第 12 卷 第 2 期 河南商业高等专科学校学报 1999 年 3 月
Vol. 12 No. 2 Journal of Henan Business College Mar. 1999

最小生成树算法及其在经济应用中的意义

赵白云 欧建华

〔河南商业高等专科学校 郑州 450052〕〔湖南武冈稠树镇中学 武冈 422400〕

摘 要 依次去掉回路上较长边的方法，是求带权连通图的最小生成树有别于常规算法的另一种新算法，它在平面图中更为方便。最小生成树在经济方面具有广泛的应用价值，特别是用于追求规划和工程的最佳效果尤为突出。

关键词 树 最小生成树 连通图 回路 权

"树"是图论中最基本的，也是最重要的概念之一。它指的是既连通，又无回路的图，或者说是既连通，边数又比结点数少 1 的图。任何一个多于两个结点的连通图 G，若有回路，生成树都不是唯一的，可能有很多个，因此求带权的、有回路的连通图的 G 的最小生成树问题，即求各边总权最小的生成树，就成了图论中一个重要的问题。最小生成树在科学技术、工程领域和经济应用中，都有着非常重要的实际意义。

一、最小生成树的依次去长边算法

在图论中，已知一个有权连通图 G，求 G 的最小生成树可以用 Prim 算法或 Kruskal 算法。这两个方法的共同点都是在不形成回路的前题下，依次增加权最小的边。但作者在教学过程中发现，对于比较简单的图，若回路很容易判断，则逐次去掉各回路上的最长边，就很快得到了该图的最小生成树。由于教材中缺乏此方法的理论及证明，所以同学们往往持怀疑态度，不敢大胆用。下面给出这种方法的具体步骤及方法的证明。

设 G 是有 n 个结点，m 条边的连通图，逐次去长边求 G 的最小生成树方法步骤如下：

1．选择 G 的一条边 e_1，使 $W(e_1)$［（$W(e_1)$ 表示 e_1 的权，以下类同］尽可能大，且 $G-\{e_1\}$ 连通。

2．若 $e_1, e_2 \cdots e_i$ 已选好，则从 $G-\{e_1, e_2, \cdots e_i\}$ 中依下列原则选 e_{i+1}：

① $G-\{e_1, e_2, \cdots e_{i+1}\}$ 连通；

② 满足①的条件下，使 $W(e_{i+1})$ 尽可能大。

3．当 $i=m-n+1$ 时，停止运算。

由此算法最后得到的图 $G-\{e_1, e_2, \cdots, e_{m-n+1}\}=T$ 是 G 的一棵最小生成树（T 实质上是从 G 中依次去掉边序列 $e_1, e_2, \cdots, e_{m-n+1}$ 后所得的 G 的子图）。理由如下：

① 首先，T 是 G 的生成树。这是因为由算法第 2 步，T 是连通的，再由算法第 3 步，$i=m-n+1$ 时，停止运算，至此从 G 中共去掉 $m-n+1$ 条边，T 中含有 $m-(m-n+1)=n-1$ 条边。由树的定义，T 是一棵树，是 G 的一棵生成树。

② T 是 G 的最小生成树。证明如下（不妨没 G 的各边权都不同）：

对 G 的任一棵异于 T 的生成树 T'，将 G－T' 的边按权由大到小的顺序排列，设为 $e_1', e_2', \cdots e'_{m-n+1}$ 即 $W(e'_1)>W(e'_2)>\cdots, >W(e'_{m-n+1})$

用 $r(T')$ 表示在 $\{e'_1, e'_2, \cdots e'_{m-n+1}\}$ 中，而不在 $\{e_1, e_2, \cdots e_{m-n+1}\}$ 中的边的最小下标。

收稿日期：1999—01—17

假设T'是使r（T'）尽可能大的最小生成树，而T不是最小生成树。记r（T'）=k，即：$T=G-\{e_1, e_2, \cdots e_{k-1}, e_k, \cdots e_{m-n+1}\}$

$T'=G-\{e'_1, e'_2, \cdots e'_{k-1}, e'_k, \cdots e'_{m-n+1}\}$

再由$W(e_i)>W(e_{i+1})$，$W(e'_i)>W(e'_{i+1})$（$i=1, 2, \cdots, m-n$）及T的算法知，$W(e_k)>W(e'_k)$，从而$e_k \notin \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_{m-n+1}\}$，或者说，$e_k$在T'中而不在T中。若$T'+e'_L$形成了唯一一条回路为C，C包含了$e_k$，则$e'_L \neq e'_1, e'_2, \cdots, e'_{k-1}$，即$L \geqslant K$。这是因为$e_i=e'_i$（$i=1, 2, \cdots, k-1$）。所以

$W(e'_i) \leqslant W(e'_k) < W(e_k)$

这样的e'_L是存在的，因为e_k在G的某个回路上。取$T^*=T'+e_L-e_k$，则

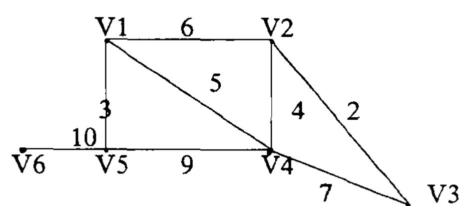
$W(T*)=W(T')+W(e'_L)-W(e_k)<W(T')$

W（T'），W（T*）分别表示T'，T*的权。说明T*的权比T'的权还要小。又因为T*是连通的，有n-1条边的图，所以T*也是G的一棵生成树。这说明图G有比T'的权小的生成树T*，这与假设T'是G的最小生成树矛盾。从而T'不是G的最小生成树，而T是G的最小生成树。

二、最小生成树的依次去长边平面图算法

该算法对平面图更方便，只要逐次去掉在回路上的最长边即可。

例如，图（1）是平面图，各边上的权如图所示，权值由大到小分别为：10，9，7，6，5，4，3，2。



图（1）

第一步：权为10的边权最大，但不在回路上，再讨论权为9的边；

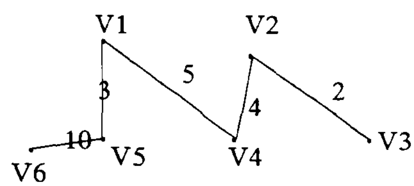
第二步：权为9的边在回路上，从G中去掉该边。再讨论长度为7的边；

第三步：权为7的边也在回路上，从G中去掉，再讨论长度为6的边；

第四步：权为6的边仍在回路上，从G中去掉。

G共6个结点，8条边，去掉长度为9，7，6，的三条边后，得最小生成树为图（2）树T的权为

$W(T)=10+3+5+4+2=24$



图（2）

此图若用Kruskal算法，需九步：

第一步：权为2的边权最小，选出来；是（V_2，V_3）；

第二步：其余边中权最小的是为3，对应边为（V_1，V_5）；且（V_1，V_5）与（V_2，V_3）不形成回路，选出（V_2，V_3）；

第三步：在G-｛（V_1，V_5），（V_2，V_3）｝中，权最小边为（V_2，V_4），且（（V_2，V_4）与（V_1，V_5）（V_2，V_3）不形成回路，选出（V_2，V_4）。

第四步：在G-｛（V_1，V_5），（V_2，V_3），（V_2，V_4）｝中，权最小的边为（V_1，V_4），且（V_1，V_4）与（V_1，V_5），（V_2，V_3），（V_2，V_4）不形成回路，选出（V_1，V_4）。

第五步：在G-｛（V_1，V_5），（V_2，V_3），（V_2，V_4），（V_1，V_4）｝中权最小的边为（V_1，V_2），但（V_1，V_2）与前面选出的边形成回路$V_1V_2V_4V_1$，再讨论其余边中最短的边.

第六步：同第五步，不能选（V_3，V_4）；

第七步：同第五步，不能选（V_4，V_5）；

第八步：选（V_5，V_6）；

第九步：图G共六个结点，已选出（V_2，V_3），（V_1，V_5），（V_2，V_4），（V_1，V_4），

(V_5, V_6) 5条边。

将以上选出边画出来，可得G的最小生成树T，同图（2）。

比较以上两种解法知，有时用去长边法更好。

三、最小生成树在经济中的应用

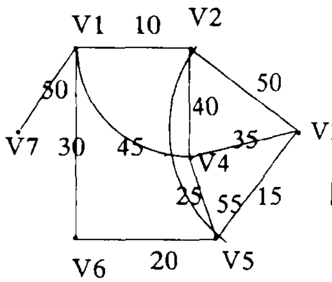
图（3）中，结点 V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6，V_7 表示七个城市或七个重要经济区域，两个结点间若有边，则表示相应两城市可达，边上的权表示两城市间的距离。例如，城市 V_1 到 V_2 的距离为10，城市 V_4 到 V_5 的距离为55。若两点间无边，则表示这两点间有某种障碍物，它们之间不可达。现要在这七个城市间修路，既要使这七个城市中任何两个都可达，还要使总路长最短，最经济。这实际上是求图（3）的最小生成树问题。结果为图（4）

最小生成树中，权为 $50+10+25+35+15+20=155$

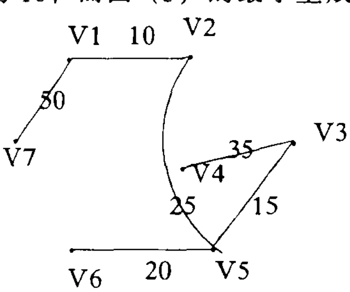
即按图（4）修路，可使七个城市两两可达，而且最经济。总路长为155。

在实际应用中，求最短路问题与求最小生成树问题很容易混淆，一定要分清楚这两者的区别。

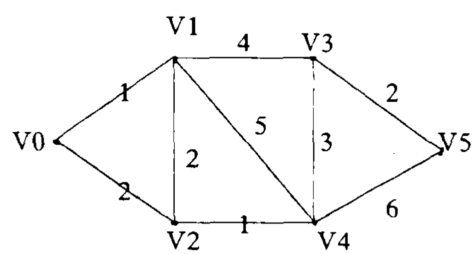
例如，图（5）中 V_0 为一个水厂，V_1，V_2，V_3，V_4，V_5 表示5个家属区，图中的边表示其关联的两家属区有路，边上的权表示路长。现沿路铺设自来水管道，既要将水送至各家属区，又要使铺设管道总长最短。这个问题中虽然有总发点 V_1 以及 V_1 到各收点之间的所有路，但仍是求图（5）的最小生成树，而不是求 V_1 到各点的最短路。这是因为：用最短路算法，V_1 到各点的最短路结果为图（6），权为10；而图（5）的最小生成树为图（7），



图（3）

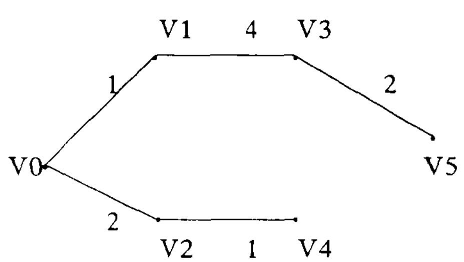


图（4）

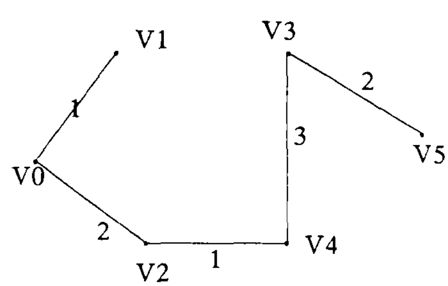


图（5）

权为9，说明沿最小生成树铺设管道总长比沿 V_1 到其余各点的最短路铺没总长少1，效果最好。一般来说，最短路问题用在运输方案上，而最小生成树用在基础建设的投资方案中。



图（6）



图（7）