

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
Dhyp[n_, k_, a_] := Dhyp[n, k, a] =
```

```
Sum[Binomial[k, j] Dhyp[n / (m^(k - j)), j, m + 1], {m, a, n^(1 / k)}, {j, 0, k - 1}]
```

```
Dhyp[n_, 1, a_] := Floor[n] - a + 1; Dhyp[n_, 0, a_] := 1
```

```
dhal[n_, k_, a_] := Sum[(-1)^j Binomial[k, j] dhal[n / (a - 1)^j, k - j, a - 1], {j, 0, k}];
```

```
dhal[n_, 0, a_] := 1
```

```
dhal[n_, k_, 1] := d1[n, k]
```

```
dhlal[n_, k_, c_] := c^-k dhal[n c^k, k, c + 1]
```

```
dhala[n_, k_, a_] := Sum[(-1)^j Binomial[k, j] dhala[n / (a - 1)^j, k - j, a - 1], {j, 0, k}];
```

```
dhala[n_, 0, a_] := 1
```

```
dhala[n_, k_, 1] := Dhyp[n, k, 1]
```

```
dhlala[n_, k_, c_] := c^-k dhala[n c^k, k, c + 1]
```

```
Table[{j, Expand[dhlal[n, 1, j]]}, {j, 1, 10}] // TableForm
```

```
1      -1 + d1[n, 1]
2      -1 +  $\frac{1}{2}$  d1[2 n, 1]
3      -1 +  $\frac{1}{3}$  d1[3 n, 1]
4      -1 +  $\frac{1}{4}$  d1[4 n, 1]
5      -1 +  $\frac{1}{5}$  d1[5 n, 1]
6      -1 +  $\frac{1}{6}$  d1[6 n, 1]
7      -1 +  $\frac{1}{7}$  d1[7 n, 1]
8      -1 +  $\frac{1}{8}$  d1[8 n, 1]
9      -1 +  $\frac{1}{9}$  d1[9 n, 1]
10     -1 +  $\frac{1}{10}$  d1[10 n, 1]
```

```
Table[{j, Expand[dhlal[n, 2, j]]}, {j, 1, 10}] // TableForm
```

```
1      1 - 2 d1[n, 1] + d1[n, 2]
2      1 -  $\frac{1}{2}$  d1[2 n, 1] -  $\frac{1}{2}$  d1[4 n, 1] +  $\frac{1}{4}$  d1[4 n, 2]
3      1 -  $\frac{2}{9}$  d1[3 n, 1] -  $\frac{2}{9}$  d1[ $\frac{9 n}{2}$ , 1] -  $\frac{2}{9}$  d1[9 n, 1] +  $\frac{1}{9}$  d1[9 n, 2]
4      1 -  $\frac{1}{8}$  d1[4 n, 1] -  $\frac{1}{8}$  d1[ $\frac{16 n}{3}$ , 1] -  $\frac{1}{8}$  d1[8 n, 1] -  $\frac{1}{8}$  d1[16 n, 1] +  $\frac{1}{16}$  d1[16 n, 2]
5      1 -  $\frac{2}{25}$  d1[5 n, 1] -  $\frac{2}{25}$  d1[ $\frac{25 n}{4}$ , 1] -  $\frac{2}{25}$  d1[ $\frac{25 n}{3}$ , 1] -  $\frac{2}{25}$  d1[ $\frac{25 n}{2}$ , 1] -  $\frac{2}{25}$  d1[25 n, 1] +  $\frac{1}{25}$  d1[25 n, 2]
6      1 -  $\frac{1}{18}$  d1[6 n, 1] -  $\frac{1}{18}$  d1[ $\frac{36 n}{5}$ , 1] -  $\frac{1}{18}$  d1[9 n, 1] -  $\frac{1}{18}$  d1[12 n, 1] -  $\frac{1}{18}$  d1[18 n, 1] -  $\frac{1}{18}$  d1[36 n, 1]
7      1 -  $\frac{2}{49}$  d1[7 n, 1] -  $\frac{2}{49}$  d1[ $\frac{49 n}{6}$ , 1] -  $\frac{2}{49}$  d1[ $\frac{49 n}{5}$ , 1] -  $\frac{2}{49}$  d1[ $\frac{49 n}{4}$ , 1] -  $\frac{2}{49}$  d1[ $\frac{49 n}{3}$ , 1] -  $\frac{2}{49}$  d1[ $\frac{49 n}{2}$ , 1]
8      1 -  $\frac{1}{32}$  d1[8 n, 1] -  $\frac{1}{32}$  d1[ $\frac{64 n}{7}$ , 1] -  $\frac{1}{32}$  d1[ $\frac{32 n}{3}$ , 1] -  $\frac{1}{32}$  d1[ $\frac{64 n}{5}$ , 1] -  $\frac{1}{32}$  d1[16 n, 1] -  $\frac{1}{32}$  d1[ $\frac{64 n}{3}$ , 1]
9      1 -  $\frac{2}{81}$  d1[9 n, 1] -  $\frac{2}{81}$  d1[ $\frac{81 n}{8}$ , 1] -  $\frac{2}{81}$  d1[ $\frac{81 n}{7}$ , 1] -  $\frac{2}{81}$  d1[ $\frac{27 n}{2}$ , 1] -  $\frac{2}{81}$  d1[ $\frac{81 n}{5}$ , 1] -  $\frac{2}{81}$  d1[ $\frac{81 n}{4}$ , 1]
10     1 -  $\frac{1}{50}$  d1[10 n, 1] -  $\frac{1}{50}$  d1[ $\frac{100 n}{9}$ , 1] -  $\frac{1}{50}$  d1[ $\frac{25 n}{2}$ , 1] -  $\frac{1}{50}$  d1[ $\frac{100 n}{7}$ , 1] -  $\frac{1}{50}$  d1[ $\frac{50 n}{3}$ , 1] -  $\frac{1}{50}$  d1[20 n, 1]
```

```
Table[{j, Expand[dhla1[n, 3, j]]}, {j, 1, 10}] // TableForm
```

```
1      -1 + 3 d1[n, 1] - 3 d1[n, 2] + d1[n, 3]
2      -1 +  $\frac{3}{8}$  d1[2 n, 1] +  $\frac{3}{4}$  d1[4 n, 1] -  $\frac{3}{8}$  d1[4 n, 2] +  $\frac{3}{8}$  d1[8 n, 1] -  $\frac{3}{8}$  d1[8 n, 2] +  $\frac{1}{8}$  d1[8 n, 3]
3      -1 +  $\frac{1}{9}$  d1[3 n, 1] +  $\frac{2}{9}$  d1[ $\frac{9 n}{2}$ , 1] +  $\frac{1}{9}$  d1[ $\frac{27 n}{4}$ , 1] +  $\frac{2}{9}$  d1[9 n, 1] -  $\frac{1}{9}$  d1[9 n, 2] +  $\frac{2}{9}$  d1[ $\frac{27 n}{2}$ , 1] -  $\frac{1}{9}$  d1[
4      -1 +  $\frac{3}{64}$  d1[4 n, 1] +  $\frac{3}{32}$  d1[ $\frac{16 n}{3}$ , 1] +  $\frac{3}{64}$  d1[ $\frac{64 n}{9}$ , 1] +  $\frac{3}{32}$  d1[8 n, 1] +  $\frac{3}{32}$  d1[ $\frac{32 n}{3}$ , 1] +  $\frac{9}{64}$  d1[16 n, 1]
5      -1 +  $\frac{3}{125}$  d1[5 n, 1] +  $\frac{6}{125}$  d1[ $\frac{25 n}{4}$ , 1] +  $\frac{3}{125}$  d1[ $\frac{125 n}{16}$ , 1] +  $\frac{6}{125}$  d1[ $\frac{25 n}{3}$ , 1] +  $\frac{6}{125}$  d1[ $\frac{125 n}{12}$ , 1] +  $\frac{6}{125}$  d1[ $\frac{5}{4}$ 
6      -1 +  $\frac{1}{72}$  d1[6 n, 1] +  $\frac{1}{36}$  d1[ $\frac{36 n}{5}$ , 1] +  $\frac{1}{72}$  d1[ $\frac{216 n}{25}$ , 1] +  $\frac{1}{36}$  d1[9 n, 1] +  $\frac{1}{36}$  d1[ $\frac{54 n}{5}$ , 1] +  $\frac{1}{36}$  d1[12 n, 1]
7      -1 +  $\frac{3}{343}$  d1[7 n, 1] +  $\frac{6}{343}$  d1[ $\frac{49 n}{6}$ , 1] +  $\frac{3}{343}$  d1[ $\frac{343 n}{36}$ , 1] +  $\frac{6}{343}$  d1[ $\frac{49 n}{5}$ , 1] +  $\frac{6}{343}$  d1[ $\frac{343 n}{30}$ , 1] +  $\frac{6}{343}$  d1[ $\frac{4}{3}$ 
8      -1 +  $\frac{3}{512}$  d1[8 n, 1] +  $\frac{3}{256}$  d1[ $\frac{64 n}{7}$ , 1] +  $\frac{3}{512}$  d1[ $\frac{512 n}{49}$ , 1] +  $\frac{3}{256}$  d1[ $\frac{32 n}{3}$ , 1] +  $\frac{3}{256}$  d1[ $\frac{256 n}{21}$ , 1] +  $\frac{3}{256}$  d1[ $\frac{6}{5}$ 
9      -1 +  $\frac{1}{243}$  d1[9 n, 1] +  $\frac{2}{243}$  d1[ $\frac{81 n}{8}$ , 1] +  $\frac{1}{243}$  d1[ $\frac{729 n}{64}$ , 1] +  $\frac{2}{243}$  d1[ $\frac{81 n}{7}$ , 1] +  $\frac{2}{243}$  d1[ $\frac{729 n}{56}$ , 1] +  $\frac{2}{243}$  d1[ $\frac{9}{4}$ 
10     -1 +  $\frac{3 d1[10 n, 1]}{1000}$  +  $\frac{3}{500}$  d1[ $\frac{100 n}{9}$ , 1] +  $\frac{3 d1[\frac{1000 n}{81}, 1]}{1000}$  +  $\frac{3}{500}$  d1[ $\frac{25 n}{2}$ , 1] +  $\frac{3}{500}$  d1[ $\frac{125 n}{9}$ , 1] +  $\frac{3}{500}$  d1[ $\frac{100 n}{7}$ , 1] +
```

```
dhla1a[100, 1, 4]
```

```
99
```

```
-Gamma[1, 0, -Log[100]] / Gamma[1]
```

```
99
```

```
Limit[Gamma[s, 0, -Log[100]] / Gamma[s], {s -> 0}]
```

```
{1}
```

```
Limit[-Gamma[s, 0, -Log[100]] / Gamma[s], {s -> 1}]
```

```
{99}
```

```
Limit[Gamma[s, 0, -Log[100]] / Gamma[s], {s -> 3}]
```

```
{1 -  $\frac{1}{2}$  Gamma[3, -Log[100]]}
```

```
s2[n_, c_] := Sum[2 / c^2, {j, 1, c}, {k, 1, c^2 n / j}]
```

```
s3[n_, c_] := Sum[-2 / c^2 Gamma[1, 0, -Log[Floor[c^2 n / j]]], {j, 1, c}]
```

```
s4[n_, c_] := Sum[-2 / c^2 Gamma[1, 0, -2 Log[c] - Log[n] + Log[j]], {j, 1, c}]
```

```
N[s2[100, 20]]
```

```
719.52
```

```
N[s3[100, 20]]
```

```
719.42
```

```
N[s4[100, 20]]
```

```
719.448
```

```
Limit[Sum[-2 / c^2 Gamma[1, 0, -Log[Floor[c^2 n / j]]], {j, 1, c}], {c -> Infinity}]
```

```
{Limit[ $\sum_{j=1}^c -\frac{2 \left(1 - \text{Floor}\left[\frac{c^2 n}{j}\right]\right)}{c^2}$ , c ->  $\infty$ ]}
```

```
Limit[Sum[-2 / c^2 Gamma[1, 0, -Log[c^2 n / j]], {j, 1, c}], {c -> a}]
```

```
{- $\frac{2}{a}$  + 2 EulerGamma n + 2 n PolyGamma[0, 1 + a]}
```

```
Sum[ -2 / c^2 Gamma[1, 0, -Log[c^2 n / j]], {j, 1, c}]
```

```
2 (-1 + c n HarmonicNumber[c])
```

c

```
N[
$$\frac{2 (-1 + a n \text{HarmonicNumber}[a])}{a} /. \{a \rightarrow 20, n \rightarrow 100\}$$
]
```

```
719.448
```