

2013年度 計算量理論 学期末試験問題 正答例等

問題1 入力アルファベットを $\Sigma = \{0,1\}$, B が空白記号でテープアルファベットを $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$ とする2テープチューリング機械を考える. 第1テープは読み取り専用の入力テープ, 第2テープは書き換え可能な作業用テープとする.

言語 $L_{RN} \subseteq \Sigma^*$ を, つぎのように定義する:

$$L_{RN} = \left\{ w \mid w \in \Sigma^* \text{ はそれ自身を左右反転し } 0 \text{ と } 1 \text{ を入れ替えたものに等しい} \right\}.$$

たとえば, $1110 \notin L_{RN}$, $10110010 \in L_{RN}$ である.

(1) この言語を受理する2テープの決定性チューリング機械を設計し, 状態遷移図で書け. できるだけ時間計算量が小さくなるものを考えること.

配点: 15点

〔解答〕 入力の作業用テープへのコピーと, 入力テープと作業用テープの内容の比較をする機械は, 授業中に何度も解説した. これをごく一部変更すれば, 定義のとおり操作と検証を行うチューリングマシンが作れる. アルゴリズムとして正しければ正答とする. いくつかバリエーションがありえるので, 状態遷移図は省略する.

(2) 入力が 100110 であるときの(1)の計算を書け. またその計算が受理計算かどうかを定義に基づいて検証し指摘せよ. 計算状況を省略しないこと.

配点: 15点(減点-2)

〔解答〕 与えられた入力は受理すべき入力であるから, 初期計算状況から受理計算状況までを, 計算状況の定義にもとづき, 省略せず, 問(1)の解答の機械で動作するとおりに書けばよい. この後の問題を考える上でのヒントにもなっている. 指示をまもらず省略している場合は, 減点.

(3) (1)で設計したチューリング機械の最悪時間計算量と最悪領域(空間)計算量を, 入力長を n としたときのオーダー表記 O で答えよ.

配点: 10点(それぞれ5点)

〔解答〕 問(1)の解答の機械に基づく計算量を答えればよい. 今回は全員コピー検証型の機械であった. この場合, 最悪の場合は特に気にする必要がなく, 時間量, 領域量ともに $O(n)$.

(4) 領域(空間)計算量をより小さくするには, どのようにチューリング機械を設計すればよいか. その機械の概要(あるいは, 使用する技法等)を, (1)で設計した機械との違いがわかるよう, 文章で簡潔に書け.

配点: 15点(減点-2)

〔解答〕 文字の位置を使って検証する機械を作れば, 対数領域つまり領域計算量 $O(\log n)$ で計算できる. 授業では簡単にするため作業用テープが多いもので説明したが, 当然作業用テープ1本でも同様のアルゴリズムは可能であり, この間はアイディアのみ答えればよいのでこれで十分である. ただし, 設問ではオーダーが違ふことが必ずしも求められていないため, 線形領域圧縮定理のアイデ

ィアで文字数を減らすのも原点-2だが次善の正答とする.

問題2. クラスNPに属する問題とその困難性を示す手法に関して, 以下の各問に答えよ.

- (5) 言語(決定問題) A から言語 B へ多項式時間還元が可能であるとは, どういうことか. 定義を説明せよ.

配点: 15点(減点-7)

〔解答〕 定義を述べればよい. 多項式時間で計算可能な問題 A の問題例から問題 B の問題例への写像で, 問題 B の問題例が受理できるとき, ただそのときに限り問題 A の問題例が受理されるものが存在すること. 解の変換関数についての記述は必ずしも必要ない. なお, 「問題」の写像あるいは変換ではない. 上記を読み取れない不正確な記述は減点, はっきり間違いである場合は誤答となる.

- (6) 非決定性アルゴリズムとはどんなものか. 非決定的な動作と決定的な動作の違いを意識して, NPに属する問題をえらび, その問題を受理するアルゴリズムを例に, 説明せよ.

配点: 15点(減点-7)

〔解答〕 選んだ問題の非決定性多項式時間アルゴリズム(チューリング機械)のアルゴリズムを説明すればよい. 非決定的に動いて証拠となる文字列を書き出すこと, 文字列を証拠として受理できるかどうかを検証する計算を決定的に行うことが述べられており, 受理計算が多項式ステップで終了することがわかればよい. 上問(5)と同様に要点について不正確あるいは記述がない場合, 減点.

- (7) ある問題がNP完全であるならば, 計算量的な難しさについてどのようなことがわかるか. 簡潔に説明せよ.

配点: 15点(減点-7)

〔解答〕 多項式時間で解くことが難しいということがわかる. なおNP完全性の定義を書いている場合も, この帰結を得るための補足説明がある場合, 状況証拠としての説明がなされている場合は, 正答とした.

以上, 正答の場合評点の合計100点.