

# Fundamentos de Comunicaciones Inalámbricas - TP N°2

Matías Roqueta - Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche

## 1 Introducción

En este trabajo práctico vamos a simular y estudiar los modelos estadísticos de un canal inalámbrico, compuesto por un transmisor, un receptor, y una distribución aleatoria de reflectores. Un ejemplo de tal canal ilustrado en la Figura 1.

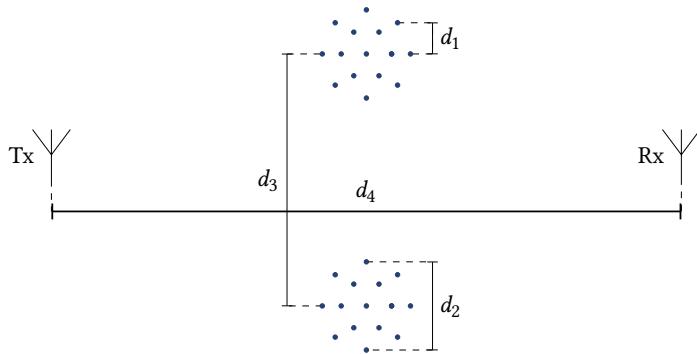


Figura 1: Canal inalámbrico de múltiples caminos entre un transmisor y un receptor en presencia de un número arbitrario de reflectores distribuidos en *clusters*.

Las distancias características del canal,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , y  $d_4$ , son de los siguientes órdenes de magnitud

- Distancia media entre reflectores en un cluster:  $d_1 \sim 1$  m
- Diámetro medio de los clusters:  $d_2 \sim 10$  m
- Distancia media entre los clusters:  $d_3 \sim 100$  m
- Distancia entre transmisor y receptor:  $d_4 \sim 1$  km

Para la simulación se cuenta con una librería de funciones relevantes a la tarea, disponibles en el siguiente [repositorio](#).

## 2 Especificación del Canal

Se definen primero las posiciones del emisor Tx y el receptor Rx, fijas y del orden de 1 km.

```
posTx = (0, 0); posRx = (1000, 0)
```

A continuación se definen las posiciones de 4 clusters de reflectores. Estos se definen simétricamente respecto a la posición del receptor, en función de una distancia de referencia de 200 metros.

```
CS = [posRx.+p.*200 for p in [( 0.5, 1.0),
( 1.0,-0.5),
(-0.5,-1.0),
(-1.0, 0.5)]]
```

Cada cluster tendrá 10 reflectores distribuidos aleatoriamente según la distribución uniforme en un radio de 10 metros.

```
NS = 10 .+ zeros(size(CS)) .|> Int
RS = 10 .+ zeros(size(CS))

S, Ss = Lib.genScatt(NS, RS, CS)
```

Graficamos la realización el canal resultante, obteniendo la Figura 2.

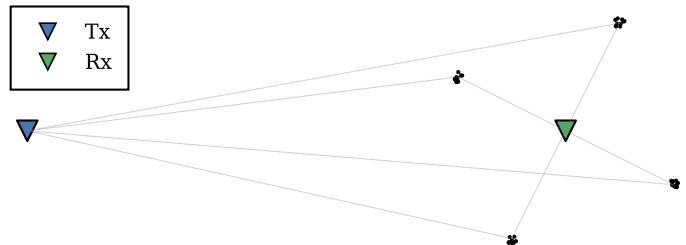


Figura 2: Realización del canal inalámbrico aleatorio

En la figura se grafican en línea punteada los posibles caminos  $Tx \rightarrow$  reflector  $\rightarrow Rx$ . Se calculan las longitudes de los caminos y se presenta su histograma en la Figura 3.

Distribución de Longitud de Caminos

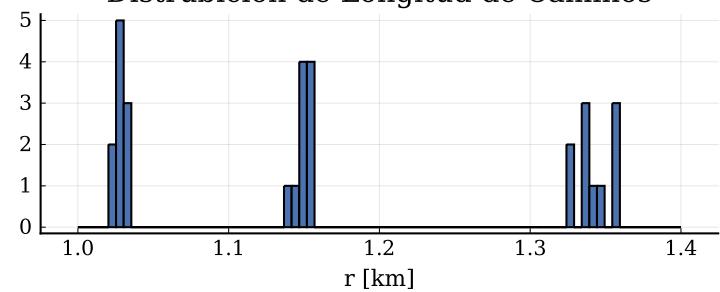


Figura 3: Distribución de longitud de caminos presentes en la realización del canal vista en la Figura 2

### 3 Anchos de banda $W_1 < W_2 < W_3$

Proponga  $W_1 < W_2 < W_3$  tal que:

1. Toda la información del canal esté concentrada en un único tap
2. El sistema pueda resolver los clusters pero no los caminos que los conforman
3. El sistema pueda resolver buena parte de los caminos en cada cluster

Para encontrar tales anchos de banda, hacemos uso del ancho de banda de coherencia, relacionado con el *delay spread*  $T_s$  del canal según

$$W_C \sim \frac{1}{T_s} \quad (1)$$

En donde  $T_s$  es proporcional a la diferencia entre el camino más largo y el más corto del canal. En base a esto encontramos los delay spread en función de las distancias de los caminos, usando las siguientes distancias

- Vector de todas las distancias que constituyen el canal, graficadas en la Figura 3.
- Vector de distancias que constituyen al canal considerando cada cluster como un reflector puntual.
- Vector de todas las distancias que constituyen el canal, agrupadas según el cluster a que pertenecen.

```
dst = Lib.genDists(S, postTx, posRx)
dstC = Lib.genDists(Cs, postTx, posRx)
dstS = [Lib.genDists(s, postTx, posRx)
        for s in Ss]
```

En función de las distancias, calculamos dos anchos de banda de coherencia característicos,  $W_{C1}$  y  $W_{C2}$ .

- $W_{C1}$ : AB de coherencia considerando cada cluster como un reflector puntual
- $W_{C2}$ : AB de coherencia medio de un único cluster, ignorando los demás clusters

```
Wc1 = 1 / Lib.delaySpread(dstC)
Wc2 = mean(1. / Lib.delaySpread.(dstS))
```

Se obtienen así los siguientes anchos de banda de coherencia:  
 $W_{c1} = 0.75$  MHz,  $W_{c2} = 4.59$  MHz

En base a esto, la consigna se cumple eligiendo

- $W_1 < W_{C1} < W_2 < W_{C2} < W_3$

Para cumplir esos requisitos se eligen los siguientes anchos de banda:  $W_1 = 0.08$  MHz,  $W_2 = 4.13$  MHz,  $W_3 = 45.91$  MHz.

Se considera una frecuencia central de 1 GHz, y en esta primera instancia se consideran atenuaciones  $a_i = 1$  para todos los caminos.

```
a_i = Lib.genAtts(dst)
```

Y se procede a analizar la respuesta al impulso del canal para los tres anchos de banda elegidos.

#### 3.1 Ancho de Banda $W_1$

Se genera la respuesta al impulso del canal a un ancho de banda  $W_{c1}$  en su versión analógica y digital, obteniendo la Figura 4. Asimismo se calcula la respuesta en frecuencia correspondiente, obteniendo la Figura 5.

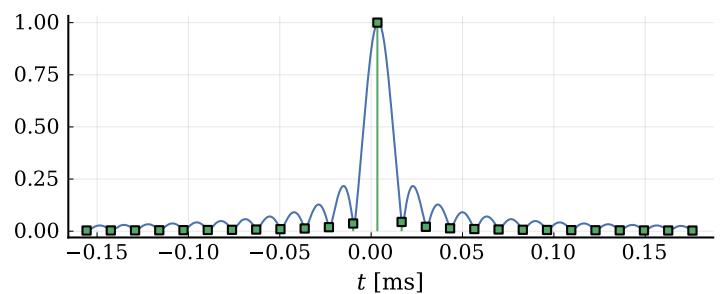


Figura 4: Respuesta al impulso del canal para el ancho de banda  $W_1$  en su versión analógica y digital

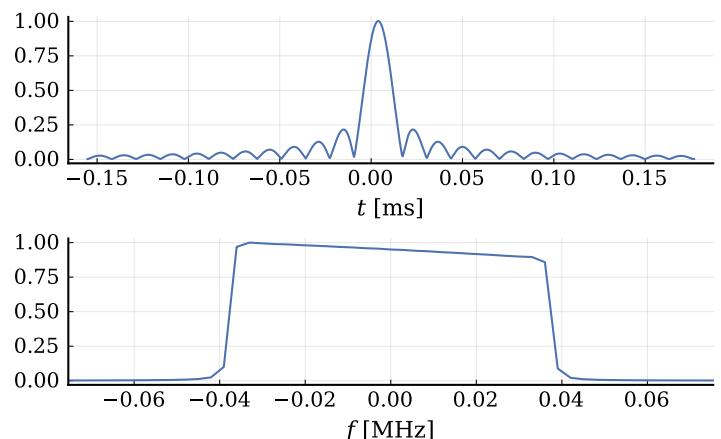


Figura 5: Respuesta al impulso del canal analógico y su correspondiente respuesta en frecuencia para el ancho de banda  $W_1$

Se observa a partir de la Figura 5 que el canal tiene una respuesta en frecuencia plana, correspondiente al comportamiento esperado de un canal con *flat fading*.

### 3.2 Ancho de Banda $W_2$

Se repite el análisis para la misma realización del canal ahora usando un ancho de banda  $W_2$ , obteniendo la Figura 6 y Figura 7.

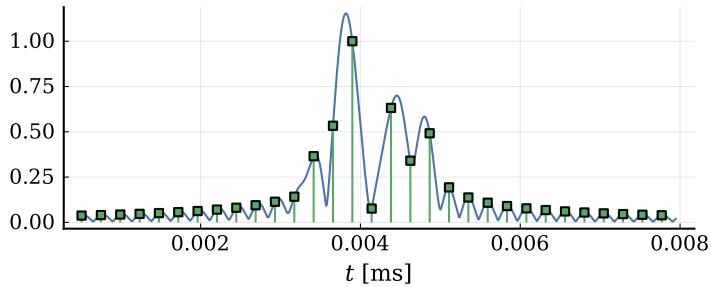


Figura 6: Respuesta al impulso del canal para el ancho de banda  $W_2$  en su versión analógica y digital

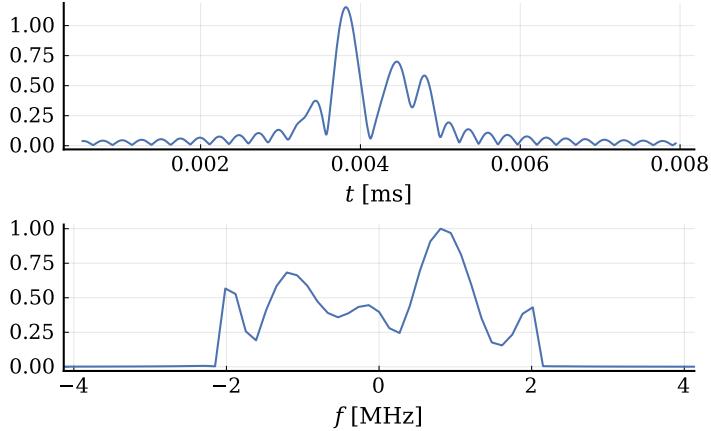


Figura 7: Respuesta al impulso del canal analógico y su correspondiente respuesta en frecuencia para el ancho de banda  $W_2$

Se observa en la Figura 7 que a este ancho de banda el canal deja de tener una respuesta en frecuencia plana. Es decir, el canal deja de tener *flat fading* y pasa a ser un canal selectivo en frecuencia.

### 3.3 Ancho de Banda $W_3$

Finalmente se repite el ensayo para el ancho de banda  $W_3$ , obteniendo la Figura 8 y Figura 9.

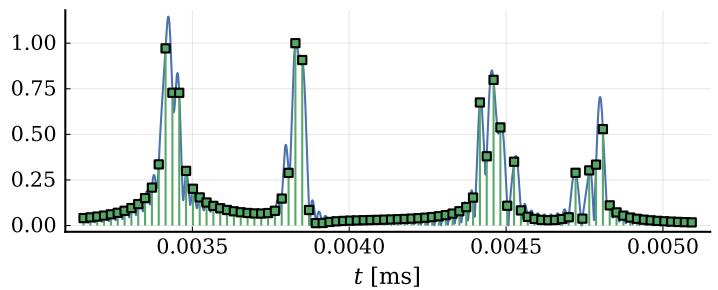


Figura 8: Respuesta al impulso del canal para el ancho de banda  $W_3$  en su versión analógica y digital

Se aprecian en la Figura 8 múltiples picos correspondiendo a los varios reflectores, agrupados según el cluster al que pertenecen.

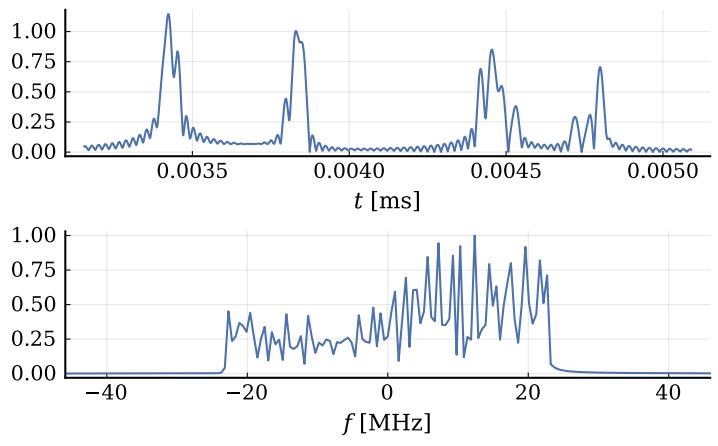


Figura 9: Respuesta al impulso del canal analógico y su correspondiente respuesta en frecuencia para el ancho de banda  $W_3$

Esto se refleja en un comportamiento de selectividad en frecuencia más pronunciado, apreciable en la Figura 9.

## 4 Canal Rayleigh

A continuación se verificará empíricamente que el canal con *flat fading* correspondiente a la Figura 4, tiene comportamiento de canal Rayleigh. Este tipo de canal se caracteriza por la distribución de su tap central  $h_0$

$$h_0 \sim \mathcal{CN}(0, \sigma) \implies |h_0| \sim \text{Rayleigh}(\sigma) \quad (2)$$

$$\phi_{h_0} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$$

La verificación se consigue haciendo múltiples realizaciones del canal y registrando el valor del tap central.

```
hs = Lib.simulateFlatFade(4000; params...)
abs_hs, arg_hs = abs.(hs), angle.(hs)
```

Los datos se ajustarán a una distribución Rayleigh para validar la propiedad de canal. Para estimar el valor del parámetro característico de la distribución  $\sigma$  se usará el estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (3)$$

Se obtiene el valor del estimador  $\sigma = 0.8$  y se utiliza para instanciar una distribución Rayleigh con ese parámetro.

```
est = sqrt(sum(abs_hs.^2)./(2*length(abs_hs)))
ray = Rayleigh(est)
```

Por otra parte la distribución esperada de la fase ya es conocida a priori, es la distribución uniforme de  $-\pi$  a  $\pi$ . No hace falta estimar ningún parámetro y la distribución se instancia directamente.

```
uni = Uniform(-pi, pi)
```

La pdf obtenida se compara con el histograma normalizado obtenido obteniendo la Figura 10, se observa que la distribución estimada se ajusta muy bien a los datos empíricos.

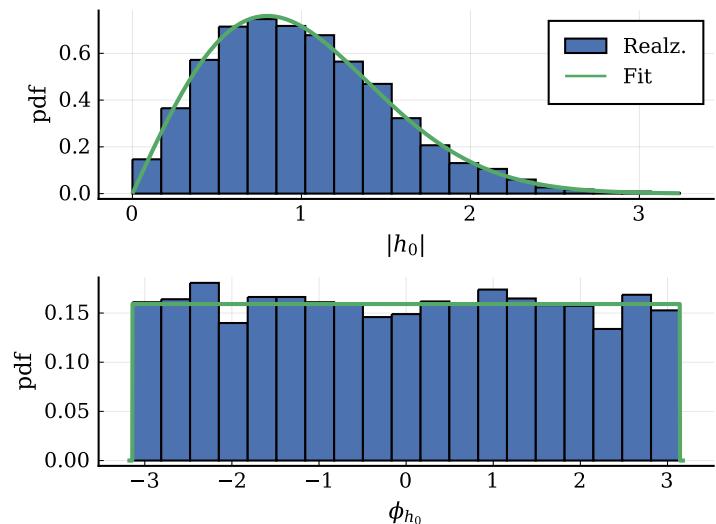


Figura 10: Histogramas normalizados de módulo y fase del tap central sobre varias realizaciones del canal con *flat fading*, comparados con las correspondientes distribuciones esperadas.

## 5 Canal Rician

A continuación se estudia el caso en el que existe un camino que contiene  $K$  veces la energía de la sumatoria de todos los demás caminos (factor  $K$ ), es decir, para algún  $i$  se cumple

$$a_i^2 = K \sum_{j \neq i} a_j^2 \quad (4)$$

En este caso se espera que el canal sea canal Rician, cumpliendo la siguiente distribución de  $h_0$

$$h_0 \sim \sqrt{\frac{K}{K+1}} \sigma e^{j\theta} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathcal{CN}(0, \sigma) \implies |h_0| \sim \text{Rice}(\nu, \sigma) \\ \phi_{h_0} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \quad (5)$$

Para esto se cuenta con una función que modifica las atenuaciones  $a_i$  para generar un camino especular, forzando la Ecuación 4 para algún parámetro  $K$ . Con el nuevo vector de atenuaciones se simula el canal *flat fading* de la misma forma que en caso Rayleigh

```
k = 1; a2_i = Lib.toRician(a_i, k)
params = (params..., a_i = a2_i)
hs = Lib.simulateFlatFade(4000; params...)
abs_hs, arg_hs = abs.(hs), angle.(hs)
```

La distribución Rician se caracteriza por sus parámetros  $\nu$  y  $\sigma$ , pero también se puede caracterizar por el parámetro de forma  $K$  y el parámetro de escala  $\Omega$ . Si se cuenta con esos parámetros, se pueden obtener  $\nu$  y  $\sigma$  según las expresiones

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Omega}{2(K+1)}} \quad \nu = \sigma\sqrt{2K} \quad (6)$$

Trabajar con estos parámetros es muy fácil en nuestro caso ya que el parámetro  $K$  es el mismo parámetro  $K$  de nuestro canal Rician, y  $\Omega$  es el segundo momento de la distribución.

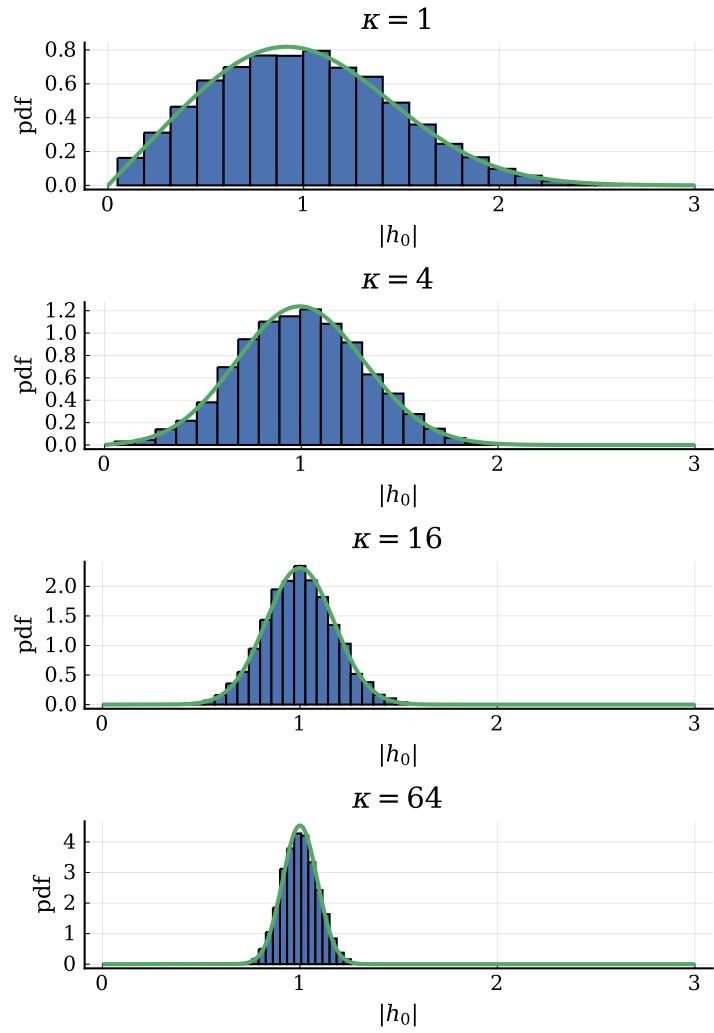
$$\Omega = \nu^2 + 2\sigma^2 = E[|h_0|^2] \quad (7)$$

Utilizando estas ecuaciones es que se instancia la distribución Rician que espera que se ajuste a los resultados de la simulación.

```
omega = mean(abs_hs.^2)
sigma = sqrt(omega/(2*(k+1)))
nu = sigma*sqrt(2*k)
ric = Rician(nu, sigma)
```

Tal como en el caso Rayleigh, se grafican los histogramas de  $|h_0|$  y se comparan con las distribuciones esperadas, obteniendo la Figura 11.

Se omiten los gráficos de la fase, pero estos también resultan consistentes con la distribución uniforme



Al evaluar la fuerza del canal en esta región se obtiene el *heatmap* presentado en la Figura 13.

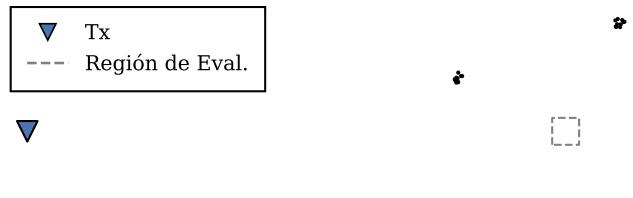


Figura 12: Región geográfica donde se evaluará la fuerza del canal para una realización del canal inalámbrico.

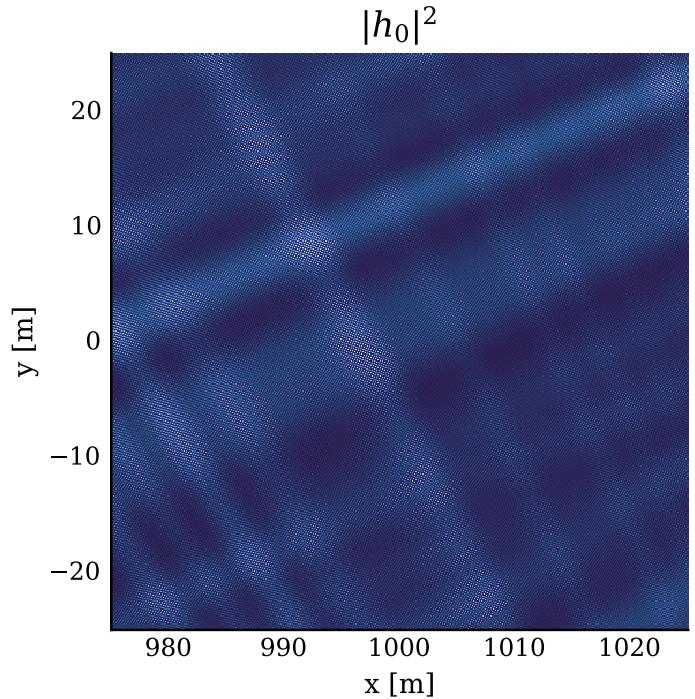


Figura 13: Mapa de fuerza del canal  $|h_0|^2$  para una realización del canal inalámbrico evaluada en la región definida en la Figura 12

En la Figura 13 se observa una superposición de bandas diagonales de mínimos y máximos de interferencia. Esta figura da una idea de la distancia de coherencia del canal.

Esta distancia de coherencia se puede aproximar numéricamente implementando un algoritmo que mida la distancia entre un máximo local y su mínimo local más cercano (por ejemplo con descenso de gradiente). Sin embargo en este caso alcanza con una evaluación cualitativa de la figura para estimar el orden de magnitud de esta distancia, que es del orden de los metros.

## 6 Fuerza del Canal

Nuevamente en el caso de canal Rayleigh se mide la fuerza del canal  $|h_0|^2$  en una región geográfica cercana a la posición del receptor.

La región se define como un rectángulo de  $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$  centrado en la posición del receptor original, tal como es ilustrado en la Figura 12.

## 7 Modelo de Clarke

A continuación se estudia el efecto Doppler en el canal, comparando los resultados con el modelo de Clarke del canal inalámbrico.

El canal bajo estudio tendrá un único cluster de 100 elementos y un radio de 100 m centrado en la posición inicial del receptor, tal como se indica en la Figura 14. El receptor se mueve dentro de este con una velocidad  $v$  constante.

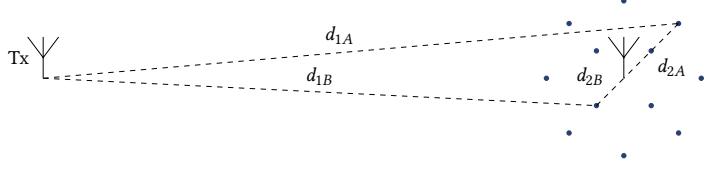


Figura 14: Ejemplo de canal inalámbrico descrito por el modelo de Clarke.

Las atenuaciones de los caminos estarán dadas por

$$a_i = \frac{1}{d_1 d_2}$$

Donde  $d_1$  es la distancia de Tx a un reflector y  $d_2$  la distancia de ese reflector a Rx. Esto se asemeja más al modelo de Clarke ya que si en la Figura 14 la distancia entre Tx y Rx es mucho mayor que el radio del cluster, se aproxima  $d_{1A} \approx d_{1B}$ , pero se mantiene  $d_{2A} \neq d_{2B}$ . De esta forma  $a_i$  describe curvas de nivel que se aproximan a circunferencias centradas en Rx.

Al realizar el canal inalámbrico se obtiene la Figura 15.



Figura 15: Realización del canal inalámbrico aleatorio donde se simulará el efecto Doppler, Tx se encuentra lejano a Rx. Rx se desplaza con una velocidad  $v$ .

Se define un intervalo de muestreo de  $T_s = 1$  ms. Se estudiará el efecto Doppler a dos velocidades diferentes,  $v_1 = 10$  m/s y  $v_2 = 20$  m/s.

$$\begin{aligned} v1 &= 10; \quad x1(t) = posRx.(t*v1, 0) \\ v2 &= 20; \quad x2(t) = posRx.(t*v2, 0) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado en la Sección 3, se mide un ancho de banda de coherencia de  $W_c = 3.11$  MHz, eligiendo entonces  $W = 0.31$  MHz para estar en condición de *flat fading*.

Se grafican algunas realizaciones de la respuesta a impulso del canal inalámbrico en función del tiempo, obteniendo la Figura 16 y Figura 17.

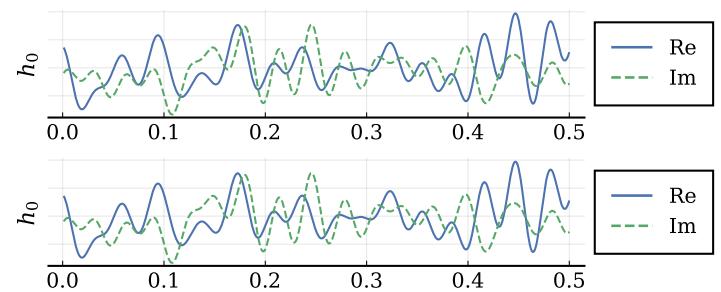


Figura 16: Algunas realizaciones de la variación temporal de la respuesta al impulso del canal a una velocidad de receptor de 10 m/s

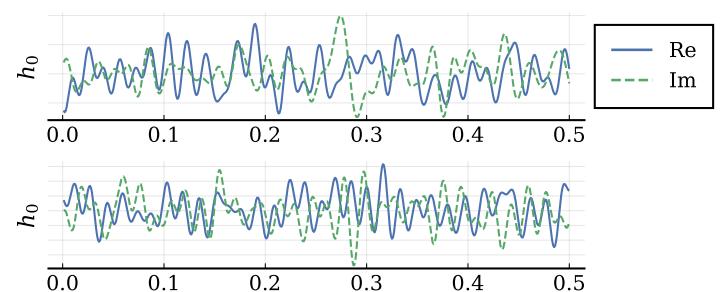


Figura 17: Algunas realizaciones de la variación temporal de la respuesta al impulso del canal a una velocidad de receptor de 20 m/s

La respuesta al impulso es un proceso aleatorio, y se observa que este varía más rápidamente si el receptor tiene una mayor velocidad. Para caracterizar el proceso aleatorio, se calculará la autocorrelación del mismo

$$R_0[\tau] = E[h_0^*[t] h_0[t + \tau]] \quad (8)$$

El modelo de Clarke indica que esta autocorrelación es real pura, y sigue la función de Bessel de primera especie de orden cero

$$R_0[\tau] = a^2 \pi J_0(D_s \pi \tau) \quad (9)$$

En donde  $D_s$  es el *Doppler spread* del canal, dado por

$$D_s = \frac{2f_c v}{c} \quad (10)$$

El modelo de Clarke también nos da la distribuciónpectral de potencia de la autocorrelación.

$$S(f) = \begin{cases} \frac{2a^2}{D_s \sqrt{1 - \left(\frac{2f}{D_s}\right)^2}} & f \in \left[-\frac{D_s}{2}, \frac{D_s}{2}\right] \\ 0 & f \notin \left[-\frac{D_s}{2}, \frac{D_s}{2}\right] \end{cases} \quad (11)$$

En particular la Ecuación 11 determina el ancho de banda de la distribuciónpectral de potencia, que será exactamente igual a  $D_s$ .

## 7.1 Velocidad $v_1$

Se calcula la autocorrelación empírica simulando múltiples realizaciones del canal, y esta se compara con el resultado de la Ecuación 9. Para  $v_1 = 10$  m/s se obtiene la Figura 18.

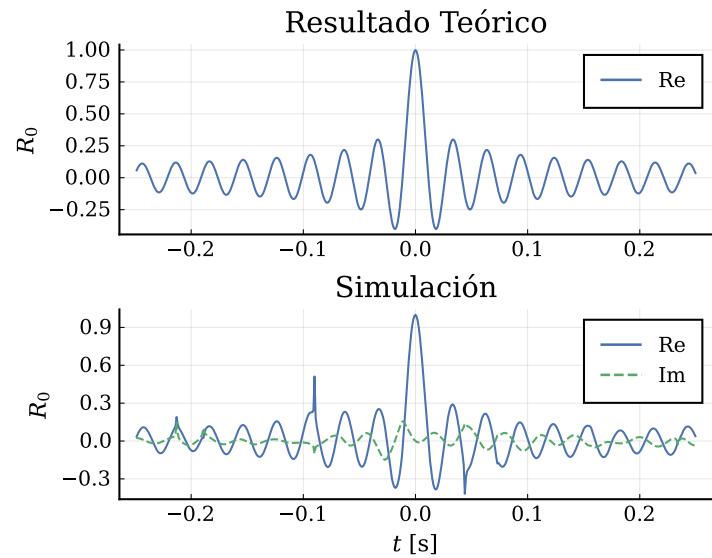


Figura 18: Comparación de autocorrelación teórica del modelo de Clarke y resultado empírico de varias realizaciones del canal en parte real e imaginaria, a velocidad  $v_1$

El *Doppler spread* calculado es de  $D_s = 67.0$  Hz, por lo que se espera que este sea el ancho de banda de la distribuciónpectral de potencia. Esto se verifica con la Figura 19.

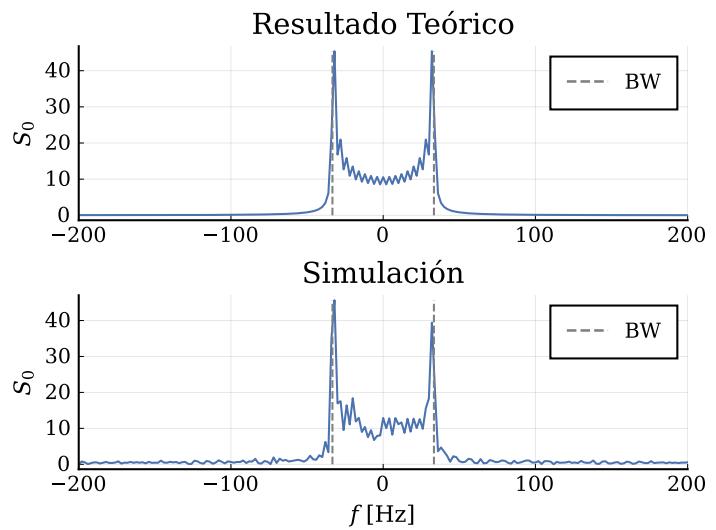


Figura 19: Comparación de densidad espectral de potencia teórica del modelo de Clarke y resultado empírico de varias realizaciones del canal, a velocidad  $v_1$ , con su correspondiente ancho de banda esperado.

Se nota que los resultados de simulación se corresponden bien al modelo de Clarke, una diferencia es que la autocorrelación empírica no es puramente real, tal como se ve en la Figura 18.

Esto se refleja en el hecho de que la distribuciónspectral de potencia para el caso empírico, vista en las Figura 19, no es perfectamente simétrica, que es lo que se esperaría de la transformada de Fourier de una función pura.

## 7.2 Velocidad $v_2$

El experimento se repite para  $v_2 = 20$  m/s, obteniendo la autocorrelación vista en la Figura 20.

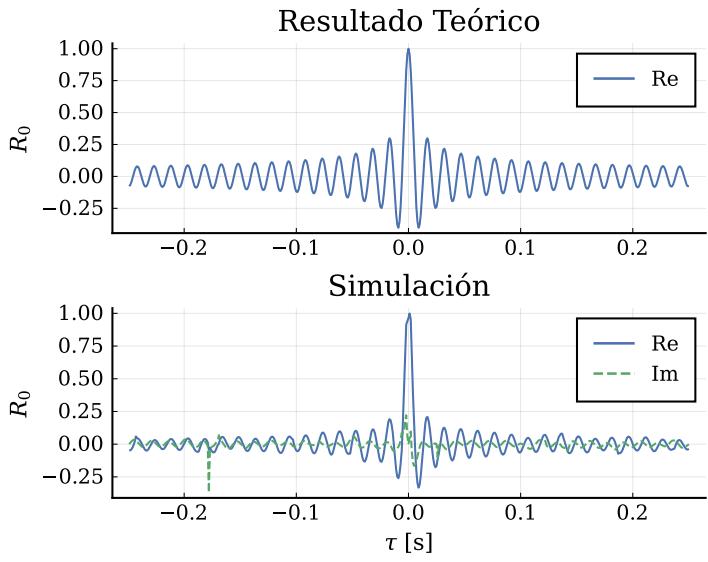


Figura 20: Comparación de autocorrelación teórica del modelo de Clarke y resultado empírico de varias realizaciones del canal a velocidad  $v_2$

El *Doppler spread* calculado es de  $D_s = 133.0$  Hz, se verifica que este sea el ancho de banda de la distribución espectral de potencia con la Figura 21.

Se observa que a mayor velocidad, la autocorrelación  $R_0$  presenta una mayor frecuencia, esto se refleja en el mayor ancho de banda de  $S_0$ , lo cual es el resultado esperado por la Ecación 11 y se valida comparando la Figura 19 y Figura 21.

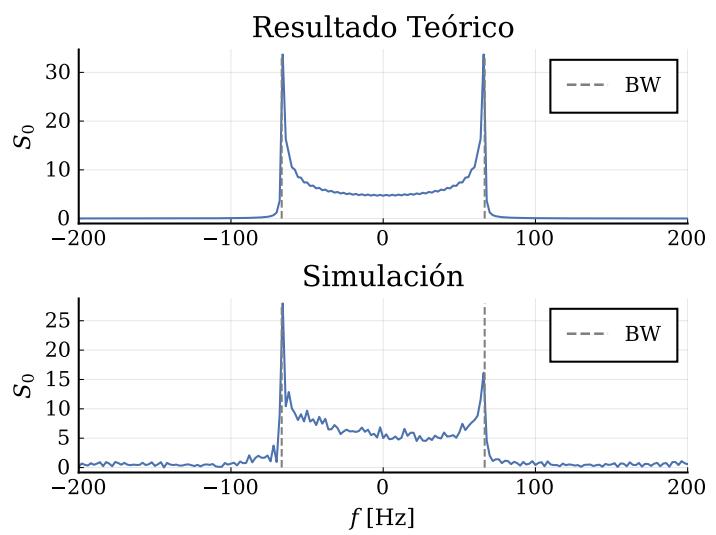


Figura 21: Comparación de densidad espectral de potencia teórica del modelo de Clarke y resultado empírico de varias realizaciones del canal, a velocidad  $v_2$ , con su correspondiente ancho de banda esperado.