TP N°1

Matías Roqueta

Introducción

Evaluamos un modelo de canal inalámbrico de dos caminos, definido como un sistema LTV caracterizado por su respuesta al impulso

$$h(\tau,t) = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)\delta(\tau - \tau_i(t)) \tag{1}$$

Su respuesta en frecuencia se consigue con la transformada de Fourier respecto a la variable τ

$$H(f,t) = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)e^{-2\pi f \tau_i(t)} \tag{2}$$

Estudiamos el caso particular de canal inalámbrico variante en el tiempo presentado en la Figura 1

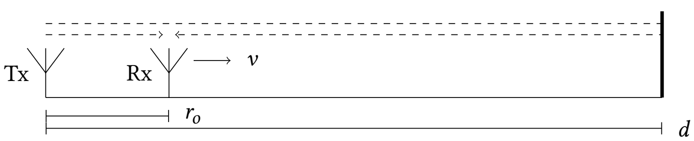

Figura 1: Canal inalámbrico de 2 caminos conformado por una antena emisora Tx estática, antena receptora Rx móvil, y un reflector.

El resultado de este canal es desarrollado en Tse [1], resultando en las expresiones

$$\begin{aligned} a_1(t) &= +\frac{|\alpha|}{x_1(t)} & \tau_1(t) &= \frac{x_1(t)}{c} \\ a_2(t) &= -\frac{|\alpha|}{x_2(t)} & \tau_2(t) &= \frac{x_2(t)}{c} \end{aligned} \tag{3}$$

En donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son la distancia de cada camino, y el signo de a_2 contempla el salto de fase provocado por la reflexión

$$x_1(t) = r_0 + vt \qquad x_2(t) = 2d - r_0 - vt \tag{4}$$

Para estudiar la interferencia resulta necesario expresar la diferencia de fase entre los dos caminos

$$\Delta\theta = 2\pi f[\tau_2(t) - \tau_1(t)] + \pi \tag{5}$$

Desarrollando la expresión se llega al resultado

$$\Delta\theta = \frac{4\pi}{c} f(d-r) + \pi \tag{6}$$

La expresión resulta en interferencia constructiva cuando $\Delta\theta$ es un múltiplo par de π, y en interferencia destructiva cuando este es un múltiplo impar de π

Viendo la Ecuación 6 como función de r a un f fijo, Se define la *longitud de coherencia* como la distancia entre un máximo y un mínimo de interferencia

$$\Delta x_c = \frac{c}{4f} \tag{7}$$

Asimimsmo, vista como función de f a un r fijo, se define el *ancho de banda de coherencia* de la misma forma

$$\Delta f_c = \frac{c}{2(d-r)} \tag{8}$$

Implementación

Implementamos la función genérica para un canal de dos caminos en el dominio del tiempo, Ecuación 1

```
h(t´,t) = ai[1](t).*□(t´.-ti[1](t)).+
          ai[2](t).*□(t´.-ti[2](t))
```

Así como en el dominio de la frecuencia, Ecuación 2

```
H(f,t) = ai[1](t)*exp(-im*2pi*f*ti[1](t))+
         ai[2](t)*exp(-im*2pi*f*ti[2](t))
```

Para simular el caso particular descrito en la Figura 1, especificamos las expresiones de a_i y τ_i de la Ecuación 3 como vectores de funciones

```
ai = [t -> 1/xi[1](t), t -> -1/xi[2](t)]

ti = [t -> xi[1](t)/c, t -> xi[2](t)/c]
```

Igualmente definimos los x_i descritos en la Ecuación 4

```
xi = [t -> r0+v*t, t -> 2*d-r0-v*t]
```

Implementamos también el cálculo de la diferencia de fase, Ecuación 5, tal que retorne valores $\Delta\theta \in [-\pi, \pi]$

```
function dif_fase(f, t)
  dif_fase = 2pi*f*(ti[2](t)-ti[1](t))+pi
  return mod(dif_fase+pi, 2pi)-pi
end
```

```
xc(f) = c/(4*f)
fc(r) = c/(2*(d-r))
```

Simulación

Vamos a simular la respuesta del canal en un ancho de banda de 10 MHz respecto a una frecuencia central f_0 de 1 GHz. El dominio de la frecuencia es discretizado en 2048 puntos, el vector de tiempos τ correspondiente se obtiene con la función `fftfreq`.

```
f0 = 1e9
N  = 2048
f  = range(-10e6, 10e6, N).+f0
dt = 1/(f[2]-f[1])
t´  = fftfreq(N, dt) |> fftshift
```

Se fija una distancia de la emisora al reflector de 1 km, y una posición inicial de la receptora de de 200 m. Se estudian posiciones de la antena receptora desde $r = r_0$ hasta $r = d - r_0$, tal como indica la Figura 2.

Se considera una velocidad de la receptora de 60 km/h y se eligen tiempos t tal que las posiciones de la receptora estén en el intervalo de evaluación.

```
d  = 1000
r0 = 200
```

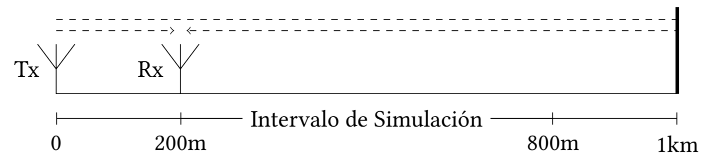

Figura 2: Intervalo de simulación del canal, se evalúan posiciones de la receptora $r_{\mathrm{Rx}} \in [r_0, d - r_0]$.

```
v  = 60*1000/3600
t  = range(0, d-2r0, N)./v
```

Se puede estudiar la transferencia del canal a distintos valores de r, en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. Tales resultados se presentan en la Figura 3

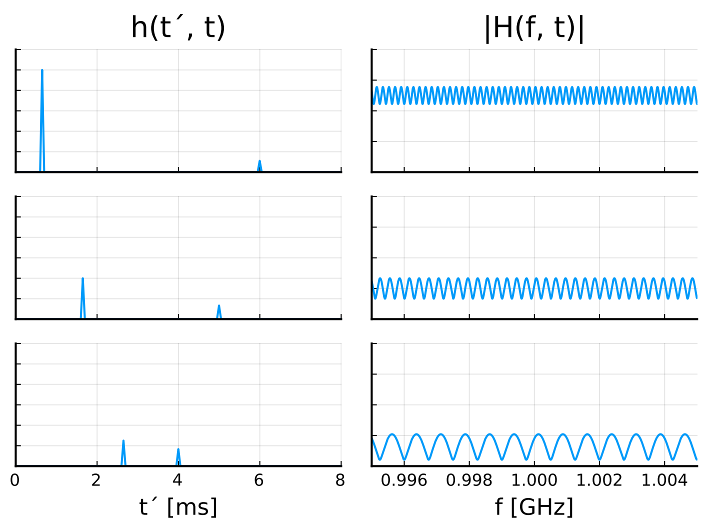

Figura 3: Fila 1: r = 200m. Fila 2: r = 500m. Fila 3: r = 800m. Respuesta del canal en el dominio del tiempo (izquierda) y de la frecuencia (derecha) a diferentes posiciones de receptor.

Si se estudia la respuesta en frecuencia para un determinado valor de r, se puede comparar con la diferencia de fase para observar el ancho de banda de coherencia correspondiente a esa posición.

Alternativamente, se puede fijar una determinada frecuencia de portadora y estudiar la evolución de la respuesta en frecuencia conforme varía la posición del receptor en su recorrido. Tales resultados se presentan en la Figura 5

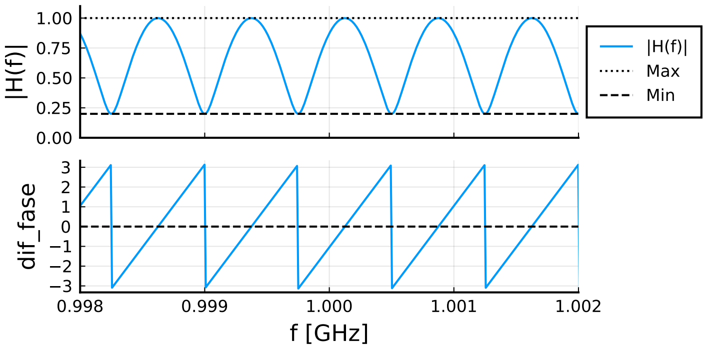

Figura 4: Máximo = $a_1(r) + a_2(r)$, interferencia constructiva. Mínimo = $a_1(r) - a_2(r)$, interferencia destructiva.

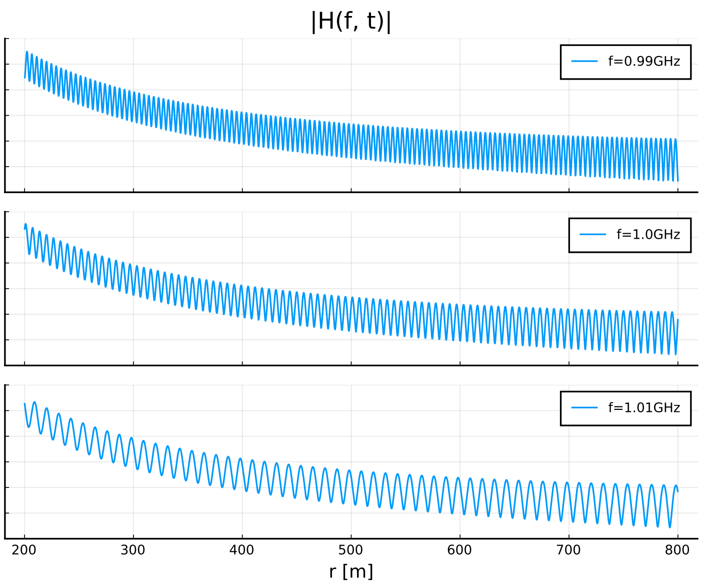

Figura 5: Evolución de la respuesta del canal a determinadas frecuencias según la posición de Rx.

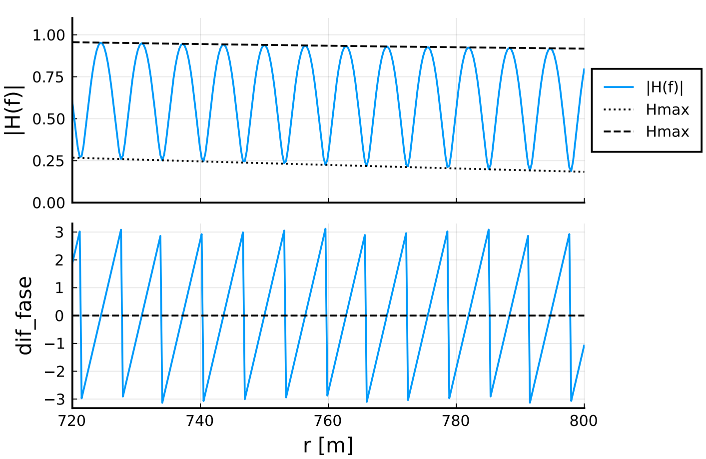

Figura 6: Máximo = $a_1(f_0)+a_2(f_0)$, interferencia constructiva. Mínimo = $a_1(f_0) - a_2(f_0)$, interferencia destructiva.

Referencias

[1] D. Tse, "Fundamentals of Wireless Communication," en Cambridge University Press, 2004, cap. 2.2: Input/Output Model of the Wireless Channel.