MATHEMATISCHES INSTITUT
GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
PROF. DR. E. VIADA, DR. V. CANTORAL

Übungsblatt 7.

Name

Übungsgruppe (Name des Tutors)

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Abgabetermin: **Montag, 18.12.2023, 14:00 Uhr**.

Bitte verwenden Sie bei Abgabe in Papierform diese Seite als Deckblatt und tragen Sie oben Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe ein. Bitte heften Sie die Blätter zusammen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(i) Zeigen Sie, dass alle Restklassen $\mod 4$ mit der Operation $+$, definiert durch

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$$

eine kommutative Gruppe bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass die Restklassen $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ $\mod 4$ mit der Operation $\cdot$, definiert durch

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$$

keine Gruppe bildet.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(i) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$, d.h. die bzgl. der Multiplikation invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, und geben Sie zu jedem Element aus $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ das Inverse an.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ein Ring. Ist dies ein Körper?

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass für alle Primzahlen p (und $a, b \in \mathbb{Z}$) gilt

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Binomialkoeffizient $\binom{p}{i}$ für $1 \leq i \leq p-1$ durch p teilbar ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen.

(i) Gilt $\mathrm{ggT(a, b)} = 1$, $c|a$ und $d|b$, so auch $\mathrm{ggT(c, d)} = 1$.

(ii) Gilt $a, b|c$ und $\mathrm{ggT(a, b)} = 1$, so ist $ab|c$.

Zusatzaufgabe 5. Lea feiert ihren Geburtstag mit Pia und Mia. Es verbleiben noch 10 Bonbons, die vollständing auf die Kinder verteilt werden sollen.

(i) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es hierfür, wenn jedes Kind mindestens ein Bonbon erhalten soll.

(ii) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es hierfür, wenn Lea mindestens vier Bonbons erhalten soll.