

# Fundamentos de Comunicaciones Inalámbricas - TP N°1

Matías Roqueta

## Introducción

Evaluamos un modelo de canal inalámbrico de dos caminos, definido como un sistema lineal variante en el tiempo caracterizado por su respuesta al impulso

$$h(\tau, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) \delta(\tau - \tau_i(t)) \quad (1)$$

Su respuesta en frecuencia se consigue con la transformada de Fourier respecto a la variable  $\tau$

$$H(f, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(t) e^{-2\pi f \tau_i(t)} \quad (2)$$

Estudiamos el caso particular de canal inalámbrico variante en el tiempo presentado en la Figura 1

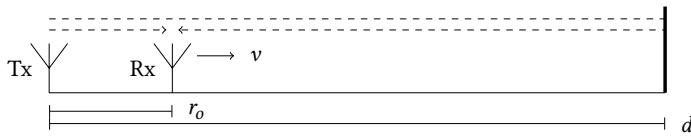


Figura 1: Canal inalámbrico de 2 caminos conformado por una antena emisora Tx estática, antena receptora Rx móvil con velocidad constante, y un reflector.

Este canal es desarrollado en Tse [1] y resulta en

$$a_1(t) = \frac{|\alpha|}{x_1(t)} \quad a_2(t) = -\frac{|\alpha|}{x_2(t)} \quad (3)$$

$$\tau_1(t) = \frac{x_1(t)}{c} \quad \tau_2(t) = \frac{x_2(t)}{c} \quad (4)$$

En donde  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son la distancia de cada camino, y el signo de  $a_2$  contempla el salto de fase por reflexión

$$x_1(t) = r_0 + vt \quad x_2(t) = 2d - r_0 - vt \quad (5)$$

Para estudiar la interferencia resulta necesario expresar la diferencia de fase entre los dos caminos. La expresión resultará en interferencia constructiva cuando  $\Delta\theta$  es un múltiplo par de

$\pi$ , y en interferencia destructiva cuando este es un múltiplo impar de  $\pi$

$$\Delta\theta = 2\pi f \tau_2(t) + \pi - 2\pi f \tau_1(t) \quad (6)$$

Desarrollando la expresión para el canal de la Figura 1 se llega al resultado

$$\Delta\theta = \frac{4\pi}{c} f(d - r) + \pi \quad (7)$$

Vista la Ecuación 7 como función de  $r$ , se define la *longitud de coherencia*  $X_C$  como la distancia entre un máximo y un mínimo de interferencia.

Asimismo, vista como función de  $f$ , se define el *ancho de banda de coherencia*  $W_C$  de la misma forma.

## Implementación

Implementamos la función genérica para un canal de dos caminos en el dominio del tiempo, Ecuación 1

$$h(t', t) = a_i[1](t) \cdot \delta(t' - t_i[1](t)) + a_i[2](t) \cdot \delta(t' - t_i[2](t))$$

Así como en el dominio de la frecuencia, Ecuación 2

$$H(f, t) = a_i[1](t) \cdot \exp(-im*2\pi*f*t_i[1](t)) + a_i[2](t) \cdot \exp(-im*2\pi*f*t_i[2](t))$$

Para simular el caso particular descrito en la Figura 1, especificamos las expresiones de  $a_i$  y  $\tau_i$  de Ecuación 3 y Ecuación 4 como vectores de funciones

$$a_i = [t \rightarrow 1/x_i[1](t), t \rightarrow -1/x_i[2](t)] \\ t_i = [t \rightarrow x_i[1](t)/c, t \rightarrow x_i[2](t)/c]$$

Igualmente definimos los  $x_i$  descritos en la Ecuación 5

$$r(t) = r_0 + v*t \\ x_i = [t \rightarrow r(t), t \rightarrow 2*d - r(t)]$$

## Simulación

Vamos a simular la respuesta del canal en un ancho de banda de 10 MHz respecto a una frecuencia central  $f_0$  de 1 GHz, discretizado en 2048 puntos.

```
f0 = 1e9; BW = 10e6; N = 2048
f = f0.+range(-BW/2, BW/2, N)
dt = 1/(f[2]-f[1])
t' = fftfreq(N, dt) |> fftshift
```

Se fija una distancia de la emisora al reflector de 1 km, y una posición inicial de la receptora de 200 m. Se estudian posiciones de la antena receptora desde  $r = r_0$  hasta  $r = d - r_0$ , tal como indica la Figura 2.

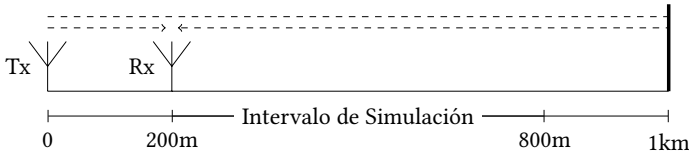
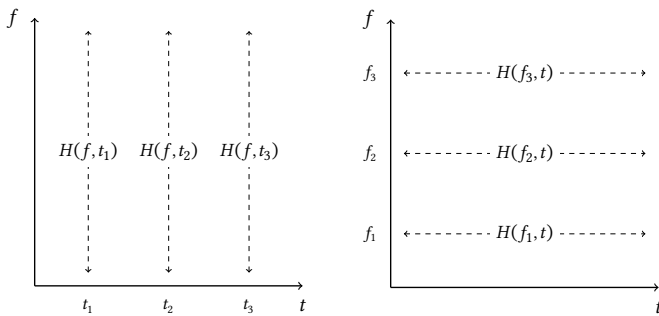


Figura 2: Intervalo de simulación del canal, se evalúan posiciones de la receptora  $r(t) \in [r_0, d - r_0]$ .

Se considera una velocidad de la receptora de 60 km/h y se eligen tiempos  $t$  tal que las posiciones de la receptora estén en el intervalo de evaluación.

```
d = 1000; r0 = 200; v = 60*1000/3600
t = range(0, d-2*r0, N) ./ v
```

Ya que  $H(f, t)$  es una función de 2 dimensiones existen dos formas de realizar la simulación, que requieren fijar uno de los parámetros.



(a) Función  $H(f, t_i)$  variando  $t_i$ . (b) Función  $H(f_i, t)$  variando  $f_i$ .

Figura 3: Distintas formas de simular e interpretar  $H(f, t)$ , visualizadas en el plano tiempo-frecuencia.

Fijar  $t_i$  retorna una respuesta en frecuencia del canal instantánea  $H(f, t_i)$ , mientras que fijar  $f_i$  retorna la evolución temporal de la transferencia del canal en esa frecuencia.

Mientras que  $H(f, t)$  es la expresión general de un canal LTV, en la Figura 1 la distancia  $r(t)$  caracteriza la respuesta del canal. Los resultados se presentan en función de la distancia.

## Resultados

Al realizar la simulación correspondiente a la Figura 3a, se obtienen las respuestas  $H(f, r_i)$  presentadas en la Figura 4. Se observa que el ancho de banda de coherencia incrementa cuando la antena receptora se acerca al reflector

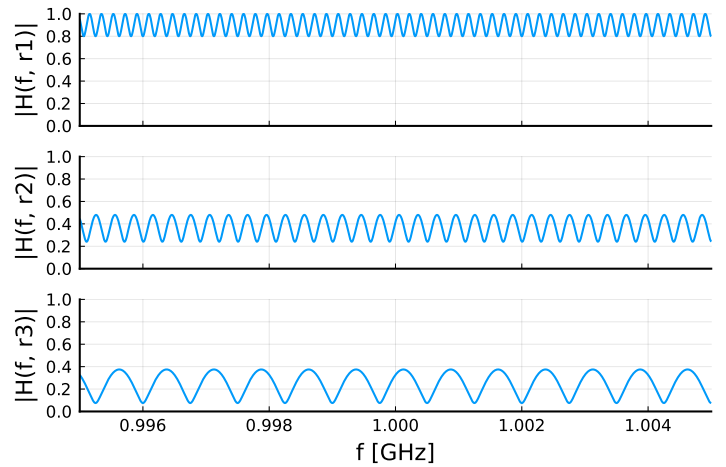


Figura 4: Fila 1:  $r = 200\text{m}$ . Fila 2:  $r = 500\text{m}$ . Fila 3:  $r = 800\text{m}$ .

Este análisis se puede relacionar con la respuesta al impulso instantánea del canal,  $h(\tau, r_i)$ , presentadas en la Figura 5.

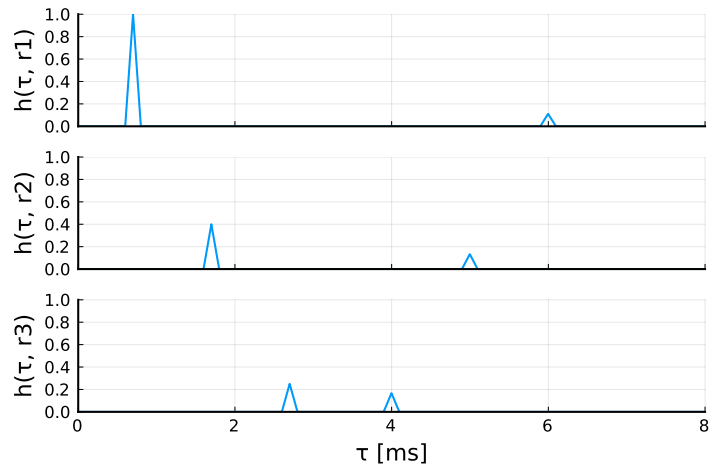


Figura 5: Fila 1:  $r = 200\text{m}$ . Fila 2:  $r = 500\text{m}$ . Fila 3:  $r = 800\text{m}$ .

Si se estudia la respuesta en frecuencia para un determinado valor de  $r$ , se puede comparar con la diferencia de fase para observar el ancho de banda de coherencia correspondiente a esa posición.

Para este análisis se implementa la función que calcula  $\Delta\theta$  según la Ecuación 6, ajustada para que retorne  $\Delta\theta \in [-\pi, \pi]$ .

```
function dif_fase(f, t)
    dif = f*(ti[2](t)-ti[1](t))
    return 2*pi*mod(dif,1)-pi
end
```

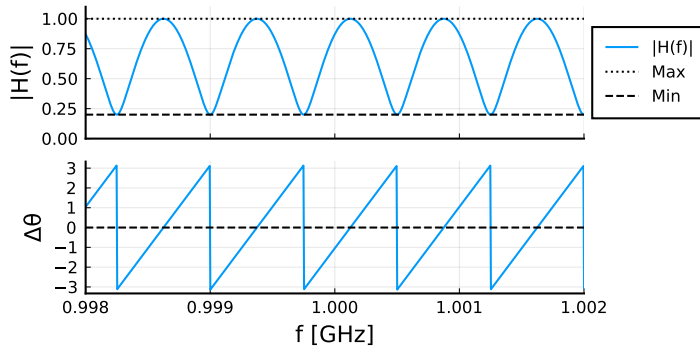


Figura 6: Máximo =  $a_1(r) + a_2(r)$ , interferencia constructiva.  
Mínimo =  $a_1(r) - a_2(r)$ , interferencia destructiva.

```
t2 = range(d-2.01r0, d-2r0, N) ./ v
```

```
35.879999999999995:5.862237420615534e-5:36.0
```

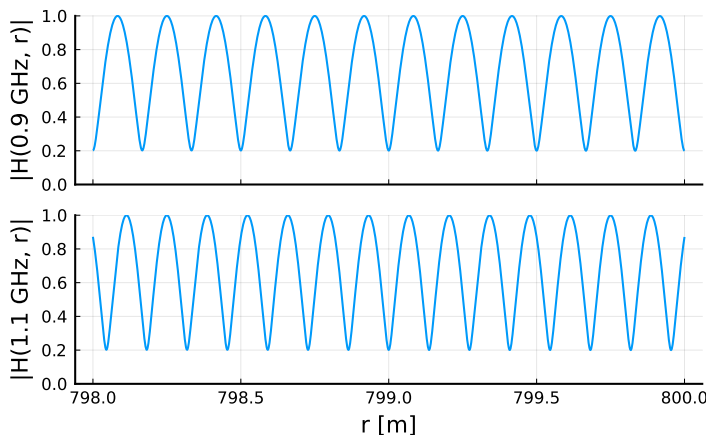


Figura 7: Evolución de la respuesta del canal a determinadas frecuencias según la posición de Rx.

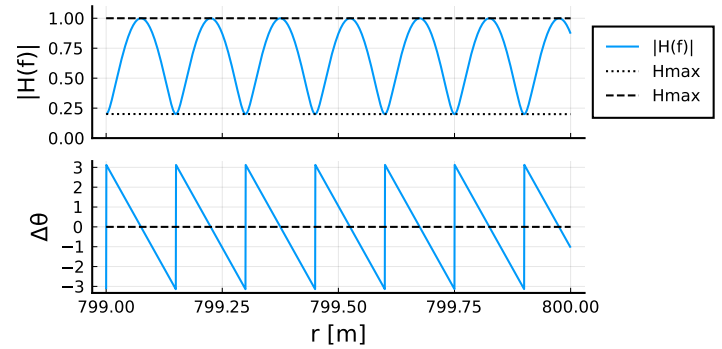


Figura 8: Máximo =  $a_1(f_0) + a_2(f_0)$ , interferencia constructiva.  
Mínimo =  $a_1(f_0) - a_2(f_0)$ , interferencia destructiva.

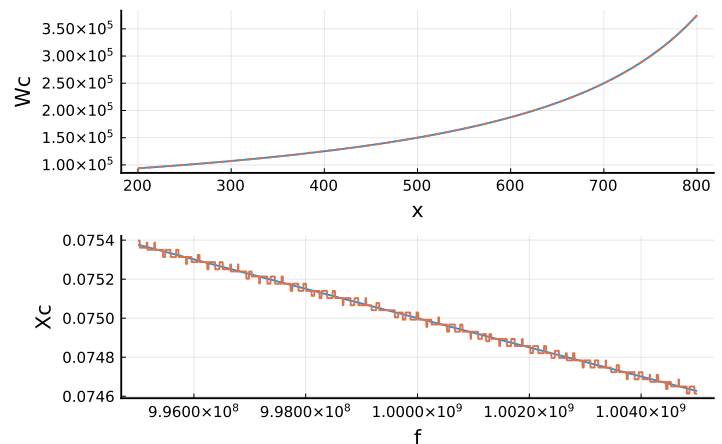
```
Wc(x) = c/(4*(d-x))
Xc(f) = c/(4*f)
```

```
H_abs(f,t) = H(f,t) .|> abs
```

```
T_emp(t, x) = t[argmaxima(x)] |> diff |> mean
```

```
Wc_emp = [T_emp(f, H_abs.(f, ti))/2 for ti in t]
Tc_emp = [T_emp(t2, H_abs.(fi, t2))/2 for fi in f]
```

```
p1 = plot(r.(t), Wc, xlabel="x", ylabel="Wc", legend=false)
plot!(p1, r.(t), Wc_emp, linestyle=:dash, legend=false)
p2 = plot(f, Xc, xlabel="f", ylabel="Xc", legend=false)
plot!(p2, f, Tc_emp.*v, legend=false)
plot(p1, p2, layout=(2,1))
```



## Referencias

- [1] D. Tse, “Fundamentals of Wireless Communication,” en Cambridge University Press, 2004, cap. 2.2: Input/Output Model of the Wireless Channel.