

Capítulo 2

Transmisión OFDM en Estándar IEEE 802.11a

En la sección 17.3 del estándar IEEE 802.11[1] se definen las especificaciones a nivel físico de la transmisión empleando señales que utilizan OFDM. El estándar define las técnicas utilizadas para traducir los datos provenientes de capas superiores a formas de ondas que se transmitirán por el medio inalámbrico utilizando OFDM, así como los métodos utilizados para asegurar que el receptor sea capaz de reconocer e interpretar las señales transmitidas.

En este capítulo se resumen los aspectos del estándar IEEE 802.11 relevantes para el desarrollo del proyecto, partiendo de la descripción de la unidad fundamental de la señal, el símbolo OFDM.

Una vez definido el símbolo OFDM, se procede a describir la estructura de la trama que se transmitirá por el medio inalámbrico, que recibe el nombre de unidad de datos del protocolo de capa física (PPDU por sus siglas en inglés).

Finalmente, se detalla el formato la primera parte de la PPDU, llamada preámbulo. Ésta cumple la función de facilitar la detección y el sincronismo de la señal en el receptor, por lo que es de especial importancia para este proyecto.

2.1. Símbolo OFDM

El símbolo OFDM es la unidad fundamental la señal transmitida en cada trama. La construcción del mismo se basa en especificaciones tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

Las componentes en frecuencia se transforman al dominio del tiempo en una ventana temporal de duración definida por el estándar.

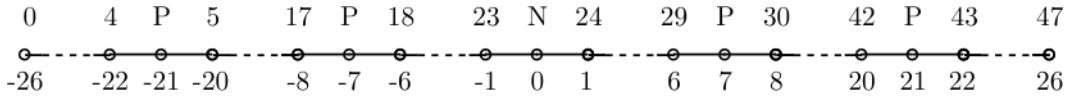


Figura 2.1: Asignación de datos según sus índices a las subportadoras que constituyen un símbolo OFDM.

2.1.1. Subportadoras

Un símbolo OFDM se construye a partir de 52 componentes en frecuencia, que reciben el nombre subportadoras, de las cuales 48 transportan datos y las 4 restantes transportan tonos pilotos.

Los datos transportados en el símbolo llevan índice de 0 a 47, y son números complejos que representan las coordenadas de los bits de un mensaje en una constelación de modulación, la cual puede ser BPSK, QPSK, 16-QAM, o 64-QAM. Los tonos pilotos toman los valores de una secuencia pseudoaleatoria predefinida modulada en BPSK, estos tienen el propósito de preservar el sincronismo durante la recepción con métodos que exceden el alcance de este proyecto.

Las 52 subportadoras, a su vez, son indexadas simétricamente, de -26 a 26, omitiendo el 0 que siempre lleva valor nulo. Las subportadoras de índice -21, -7, 7, y 21 son reservadas para los tonos pilotos y las restantes son asignadas los datos según el mapeo descrito en la figura 2.1

2.1.2. Duración temporal del símbolo

En función del espacio entre subportadoras, Δ_F , el estándar define distintos intervalos temporales que resultan de interés. Dichos parámetros se resumen en la Tabla 2.1. El parámetro Δ_F es determinado por el espaciamiento entre canales en el dominio de la frecuencia, específicamente es el resultado de dividir entre 64 la separación entre los canales.

En el funcionamiento típico, los canales están espaciados 20 MHz, pero el sistema admite operación en modo mitad de reloj, con espaciamiento de 10 MHz, y cuarto de reloj, con espaciamiento de 5 MHz. La longitud de los intervalos temporales son inversamente proporcionales al espaciamiento entre canales, y sus valores se detallan en la Tabla 2.2.

2.1.3. IFFT

La representación en subportadoras de un símbolo OFDM se transforma al dominio del tiempo con un módulo IFFT. Típicamente, se utilizan módulos IFFT con un número de puntos potencia de 2 necesariamente mayor o igual a 64, en número de puntos utilizados recibe el nombre N_{FFT} . Para obtener una correcta transformación del

Parámetro	Significado	Fórmula
T_{FFT}	Duración de los intervalos de IFFT y FFT.	$1/\Delta_F$
T_{GI}	Intervalo de guarda para los símbolos OFDM.	$T_{FFT}/4$
T_{SYM}	Duración de un símbolo OFDM.	$T_{GI} + T_{FFT}$
T_{GI2}	Intervalo de guarda para los campos del preámbulo.	$T_{FFT}/2$
T_{SHORT}	Duración de la primer secuencia de entrenamiento.	$10 \times T_{FFT}/4$
T_{LONG}	Duración de la segunda secuencia de entrenamiento.	$T_{GI2} + 2 \times T_{FFT}$

Tabla 2.1: Parámetros temporales y sus fórmulas en función del parámetro Δ_F .

Parámetro	Valor con canales espaciados 20 MHz	Valor con canales espaciados 10 MHz	Valor con canales espaciados 5 MHz
T_{FFT}	3,2 μ s	6,4 μ s	12,8 μ s
T_{GI}	0,8 μ s	1,6 μ s	3,2 μ s
T_{GI2}	1,6 μ s	3,2 μ s	6,4 μ s
T_{SYM}	4 μ s	8 μ s	16 μ s
T_{SHORT}	8 μ s	16 μ s	32 μ s
T_{LONG}	8 μ s	16 μ s	32 μ s

Tabla 2.2: Valores de los parámetros temporales según el espaciamiento entre canales admitidos por el estándar IEEE 802.11.

dominio se aplica una operación de desplazamiento, transportando las subportadoras de índice negativo al final del vector de entrada del módulo IFFT. Este desplazamiento se esquematiza en la Figura 2.2.

En el estándar se define la transformación con $N_{FFT} = 64$, sin embargo, aplicando el mismo desplazamiento considerando un valor de N_{FFT} mayor es posible y resulta en una mayor resolución temporal de la señal. Cabe destacar que independientemente del valor de N_{FFT} , la duración temporal de la salida es el valor T_{FFT} definido en la Tabla 2.2, y el espacio entre las muestras valdrá $T_S = T_{FFT}/N_{FFT}$.

2.1.4. Prefijo cíclico

Al vector resultante de la operación IFFT se le agrega un intervalo de guarda, (GI por sus siglas en inglés), el cual tiene la función de mitigar efectos de interferencia entre símbolos (ISI por sus siglas en inglés). El GI consiste en un prefijo cíclico de la señal temporal, y se construye de la siguiente forma: se toman las últimas $N_{FFT}/4$ muestras de la señal, y se las concatenan al inicio de las N_{FFT} muestras existentes. Este procedimiento se representa gráficamente en la Figura 2.3. La inclusión del prefijo cíclico completa la estructura del símbolo OFDM que será transmitido.

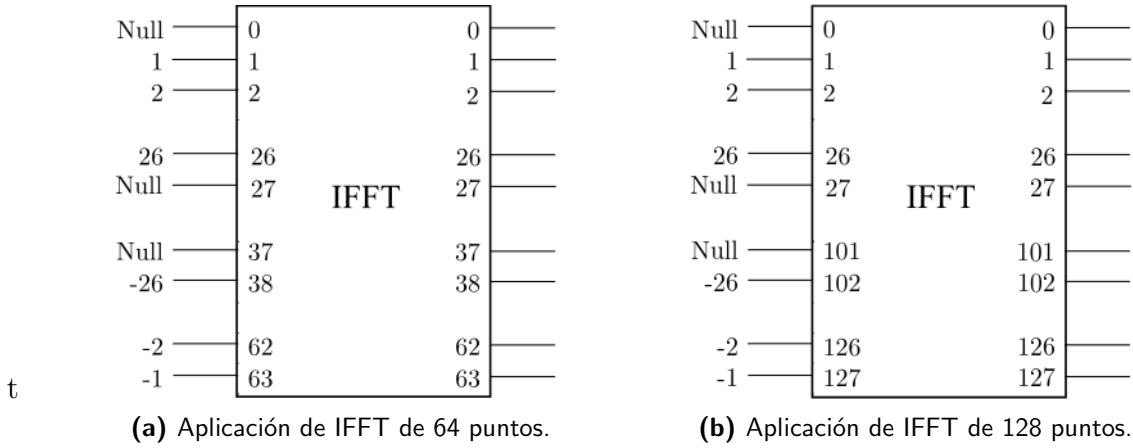


Figura 2.2: Esquema de aplicación de IFFT a una descripción en subportadoras de un símbolo OFDM.

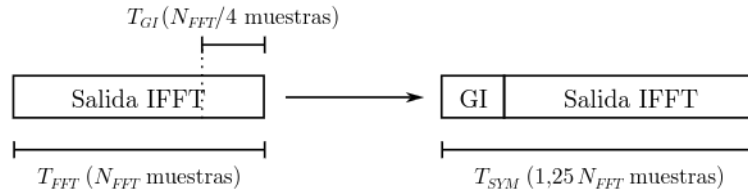


Figura 2.3: Diagrama de aplicación de intervalo de guarda a un símbolo OFDM.

2.2. Estructura de la PPDU

La PPDU consiste en una secuencia de símbolos OFDM que transmiten un mensaje a través de la capa física, la cual se describe en la Figura 2.4, esta incorpora a un mensaje la información requerida para detección, sincronismo, demodulación, y decodificación del mismo. Los campos que la constituyen son los siguientes:

1. PHY Preamble: secuencia de símbolos OFDM predeterminados utilizados para detección, sincronismo, y estimación del canal.
2. SIGNAL: símbolo OFDM que transmite la información necesaria para la recepción de DATA a través de los campos LENGTH y RATE. Siempre es modulado en BPSK y codificado a tasa 1/2.
3. DATA: número variable de símbolos OFDM que transmiten la información del mensaje propiamente dicha, el número de símbolos es informado por LENGTH, y la modulación de cada subportadora y tasa del código de corrección de errores utilizados son determinadas únivocamente por RATE.

El campo PHY Preamble cumple un rol fundamental en lo que hace a la detección y sincronismo tanto en tiempo como en frecuencia en el receptor, por lo que se hará énfasis en su estructura a lo largo de este trabajo. En cambio, las funciones y estructuras de los

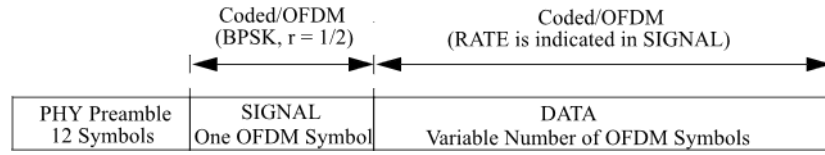


Figura 2.4: Estructura de alto nivel de una PPDU en el estándar IEEE 802.11.

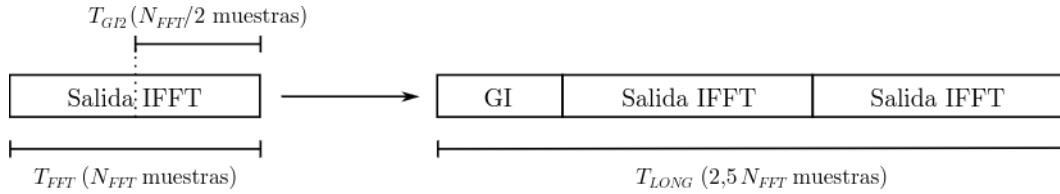


Figura 2.5: Diagrama de aplicación de intervalo de guarda a una secuencia de entrenamiento del preámbulo.

campos SIGNAL y DATA exceden el alcance del proyecto, por lo que no se estudiarán en mayor detalle.

2.3. PHY Preamble

El preámbulo es una forma de onda predeterminedada transmitida al inicio de cada PPDU. Éste consiste en dos secuencias, las cuales se construyen de forma similar a otros símbolos pero en lugar de contener datos y tonos pilotos las 52 subportadoras son asignadas valores predefinidos. Las dos secuencias reciben el nombre de secuencia de entrenamiento de símbolos cortos y secuencia de entrenamiento de símbolos largos, y las asignaciones de subportadoras usadas para construirlas son definidas por los vectores S y L respectivamente:

$$S_{-26,26} = \sqrt{13/6} [0, 0, 1+j, 0, 0, 0, -1-j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0, 0, -1-j, 0, 0, 0, -1-j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1-j, 0, 0, 0, -1-j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0, 0, 1+j, 0, 0] \quad (2.1)$$

$$L_{-26,26} = [1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1] \quad (2.2)$$

A diferencia de los símbolos OFDM pertenecientes a los campos SIGNAL y DATA, las secuencias de entrenamiento tienen el doble de duración, la cual es establecida por los valores T_{SHORT} y T_{LONG} registrados en la Tabla 2.2. Su intervalo de guarda también tiene el doble de duración, definida por T_{GI2} . El procedimiento para construir

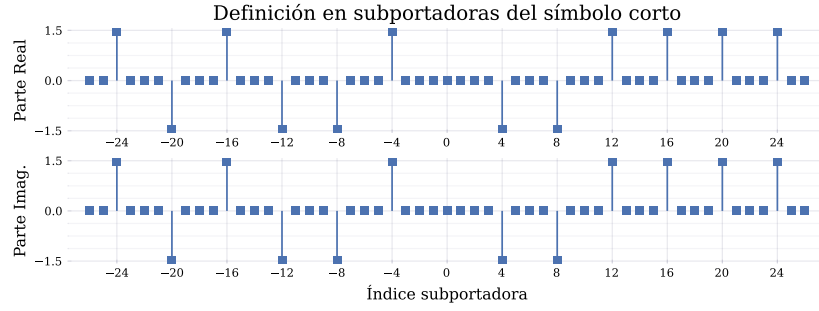


Figura 2.6: Asignación de subportadoras para la construcción de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos.

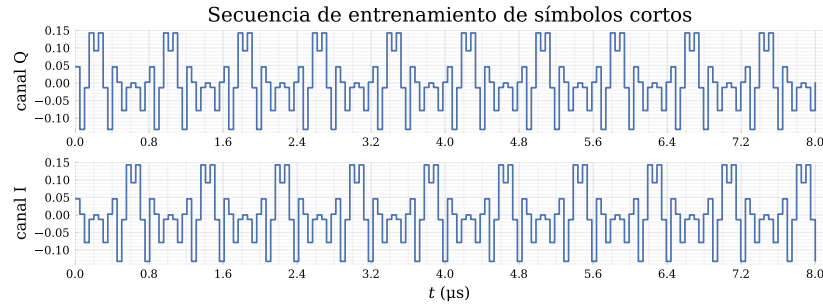


Figura 2.7: Secuencia de entrenamiento de símbolos cortos en el dominio temporal, usando $T_{SHORT} = 8 \mu s$ y una IFFT de 64 puntos.

una secuencia de entrenamiento a partir de la salida del módulo IFFT se describe en la Figura 2.5.

2.3.1. Secuencia de entrenamiento de símbolos cortos

La secuencia de entrenamiento de símbolos cortos representa la primera mitad del preámbulo, construida a partir de el resultado de aplicar la IFFT a la secuencia S definida en la Ecuación 2.1. Esta secuencia asigna valores complejos únicamente a subportadoras con índices múltiplos de 4, la secuencia se grafica en la Figura 2.6.

Aplicar la IFFT a S y agregar el intervalo de guarda produce una señal con un período de duración $T_{FFT}/4$, el cual recibe el nombre de símbolo corto. La secuencia de entrenamiento de símbolos cortos contiene 10 de estos símbolos y es graficada en la Figura 2.7. Ésta secuencia cumple la función de facilitar la detección de la señal entrante en el receptor, así como permitir algoritmos preliminares de sincronismo, y es de vital importancia para este proyecto.

2.3.2. Secuencia de entrenamiento de símbolos largos

La secuencia de entrenamiento de símbolos cortos representa la segunda mitad del preámbulo. La IFFT es aplicada a la secuencia L definida en la Ecuación 2.2 la cual se grafica en la Figura 2.8. A diferencia de S , esta asigna valores a todas las subportadoras.

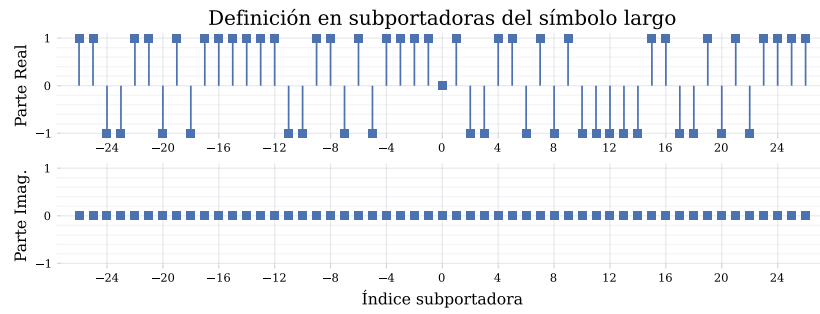


Figura 2.8: Asignación de subportadoras para la construcción de la secuencia de entrenamiento de símbolos largos.

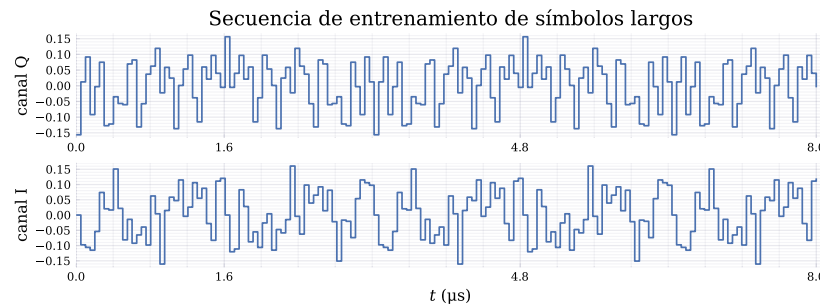


Figura 2.9: Secuencia de entrenamiento de símbolos largos en el dominio temporal, usando $T_{LONG} = 8 \mu s$ y una IFFT de 64 puntos..

En este caso, aplicar la IFFT produce el símbolo largo de duración T_{FFT} , y la secuencia de entrenamiento de símbolos largos la cual es graficada en la Figura 2.9 consiste en 2.5 de estos símbolos. Sus funciones incluyen permitir algoritmos de sincronismo fino en el receptor, así como funciones de estimación de la respuesta al impulso del canal.

2.4. Resumen del capítulo

En el capítulo se resumieron las características de las señales que emplean OFDM de acuerdo con el estándar IEEE 802.11 que son necesarias para poder llevar adelante el proyecto. Se detalla el procedimiento para construir un símbolo OFDM a partir de una secuencia de coordenadas resultantes de una constelación de modulación y como estos símbolos se organizan para formar una PPDU.

Se presta particular atención al campo PHY Preamble, específicamente a su primer mitad, la secuencia de de entrenamiento de símbolos cortos. Conocer la forma y las propiedades de esta secuencia de entrenamiento se permite implementar algoritmos de detección y sincronismo, tal como se describirá en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Métodos de sincronismo

Este capítulo se centra en el problema de sincronismo. En la primer sección se describe término sincronismo en sistemas que emplean OFDM, definiendo dos tipos de error de sincronismo que afectan el desempeño de los sistemas, estos siendo el desvío de temporización de símbolo y el desvío de frecuencia de portadora.

En la segunda sección se describen dos métodos para estimar los errores de sincronismo en cuestión, estos siendo el banco de correladores y el algoritmo *delay and correlate*. Finalmente en la tercer sección se detalla como se implementaron estos métodos en LabVIEW, incluyendo diagramas en bloques de los algoritmos descritos en la sección anterior.

3.1. Sincronismo en sistemas OFDM

En todo medio de transmisión, resolver el problema de sincronismo es fundamental para permitir la correcta recepción de la señal. Se dice que el receptor no está sincronizado cuando este desconoce los parámetros que son necesarios para recuperar una señal en banda base a partir de la recepción de esta señal en radiofrecuencia. Una desviación entre un parámetro supuesto por el receptor y el ideal que permitirá la recepción óptima recibe el nombre de error de sincronismo, y sincronizar el receptor consiste en minimizar estos errores o estimarlos para poder aplicar correcciones.

Existen cuatro tipos de error de sincronismo principales que afectan la recepción de señales OFDM, estos son: desvío de temporización de símbolo, desvío de reloj de muestreo, desvío de frecuencia de portadora, y error de fase de portadora.[2] En el proyecto se implementarán algoritmos para sincronizar el desvío de de temporización de símbolo y el desvío de frecuencia de portadora, los efectos de los cuales se describen a continuación.

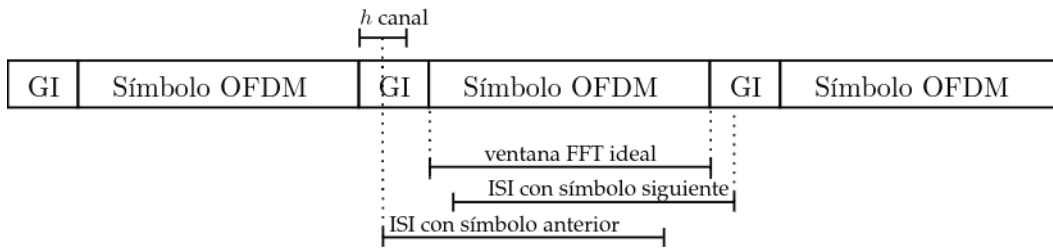


Figura 3.1: Diagrama temporal de aplicación de ventana FFT a una secuencia de símbolos OFDM recibidos, describiendo la ventana ideal y los casos en los que una desviación temporal resulta a interferencia entre símbolos.

3.1.1. Desvío de temporización de símbolo

Se ha visto que la transmisión empleando OFDM consiste en el envío consecutivo de símbolos, los contruídos por una operación IFFT y la aplicación de un intervalo de guarda. Para recuperar los valores asignados a las subportadoras, el receptor debe aplicar una operación FFT al intervalo correspondiente al resultado de la IFFT realizado por el transmisor.

En un canal real, puede existir una respuesta al impulso finita que contamine las muestras pertenecientes a símbolos siguientes con las muestras pertenecientes al símbolo actual. El intervalo de guarda cumple la función de permitir que la respuesta al impulso del canal se extinga antes de la ventana FFT que aplicará el receptor.

La interferencia entre símbolos (ISI por sus siglas en inglés) existe cuando la ventana FFT aplicada por el receptor se desvía respecto a la ideal, ya sea si esta se adelanta y toma muestras pertenecientes al símbolo siguiente, o si se atrasa y toma muestras afectadas por el símbolo anterior. Visualizaciones de este efecto se presentan en la Figura 3.1.

Sabiendo la duración cada símbolo OFDM y suponiendo que el reloj del receptor está suficientemente sincronizado con el reloj del transmisor, se espera que la ventana FFT esté correctamente sincronizada si se determina precisamente la muestra en la inicia la recepción de una trama, por lo que identificar esta muestra es el paso inicial para evitar desvíos en temporización de símbolo.

3.1.2. Desvío de frecuencia de portadora

En un sistema de comunicación digital, una señal digital generada en banda base en el transmisor, luego esta es elevada a radiofrecuencia y es transmitida a través del canal. La señal digital en banda base recibe el nombre de $x[n]$ y cuenta con componentes en fase y cuadratura

$$x[n] = x_I[n] + jx_Q[n], \quad (3.1)$$

mientras que la señal elevada a una frecuencia de portadora f_C recibe el nombre de

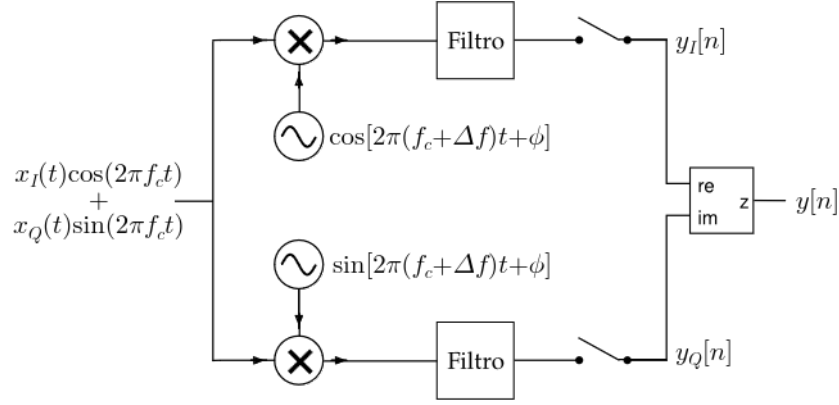


Figura 3.2: Esquema de demodulador coherente, considerando un error de frecuencia entre la señal entrante y el oscilador local del demodulador.

$x_R(t)$, y tiene las siguientes componentes

$$x_R(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) + x_Q(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (3.2)$$

El receptor demodula $x_R(t)$ con un demodulador coherente tal como el que se observa en la figura 3.2, el cual utiliza osciladores locales. En una transmisión ideal el oscilador local conoce f_C , de esta forma pudiendo recuperar exactamente $x[n]$. Sin embargo, oscilador local que tiene una frecuencia propia la cual se puede expresar como $f_c + \Delta f$ en donde Δf es el error de frecuencia. Al demodular la señal en estas condiciones, la señal recibida se verá afectada por este error

$$y[n] = x[n] e^{j2\pi \Delta f T_s n}. \quad (3.3)$$

Si uno además contempla que la fase inicial de la señal es desconocida, este error en fase también se transporta a la señal en banda base

$$y[n] = x[n] e^{j(2\pi \Delta f T_s n + \phi)}. \quad (3.4)$$

Sin embargo, los algoritmos de sincronismo utilizados en este proyecto son capaces de estimar el desvío en frecuencia de portadora sin ser afectados por el error en fase.

3.2. Algoritmos de sincronismo

En esta sección se describirán dos algoritmos de sincronismo capaces de identificar la muestra inicial de la trama y el desvío de frecuencia de portadora en base al conocimiento de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos.

Sus principios de funcionamiento son similares, en su aplicación la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos recibe el nombre de \mathbf{s} , y su longitud en muestras es

conocida y recibe el nombre de N .

Los métodos definen un estadístico Φ a partir de las N muestras más recientes de una señal recibida \mathbf{y} . Teniendo Φ se estimarán un instante de muestreo \hat{n} , que corresponde la muestra en la que se terminó de recibir la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos y determina el inicio de la trama, y asociado a esa muestra se obtiene una estimación del desvío de frecuencia de portadora, $\widehat{\Delta f}$.

3.2.1. Banco de correladores

Este método se basa en en buscar la forma conocida de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos en la señal recibida, calculando la correlación de \mathbf{y} con señales construídas a partir de \mathbf{s} , llamadas referencias.

Estimación de inicio de trama con una única referencia

Suponemos que se desea identificar el instante de inicio de trama, y que no existe desvío en frecuencia de portadoras. En estas conciciones la función que cumple el objetivo de ser máxima en el instante de interés es simplemente el módulo de la correlación con la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos

$$\Phi_{BC}[n] = \left| \sum_{k=0}^{N-1} y^*[n-k]s[N-1-k] \right| \quad (3.5)$$

La aplicación del módulo causa que el error en fase no afecte al estadístic. Para validar este desempeño se grafica en la figura 3.3 el resultado de calcular Φ_{BC} sobre una señal que consiste en únicamente un preámbulo al cual se le ha aplicado un error en fase

Se puede observar en la Figura 3.3 que Φ_{BC} alcanza su valor máximo en la muestra final de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos, por lo tanto \hat{n} es simplemente la muestra que lo maximiza

$$\hat{n}_{BC} = \underset{n}{\operatorname{argmax}} \Phi_{BC}[n] \quad (3.6)$$

Estimación de desvío de frecuencia de portadora

El método tal como fue definido es capaz de estimar el inicio de trama, pero aún no es capaz de estimar el desvío de frecuencia de portadora. Si uno contempla que $y[n]$ pueden tener desvío en frecuencia de portadora al calcular la ecuación 3.5, uno observará una degradación en el máximo de Φ_{BC} . Esta degradación dependerá del

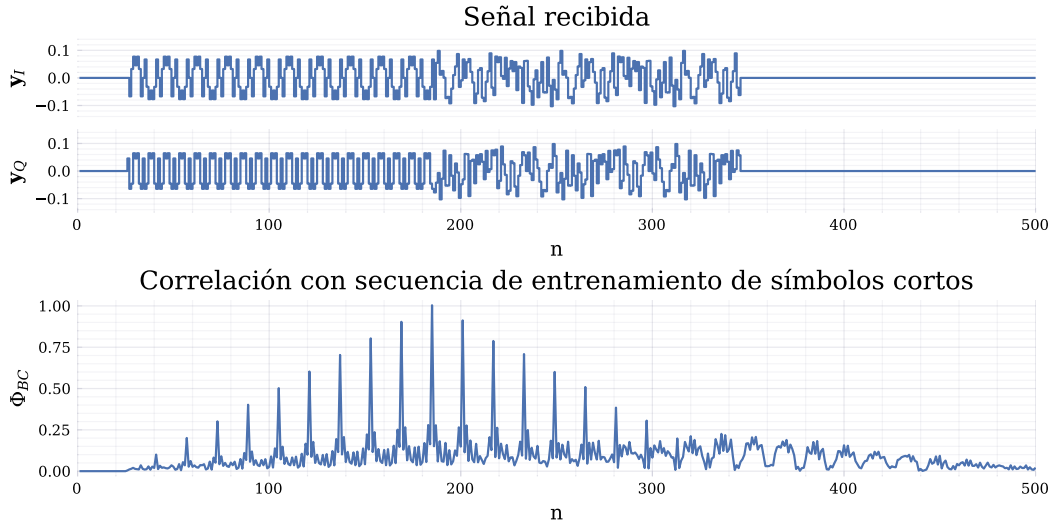


Figura 3.3: Resultado de aplicación del estadístico Φ_{BC} a una señal recibida que consiste en un preámbulo con error en fase.

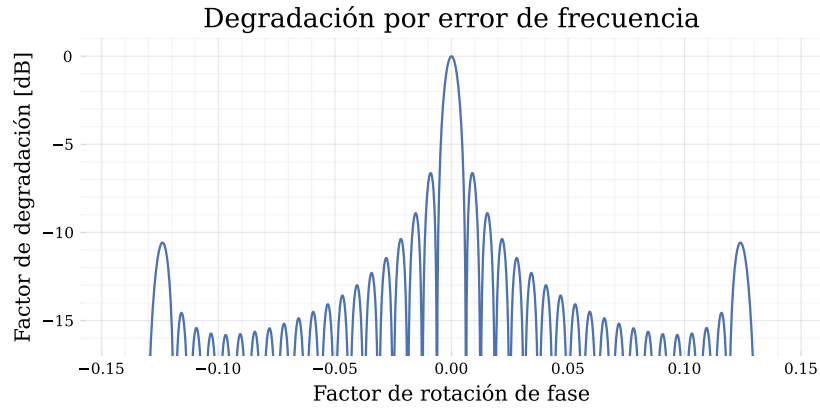


Figura 3.4: Resultado del cálculo numérico del factor de degradación del estadístico Φ_{BC} en función del factor de rotación de fase.

producto $T_s \Delta f$, que llamaremos factor de rotación de fase

$$\text{Factor de rotación de fase} = \Delta f T_s \quad (3.7)$$

Y se cuantificará definiendo el factor de degradación

$$\text{Factor de degradación} = \frac{\Phi_{Max}(\Delta f)}{\Phi_{Max}|_{\Delta f=0}} \quad (3.8)$$

El factor de degradación en función del factor de rotación de fase se calcula numéricamente y se grafica en la figura 3.4. Se elige la convención de encontrar el valor de factor de rotación de fase para el cual el factor de degradación alcanza -3 dB, y esto sucede para $\Delta f T_s = \pm 0,0037$.

Al tomar en cuenta que un desvío de frecuencia de portadora provoca rotación lineal en fase predecible sobre $y[n]$, el principio utilizado para la estimación con un único

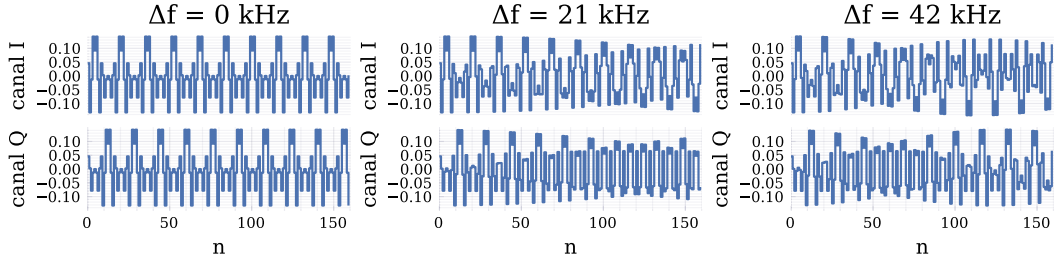


Figura 3.5: Ejemplos de referencias generadas considerando rotación lineal en fase, provenientes de diferentes errores de frecuencia.

correlador se puede extender para estimar Δf . Suponemos que se eligen M frecuencias equiespaciadas dentro de un rango de frecuencias W que puede llegar a tomar Δf . M se elige impar, y las frecuencias equiespaciadas reciben el nombre de Δf_m

$$\Delta f_m = \frac{mW}{M} \quad m \in \left[-\frac{M-1}{2}, \frac{M-1}{2} \right] \quad (3.9)$$

Para cada Δf_m , se genera una referencia del preámbulo con la rotación lineal en fase correspondiente a ese error en frecuencia.

$$r_m[k] = s[k]e^{j2\pi\Delta f_m T_s k} \quad (3.10)$$

El criterio de degradación de -3 dB se puede utilizar para elegir el espaciamiento entre frecuencias para las múltiples referencias, eligiendo W y M tal que el factor de rotación en fase entre frecuencias adyacentes sea menor que 0,0037. Aplicar este criterio considerando $T_{SHORT} = 8\mu s$ y FFT de 64 puntos se obtiene que el espaciamiento en frecuencias debe ser de 21 kHz como máximo. Referencias generadas usando este criterio se visualizan en la figura 3.5.

Teniendo las múltiples referencias uno extiende vectorialmente el estadístico Φ_{BC} calculado

$$\overline{\Phi}_{BC}[n, m] = \left| \sum_{k=1}^N y^*[n-k]r_m[N-k] \right| \quad (3.11)$$

El resultado de aplicar $\overline{\Phi}_{BC}$ a una señal con rotación lineal en fase visualiza en la figura 3.6. Se observa que los índices n y m que maximizan el estadístico son, respectivamente, la muestra final de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos y el índice de la referencia con Δf_m más cercano a Δf . Estos índices serán \hat{n}_{BC} y \hat{m}_{BC} , y este último se usará para calcular $\widehat{\Delta f}_{BC}$

$$\hat{n}_{BC}, \hat{m}_{BC} = \underset{n, m}{\operatorname{argmax}} \overline{\Phi}_{BC}[n, m] \quad \widehat{\Delta f}_{BC} = \frac{W}{M} \hat{m}_{BC} \quad (3.12)$$

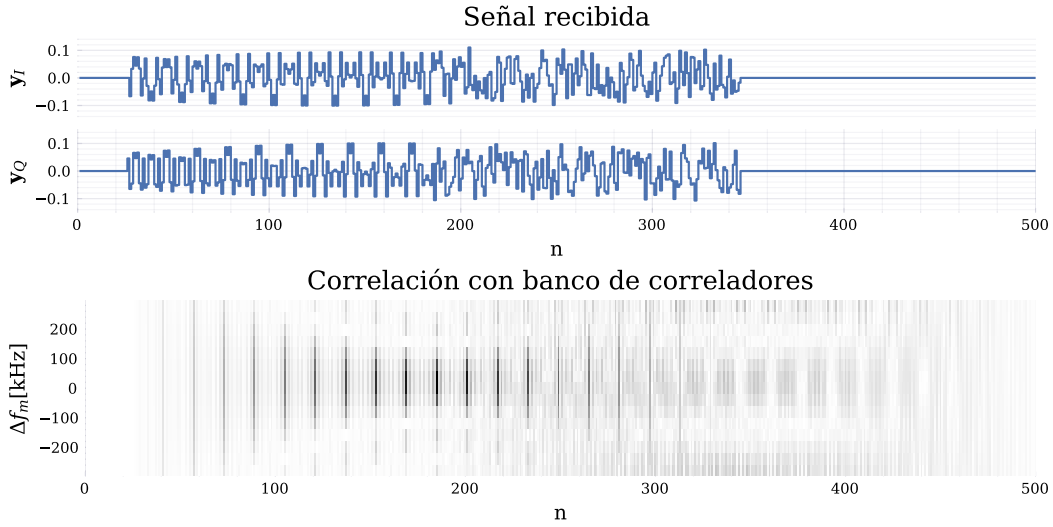


Figura 3.6: Resultado de aplicación del estadístico $\overline{\Phi}_{BC}$ a una señal recibida que consiste en un preámbulo con error de frecuencia.

3.2.2. Método Delay and Correlate

El método *Delay and Correlate*, a diferencia del banco de correladores, no usa la forma de onda explícita de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos para sincronizar, sino que utiliza el conocimiento de su periodicidad. La estrategia se centra en tomar las últimas N muestras de la señal recibida y evaluar si cumplen con la periodicidad esperada de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos.

Sincronización en tiempo y frecuencia

En su versión más simple, este método detecta la periodicidad de la señal comparando la primer mitad de las intervalos de las últimas N muestras recibidas con la segunda mitad del mismo, usando el factor de correlación.

$$\Phi_{DC}[n] = \sum_{k=0}^L y^*[n-k]y[n-k-L] \quad (3.13)$$

El parámetro L usado en la ecuación 3.13 es exactamente $N/2$ donde N es la longitud del preámbulo. Se puede verificar que el módulo de Φ_{DC} es máximo cuando los dos sub intervalos evaluados sean idénticos salvo por una rotación en fase. De esta forma \hat{n}_{DC} nuevamente será la muestra que maximice el estadístico.

$$\hat{n}_{DC} = \underset{n}{\operatorname{argmax}} |\Phi_{DC}[n]| \quad (3.14)$$

A su vez, la fase Φ_{DC} contiene información de la diferencia relativa en fase de cada mitad del intervalo, permitiendo así estimar el error en frecuencia que provocó esa

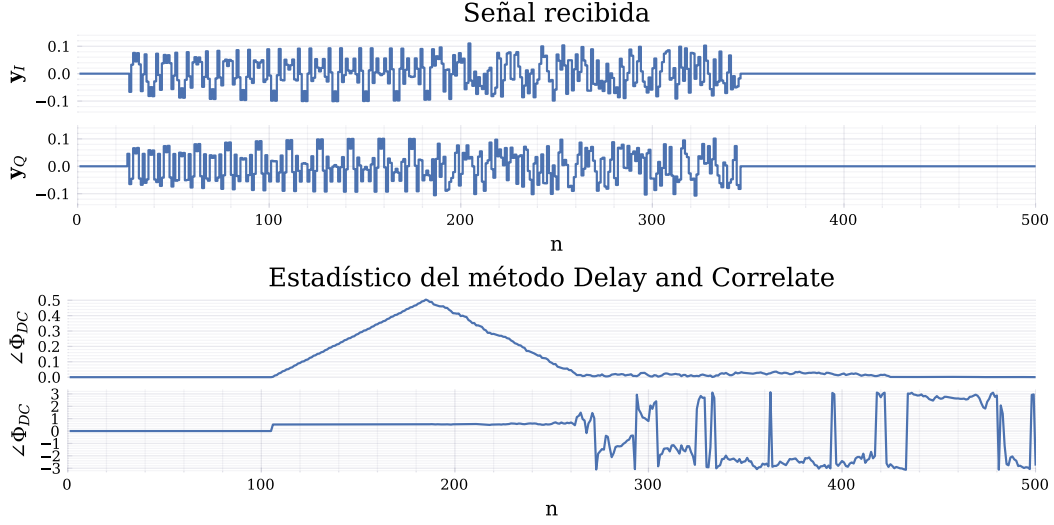


Figura 3.7: Resultado de aplicación del estadístico Φ_{DC} a una señal recibida que consiste en un preámbulo con error de frecuencia.

rotación. La fórmula para estimar el error en frecuencia de esta forma es la siguiente

$$\widehat{\Delta f}_{DC} = \frac{1}{2\pi LT_S} \angle \Phi_{DC}[\widehat{n}_{DC}] \quad (3.15)$$

Los resultados de la aplicación de Φ_{DC} sobre una señal recibida con rotación lineal en fase se visualizan en la figura 3.7.

3.2.3. Implementaciones en LabVIEW

La implementación en LabVIEW de los métodos consisten en implementar los algoritmos para calcular los algoritmos en determinado instante de muestreo n . En estos casos se considera una ventana de evaluación que recibe el nombre de \mathbf{v} , y son las últimas N muestras recibidas.

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} y[N - n + 1] & \cdots & y[n] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

En las expresiones para calcular los estadísticos usados en cada método, $\overline{\Phi}_{BC}$ y Φ_{DC} respectivamente, se omite el índice n ya que este es implícitamente el instante de muestreo en el que se ejecutan las operaciones.

Implementación banco de correladores

El cálculo del estadístico $\overline{\Phi}_{BC}$ implementado en LabVIEW se ve en el diagrama de bloques presentado en la Figura 3.9. Requiere de matriz de referencias, llamada R , la cual es una matriz de $M \times N$ en donde la fila m son las N muestras de la secuencia de

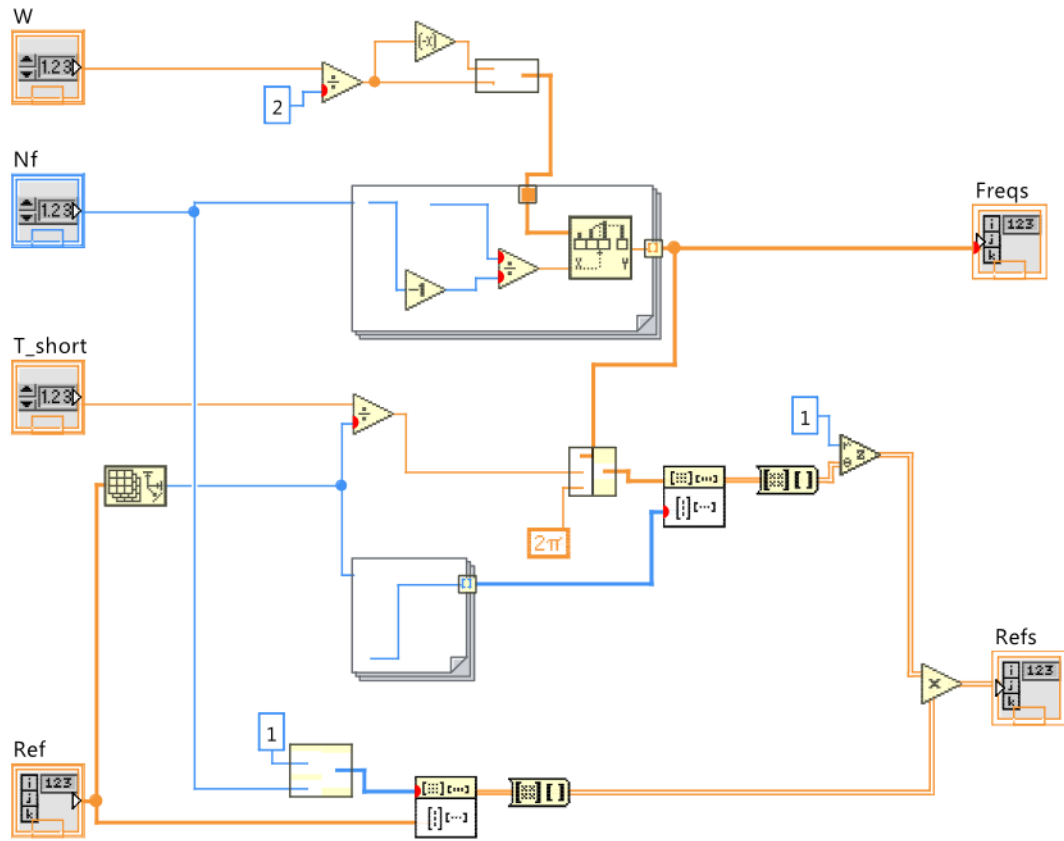


Figura 3.8: Diagrama en bloques de las referencias necesarias para calcular el estadístico $\bar{\Phi}_{BC}$ en LabVIEW.

entrenamiento de símbolos cortos con el correspondiente error de frecuencia aplicado.

$$R_{M \times N} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{r}_0 & \cdots \\ \cdots & \mathbf{r}_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \mathbf{r}_{M-1} & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La construcción de las referencias se consigue con el diagrama de bloques presentado en la Figura 3.8. El cual toma un rango de errores de frecuencia W y un número de frecuencias M , la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos s y su duración T_{SHORT} . Este diagrama en bloques retorna la matriz de referencias y un vector de errores de frecuencia correspondiente a cada fila de la matriz.

El diagrama de bloques presentado en la Figura 3.9 calcula $\bar{\Phi}_{BC}$ a partir de R y \mathbf{v} . Para hacerlo itera sobre las filas de R , en cada iteración calculando el factor de correlación de la ventana con la referencia. Esto se consigue con la operación producto

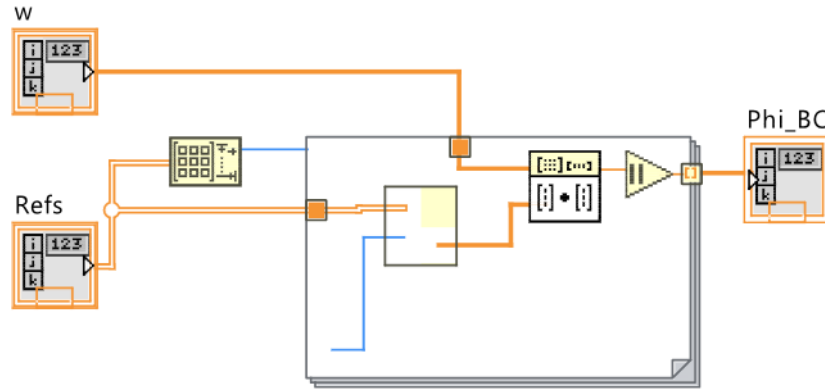


Figura 3.9: Diagrama de bloques del cálculo del estadístico $\overline{\Phi}_{BC}$ en LabVIEW.

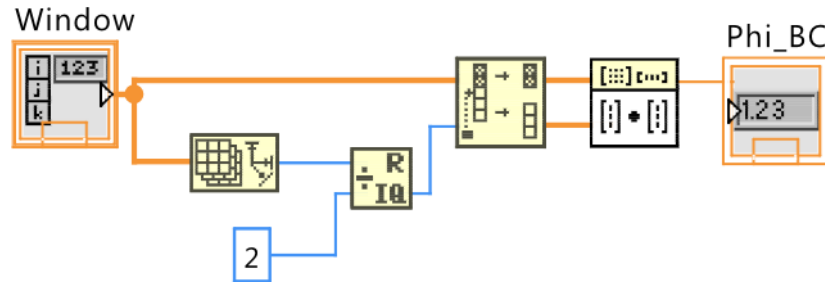


Figura 3.10: Diagrama de bloques del cálculo del estadístico Φ_{DC} en LabVIEW.

interno, el resultado es un vector de M elementos

$$\overline{\Phi}_{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{M-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Implementación método delay and correlate

La implementación del método delay and correlate en LabVIEW resulta mucho más simple, el diagrama en bloques se presenta en la Figura 3.10. El método calcula $L = N/2$ y usa ese valor para particionar \mathbf{v} , luego calcula el factor de correlación entre las dos partes por medio del producto interno

$$\Phi_{DC} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (3.19)$$

En donde \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son la primer y segunda mitad de \mathbf{v} respectivamente.

3.3. Resumen del capítulo

En este capítulo se definieron los tipos de error de sincronismo que se deben estimar para la correcta recepción de tramas OFDM, estos siendo el desvío de temporización de símbolo y el desvío de frecuencia de portadora.

Se definieron dos métodos que son capaces de realizar un sincronismo inicial tanto en tiempo como en frecuencia, haciendo uso del conocimiento del preámbulo definido en el estándar IEEE 802.11, estos métodos son el banco de correladores y el método de retardo y correlación. Una vez descritos los métodos se ilustró como fueron implementados en LabVIEW, por medio de diagramas en bloques.

Capítulo 4

Algoritmo de Detección

En este capítulo se trata el problema de detección, el cual es fundamental resolver para el funcionamiento en tiempo real de los algoritmos de sincronismo implementado. La correcta detección de una señal entrante indica en que instante uno debe invocar los algoritmos de sincronismo definidos e implementados en el Capítulo 3.

La primera parte de este capítulo se centra en la formalización de una prueba de hipótesis que determinará si se está recibiendo una señal, en esta se estudian las propiedades estadísticas del ruido y de una señal afectada por el mismo, y en función de estas propiedades se formaliza una regla de decisión. En la segunda parte se trata el problema de la estimación de la varianza del ruido, ya que conocer este permite la correcta aplicación de la regla de decisión definida.

NOTA: agregar una sección acerca de las implementaciones en LabVIEW al igual que en el capítulo anterior? Las VI son muy simples por lo cual no creo que sume mucho incluirlas

4.1. Prueba de hipótesis

El problema de detección se resolverá por medio de un test de hipótesis sobre una ventana de evaluación \mathbf{y} , de N muestras en donde N es la longitud de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos. La ventana representa las últimas N muestras recibidas por el receptor.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[0] & y[1] & \cdots & y[N-1] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Los pasos para realizar el test son los siguientes

1. Definición de dos o más hipótesis mutuamente excluyentes acerca del origen de las muestras observadas.

2. Definición de un estadístico en función de las muestras bajo estudio, que recibe el nombre $\phi[\mathbf{y}]$.
3. Definición de una regla de decisión sobre el estadístico elegido para discriminar entre las hipótesis disponibles según determinado criterio.
4. Estimación de los parámetros necesarios para aplicar la regla de decisión

4.1.1. Definición de Hipótesis

Se definen dos hipótesis sobre el origen de las muestras, estas reciben el nombre de hipótesis nula (H_0) e hipótesis alternativa (H_1), y son las siguientes:

- H_0 , el intervalo de evaluación contiene únicamente ruido.
- H_1 , el intervalo de evaluación contiene una secuencia de entrenamiento de símbolos cortos afectada por ruido aditivo y modificada por el canal inalámbrico.

Se hacen varias suposiciones en las definiciones de las hipótesis

- Las muestras de ruido siguen la distribución normal compleja, son independientes, e idénticamente distribuidas.
- La respuesta al impulso del canal puede ser aproximada por un único *tap*, por lo que cada muestra de la secuencia transmitida se puede ver modificada por un factor de amplitud y fase, pero no influye en las muestras anteriores ni siguientes.
- El canal presenta desvanecimiento lento, por lo que el factor que modifica la amplitud y fase de una señal recibida se mantiene aproximadamente constante.

Tomando en cuenta las suposiciones, se procede a formalizar la expresión matemática de las hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \mathbf{y} = \mathbf{w} \\ H_1 : \quad & \mathbf{y} = A\mathbf{s} + \mathbf{w} \end{aligned} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{CN}[\mathbf{0}, \sigma^2 I_N] \quad (4.2)$$

En donde \mathbf{s} es la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos, de N muestras de longitud, y A es un factor complejo incógnito pero constante que modifica la amplitud y fase de la secuencia.

Definición de SNR

En el caso de que la hipótesis alternativa sea verdadera, resulta conveniente definir una medida de la relación señal a ruido. La definición utilizada es el cociente entre la

potencia media de una muestra de señal y la potencia media de una muestra de ruido.

$$\text{SNR} = \frac{\text{Potencia media señal}}{\text{Potencia media ruido}} \quad (4.3)$$

Las suposiciones hechas implican que la potencia media de la señal es un valor determinista

$$\bar{P}_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |As[k]|^2 = \frac{1}{N} |A|^2 \|\mathbf{s}\|^2 \quad (4.4)$$

La potencia media del ruido surge de las propiedades estadísticas de su distribución, y se calcula a partir de la propiedad del módulo de una variable aleatoria normal compleja, el cual sigue una distribución Rayleigh

$$w[k] \sim \mathcal{CN}[0, \sigma^2] \implies |w[k]| \sim \mathcal{Ray}[\sigma], \quad (4.5)$$

y el hecho de que media de la distribución Rayleigh es conocida, así como lo es su varianza

$$E[|w[k]|] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad V[|w[k]|] = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2 \quad (4.6)$$

Lo cual permite calcular la potencia media de una muestra de ruido de la siguiente forma

$$E[|w[k]|^2] = V[|w[k]|] + E[|w[k]|]^2 = 2\sigma^2 \quad (4.7)$$

Remplazando los valores obtenidos de las Ecuaciones 4.4 y 4.7 en la Ecuación 4.3 se obtiene la expresión de la SNR cuando la hipótesis alternativa es verdadera

$$\text{SNR} = \frac{|A|^2 \|\mathbf{s}\|^2}{2N\sigma^2} \quad (4.8)$$

4.1.2. Elección de Estadístico

El estadístico utilizado será el mismo que se calcula en el algoritmo de sincronismo con banco de correladores, la correlación con la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos. Por practicidad se expresará de la siguiente forma

$$\phi[\mathbf{y}] = \left| \sum_{k=0}^N s^*[k]y[k] \right| = |\mathbf{s}^* \mathbf{y}| \quad (4.9)$$

Al momento de estudiar las propiedades estadísticas de ϕ resulta conveniente trabajar con un resultado intermedio, el cual es el valor complejo de la correlación previo a la operación módulo.

$$\psi[\mathbf{y}] = \sum_{k=0}^N s^*[k]y[k] = \mathbf{s}^* \mathbf{y} \quad (4.10)$$

4.1.3. Distribución del estadístico ante hipótesis nula

Se estudia la distribución del estadístico ψ en el caso que \mathbf{y} es únicamente ruido

$$\mathbf{y}|H_0 = \mathbf{w} \implies \psi[\mathbf{y}]|H_0 = \sum_{k=0}^{N-1} s^*[k]w[k] \quad (4.11)$$

En estas condiciones, se observa que ψ resulta una sumatoria de muestras de ruido, cada muestra escalada por su correspondiente término de la secuencia de entrenamiento de símbolos cortos. Esto resulta en una sumatoria de variables normales complejas de diferente varianza, la distribución de cada término $z[k] = s^*[k]w[k]$ es la siguiente

$$z[k] \sim \mathcal{CN}[0, |s[k]|^2 \sigma^2] \quad (4.12)$$

La distribución de la sumatoria se calcula con las propiedades de la suma de variables aleatorias gaussianas, y se reduce a la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \psi|H_0 &\sim \mathcal{CN} \left[0, \sum_{k=0}^{N-1} |s[k]|^2 \sigma^2 \right] \\ \psi|H_0 &\sim \mathcal{CN} [0, \|\mathbf{s}\|^2 \sigma^2] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Al igual que se ha visto en la Sección 4.1.1, el módulo de una distribución normal compleja sigue una distribución Rayleigh, por lo que conocemos la distribución de ϕ condicionada por H_0 . Expresamos su distribución de probabilidad acumulada.

$$F_\phi(\phi|H_0) = 1 - \exp \left[-\frac{\phi^2}{2\|\mathbf{s}\|^2 \sigma^2} \right] \quad (4.14)$$

4.1.4. Distribución del estadístico ante hipótesis alternativa

Nuevamente se parte de la distribución de ψ , en este caso cuando la hipótesis alternativa es verdadera.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}|H_1 = A\mathbf{s} + \mathbf{w} &\implies \psi[\mathbf{y}]|H_1 = \mathbf{s}^* (A\mathbf{s} + \mathbf{w}) \\ &= A\|\mathbf{s}\|^2 + \mathbf{s}^* \mathbf{w} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Es evidente la similitud de este caso con el estudiado anteriormente. La ecuación 4.15 describe la suma de un término determinista y un término aleatorio, el efecto del término determinista es únicamente el de desplazar la media de la distribución.

$$\psi|H_1 \sim \mathcal{CN} [A\|\mathbf{s}\|^2, \|\mathbf{s}\|^2 \sigma^2] \quad (4.16)$$

Nuevamente ψ sigue una distribución normal compleja, pero en este caso ya no es

de media nula. Para proceder se normaliza la variable aleatoria, definiendo una nueva variable aleatoria ψ' que tendrá varianza unitaria.

$$\psi' = \frac{\psi}{\|\mathbf{s}\|\sigma} \quad \Rightarrow \quad \psi'|_{H_1} \sim \mathcal{CN}\left[\frac{A\|\mathbf{s}\|}{\sigma}, 2\right] \quad (4.17)$$

Con el mismo factor de normalización definiremos ϕ' .

$$\phi' = \frac{\phi}{\|\mathbf{s}\|\sigma} \quad \longrightarrow \quad \phi' = |\psi'| \quad (4.18)$$

El propósito de la normalización es que esta permite utilizar la definición de la distribución χ no central[3], la cual es definida de la siguiente forma. Si existen n variables aleatorias normales x_i independientes de varianza unitaria y respectivas medias μ_i , y se define z como la raíz de la sumatoria de sus cuadrados

$$z = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (4.19)$$

Esta variable seguirá la distribución χ no central de n grados de libertad y parámetro de no-centralidad λ , el cual es calculado de la siguiente forma

$$\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2} \quad (4.20)$$

Esta definición se puede aplicar a nuestro problema para encontrar la distribución de ϕ' , en tal caso tendremos $n = 2$, x_1 y x_2 son la parte real e imaginaria de ψ' respectivamente, y μ_1 y μ_2 son la parte real e imaginaria de su media compleja. Se obtiene el parámetro λ

$$\mu_1 = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\sigma} \mathcal{Re}[A] \quad \mu_2 = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\sigma} \mathcal{Im}[A] \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\sigma} |A| \quad (4.21)$$

Resulta la distribución

$$\phi'|_{H_1} \sim \chi_{NC}\left[n = 2, \lambda = \frac{|A|\|\mathbf{s}\|}{\sigma}\right] \quad (4.22)$$

Tal como es el caso anterior, se continúa trabajando con la función de probabilidad acumulada

$$F_{\phi'}(\phi'|_{H_1}) = 1 - \int_{\phi'}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2 + \frac{|A|^2\|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2}}{2}\right] I_0\left[\frac{|A|\|\mathbf{s}\|}{\sigma}x\right] dx \quad (4.23)$$

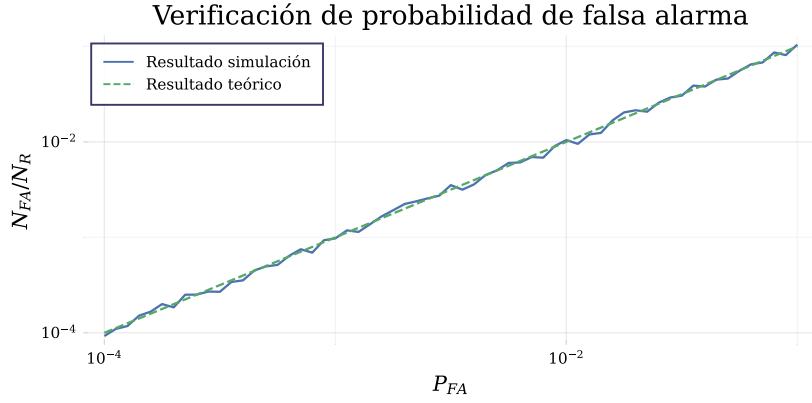


Figura 4.1: Resultados de simulación para verificar la correcta probabilidad de falsa alarma de la regla de decisión. En línea punteada se grafica el valor teórico y en línea continua los resultados de simulación.

Finalmente, se aplica el cambio de variables para revertir la normalización, obteniendo la distribución acumulada de ϕ ante la hipótesis alternativa

$$F_{\phi}(\phi|H_1) = 1 - \int_{\frac{\phi}{\|\mathbf{s}\|\sigma}}^{\infty} x \exp \left[-\frac{x^2 + \frac{|A|^2 \|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2}}{2} \right] I_0 \left[\frac{|A| \|\mathbf{s}\|}{\sigma} x \right] dx \quad (4.24)$$

4.1.5. Regla de decisión

La regla de decisión típica en los casos que se cuentan con dos hipótesis es la comparación del estadístico con un umbral T , tal que si el estadístico excede el umbral se decide por la hipótesis alternativa, mientras que si no lo hace se opta por la hipótesis nula.

$$\phi[\mathbf{y}] \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} T \quad (4.25)$$

En función del estadístico y el umbral se definen la probabilidad de Falsa Alarma P_{FA} , que es la probabilidad de decidir por la hipótesis alternativa cuando la hipótesis nula es verdadera

$$P_{FA} = \int_T^{\infty} f_{\phi}(\phi|H_0) d\phi = 1 - F_{\phi}(T|H_0) \quad (4.26)$$

Asimismo se define la probabilidad de Detección P_D , la cual es probabilidad de decidir por la hipótesis alternativa cuando esta efectivamente es verdadera

$$P_D = \int_T^{\infty} f_{\phi}(\phi|H_1) d\phi = 1 - F_{\phi}(T|H_1) \quad (4.27)$$

El criterio elegido para la elección del umbral es tal que la probabilidad de falsa alarma se mantenga constante a un valor elegido. Tomando la expresión de $F_{\phi}(\phi|H_0)$

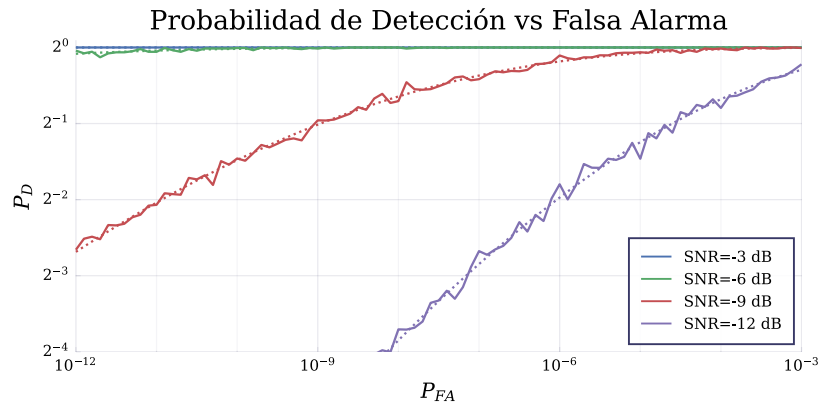


Figura 4.2: Resultados de probabilidad de detección de la decisión en función de la probabilidad de falsa alarma elegida a valores de SNR fijos. En línea punteada se grafican los resultados analíticos, y en línea continua del mismo color los resultados de simulación.

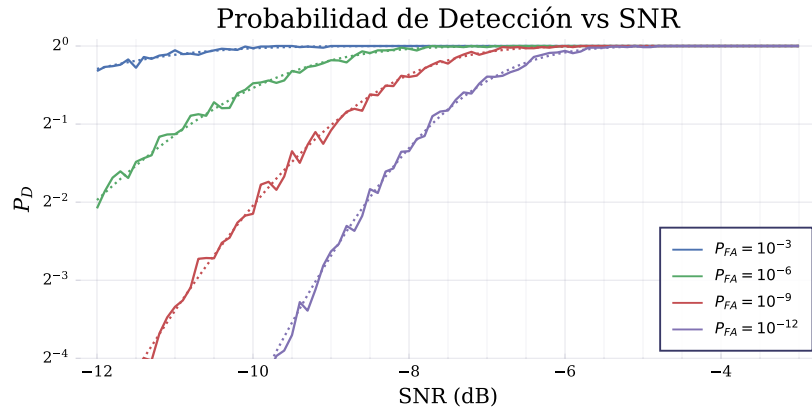


Figura 4.3: Resultados de probabilidad de detección de la decisión en función de la SNR elegida a valores de probabilidad de falsa alarma elegida fijos. En línea punteada se grafican los resultados analíticos, y en línea continua del mismo color los resultados de simulación.

calculado en la ecuación 4.14, y remplazándolo en la ecuación 4.15 se obtiene

$$P_{FA} = \exp \left[-\frac{T^2}{2\|\mathbf{s}\|^2\sigma^2} \right] \quad (4.28)$$

Despejando se obtiene la función para determinar el umbral que obtendrá la probabilidad de falsa alarma deseada

$$T(P_{FA}) = \sqrt{-2\|\mathbf{s}\|^2\sigma^2 \ln [P_{FA}]} \quad (4.29)$$

El correcto funcionamiento del umbral para el criterio elegido se verifica por medio de una simulación, la cual se ejecuta siguiendo los siguientes pasos.

1. Se fija un valor de P_{FA} y SNR. Se elige arbitrariamente un valor de σ^2 y se calcula el valor de T en función del mismo.

2. Para tener un número de realizaciones razonables pero estadísticamente representativo del experimento, se elige hacer $100/P_{FA}$ realizaciones.
3. En cada realización se genera un vector \mathbf{y} de N muestras de ruido normal complejo con la varianza σ^2 elegida anteriormente.
4. Se calcula $\phi[\mathbf{y}]$ y se compara con T , registrando si hay o no una falsa alarma.
5. Una vez terminadas las realizaciones, la probabilidad de falsa alarma empírica es el número de falsas alarmas dividido por el número total de realizaciones.

La simulación verifica que la regla de decisión efectivamente alcance la probabilidad de falsa alarma deseada. Los resultados de la misma se presentan en la Figura 4.1.

4.1.6. Desempeño de la regla de decisión

El desempeño de la regla de decisión se evalúa estudiando cual será la probabilidad de detección del mismo. La probabilidad de detección se conoce al tomar la Ecuación 4.27 y reemplazar $F_\phi(\phi|H_1)$ calculado en la Ecuación 4.24 y el valor del umbral calculado en la Ecuación 4.29

$$P_D = \int_{\sqrt{-2\ln[P_{FA}]}}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2 + \frac{|A|^2\|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2}}{2}\right] I_0\left[\frac{|A|\|\mathbf{s}\|}{\sigma}x\right] dx \quad (4.30)$$

Al observar la expresión de la probabilidad de detección resultante, se nota que tanto A como σ solo influyen en esta a través de la relación entre estos, lo cual es un resultado razonable. Esto incentiva a expresar la probabilidad de detección en función de la SNR, calculada anteriormente en la ecuación 4.3.

$$P_D = \int_{\sqrt{-2\ln[P_{FA}]}}^{\infty} x \exp\left[-\frac{x^2 + 2N \text{SNR}}{2}\right] I_0\left[\sqrt{2N \text{SNR}}x\right] dx \quad (4.31)$$

Al expresarlo así se nota que la probabilidad de detección depende de la probabilidad de falsa alarma elegida, y de la relación señal a ruido presente en la señal. De esa dependencia se pueden evaluar dos medidas de desempeño, la probabilidad de detección en función de la probabilidad de error a SNR constante, y la probabilidad de detección en función de la SNR a probabilidad de falsa alarma constante. Estas métricas de desempeño se validan con simulaciones numéricas, las cuales se realizan de la siguiente forma.

1. Se fija un par de valores de P_{FA} y SNR. Se determinan arbitrariamente valores de A y σ^2 que resulten en el SNR elegido al aplicar la Ecuación 4.3, y se calcula el valor de T .

2. Para tener un número de realizaciones razonables pero estadísticamente representativo del experimento, se elige hacer $100/P_D$ realizaciones.
3. En cada realización se genera un vector de N muestras $\mathbf{y} = A\mathbf{s} + \mathbf{w}$ con los valores de A y σ^2 elegidos anteriormente.
4. Se calcula $\phi[\mathbf{y}]$ y se compara con T , registrando si hay o no una detección.
5. Una vez terminadas las realizaciones, la probabilidad de detección empírica es el número de detecciones dividido por el número total de realizaciones.

Estas simulaciones se ejecutan sobre un vector de valores de SNR manteniendo un valor de P_{FA} fijo, y sobre un vector de valores de P_{FA} manteniendo un valor de SNR fijo. Los resultados de P_D empírico se comparan con las curvas que resultan de evaluar la Ecuación 4.31, y se muestran en las Figuras 4.3 y 4.2 respectivamente.

4.2. Estimación de varianza del ruido

El problema de detección se definió en función de un umbral, se observa en la Ecuación 4.29 que este depende de la varianza del ruido. Sin embargo, la varianza del ruido es desconocida, y esta necesita estimarse para poder calcular el umbral.

Existen varios criterios para elegir un estimador adecuado para el problema, en nuestro caso se elige el estimador insesgado de mínima varianza (MVUE por sus siglas en inglés). Se supone que la estimación del ruido se realiza sobre un vector de muestras que proviene únicamente del ruido, caso que corresponde a la hipótesis nula de la regla de decisión.

4.2.1. Cálculo del MVUE de varianza del ruido

El MVUE se puede encontrar utilizando el teorema de la cota inferior de Cramer-Rao [4], la cual establece que si la distribución de probabilidad de una variable \mathbf{x} afectada por un parámetro θ cumple la condición de regularidad

$$E \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{w}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \right] = 0 \quad (4.32)$$

Y la derivada respecto al parámetro del logaritmo de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria se puede factorizar de la siguiente forma

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}, \sigma^2)}{\partial \theta} = I(\theta) (g(\mathbf{w}) - \theta) \quad (4.33)$$

Entonces $g(\mathbf{w})$ será el MVUE para θ . Además, $I(\theta)$ será la información de Fisher de este parámetro, y esta es inversamente proporcional a la varianza del MVUE

$$\text{Var}[\hat{\theta}_{\text{MVU}}] = \frac{1}{I(\theta)} \quad (4.34)$$

En nuestro caso el parámetro a estimar es la varianza, por lo cual $\theta = \sigma^2$. La distribución del vector de ruido queda representada de la siguiente forma

$$f(\mathbf{w}, \theta) = \frac{1}{(2\pi\theta)^N} \exp \left[-\frac{\mathbf{w}^* \mathbf{w}}{2\theta} \right] \quad (4.35)$$

Se procede a calcular la derivada respecto al parámetro del logaritmo de la distribución de las muestras.

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{N}{\theta} + \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{w}}{2\theta^2} \quad (4.36)$$

La condición de regularidad se puede verificar fácilmente, al considerar que las muestras son independientes e idénticamente distribuidas (NOTA: esto es totalmente trivial y me parece innecesario mostrarlo). A su vez, la Ecuación 4.36 se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{N}{\theta^2} \left(\frac{\mathbf{w}^* \mathbf{w}}{2N} - \theta \right) \quad (4.37)$$

La cual es consistente con la Ecuación 4.33, y nos da el MVUE y la información de Fisher

$$\hat{\sigma}^2_{\text{MVU}} = \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{w}}{2N} \quad I(\sigma^2) = \frac{N}{(\sigma^2)^2} \quad (4.38)$$

4.2.2. Desempeño del estimador

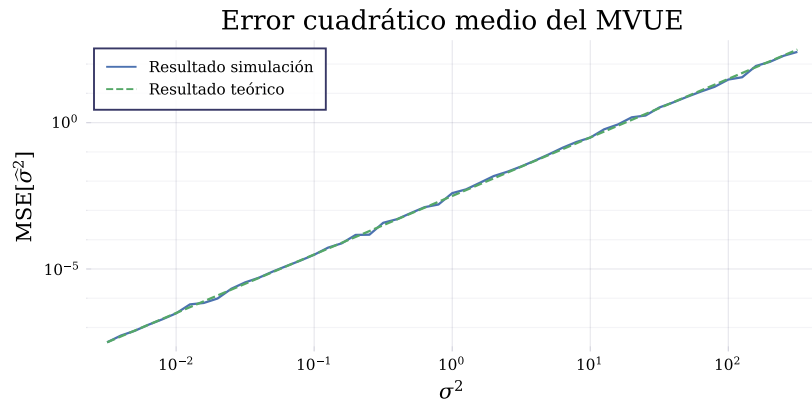
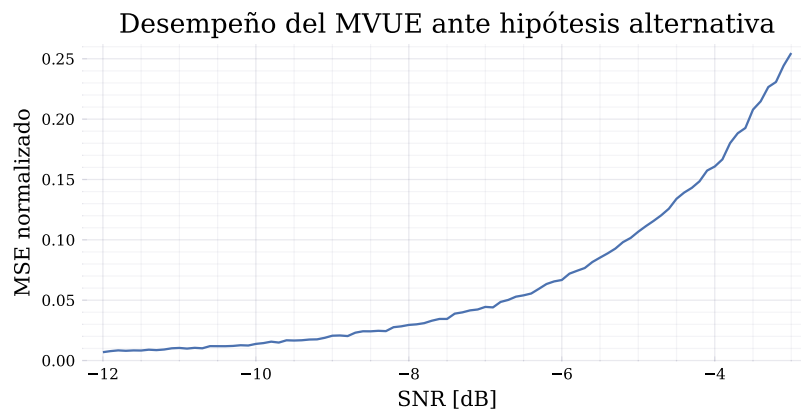
La métrica utilizada para evaluar el desempeño del estimador será el error cuadrático medio, definido de la siguiente forma

$$\text{MSE}[\hat{\theta}] = E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] = \text{Var}[\hat{\theta}] + b^2[\hat{\theta}] \quad (4.39)$$

En donde $b[\hat{\theta}]$ es el sesgo del estimador. En el caso de los estimadores insesgados como lo es el MVUE, el error cuadrático medio es igual a la varianza, la cual conocemos gracias a la Ecuación 4.34.

$$\text{MSE}[\hat{\sigma}^2_{\text{MVU}}] = \frac{(\sigma^2)^2}{N} \quad (4.40)$$

El desempeño del MVUE se valida calculando el error cuadrático el mismo sobre realizaciones de ruido con varianza conocida, y se verifica que este tenga el comportamiento esperado. Este resultado se presenta en la Figura 4.4.

**Figura 4.4:** Verificación .**Figura 4.5:** Asignación de subportadoras para la construcción de la secuencia de entrenamiento de símbolos largos.

En principio, uno podría estimar el ruido a partir de las mismas muestras que se utilizan para calcular ϕ . Sin embargo, estas muestras no siempre van a cumplir la suposiciones que se plantearon para derivar la expresión del MVUE, las cuales implicaban que la hipótesis nula es verdadera. Se procede a evaluar numéricamente si el error cuadrático medio del estimador incrementa si se aplica el mismo ante la hipótesis alternativa.

Ese ensayo se logra generando múltiples realizaciones un vector \mathbf{y} que consista en una secuencia de entrenamiento de símbolos cortos con determinada SNR, calculando el MVUE expresado en la Ecuación 4.38 en esas condiciones, y promediando el error cuadrático. Los resultados se muestran en la Figura 4.5

Se demuestra que efectivamente la estimación del ruido será incorrecta cuando la hipótesis alternativa sea verdadera, este fenómeno afectaría el cálculo del umbral si no se toma en cuenta, la estrategia para evitar este efecto es simple cuando se consideran las propiedades de la transmisión. Se sabe que el preámbulo se recibe al inicio de cualquier señal OFDM, previo a este no existe señal. Al considerar esto uno puede utilizar muestras pasadas para estimar el ruido y calcular el umbral que se aplicará a la muestra actual. regla de decisión

4.3. Resumen del capítulo

Se formalizaron las hipótesis mutuamente excluyentes acerca del origen de las muestras recibidas: una hipótesis nula que corresponde a la ausencia de una señal entrante; y una hipótesis alternativa que corresponde a la presencia de la misma. En el caso de que exista una señal entrante, se definió una medida de relación señal a ruido.

En función de las muestras recibidas se definió un estadístico y una regla de decisión en base a un umbral contra el cual se compara el estadístico elegido para discriminar entre las hipótesis. Se definieron la probabilidad de detección y la probabilidad de falsa alarma, ésta última se usó para elegir el valor del umbral, y se analizó como la probabilidad de falsa alarma elegida y la SNR afectan a la probabilidad de detección.

Finalmente se encontró el estimador insesgado de mínima varianza para la varianza del ruido, el cual será necesario para definir el umbral de la regla de decisión. Se observó que la presencia de señales en las muestras recibidas afecta el desempeño de este estimador, por lo que se propone resolver este problema por medio de un desfase temporal en la ventana que se utiliza para estimar la varianza del ruido y la ventana sobre la cual se aplica la regla de decisión.