

FÍSICA EXPERIMENTAL I

Oscilaciones Estacionarias en una Cuerda

MATÍAS ROQUETA
INSTITUTO BALSEIRO

Resumen

Se estudiaron las características de una onda estacionaria en una cuerda tensa.

Se variaron la longitud de la cuerda y la tensión sobre la misma como posibles variables independientes que condicionan la frecuencia natural del modo fundamental de oscilación de la cuerda, usando regresión lineal para obtener dos valores consistentes de la densidad lineal.

Usando un promedio ponderado por precisión de ambos valores se obtuvo la siguiente densidad lineal.

$$\mu = (57 \pm 5) \times 10^{-6} \frac{kg}{m}$$

Además de medir la densidad lineal de la cuerda, se realizó un estudio de los espectros en frecuencia de determinadas ondas estacionarias, observando propiedades de la frecuencia fundamental de una cuerda y sus correspondientes armónicos.

Por último se validó experimentalmente la propiedad de multiplicidad de las frecuencias de los armónicos de una onda estacionaria.

Se observó un resultado inesperado en la amplitud de los armónicos, viendo que la misma no decaía tanto como se esperaba. Con un análisis cualitativo del fenómeno se pudo plantear una posible explicación este comportamiento.

Introducción

La ecuación 1 es la llamada ecuación de onda en una dimensión, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que describe la evolución espacial y temporal de un determinado campo y .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

Donde v es la velocidad de propagación de la onda descrita.

Si el desarrollo se hace considerando y como el desplazamiento transversal de un punto sobre una cuerda tensa, la ecuación diferencial resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

donde T es la tensión de la cuerda en reposo y μ la densidad lineal de la misma. [1] La velocidad de propagación es por lo tanto determinada por la ecuación

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3)$$

Otro resultado de el movimiento ondulatorio es la ecuación 4 que relaciona la *frecuencia de oscilación* f y la *longitud de onda* λ con la velocidad de propagación.

$$\lambda f = v \quad (4)$$

Una familia de soluciones a la ecuación diferencial de onda es la ecuación de onda *estacionaria*, que ocurre cuando la onda oscila manteniendo dos puntos fijos, llamados nodos. La solución estacionaria está restringida por la ecuación 5, donde L es la longitud de la cuerda.

$$\lambda_n = \frac{n}{2} L \quad n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

La ecuación 6 es una solución estacionaria a la ecuación diferencial 2.

$$y(x, t) = A \cos(2\pi f_n t) \sin\left(2\pi \frac{1}{\lambda_n} x\right) \quad (6)$$

A cada una de estas soluciones se le llama *modo normal de oscilación*, siendo λ_1 el *modo fundamental* y toda otra solución un *armónico* del mismo. La figura 1 ilustra el modo fundamental de oscilación y sus primeros tres armónicos.

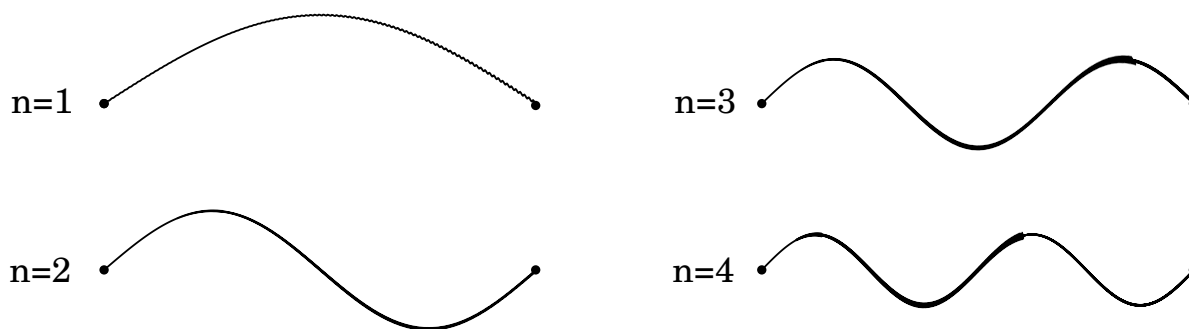


Figura 1: Primeros cuatro modos normales de oscilación de una cuerda.

Los modos normales de oscilación representan una base vectorial del espacio de oscilaciones, por consecuencia cualquier oscilación arbitraria de la cuerda tal como la expresada en la figura 2 es resultado de combinación lineal de estos modos.

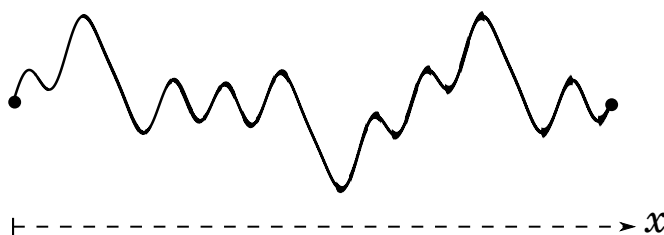


Figura 2: Oscilación estacionaria arbitraria de una cuerda.

Resulta útil estudiar la frecuencia de oscilación de cada modo normal de oscilación, relacionando las ecuaciones 3, 4, y 5 se obtiene la ecuación

$$f_n = \frac{2}{nL} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7)$$

Las figuras 1 y 2 son obtenidas considerando $y(x, t_0)$ para un instante t_0 fijo. Si en cambio se evalúa $y(x_0, t)$ en un punto x_0 se obtiene la evolución temporal de y en ese punto. Esta función temporal se puede estudiar en el dominio de la frecuencia aplicando una transformada de Fourier y obteniendo así los armónicos constitutivos de la señal.

La frecuencia de un modo de oscilación está inversamente relacionada con la longitud de onda del mismo por la ecuación 4. En base a las relaciones de λ_n , la ecuación 8 establece la relación entre las frecuencias de los modos f_n .

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2} \lambda_1 & \lambda_3 &= \frac{1}{3} \lambda_1 & \lambda_4 &= \frac{1}{4} \lambda_1 & \lambda_5 &= \frac{1}{5} \lambda_1 & \dots \\ f_2 &= 2 f_1 & f_3 &= 3 f_1 & f_4 &= 4 f_1 & f_5 &= 5 f_1 & \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Método Experimental

El arreglo experimental ilustrado en la figura 3 consiste en una cuerda metálica sujeta en un extremo a un punto fijo y en el otro a una polea por el medio del cual se le puede aplicar la tensión T deseada a la cuerda colocando pesas.

Un traste móvil se puede presionar para fijar un nodo en ese punto de la cuerda, fijando L . En un punto determinado de la cuerda, un sensor inductivo mide el movimiento de ese punto de la cuerda en el tiempo.

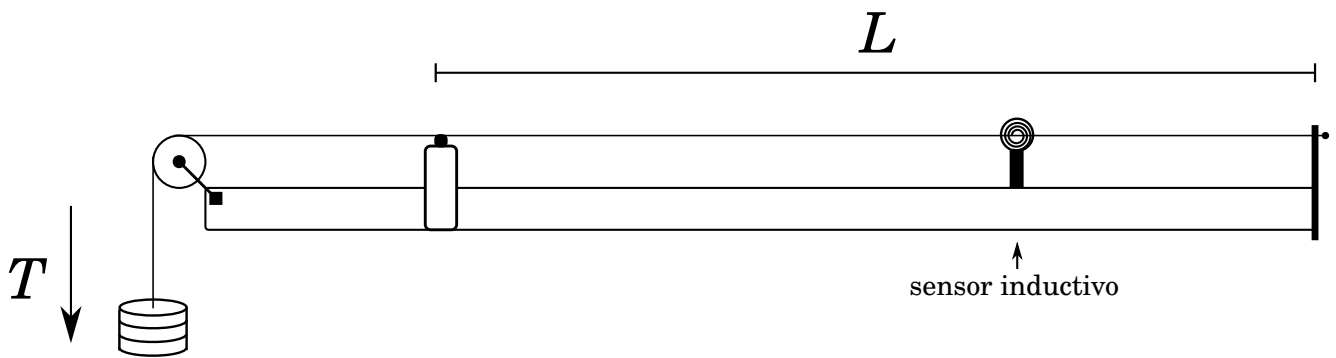


Figura 3: Diagrama del arreglo experimental utilizado durante el experimento.

A la señal medida por el sensor inductivo se le aplica un filtro pasa banda con frecuencias de corte inferior de 50 Hz y de corte superior de 2000 Hz. El estudio de armónicos se realizará en este rango, y con este filtro se suprimen posibles ruidos de alta o baja frecuencia o armónicos débiles que pueden afectar la forma de onda.

Se observa la forma de onda $y(x_0, t)$. La placa de adquisición cuenta con un visualizador de espectro que presenta la transformada de Fourier de la onda, obteniendo así las frecuencias de los

armónicos. La herramienta permite exportar estos datos en formato .wav o como texto plano.

Para medir la densidad lineal de la cuerda, primero se realizan mediciones de la frecuencia natural de una oscilación en la cuerda manteniendo una longitud de la cuerda constante y variando la tensión de la misma. Luego se repite el procedimiento manteniendo una tensión sobre la cuerda constante y variando su longitud.

Una vez calculada la densidad lineal de la cuerda se realiza un estudio de los armónicos de la misma. Se mide el espectro de una determinada oscilación de la cuerda con modo fundamental de frecuencia f_1 , y luego se tensa o acorta según sea necesario para que su modo fundamental pase a tener frecuencia fundamental nf_1 . Se comparan los espectros de estas configuraciones.

La masa utilizada para tensar la cuerda es medida con una balanza con margen de error $\sigma_m = 1\text{ g}$. La longitud de la cuerda es medida con un calibre y el error se define como $\sigma_L = 1\text{ mm}$, la mitad del ancho del traste. El programa utilizado para analizar las oscilaciones cuenta con un frecuencímetro, este se usa con una resolución de $\sigma_f = 1\text{ Hz}$.

Se admite como aceleración de la gravedad la medida previamente en el laboratorio con el péndulo de Kater.

$$g = (9,80 \pm 0,01) \frac{m}{s^2} \quad [2].$$

Realizada la medición de la densidad lineal de la cuerda se realiza un estudio de armónicos. Se realiza un ajuste grueso con la tensión sobre cuerda y luego se realiza un ajuste fino con la longitud de la cuerda hasta obtener una frecuencia fundamental determinada. Se estudia el espectro de esta oscilación. Luego se repite el procedimiento para otras frecuencias fundamentales.

En el estudio realizado no se consideraron los valores específicos de tensión - longitud, simplemente la frecuencia fundamental consecuencia de ese par de valores determinado por la ecuación 7 evaluada en $n = 1$.

Se eligen los valores de frecuencia fundamental

$$f_1 = 160\text{ Hz}, f_1 = 240\text{ Hz}, f_1 = 320\text{ Hz}, f_1 = 480\text{ Hz},$$

con el objetivo de estudiar las propiedades de multiplicidad explícita en la ecuación 8 de los armónicos de manera gráfica y numérica.

Resultados

Medición de Densidad Lineal con L fija, T variable

Se fija $L = (767 \pm 1) \text{ mm}$ y mide en función de la tensión de la cuerda la frecuencia natural del modo fundamental de oscilación, obteniendo la gráfica 4.

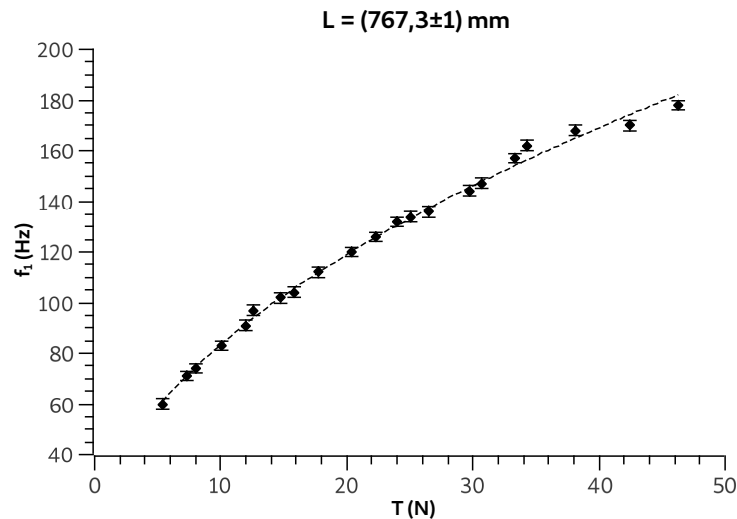


Figura 4: Frecuencia fundamental en función de la tensión de la cuerda ante longitud fija. La curva de ajuste ilustra la dependencia de la frecuencia con la raíz de la tensión.

Para obtener la densidad lineal de la cuerda se adapta la ecuación 7 con $n = 1$ para obtener la ecuación 9.

$$4 L^2 f_1^2 = \frac{1}{\mu} T \quad (9)$$

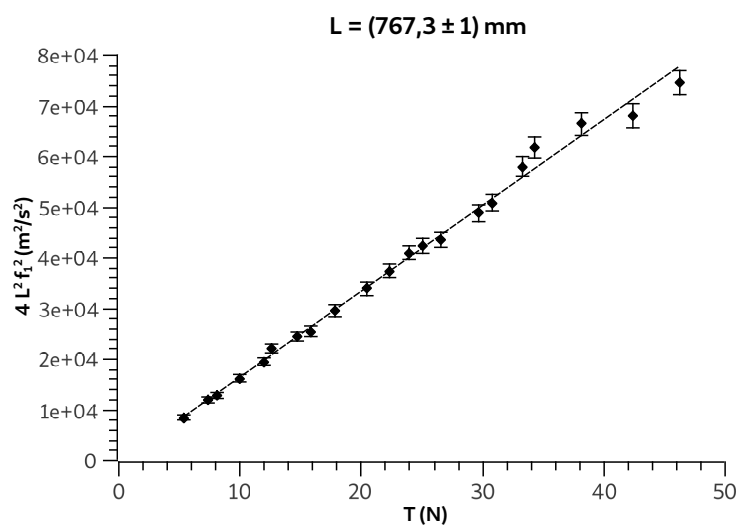


Figura 5: Gráfica correspondiente a la ecuación 9, con recta de regresión de pendiente $\frac{1}{\mu}$

Con este método se obtiene la siguiente densidad lineal de la cuerda.

$$\mu = (59 \pm 7) \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Medición de Densidad Lineal con T fija, L variable

Se fija ahora $T = (14,6 \pm 0,1) \text{ N}$ y se mide la frecuencia natural del modo fundamental de oscilación en función de la longitud de la cuerda, obteniendo la gráfica 6.

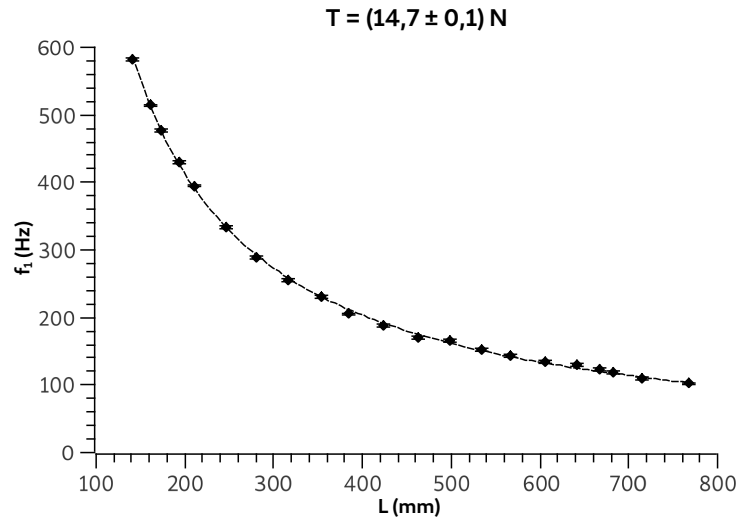


Figura 6: Frecuencia fundamental en función de la longitud de la cuerda ante tensión fija. La curva de ajuste ilustra la dependencia inversa de la frecuencia con la longitud

Para obtener la densidad lineal de la cuerda se adapta ahora la ecuación 7 con $n = 1$ para obtener la ecuación 10.

$$\frac{T}{4f_1^2} = \mu L^2 \quad (10)$$

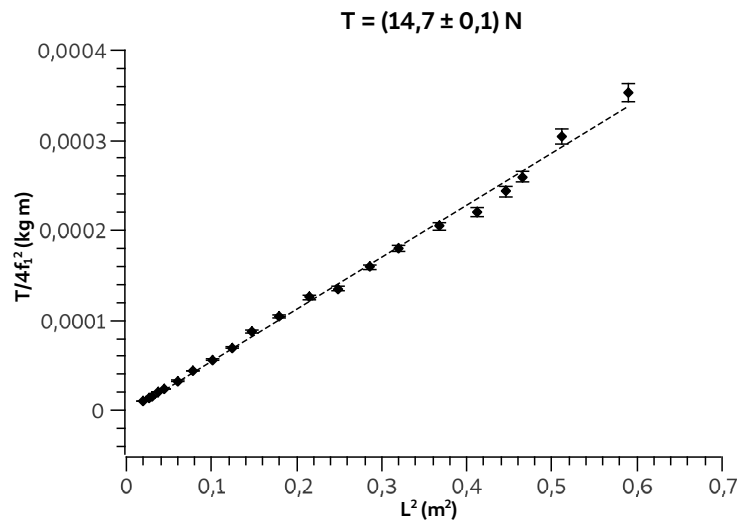


Figura 7: Gráfica correspondiente a la ecuación 10, con recta de regresión de pendiente μ

Con este método se obtiene la siguiente densidad lineal de la cuerda.

$$\mu = (56 \pm 3) \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Con los valores adquiridos se usa una técnica de promediación ponderada por precisión para obtener la densidad lineal de la cuerda determinada experimentalmente.

$$\mu = (57 \pm 5) \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Estudio de Armónicos

Estudio para una frecuencia fundamental de 160 Hz

A continuación se presenta un análisis de los armónicos de una onda de frecuencia fundamental de 160 Hz, comparando con los armónicos de ondas de frecuencias fundamentales correspondientes a su segundo y tercer armónico.

Se presentan las formas de onda a las cuales se le aplicó la transformada de Fourier para obtener sus espectros.

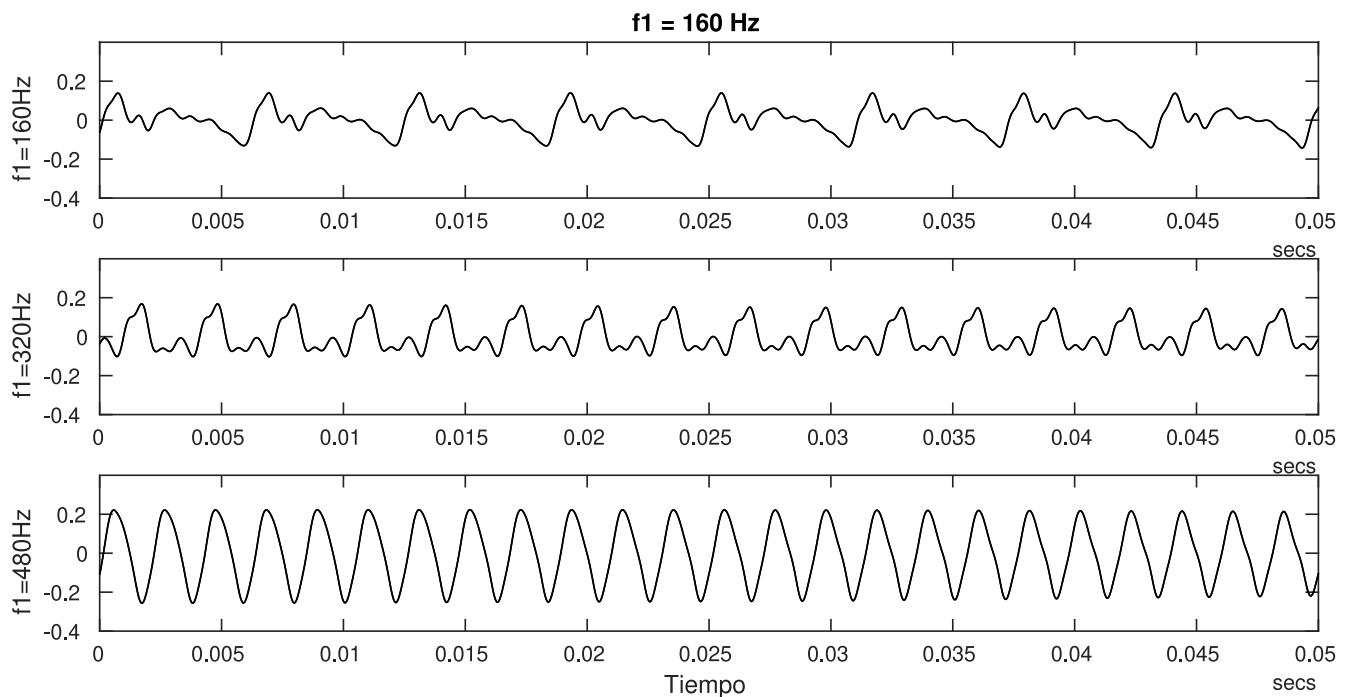


Figura 8: Formas de onda medidas de frecuencias fundamentales de 160 Hz, 320 Hz, y 480 Hz.

A continuación se presenta el resultado de aplicar la transformada de Fourier a las ondas presentadas en la figura 8.

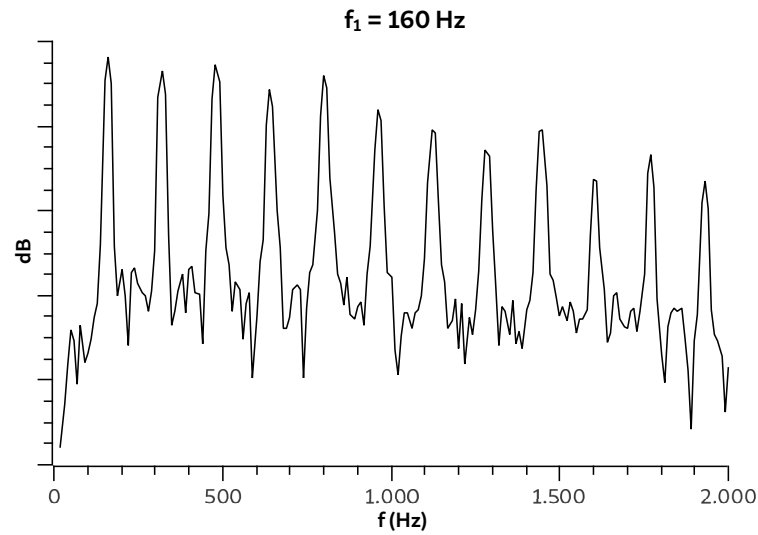


Figura 9: Espectro de una onda de frecuencia fundamental de 160 Hz.

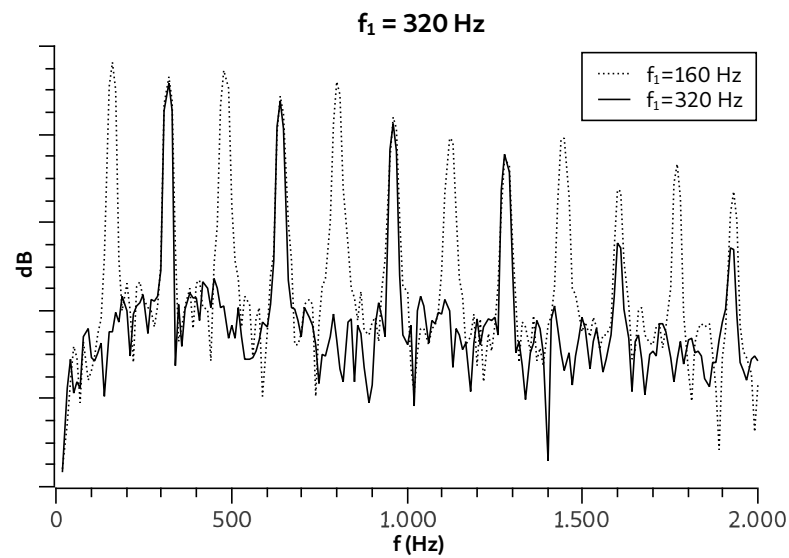


Figura 10: Comparación de espectros de ondas frecuencia fundamental 320 Hz y 160 Hz.

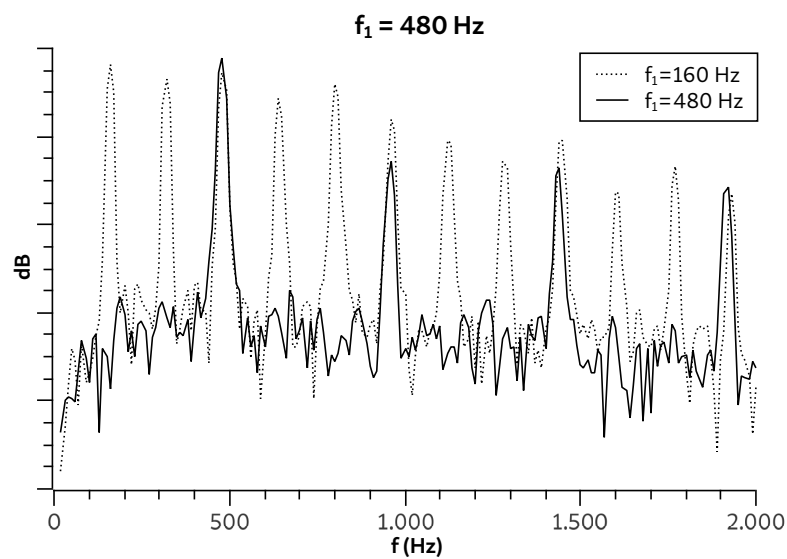


Figura 11: Comparación de espectros de ondas frecuencia fundamental 480 Hz y 160 Hz.

Los valores de frecuencias de los armónicos correspondientes a las figuras 9, 10 y 11 se presentan en la tabla 1. El error se define como el ancho de los picos, de $\pm 5 \text{ Hz}$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|
| Armónico | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 | f_8 | f_9 | f_{10} | f_{11} | f_{12} | |
| f (Hz) | 159 | 318 | 477 | 640 | 800 | 960 | 1117 | 1280 | 1444 | 1603 | 1766 | 1925 | |
| Armónico | f_1 | | | f_2 | | f_3 | | f_4 | | f_5 | | f_6 | |
| f (Hz) | 318 | | | 640 | | 955 | | 1280 | | 1603 | | 1916 | |
| Armónico | f_1 | | | | f_2 | | | | f_3 | | | | f_4 |
| f (Hz) | 477 | | | | 958 | | | | 1435 | | | | 1917 |

Tabla 1: Tabla de frecuencias correspondientes a los armónicos presentados en las figuras 9, 10, y 11. En la tabla se aprecia numéricamente la multiplicidad de los armónicos ilustrada en los gráficos.

Estudio para una frecuencia fundamental de 240 Hz

Se repite el procedimiento para una onda de frecuencia fundamental 240Hz y su segundo armónico.

Se presentan las formas de onda a las cuales se les aplicó la transformada de Fourier para obtener sus espectros.

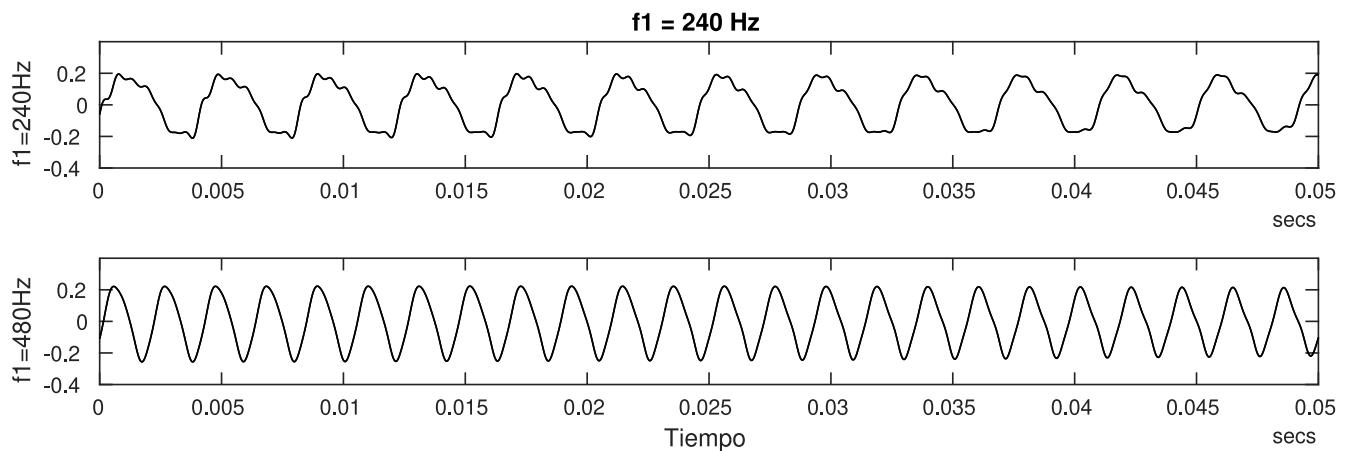


Figura 12: Formas de onda medidas de frecuencias fundamentales de 240 Hz y 480 Hz.

A continuación se presenta el resultado de aplicar la transformada de Fourier a las ondas presentadas en la figura 12.

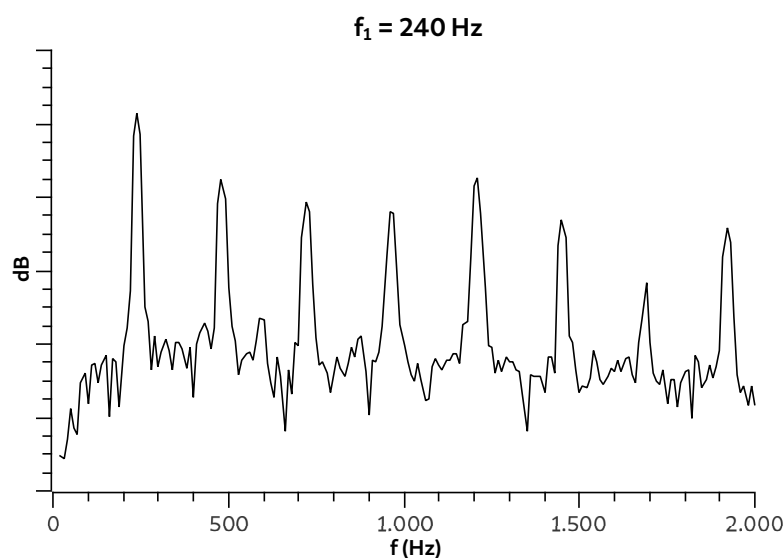


Figura 13: Espectro de una onda de frecuencia fundamental de 240 Hz

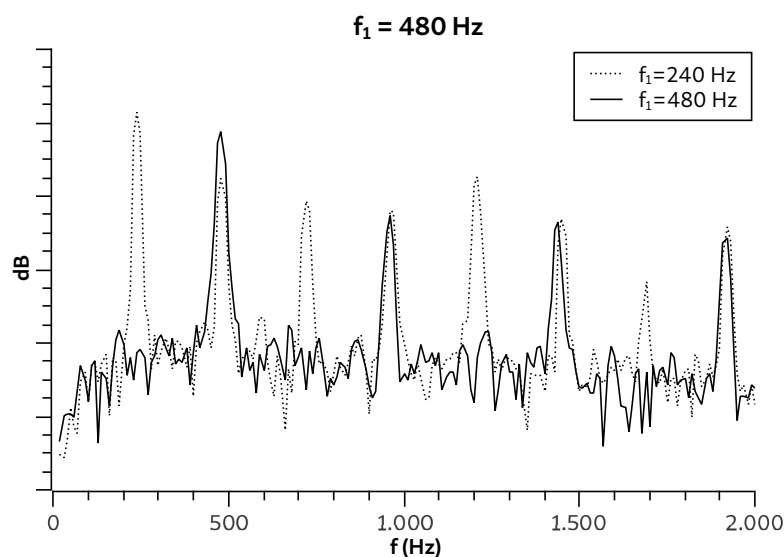


Figura 14: Comparación de espectros de ondas frecuencia fundamental 480 Hz y 240 Hz.

La tabla 2 presenta los datos de las figuras 13 y 14 se presentan en la tabla 2, con un error de $\pm 5 \text{ Hz}$.

| Armónico | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 | f_8 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f (Hz) | 238 | 481 | 719 | 962 | 1205 | 1453 | 1682 | 1952 |
| Armónico | f_1 | | f_2 | | f_3 | | f_4 | |
| f (Hz) | 477 | | 958 | | 1435 | | 1917 | |

Tabla 2: Tabla de frecuencias correspondiente a los gráficos 13 y 14.

Discusión

Estudiar la densidad lineal de una cuerda por medio de sus frecuencias fundamentales no resultó ser un método muy preciso, presentando un error relativo del orden de $\varepsilon_\mu \sim 10\%$ a pesar de haber abarcado todo el rango de tensiones y longitudes que el arreglo experimental permitía.

Sin embargo con el mismo arreglo la precisión se puede mejorar si se obtienen más datos. La forma de conseguir eso sería medir no solo la frecuencia de el modo fundamental, sino también de la frecuencia de algunos de sus armónicos.

El estudio de armónicos resultó exitoso. Se validó el resultado esperado.

Por ser 320 Hz el segundo armónico de 160 Hz , todos sus armónicos son también armónicos de 160 Hz , en particular aquellos de orden n múltiplo de 2. Así mismo se observa ese comportamiento para 480 Hz , el tercer armónico de 160 Hz , todos sus armónicos son armónicos de 160 Hz de orden múltiplo de 3.

En general, se espera que los armónicos de el n -ésimo armónico de una determinada frecuencia fundamental sean los armónicos de orden múltiplo de n de esa misma frecuencia fundamental. La frecuencia de 480 Hz fue elegida por ser tanto el segundo armónico de 240 Hz como el tercer armónico de 160 Hz , lo que permite mejor apreciar la propiedad mencionada.

Por más que el estudio se centre en la frecuencia de los armónicos y no en su amplitud, no está demás observar que es inesperado observar que la amplitud de los mismos medidos por el analizador de espectro no caiga de manera tan abrupta como se esperaba.

Este comportamiento tiene explicación cuando se observa como es que mide exactamente el sensor inductivo. Es razonable suponer que por las propiedades de la ley de Faraday[3] mida una señal que depende principalmente de la velocidad del punto la cuerda en función del tiempo, no de la posición del mismo.

Derivar una onda en el dominio del tiempo es análogo a multiplicar por $i2\pi f$ en el dominio de la frecuencia.[4] Por este motivo, los armónicos de alta frecuencia se ven aumentados en función de su frecuencia de manera que no refleja linealmente a la amplitud del aporte de ese armónico a la oscilación de la cuerda.

Referencias

- [1] D. H. Robert Resnick, *Física - Parte 1*. C.E.C.S.A., 1983.
- [2] M. Roqueta, “Medición de la aceleración de la gravedad con péndulo de kater.” Física Experimental I, Instituto Balseiro.
- [3] D. K. Cheng, *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Addison Wesley Longman, 1999.
- [4] A. V. W. Alan V. Oppenheim, *Señales y Sistemas*. Prentice Hall, 1994.