

```

ClearAll["Global`*"]
$RecursionLimit = 10000
10000

t[n_, k_] := Mod[n, k] - Mod[n - 1, k]
f[n_] := If[n == 1, 1, N[n^(-1) t[n, 5]]]
F[n_, 0] := 1; F[n_, k_] := F[n, k] = Sum[f[j] F[Floor[n/j], k - 1], {j, 1, n}]
F2[n_, 0] := 1; F2[n_, k_] := F2[n, k] = Sum[f[j] F2[Floor[n/j], k - 1], {j, 2, n}]
FtoF2[n_, k_] := Sum[(-1)^j Binomial[k, j] F[n, k - j], {j, 0, k}]

F2toF[n_, k_] := Sum[Binomial[k, j] F2[n, j], {j, 0, k}]
Fz[n_, z_] := Sum[FactorialPower[z, a] / a! F2[n, a], {a, 0, Log[2, n]}]

Fa[n_, 0, a_] := 1; Fa[n_, k_, a_] := Fa[n, k, a] = Sum[f[j] Fa[n/j, k - 1, a], {j, a, n}]
Fa2[n_, k_, a_] := Fa2[n, k, a] = If[n < a^k, 0,
Sum[Binomial[k, j] f[a]^j Fa2[Floor[n/a^j], k - j, a + 1], {j, 0, k}]]; Fa2[n_, 0, a_] := 1
Fa3[n_, k_, a_] := Fa3[n, k, a] = Sum[Binomial[k, j] f[m]^(k - j)
Fa3[Floor[n/(m^(k - j))], j, m + 1], {m, a, n^(1/k)}, {j, 0, k - 1}]
Fa3[n_, 0, a_] := 1
fa[n_, k_, a_] := Fa3[n, k, a] - Fa3[n - 1, k, a]
Fa4[n_, k_, a_, t_] := Sum[fa[j, 1, a] Fa3[Floor[n/j], k - 1, a], {j, t + 1, n}] +
Sum[fa[j, k - 1, a] Fa3[Floor[n/j], 1, a], {j, a, t}] +
Sum[fa[s, 1, a] fa[j, m, a] Fa3[Floor[n/(j s)], k - m - 1, a],
{j, a, t}, {s, Floor[t/j] + 1, Floor[n/j]}, {m, 1, k - 2}]

Lg[n_] := Lg[n] = Sum[(-1)^(k + 1) / k F2[n, k], {k, 1, Log[2, n]}]
lg[n_] := Lg[n] - Lg[n - 1]
LgF[n_, 0] := 1; LgF[n_, k_] := LgF[n, k] = Sum[lg[j] LgF[Floor[n/j], k - 1], {j, 2, n}]
LgExp[n_, z_] := Sum[z^k / (k!) LgF[n, k], {k, 0, Log[2, n]}]

Mb2[n_] := Mb2[n] = Sum[(-1)^k F2[n, k], {k, 1, Log[2, n]}]
mb[n_] := Mb2[n] - Mb2[n - 1]
MbF[n_, 0] := 1; MbF[n_, k_] := MbF[n, k] = Sum[mb[j] MbF[Floor[n/j], k - 1], {j, 2, n}]
MbtoF[n_, z_] := Sum[(-1)^a FactorialPower[z + a - 1, a] / a! MbF[n, a], {a, 0, Log[2, n]}]

FtoEta[n_, k_, b_] :=
FtoEta[n, k, b] = Sum[(-1)^j Binomial[k, j] b^j F[n/b^j, k], {j, 0, k}]
EtaToF[n_, k_, b_] :=
Sum[Binomial[k + j - 1, k - 1] b^j FtoEta[n/b^j, k, b], {j, 0, Log[b, n]}]
Table[{n, N[F2[n, cc = 3]], N[FtoF2[n, cc]], Fa2[n, cc, 2], Fa3[n, cc, 2],
Fa[n, cc, 2], Fa4[n, cc, 2, Floor[n^(1/2)]]}, {n, 1, 100}] // TableForm

```

1	0.	0.	0	0	0	0
2	0.	0.	0	0	0.	0.
3	0.	0.	0	0	0.	0.
4	0.	0.	0	0	0.	0.
5	0.	0.	0	0	0.	0.
6	0.	0.	0	0	0.	0.
7	0.	0.	0	0	0.	0.
8	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.
9	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.
10	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.
11	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.	-8.

12	28.	28.	28.	28.	28.	28.
13	28.	28.	28.	28.	28.	28.
14	28.	28.	28.	28.	28.	28.
15	28.	28.	28.	28.	28.	28.
16	-20.	-20.	-20.	-20.	-20.	-20.
17	-20.	-20.	-20.	-20.	-20.	-20.
18	-74.	-74.	-74.	-74.	-74.	-74.
19	-74.	-74.	-74.	-74.	-74.	-74.
20	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.
21	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.
22	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.
23	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.	-14.
24	58.	58.	58.	58.	58.	58.
25	58.	58.	58.	58.	58.	58.
26	58.	58.	58.	58.	58.	58.
27	85.	85.	85.	85.	85.	85.
28	169.	169.	169.	169.	169.	169.
29	169.	169.	169.	169.	169.	169.
30	-11.	-11.	-11.	-11.	-11.	-11.
31	-11.	-11.	-11.	-11.	-11.	-11.
32	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.
33	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.
34	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.
35	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.	-203.
36	13.	13.	13.	13.	13.	13.
37	13.	13.	13.	13.	13.	13.
38	13.	13.	13.	13.	13.	13.
39	13.	13.	13.	13.	13.	13.
40	133.	133.	133.	133.	133.	133.
41	133.	133.	133.	133.	133.	133.
42	-119.	-119.	-119.	-119.	-119.	-119.
43	-119.	-119.	-119.	-119.	-119.	-119.
44	13.	13.	13.	13.	13.	13.
45	148.	148.	148.	148.	148.	148.
46	148.	148.	148.	148.	148.	148.
47	148.	148.	148.	148.	148.	148.
48	148.	148.	148.	148.	148.	148.
49	148.	148.	148.	148.	148.	148.
50	-2.	-2.	-2.	-2.	-2.	-2.
51	-2.	-2.	-2.	-2.	-2.	-2.
52	154.	154.	154.	154.	154.	154.
53	154.	154.	154.	154.	154.	154.
54	-332.	-332.	-332.	-332.	-332.	-332.
55	-332.	-332.	-332.	-332.	-332.	-332.
56	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.
57	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.
58	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.
59	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.	-164.
60	376.	376.	376.	376.	376.	376.
61	376.	376.	376.	376.	376.	376.
62	376.	376.	376.	376.	376.	376.
63	565.	565.	565.	565.	565.	565.
64	-75.	-75.	-75.	-75.	-75.	-75.
65	-75.	-75.	-75.	-75.	-75.	-75.
66	-471.	-471.	-471.	-471.	-471.	-471.
67	-471.	-471.	-471.	-471.	-471.	-471.

68	-267.	-267.	-267.	-267.	-267.	-267.
69	-267.	-267.	-267.	-267.	-267.	-267.
70	-687.	-687.	-687.	-687.	-687.	-687.
71	-687.	-687.	-687.	-687.	-687.	-687.
72	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.
73	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.
74	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.	-39.
75	186.	186.	186.	186.	186.	186.
76	414.	414.	414.	414.	414.	414.
77	414.	414.	414.	414.	414.	414.
78	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.
79	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.
80	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.	-54.
81	189.	189.	189.	189.	189.	189.
82	189.	189.	189.	189.	189.	189.
83	189.	189.	189.	189.	189.	189.
84	945.	945.	945.	945.	945.	945.
85	945.	945.	945.	945.	945.	945.
86	945.	945.	945.	945.	945.	945.
87	945.	945.	945.	945.	945.	945.
88	1209.	1209.	1209.	1209.	1209.	1209.
89	1209.	1209.	1209.	1209.	1209.	1209.
90	-681.	-681.	-681.	-681.	-681.	-681.
91	-681.	-681.	-681.	-681.	-681.	-681.
92	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.
93	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.
94	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.
95	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.	-405.
96	-981.	-981.	-981.	-981.	-981.	-981.
97	-981.	-981.	-981.	-981.	-981.	-981.
98	-1275.	-1275.	-1275.	-1275.	-1275.	-1275.
99	-978.	-978.	-978.	-978.	-978.	-978.
100	-378.	-378.	-378.	-378.	-378.	-378.

```
Table[{n, N[F[n, cc = 5]], N[F2toF[n, cc]],
  Fa2[n, cc, 1], Fz[n, cc], Fa4[n, cc, 1, Floor[n^(1/2)]],
  LgExp[n, cc], MbtoF[n, cc], EtaToF[n, cc, 2]}, {n, 1, 100}] // TableForm
```

[illegible]



[illegible]