НИУ ИТМО
Факультет Информационных Технологий и Программирования
Направление “Прикладная Математика и Информатика”

Лабораторная работа №4
курса “Методы Оптимизации”

Выполнили студенты:
Антонов Кирилл Владимирович, M3237
Чмыхалов Артемий Витальевич, M3237
Якупова Айша Рустемовна, M3234
Факультет: ИТИП

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Санкт-Петербург, 2021 г**

# Цель работы:

Разработать программы для безусловной минимизации функций многих переменных

1.1. Реализация Методов Ньютона: а) классический метод, б) с одномерным поиском (одномерный метод), в) с направлением спуска

Для поиска направления спуска при решении СЛАУ использовался метод Гаусса.

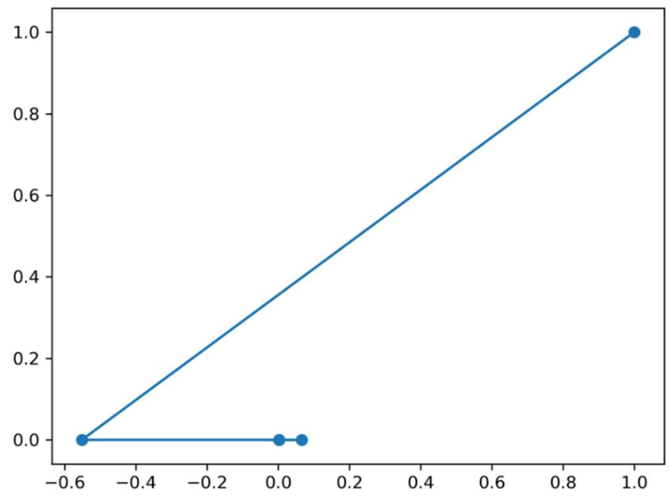
Рассмотрим функцию:

$f_1(x_1, x_2) = \cos(x_1 + 3.14) + x_2 * x_2$ ; Начальное приближение $\{1,1\}^T$

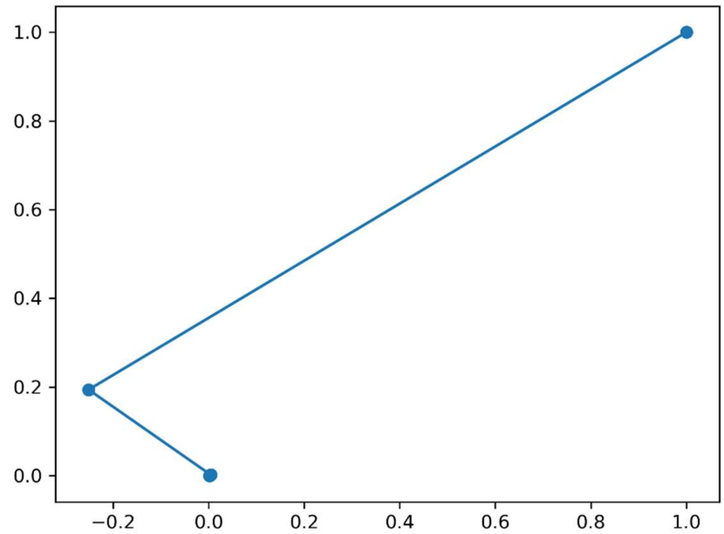
| Метод | Количество итераций | Результат минимизации |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 5 | -1 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 4 | -1 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 8 | -1 |

Значение параметра alpha в одномерном поиске:
0.806059
0.989911
0.994581
6.3685e-11

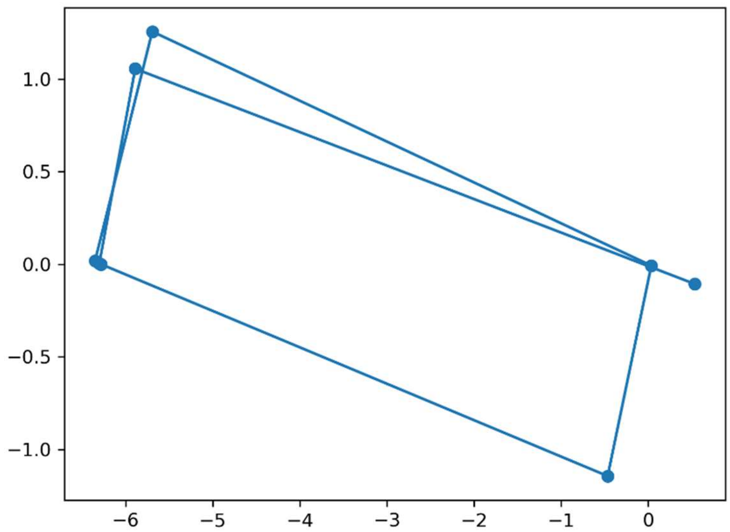
Обычный метод Ньютона:




С одномерным поиском:




С направлением спуска:




Также рассмотрим влияние начальной точки на количество итераций:

1. $\{1,1\}^T$

| Метод | Кол-во итераций | Результат минимизации |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 5 | -1 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 4 | -1 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 9 | -1 |

2. $\{-0.8,23\}^T$

| | | |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 9 | -1 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 4 | -1 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 3 | -1 |

3. $\{128, -7.5\}^T$

| | | |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 3 | -1 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 18 | -1 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 3 | -1 |

4. $\{-87.23, -7.5\}^T$

| | | |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 3 | -1 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 5 | -1 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 3 | -1 |

Количество итераций методов зависит от начального приближения. Меньше всего итераций произошло на начальной точке, где знак начального приближения совпадал со знаком результата.

Далее рассмотрим другую функцию:

$$f_2(x_1, x_2) = 124 * (x_1 - 2)^2 + 2 * (x_1 + x_2)^2$$

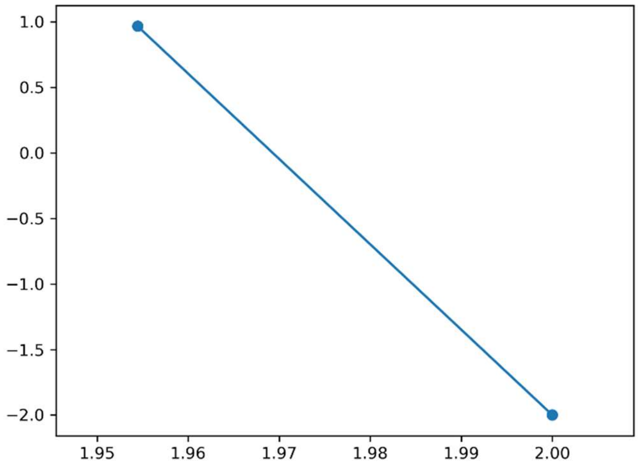
Начальное приближение $\{1,1\}^T$

| Метод | Кол-во итераций | Результат минимизации |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 2 | 0 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 2 | 1.30952e-10 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 2 | 1.48134e-10 |

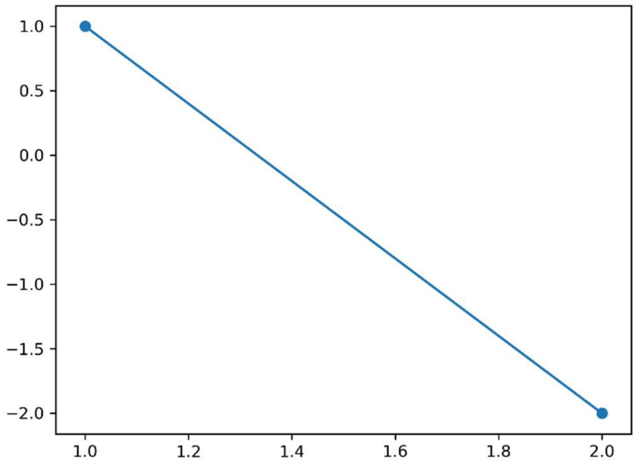
Значение параметра alpha в одномерном поиске:

0.999999
6.3685e-11

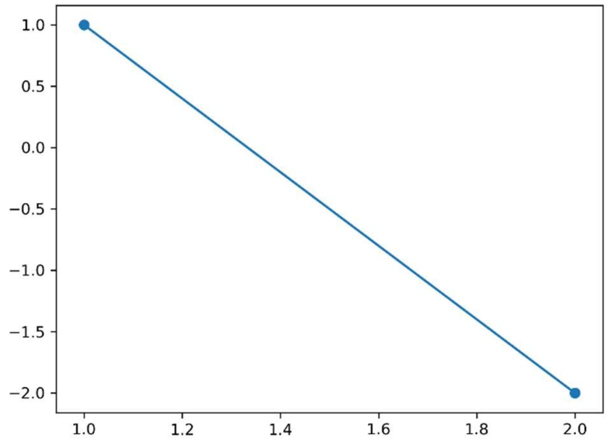
Обычный метод Ньютона:




С одномерным поиском:



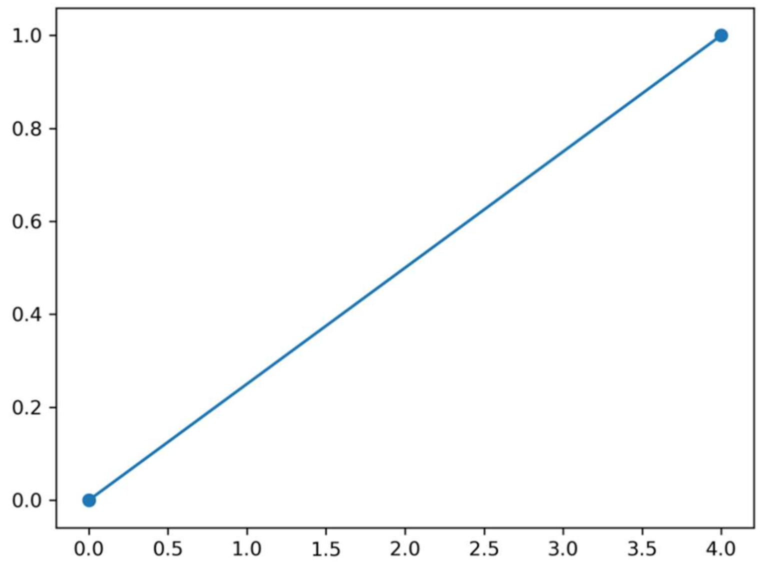

С направлением спуска:



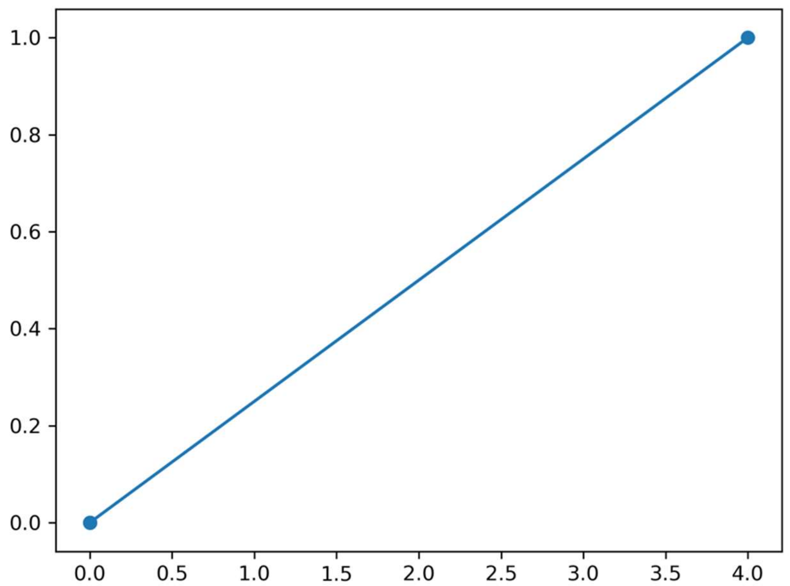

1.2 Исследование работы методов на функции $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2,\ x_0 = (4,1)^T$ и сравнение с минимизацией методом наискорейшего спуска

| Метод | Кол-во итераций | Результат минимизации |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 2 | 4.7979e-65 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 2 | 1.04218e-10 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 2 | 1.71091e-10 |
| Метод Наискорейшего спуска | 14 | 6.50684e-09 |

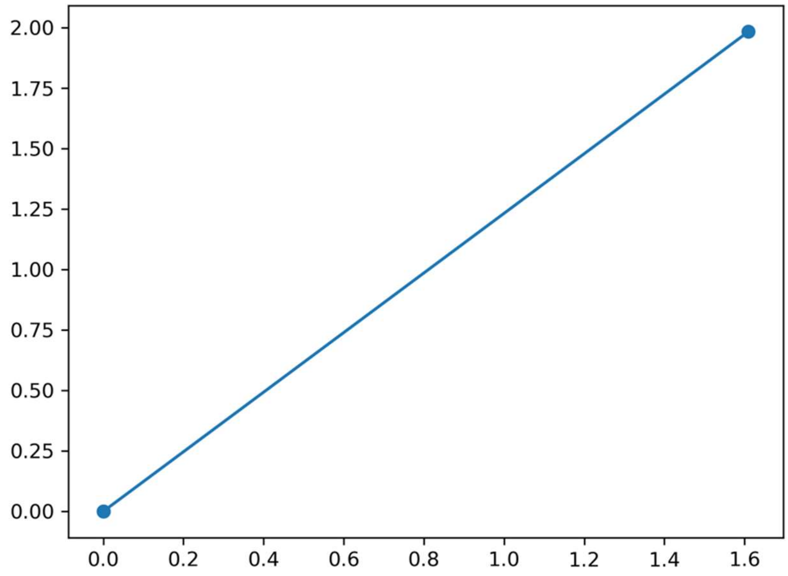
Обычный метод Ньютона:




С одномерным поиском:



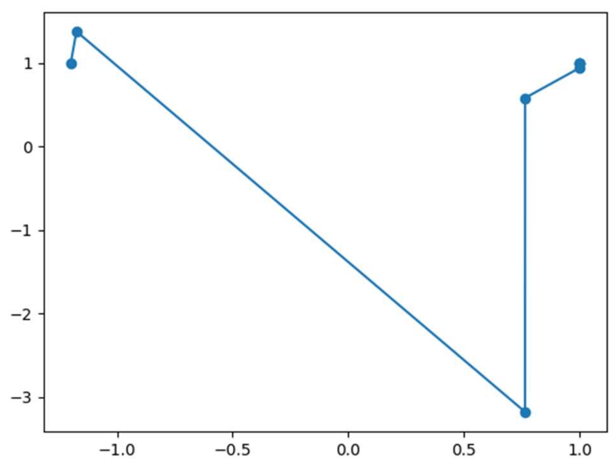

С направлением спуска:



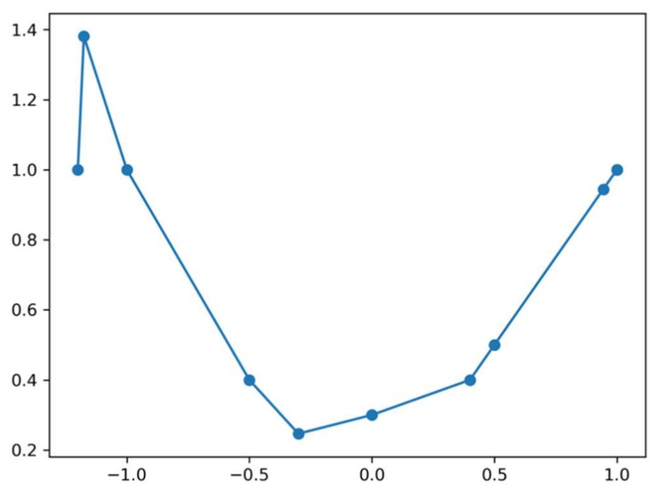

Исследование работы методов на функции $f_2(x) = 100 * (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$; $x_0 = (-1.2, 1)^T$ и сравнение с минимизацией методом наискорейшего спуска

| Метод | Кол-во итераций | Результат минимизации |
|---|---|---|
| Обычный метод Ньютона | 7 | 1.68398e-30 |
| Метод Ньютона с одномерным поиском | 14 | 2.032298e-9 |
| Метод Ньютона с направлением спуска | 6 | 4.04338e-10 |
| Метод Наискорейшего спуска | 8301 | 8.056368e-7 |

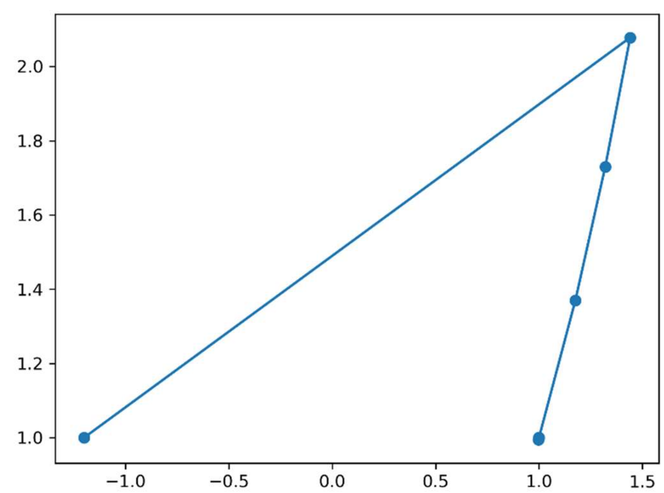
Обычный метод Ньютона:




С одномерным поиском:




С направлением спуска:



**Вывод:**

Суть методов Ньютона заключаются в нахождении направления спуска путём решения СЛАУ

$$H\Big(f(x^k)\Big) * p^k = grad(f(x^k))$$

Метод с одномерной оптимизацией, как видно из названия, использует одномерную оптимизацию для нахождения мин. точки на данном срезе(относительно $p^k$)

Метод с направлением спуска, позволяет убеждаться, что мы каждый раз идем в направлении убывания. Т.е. острый угол с градиентом.

Классический метод Ньютона выдаёт достаточно точный результат в данных квадратичных функциях и тратит меньше остальных итераций. Для не квадратичных же функций это не факт, что выполняется. Как мы видим в пункте 1.1 метод Ньютона с одномерным поиском стал лучше остальных по точности ответа и использующий меньшее число итераций, но на функции $f_2(x) = 100 * (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ метод Наискорейшего спуска сделал столько же итераций, сколько и классический, причем меньше одномерного.

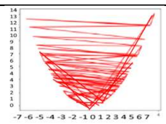
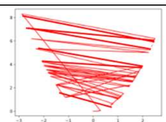
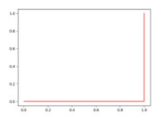
Но если смотреть на результаты опытов в целом, то метод Ньютона с одномерным поиском выдаёт сравнительно хорошие результаты по сравнению с остальными методами и не затрачивает много времени на написание, особенно при уже реализованном методе одномерного поиска.

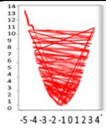
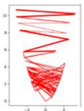
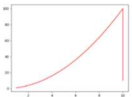
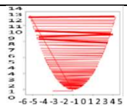
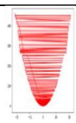
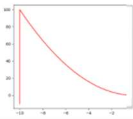
Траектория классического метода выглядит зигзагообразной, из-за того что мы каждый раз перескакиваем минимум, но эта проблема решается в одномерном методе.

2. Реализовали квазиньютоновские методы и сравнили результаты с лучшим методом 1 пункта(Метод Ньютона с одномерным поиском)

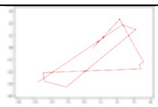
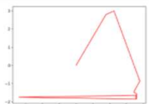
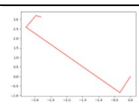
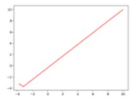
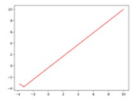
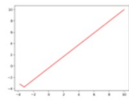
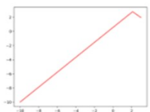
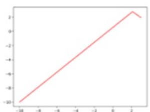
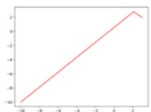
   Большое преимущество квазиньютоновских методов в том, что они 1-го рода из-за этого не считают Гессиан 2 рода и из-за это имеют меньше затрат на подсчёты.

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + \ (1 - x_1)^2$$

| | Метод Бройдена-Флетчера-Шено | Метод Пауэлла | Метод Ньютона с одномерным поиском |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (0, 0)$ Количество итераций | 142 | 76 | 3 |
| $x_0 = (0, 0)$ график |  |  |  |
| $x_0 = (-20, -22)$ Количество итераций | 240 | 140 | 27 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (-20, -22))$ график |  |  |  |
| $x_0 = (13, 23)$ Количество итераций | 275 | 368 | 34 |
| $x_0 = (13, 23)$ график |  |  |  |

$$f(x) = (x_1^2 + \ x_2 - 11)^2 + (x_1 + \ x_2^2 - 7)^2$$

| | Метод Бройдена-Флетчера-Шено | Метод Пауэлла | Метод Ньютона с одномерным поиском |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (0, 0)$ ответ | [-3.7793, -3.2832] | [3.58443, -1.84813] | [-2.8051182, 3.1313125] |
| $x_0 = (0, 0)$ Количество итераций | 20 | 14 | 8 |
| $x_0 = (0, 0)$ график |  |  |  |
| $x_0 = (-20, -22)$ ответ | [-3.7793, -3.28319] | [-3.7793, -1.8481] | [3, 2] |
| $x_0 = (-20, -22)$ Количество итераций | 5 | 55 | 8 |
| $x_0 = (-20, -22))$ график |  |  |  |
| $x_0 = (13, 23)$ ответ | [3, 2] | [3, 2] | [3, 2] |
| $x_0 = (13, 23)$ Количество итераций | 7 | 6 | 6 |
| $x_0 = (13, 23)$ график |  |  |  |

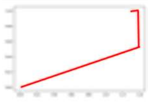
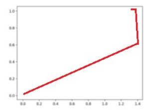
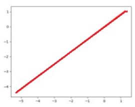
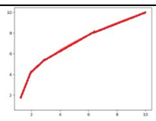
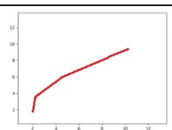
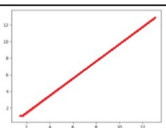
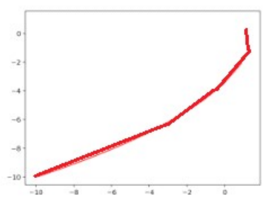
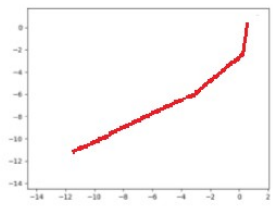
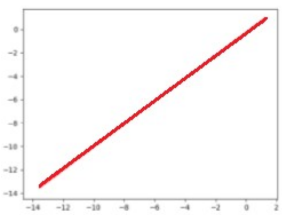
$$f(x) = (x_1 + \ 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + \ 10(x_1 - x_4)^4$$

| | Метод Бройдена-Флетчера-Шено | Метод Пауэлла | Метод Ньютона с одномерным поиском |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ ответ | [0, 0, 0, 0] | [0, 0, 0, 0] | [0, 0, 0, 0] |
| $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ Количество итераций | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (-20, -22, -20, -22)$ ответ | [3.70468E-4, -3.704639E-5, 0.001705, 0.001705] | [3.67477E-4, -3.67469E-5, 0.0017, 0.0017] | [0.026905, -0.00267, 0.046757, 0.046727] |
| $x_0 = (-20, -22, -20, -22))$ количество итераций | 37 | 37 | 133094 |
| $x_0 = (13, 23, 13, 23)$ ответ | [-3.7046818E-4, 3.70463895E-5, -0.001706, -0.001706] | [-3.67476E-4, 3.67468E-5, -0.0017, -0.0017] | [-0.026742, 0.00265339, -0.0464777, -0.0464470] |
| $x_0 = (13, 23, 13, 23)$ количество итераций | 37 | 37 | 133894 |

P.s. рисовать в 4D мы пока не научились(

$$f(x) = 100 - \frac{2}{1 + \left(\frac{x_1 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1 + (\frac{x_1 - 2}{2})^2 + (\frac{x_2 - 1}{3})^2}$$

| | Метод Бройдена-Флетчера-Шено | Метод Пауэлла | Метод Ньютона с одномерным поиском |
|---|---|---|---|
| $x_0 = (0, 0)$ Количество итераций | 4 | 5 | 6 |
| $x_0 = (0, 0)$ график |  |  |  |
| $x_0 = (-20, -22)$ Количество итераций | 45 | 45 | 5 |
| $x_0 = (-20, -22))$ график |  |  |  |
| $x_0 = (13, 23)$ Количество итераций | 101 | 102 | 5 |
| $x_0 = (13, 23)$ график |  |  |  |

## Вывод:
Заметим, что в квазиньютоновских методов растёт экспоненциально, из-за того, что мы приближаем Гессиан(не считаем, а аппроксимируем), в то время как Ньютоновские методы имеют константную погрешность. Однако эту проблему можно решить рестартами.
На основе этих опытов мы получили: функция №2 показывает, что выбор начального приближения может очень сильно повлиять на найденный глобальный минимум. Метод Ньютона хорошо себя показал на трехмерных функциях при наличии точного Гессиана, но на больших размерностях из-за накапливаемой погрешности ему становилось очень плохо, с чем методы Бройдена-Флетчера-Шено и Пауэлла справляются при помощи итерационного метода.

Ссылка на гит: https://github.com/Matrixoid/MethOpt_labs/tree/master/lab4