FACULTAD DE INGENIERÍA-UBA
ÁLGEBRA II. Primer cuatrimestre del 2019
26 de octubre de 2019

TEMA 2

Apellido y nombres:………………….   Número de padrón: ……….   Curso:…..

Justifique todas las respuestas.

Los razonamientos que utilice para resolver cada ejercicio deben constar en el escrito.

Numere las hojas y firme al final del examen.

El examen se aprueba con 55 puntos o más. No se asignará una fracción del puntaje total de un ejercicio o ítem.

1. Sean $S_1 \subset \mathbb{R}_2[x]$, $S_2 \subset \mathbb{R}_2[x]$ los subespacios definidos por:

$$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) = 0\}, \qquad S_2 = gen\{t^2 + t, t - 1\}$$

1. (**10 puntos.**) Probar que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_2[x]$.
2. (**5 puntos.**) Demostrar que la suma $S_1 + S_1$ no es directa.

2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$[f]_{B\,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix},$$

con $B = \{1 + t + t^2, 1 - t, 1\}$ y $B' = \{(1 \quad 0 \quad 1)^T, (0 \quad 1 \quad 1)^T, (1 \quad 0 \quad 2)^T\}$.

1. (**10 puntos.**) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales f es un isomorfismo.
2. (**5 puntos.**) Para $\alpha = -1$, hallar una base de $Nu(f)$.
3. (**10 puntos.**) Para $\alpha = -1$, hallar todos los $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(p) = (4 \quad 1 \quad 7)^T$.

3. Sea $S \subset \mathbb{R}_2[x]$ el subespacio definido por $S = gen\{t, t^2 - 2\}$. Considerando el producto interno $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

1. (**10 puntos.**) Hallar $S^{\perp}$.
2. (**10 puntos.**) Halle la transformación lineal que a un polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ le asigna su proyección ortogonal sobre S.

4. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$.

1. (**5 puntos.**) Probar que $\{v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$.
2. (**10 puntos.**) Calcular la distancia de $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ a $S = gen\{v_1 + v_2 - v_3, v_3\}$.

5. Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ dos transformaciones lineales.

1. (**15 puntos.**) Demostrar que $Nu(f) \subseteq Nu(g \circ f)$.
2. (**10 puntos.**) Demostrar que, si g es un monomorfismo, entonces $Nu(f) = Nu(g \circ f)$.