

GVD

May 27, 2022

0.0.1 Aspectos Generales de Simulación Numérica

Funciones útiles para toda la simulación

- `fwhm`: calcula el ancho de un pulso o espectro full width at half maximum.

```
function fwhm(x, y)
    maxy = maximum(y)
    n1 = findfirst(a -> a>maxy/2, y)
    n2 = findlast(a -> a>maxy/2, y)
    return x[n2]-x[n1]
end
```

- `power`: calcula la potencia de un pulso

```
power(x, y) = trapz(x, abs.(y).^2)
```

- `normalize`: Fuerza el teorema de Parseval sobre un par transformado por FFT.

```
normalize(x, Ax, y, Ay) = Ay*sqrt(power(x, Ax)/power(y, Ay))
```

`fwhm` (generic function with 1 method)

`power` (generic function with 1 method)

`normalize` (generic function with 1 method)

Tomamos los valores de D , S_0 y α de los specs de la fibra SMF28, y consideramos longitud de onda de operación de $\lambda_0 = 1550$ nm, calculamos los coeficientes de dispersión.

$$\beta_2 = \frac{\lambda^2 D}{2\pi c} \quad \beta_3 = \frac{S_0 \lambda + 2D}{2\pi c^2} \lambda^3$$

$D = 18 \text{ ps nm}^{-1} \text{ km}^{-1}$ $S_0 = 0.092 \text{ ps nm}^{-2} \text{ km}^{-1}$

$\beta_2 = -22.958067590909888 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$

$\beta_3 = 1.177755862911665 \text{ ps}^3 \text{ km}^{-1}$

Elejimos propagar un pulso gaussiano de ancho $T_0 = 10$ ps. En función de eso calculamos la longitud de dispersión para tener un orden de escala para la dimensión z

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$$

$T_0 = 10 \text{ ps}$

$L_D = 4.3557672963553085 \text{ km}$

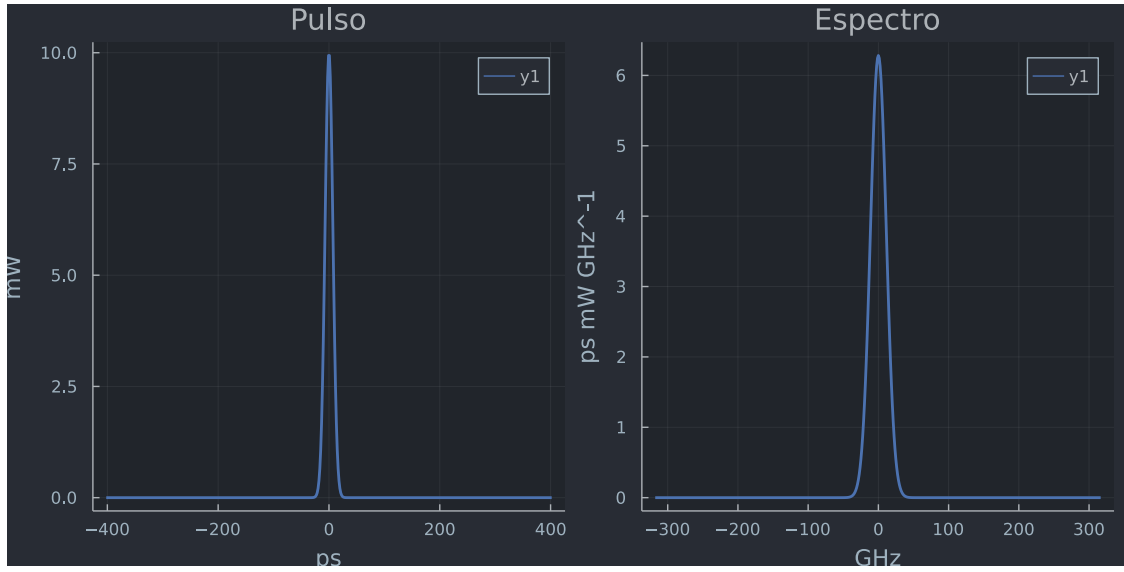
Vamos a mirar el comportamiento en un rango de $0 \leq z \leq 10 L_D$, discretizando el dominio a un número N de puntos que equilibre precisión y velocidad. Calculamos el ancho que se espera tenga el pulso al final del recorrido T_F para tener un orden de escala para la dimensión t .

$$Tf = \sqrt{1 + \frac{z^2}{L_D^2}} T_0$$

A $z = 43.55767296355309$ km resulta $T_f = 100.4987562112089$ ps

Miramos la forma del pulso en una ventana de $-5 T_F \leq t \leq 5 T_F$, también discretizado a N puntos. Encontramos en función de esa discretización el dominio de frecuencias f

En este intervalo temporal definimos el pulso gaussiano de ancho T_0 , transformamos Fourier y validamos que con la normalización cumple Parseval.



Potencia en tiempo: 177.24538509055162 ps mW

Potencia en frecuencia: 177.24538509055165 ps mW

Definimos una grilla de coordenadas discretas (i, j) en donde vamos a evaluar el problema. Esta grilla se va a usar tanto para indexar coordenadas (z, t) como (z, f) .

512×512 Matrix{Tuple{Int64, Int64}}:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	...	(1, 510)	(1, 511)	(1, 512)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)		(2, 510)	(2, 511)	(2, 512)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)		(3, 510)	(3, 511)	(3, 512)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)		(4, 510)	(4, 511)	(4, 512)
(510, 1)	(510, 2)	(510, 3)		(510, 510)	(510, 511)	(510, 512)
(511, 1)	(511, 2)	(511, 3)	...	(511, 510)	(511, 511)	(511, 512)
(512, 1)	(512, 2)	(512, 3)		(512, 510)	(512, 511)	(512, 512)

0.0.2 Dispersión de Segundo Orden

Calculamos la evolución del espectro a lo largo de la fibra, usando el resultado

$$\hat{A}(z, w) = \hat{A}(0, w) \exp \left[i \frac{\beta_2}{2} w^2 z \right] \longrightarrow A_f[i, j] = A_{f0}[j] \exp \left[i \frac{\beta_2}{2} w_j^2 z_i \right]$$

A (generic function with 1 method)

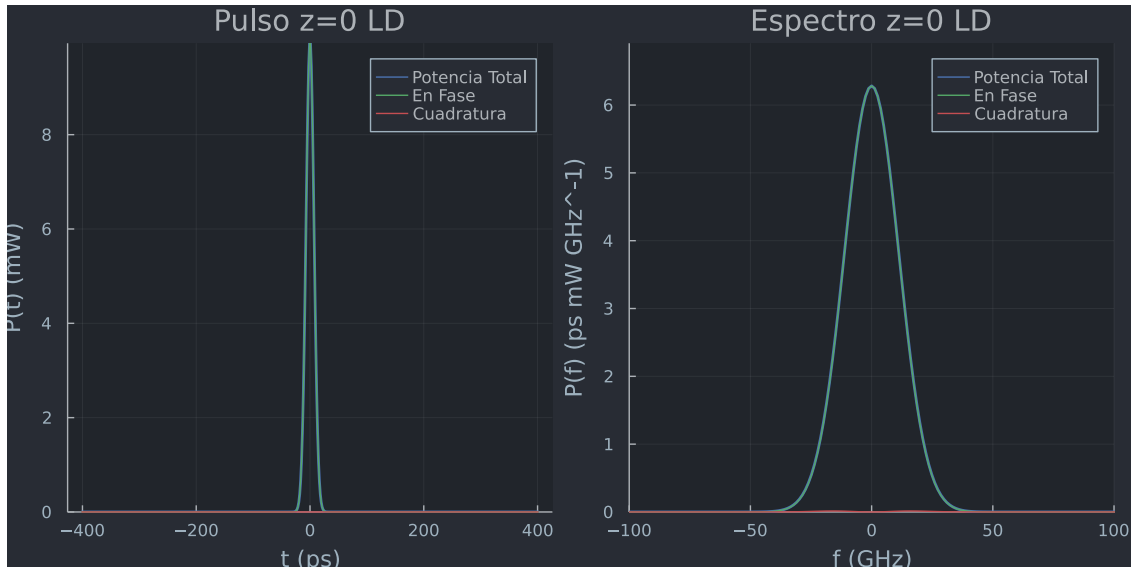
Evaluamos $A_f[i, j]$ en los puntos $(i, j) \leftrightarrow (z, f)$. Antitransformamos Fourier a lo largo de la dimensión j para obtener el resultado $A_t[i, j]$ en el dominio $(i, j) \leftrightarrow (z, t)$

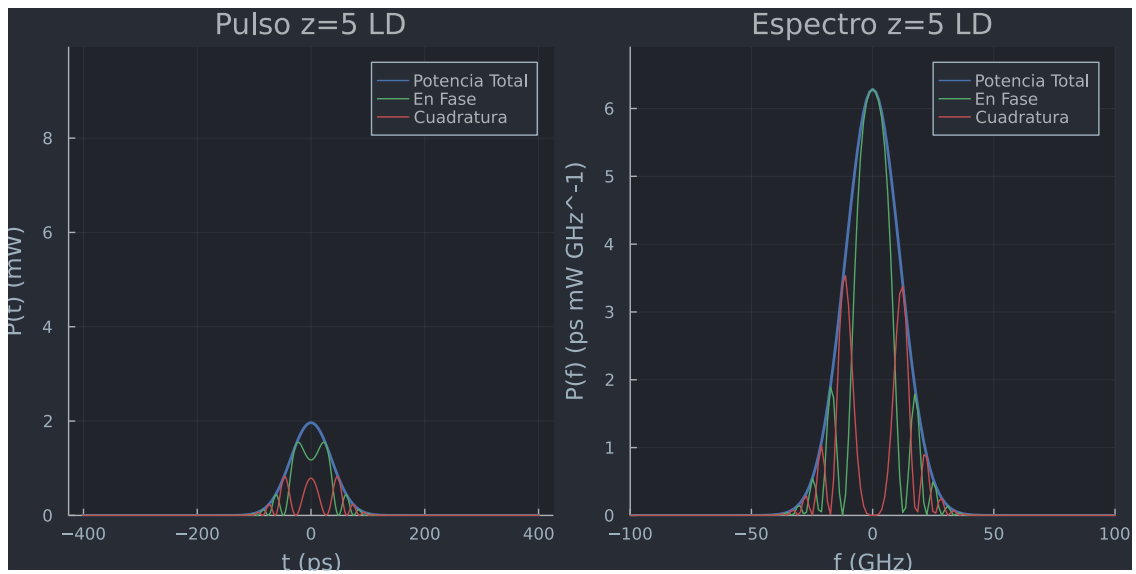
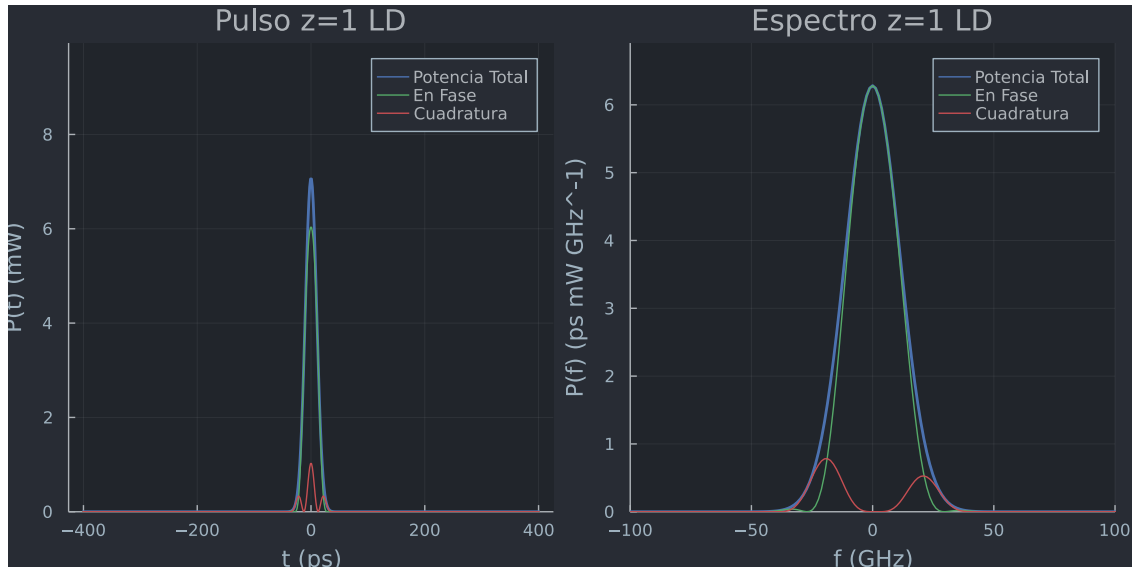
Hay varias formas de visualizar el resultado: Una forma es ver una animación de la evolución del pulso, donde el eje temporal de la animación representa la dimensión z de la fibra.

```
Info: Saved animation to  
fn = /tmp/jl_clYU60.gif  
@ Plots /home/inox/.julia/packages/Plots/1KWPG/src/animation.jl:114
```

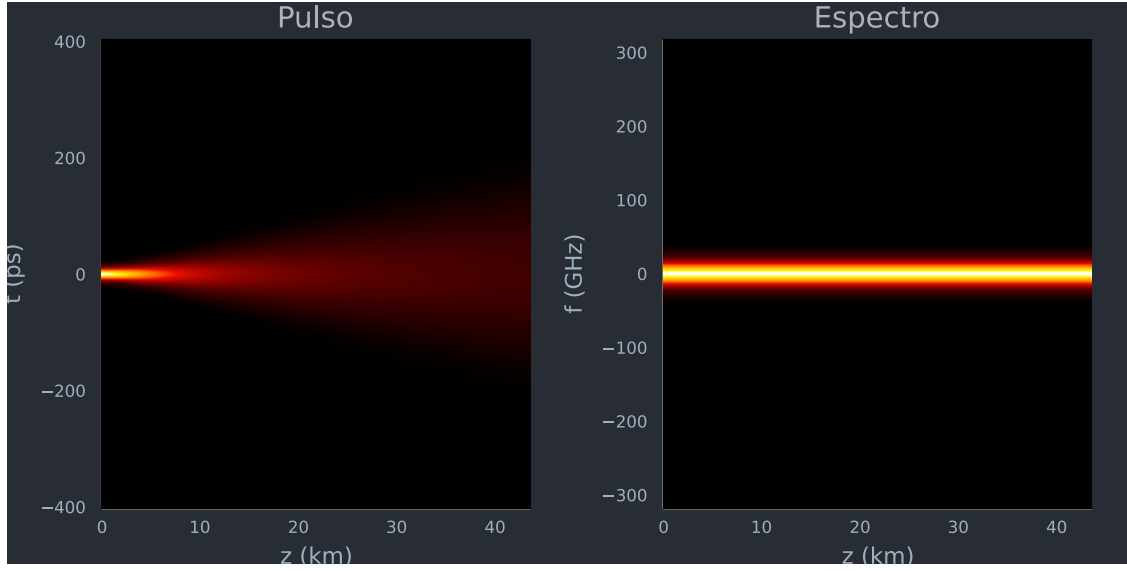
```
Plots.AnimatedGif("/tmp/jl_clYU60.gif")
```

O bien, únicamente una imagen instantánea del pulso y del espectro a distintos valores de z/LD





Otra forma es ver un *heatmap* de la potencia distribuida en el tiempo $|A(z,t)|^2$ y en el espectro $|\hat{A}(z,w)|^2$, con eje z en escala logarítmica.

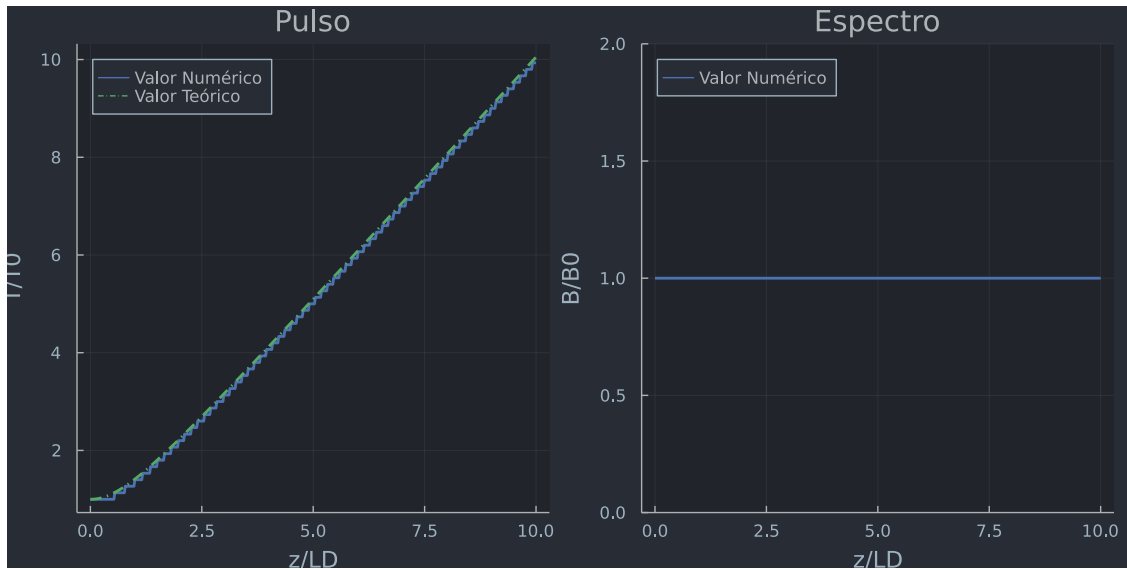


La primera visualización es interesante porque muestra la redistribución de las componentes del pulso gaussiano a lo largo del recorrido de la fibra. La segunda visualización ilustra la similitud de este fenómeno con la dispersión espacial de un haz de luz en el espacio. En ambos casos se nota que el pulso se ensancha, pero el espectro no varía.

Para comparar con el resultado analítico se compara el incremento en el ancho de pulso simulado numéricamente medido con **fwhm** contra el resultado analítico.

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{z^2}{L_D^2}}$$

También se mide el **fwhm** de el espectro simulado numéricamente.



Se puede observar que la dispersión del pulso ya es apreciable en $z = L_D$. En $z = 2 L_D$ el ancho del pulso ya se duplicó respecto a su valor original. Hay que tomarlo en cuenta ya que: - El ensanchamiento del pulso puede provocar interferencia intersímbolo en el receptor - La potencia pico va inversamente proporcional al ancho del pulso, y puede ser menor que la sensibilidad del receptor.

0.0.3 Dispersión con Atenuación

Ahora consideramos la atenuación. Usamos la longitud característica de atenuación L_{eff} para definir el eje z , ya que usar L_D puede resultar en un intervalo demasiado corto o demasiado largo para apreciar la atenuación. Usamos el resultado de la propagación con atenuación y dispersión de segundo orden

$$\hat{A}(z, w) = \hat{A}(0, w) \exp \left[i \frac{\beta_2}{2} w^2 z \right] \exp \left[-\frac{\alpha}{2} z \right] \rightarrow A_f[i, j] = A_{f0}[j] \exp \left[i \frac{\beta_2}{2} w_j^2 z_i \right] \exp \left[-\frac{\alpha}{2} z_i \right]$$

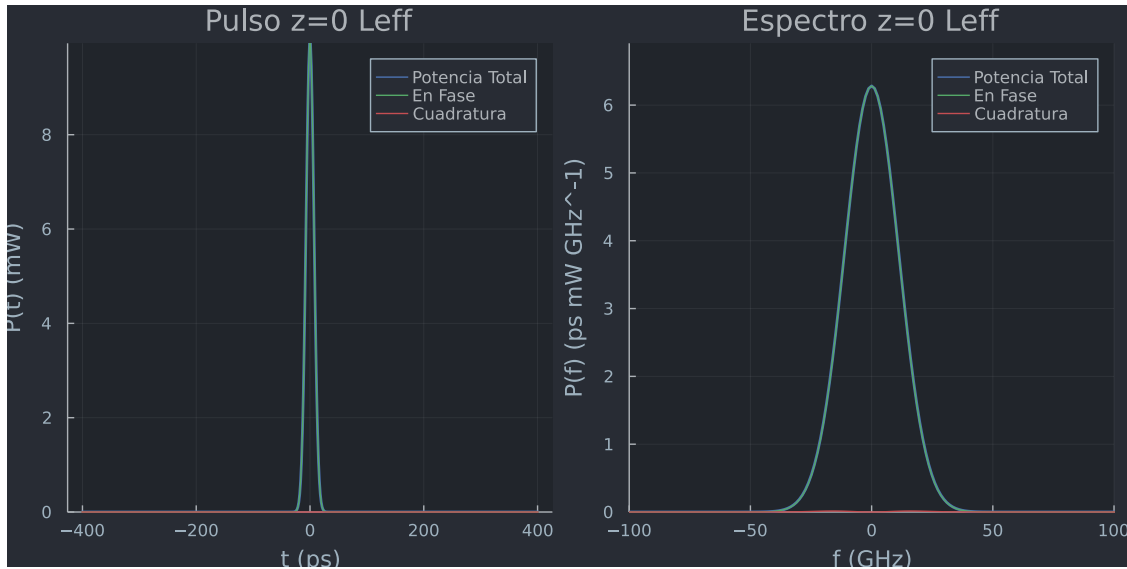
A (generic function with 1 method)

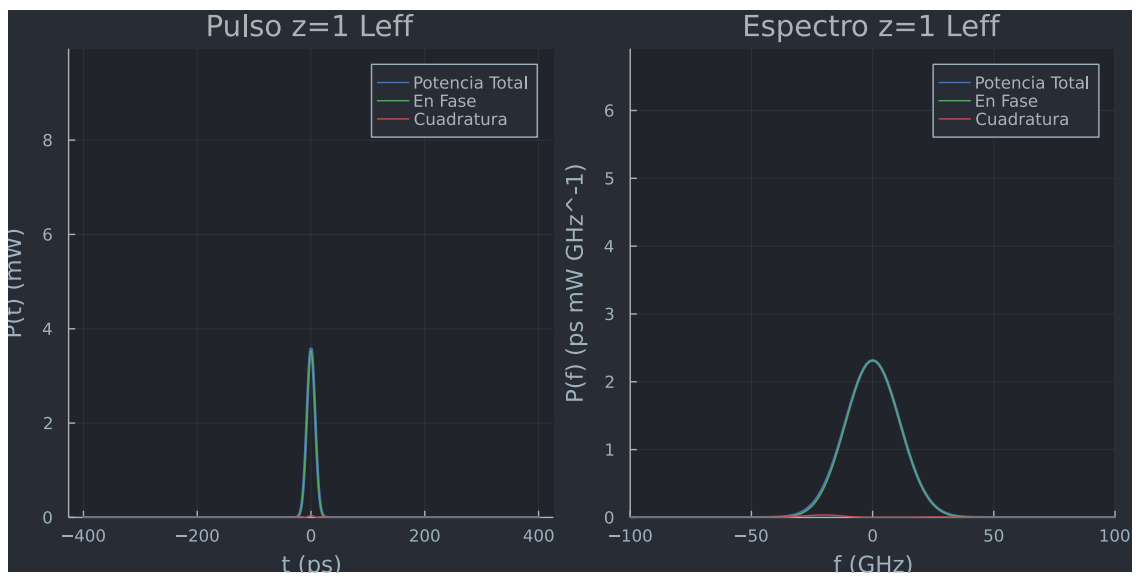
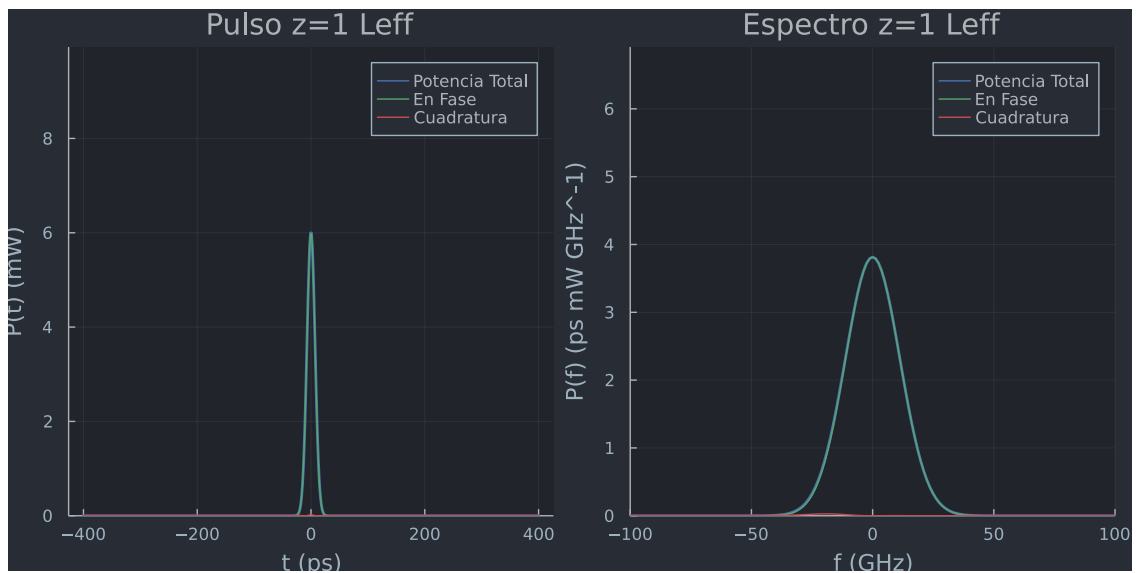
Info: Saved animation to

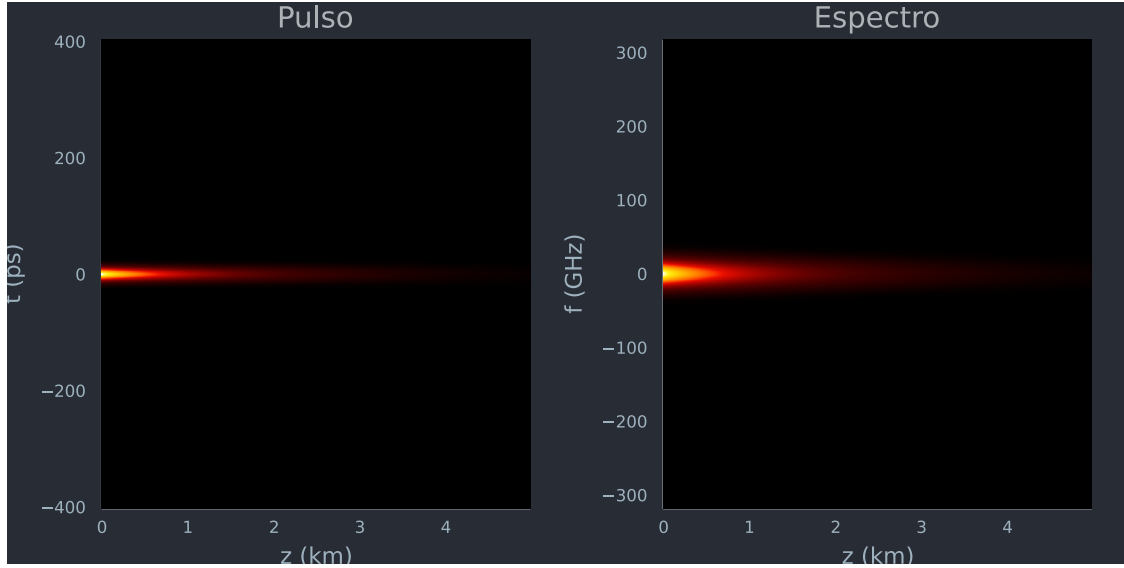
fn = /tmp/jl_G11HZq.gif

@ Plots /home/inox/.julia/packages/Plots/1KWPG/src/animation.jl:114

Plots.AnimatedGif("/tmp/jl_G11HZq.gif")





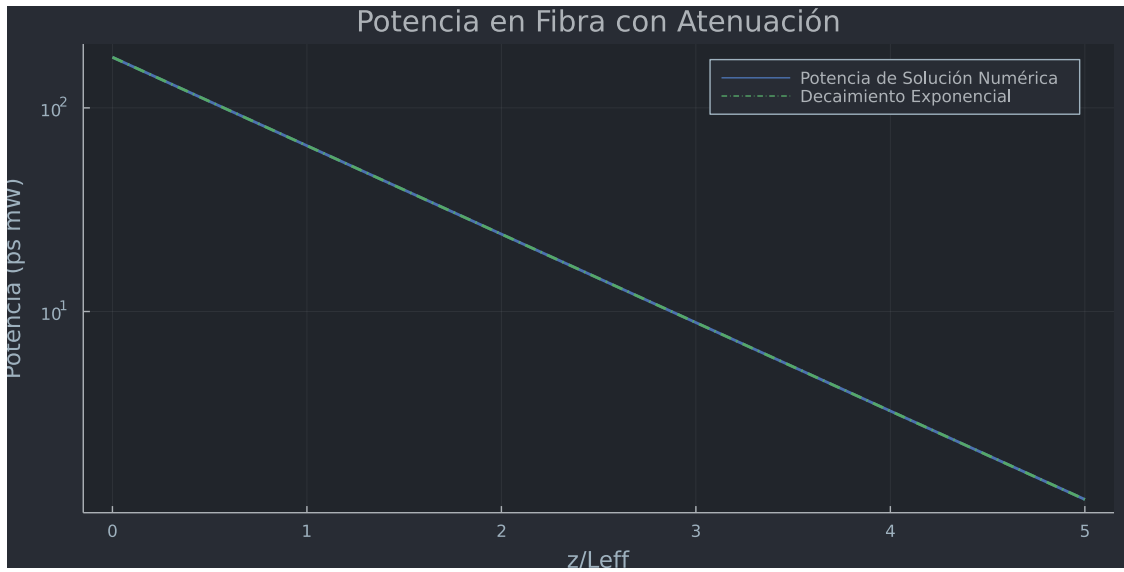


Para este valor de T_0 en particular se nota que la atenuación predomina sobre la GVD (no siempre se cumple esto, por ejemplo para valores menores de T_0 , la GVD es más rápida).

Lo podemos validar comparando la longitud característica de atenuación contra la longitud característica de dispersión.

$$LD = 4.3557672963553085 \text{ km} \quad L_{\text{eff}} = 0.9954054173515269 \text{ km}$$

Evaluamos la potencia del pulso medida con **power** en función de z , y lo comparamos con la expresión de decaimiento exponencial según α de la potencia del pulso inicial para validar el resultado esperado. El eje y se muestra en escala logarítmica, esperamos ver una recta.



0.0.4 Dispersión de Tercer Orden

Ahora estudiamos la dispersión de tercer orden, usando el resultado que contempla el efecto de β_2 y de β_3

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(0, w) \exp \left[\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z + \frac{i}{6} \beta_3 w^3 z - i w t \right] dw \rightarrow A_t[i, j] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N A_{f0}[k] \exp \left[\frac{i}{2} \beta_2 w_k^2 z_i + \frac{i}{6} \beta_3 w_k^3 z_i - \right]$$

Primero evaluamos únicamente la dispersión de tercer orden, usando la ecuación anterior con $\beta_2 = 0$

A (generic function with 1 method)

Hay que incrementar muchísimo el rango de z para apreciar el efecto de tercer orden para este valor de T_0 , ya que en este caso se empieza a ver recién en valores de $z \sim L_{D3} \gg L_D$.

$$L_{D3} = \frac{T_0^3}{|\beta_3|}$$

Longitud característica de dispersión segundo orden: 4.3557672963553085 km

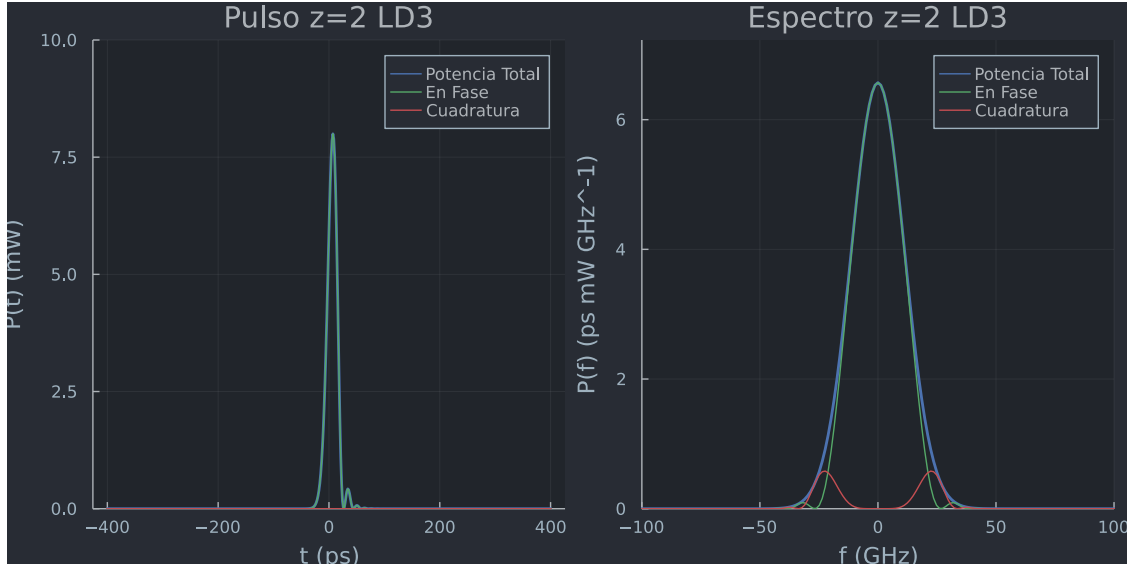
Longitud característica de dispersión tercer orden: 849.0724024313372 km

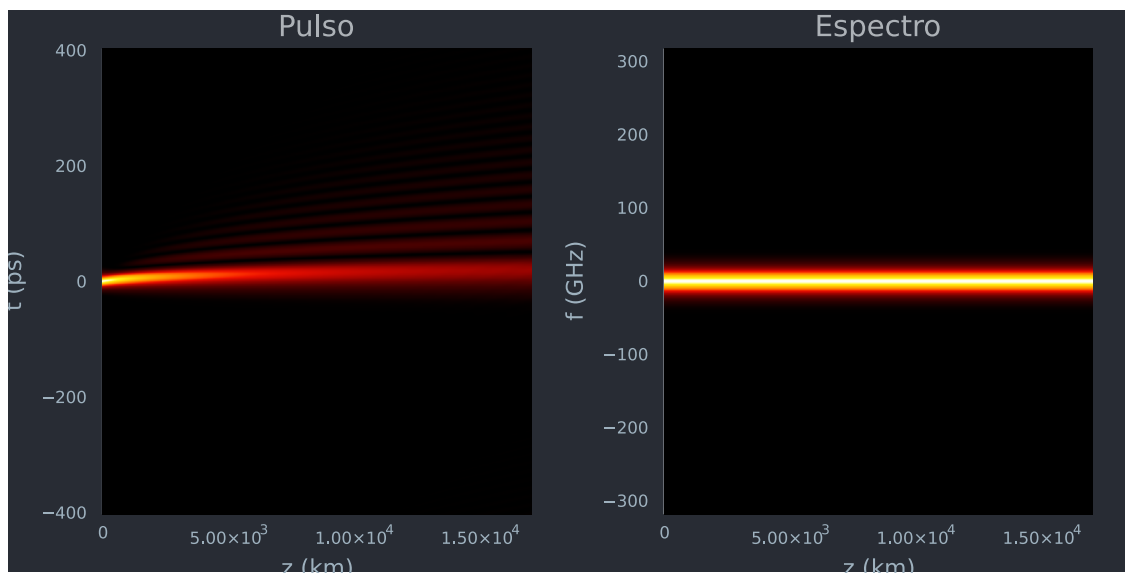
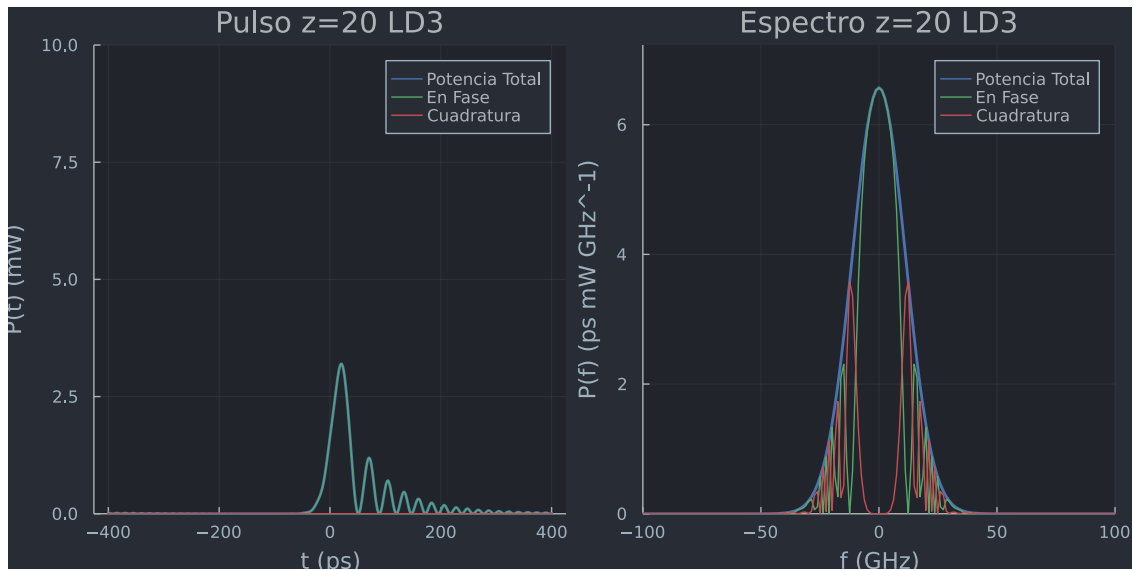
Info: Saved animation to

fn = /tmp/jl_cOvit3.gif

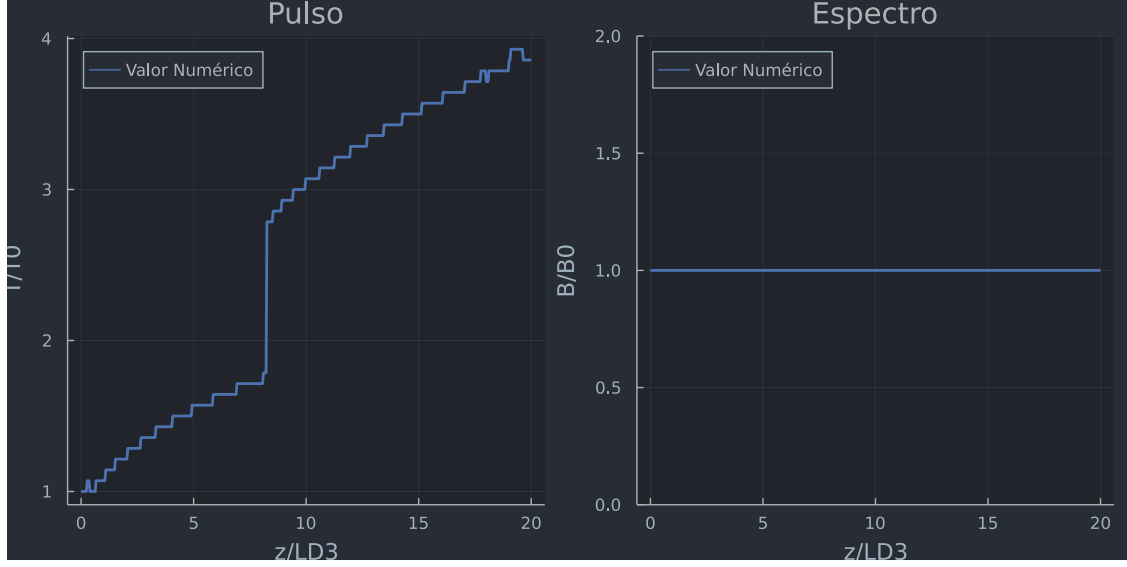
@ Plots /home/inox/.julia/packages/Plots/1KWPG/src/animation.jl:114

Plots.AnimatedGif("/tmp/jl_cOvit3.gif")





Evaluamos la evolución del ancho del pulso en función de z . En este caso no existe solución analítica con la cual comparar



Vemos que la dispersión de tercer orden tampoco cambia el ancho de banda del pulso, únicamente su forma en el dominio del tiempo. Se ve en $z \sim 8L_{D_3}$ un rápido incremento del ancho del pulso, que corresponde a cuando el primer lóbulo secundario del pulso alcanza $\frac{1}{2}$ de la altura del lóbulo principal.

Es de esperar que el efecto de tercer orden será despreciable respecto al de segundo orden para este pulso propagándose en esta fibra. Lo verificamos incluyendo el término β_2 a la ecuación.

Efectivamente se nota que la dispersión de tercer orden es despreciable respecto a la de segundo orden en estas condiciones. Sin embargo esta simulación es buena para verificar que la expresión integral recupera la expresión utilizada en el inciso a.