

```

D2Cache[n_, k_, s_] :=
  Sum[Binomial[k, j] D2Cache[n / (m^(k - j)), j, m + 1], {m, s, n^(1/k)}, {j, 0, k - 1}]
D2Cache[n_, 1, s_] := Floor[n] - s + 1; D2Cache[n_, 0, s_] := 1
d2cache[n_, k_] := D2Cache[n, k, 2] - D2Cache[n - 1, k, 2]

D2Fast[n_, k_] := Sum[D2Cache[n / j, k - 1, 2], {j, Floor[n^(1/3)] + 1, n^(1/2)}] +
  Sum[(Floor[n / j] - (Floor[n / (j + 1)])) D2Cache[j, k - 1, 2], {j, 1, n / Floor[n^(1/2)] - 1}] +
  Sum[d2cache[j, k - 1] (Floor[n / j] - 1), {j, 2, n^(1/3)}] +
  Sum[d2cache[j, m] D2Cache[n / (j s), k - m - 1, 2], {j, 2, n^(1/3)},
    {s, Floor[Floor[n^(1/3)] / j] + 1, Floor[n / j]^(1/2)}, {m, 1, k - 2}] +
  Sum[(Sum[1, {m, Floor[n / (j (s + 1))] + 1, n / (j s)}])
    (Sum[d2cache[j, m] D2Cache[s, k - m - 1, 2], {m, 1, k - 2}]),
    {j, 2, n^(1/3)}, {s, 1, Floor[n / j] / Floor[Floor[n / j]^(1/2)] - 1}]
D2Fast[n_, 1] := Floor[n] - 1

LinnikSumFast[n_] := Sum[(-1)^(k + 1) / k D2Fast[n, k], {k, 1, Log[2, n]}]
RiePrimeCnt[n_] := Sum[PrimePi[n^(1/j)] / j, {j, 1, Log[2, n]}]
Table[{n, LinnikSumFast[n], RiePrimeCnt[n]}, {n, 1, 100}] // TableForm

```

1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
5	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$
6	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$
7	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
8	$\frac{29}{6}$	$\frac{29}{6}$
9	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$
10	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$
11	$\frac{19}{3}$	$\frac{19}{3}$
12	$\frac{19}{3}$	$\frac{19}{3}$
13	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{3}$
14	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{3}$
15	$\frac{22}{3}$	$\frac{22}{3}$
16	$\frac{91}{12}$	$\frac{91}{12}$
17	$\frac{103}{12}$	$\frac{103}{12}$
18	$\frac{103}{12}$	$\frac{103}{12}$
19	$\frac{115}{12}$	$\frac{115}{12}$
20	$\frac{115}{12}$	$\frac{115}{12}$
21	$\frac{115}{12}$	$\frac{115}{12}$
22	$\frac{115}{12}$	$\frac{115}{12}$
23	$\frac{127}{12}$	$\frac{127}{12}$
24	$\frac{127}{12}$	$\frac{127}{12}$
25	$\frac{133}{12}$	$\frac{133}{12}$

	--	--
26	<u>133</u>	<u>133</u>
	12	12
27	<u>137</u>	<u>137</u>
	12	12
28	<u>137</u>	<u>137</u>
	12	12
29	<u>149</u>	<u>149</u>
	12	12
30	<u>149</u>	<u>149</u>
	12	12
31	<u>161</u>	<u>161</u>
	12	12
32	<u>817</u>	<u>817</u>
	60	60
33	<u>817</u>	<u>817</u>
	60	60
34	<u>817</u>	<u>817</u>
	60	60
35	<u>817</u>	<u>817</u>
	60	60
36	<u>817</u>	<u>817</u>
	60	60
37	<u>877</u>	<u>877</u>
	60	60
38	<u>877</u>	<u>877</u>
	60	60
39	<u>877</u>	<u>877</u>
	60	60
40	<u>877</u>	<u>877</u>
	60	60
41	<u>937</u>	<u>937</u>
	60	60
42	<u>937</u>	<u>937</u>
	60	60
43	<u>997</u>	<u>997</u>
	60	60
44	<u>997</u>	<u>997</u>
	60	60
45	<u>997</u>	<u>997</u>
	60	60
46	<u>997</u>	<u>997</u>
	60	60
47	<u>1057</u>	<u>1057</u>
	60	60
48	<u>1057</u>	<u>1057</u>
	60	60
49	<u>1087</u>	<u>1087</u>
	60	60
50	<u>1087</u>	<u>1087</u>
	60	60
51	<u>1087</u>	<u>1087</u>
	60	60
52	<u>1087</u>	<u>1087</u>
	60	60
53	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
54	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
55	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
56	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
57	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
58	<u>1147</u>	<u>1147</u>
	60	60
59	<u>1207</u>	<u>1207</u>
	60	60
60	<u>1207</u>	<u>1207</u>
	60	60
61	<u>1267</u>	<u>1267</u>
	60	60
62	<u>1267</u>	<u>1267</u>
	60	60
63	<u>1267</u>	<u>1267</u>
	60	60
64	<u>1277</u>	<u>1277</u>
	60	60

	~	~
65	<u>1277</u>	<u>1277</u>
	60	60
	<u>1277</u>	<u>1277</u>
66	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1337</u>	<u>1337</u>
67	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1337</u>	<u>1337</u>
68	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1337</u>	<u>1337</u>
69	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1337</u>	<u>1337</u>
70	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1397</u>	<u>1397</u>
71	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1397</u>	<u>1397</u>
72	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
73	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
74	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
75	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
76	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
77	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1457</u>	<u>1457</u>
78	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1517</u>	<u>1517</u>
79	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>1517</u>	<u>1517</u>
80	<u>60</u>	<u>60</u>
	<u>383</u>	<u>383</u>
81	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>383</u>	<u>383</u>
82	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
83	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
84	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
85	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
86	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
87	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>398</u>	<u>398</u>
88	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
89	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
90	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
91	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
92	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
93	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
94	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
95	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>413</u>	<u>413</u>
96	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>428</u>	<u>428</u>
97	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>428</u>	<u>428</u>
98	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>428</u>	<u>428</u>
99	<u>15</u>	<u>15</u>
	<u>428</u>	<u>428</u>
100	<u>15</u>	<u>15</u>

```

Clear[D1AltC]
Dhyp[n_, k_, a_] :=
  Sum[Binomial[k, j] Dhyp[n / (m^(k - j)), j, m + 1], {m, a, n^(1/k)}, {j, 0, k - 1}]
Dhyp[n_, 1, a_] := If[n < a, 0, Floor[n] - a + 1]; Dhyp[n_, 0, a_] := 1
dhyp[n_, k_, a_] := dhyp[n, k, a] = Dhyp[n, k, a] - Dhyp[n - 1, k, a]
D1AltC[n_, k_, t_] :=
  D1AltC[n, k, t] = Dhyp[t, k, 1] + Sum[Dhyp[Floor[n / j], k - 1, 1], {j, t + 1, n}] +
  Sum[dhyp[j, m, 1] Dhyp[Floor[n / (j s)], k - m - 1, 1],
    {j, 1, t}, {s, Floor[t / j] + 1, Floor[n / j]}, {m, 1, k - 1}]
D2[n_, k_, t_] := Sum[(-1)^(k - j) Binomial[k, j] D1AltC[n, j, t], {j, 0, k}]
L2[n_, t_] := Sum[(-1)^(k + 1) / k D2[n, k, t], {k, 1, Log2@n}]

D1AltC[100, 1, 10]

100

Dhyp[100, 7, 1]

25 537

L2[100, 10]

428
15

Clear[Db, Dc]
bin[z_, k_] := Product[z - j, {j, 0, k - 1}] / k!
Db[n_, y_, k_] := If[n < y, 0, Sum[Binomial[k, j] Db[n / y^j, y + 1, k - j], {j, 0, k}]]
Db[n_, y_, 0] := UnitStep[n - 1]
Dc[n_, y_, z_] := If[n < y, 1, Sum[bin[z, k] Dc[n / y^k, y + 1, z - k], {k, 0, Log[y, n]}]]
Dd[n_, y_, z_] := Sum[(-1)^k bin[z, k] Dc[n / (y - 1)^k, y - 1, z - k], {k, 0, Log[y - 1, n]}]
Ddo[n_, y_, z_] :=
  Sum[(-1)^k bin[z, k] Dco[Floor[n / (y - 1)^k], y - 1, z - k], {k, 0, Log[y - 1, n]}]

Expand@Dc[200, 3, z]

1 +  $\frac{181 z}{4}$  +  $\frac{855 z^2}{8}$  +  $\frac{177 z^3}{4}$  +  $\frac{13 z^4}{8}$ 

Expand@Ddo[20 000, 128, z]

 $-\frac{1}{2} z$  Dco[1, 127, -2 + z] +  $\frac{1}{2} z^2$  Dco[1, 127, -2 + z] - z Dco[157, 127, -1 + z] + Dco[20 000, 127, z]

```