Soldner's constant is the value of n such that

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{\log n}{\log 1+a}}\frac{(1+a)^k}{k}+\log a=0$$

which is also

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{\log n}{\log 1+a}}\frac{(1+a)^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-a)^k}{k}=0$$

which is also

$$\lim_{a\to 0^+}-i\pi-(1+a)n\cdot\Phi(1+a,1,1+\frac{\log n}{\log(1+a)})=0$$

where the phi is the lerch transcendent

AND, to be a bit simpler, if n is the log of the soldner constant,

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{n}{a}}\frac{(1+a)^k}{k}+\log a=0$$

r

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{n}{a}}\frac{(1+a)^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-a)^k}{k}=0$$

r

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{n}{a}}\frac{(1+a)^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-a)^k}{k}$$

r

$$\lim_{a\to 0^+}-i\pi-(1+a)^{1+\frac{n}{a}}\cdot\Phi(1+a,1,1+\frac{n}{a})=0$$

r

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\mu\cdot x}\frac{1}{k}\cdot(1+\frac{1}{x})^k-\log x=0$$

$$\ldots$$

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{\log n}{\log 1+a}}\frac{(1+a)^k}{k}+\log a=0$$

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{\log n}{\log 1+a}}\frac{(1+a)^k}{k}=-\log a$$

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{m}\frac{(1+a)^k}{k}=-\log a$$

$$\ldots$$

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1}^{\frac{x}{a}}\frac{(1+a)^k-1}{k}=Ei(x)-\log x-\gamma$$

$$\lim_{a\to 0^+}\sum_{k=1+\lfloor\frac{\log\mu}{a}\rfloor}^{\frac{x}{a}}\frac{(1+a)^k}{k}=Ei(x)$$

$$\lim_{a\to 1^+}\sum_{k=1}^{\frac{\log x}{\log a}}\frac{a^k-1}{k}=li(x)-\log\log x-\gamma$$

$$\lim_{a\to 1^+}\sum_{k=1+\lfloor\log_a\mu\rfloor}^{\log_a x}\frac{a^k}{k}=li(x)$$

$$\ldots$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\mu\cdot x}\frac{1}{k}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\log x=0$$