

TP2 Filtro de Kalman 2D

Elementos de matemática aplicada para aplicaciones tecnológicas
Septiembre 2024

El movimiento de un vehículo que se mueve en dos dimensiones puede ser estimado mediante la fusión de sensores, utilizando una Unidad de Medición Inercial o IMU, un GPS y un magnetómetro. Estos sensores proveen mediciones con distinta frecuencia de actualización, generalmente el GPS y el magnetómetro tienen frecuencias menores de actualización que la IMU.

Una forma de estimar con mayor precisión la posición y orientación de un vehículo es fusionar los datos obtenidos de los sensores descriptos anteriormente mediante un estimador óptimo llamado filtro Kalman.

En este trabajo se propone, utilizar un filtro de Kalman para estimar la posición y orientación de un vehículo moviéndose en dos dimensiones como se muestra en la figura siguiente:

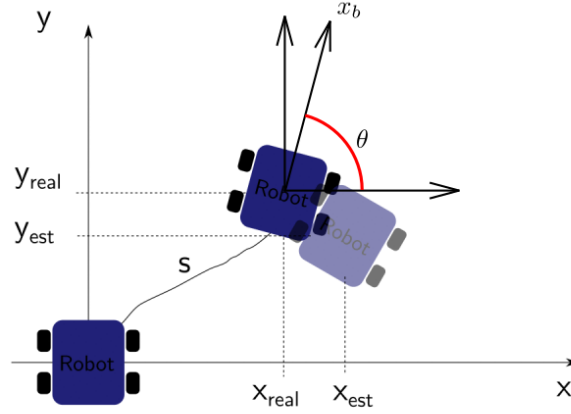


Figura 1: Esquema del sistema.

1. Modelado

Para el modelo del proceso, se supone que las mediciones de las aceleraciones lineales que provee la IMU son dadas en el sistema de referencia del vehículo y se obtiene el modelo del proceso:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

donde \mathbf{x} es el estado del sistema, \mathbf{u} es la entrada del modelo y \mathbf{w} es el ruido del modelo.

Si consideramos el sistema con las mediciones de la IMU como entrada tenemos el modelo:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ y_k \\ \dot{y}_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ \dot{x}_{k-1} \\ y_{k-1} \\ \dot{y}_{k-1} \\ \theta_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -\Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^{x_b} \\ u_k^{y_b} \\ u_k^{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2)$$

donde $u_k^{x_b}$, $u_k^{y_b}$ son las mediciones de aceleración lineal en los ejes x_b e y_b del vehículo, y u_k^{θ} es la velocidad angular, medidas con la IMU.

El modelo de las mediciones (actualización) está dado por:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} z_k^x \\ z_k^y \\ z_k^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ y_k \\ \dot{y}_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (4)$$

donde z_k^x y z_k^y son las mediciones de posición en x e y obtenidas con el GPS y z_k^θ es la medición de orientación obtenida con el magnetómetro. Los ruidos del modelo \mathbf{w} y de las mediciones de actualización \mathbf{v} tienen matrices de covarianza Q y R respectivamente.

Utilizando estas ecuaciones, obtenemos el algoritmo de estimación:

Predicción

- Estimation a priori: $x_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$
- Covarianza a priori: $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q_k$

Corrección

- Ganancia Kalman: $K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R_k)^{-1}$
- Actualización del estado estimado: $\hat{x}_k = x_k^- + K_k(z_k - Hx_k^-)$
- Actualización Covarianza: $P_k = (I - K_k H)P_k^-$

donde $Q_k = BQB^T$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -\Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma u_k^{x_b})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma u_k^{y_b})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma u_k^\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -\Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0,5\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0,5\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} (\sigma_{gps}^x)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{gps}^y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_\theta)^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

2. Objetivos

1. Implementar un filtro de Kalman en 2d, con orientación, considerando:
 - Muestreo IMU: 0.1 segundos
 - Muestreo GPS/Magnetómetro: 1 segundo
2. Simular distintas trayectorias: estática, lineal, circular, etc...
3. Comparar la trayectoria estimada en cada caso vs la trayectoria real
4. Analizar la evolución de la matriz de covarianza y los errores de estimación
5. Aumentar el error de GPS 5 veces y observar el cambio en la performance de la trayectoria estimada, su covarianza y la convergencia de la ganancia K a la K_∞ (Ganancia de Equilibrio)
6. Aumentar el error del acelerómetro 5 veces y observar el cambio en la performance de la trayectoria estimada, su covarianza y la convergencia de la ganancia K a la K_∞ (Ganancia de Equilibrio)
7. Simular la pérdida temporal del sensor de actualización de posición (GPS)
8. Simular la pérdida del sensor de actualización de orientación (Magnetómetro/Ángulo)

3. Recomendaciones

Implementar las distintas partes del problema en bloques o funciones bien definidas. Por ejemplo:

- trayectorias reales
- mediciones
- filtro de Kalman: a) predicciones y b) correcciones
- ...

Una forma de cuantificar la matriz de covarianza puede ser calculando su traza (suma de los σ^2) ó la suma de sus autovalores y de la ganancia de Kalman K como su módulo.

4. Notas

En el siguiente link pueden encontrar el valor del campo magnético a la altura de Bariloche, valor útil para caracterizar el ruido del magnetómetro (componente horizontal).

https://geomag.bgs.ac.uk/web_service/GMModels/igrf/13/?latitude=-41.1&longitude=-71.3&altitude=0.9&date=2024-09-23&format=xmls