数值分析

第一章：引论

张亚楠[1]

苏州大学数学科学学院

March 9, 2020

[1]Email: ynzhang@suda.edu.cn

Contents

1. 数值分析的对象和特点

1.1 什么是数值分析

数值分析概念

数值分析是计算数学的一个主要部分，计算数学是数学的一个分支，它研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现.

实际问题 ⇒ 数学模型 ⇒ 数值计算方法 ⇒ 程序设计 ⇒ 上机算出结果

Numerical Analysis (wiki)

The overall goal of the field of numerical analysis is the design and analysis of techniques to give approximate but accurate solutions to hard problems, the variety of which is suggested by the following:

The overall goal of the field of numerical analysis is the design and analysis of techniques to give approximate but accurate solutions to hard problems, the variety of which is suggested by the following:

- Advanced numerical methods are essential in making numerical weather prediction feasible.

Numerical Analysis (wiki)

The overall goal of the field of numerical analysis is the design and analysis of techniques to give approximate but accurate solutions to hard problems, the variety of which is suggested by the following:

- Advanced numerical methods are essential in making numerical weather prediction feasible.
- Computing the trajectory of a spacecraft requires the accurate numerical solution of a system of ordinary differential equations.

Numerical Analysis (wiki)

The overall goal of the field of numerical analysis is the design and analysis of techniques to give approximate but accurate solutions to hard problems, the variety of which is suggested by the following:

- Advanced numerical methods are essential in making numerical weather prediction feasible.
- Computing the trajectory of a spacecraft requires the accurate numerical solution of a system of ordinary differential equations.
- ...

Contents

数值分析的基本内容

- 数值逼近

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近
  - 数值积分与数值微分

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近
  - 数值积分与数值微分
- 数值代数

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近
  - 数值积分与数值微分
- 数值代数
  - 线性方程组求解(特征值问题)

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近
  - 数值积分与数值微分
- 数值代数
  - 线性方程组求解(特征值问题)
  - 非线性方程组数值解法

数值分析的基本内容

- 数值逼近
  - 插值与逼近
  - 数值积分与数值微分
- 数值代数
  - 线性方程组求解(特征值问题)
  - 非线性方程组数值解法
- ODEs and PDEs 数值解法

Contents

数值分析的特点

- 面向计算机

数值分析的特点

- 面向计算机
- 可靠的理论分析：可解性，收敛性，稳定性

数值分析的特点

- 面向计算机
- 可靠的理论分析：可解性，收敛性，稳定性
- 计算复杂度

数值分析的特点

- 面向计算机
- 可靠的理论分析：可解性，收敛性，稳定性
- 计算复杂度
- 数值试验

数值分析的特点

- 面向计算机
- 可靠的理论分析：可解性，收敛性，稳定性
- 计算复杂度
- 数值试验

数值分析的特点

- 面向计算机
- 可靠的理论分析：可解性，收敛性，稳定性
- 计算复杂度
- 数值试验

例： 比较以下两个计算公式

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

$$\log 2 = 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots\Big)$$

如何学好数值分析

- 掌握基本原理，方法，误差分析

如何学好数值分析

- 掌握基本原理，方法，误差分析
- 注重作业，练习

如何学好数值分析

- 掌握基本原理，方法，误差分析
- 注重作业，练习
- 上机实践

如何学好数值分析

- 掌握基本原理，方法，误差分析
- 注重作业，练习
- 上机实践

如何学好数值分析

- 掌握基本原理，方法，误差分析
- 注重作业，练习
- 上机实践

参考书：

Numerical Analysis (Burden and Faires)

维基百科　Matlab(Help)

Contents

误差来源

- 模型误差

误差来源

- 模型误差
- 观测误差

误差来源

- 模型误差
- 观测误差
- 截断误差: 精确公式用近似公式代替所产生的误差; 例如: Tayler 级数

误差来源

- 模型误差
- 观测误差
- 截断误差: 精确公式用近似公式代替所产生的误差; 例如: Tayler 级数
- 舍入误差： 在数值计算中只能对有限位字长的数值进行计算；利用有限位数字代替精确数产生误差. 例如：MATLAB 命令窗口输入： pi sin(pi)

误差定义

Definition 1

绝对误差，简称误差： $e^\star = x^\star - x$ 其中$x^\star$是准确值x的近似值.

误差限: $|e^\star|$ 的任一个上界

相对误差：

$$e_r^\star = \frac{e^\star}{x}; \quad e_r^\star = \frac{e^\star}{x^\star}$$

相对误差限：$\varepsilon_r = |e_r^\star|$的一个上界。

例如： $x = 10 \pm 1, y = 1000 \pm 5$

有效数字

Definition 2

近似值$x^\star$的误差限是某一位数字的半个单位，从该位开始到$x^\star$的 第一位非零数字共有n位，则称：$x^\star$具有n位有效数字.

例如： pi = 3.141592653589793 取五位有效数字?

四则运算

设x_1, x_2 为准确值，$x_1^\star, x_2^\star$为近似值，则 误差限:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x_1^\star \pm x_2^\star) &= \varepsilon(x_1^\star) + \varepsilon(x_2^\star) \\
\varepsilon(x_1^\star * x_2^\star) &= |x_1^\star| * \varepsilon(x_2^\star) + |x_2^\star| * \varepsilon(x_1^\star) \\
\varepsilon(x_1^\star / x_2^\star) &= \frac{|x_1^\star| * \varepsilon(x_2^\star) + |x_2^\star| * \varepsilon(x_1^\star)}{|x_2^\star|^2}
\end{aligned}$$

一元函数的误差限

$$f(x) - f(x^\star) = f^{'}(x^\star)(x - x^\star) + f^{''}(x^\star)(x - x^\star)^2 + o(x - x^\star)^2$$

则：

$$\varepsilon(f(x^\star) \approx |f^{'}(x^\star)| * \varepsilon(x^\star)$$

思考：多元函数的误差限？

Contents

考虑初始数据的误差在计算中的传播

Example 3

计算

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx,\ n = 0, 1, 2, 3 \cdots, 20$$

分部积分得到递推公式

$$I_n = e - nI_{n-1}, \quad I_0 = e - 1$$

取 e = 2.718282,

计算结果如下：

I_0	1.718282	I_6	0.3446627	I_{12}	-14.35115
I_1	1	I_7	0.3056431	I_{13}	189.2833
I_2	0.7182817	I_8	0.2731371	I_{14}	-2647.248
I_3	0.5634365	I_9	0.2600479	I_{15}	39711.43
I_4	0.4645357	I_{10}	0.1178026	I_{16}	-635380.2
I_5	0.3956032	I_{11}	1.422453	I_{17}	1.080147e+07

数据是否可靠？ 如何修正算法？

I_0	1.718282	I_6	0.3446845	I_{12}	0.1950999
I_1	1	I_7	0.30549	I_{13}	0.1819828
I_2	0.7182818	I_8	0.2743615	I_{14}	0.1705232
I_3	0.5634363	I_9	0.249028	I_{15}	0.1604341
I_4	0.4645364	I_{10}	0.2280015	I_{16}	0.1513354
I_5	0.3955995	I_{11}	0.2102652	I_{17}	0.1455796

Definition 4

一个算法若输入数据有误差，而在计算过程中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则是不稳定的。

Example 5

计算积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, 10$$

$$\frac{x^n}{x+10} = \frac{x^n - 10x^{n-1} + 10x^{n-1}}{x+10}$$

病态问题和条件数

例：考虑

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$$

当$\alpha \approx 1$时， 且右端项输入有误差时，会对解造成的影响。

算法优劣的标准

- 截断误差要小，收敛速度快。
- 舍入误差在计算过程中能得到控制。
- 算法实现：易于编程和上机实现。

减少运算误差原则

- 避免大数吃掉小数：相近的数相减；大数除以小数；。。。
- 简化运算步骤，减少运算次数：高次幂乘法，秦九韶算法

Contents

秦九韶算法

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} = a_j x^j = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

直接计算需要 $\mathcal{O}(n^2)$次乘法；而采用如下等价形式计算

$$p(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

递推公式计算$p(x^*)$

$$\begin{cases} b_0 = a_n \\ b_j = b_{j-1}x^* + a_{n-j}, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

该方法也可计算导数；Matlab命令plolyval； 减少运算次数对数值计算很重要；如经典算法FFT

计算方法需要上机实现，如果算法有递推公式，则非常适合编程实现。

例：a>0, 求$\sqrt{a}$ 问题等价于求解

$$x^2 - a = 0$$

给个猜测初值x_0, 记误差$\Delta x = x - x_0$

$$(x_0 + \Delta x)^2 - a = 0 \Rightarrow x_0^2 + 2\Delta x x_0 + \Delta x^2 - a = 0 \Rightarrow x_0^2 + 2\Delta x x_0 \approx a$$

$$\Delta x = \frac{a - x_0^2}{2x_0}, \quad x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$$

递推公式计算$\sqrt{a}$

$$\begin{cases} x_0 = init \quad guess \\ x_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + \frac{a}{x_{j-1}}), \quad j = 1, ..., n \end{cases}$$

上机题目

1. 任意给定正实数a, 编写程序计算$\sqrt{a}$ 并与matlab自带命令"sqrt"比较计算结果。
2.
   1. 利用刘徽割圆术思想，编写计算圆周率π的程序，计算正$6*2^7$边形时的结果，并与pi比较精度。
   2. 参考教材：取松弛因子$w=1/3$, 再次比较精度。

Tips: 注意程序中只允许出现四则运算和开方运算(第一题已做).