

```

referenceRiemanPrimeCount[n_] := Sum[PrimePi[n^(1/k)]/k, {k, 1, Floor[Log[2, n]]}]
mm[n_, a_, b_] := If[Mod[n, a] == 0, a, 0] - If[Mod[n, b] == 0, b, 0]
E2h[n_, 0, a_, al_, bl_] := 1
E2h[n_, 1, a_, al_, bl_] := If[n < a, 0,
(b1 Floor[n/bl] - al Floor[n/al]) - (b1 Floor[(a-1)/bl] - al Floor[(a-1)/al])]
E2h[n_, k_, a_, al_, bl_] := E2h[n, k, a, al, bl] =
Sum[If[mm[m, bl, al] == 0, 0, Binomial[k, j] mm[m, bl, al]^j
E2h[Floor[n/(m^j)], k-j, m+1, al, bl]], {j, 1, k}, {m, a, Floor[n^(1/k)}]]
E2hf[n_, k_, a_, b_] := b^-k E2h[n b^k, k, b+1, a, b]
P[n_, al_, bl_] := Sum[(al/bl)^j/j, {j, 1, Log[(al/bl), n]}] + Sum[
(-1)^(k+1)/k E2hf[n, k, al, bl], {k, 1, If[(al/bl) < 2, Log[(al/bl), n], Log[2, n]]}]
Table[{n, referenceRiemanPrimeCount[n], P[n, 5, 2], P[n, 3, 2], P[n, 4, 3]},
{n, 10, 1000, 10}] // TableForm

```

10	<u>16</u> 3	<u>16</u> 3	<u>16</u> 3	<u>16</u> 3
20	<u>115</u> 12	<u>115</u> 12	<u>115</u> 12	<u>115</u> 12
30	<u>149</u> 12	<u>149</u> 12	<u>149</u> 12	<u>149</u> 12
40	<u>877</u> 60	<u>877</u> 60	<u>877</u> 60	<u>877</u> 60
50	<u>1087</u> 60	<u>1087</u> 60	<u>1087</u> 60	<u>1087</u> 60
60	<u>1207</u> 60	<u>1207</u> 60	<u>1207</u> 60	<u>1207</u> 60
70	<u>1337</u> 60	<u>1337</u> 60	<u>1337</u> 60	<u>1337</u> 60
80	<u>1517</u> 60	<u>1517</u> 60	<u>1517</u> 60	<u>1517</u> 60
90	<u>413</u> 15	<u>413</u> 15	<u>413</u> 15	<u>413</u> 15
100	<u>428</u> 15	<u>428</u> 15	<u>428</u> 15	<u>428</u> 15
110	<u>488</u> 15	<u>488</u> 15	<u>488</u> 15	<u>488</u> 15
120	<u>503</u> 15	<u>503</u> 15	<u>503</u> 15	<u>503</u> 15
130	<u>7457</u> 210	<u>7457</u> 210	<u>7457</u> 210	<u>7457</u> 210
140	<u>8087</u> 210	<u>8087</u> 210	<u>8087</u> 210	<u>8087</u> 210
150	<u>8297</u> 210	<u>8297</u> 210	<u>8297</u> 210	<u>8297</u> 210
160	<u>8717</u> 210	<u>8717</u> 210	<u>8717</u> 210	<u>8717</u> 210
170	<u>4621</u> 105	<u>4621</u> 105	<u>4621</u> 105	<u>4621</u> 105
180	<u>4831</u> 105	<u>4831</u> 105	<u>4831</u> 105	<u>4831</u> 105
190	<u>4936</u> 105	<u>4936</u> 105	<u>4936</u> 105	<u>4936</u> 105
200	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105
210	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105	<u>5356</u> 105
220	<u>5461</u> 105	<u>5461</u> 105	<u>5461</u> 105	<u>5461</u> 105
230	<u>5776</u> 105	<u>5776</u> 105	<u>5776</u> 105	<u>5776</u> 105
240	<u>5986</u> 105	<u>5986</u> 105	<u>5986</u> 105	<u>5986</u> 105
250	<u>6112</u> 105	<u>6112</u> 105	<u>6112</u> 105	<u>6112</u> 105
260	<u>50 681</u> 840	<u>50 681</u> 840	<u>50 681</u> 840	<u>50 681</u> 840
270	<u>52 361</u> 840	<u>52 361</u> 840	<u>52 361</u> 840	<u>52 361</u> 840
280	<u>54 041</u> 840	<u>54 041</u> 840	<u>54 041</u> 840	<u>54 041</u> 840
290	<u>56 141</u> 840	<u>56 141</u> 840	<u>56 141</u> 840	<u>56 141</u> 840

300	<u>56 981</u> 840 <u>57 821</u>	<u>56 981</u> 840 <u>57 821</u>	<u>56 981</u> 840 <u>57 821</u>	<u>56 981</u> 840 <u>57 821</u>
310	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>
320	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>	<u>840</u> <u>60 341</u>
330	<u>840</u> <u>62 021</u>	<u>840</u> <u>62 021</u>	<u>840</u> <u>62 021</u>	<u>840</u> <u>62 021</u>
340	<u>840</u> <u>21 327</u>	<u>840</u> <u>21 327</u>	<u>840</u> <u>21 327</u>	<u>840</u> <u>21 327</u>
350	<u>280</u> <u>21 887</u>	<u>280</u> <u>21 887</u>	<u>280</u> <u>21 887</u>	<u>280</u> <u>21 887</u>
360	<u>280</u> <u>22 307</u>	<u>280</u> <u>22 307</u>	<u>280</u> <u>22 307</u>	<u>280</u> <u>22 307</u>
370	<u>280</u> <u>22 867</u>	<u>280</u> <u>22 867</u>	<u>280</u> <u>22 867</u>	<u>280</u> <u>22 867</u>
380	<u>280</u> <u>23 427</u>	<u>280</u> <u>23 427</u>	<u>280</u> <u>23 427</u>	<u>280</u> <u>23 427</u>
390	<u>280</u> <u>23 707</u>	<u>280</u> <u>23 707</u>	<u>280</u> <u>23 707</u>	<u>280</u> <u>23 707</u>
400	<u>280</u> <u>24 267</u>	<u>280</u> <u>24 267</u>	<u>280</u> <u>24 267</u>	<u>280</u> <u>24 267</u>
410	<u>280</u> <u>24 547</u>	<u>280</u> <u>24 547</u>	<u>280</u> <u>24 547</u>	<u>280</u> <u>24 547</u>
420	<u>280</u> <u>24 827</u>	<u>280</u> <u>24 827</u>	<u>280</u> <u>24 827</u>	<u>280</u> <u>24 827</u>
430	<u>280</u> <u>25 667</u>	<u>280</u> <u>25 667</u>	<u>280</u> <u>25 667</u>	<u>280</u> <u>25 667</u>
440	<u>280</u> <u>26 227</u>	<u>280</u> <u>26 227</u>	<u>280</u> <u>26 227</u>	<u>280</u> <u>26 227</u>
450	<u>280</u> <u>26 507</u>	<u>280</u> <u>26 507</u>	<u>280</u> <u>26 507</u>	<u>280</u> <u>26 507</u>
460	<u>280</u> <u>27 347</u>	<u>280</u> <u>27 347</u>	<u>280</u> <u>27 347</u>	<u>280</u> <u>27 347</u>
470	<u>280</u> <u>27 627</u>	<u>280</u> <u>27 627</u>	<u>280</u> <u>27 627</u>	<u>280</u> <u>27 627</u>
480	<u>280</u> <u>27 907</u>	<u>280</u> <u>27 907</u>	<u>280</u> <u>27 907</u>	<u>280</u> <u>27 907</u>
490	<u>280</u> <u>28 467</u>	<u>280</u> <u>28 467</u>	<u>280</u> <u>28 467</u>	<u>280</u> <u>28 467</u>
500	<u>280</u> <u>29 027</u>	<u>280</u> <u>29 027</u>	<u>280</u> <u>29 027</u>	<u>280</u> <u>29 027</u>
510	<u>280</u> <u>261 523</u>	<u>280</u> <u>261 523</u>	<u>280</u> <u>261 523</u>	<u>280</u> <u>261 523</u>
520	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>
530	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>	<u>2520</u> <u>267 823</u>
540	<u>2520</u> <u>272 863</u>	<u>2520</u> <u>272 863</u>	<u>2520</u> <u>272 863</u>	<u>2520</u> <u>272 863</u>
550	<u>2520</u> <u>275 383</u>	<u>2520</u> <u>275 383</u>	<u>2520</u> <u>275 383</u>	<u>2520</u> <u>275 383</u>
560	<u>2520</u> <u>280 423</u>	<u>2520</u> <u>280 423</u>	<u>2520</u> <u>280 423</u>	<u>2520</u> <u>280 423</u>
570	<u>2520</u> <u>285 463</u>	<u>2520</u> <u>285 463</u>	<u>2520</u> <u>285 463</u>	<u>2520</u> <u>285 463</u>
580	<u>2520</u> <u>287 983</u>	<u>2520</u> <u>287 983</u>	<u>2520</u> <u>287 983</u>	<u>2520</u> <u>287 983</u>
590	<u>2520</u> <u>293 023</u>	<u>2520</u> <u>293 023</u>	<u>2520</u> <u>293 023</u>	<u>2520</u> <u>293 023</u>
600	<u>2520</u> <u>298 063</u>	<u>2520</u> <u>298 063</u>	<u>2520</u> <u>298 063</u>	<u>2520</u> <u>298 063</u>
610	<u>2520</u> <u>305 623</u>	<u>2520</u> <u>305 623</u>	<u>2520</u> <u>305 623</u>	<u>2520</u> <u>305 623</u>
620	<u>2520</u> <u>306 253</u>	<u>2520</u> <u>306 253</u>	<u>2520</u> <u>306 253</u>	<u>2520</u> <u>306 253</u>
630	<u>2520</u> <u>308 773</u>	<u>2520</u> <u>308 773</u>	<u>2520</u> <u>308 773</u>	<u>2520</u> <u>308 773</u>
640	<u>2520</u> <u>316 333</u>	<u>2520</u> <u>316 333</u>	<u>2520</u> <u>316 333</u>	<u>2520</u> <u>316 333</u>
650	<u>2520</u> <u>321 373</u>	<u>2520</u> <u>321 373</u>	<u>2520</u> <u>321 373</u>	<u>2520</u> <u>321 373</u>
660	<u>2520</u> <u>323 893</u>	<u>2520</u> <u>323 893</u>	<u>2520</u> <u>323 893</u>	<u>2520</u> <u>323 893</u>
670	<u>2520</u> <u>328 933</u>	<u>2520</u> <u>328 933</u>	<u>2520</u> <u>328 933</u>	<u>2520</u> <u>328 933</u>
680	<u>2520</u>	<u>2520</u>	<u>2520</u>	<u>2520</u>

690	<u>331 453</u> 2520	<u>331 453</u> 2520	<u>331 453</u> 2520	<u>331 453</u> 2520
700	<u>333 973</u> 2520	<u>333 973</u> 2520	<u>333 973</u> 2520	<u>333 973</u> 2520
710	<u>339 013</u> 2520	<u>339 013</u> 2520	<u>339 013</u> 2520	<u>339 013</u> 2520
720	<u>341 533</u> 2520	<u>341 533</u> 2520	<u>341 533</u> 2520	<u>341 533</u> 2520
730	<u>344 473</u> 2520	<u>344 473</u> 2520	<u>344 473</u> 2520	<u>344 473</u> 2520
740	<u>349 513</u> 2520	<u>349 513</u> 2520	<u>349 513</u> 2520	<u>349 513</u> 2520
750	<u>352 033</u> 2520	<u>352 033</u> 2520	<u>352 033</u> 2520	<u>352 033</u> 2520
760	<u>357 073</u> 2520	<u>357 073</u> 2520	<u>357 073</u> 2520	<u>357 073</u> 2520
770	<u>362 113</u> 2520	<u>362 113</u> 2520	<u>362 113</u> 2520	<u>362 113</u> 2520
780	<u>364 633</u> 2520	<u>364 633</u> 2520	<u>364 633</u> 2520	<u>364 633</u> 2520
790	<u>367 153</u> 2520	<u>367 153</u> 2520	<u>367 153</u> 2520	<u>367 153</u> 2520
800	<u>369 673</u> 2520	<u>369 673</u> 2520	<u>369 673</u> 2520	<u>369 673</u> 2520
810	<u>372 193</u> 2520	<u>372 193</u> 2520	<u>372 193</u> 2520	<u>372 193</u> 2520
820	<u>374 713</u> 2520	<u>374 713</u> 2520	<u>374 713</u> 2520	<u>374 713</u> 2520
830	<u>384 793</u> 2520	<u>384 793</u> 2520	<u>384 793</u> 2520	<u>384 793</u> 2520
840	<u>387 313</u> 2520	<u>387 313</u> 2520	<u>387 313</u> 2520	<u>387 313</u> 2520
850	<u>388 573</u> 2520	<u>388 573</u> 2520	<u>388 573</u> 2520	<u>388 573</u> 2520
860	<u>396 133</u> 2520	<u>396 133</u> 2520	<u>396 133</u> 2520	<u>396 133</u> 2520
870	<u>398 653</u> 2520	<u>398 653</u> 2520	<u>398 653</u> 2520	<u>398 653</u> 2520
880	<u>401 173</u> 2520	<u>401 173</u> 2520	<u>401 173</u> 2520	<u>401 173</u> 2520
890	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520
900	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520	<u>408 733</u> 2520
910	<u>411 253</u> 2520	<u>411 253</u> 2520	<u>411 253</u> 2520	<u>411 253</u> 2520
920	<u>416 293</u> 2520	<u>416 293</u> 2520	<u>416 293</u> 2520	<u>416 293</u> 2520
930	<u>418 813</u> 2520	<u>418 813</u> 2520	<u>418 813</u> 2520	<u>418 813</u> 2520
940	<u>421 333</u> 2520	<u>421 333</u> 2520	<u>421 333</u> 2520	<u>421 333</u> 2520
950	<u>426 373</u> 2520	<u>426 373</u> 2520	<u>426 373</u> 2520	<u>426 373</u> 2520
960	<u>428 893</u> 2520	<u>428 893</u> 2520	<u>428 893</u> 2520	<u>428 893</u> 2520
970	<u>432 673</u> 2520	<u>432 673</u> 2520	<u>432 673</u> 2520	<u>432 673</u> 2520
980	<u>437 713</u> 2520	<u>437 713</u> 2520	<u>437 713</u> 2520	<u>437 713</u> 2520
990	<u>440 233</u> 2520	<u>440 233</u> 2520	<u>440 233</u> 2520	<u>440 233</u> 2520
1000	<u>445 273</u> 2520	<u>445 273</u> 2520	<u>445 273</u> 2520	<u>445 273</u> 2520

P[100, 20, 19]

428

15

Log[aa / bb, n]

$$\frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}\left[\frac{aa}{bb}\right]}$$

Log[a / b, n]

$$\frac{\text{Log}[n]}{\text{Log}\left[\frac{a}{b}\right]}$$

FullSimplify[n / (a / b) ^ j]

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-j} n$$

(8 / 9) ^ 3

$$\frac{512}{729}$$

8 ^ 3 / 9 ^ 3

$$\frac{512}{729}$$

Table[N[Log[b + 1] - Log[b]], {b, 2, 30}]

```
{0.405465, 0.287682, 0.223144, 0.182322, 0.154151, 0.133531, 0.117783, 0.105361,
0.0953102, 0.0870114, 0.0800427, 0.074108, 0.0689929, 0.0645385, 0.0606246,
0.0571584, 0.0540672, 0.0512933, 0.0487902, 0.04652, 0.0444518, 0.0425596,
0.040822, 0.0392207, 0.0377403, 0.0363676, 0.0350913, 0.0339016, 0.0327898}
```

```
Table[{n, Sum[N[(b + 1)^j / (j b^j) - 1 / j], {j, 1, Floor[Log[n] / (Log[b + 1] - Log[b])]}] /.
  b -> 100 001, N[LogIntegral[n] - Log[Log[n]] - EulerGamma]}, {n, 5, 100, 5}] // TableForm
```

5	$2.58149 + 1.15268 \times 10^{-10} i$	2.58149
10	$4.75433 - 2.16936 \times 10^{-9} i$	4.75435
15	$6.5814 + 1.00606 \times 10^{-10} i$	6.58138
20	$8.23088 - 1.11447 \times 10^{-9} i$	8.2309
25	$9.76671 - 1.84603 \times 10^{-9} i$	9.76671
30	$11.2213 + 3.39849 \times 10^{-10} i$	11.2213
35	$12.6139 + 9.33752 \times 10^{-10} i$	12.6139
40	$13.957 - 2.13376 \times 10^{-9} i$	13.957
45	$15.2593 - 2.48741 \times 10^{-9} i$	15.2594
50	$16.5275 + 2.12378 \times 10^{-9} i$	16.5274
55	$17.7659 - 2.07822 \times 10^{-9} i$	17.7659
60	$18.9786 - 5.70732 \times 10^{-10} i$	18.9786
65	$20.1684 - 1.16739 \times 10^{-9} i$	20.1685
70	$21.338 + 2.01046 \times 10^{-9} i$	21.338
75	$22.4893 + 1.04266 \times 10^{-9} i$	22.4892
80	$23.6239 - 8.91403 \times 10^{-10} i$	23.6238
85	$24.7432 - 3.87628 \times 10^{-9} i$	24.7432
90	$25.8486 - 1.55252 \times 10^{-9} i$	25.8486
95	$26.9412 - 2.20831 \times 10^{-9} i$	26.9412
100	$28.0216 + 1.27322 \times 10^{-10} i$	28.0217

```
Limit[Sum[(((b + 1) / b)^j - 1) / j, {j, 1, Floor[Log[5] / (Log[b + 1] - Log[b])]}], b -> Infinity]
```

```
$Aborted
```

```
P2[n_, a1_, b1_] :=
```

```
Sum[(-1)^(k + 1) / k E2hf[n, k, a1, b1], {k, 1, If[(a1 / b1) < 2, Log[(a1 / b1), n], Log[2, n]]}]
```

```
P2[80, 4, 3]
```

$$-\frac{2491794169577}{861795354420}$$

```
alpha[n_, a_, b_] := If[Mod[n, b] == 0, b, 0] - If[Mod[n, a] == 0, a, 0]
```

```
er[n_, k_, b_] :=
```

```
b^-1 Sum[alpha[j, b + 1, b] (1 / k - er[nb / j, k + 1, b]), {j, b + 1, Floor[nb]}]
```

```
er[100, 1, 2]
```

$$-\frac{8149753}{2365440}$$

```
err[n_, k_, j_, b_] := If[nb < j, 0,
```

```
b^-1 alpha[j, b + 1, b] (1 / k - err[nb / j, k + 1, b + 1, b]) + err[n, k, j + 1, b]]
```

```
err[100, 1, 3, 2]
```

$$-\frac{8149753}{2365440}$$