B}{A}x + \frac{C + B/A}{A}$$

得到模型问题形式：

$$z' = Az$$

线性问题够用！

若考查的是非线性方程组

$$\begin{cases} y_1^{'} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2^{'} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \cdots \\ y_n^{'} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad Y^{'} = F(Y)$$

同样可以考虑线性化, 得到如下形式的线性方程组

$$\frac{d}{dx}Y = AY, \quad \text{其中} \quad Y \text{ 为向量值函数} \quad A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

设矩阵A 可对角化为 $A = S\Lambda S^{-1}$, 即

$$\frac{d}{dx}(S^{-1}Y) = \Lambda(S^{-1}Y), \quad \frac{d}{dx}Z = \Lambda Z$$

实矩阵的特征值可能为复数(complex number), 因此需要考虑复数情况。

将Euler方法应用到模型问题得到:

$$y_{j+1} = y_j + h\lambda y_j = (1 + h\lambda)y_j = (1 + \mu)^{j+1} y_0$$

若要绝对问题得到等价条件:

$$|1 + h\lambda| = |1 + \mu| \le 1$$

该条件对应图像：$\mu = h\lambda$ 为变量的复平面单位圆。若$\lambda < 0$ 取实数，则

$$-1 < 1 + h\lambda < 1, \quad h \le 2/\lambda$$

练习：后退Euler、如何刻画?

检验后，发现向前Euler对步长h有要求，后退Euler对步长无要求（精度需求除外）

关于改进的Euler方法，梯形方法，要求选课同学自行推导相应的绝对稳定区间！并推导两种方法对应的步长h所要满足的条件。其中模型问题中$\boxed{0 > \lambda \in \boldsymbol{R}}$

考虑如下线性微分方程组:

$$\begin{cases} y_1' = -10y_2 \\ y_2' = 100y_1 - 1001y_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 100 & -1001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dx}Y = A * Y$$

初值取

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \ \text{OR} \quad Y(0) = [1; 1]$$

计算得到矩阵的特征对$AS = S\Lambda$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 100 & -1001 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix}$$

记 $Z(x) = S^{-1} * Y(x)$ 得到

$$\frac{d}{dx}Y = S\Lambda S^{-1}Y \rightarrow \frac{d}{dx}Z = \Lambda Z \ \rightarrow Z(x) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{-1000x} \end{bmatrix}$$

根据初值条件 $Z(0) = S^{-1} * Y(0)$确定常数$c_1 = 11/111, \ c_2 = 1/111$
进而得到精确解:

$$Y(x) = S * Z(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{111}e^{-x} + \frac{1}{111}e^{-1000x} \\ \frac{11}{111}e^{-x} + \frac{100}{111}e^{-1000x} \end{bmatrix}$$

考虑如下线性微分方程组：

$$\begin{cases} y_1' = -10y_2 \\ y_2' = 100y_1 - 1001y_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 100 & -1001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \to \frac{d}{dx}Y = A * Y$$

初值取

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \text{ OR } \quad Y(0) = [1; 1]$$

精确解：

$$Y(x) = S * Z(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{111}e^{-x} + \frac{1}{111}e^{-1000x} \\ \frac{11}{111}e^{-x} + \frac{100}{111}e^{-1000x} \end{bmatrix}$$

思考：

对$x \in [0, 1]$，应用Euler方法或者改进的Euler方法求解上述问题， 是否需要对步长进行限制？ 效率如何？

注：所有显格式均不是A稳定的，不适合求解刚性问题。 刚性比越大，方程越病态，最好采用A-stable方法，例如后退Euler，梯形方法。

小结

方法: 单步法

- Euler、改进Euler、Runge-Kutta
- 后退Euler、梯形方法

理论分析:

- 截断误差（相容性）：不同教材定义方式可能不同
- 收敛性：误差估计 h^p p 阶收敛
- 稳定性：Lax稳定（零稳定）； A稳定（绝对稳定）、稳定性区域（区间）

单步法均可用于求解非线性微分方程组；要注意刚性（stiff）问题、刚性比（多尺度）