数值分析

第三章：函数逼近

张亚楠[1]

苏州大学数学科学学院

March 6, 2020

[1]Email: ynzhang@suda.edu.cn

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2}$, 如何确定一条可信的 直线?

已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^2$, 如何确定一条可信的 直线?

已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

1. 与插值有何区别?

问题提出

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^2$, 如何确定一条可信的 直线?

已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

1. 与插值有何区别?
2. 如何定义误差最小? 函数间距离（$\|\cdot\|$）

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2}$, 如何确定一条可信的 直线?

已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

1. 与插值有何区别?
2. 如何定义误差最小? 函数间距离（$\|\cdot\|$）
3. 定义距离之后，问题变为：给定集合A中的一个点f， 在A的子集B中找一个点p, s.t. $\|f-p\|$ 取最小

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2}$, 如何确定一条可信的 直线?

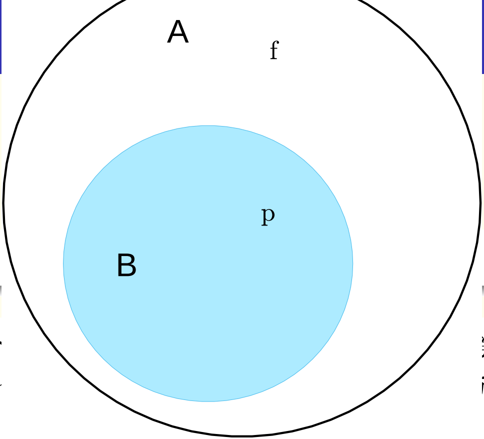
已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

1. 与插值有何区别?
2. 如何定义误差最小? 函数间距离（$\|\cdot\|$）
3. 定义距离之后，问题变为：给定集合A中的一个点f， 在A的子集B中找一个点p, s.t. $\|f-p\|$ 取最小
4. 若存在，如何给出?

已知不共线三点$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2}$, 如何确定一条可信的 直线?

已知f(x)属于某一个函数类A, 例如$f(x) \in C[a,b]$， 出于某种考虑，希望找到简单函数 p(x) 属于集合 B(例如$p(x)$ 是n次多项式)； 要求 p(x) 与 f(x) 在某种意义下误差最小?

1. 与插值有何区别?
2. 如何定义误差最小? 函数间距离（$\|\cdot\|$）
3. 定义距离之后，问题变为：给定集合A中的一个点f， 在A的子集B中找一个点p, s.t. $\|f-p\|$ 取最小
4. 若存在，如何给出?



已知不共线三点{f

已知f(x)属于某一个
虑，希望找到简
单函数 p(x) 属于集
f(x) 在某种意义
下误差最小？

1. 与插值有何区别？
2. 如何定义误差最小？函数间距离（$\|\cdot\|$）
3. 定义距离之后，问题变为：给定集合A中的一个点f，在A的子集B中找一个点p, s.t. $\|f-p\|$ 取最小
4. 若存在，如何给出？

1. $C_{[a,b]}$ 连续函数空间

常见函数空间

1. $C_{[a,b]}$ 连续函数空间
2. $C_{[a,b]}^{p}$ 具有p阶连续导数的函数空间

常见函数空间

1. $C_{[a,b]}$ 连续函数空间
2. $C^p_{[a,b]}$ 具有p阶连续导数的函数空间
3. H^n 次数不超过n的多项式空间

1. $C_{[a,b]}$ 连续函数空间
2. $C^p_{[a,b]}$ 具有p阶连续导数的函数空间
3. H^n 次数不超过n的多项式空间
4. $\mathbb{R}^n$ n维向量空间

Example 1

设 次数不超过n次的多项式 $p(x) \in H^n$, 则

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

它由坐标$(a_0, a_1, ..., a_n)$唯一确定；$\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ 线性无关，是H^n的一组基。

Theorem 2

设$f(x) \in \mathrm{C}[a, b]$, 则对任何 ε，总存在一个代数多项式 $p(x)$，使得

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

回顾几个概念

线性赋范空间、内积空间；范数、内积；三角不等式；Cauchy-Schwarz不等式；

思考：距离和内积在逼近论里有何用处?

范数的定义: 正定性、齐次性、三角形不等式

连续函数空间$C[a,b]$常用范数

1) 连续(无穷)范数： $\|f\|_c = \|f\|_\infty := \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$

2) L_p范数： $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$

有限维空间$\mathbb{R}^n$常用范数; 若 $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}, \ 1 \leq p \leq \infty$$

A Hilbert space $\mathcal{H}$ is a real or complex inner product space that is also a complete metric space with respect to the distance function induced by the inner product.

- The inner product of a pair of elements is equal to the complex conjugate of the inner product of the swapped elements:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- The inner product is linear in its first argument. For all complex numbers a and b,

$$\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a\langle x_1, y \rangle + b\langle x_2, y \rangle$$

- The inner product of an element with itself is positive definite:

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

where the case of equality holds precisely when x = 0.

内积空间又是Banach空间(完备的距离空间)，即为Hilbert空间。

思考：H空间比起线性赋范空间有何优势？

Hilbert空间即可定义距离（长度）

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

又可定义角度

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

有了距离，可以定义最佳逼近（距离最小）；有了角度，可以定义垂直（正交），直观上可以更好利用平面几何知识理解投影距离最小。

无穷范数：$\|f\|_c = \|f\|_\infty := \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

Definition 3

带权内积的权函数：设非负函数$\rho(x)$满足：

1. $\int_a^b x^k \rho(x) dx$ 存在且为有限值.
2. 对非负连续函数 $g(x)$, 如果 $\int_a^b g(x)\rho(x)dx = 0$, 则 $g(x) \equiv 0$

连续函数的带权 L^2 内积及其范数

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

给定$w_i > 0, x, y \in \mathbb{R}^n$，定义

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

记$P_n[a,b]$, 或者$H_n[a,b]$是次数不超过n的多项式空间

Definition 4

给定$f \in C[a,b]$, 若$p^\star(x) \in H_n$, 使得

$$\|f - p^\star\| = \min_{p \in H_n} \|f - p\|$$

则称$p^\star(x)$是f(x)的最佳逼近多项式.

上述定义中的范数取无穷范数时，称为最佳一致逼近；取2范数时，称为最佳平方逼近；

若 f(x)给定的是离散点值 $\{f(x_j)\}_{j=0}^m$, 则

$$\|f - p^\star\|^2 = \min \sum_j |f(x_j) - p(x_j)|^2$$

此时也称为最小二乘拟合.

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

Definition 5

若$f(x),\ g(x)\in \mathrm{C}[a,b]$,$\rho(x)$是[a,b]上的权函数且满足

$$(f,\ g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$$

则称f,g在[a,b]上带权ρ 正交. 若有函数族

$$\phi_0,\ \phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots$$

满足

$$(\phi_j,\phi_k)=\int_a^b \rho(x)\phi_j\phi_k dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$$

则称$\phi_k(x)$是[a,b] 上带权$\rho(x)$ 的正交函数族；若$A_k\equiv 1$, 可称为标准正交函数族

Example 6

在$[-\pi,\pi]$上的三角函数族:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

满足

$$(\sin kx, \sin kx) = (\cos kx, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$$

$$(\sin kx, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos kx dx = 0$$

$$(\sin kx, \sin jx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(j+k)x - \cos(k-j)x] dx = 0$$

Definition 7

设$\phi_n(x)$是[a,b]上的首项系数a_n非零的n次多项式，$\rho(x)$ 是权函数. 如果多项式序列$\{\phi_n(x)\}_0^\infty$满足正交函数族定义，则 称多项式序列 $\{\phi_n(x)\}_0^\infty$ 在 [a,b]上带权ρ正交；称$\phi_n(x)$ 为 [a,b]上带权ρ的 n 次正交 多项式

Definition 7

设$\phi_n(x)$是[a,b]上的首项系数a_n非零的n次多项式，$\rho(x)$ 是权函数. 如果多项式序列$\{\phi_n(x)\}_0^\infty$满足正交函数族定义，则 称多项式序列 $\{\phi_n(x)\}_0^\infty$ 在 [a,b]上带权ρ正交；称$\phi_n(x)$ 为 [a,b]上带权ρ的 n 次正交 多项式

Example 8

给定区间[a,b]上的一族线性无关的幂函数$1, x, x^2, ..., x^n, ...$,可通过 逐个正交化方法构造正交多项式序列, 表达式如下:

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n,\ \phi_j(x))}{(\phi_j(x),\ \phi_j(x))}\phi_j(x)$$

Example 7

给定区间[a,b]上的一族线性无关的幂函数$1, x, x^2, ..., x^n, ...$,可通过 逐个正交化方法构造正交多项式序列, 表达式如下:

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n,\ \phi_j(x))}{(\phi_j(x),\ \phi_j(x))}\phi_j(x)$$

说明: 可逐一验证正交性，归纳法证明. 假设

$$\phi_0, \phi_1, ..., \phi_{n-1}$$

是正交序列，现说明ϕ_n与任意之一正交。实际上，$\forall 0 \le k \le n-1$,

$$(\phi_n(x), \phi_k(x)) = (x^n, \phi_k(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n,\ \phi_j(x))}{(\phi_j(x),\ \phi_j(x))}(\phi_j(x), \phi_k(x)) = 0$$

$\{\phi_j\}_{j=0}^{n}$线性无关，事实上, 若:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x) = 0$$

对上式作用内积ϕ_k

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \Big(\phi_j(x),\ \phi_k(x)\Big) = 0, \quad k = 0, 1, 2..., n$$

得到$c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n$; 线性无关得证。

Theorem 8

1. 对任何次数不超过 n 的多项式$P(x) \in H_n$均可表示为$\phi_j(x)$的线性组合

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)$$

2. $\phi_n(x)$ 与任何次数不超过(n-1)的多项式正交

Theorem 9

n次正交多项式$\phi_n(x)$ 在(a,b)上有 n个不同的零点

Proof: 假定所以零点全是偶数重的，则$\phi_n(x)$ 符号不变，与

$$(\phi_n,\phi_0)=\int\phi_n(x)\rho(x)dx=0$$

矛盾。因此零点不可能全是 偶数重的，有奇有偶。挑出奇数重零点$x_j(j=0,1,2,...,l)$, 设

$$a<x_0<x_1<\cdots<x_l<b$$

则$\phi_n(x)$ 在 x_j处变号，令

$$q(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_l)$$

则得$\phi_n(x)p(x)\geq 0$. 进而

$$(\phi_n,\ q)=\int_a^b\rho(x)\phi_n(x)q(x)dx\neq 0$$

若$l<n$, 与正交性矛盾；则l = n, 得证.

正交多项式三要素

1. 定义区间$[a, b]$
2. 权函数$\rho(x)$
3. 表达式（递推式对编程和理论分析都重要）

当区间为[-1,1],权函数 $\rho \equiv 1$, 由

$$1, x, ..., x^n, ...$$

正交化得到的多项式称为Legendre多项式，记作 $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x)$...

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \ n \geq 1 \end{cases}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
6	$\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right)$
10	$\frac{1}{256}\left(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63\right)$

Theorem 10

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Theorem 11

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

正交多项式有许多共同的性质，比如n个互异零点，有递推式等等。 常用的有限区间内的正交多项式有 Legendre 多项式与 Chebyshev多项式。其中 在区间[-1,1]上权函数取常数1， 由$1, x, x^2, \ldots$ 正交化得到的即是Legendre多项式。

由于可以快速计算(FFT)，显式表达式等特点，最最常用的是Chebyshev多项式

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \qquad \begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k = 1, 2, \ldots \\ T_0 = 1, \quad T_1 = x \end{cases}$$

当权函数选$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,区间为[-1,1]时，由序列 $\{1,x,x^2,...,x^n\}$正交化多项式为Chebyshev多项式，可表示为

$$T_n(x)=\cos(n\arcsin x),\quad |x|\le 1$$

若令$x=\cos\theta$, $T_n(x)=T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta),\ 0\le\theta\le\pi$

递推式

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x);\quad T_0=1,\quad T_1=x$$

观察递推式发现：$T_{2k}(x)$只有偶次幂项，$T_{2k-1}(x)$只有奇次项。

观察

$$T_n(x) = \cos\Big(n\arccos(x)\Big), \quad -1 \le x \le 1$$

首先说明上式是多项式。记

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \qquad \cos\theta = x, \quad x \in [-1, 1]$$

利用三角恒等式

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

即得

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

结合$T_0 = 1$, $T_1 = x$, 可得循环递推多项式。说明上式确是多项式。

正交性

利用余弦函数的正交性

$$\left(\cos mx,\ \cos nx\right) = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

可得$T_n(x)$ 的正交性 （换元法）

$$(T_n,\ T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi/2, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases}$$

由递推式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x); \quad T_0 = 1, \quad T_1 = x$$

可知：$T_n(x)$的首项系数为2^{n-1}

前文已知正交多项式必有n个互异零点，由Chebyshev多项式的余弦函数表达式可知其零点表达式为

$$x_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad 1 \le j \le n, \quad T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$$

注意到$T_n(x) = \cos(*)$, 则

$$|T_n(x)| = |2^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)| \le 1, \quad \Rightarrow |\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)| \le 2^{1-n}$$

上式说明首项系数为1的Chebyshev最大值极其小。

Theorem 12

设 $\tilde{T}_n(x)$ 是首项系数为一的Chebyshev多项式(monic poly),

$$\tilde{T}_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j), \quad x_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad 1 \le j \le n,$$

则

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)| \le \max_{-1\le x\le 1}|p_n(x)|, \quad \forall p_n(x) \in H_n$$

且

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

最佳一致逼近 转化为(≈) Chebyshev零点插值

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

如果$f(x) \in C[-1,1]$, 按下式展开

$$f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k T_k(x) \quad \text{其中} \quad C_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad \begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k = 1, 2, \ldots \\ T_0 = 1, \quad T_1 = x \end{cases}$$

remark

系数C_k, 可对级数形式取内积得到。准确、快速的计算这么多积分, 难!

回顾Lagrange插值多项式余项表达式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

上式中乘积与节点x_j选取有关系，如何选取使R_n绝对值最小?

由前述结论，在$[-1,1]$上取插值节点为Chebyshev多项式零点

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 2, ..., n$$

则$w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$ 是monic cheby poly, 进而

$$\max_{-1\le x\le 1}|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)| = \frac{1}{2^n}$$

完美！！

Theorem 13

设插值节点$\{x_j\}_{j=0}^n$是Chebyshev poly的零点， 被插值函数 $f(x) \in C^{(n+1)}[-1,1]$,则：

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Chebyshev 零点插值 有效避免Runge现象，p65 例5.

思考： 对于一般区间$[a,b]$, 如何选取Chebyshev 点？

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{a+b}{2}$$

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

问题及解决方案

1. 已知：光滑函数$f(x) \in C_{[a,b]}^{(n+1)}$
2. 目标：最佳逼近多项式
3. 方法：取出[a,b]区间里的（n+1）个Chebyshev零点进行Lagrange插值即可

Tips : 选择区间端点和Chebyshev极值点，也能得到很好的逼近效果；有兴趣的同学可以自己推导相应的插值误差

1. 已知：某给定光滑函数$f(x) \in C_{[a,b]}^{(n+1)}$
2. 目标：与$f(x)$距离最近且形如下式的函数

$$s(x) = a_0 * 1 + a_1 * \sin x + a_2 * \cos x$$

思考

1. 该问题提法是否合理?
2. 如果合理，如何寻找$s(x)$ 或者系数 a_j?

对$f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$, 以及$\mathrm{C}[a,b]$的一个子集(可以是多项式也可以不是)

$$\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

若$s^\star(x) \in \Phi$, s.t.,

$$\|f(x) - s^\star(x)\|_{L2} = \min_{s\in\Phi} \|f(x) - s(x)\|_{L2}$$

或者

$$\|f(x) - s^\star(x)\|^2 = \min_{s\in\Phi} \|f(x) - s(x)\|^2$$

则称$s^\star(x)$ 是 $f(x)$ 在子集 Φ 中的最佳平方逼近函数.

如何求$s^\star(x)$? 目标函数长啥样?

$$s(x) \in \Phi \Rightarrow s(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

给定 搜寻空间Φ的基函数φ_j和给定权函数$\rho(x)$
代入目标函数表达式

$$s(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$$

$$\|f(x) - s^\star(x)\|^2 = \min_{s\in\varphi} \|f(x) - s(x)\|^2$$

问题等价于

$$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) \right]^2 dx$$

求极小值.

$$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right]^2 dx$$

求极小值. 由Fermat 引理

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0, \qquad (*)$$

即

$$\sum_{j=0}^n \big(\varphi_k, \varphi_j\big) a_j = \big(f, \varphi_k\big), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

若φ_j线性无关，则上述线性方程组解存在唯一.

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(\varphi_k,\varphi_j\Big)a_j=\Big(f,\varphi_k\Big),\quad k=0,1,\cdots,n$$

若φ_j线性无关，则上述线性方程组解存在唯一.

Hint: 对任意指标k

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(\varphi_k,\varphi_j\Big)a_j=0\Rightarrow\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j,\varphi_k\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j,a_k\varphi_k\right)=0\Rightarrow\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j,\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k\right)=0$$

进而：$\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j=0$ 又由φ线性无关得到 $a_j=0$

设$s^\star(x) = \sum_j a_j^\star \varphi_j(x)$是上述方程组的解.

现证明

$$\boxed{\forall s(x) \in \Phi \quad \text{it holds} \quad \|f - s^\star\|^2 \le \|f - s\|^2}$$

即

$$\int_a^b \rho(x)\Big(|f - s^\star|^2 - |f - s|^2\Big)dx \le 0$$

$$|f - s^\star|^2 - |f - s|^2 = (2f - s^* - s)(s - s^*)$$

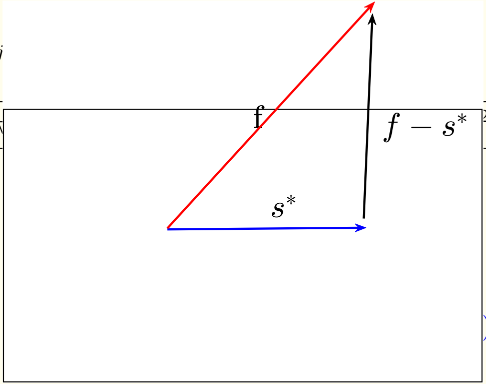
整理后得

$$\int_a^b \rho(x)\Big((s - s^\star)(2f - 2s^\star + s^\star - s)\Big)dx = -\|s - s^\star\|^2$$

其中利用了等式 $\partial I/\partial a_j = (f - s^\star, \varphi_j) \equiv 0$, 得证.

设$s^\star(x) = \sum_j a_j^\star \varphi_j$

现证明



即

整理后得

$$\int_a^b \rho(x)\Big((s - s^\star)(2f - 2s^\star + s^\star - s)\Big)dx = -\|s - s^\star\|^2$$

其中利用了等式 $\partial I/\partial a_j = (f - s^\star, \varphi_j) \equiv 0$, 得证.

Theorem 14

最佳平方逼近误差

$$\|f - s^\star\|^2 = \left(f - s^\star, f - s^\star\right) = \left(f, f - s^\star\right) = \|f\|^2 - \left(f,\ s^\star\right)$$

Hint: 第二个等式参考(*)式

计算步骤

准备（已知）

1. 基函数ϕ_j
2. 权函数和内积定义

求解

1. 写出线性方程组的系数矩阵和右端项
2. 求解得出目标函数坐标，也即是基函数对应系数a_j

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_Q) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

取定一组多项式基函数$\{\varphi_j = x^j,\ 0 \le j \le n\}$, 权函数$\rho(x) = 1$ 可通过上述过程解得最佳平方逼近多项式. 只需计算相应的系数矩阵和右端项即可.

p69 例6. 设 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 求[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式

$$s(x) = a_0 + a_1 x$$

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,f) \\ (x,f) \end{bmatrix}, \quad (f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Tips: 当n较大时，例题中选择的基函数并不实用(Hilbert矩阵接近奇异, 条件数$\mathcal{O}((1+\sqrt{2})^{4n}/\sqrt{n})$)，实际使用正交多项式作为基函数，但是基本过程一样.

正交多项式好在哪里?

1. 已知：某给定光滑函数$f(x) \in C^{(n+1)}_{[0,2\pi]}$
2. 目标：与$f(x)$距离最近且形如下式的函数

$$s(x) = a_0 * 1 + a_1 * \sin x + a_2 * \cos x$$

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,\sin x) & (1,\cos x) \\ (\sin x,1) & (\sin x,\sin x) & (\sin x,\cos x) \\ (\cos x,1) & (\cos x,\sin x) & (\cos x,\cos x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,1) \\ (f,\sin x) \\ (f,\cos x) \end{bmatrix}$$

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

问题： 已知离散点处的函数值(与连续函数区别)

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, ..., m$$

目标： 在集合

$$\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

中找一个函数$s^\star(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, s.t.,

$$\|s^\star - f\| = \min_{s\in\Phi} \|s - f\|$$

或者

$$\sum_{j=0}^{m} |s^\star(x_j) - y_j|^2 = \min_{s\in\Phi} \sum_{j=0}^{m} |s(x_j) - y_j|^2$$

问题： 已知离散点处的函数值(与连续函数区别)

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \quad m$$

目标： 在集合

中找一个函数$s^\star(x)$

或者

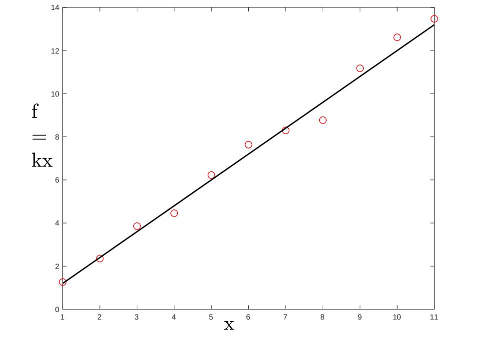


Figure: 弹簧的弹性系数测量

若引入权函数$w(x)$, 更一般的问题提法: 已知离散点处的函数值

$$f(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, ..., m$$

寻求

$$s(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

满足

$$\min_{s \in \Phi} \sum_{j=0}^{m} w(x_j) |s(x_j) - y_j|^2$$

带入s(x)表达式,

$$I(a_0, ..., a_n) = \sum_{j=0}^{m} \underline{w_j} \left| \sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \varphi_k(x_j) - y_j \right|^2$$

问题同样转化为多元函数求极值 的问题

Hint: 类似于连续问题的推导

$$I(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{j=0}^{m} \underline{w_j} \left| \sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \varphi_k(x_j) - y_j \right|^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_l} = 2 \sum_{j=0}^{m} \underline{w_j} \left(\sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \varphi_k(x_j) - y_j \right) \varphi_l(x_j) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \underline{\underline{\left(\sum_{j=0}^{m} w_j \varphi_k(x_j) \varphi_l(x_j) \right)}} = \underline{\underline{\left(\sum_{j=0}^{m} w_j y_j \varphi_l(x_j) \right)}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \underline{\underline{\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle}} = \underline{\underline{\langle y, \varphi_l \rangle}}, \quad l = 0, 1, \ldots, n$$

与连续函数的最佳平方逼近比较

唯一区别：内积定义方式不同！

$$\sum_{k=0}^{n} \boxed{a_k} \underline{\underline{\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle}} = \underline{\underline{\langle y, \varphi_l \rangle}}, \quad l = 0, 1, ..., n$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_Q \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

Tips 一般情况下数据点个数m 远大于 搜寻空间维数n, 上式放心用！！

例：已知一组实验数据(权函数$w = 1$)

Table: 实验数据

x_i	1	2	3	4	5
f_j	4	4.5	6	8	8.5

根据表中数据给出线性拟合函数$s(x) = a_0 + a_1 x$

参考李庆扬教材 p75. 例9, 例10

$$\begin{cases} a_0 + a_1 * x_0 & = f_0 \\ a_0 + a_1 * x_1 & = f_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 * x_m & = f_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}} A \vec{a} = A^{\mathrm{T}} \vec{f}$$

- 根据逼近函数空间基函数写出函数表达式

$$s(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l \varphi_l(x)$$

- 根据m+1组离散数据 $s(x_j) = y_j$写出对应线性方程组 is $A\vec{a} = \vec{f}$

$$a_0\varphi_0(x_j) + a_1\varphi_1(x_j) + \ldots + a_n\varphi_n(x_j) = y_j, \ 0 \le j \le m$$

一般情况下$(m > n)$, 方程超定咋办? — 最小二乘解!!

思考

每个离散点的权重不同，怎么体现?

- 假设目标函数完全符合所有待拟合数据，

$$s(x_j)=y_j \Leftrightarrow a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+\ldots+a_n\varphi_n(x_j)=y_j,\ 0\le j\le m$$

- 根据权函数改写等价方程组

$$w_j\Big[a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+\ldots+a_n\varphi_n(x_j)\Big]=w_j*y_j,\ 0\le j\le m$$

- 上述系数矩阵A的阶是$(m+1)\times(n+1)$；一般情况下$(m>n)$ 记权函数 $W=\mathrm{Diag}(w_0,w_1,\cdots,w_m)$时，最小二乘拟合等价于

$$\underline{A^{\mathrm{T}}*\underline{W*\underline{Aa}}}=A^{\mathrm{T}}*W*b$$

思考：

对上述线性方程组的处理是否等价于离散的最佳平方逼近?

给定$Ax = b$, 其中A是瘦长型矩阵($A \in R^{m\times n}$ & $m > n$)，如何“准确”的求解?

A-(1) Ax = b 希望找到一组坐标$(x_1, x_2, ..., x_n)$，使得$b = Ax \in C(A) \subset \mathbb{R}^m$

$$b = x_1 * A(:,1) + x_2 * A(:,2) + ... + x_n * A(:,n)$$

A-(2) 由于m>n, A的列空间$C(A) \neq R^m$, 进而$b \notin C(A)$. 问题无数学解。如何在列空间$C(A)$ 中找一个点，使之与b距离最近呢? 投影！！

A-(3) b 在 $C(A)$ 中的投影 $P * b = A(A^T * A)^{-1}A^T * b$

A-(4) $Ax = Pb = A(A^T * A)^{-1}A^T * b \rightarrow$

$$x = (A^T * A)^{-1}A^T * b \rightarrow (A^T * A)x = A^T b$$

Tips：可参阅线性代数教材，Gilbert Strang 录制线性代数视频(推荐！！)

Contents

1. 函数逼近的基本概念

2. 正交多项式

3. 最佳一致逼近

4. 最佳平方逼近

5. 曲线最小二乘拟合

6. 最佳平方三角逼近(三角插值)

问题： 如何逼近周期函数？ 正交多项式 or 分段低次插值 是否可行？

It works but is not efficient!

正解： 三角多项式（一类常用的，简单的正交函数）

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin lx, \cos lx, \cdots\}$$

函数的Fourier展开

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big)$$

利用三角函数正交性，依次将$\sin lx$，$\cos lx$于上式作内积，可得系数表达式

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\Big(f, 1\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_l = \frac{1}{\pi}\Big(f, \cos lx\Big), \quad b_l = \frac{1}{\pi}\Big(f, \sin lx\Big),$$

前文已说明（可以验证）

$$s(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

是在区间 $(0, 2\pi)$（一个周期）和空间

$$\Phi = span\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin Nx, \cos Nx, \}$$

内函数$f(x)$的最佳平方逼近函数。系数a_k, b_k定义如上。

remark

上述逼近方式计算积分形式的系数 a_k, b_k？ 由Euler-Maclaurin公式， 复合梯形公式可以对光滑周期函数较精确求解。选取节点数大于等于$2N+1$利用梯形公式即可。 实际应用中，数值积分 节点的选择和逼近 系数的选择，在数目上是匹配的。因此常用的是三角插值。

Example 15

记
$$S(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\sin kx+b_k\cos kx$$
对$[0,2\pi)$ 做$2N+1$等分, 记节点$x_j=jh,\ h=\frac{2\pi}{2N+1}$, 令$f(x)$与$S(x)$在节点处相等，即
$$S(x_j)=f(x_j),\quad 0\leq j\leq 2N$$
证明：满足上式插值条件的解a_k,b_k存在唯一。（读者自证！）

提示：列方程并验证系数矩阵的列向量彼此正交。

remark

三角插值的实际效果 等于 最佳平方三角逼近！！

为了书写简洁，引入Euler formula，首先给出指数函数的幂级数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

令$x = \sqrt{-1} * \theta = i * \theta$ 带入上式，分离实部和虚部 得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ix}} = \cos x + i \sin x$$

进而sine和cosine函数可以由指数形式表示

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

以及"网传"最美数学公式

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

引入复数和指数函数，可得周期函数Fourier展开

$$f(x) = \sum_{|k|<\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}; \quad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}dx$$

Example 16

验证e^{ikx}的(离散)正交性:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ilx} dx = 2\pi * \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

将区间$[0, L]$，N等分，记$x_j = \frac{jL}{N}$, 考察离散的网格函数

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{ikx_j*2\pi/L} \cdot e^{-ilx_j 2\pi/L} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikj*2\pi/N} \cdot e^{-ilj2\pi/N} = \sum_{j=0}^{N} \boxed{w}^j = N * \delta_{kl}$$

复值函数三角插值

给定离散数据，可类似于多项式插值提出问题

$$span\left\{1,\ \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}\ \dots,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}nx}\right\} = span\left\{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx\right\}$$

考虑$[0, L]$上周期函数$f(x)$, 已知等距节点处的函数值

$$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2n}, \quad x_j = jh, \quad h = L/(2n+1).$$

能否以

$$\{1,\ \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x\frac{2\pi}{L}}\ \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2x\frac{2\pi}{L}},\ \dots,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}nx\frac{2\pi}{L}}\}$$

为插值基函数，确定如下形式的逼近函数

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \exp(i * kx\frac{2\pi}{L})} \quad \text{s.t.} \quad P_n(x_j) = f(x_j),\ 0 \le j \le 2n$$

系数 $\widehat{f}_k$ 是否唯一可解，如何求解? 观察系数矩阵、西矩阵?

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \exp(i * kx\frac{2\pi}{L})} \quad \text{s.t.} \quad P_n(x_j) = f(x_j),\ 0 \le j \le 2n$$

对$-n \le l \le n$, 两端同时乘以$\exp(-i * lx_j\frac{2\pi}{L})$ 并关于 j 求和

$$\sum_{j=0}^{2n} \exp(-i * lx_j\frac{2\pi}{L}) f(x_j) = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \exp(i * (k-l)x_j\frac{2\pi}{L})$$

代入$x_j = jh$ 交换求和顺序; 验证: 当$k \ne l$时

$$\sum_{j=0}^{2n} \left[\exp\left(i * (k-l) * h\frac{2\pi}{L}\right)\right]^j = 0$$

思考: $k = l$时, 如何? 此时中括号恒等与1, 求和即为$(2n+1)$.

带入得到

$$\sum_{j=0}^{2n} \exp(-i * lx_j \frac{2\pi}{L}) f(x_j) = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \exp(i * (k-l) x_j \frac{2\pi}{L}) = (2n+1) * \widehat{f}_l$$

于是，对$-n \le l \le n$， 得到插值系数

$$\begin{aligned} \widehat{f}_l &= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} \exp(-i * lx_j \frac{2\pi}{L}) f(x_j) \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \exp(-i * lj \frac{2\pi}{2n+1}), \end{aligned}$$

给定区间[0,L]上的周期函数f(x), 三角插值计算步骤如下:

1) 给出网格等分数N = 2n+1, 和网格节点x_j, 计算$f(x_j)$
2) 对$-n \leq l \leq n$, 计算插值系数$\widehat{f_l}$
3) 按表达式

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f_k} \exp(i * kx\frac{2\pi}{L})$$

输出需要计算的x值

对光滑的周期函数$[0,2\pi)$ 利用函数平方逼近的结果:

$$\|e_n\| \approx \sqrt{\int_0^{2\pi} \left[P_n(x) - f(x)\right]^2 dx} = \langle f, f - P_n \rangle$$

上式估计到底多大?

三角插值的误差粗略估计

$$
\begin{aligned}
\langle f, f-P_n\rangle &= \langle f, \sum_{|k|>n} \hat{f}_k e^{ikx}\rangle \\
&= \sum_{|k|>n} \widehat{f}_k \langle f, e^{ikx}\rangle = \sum_{|k|>n} \widehat{f}_k \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx \\
&= \sum_{|k|>n} \widehat{f}_k \frac{1}{(-ik)} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{ikx} dx \\
&= \sum_{|k|>n} \widehat{f}_k \frac{1}{(-ik)^q} \int_0^{2\pi} f^{(q)}(x) e^{ikx} dx \\
&\le \|f\| \cdot |f|_q * \frac{1}{n^q}
\end{aligned}
$$

上式估计用到Parseval, Cauchy不等式. 当f(x)无穷光滑; 三角插值 能达到谱精度。 Tips: 对于周期函数，三角插值效果极好，一般 $n \approx 10$. 若特殊问题 n 较大时，MATLAB有FFT可以调用.

三角插值条件

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f_k} \exp(i * kx\frac{2\pi}{L})} \quad \text{s.t.} \quad P_n(x_j) = f(x_j),\ 0 \le j \le 2n$$

系数矩阵为酉矩阵，正交矩阵！或者

$$\widehat{f_l} = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\exp(-i * lj\frac{2\pi}{2n+1})$$

思考

网格节点数$2n+1$是奇数，奇数选择是不是必须的？进一步思考：如何快速计算系数？

FFT原名DFT(Discrete Fourier Transform), 因为可以快速计算（Fast），通常称为 Fast Fourier Transform，简称FFT。

该算法极其重要！！算法实现技巧性强，但是算法思想简单！

观点重申：简单的才是好的！！

FFT算法核心

如何快速实现矩阵乘向量！！

回顾三角插值的系数$\widehat{f}$计算公式, 可将该线性变换写成矩阵形式

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & e^{\frac{i2\pi}{N}} & e^{\frac{2i2\pi}{N}} & \cdots & e^{\frac{(N-1)i2\pi}{N}} \\ 1 & e^{\frac{2i2\pi}{N}} & e^{\frac{4i2\pi}{N}} & \cdots & e^{\frac{2(N-1)i2\pi}{N}} \\ & & & \ddots & \\ 1 & e^{\frac{(N-1)i2\pi}{N}} & e^{\frac{2(N-1)i2\pi}{N}} & \cdots & e^{\frac{(N-1)(N-1)i2\pi}{N}} \end{bmatrix}$$

引入记号$w = e^{\frac{i2\pi}{N}}$,改写为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ & & & \ddots & \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

形式上看，N阶矩阵乘以向量需要计算量$\mathbb{O}(N^2)$, 但是由于Fourier矩阵的特殊结构,该计算量可以降低到$\mathbb{O}(N\log N)$

引入记号$w = e^{\frac{i2\pi}{N}}$，

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ & & & \ddots & \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

注意到w 是乘法单位元1在复数域的N重根，也即是

$$\left\{1 = w^0, w^1, w^2, ..., w^{N-1}\right\}$$

构成一个乘法循环群；w的所有幂次全在上述集合里。

1. 表面上矩阵F有N^2个元素，观察发现F 只有N个不同元素，他们共轭成对的出现在复平面的单位圆周上，实际上仅有N/2个不同的元素
2. 通过巧妙的计算技巧，避免重复计算，可以将算法复杂度降低。

据记载从Gauss开始就有这种考虑， 现代文献一般引用Tukey & Cooley 65年发表的文章。也许其他人更早发现，Jack Good 1958年发表过类似思想，而且后来回忆说："1956-1957年，我告诉过Tukey算法细节"。 Tukey 的65年的文章也引用了Good的文章。

1. 小问题如$N < 100$, sin, cos 结合Matlab矩阵乘法即可，无必要调用FFT
2. 大问题如N等于几百几千，建议选择$1024, 2048$等"整数"

Tips： Matlab全名"矩阵实验室"，很擅长矩阵乘法运算！ ！

分别使用三角插值和Chebyshev零点插值确定函数

$$f(x) = x^2 \cos x; \quad f(x) = \exp(\cos x)$$

取n = 10，20并与精确解比较误差.

Tips: 一般函数Cheby poly 效果好； 周期函数 Tri poly更佳.

```
% --- tri poly by Fourier matrix
L = 2; f = @(x) exp(sin((4*pi/L)*x) + cos(2*pi/L*x));
n1 = 15; M = 2*n1+1;
h = L/M; x1 = (0:h:L-h)'; f1 = f(x1);
% --- compute fv by fx
j1 = 0:M-1; j2 = j1-n1;
F1 = exp((-1i*2*pi/M)*(j2'*j1));  fv = F1*f1; fv = fv/M;
% -- the pts and exact values for compare
xx1 = 0:0.01:L; f1_ex = f(xx1);
mj = exp(1i*(xx1'*j2)*(2*pi/L));
f11 = real(mj*fv);  max(abs(f11(:) - f1_ex(:))),
figure(1);plot(x1,f1,'ro',xx1,f11,'k-.');
```