数值分析

第二章：多项式插值

张亚楠[1]

苏州大学数学科学学院

March 9, 2020

[1]Email: ynzhang@suda.edu.cn

Contents

在某个区间 $[a, b]$上给出一系列函数点值

$$y_j = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq n$$

如何得到定义在整个区间$[a, b]$上的一个光滑函数?

1. 存在性?

问题提出

在某个区间 $[a,b]$上给出一系列函数点值

$$y_j = f(x_j), \quad 0 \le j \le n$$

如何得到定义在整个区间$[a,b]$上的一个光滑函数?

1. 存在性?
2. 唯一性?

在某个区间 $[a,b]$上给出一系列函数点值

$$y_j = f(x_j), \quad 0 \le j \le n$$

如何得到定义在整个区间$[a,b]$上的一个光滑函数?

1. 存在性?
2. 唯一性?
3. 若存在唯一，如何给出?

Definition 1

设函数$y=f(x)$定义在区间$[a,b]$上, $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$上取定的n+1个互异节点, 且已知节点处的函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$; 若存函数$\phi(x)$, 满足

$$\phi(x_i)=f(x_i), \quad i=0,1,2,\cdots,n$$

则称ϕ为$f(x)$的一个插值函数, $f(x)$为被插函数,点x_i为插值节点, 上式为插值条件, 而误差函数 $R(x)=f(x)-\phi(x)$称为插值余项。

从计算方便和理论分析的角度出发，我们选择多项式。 也即是：对n+1个插值节点选择n次多项式作为插值函数。

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

从计算方便和理论分析的角度出发，我们选择多项式。 也即是：对n+1个插值节点选择n次多项式作为插值函数。

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$$

（1）多项式P(x) 是否存在唯一？

（2）若存在唯一，如何求P(x)?

从计算方便和理论分析的角度出发，我们选择多项式。也即是：对n+1个插值节点选择n次多项式作为插值函数。

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

（1）多项式P(x) 是否存在唯一?

（2）若存在唯一，如何求P(x)?

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (x_k)^j = y_k, \quad 0 \le k \le n$$

观察发现：上式是关于系数a_j的线性方程组，且系数矩阵很特殊！

Contents

Example 2

已知两点函数值

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1)$$

构造一次多项式满足插值条件。

Example 2

已知两点函数值

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1)$$

构造一次多项式满足插值条件。

解：设$P_1(x) = ax + b$ 利用插值条件得到方程组

$$ax_0 + b = y_0; \quad ax_1 + b = y_1$$

解得斜率, 进而得到点斜式

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Example 2

已知两点函数值

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1)$$

构造一次多项式满足插值条件。

更改形式为

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 := y_0 * l_0(x) + y_1 * l_1(x)$$

P(x) is a linear combination of $l_0(x)$ and $l_1(x)$, the coefs are the function value on grids, the two linear functions $l_0(x)$ and $l_1(x)$ satisfy Kronecker delta

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

三个节点的二次插值多项式

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

推广到一般n的基函数的构造

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

三个节点的二次插值多项式

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$$

Example 3

1. 已知$\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11$, 求 $\sqrt{115}$
2. 用抛物插值计算$\sqrt{7}$

思考：x_0, x_1是什么？y_0, y_1 是什么？有了这些数据，怎么构造多项式？进一步计算得到需要的值

$$P_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = 10 * \frac{x-121}{100-121} + 11 * \frac{x-100}{121-100}$$

二次插值

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

已知:

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, ..., n$$

输出:

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + ... + y_n l_n(x)$$

其中

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$
$$= \frac{\prod_{l=0,l\neq j}^{n}(x-x_l)}{\prod_{l=0,l\neq j}^{n}(x_j-x_l)}$$

思考： 插值多项式与被插函数是否完全相等？ i.e.,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Theorem 4

设$f^{(n)}(x)$ 在$[a,b]$连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)存在， 则对 $\forall x \in [a,b]$,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}\Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

余项证明

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

证明提示： $R_n(x)$ 有n+1个零点；因此

$$R_n(x) = K(x) * \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

则只需确定$K(x)$. 为利用Rolle定理, 做辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x) * \Pi_{j=0}^{n}(t-x_j)$$

观察上式， 除（n+1）个插值节点，t = x 也是$\varphi(t)$的零点。因为$\varphi(x)$ 有至少n +2个零点， 由Rolle定理知道 $\exists\xi \in (a,b)$, s.t., $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, 即得结论.

思考： 如果被插值函数本身是次数不超过n的多项式，则余项有何特点?

Example 5

1. 证明：$\sum_{j=0}^{4}(x_j - x)^2 * l_j(x) = 0$, 其中$l_j(x)$是关于插值节点$x_0, x_1, ..., x_4$的插值基函数。
2. 证明：

$$\max_{a \le x \le b}\left|f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2\|f''\|_c$$

Contents

思考：给定5个插值节点及其函数值，可以得到$L_4(x)$; 由于某种原因，需要加入一个新的插值节点，Lagrange插值法之前的计算结果是否有用?

思考：给定5个插值节点及其函数值，可以得到$L_4(x)$; 由于某种原因，需要加入一个新的插值节点，Lagrange插值法之前的计算结果是否有用?

Newton法可以有效利用之前的结果。

Definition 6

差商：给定节点及其函数值，记

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为一阶差商；

$$f[x_0, x_1, ..., x_m] = \frac{f[x_1, ..., x_m] - f[x_0, ..., x_{m-1}]}{x_m - x_0}$$

为m阶差商；规定 $f[x_i] = f(x_i)$ 为零阶差商

Theorem 7

函数$f(x)$的n阶差商可由函数值的线性组合表示，

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

验证当n = 1时，结论正确。 即

$$f[x_0, x_1] = f(x_0)/(x_0 - x_1) + f(x_1)/(x_1 - x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

$$f[x_1, ..., x_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)}$$

则 $f(x_k)$的系数

$$\frac{1/\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x_k - x_j) - 1/\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)} \left(\frac{1}{x_k - x_n} - \frac{1}{x_k - x_0} \right) / (x_n - x_0)$$

Theorem 8

差商具有对称性

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]; \quad f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1]$$

Hint : 可由上一性质直接给出

Theorem 9

若

$$f[x, x_0, x_1, ..., x_k]$$

是x的m次多项式，则

$$f[x, x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}]$$

是x的m-1次多项式。

Hint : 由定义

$$f[x, x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}]$$
$$= \frac{f[x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}] - f[x, x_0, x_1, ..., x_k]}{x_{k+1} - x}$$

上式右端分子是x的m阶多项式， 且当$x = x_{k+1}$时分子为零，即分子包含分母作为因子。 消去即得结果。

Theorem 10

f(x)是n次多项式，则n+1阶差商$f[x,x_0,x_1,...,x_n]$恒为零。

思考： 微积分里是否有类似结果?

Contents

观察并验证以下两式满足插值条件:

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

找规律写出一般形式:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

如何推导?

观察并验证以下两式满足插值条件：

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

找规律写出一般形式:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \ldots + f[x_0, \ldots x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

如何推导？ 可以按照差商的线性组合定义直接验证满足插值条件！

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

由归纳假设，

$$P_{n-1}(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)}$$

则：

$$\begin{aligned} P_n(x_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x_n - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)} \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)} + f(x_n) \end{aligned}$$

检验求和项中$f(x_k)$的系数通分后为零。

根据差商的定义写出下列等式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\
f[x, x_0] &= f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) \\
&\cdots \\
f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] &= f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_n)
\end{aligned}
$$

最后一式代入前一式（把含有x的差商换掉）得到

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\
&+ f[x, x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\
& + f[x, x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

思考： $N_n(x) \stackrel{?}{=} L_n(x)$；

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + \ldots + f[x_0, \ldots x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \\
& + f[x, x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

思考: $N_n(x) \stackrel{?}{=} L_n(x)$;

验证是否满足差值条件:

$$f(x_k) = N_n(x_k) + 0, \quad \text{对的！！}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\
&+ f[x, x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\
& + f[x, x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

记

$$
g(x) = R_n(x) = f(x) - N_n(x)
$$

则$g(x)$ 有n+1个零点；反复利用Rolle定理，得到

$$
g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n! f[x_0, x_1, ..., x_n] = 0
$$

Theorem 11

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

思考： 利用上述结论，固定x_0, 并令

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + ... + f[x_0, ...x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\ & + f[x, x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) := N_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

其它所有插值节点$\{x_j\}_{j=1}^{n}$均无限趋于x_0, 会得到什么?

Example 12

已知1，4，9的平方根，利用抛物插值求解$\sqrt{7}$. 要求会构造差商表

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
			$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$			
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
			$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$			
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
			$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$			
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
			$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
x_4	$f[x_4]$			
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Contents

Example 13

已知节点$\{x_j\}_{j=0}^2$处的函数值$\{f(x_j)\}_{j=0}^2$和导数值$f^{'}(x_1)$

Example 13

已知节点$\{x_j\}_{j=0}^2$处的函数值$\{f(x_j)\}_{j=0}^2$和导数值$f'(x_1)$

四个插值条件，如何构造三次多项式？

Example 13

已知节点$\{x_j\}_{j=0}^2$处的函数值$\{f(x_j)\}_{j=0}^2$和导数值$f^{'}(x_1)$

四个插值条件，如何构造三次多项式？

将导数值点看做重节点；直接利用牛顿插值的方法和理论。

Table:

x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1,x_2]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_1]$	$f[x_1,x_1,x_2]$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$		
x_2	$f(x_2)$			

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = {} & f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_1](x - x_0)(x - x_1) \\
+ f[x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)^2
\end{aligned}
$$

插值余项：

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \\
&= f[x, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)
\end{aligned}
$$

1. 编程Lagrange型，Newton型插值多项式； 在区间[-1,1]上等距取n = 10,20,40个点构造$f(x) = e^x$的插值多项式，并与精确曲线比较误差。

2. (1) 与第一题同样取点构造插值多项式近似Runge函数并比较误差

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

（2）在[-1,1]上取非等距节点$\{x_j = \cos(\frac{2j-1}{2n}\pi)\}_{j=1}^{n}$，取 n = 10,20,40；构造插值多项式逼近Runge函数并比较误差。

Contents

通过插值点的折线连接起来得到分段函数; 在每一个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上

$$I(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1})$$

$$R_k(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

记 $h = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |x_{k+1} - x_k|$, 则

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - I(x)| = \max_k |R_k(x)| \le \frac{\|f''\|_c}{8} h^2$$

思考： 分段线性插值的优缺点?

问题：已知函数在 (n+1)个节点处的值以及一阶导数值，如何构造一阶连续可导函数 满足节点处的函数值和导数值相等?

问题：已知函数在 (n+1)个节点处的值以及一阶导数值， 如何构造一阶连续可导函数 满足节点处的函数值和导数值相等?

Answer: 根据插值条件在每个小区间上进行Hemite插值.

结论： 已知2n+2个插值条件，只得到一阶连续可微函数；
条件太多，结论太差！！

Contents

问题: 给定n+1个插值节点， 能否构造一个多项式插值函数，既满足插值条件，本身又是光滑的(例如：有二阶连续导数)?

考虑样条函数$S(x)$， 要求S(x)在每个区间上都是三次多项式； 且满足$S(x) \in C^2[x_0, x_n]$

$$S(x_j) = f(x_j), \quad 0 \le j \le n;$$
$$S(x_j + 0) = S(x_j - 0), \quad S^{'}(x_j + 0) = S^{'}(x_j - 0),$$
$$S^{''}(x_j + 0) = S^{''}(x_j - 0), \quad 1 \le j \le n - 1$$

数数看，目标未知量有几个？已知条件有几个？

问题: 给定n+1个插值节点，能否构造一个多项式插值函数，既满足插值条件，本身又是光滑的(例如：有二阶连续导数)?

考虑样条函数$S(x)$，要求S(x)在每个区间上都是三次多项式；且满足$S(x) \in C^2[x_0, x_n]$

$$
\begin{aligned}
& S(x_j) = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq n; \\
& S(x_j + 0) = S(x_j - 0), \quad S^{'}(x_j + 0) = S^{'}(x_j - 0), \\
& S^{''}(x_j + 0) = S^{''}(x_j - 0), \quad 1 \leq j \leq n - 1
\end{aligned}
$$

数数看，目标未知量有几个？已知条件有几个？

未知量4n个，已知条件只有（4n-2）个。加条件！！

- 已知端点处的一阶导数值或二阶导数值
- 自然边界条件：$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$
- 周期条件：$S'(x_0) = S'(x_n)$; $\quad S''(x_0) = S''(x_n)$
- MATLAB: not a knot

$$S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0), \; S'''(x_{n-1} - 0) = S'''(x_{n-1} + 0)$$

Tips: 周期条件一般不用，周期函数更适合三角插值

在区间$[x_j, x_{j+1}]$上考虑S(x), 根据要求 $S^{''}(x)$在小区间上是线性函数，记$M_j = S^{''}(x_j)$, 则

$$S^{''}(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} M_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} M_{j+1}$$

为书写方便记$h_j = x_{j+1} - x_j$ 则

$$S^{''}(x) = \frac{x_{j+1} - x}{h_j} M_j + \frac{x - x_j}{h_j} M_{j+1}$$

上式积分一次得到

$$S^{'}(x) = -\frac{M_j}{2h_j}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_{j+1}}(x - x_j)^2 + c_j$$

再积分一次

$$S(x) = \frac{M_j}{6h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_{j+1}}(x - x_j)^3 + c_j x + d_j$$

$$S(x)=\frac{M_j}{6h_j}(x_{j+1}-x)^3+\frac{M_{j+1}}{6h_{j+1}}(x-x_j)^3+c_jx+d_j$$

代入$S(x_j)=y_j;\quad S(x_{j+1})=y_{j+1}$ 可解得 c_j，d_j 与M_j的关系. 代入得到:

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{M_j}{6h_j}(x_{j+1}-x)^3+\frac{M_{j+1}}{6h_{j+1}}(x-x_j)^3\\&\quad+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}\end{aligned}$$

只需确定M_j即得到 S(x). 哪些条件没用过?

$$S^{'}(x_j+0)=S^{'}(x_j-0)$$

在$[x_j, x_{j+1}]$上，对$S(x)$求导

$$S^{'}(x) = \frac{-M_j}{2h_j}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_{j+1}}(x - x_j)^2$$
$$+ (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

进而

$$S^{'}(x_j + 0) = -M_j h_j/2 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

$$S^{'}(x_{j+1} - 0) = M_{j+1} h_j/2 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

即：

$$S^{'}(x_j - 0) = M_j h_{j-1}/2 + (y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_{j-1}^2}{6})\frac{-1}{h_{j-1}} + (y_j - \frac{M_j h_{j-1}^2}{6})\frac{1}{h_{j-1}}$$

由 $\boxed{S^{'}(x_j+0)=S^{'}(x_j-0)}$ 得到

$$\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{h_{j-1}+h_j}{3}M_j+\frac{h_j}{6}M_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

上式两端同时除以 $(h_j+h_{j-1})/6$, 并记 $\lambda_j=\dfrac{h_j}{h_j+h_{j-1}}$

得到简洁形式

$$(1-\lambda_j)M_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}],\ 1\leq j\leq n-1$$

少俩条件，方程欠定； 怎么办？