

# Fundamentos de Comunicaciones Inalámbricas - TP N°1

Matías Roqueta - Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche

## Introducción

A continuación se presenta un análisis de un modelo de canal inalámbrico de dos caminos, definido como un sistema lineal variante en el tiempo (LTV) caracterizado por su respuesta al impulso

$$h(\tau, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) \delta(\tau - \tau_i(t)) \quad (1)$$

Su respuesta en frecuencia se consigue con la transformada de Fourier respecto a la variable  $\tau$

$$H(f, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) e^{-2\pi f \tau_i(t)} \quad (2)$$

Consideramos el caso particular de canal inalámbrico variante en el tiempo presentado en la Figura 1

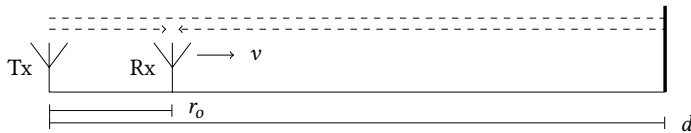


Figura 1: Canal inalámbrico de 2 caminos conformado por una antena emisora Tx estática, antena receptora Rx móvil con velocidad constante, y un reflector.

Este canal es desarrollado en Tse [1] y resulta en

$$a_1(t) = \frac{|\alpha|}{x_1(t)} \quad a_2(t) = -\frac{|\alpha|}{x_2(t)} \quad (3)$$

$$\tau_1(t) = \frac{x_1(t)}{c} \quad \tau_2(t) = \frac{x_2(t)}{c} \quad (4)$$

En donde  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son la distancia de cada camino, y el signo de  $a_2$  contempla el salto de fase por reflexión

$$x_1(t) = r_0 + vt \quad x_2(t) = 2d - r_0 - vt \quad (5)$$

Al existir dos caminos se presentará interferencia en el canal, que se puede analizar expresando la diferencia de fase

entre estos. La expresión resultará en interferencia constructiva cuando  $\Delta\theta$  es un múltiplo par de  $\pi$ , y en interferencia destructiva cuando este es un múltiplo impar de  $\pi$

$$\Delta\theta = 2\pi f \tau_2(t) + \pi - 2\pi f \tau_1(t) \quad (6)$$

Desarrollando la expresión para el canal de la Figura 1 se llega al resultado

$$\Delta\theta = \frac{4\pi}{c} f(d - r) + \pi \quad (7)$$

Vista la Ecuación 7 como función de  $r$ , se define la *longitud de coherencia*  $X_C$  como la distancia entre un máximo y un mínimo de interferencia.

Asimismo, vista como función de  $f$ , se define el *ancho de banda de coherencia*  $W_C$  de la misma forma.

## Implementación

Para simular el canal, se implementa la función genérica para un canal de dos caminos en el dominio del tiempo, Ecuación 1

$$h(t', t) = a_i[1](t) \cdot \text{dirac}(t' - t_i[1](t)) + a_i[2](t) \cdot \text{dirac}(t' - t_i[2](t))$$

Así como en el dominio de la frecuencia, Ecuación 2

$$H(f, t) = a_i[1](t) \cdot \exp(-im*2\pi*f*t_i[1](t)) + a_i[2](t) \cdot \exp(-im*2\pi*f*t_i[2](t))$$

Para simular el caso particular descrito en la Figura 1, se especifican las expresiones de  $a_i$  y  $\tau_i$  de Ecuación 3 y Ecuación 4 como vectores de funciones

$$a_i = [t \rightarrow 1/x_i[1](t), t \rightarrow -1/x_i[2](t)] \\ t_i = [t \rightarrow x_i[1](t)/c, t \rightarrow x_i[2](t)/c]$$

Igualmente se especifican los  $x_i$  descritos en la Ecuación 5

$$r(t) = r_0 + v*t \\ x_i = [t \rightarrow r(t), t \rightarrow 2*d - r(t)]$$

## Simulación

La respuesta del canal se simulará en un ancho de banda de 10 MHz respecto a una frecuencia central  $f_0$  de 1 GHz, discretizado en 2048 puntos.

```
f0 = 1e9; BW = 10e6; N = 2048
f = f0.+range(-BW/2, BW/2, N)
dt = 1/(f[2]-f[1])
t' = fftfreq(N, dt) |> fftshift
```

Se fija una distancia de la emisora al reflector de 1 km, y una posición inicial de la receptora de 200 m. Se estudian posiciones de la antena receptora desde  $r = r_0$  hasta  $r = d - r_0$ , tal como indica la Figura 2.

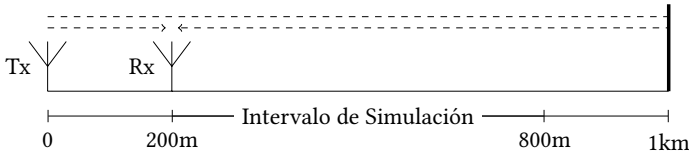
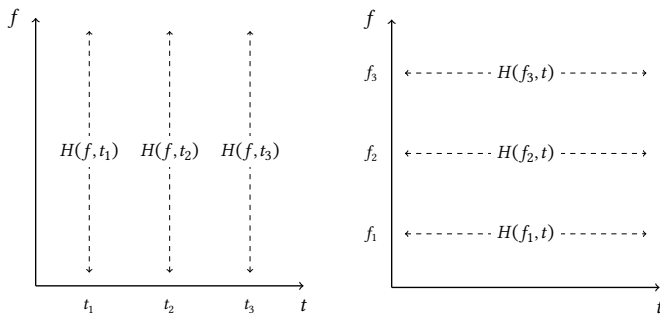


Figura 2: Intervalo de simulación del canal, se evalúan posiciones de la receptora  $r(t) \in [r_0, d - r_0]$ .

Se considera una velocidad de la receptora de 60 km/h y se eligen tiempos  $t$  tal que las posiciones de la receptora estén en el intervalo de evaluación.

```
d = 1000; r0 = 200; v = 60*1000/3600
t = range(0, d-2*r0, N) ./ v
```

Ya que  $H(f, t)$  es una función de 2 dimensiones existen dos formas de realizar la simulación, que requieren fijar uno de los parámetros.



(a) Función  $H(f, t_i)$  variando  $t_i$ . (b) Función  $H(f_i, t)$  variando  $f_i$ .

Figura 3: Distintas formas de simular e interpretar  $H(f, t)$ , visualizadas en el plano tiempo-frecuencia.

Fijar  $t_i$  retorna una respuesta en frecuencia del canal instantánea  $H(f, t_i)$ , mientras que fijar  $f_i$  retorna la evolución temporal de la transferencia del canal en esa frecuencia.

Mientras que  $H(f, t)$  es la expresión general de un canal LTV, en la Figura 1 la distancia  $r(t)$  caracteriza la respuesta del canal. Los resultados se presentan en función de la distancia.

## Resultados

Al realizar la simulación correspondiente a la Figura 3a, se obtienen las respuestas  $H(f, r_i)$  presentadas en la Figura 4. Se observa que el ancho de banda de coherencia incrementa cuando la antena receptora se acerca al reflector

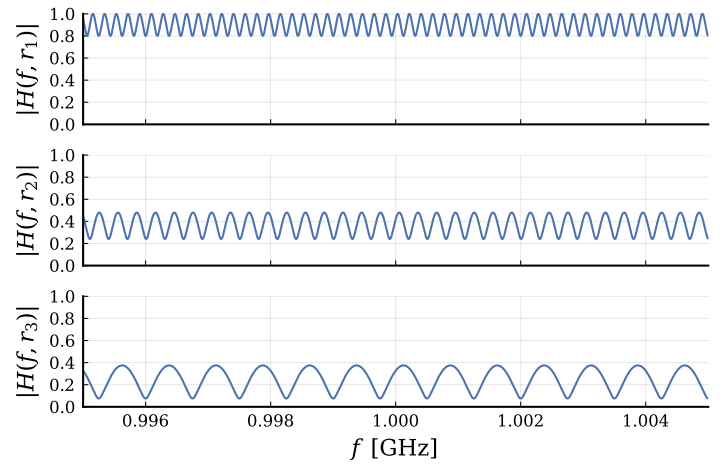


Figura 4: Fila 1:  $r = 200\text{m}$ . Fila 2:  $r = 500\text{m}$ . Fila 3:  $r = 800\text{m}$ .

Este análisis se puede relacionar con la respuesta al impulso instantánea del canal,  $h(\tau, r_i)$ , presentadas en la Figura 5.

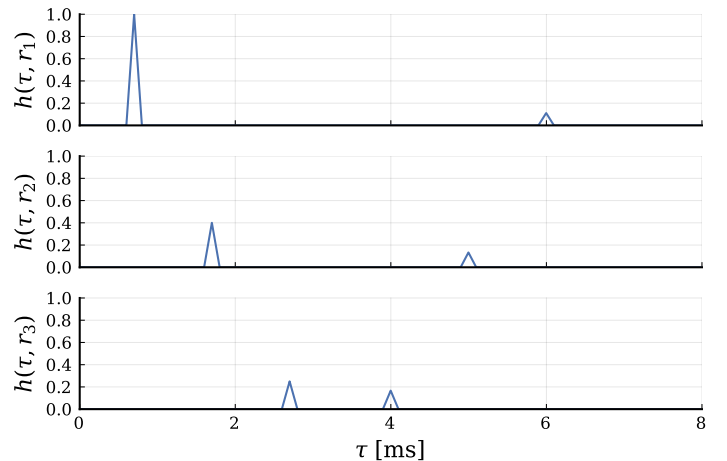


Figura 5: Fila 1:  $r = 200\text{m}$ . Fila 2:  $r = 500\text{m}$ . Fila 3:  $r = 800\text{m}$ .

La respuesta al impulso ilustra la diferencia en tiempo que tarda la señal en llegar al receptor por cada camino, característica que recibe el nombre de *delay spread* del canal.

Comparar la Figura 5 con la Figura 4 ilustra que el delay spread es inversamente proporcional al ancho de banda de coherencia.

Interesa estudiar en más detalle la respuesta del canal, comparándola con la diferencia de fase. Para esto se implementa la Ecuación 6, ajustada para que retorne  $\Delta\theta \in [-\pi, \pi]$ .

```
function dif_fase(f, t)
    return 2*pi*mod(f*(ti[2](t)-ti[1](t)),1)-pi
end
```

Los resultados para  $r = 800$  m se presentan en la Figura 6

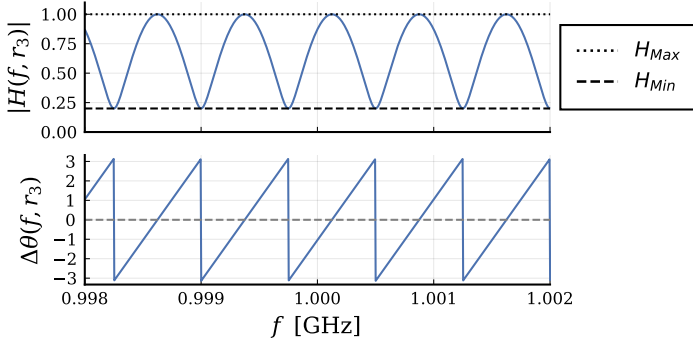


Figura 6: Mínimo =  $a_1(r) - a_2(r)$ , interferencia destructiva.  
Máximo =  $a_1(r) + a_2(r)$ , interferencia constructiva.

La Figura 6 ilustra que la respuesta se acerca a máximos de interferencia en frecuencias tales que  $\Delta\theta \approx 0$ , y a mínimos en frecuencias tales que  $\Delta\theta \approx \pm\pi$ .

Para realizar correctamente el análisis correspondiente a la Figura 3b y obtener  $H(f_i, r)$ , hace falta reducir el rango del vector tiempo, al hacerlo se obtiene la Figura 7

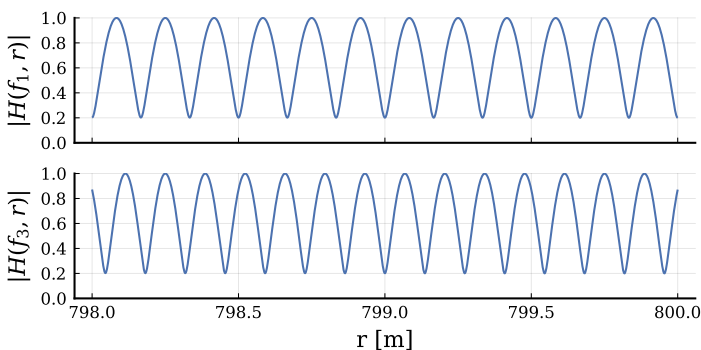


Figura 7: Fila 1:  $f = 0.9$  GHz. Fila 2:  $f = 1.1$  GHz.

Esto se debe a que la longitud de coherencia de este canal es del orden de los centímetros. Se observa que la distancia de coherencia disminuye al incrementar la frecuencia de transmisión.

De la misma forma que con el análisis anterior, se compara la evolución de la transferencia del canal a determinada frecuencia con la diferencia de fase. Los resultados para  $f = 1$  GHz se presentan en la Figura 8

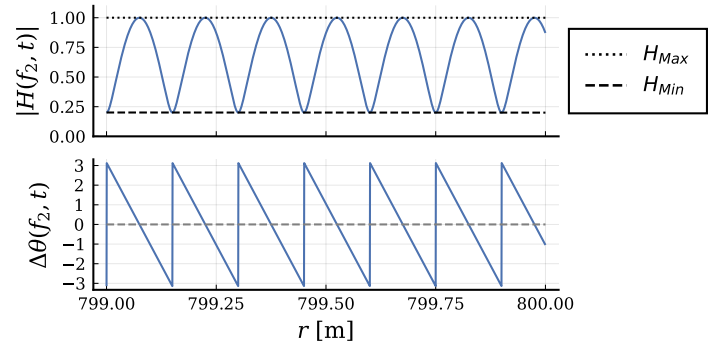


Figura 8: Mínimo =  $a_1(r) - a_2(r)$ , interferencia destructiva.  
Máximo =  $a_1(f) + a_2(f)$ , interferencia constructiva.

Nuevamente se observan máximos en distancias tales que  $\Delta\theta \approx 0$ , y mínimos en distancias tales que  $\Delta\theta \approx \pm\pi$ .

Finalmente se puede constatar que los resultados obtenidos por la simulación son consistentes con los resultados analíticos esperados, para esto se define una función que calcula empíricamente el período de una señal

```
T_emp(t, x) = t[argmaxima(x)] |> diff |> mean
```

Esta función se utiliza para medir el ancho de banda de coherencia empírico realizando un barrido en tiempo

```
Wc_emp = [T_emp(f,H_abs.(f,ti))/2 for ti in t]
```

Y para medir la distancia de coherencia empírica realizando un barrido en frecuencia

```
Tc_emp = [T_emp(t,H_abs.(fi,t))/2 for fi in f]
```

Estos resultados empíricos se compararán con los resultados analíticos provenientes de analizar la Ecuación 7

$$W_C = \frac{c}{4(d-r)} \quad X_c = \frac{c}{4f}$$

Las expresiones analíticas se implementan y se procede a realizar la simulación

$$W_c(x) = c / (4 * (d - x))$$

$$X_c(f) = c / (4 * f)$$

Se comparan ambos resultados para el ancho de banda de coherencia, presentados en la Figura 9. Se observa que ambos resultados son perfectamente consistentes

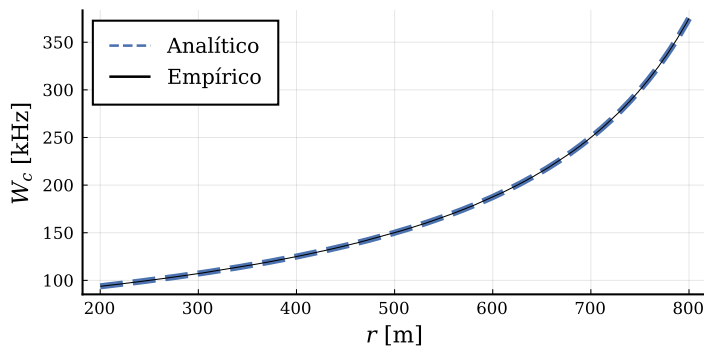


Figura 9: Comparación de resultados empíricos de ancho de banda de coherencia ante un barrido espacial contra la solución analítica esperada.

De la misma forma se comparan los resultados para la longitud de coherencia, presentados en la figura Figura 10, nuevamente observando que son consistentes

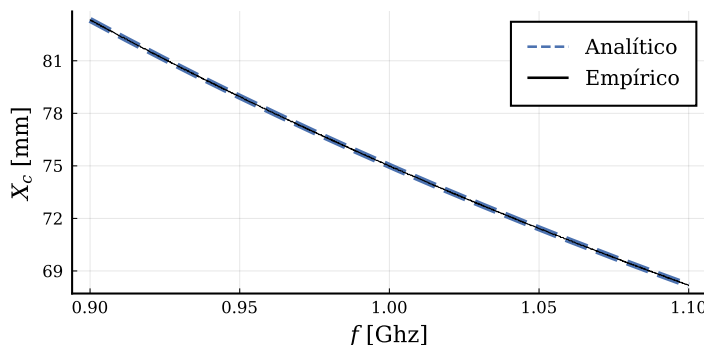


Figura 10: Comparación de resultados empíricos de distancia de coherencia ante un barrido en frecuencia contra la solución analítica esperada.

La consistencia de los resultados empíricos respecto a la solución analítica conocida permiten verificar que las simulaciones fueron realizadas correctamente.

## Conclusiones

En la simulación fue posible identificar el ancho de banda de coherencia, distancia de coherencia, y el *delay spread* observando la transferencia del canal. Se visualizó además como estas características se ven afectadas por variaciones espaciales o en el dominio de la frecuencia.

En análisis final verificó que los resultados de la simulación son los esperados, correspondientes a la solución analítica.

Es útil verificar la simulación contra una solución analítica conocida, ya que hacerlo permite confiar en resultados de simulación para casos en los que la solución analítica no es fácil de encontrar.

El estudio se realizó para un canal simple, pero el método implementado es capaz de simular cualquier modelo de canal de dos caminos siempre que se conozcan previamente las expresiones  $a_i(t)$  y  $\tau_i(t)$ .

También sería fácil extender la implementación para simular canales con un número mayor de caminos y visualizar así respuestas más complejas.

## Referencias

- [1] D. Tse, "Fundamentals of Wireless Communication," en Cambridge University Press, 2004, cap. 2.2: Input/Output Model of the Wireless Channel.