

# Fundamentos de Comunicaciones Inalámbricas - TP N°3

Matías Roqueta - Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche

## Introducción

Se cuenta con los datos de un canal inalámbrico con *flat fading*, caracterizado por su respuesta al impulso  $h_0$  definida sobre una región geográfica. Los datos del canal provistos están normalizados tal que  $E[|h_0|^2] = 1$ .

Sobre el canal se transmitirá una secuencia BPSK.

$$y = h_0 x + w \quad x = \pm 1 \quad (1)$$

El canal cuenta con ruido AWGN en fase y cuadratura,  $w = w_I + jw_Q$ , a determinada potencia de ruido  $N_0$ .

$$w \sim \mathcal{CN}(0, N_0) \implies w_I, w_Q \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2}) \quad (2)$$

Con  $w_I$  y  $w_Q$  independientes.

Se considera que el receptor cuenta con conocimiento del estado del canal, permitiendo hacer recepción óptima por máxima verosimilitud. Se usa el estadístico suficiente definido según @Tse [1]

$$r = \frac{h_0^*}{|h_0|} y = |h_0| x + \tilde{w} \quad (3)$$

Al estar normalizado el canal, las propiedades estadísticas de  $\tilde{w}$  son idénticas a las de  $w$  definidas en la Ecuación 2.

Finalmente la detección por máxima verosimilitud se consigue aplicando la siguiente regla de decisión

$$\hat{x} \leftarrow \mathcal{R}[r] \underset{-1}{\overset{1}{\leq}} 0 \quad (4)$$

Utilizando estas funciones simulamos, por ejemplo, la transmisión de una secuencia de 50 símbolos, de forma representada en la Figura 1.

Eligiendo secuencias de longitud suficiente se puede estimar la tasa de error de bits empíricamente para determinada respuesta al impulso y potencia de ruido

$$BER_E|_{h_0} = \frac{\# \text{ bits con error}}{\# \text{ bits transmitidos}} \Big|_{h_0} \quad (5)$$

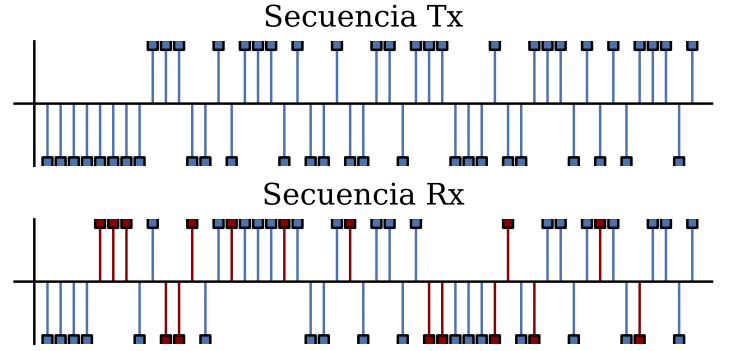


Figura 1: Ejemplo de la simulación de transmisión-recepción de una secuencia de 50 símbolos BPSK, resaltando los errores de transmisión.

Esto se promedia sobre múltiples realizaciones del canal inalámbrico

$$BER_E = \overline{BER_E|_{h_0}} \quad (6)$$

La tasa de error de bits empírica se evalúa para diferentes valores de relación señal-ruido. Esta se compara con la tasa de error de bits esperada para el canal.

$$BER_T = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{SNR}{1 + SNR}} \right) \quad (7)$$

Los resultados de comparar la Ecuación 6 con la Ecuación 7 se observan en la Figura 2

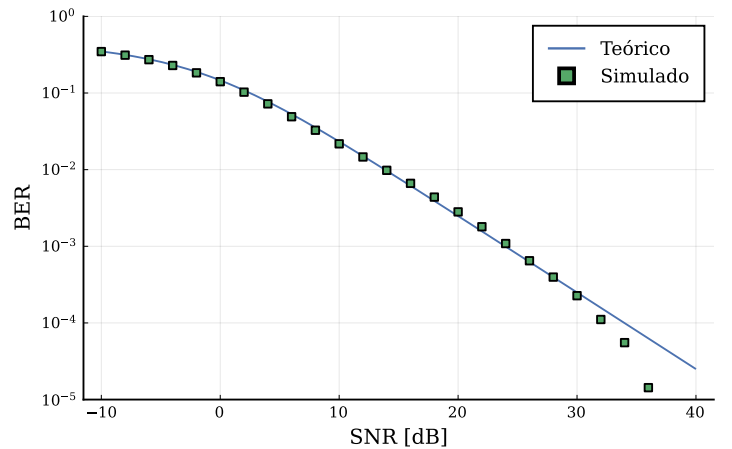


Figura 2: Curva teórica y resultados de simulación de la tasa de error de bits para una transmisión BPSK simple.

## Diversidad Temporal

A continuación se estudiaría el comportamiento del canal al tener un receptor móvil, lo cual implica variación temporal de la respuesta al impulso. Esto requiere el uso de una codificación que aproveche la diversidad. Se usará código de repetición con longitud  $L$ .

A su vez, para maximizar la diversidad se aplicará entrelazado de datos de longitud  $L$ . Los datos se organizan en bloques de  $L$  símbolos y se expresan de la siguiente forma.

- $\mathbf{x}$ : Vector de símbolos a transmitir, de longitud  $L$ .
- $\bar{\mathbf{x}}$ : Vector codificado, de longitud  $L^2$ .
- $\check{\mathbf{x}}$ : Vector codificado y entrelazado, de longitud  $L^2$ .

Usando como ejemplo  $L = 3$  se aplica la implementación de la preparación de un bloque de símbolos para la transmisión de la siguiente forma.

```
x_o = [:x1, :x2, :x3]
x_r = Lib.repetition(x_o, 3)
x_i = Lib.interleave(x_r, 3)
```

Y se observan los vectores de símbolos resultantes

```
x_o: [:x1, :x2, :x3]
x_r: [:x1, :x1, :x1, :x2, :x2, :x2, :x3, :x3, :x3]
x_i: [:x1, :x2, :x3, :x1, :x2, :x3, :x1, :x2, :x3]
```

## Interpretación Matricial

El operador entrelazado se puede interpretar como una transformación lineal definida por la matrix  $\mathbf{E}_{L^2 \times L^2}$

$$\check{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En donde  $\mathbf{0}_{L \times L}$  es la matriz nula y  $\mathbf{J}_{L \times L}$  es la matriz anti-diagonal unitaria. Se puede demostrar que la matriz  $\mathbf{E}$  definida en la Ecuación 8 cumple ciertas propiedades. En particular interesa que es una matriz simétrica, y que es ortogonal, lo cual implica que es su propia inversa.

Al llamar  $\check{\mathbf{y}}$  al resultado de transmitir el vector  $\check{\mathbf{x}}$  a través de un canal con respuesta al impulso  $\mathbf{h}$ , se puede interpretar la transmisión de la siguiente forma.

$$\check{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\check{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \implies \mathbf{E}\check{\mathbf{y}} = \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{E}\mathbf{w} \quad (9)$$

Se puede verificar que siendo  $\mathbf{H}$  la matriz diagonal definida por  $\mathbf{h}$ , entonces

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{h}) \implies \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E} = \text{diag}(\mathbf{E}\mathbf{h})$$

A lo que podemos llamar  $\check{\mathbf{H}}$ , de la misma forma llamando a  $\check{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\check{\mathbf{y}}$  la Ecuación 9 queda

$$\check{\mathbf{y}} = \check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{w}} \quad \check{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \check{y}_1 \\ \vdots \\ \check{y}_L \end{bmatrix}$$

En donde los vectores  $\check{y}_\ell$  corresponden a cada  $x_\ell$  codificado. El estadístico suficiente decodifica los correspondientes vectores reduciéndolos nuevamente a un escalar.

$$r_\ell = \frac{\check{\mathbf{h}}_\ell^*}{\|\check{\mathbf{h}}_\ell\|} \check{y}_\ell = \|\check{\mathbf{h}}_\ell\| x_\ell + \frac{\check{\mathbf{h}}_\ell^*}{\|\check{\mathbf{h}}_\ell\|} \check{\mathbf{w}} \quad (10)$$

La detección por máxima verosimilitud se realiza con la misma regla de decisión definida en la Ecuación 4 aplicada sobre el estadístico suficiente definido en la Ecuación 10.

El canal entonces de principio a fin se puede interpretar de la forma expresada en la Figura 3

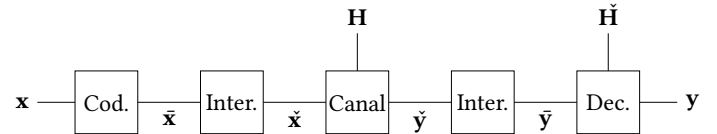


Figura 3: Transmisión-Recepción con diversidad temporal: Codificación, entrelazado, canal físico, desentrelazado, y decodificación.

Incorporando los bloques de entrelazado al canal, la Figura 3 se puede reducir a la Figura 4, efectivamente se transmiten los bloques de datos por un canal lógico, que cuenta con la respuesta al impulso del canal físico pero entrelazada.

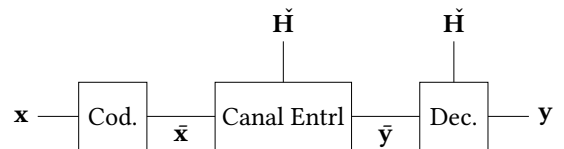


Figura 4: Transmisión-Recepción con diversidad temporal: Codificación, canal entrelazado, y decodificación.

La tasa de error teórica, también definida por Tse [2] estará dada por la siguiente expresión

$$\text{BER}_T = \left( \frac{1-\mu}{2} \right)^L \sum_{\ell=0}^{L-1} \binom{L-1+\ell}{\ell} \left( \frac{1+\mu}{2} \right)^\ell \quad \mu = \sqrt{\frac{\text{SNR}}{1+\text{SNR}}} \quad (11)$$

En una primera instancia, se compara el efecto de aplicar un código de repetición, se utiliza una velocidad de receptor que asegure *full diversity* y se compara  $L = 1$  (sin repetición) contra  $L = 2$  y  $L = 3$ .

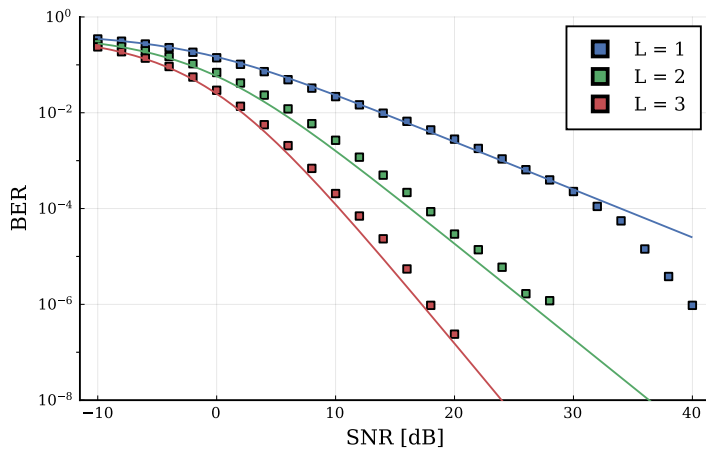


Figura 5: Comparación de efecto de aplicar código de repetición de diferentes tasas y sus respectivas curvas teóricas.

Se compara también el efecto del grado de diversidad, se utiliza para un código  $L = 3$  un receptor estático,  $v_1 = 0$ , un receptor a una velocidad  $v_3$  que asegure *full diversity*, y una velocidad intermedia  $v_2 < v_3$ .

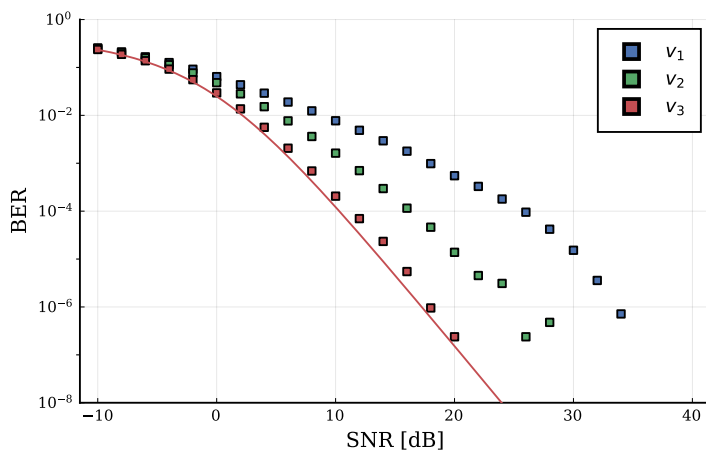


Figura 6: Comparación de efecto de aplicar código de repetición  $L = 3$  a diferentes velocidades contra la curva teórica esperada.

Se observa que existe una ganancia de diversidad apreciable por aplicar código de repetición, incluso a  $L$  baja. Sin embargo, los resultados presentados en la Figura 6 muestran que es necesario asegurar que exista *full diversity* para que la ganancia por diversidad teórica sea realizada.

## Referencias

- [1] D. Tse, "Fundamentals of Wireless Communication," en Cambridge University Press, 2004, cap. 3.1: Detection in a Rayleigh Fading Channel.
- [2] D. Tse, "Fundamentals of Wireless Communication," en Cambridge University Press, 2004, cap. 3.2: Time Diversity.