Beweistypen

Inhaltsverzeichnis

1 Direkter Beweis

In einem direkten Beweis fängt man mit den Annahmen des Satzes an und schließt durch eine Reihe von logischen Folgerungen auf die Behauptung.

Satz. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$. Wenn $x < y$, dann $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.*

Beweis Es ist gegeben, dass $x < y$. Dann folgt durch Subtraktion von y auf beiden Seiten auch $x - y < 0$. Wir schreiben dies nun um als $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 < 0$. Nach der binomischen Formel ergibt sich dann hieraus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 < 0\,.$$

Da $x, y > 0$ gilt auch $\sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$, also ist $\sqrt{x}+\sqrt{y} > 0$. Dann ist $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ also Produkt der positiven Zahl $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ mit der Zahl $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ negativ genau dann, wenn $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ negativ ist. Also gilt $\sqrt{x}-\sqrt{y} < 0$ und damit auch $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. □

Übungsaufgabe
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade ist, dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = a^2 - b^2$.

2 Beweis durch Kontraposition

In einem Beweis durch Kontraposition, beweist man eine Implikation der Form $P \Rightarrow Q$ indem man stattdessen die Implikation $\neg Q \Rightarrow \neg P$, die Kontraposition zu $P \Rightarrow Q$, zeigt. Das unterliegende Prinzip ist folgender Satz aus der Logik

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

nach welchem diese beiden Implikation äquivalente Aussagen sind.

Satz. *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 ungerade ist, ist n ungerade.*

BEWEIS Wir formulieren zunächst die Kontraposition:

Wenn n gerade ist, ist n^2 gerade.

Sei also n gerade, das heißt es findet sich ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Dann ist

$$n^2 = (2k)^2 = 2k \cdot 2k = 2(2k^2)\,,$$

das heißt es ist n^2 ebenfalls eine gerade Zahl. □

Genauso können wir auch folgenden Aussage beweisen.

Satz. *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, ist n gerade.*

BEWEIS Wir formulieren erneut die Kontraposition:

Wenn n ungerade ist, ist n^2 ungerade.

Angenommen n ist ungerade, das heißt es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k+1$. Es folgt mit der binomischen Formel dann

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot (2k) + 1^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1\,,$$

sprich es ist n^2 ebenfalls eine ungerade Zahl. □

Durch Kombination der ersten Behauptung und der Kontraposition der zweiten Behauptung, haben wir tatsächlich gezeigt, dass n ungerade ist genau dann, wenn n^2 ungerade ist (und natürlich auch, dass n gerade ist genau dann, wenn n^2 gerade ist).

Übungsaufgabe

Man hat vier (4) Karten vor sich, die Folgendes zeigen: 3, 8, K, E. *Jede Karte hat auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen einen Buchstaben.*

Welche Karte soll man umdrehen, um die folgenden Regel zu überprüfen: Wenn eine Seite einer Karte eine gerade Zahl zeigt, dann zeigt die andere Seite einen Vokal.

3 Beweis durch Widerspruch

In einem Widerspruchsbeweis, beweist man eine Aussage R, indem man $\neg R$ annimmt und daraus einen Widerspruch ableitet. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist der Fall einer Implikation, das heißt $R = (P \Rightarrow Q)$. Dann ist $\neg R = P \wedge \neg Q$, man nimmt dann also P und $\neg Q$ um einen Widerspruch zu folgern.

Das unterliegende Prinzip ist der sogenannte Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$$R \vee \neg R$$

nach welchem entweder eine Aussage R oder ihre Negation $\neg R$ wahr sein muss. Folgt also aus der Annahme $\neg R$ ein Widerspruch, so muss R dann wahr sein, da $R \vee \neg R$ wahr ist.

Satz. *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.*

Beweis Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational, das heißt es gäbe $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ und

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \,.$$

Zusätzlich fordern wir hierbei, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist, das heißt, dass p und q keine gemeinsamen Teiler außer 1 haben.

Nun schreiben wir diese Darstellung um als $q\sqrt{2} = p$. Durch quadrieren erhalten wir hieraus dann weiter $2q^2 = p^2$. Das zeigt, dass p^2 gerade ist. Wir wissen aber, dass p^2 genau dann gerade ist, wenn p gerade ist (siehe Kapitel 2).

Schreibe nun $p = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten damit

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) \,.$$

Kürzen von 2 auf beiden Seiten liefert also, dass $q^2 = 2p^2$. Das heißt, dass q^2 ebenfalls gerade ist, damit aber auch q gerade sein muss.

Wir haben also gezeigt, dass sowohl p als auch q gerade sein müssen, also den gemeinsamen Teiler 2 haben. Das ist aber im Widerspruch zur Annahme, dass p und q keine gemeinsamen Teiler außer 1 haben. Also wahr die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, falsch. □

Satz. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis Wir nehmen an, des gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$, für ein $n \geq 1$. Betrachte dann die Zahl

$$N = p_1 \cdots p_n + 1 \,.$$

Wir wissen (siehe Kapitel 4), dass wir N als Produkt von Primzahlen schreiben können, also als Produkt aus den Zahlen $p_1, \dots, p_n$.

Angenommen es teilt p_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, die Zahl N. Das heißt, es gilt $N = p_i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da auch $p_1 \cdots p_n = p_i l$, mit l dem Produkt der Primzahlen ausgenommen p_i, folgt

$$N - p_1 \cdots p_n = p_i k - p_i l = p_i(k - l) \,.$$

Es teilt also p_i die Zahl $N - p_1 \cdots p_n$. Es ist aber

$$N - p_1 \cdots p_n = (p_1 \cdots p_n + 1) - p_1 \cdots p_n = 1 \,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass jede Primzahl p_i, welche N teilt, auch 1 teilt. Es hat aber 1 keine Teiler außer ± 1, welche beide keine Primzahlen sind. Widerspruch. □

Übungsaufgabe

(i) Die Summe (und Differenz) zweier rationaler Zahlen ist rational.

(ii) Die Summe eine rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl ist irrational.

Ähnlich zu einem Beweis durch Kontraposition, wird in einem Beweis durch Widerspruch die betrachtete Aussage abgewandelt. Es kann sogar sein, dass ein Beweis durch Widerspruch einen Beweis durch Kontraposition verbirgt!

Will man etwa eine Implikation $P \Rightarrow Q$ mittels Widerspruch zeigen, so nimmt man P und $\neg Q$ an. Folgert man jetzt aber bereits aus $\neg Q$ alleine $\neg P$, so hat man bereits $P \Rightarrow Q$ durch Beweis der Kontraposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$ gezeigt. Die Annahme $\neg P$ und der Ausruf des Widerspruchs sind also gar nicht von Nöten.

Ein in dem Sinne echter Widerspruchsbeweis ist jedoch oft ein sehr mächtiger und eleganter Weg, eine Aussage zu beweisen. Trotzdem gibt es Gründe andere Beweismethoden zu bevorzugen.

Auf der einen Seite sind alle Zwischenergebnisse eines Beweises durch Widerspruch mit Vorsicht zu betrachten. Da wir am Anfang eine Annahme treffen, die sich als falsch herausstellen wird, führt der Widerspruchsbeweis oft auf weitere falsche Aussagen. Dies ist natürlich nicht der Fall bei einem direkten Beweis, wo jede Folgerung wahr ist.

Auf der anderen Seiten sind Beweise durch Widerspruch oft nicht konstruktiv, zeigen also nicht, wie man etwa eine Lösung effektiv findet.

4 Beweis durch Induktion

Ein Induktionsbeweis erlaubt es Aussagen über alle natürlichen Zahlen auf einmal zu beweisen. Diese Beweisform basiert auf dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Prinzip. *Sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Wenn*

1. *(Induktionsverankerung) $A(n_0)$ wahr ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und*
2. *(Induktionsschritt) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$,*

dann ist die Aussage $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Man bezeichnet im Induktionsschritt $A(n)$ auch als Induktionsannahme. Dieses Prinzip ist eine grundlegende Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 .$$

Beweis Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n für $n_0 = 1$.

1. Induktionsverankerung: Es gilt für $n_0 = 1$

$$\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2(1) - 1 = 1 = 1^2 .$$

2. Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, das heißt mit $n \geq 1$. Wir nehmen

an, dass die Aussage für n gilt, also dass

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\,.$$

Wir schreiben dann

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+1)\,.$$

Nach Induktionsannahme folgt dann weiter

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1)\,.$$

Da $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ zeigt dies auch

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Dies zeigt den Induktionsschritt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt damit, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Eine Variante des Prinzips der vollständigen Induktion ist oft hilfreich.

Prinzip. *Sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Wenn*

1. *(Induktionsverankerung) $A(n_0)$ wahr ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und*
2. *(Induktionsschritt) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $(A(1) \wedge \cdots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$,*

dann ist die Aussage $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Diese Version der vollständigen Induktion wird auch starke Induktion genannt. Es ist jedoch äquivalent zum oben angeführten Prinzip der vollständigen Induktion, also ebenfalls eine grundlegende Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Satz. *Jede natürliche Zahl größer als 1 hat eine Zerlegung in Primfaktoren, das heißt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ existieren nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass $n = p_1 \cdots p_k$.*

Beweis Wir beweisen die Aussage durch starke Induktion nach n mit $n_0 = 2$.

1. Induktionsverankerung: Da $n_0 = 2$ eine Primzahl ist, gilt die zu zeigende Aussage für n_0.
2. Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, also $n \geq 2$. Unsere Induktionsannahme ist, dass sich alle Zahlen $2, \ldots, n$ in Primfaktoren zerlegen lassen.

   Betrachte nun $n+1$. Ist $n+1$ eine Primzahl, so ist $n+1 = n+1$ ein Produkt von Primfaktoren. Sonst finden wir a, b mit $1 < a, b < n+1$, so dass $n+1 = ab$.

Dann gilt natürlich auch $2 \leq a, b \leq n$, also greift die Induktionsannahme für a und b. Wir schreiben $a = p_1 \cdots p_k$ sowie $b = q_1 \cdots q_l$ für nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$. Dann ist aber auch

$$n + 1 = ab = (p_1 \cdots p_k)(q_1 \cdots q_l) = p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_l$$

ein Produkt von Primfaktoren. Der Induktionsschritt gilt.

Nach dem Prinzip der starken Induktion folgt die behauptete Aussage. □

Übungsaufgabe
Die Fibonacci-Folge wird definiert durch $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 0$. Zeige, dass

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

für alle $n \geq 1$.

5 Beweis durch Gegenbeispiel

Gegenbeispiele benutzt man um zu zeigen, dass eine Aussage nicht wahr ist.

Satz. *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Beweise oder widerlege: Wenn n^2 durch 4 teilbar ist, ist n durch 4 teilbar.*

Beweis Wir zeigen, dass die Behauptung falsch ist. Da es sich um eine Aussage handelt, welche für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten soll, genügt es ein $n \in \mathbb{Z}$ zu finden, so dass die Aussage falsch ist.

Sei $n = 2$. Dann ist $n^2 = 4 = 1 \cdot 4$ durch 4 teilbar. Es ist aber n selbst nicht durch 4 teilbar. Denn gäbe es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $2 = 4k$, so muss auch $1 = 2k$ gelten. Es gibt aber keine solche ganze Zahl k, also ist 2 auch nicht durch 4 teilbar. □

Übungsaufgabe
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweise oder widerlege: Es gilt $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Gegenbeispiele sind oft schwierig zu finden und teils Inhalte wichtiger unbewiesener Vermutungen.

Auch können Gegenbeispiele manchmal der Intuition großer Mathematiker widerlegen. So hat etwa Pierre de Fermat vermutet (aber nicht bewiesen), dass die sogenannten Fermatzahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ alle Primzahlen sind. Die ist tatsächlich auch wahr für die ersten fünf Fermatzahlen

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537\,.$$

Es gilt aber

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

wie Leonhard Euler in 1732 zeigen konnte. Es ist also insbesondere F_5 keine Primzahl ist. Bisher wurde keine weitere Fermatzahl gefunden, welche auch eine Primzahl ist.

6 Beweis durch Fallunterscheidung

In einer Fallunterscheidung unterscheidet man in einem Beweis endlich viele Fälle. Für jeden auftretenden Fall führt man dann einen angepassten, oft dadurch einfacherer Beweis. Hierbei ist es sehr wichtig sicherzustellen, dass die gewählten Fälle alle Möglichkeiten abdecken.

Satz. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|xy| = |x||y|$. Hierbei ist $|\cdot|$ die Betragsfunktion*

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & ,\textit{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & ,\textit{falls} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Beweis Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist entweder $x \geq 0$ oder $x < 0$. Gleichermaßen ist für $y \in \mathbb{R}$ auch $y \geq 0$ oder $y < 0$. Wir unterscheiden nun nach den Kombinationen dieser Möglichkeiten.

1. Angenommen es sind $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann sind $|x| = x$ und $|y| = y$. Multiplizieren wir nun $x \geq 0$ mit y, so folgt auch $xy \geq 0 \cdot y = 0$. Das heißt, es ist $xy \geq 0$ und damit $|xy| = xy$. Also folgt auch
$$|xy| = xy = |x||y|\,.$$
2. Nun angenommen es sind $x \geq 0$ aber $y < 0$. Nun gelten $|x| = x$ und $|y| = -y$. Wenn wir $y < 0$ mit x multiplizieren folgt $xy < x \cdot 0 = 0$. Es ist also $xy < 0$ und damit $|xy| = -xy$. Es folgt
$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$$
3. Sei nun $x < 0$ und $y \geq 0$. Hier gelten $|x| = -x$ sowie $|y| = y$. Ähnlich zum zweiten Fall multiplizieren wir nun $x < 0$ mit y und erhalten $xy < 0 \cdot y = 0$. Es gilt also $xy < 0$ und damit wieder $|xy| = -xy$. Wir folgern
$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|\,.$$
4. Also letztes betrachten wir $x < 0$ und $y < 0$. Dann sind $|x| = -x$ sowie $|y| = -y$. Da $x < 0$, folgt $-x \geq 0$. Multiplizieren wir also $y < 0$ mit $-x$, so erhalten wir $-xy < (-x) \cdot 0 = 0$. Es folgt also $xy \geq 0$ und damit auch $|xy| = xy$. Schließlich ergibt sich damit
$$|xy| = xy = (-1)^2 xy = (-x)(-y) = |x||y|$$
mit $(-1)^2 = 1$.

Da es je zwei Fälle für x und zwei Fälle für y zu betrachten gibt, ergeben sich insgesamt vier Fälle. Diese haben wir alle abgedeckt. $\square$

Übungsaufgabe
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Zahl $n(n+1)$ gerade.

7 Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis

Existenzbeweise haben keine allgemeine Form. Normalerweise versucht man ein konkrete Beispiel für ein Objekt mit der bestimmten Eigenschaft zu finden, oder man benutzt bereits bekannte Existenzaussagen. Manchmal lassen sich aber auch Existenzbeweise durch Widerspruch führen.

Eindeutigkeitsbeweise hingegen können häufig geführt werden, indem man annimmt es gäbe zwei solche Objekte und folgere dann deren Gleichheit. Hier lassen sich auch Widerspruchsbeweise führen, in denen man etwa annimmt, dass diese zwei Objekte verschieden seien.

Satz. *Es gibt eine eindeutige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f \circ g = g = g \circ f$ für alle Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Beweis Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Funktion getrennt.

1. Existenz: Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x\,.$$
Betrachte $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$$
sowie
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Es stimmen also die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ mit der Funktion g jeweils überein.
2. Eindeutigkeit: Es seien $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_1 \circ g = g = g \circ f_2$ und $f_2 \circ g = g = g \circ f_2$ für alle $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Für $g = f_2$ ergibt sich dann $f_1 \circ f_2 = f_2$ aus $f_1 \circ g = g$. Setzen wir aber $g = f_1$ ein in $g \circ f_2 = g$ so erhalten wir außerdem $f_1 \circ f_2 = f_1$. Es folgt
$$f_1 = f_1 \circ f_2 = f_2$$
und damit auch $f_1 = f_2$. □

Übungsaufgabe

Es gibt eine eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

8 Logiktabelle

Aussage	So beweist man das	Negierung
p	Beweise, dass p wahr ist	$\neg p$
p und q	Beweise, dass p wahr ist und dass q wahr ist	$\neg p$ oder $\neg q$
p oder q	• Beweise, dass p wahr ist • Beweise, dass q wahr ist • Nehme an, dass p falsch ist und folgere, dass q wahr ist • Nehme an, dass q falsch ist und folgere, dass p wahr ist	$\neg p$ und $\neg q$
$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	• Nehme an, dass p wahr ist und folgere, dass q wahr ist • Nehme an, dass $\neg q$ wahr ist und folgere, dass $\neg p$ wahr ist	p und $\neg q$
$p \iff q$	Beweise, dass $p \Rightarrow q$ und dass $q \Rightarrow q$	$p \iff \neg q$
$\exists x \in X : A(x)$	Finde ein konkretes $x \in X$, so dass $A(x)$ wahr ist	$\forall x \in X : \neg A(x)$
$\forall x \in X : A(x)$	Für ein beliebiges $x \in X$, beweise dass $A(x)$ wahr ist	$\exists x \in X : \neg A(x)$