Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

по лабораторной работе №2

по дисциплине «**Методы оптимизации**»

Авторы:

Антонов Кирилл Владимирович M3237

Чмыхалов Артемий Витальевич M3237

Якупова Айша Рустемовна M3234

Факультет: ИТИП

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2021

Цель работы:

1. Реализовать алгоритмы:

- метод градиентного спуска;
- метод наискорейшего спуска;
- метод сопряженных градиентов.

Оценить, как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага использовать различные методы одномерного поиска.

2. Проанализировать траектории методов для нескольких квадратичных функций. Нарисовать графики с линиями уровня функций и траекториями методов

3. Исследовать, как зависит число итераций, необходимое методам для сходимости, от следующих двух параметров:
а) числа обусловленности $k \geq 1$ оптимизируемой функции;
б) размерности пространства n оптимизируемых переменных.

1. **Реализация методов**:

https://github.com/Matrixoid/MethOpt_labs/tree/master/lab2

Параметры запуска:

ε = 1e-5

Критерий останова: $\| \nabla f(x_k) \| < \varepsilon$

Начальная точка: (0, 0)

λ = 10 (для метода Градиентного спуска)

Оценка скорости сходимости метода наискорейшего спуска при разных методах одномерного поиска:

Рассмотрим функции:

- $f(x, y) = 64x^2 + 128xy + 64y^2 - 10x + 30y + 13$

Метод одномерного поиска	Количество итераций
Метод Дихотомии	330
Метод Золотого Сечения	243
Метод Фибоначчи	331
Метод Парабол	330
Метод Брента	332

- $f(x, y) = 10x^2 + y^2 - 5x + 3y + 8$

Метод одномерного поиска	Количество итераций
Метод Дихотомии	25
Метод Золотого Сечения	25
Метод Фибоначчи	25
Метод Парабол	25
Метод Брента	25

Вывод: Для минимизации методом Наискорейшего спуска лучше всего подходит метод Золотого Сечения. При нем скорость сходимости наибольшая.

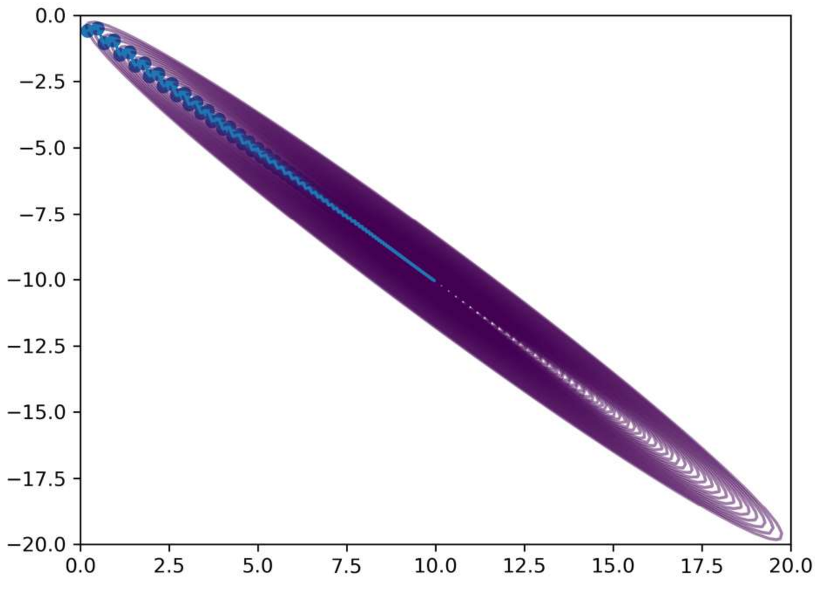
2. **Анализ траектории методов**

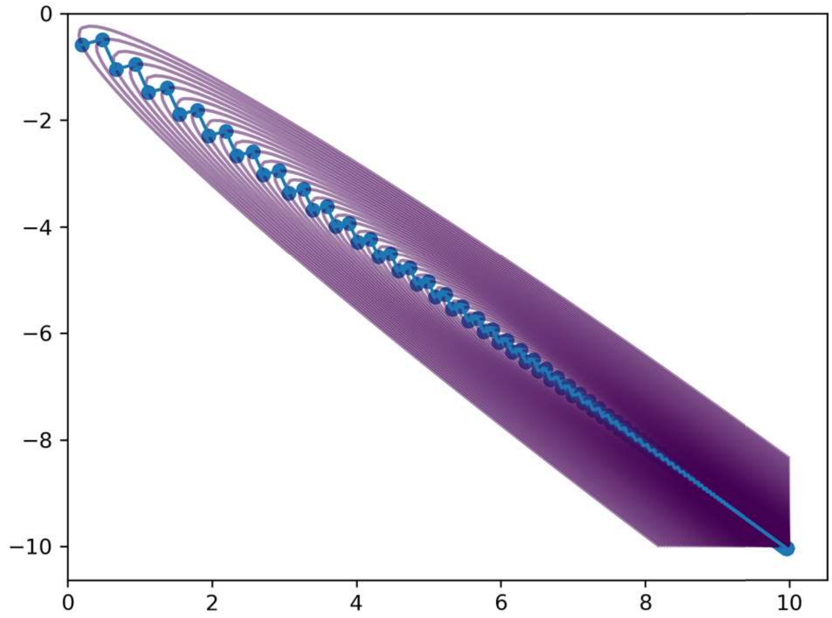
Рассмотрим функцию $f(x, y) = 64x^2 + 128xy + 64y^2 - 10x + 30y + 13$

Ее собственные значения: l = 2 и L = 254

Число обусловленности: 127

Метод Градиентного спуска:





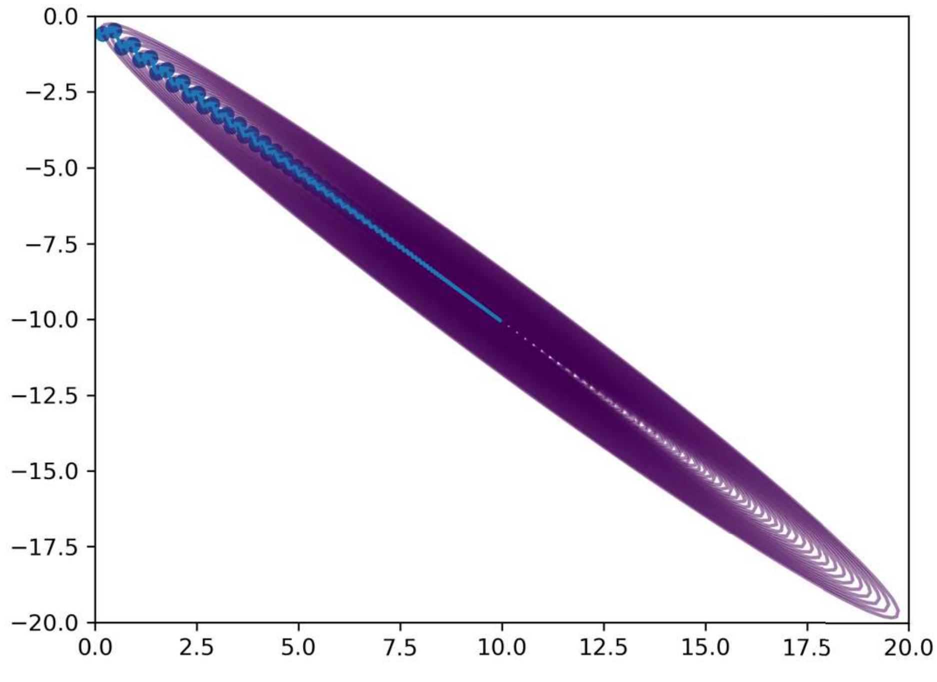
Два графика – второй в приближении. Количество итераций: 613. Делает большой шаг в начале, а потом очень медленно сходится к нужной точке.

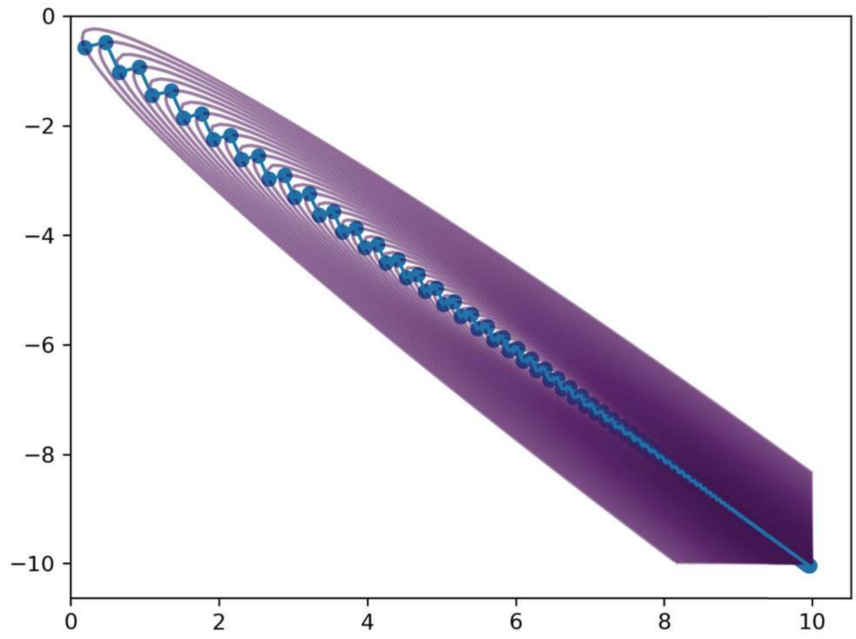
Точка минимума: {x = 9.96062695801441, y =-10.039367096617}

Минимум: -187.393700787385

Метод Наискорейшего спуска:

Здесь и далее для одномерной минимизации использовали метод Золотого сечения



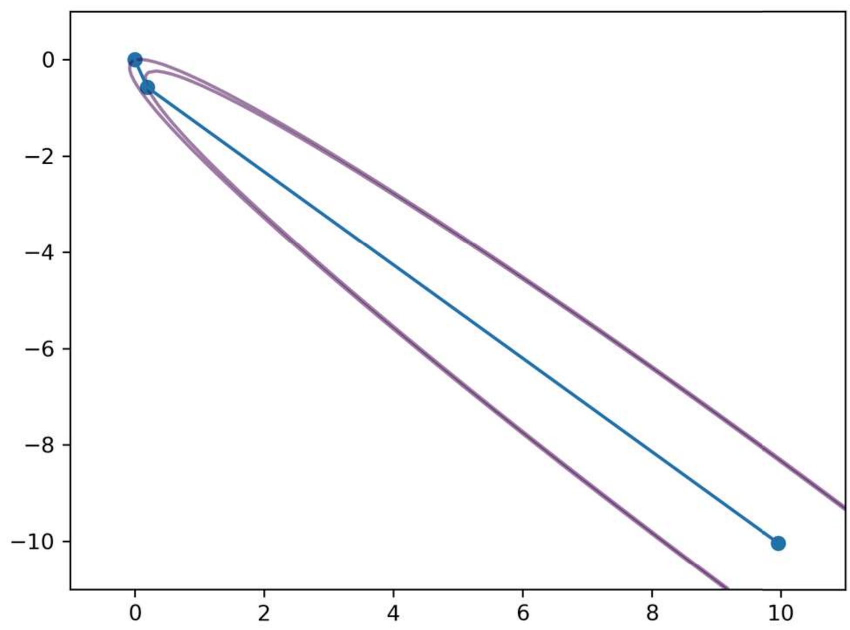


Также два графика, второй в приближении. Как видно на графиках, этот метод сходится очень похож на градиентный спуск. Однако этот алгоритм сходится существенно быстрее предыдущего. Также можно заметить, что направления соседних шагов строго перпендикулярны друг другу. Количество итераций: 243

Точка минимума: {x = 9.95862542785537, y =- -10.037370575507}

Минимум: -187.393692769826

Метод Сопряженных градиентов:



Нашел минимум за две итерации. Работает намного быстрее предыдущих методов

Точка минимума: {x = 9.96062992125981169939941129,

y =-10.0393700787401276147692286}

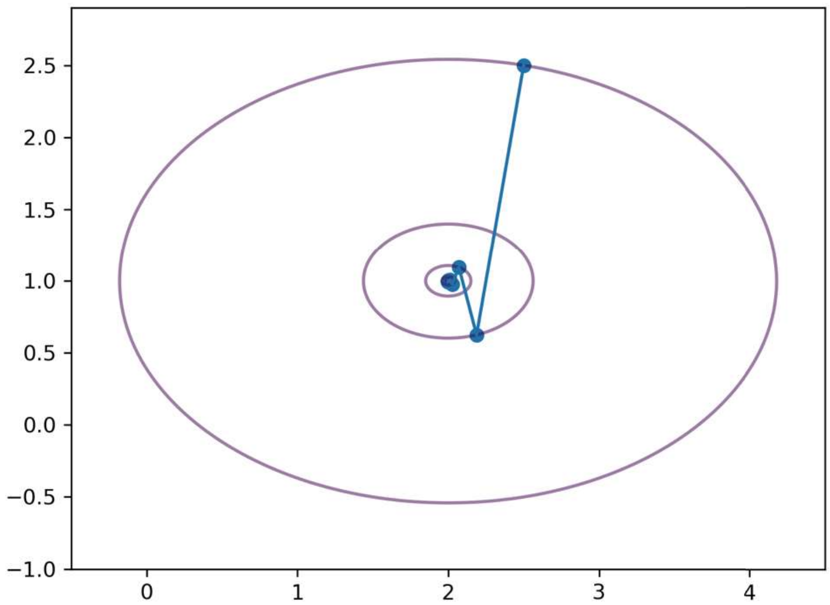
Минимум: -187.39370078740182634646715

Рассмотрим другую функцию: $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$

Ее собственные значения: l = 1 и L = 1

Число обусловленности: 1

Метод Градиентного спуска:

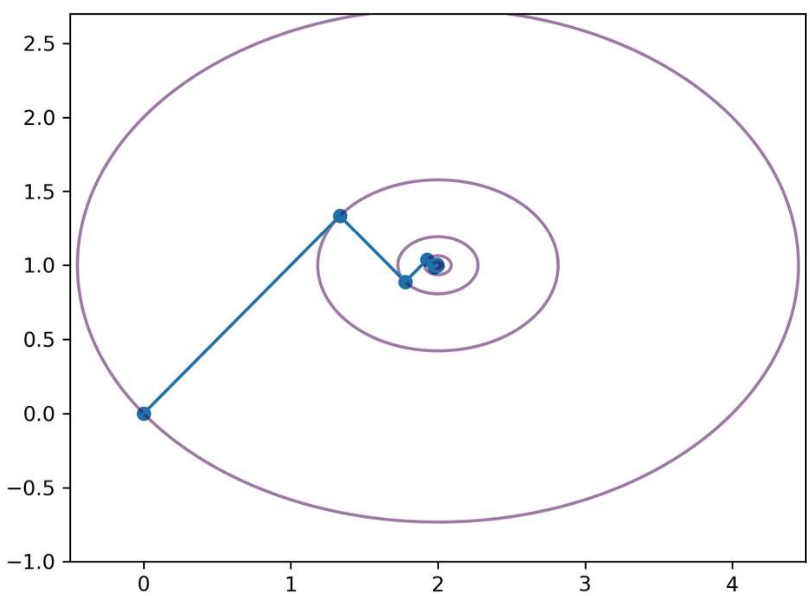


Как видно на графике, в этот раз функция сходится очень быстро. Количество итераций: 14

Точка минимума: {x = 2.00000064445703, y =0.999999195337296}

Минимум: -5.99999999999829

Метод Наискорейшего спуска:

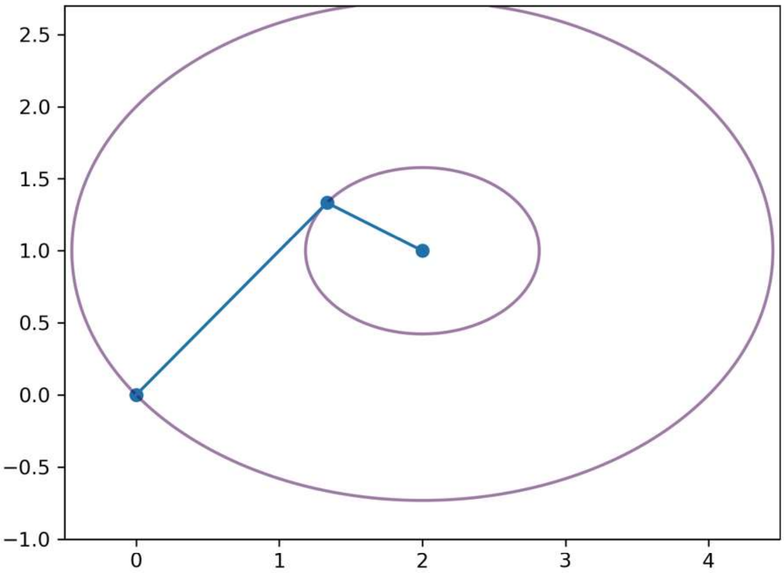


Для этой функции метод Наискорейшего спуска также работает быстро. Можно обратить внимание, что вначале шаг метода больше, чем у предыдущего метода, но ближе к точке минимума сильно уменьшается. Как и для предыдущей функции, направления соседних шагов строго перпендикулярны друг другу. Количество итераций: 8

Точка минимума: {x = 1.99966611331004, y = 0.999875132550857}

Минимум: -5.9999998573359185627396073

Метод Сопряженных градиентов:



На этой функции также сходится быстрее предыдущих методов, за 2 итерации.

Точка минимума: {x = 2.00000000000000003686287386,

y = 0.99999999999999981568563068}

Минимум: -6

Вывод: Скорость градиентных методов зависит от числа обусловленности, как и было доказано в теории. Чем больше число обусловленности, тем медленнее сходится метод. Таким образом метод Сопряженных градиентов лучше всего подходит для минимизации функций размерности 2, так как сходится за две итерации вне зависимости от числа обусловленности.

3. **Исследуем, как зависит число итераций, необходимое методам для сходимости, от следующих двух параметров:**
а) числа обусловленности $k \geq 1$ оптимизируемой функции;
б) размерности пространства n оптимизируемых переменных.

Будем брать начальную точку $\overline{x_0}$= {1,1,1,1…1} и строить функции по типу

$f(\bar{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$. Значения a_i генерируется рандомно от 1… k. Распределение равномерное.

$a_n = k, a_1 = 1$. Критерий останова методов: $\|\nabla f(x_k)\| < 10^4$

Число обусловленности этой функции равно k.

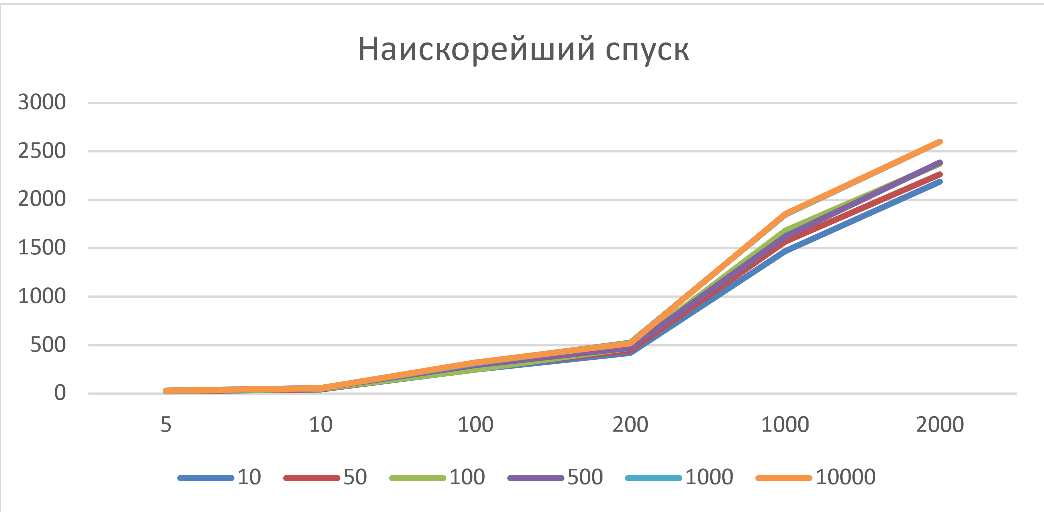
Метод Градиентного спуска:

n\k	5	10	100	200	1000	2000
10	26	50	517	1020	3197	6438
50	28	52	545	1020	3202	6442
100	29	54	523	1064	3210	6436
500	31	58	567	1086	3200	6440
1000	32	58	583	1133	3375	6657
10000	38	62	597	1136	3391	6660

Как видно из графика и из таблицы, число итераций метода в основном зависит от числа обусловленности функции и очень незначительно от размерности пространства

Метод Наискорейшего спуска

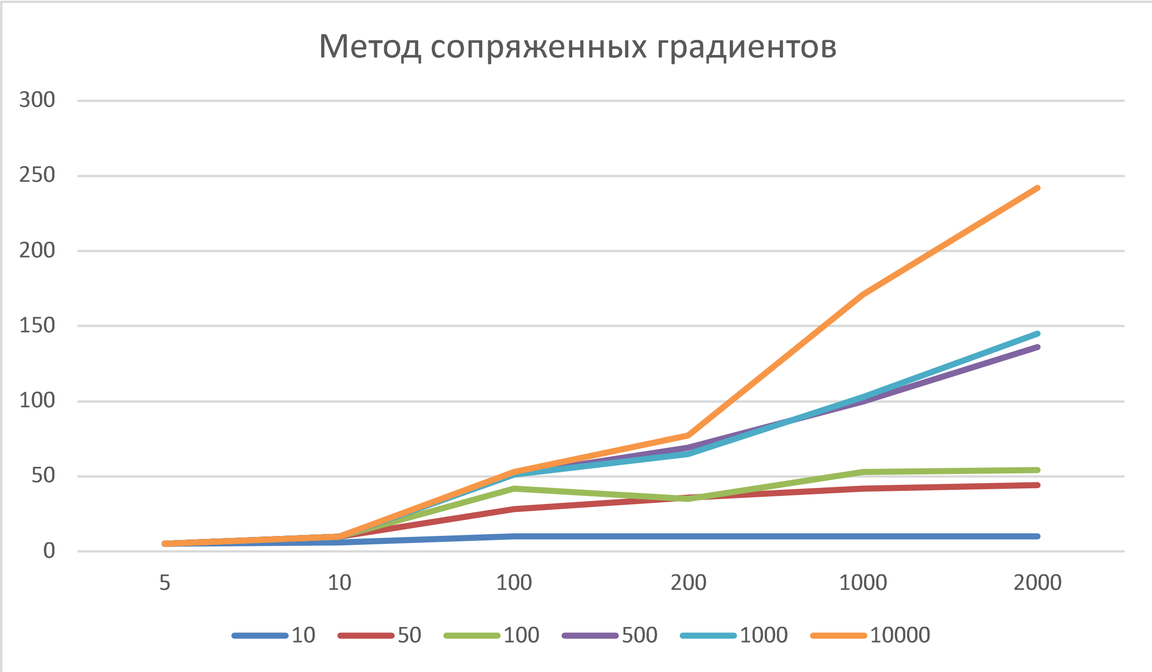
n\k	5	10	100	200	1000	2000
10	26	41	250	421	1470	2187
50	27	46	258	449	1569	2263
100	28	50	251	471	1679	2372
500	30	53	295	472	1622	2387
1000	32	54	317	523	1848	2599
10000	32	58	321	521	1850	2601



Как и для предыдущего метода, количество итераций также зависит от числа обусловленности. Количество итераций меньше, чем у предыдущего метода, однако из-за необходимости одномерной оптимизации внутри метода, скорость Наискорейшего спуска сильно падает при увеличении размерности пространства

Метод Сопряженных градиентов

n\k	5	10	100	200	1000	2000
10	5	6	10	10	10	10
50	5	10	28	36	42	44
100	5	10	42	35	53	54
500	5	10	51	69	100	136
1000	5	10	51	65	103	145
10000	5	10	53	77	171	242



Как и было доказано в теории, метод сопряженных градиентов не превосходит размерность матриц, и по если сравнивать все три метода, то для решения данной задачи лучше всего подходит именно этот алгоритм.

Вывод: были рассмотрены три различных метода минимизации функции, их различия. Получили:

Градиентный спуск хорошо работает для функций с малым числом обусловленности, вне зависимости от размерности пространства, но очень медленно для функций с большим числом обусловленности.

Наискорейший градиентный спуск на практике работает за меньшее число итераций, и, как и обычный градиентный спуск, зависит от числа обусловленности. К сожалению, одномерная минимизация тормозит метод, и не всегда меньшее число итераций приносит выигрыш во времени.

Метод Сопряженных градиентов, напротив, больше зависит от размерности пространства(n), но количество итераций никогда не превышают n. Для небольших n и большого числа обусловленности подходит лучше всех методов.