Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07
Mathematisches Institut

Vorkurs Mathematik

Einführung in das mathematische Denken

Übungsaufgaben mit Lösungen

PD Dr. Elena Berdysheva

Aufgabe 1. Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender Form:

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl und } x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$, $D = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 5\}$.

Lösung:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl und } x < 20\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
2) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0\}$
   Wir bestimmen die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$:
   $x^2 + x - 6 = 0$
   $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$
   $x_1 = -3, \qquad x_2 = 2$
   Es gilt also $B = \{-3, 2\}$.
3) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
4) $D = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq n \leq 5\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Aufgabe 2. Schreiben Sie folgende Mengen in beschreibender Form:

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}, \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}, \quad C = \{0, 3, 8, 15, 24, 35\}.$$

Lösung:

Die Lösung ist in allen drei Fällen nicht eindeutig. Z.B.:

$A = \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{n \in \mathbb{N} : 4 \leq n \leq 12 \text{ und } n \text{ gerade}\}$
$= \{2n : n \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \leq n \leq 6\}$

$B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\} = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 6\right\}$
$= \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \leq n \leq 7\right\}$

$C = \{0, 3, 8, 15, 24, 35\} = \{n^2 - 1 : n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 6\}$

Aufgabe 3. a) Geben Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge $M = \{o, m, a\}$ an.

b) Eine Menge M bestehe aus n Elementen. Wie viele Elemente enthält ihre Potenzmenge $P(M)$?

Lösung:

a) $P(M) = \{\emptyset, \{o\}, \{m\}, \{a\}, \{o, m\}, \{o, a\}, \{m, a\}, \{o, m, a\}\}$

b) Eine Menge M bestehe aus n Elementen $a_1, a_2, ..., a_n$. Wie viele Elemente enthält ihre Potenzmenge $P(M)$?

Wie bildet man eine Teilmenge? Für jedes Element muss entschieden werden, ob es in der Teilmenge enthalten ist oder nicht.

Es entstehen folgende Möglichkeiten:

$a_1 \rightarrow$ Ja/ Nein (2 Möglichkeiten)

.....

$a_n \rightarrow$ Ja/ Nein (2 Möglichkeiten)

Insgesamt $\underbrace{2 \cdot ... \cdot 2}_{n \text{ mal}} = 2^n$ verschiedene Teilmengen.

Aufgabe 4. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{5, 9, 13\}, \quad M_2 = \{4, 7, 10\}, \quad M_3 = \{1, 3, 5, 7\}, \quad M_4 = \{7, 13, 19\}.$$

Bilden Sie $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$.

Lösung:

$M_1 \cup M_2 = \{4, 5, 7, 9, 10, 13\}$

$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = \{5, 7\}$

$[(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4 = \{5\}$

Aufgabe 5. Gegeben seien die Intervalle

$$A = [-5, 0], \quad B = (-3, 2), \quad C = [-1, 4).$$

a) Geben Sie jedes Intervall als eine Menge in beschreibender Form an.

b) Stellen Sie zu jedem Intervall die Komplementärmenge als Vereinigung von Intervallen dar.

c) Bestimmen Sie folgende Mengen: $A \cup B \cup C$, $B \setminus (A \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(C \setminus A) \cup B$, $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus B) \setminus C$.

Lösung:

a) $A = [-5, 0] = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 0\}$

$B = (-3, 2) = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 2\}$

$C = [-1, 4) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 4\}$

b) $\bar{A} = (-\infty, -5) \cup (0, \infty)$

$\bar{B} = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

$\bar{C} = (-\infty, -1) \cup [4, \infty)$

c) $A \cup B \cup C = [-5, 2) \cup [-1, 4) = [-5, 4)$
$B \setminus (A \cup C) = (-3, 2) \setminus [-5, 4) = \emptyset$
$(A \cap B) \cup C = (-3, 0] \cup [-1, 4) = (-3, 4)$
$(C \setminus A) \cup B = (0, 4) \cup (-3, 2) = (-3, 4)$
$A \setminus (B \setminus C) = [-5, 0] \setminus (-3, -1) = [-5, -3] \cup [-1, 0]$
$(A \setminus B) \setminus C = [-5, -3] \setminus [-1, 4) = [-5, -3]$

Aufgabe 6. Beweisen Sie folgende Identitäten:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cap (B \cup A) = A$

c) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Lösung:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cap (B \cup A) = A$

$x \in A \cap (B \cup A)$
$\Leftrightarrow x \in A$ und $x \in B \cup A$
$\Leftrightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in A)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ und $x \in B)$ oder $x \in A$
$\Leftrightarrow x \in A$

c) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$

$x \in B \setminus (B \setminus A)$
$\Leftrightarrow x \in B$ und $x \notin B \setminus A = \{y : y \in B \text{ und } x \notin A\}$
$\Leftrightarrow x \in B$ und $(x \notin B$ oder $x \in A)$
$\Leftrightarrow \underbrace{(x \in B \text{ und } x \notin B)}_{\text{unmöglich}}$ oder $(x \in B$ und $x \in A)$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$x \in \overline{A \cap B}$

$\Leftrightarrow x \notin A \cap B = \{y : y \in A \text{ und } y \in B\}$

$\Leftrightarrow x \notin A$ oder $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ oder $x \in \overline{B}$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Bemerkung: Alternativ kann man alle diese Identitäten mit Hilfe von Wahrheitstafeln beweisen.

Aufgabe 7. Seien A und B zwei Mengen und es gelte $A \subseteq B$. Beweisen Sie, dass in diesem Fall $A \cup B = B$ und $A \cap B = A$.

Lösung:

1) $x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in A$ oder $x \in B$

(Wegen $A \subseteq B$ gilt $x \in A \Rightarrow x \in B$, damit enhält A keine Elemente, die nicht schon in B liegen.)

$\Leftrightarrow x \in B$

2) $x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A$ und $x \in B$

(Wegen $A \subseteq B$ gilt $x \in A \Rightarrow x \in B$, damit ist für jedes $x \in A$ die zweite Beziehung $x \in B$ erfüllt.)

$\Leftrightarrow x \in A$

Aufgabe 8. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Mengengleichungen. Machen Sie sich erst anhand von Venn-Diagrammen klar, ob die jeweilige Gleichung richtig oder falsch ist. Ist sie richtig, geben Sie einen mengentheoretischen Beweis an. Ist sie falsch, konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Versuchen Sie, die falschen Mengengleichungen zu korrigieren.

a) $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$

b) $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$

c) $(X \cup Y) \cap \overline{X} = Y$

d) $(X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = Y$

Lösung:

a) $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$

Die Aussage ist richtig.

Beweis:

$x \in X \setminus Y \Leftrightarrow x \in X$ und $x \notin Y \Leftrightarrow x \in X$ und $x \in \overline{Y} \Leftrightarrow x \in X \cap \overline{Y}$

b) $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$

Die Aussage ist richtig.

Beweis:

$x \in (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$

$\Leftrightarrow x \in X \cap Y$ oder $x \in X \cap \overline{Y}$

$\Leftrightarrow (x \in X$ und $x \in Y)$ oder $(x \in X$ und $x \in \overline{Y})$

$\Leftrightarrow x \in X \text{ und } \underbrace{(x \in Y \text{ oder } x \in \overline{Y})}_{\text{immer erfüllt}}$

$\Leftrightarrow x \in X$

c) $(X \cup Y) \cap \overline{X} = Y$

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$,

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$(X \cup Y) \cap \overline{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{5, 6\} \neq Y$

Korrektur: $(X \cup Y) \cap \overline{X} = Y \setminus X$

Beweis:

$x \in (X \cup Y) \cap \overline{X}$

$\Leftrightarrow x \in X \cup Y$ und $x \notin \overline{X}$

$\Leftrightarrow (x \in X$ oder $x \in Y)$ und $x \notin X$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x \in X \text{ und } x \notin X)}_{\text{unmöglich}} \text{ oder } (x \in Y \text{ und } x \notin X)$

$\Leftrightarrow x \in Y \setminus X$

d) $(X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = Y$

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$X \cap \overline{Y} = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$

$\overline{X} \cup Y = \{4, 5\} \cup \{3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$

$(X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = \{1, 2\} \cap \{3, 4, 5\} = \emptyset$

Korrektur: $(X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = \emptyset$

Beweis:

$x \in (X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y)$

$\Leftrightarrow x \in X \cap \overline{Y}$ und $x \in \overline{X} \cup Y$

$\Leftrightarrow (x \in X$ und $x \in \overline{Y})$ und $(x \in \overline{X}$ oder $x \in Y)$

$\Leftrightarrow (x \in X$ und $x \notin Y)$ und $(x \notin X$ oder $x \in Y)$

$\Leftrightarrow (x \in X$ und $x \notin Y$ und $x \notin X)$ oder $(x \in X$ und $x \notin Y$ und $x \in Y)$

Beide Aussagen sind widersprüchlich: Sowohl $(x \in X$ und $x \notin X)$ als auch $(x \notin Y$ und $x \in Y)$ ist unmöglich.

$\Rightarrow (X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = \emptyset$

Bemerkung: Auch hier kann man mit den Wahrheitstafeln arbeiten.

Aufgabe 9. Welche der folgenden Familien von Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ stellen eine Partition der Menge M dar?

a) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b, c\}$, $M_3 = \{d\}$

b) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$

c) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{d\}$

Lösung:

a) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b, c\}$, $M_3 = \{d\}$

Das ist eine Partition, weil beide Bedingungen erfüllt sind:

1) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$,

2) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_2 \cap M_3 = \emptyset$, $M_1 \cap M_3 = \emptyset$.

b) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$

Das ist keine Partition, weil die zweite Bedingung nicht erfüllt ist: $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

c) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{d\}$

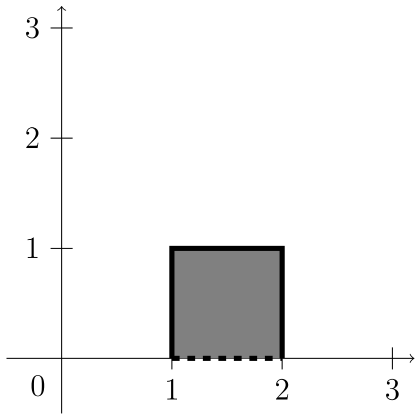
Das ist keine Partition, weil die erste Bedingung nicht erfüllt ist:

$M_1 \cup M_2 = \{a, b, d\} \neq M$.

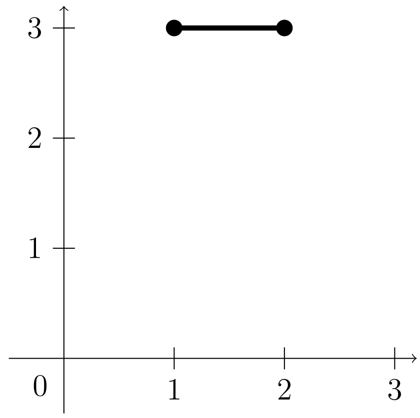
Aufgabe 10. Gegeben seien die Mengen $A = [1, 2]$, $B = \{3\}$, $C = (0, 1]$, $D = \{1, 2\}$. Skizzieren Sie die Mengen $A \times C$, $A \times B$, $(A \cup B) \times C$, $(A \cup B) \times D$.

Lösung:

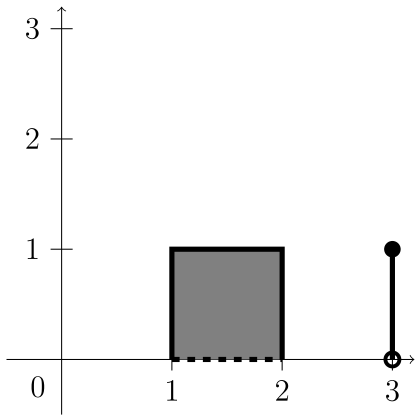
$A \times C$:



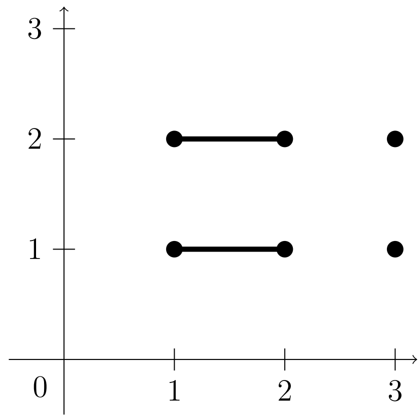
$A \times B$:



$(A \cup B) \times C$:



$(A \cup B) \times D$:



Aufgabe 11. Negieren Sie folgende Aussagen:

a) Alle Primzahlen sind ungerade.

b) $x + 5 \neq 7$

c) Die Erde ist eine Scheibe und die Sonne dreht sich um die Erde.

d) Der Kugelschreiber ist schwarz oder dunkelblau.

Lösung:

a) a: Alle Primzahlen sind ungerade.
$\neg a$: Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist.
(Oder: Nicht alle Primzahlen sind ungerade.)

b) b: $x + 5 \neq 7$
$\neg b$: $x + 5 = 7$

c) c: Die Erde ist eine Scheibe und die Sonne dreht sich um die Erde.
$\neg c$: Die Erde ist keine Scheibe oder die Sonne dreht sich nicht um die Erde.

d) d: Der Kugelschreiber ist schwarz oder dunkelblau.
$\neg d$: Der Kugelschreiber ist weder schwarz noch dunkelblau.

Aufgabe 12. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für logische Operationen anhand von Wahrheitstafeln:

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

b) $a \vee (b \wedge a) = a$

c) $a \wedge \neg a = f$

d) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Lösung:

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Wir sehen, dass die Spalte für $a \wedge (b \vee c)$ und die Spalte für $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ miteinander übereinstimmen. Daraus folgt, dass beide Aussagen gleich sind.

b) $a \vee (b \wedge a) = a$

a	b	$b \wedge a$	$a \vee (b \wedge a)$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	f
f	f	f	f

Wir sehen, dass die Spalte für $a \vee (b \wedge a)$ und die Spalte für a miteinander übereinstimmen. Daraus folgt, dass beide Aussagen gleich sind.

c) $a \wedge \neg a = f$

a	$\neg a$	$a \wedge \neg a$
w	f	f
f	w	f

Wir sehen, dass die Spalte für $a \wedge \neg a$ immer falsch ist. Damit ist die Aussage falsch.

d) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Wir sehen, dass die Spalte für $\neg(a \wedge b)$ und die Spalte für $\neg a \vee \neg b$ miteinander übereinstimmen. Daraus folgt, dass beide Aussagen gleich sind.

Aufgabe 13. Bilden Sie die Negationen und die Kontrapositionen folgender Aussagen:

a) Wenn eine Kerze brennt, dann ist der Raum nicht dunkel.

b) Es ist Herbst, folglich sind die Laubbäume bunt.

c) n ist eine Primzahl $\Rightarrow 41n + 1$ ist eine Primzahl.

Lösung:

Zur Erinnerung: Für die Aussage $A \Rightarrow B$ lautet die Negation $A \wedge \neg B$ und die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$.

a) Wenn eine Kerze brennt, dann ist der Raum nicht dunkel.

   Negation: Eine Kerze brennt und der Raum ist dunkel.
   Kontraposition: Wenn der Raum dunkel ist, dann brennt keine Kerze.

b) Es ist Herbst, folglich sind die Laubbäume bunt.

   Negation: Es ist Herbst und die Laubbäume sind nicht bunt.
   Kontraposition: Die Laubbäume sind nicht bunt, folglich ist es nicht Herbst.

c) n ist eine Primzahl $\Rightarrow 41n + 1$ ist eine Primzahl.

   Negation: n ist eine Primzahl und $41n + 1$ ist keine Primzahl.
   Kontraposition: $41n + 1$ ist keine Primzahl $\Rightarrow n$ ist keine Primzahl.

Aufgabe 14. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen anhand von Wahrheitstafeln:

a) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$

b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

c) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

Lösung:

a) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Wir sehen, dass die Spalte für $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ immer wahr ist. Daraus folgt, dass die Aussage wahr ist.

b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Wir sehen, dass die Spalte für $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ immer wahr ist. Daraus folgt, dass die Aussage wahr ist.

c) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w	f
f	f	w	w	w	w	f	f

Wir sehen, dass die Spalte für $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ nicht immer wahr ist. Daraus folgt, dass die Aussage i.A. falsch ist.

Aufgabe 15. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils die Negation der Aussage an.

a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$

b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$

c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \geq y$

d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$

e) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$

Lösung:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ (wahr)

Negation: $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$ (falsch)

b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$ (falsch: für $x = 1$ gibt es kein $y \in \mathbb{N}$ mit $1 > y$)

Negation: $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$ (wahr: $x = 1$)

c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \geq y$ (wahr)

Negation: $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x < y$ (falsch)

d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$ (wahr: $y = 1$)

Negation: $\forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x < y$ (falsch)

e) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$ (wahr)

Negation: $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \leq y$ (falsch)

Aufgabe 16. Beweisen Sie folgende Aussagen direkt:

a) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide gerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

b) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide ungerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

Lösung:

a) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide gerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

Beweis:

n, m gerade $\Rightarrow \exists k, \ell \in \mathbb{Z} :\ n = 2k,\ m = 2\ell.$

Dann gilt: $n + m = 2k + 2\ell = 2(k + \ell) = 2s$ mit $s \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow n + m$ ist gerade.

b) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide ungerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

Beweis:

n, m ungerade $\Rightarrow \exists k, \ell \in \mathbb{Z} :\ n = 2k + 1,\ m = 2\ell + 1.$

Dann gilt: $n + m = 2k + 1 + 2\ell + 1 = 2(k + \ell + 1) = 2s$ mit $s \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n + m$ ist gerade.

Aufgabe 17. Beweisen Sie durch Kontraposition folgende Aussage:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ist die Summe $n + m$ ungerade, so ist eine der Zahlen n, m gerade und die andere ungerade.

Lösung:

Negation der Behauptung: Die Zahlen n, m sind entweder beide gerade oder beide ungerade.

Kontraposition: Sind die Zahlen n, m beide gerade oder beide ungerade, so ist die Summe $n + m$ gerade.

Das aber folgt aus Aufgabe 16 a) und b). Die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 18. Beweisen Sie durch Widerspruch:

Es gibt keine natürlichen Zahlen n und m, für die gilt: $18n + 27m = 200$.

Lösung:

Angenommen, es gibt $n, m \in \mathbb{N}$, für die gilt: $18n + 27m = 200$.

$9|(18n + 27m) \Rightarrow 9|200$. Widerspruch.

Das beweist, dass es solche n, m nicht gibt.

Aufgabe 19. Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel folgende Aussage:

Sind die Zahlen p, q irrational, so ist auch ihre Summe $p + q$ irrational.

Lösung:

Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist z.B.:
$p = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$ sind irrational, aber $p + q = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ ist rational.

Aufgabe 20. a) Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die Zahl $\sqrt{3}$ irrational ist.

b) Versuchen Sie, diesen Beweis auch für $\sqrt{4}$ durchzuführen. An welcher Stelle funktioniert der Widerspruchsbeweis nicht?

Lösung:

a) Wir nehmen an, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist.

   Dann gilt: $\sqrt{3} = \dfrac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, wobei n und m teilerfremd sind.

   $\Rightarrow 3 = \dfrac{n^2}{m^2}$

   $\Rightarrow n^2 = 3m^2 \;\Rightarrow 3|n^2 \;\Rightarrow 3|n$.

   Folglich gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3k$.

   $\Rightarrow (3k)^2 = 3m^2$

   $\Rightarrow 9k^2 = 3m^2$

   $\Rightarrow m^2 = 3k^2 \;\Rightarrow 3|m^2 \;\Rightarrow 3|m$.

   Wir haben gezeigt, dass n und m beide durch 3 teilbar sind. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, n und m seien teilerfremd.

   Das beweist, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

b) Wir nehmen an, dass $\sqrt{4}$ eine rationale Zahl ist.

Dann gilt: $\sqrt{4} = \dfrac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, wobei n und m teilerfremd sind.

$\Rightarrow 4 = \dfrac{n^2}{m^2}$

$\Rightarrow n^2 = 4m^2 \ \Rightarrow 4|n^2 \ \not\Rightarrow 4|n.$

Da 4 keine Primzahl ist, folgt aus $4|n^2$ nicht, dass $4|n$ (es folgt nur, dass $2|n$).

Man kann höchstens so fortsetzen:

$n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 \ \Rightarrow 4k^2 = 4m^2 \ \Rightarrow k^2 = m^2 \ \Rightarrow k = m$

$\Rightarrow n = 2m \ \Rightarrow \sqrt{4} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{2m}{m} = 2.$

Kein Widerspruch, da man $m = 1$ wählen kann.

Aufgabe 21. Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad n \geq 0, \quad q \neq 1$

c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Term $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar.

Lösung:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

IA: Die Aussage gilt für $n = 1$, denn: $\sum\limits_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2.$

IS: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und folgern daraus, dass sie auch für $n+1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \underset{\text{(IV)}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad n \geq 0, \quad q \neq 1$

IA: Die Aussage gilt für $n = 0$, denn: $\sum\limits_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \dfrac{1-q}{1-q}.$

IS: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt und folgern daraus, dass sie auch für $n+1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel für alle $n \geq 0$.

c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

IA: Die Aussage gilt für $n = 4$, denn: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 2^4 = 16$.

IS: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt und folgern daraus, dass sie auch für $n+1$ gilt:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underset{\text{(IV)}}{>} 2^n \cdot \underbrace{(n+1)}_{\geq 2} \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel für alle $n \geq 4$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Term $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar.

IA: Die Aussage gilt für $n = 1$, denn:
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 17 = 36$ und $9|36$.

IS: Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und folgern daraus, dass sie auch für $n+1$ gilt:

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 3 + 3 \cdot n \cdot 3^2 + 3^3$$

$$= [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3] + [9 \cdot (n^2 + 3n + 3)].$$

Der erste Summand ist nach IV durch 9 teilbar. Da beide Summanden durch 9 teilbar sind, ist auch die Summe durch 9 teilbar.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 22. Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x,$$

$$f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x,$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto \frac{n}{n+1}.$$

Bestimmen Sie folgende Bilder und Urbilder: $f_1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f_1\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$, $f_1(\mathbb{R})$, $f_2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f_2\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$, $f_1^{-1}(\{0\})$, $f_1^{-1}([0,1])$, $f_1^{-1}((2,3))$, $f_1^{-1}(\mathbb{R})$, $f_2^{-1}(\{0\})$, $f_2^{-1}([0,1])$, $f_2^{-1}((2,3))$, $f_2^{-1}(\mathbb{R})$, $g(\{1,2,3\})$, $g^{-1}\left(\left\{\frac{7}{8}, \frac{8}{9}, 1\right\}\right)$, $g^{-1}(\mathbb{R})$.

Lösung:

$f_1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,1]$

$f_1\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$f_1(\mathbb{R})=[-1,1]$

$f_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,1]$

$f_2\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$f_1^{-1}(\{0\})=\{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$

$f_1^{-1}([0,1])=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[2\pi k, 2\pi k+\pi]$

$f_1^{-1}((2,3))=\emptyset$

$f_1^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

$f_2^{-1}(\{0\})=\{0\}$

$f_2^{-1}([0,1])=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f_2^{-1}((2,3))=\emptyset$

$f_2^{-1}(\mathbb{R})=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$g(\{1,2,3\})=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right\}$

$g^{-1}\left(\left\{\frac{7}{8},\frac{8}{9},1\right\}\right)=\{7,8\}$

$g^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{N}$

Aufgabe 23. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $f(A_1\setminus A_2)\supseteq f(A_1)\setminus f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

c) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$

Zeigen Sie auch, dass die Aussagen in a) und in c) nicht mit “=” geschrieben werden können.

Lösung:

a) $f(A_1\setminus A_2)\supseteq f(A_1)\setminus f(A_2)$

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$

$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 : f(x) = y) \wedge \neg(\exists x \in A_2 : f(x) = y)$

Zusammengefasst: Wenn $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$, dann $\exists x \in A_1 : f(x) = y$. Für dieses x gilt $x \notin A_2$, denn sonst wäre die zweite Bedingung falsch.

$\Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

Daraus folgt, dass $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A1 \setminus A_2)$.

Mann kann kein Gleichheitszeichen schreiben. Beispiel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Für $A_1 = [-1, 2]$, $A_2 = [-1, 0]$ hat man $A_1 \setminus A_2 = (0, 2]$ und $f(A_1 \setminus A_2) = (0, 4]$.

Es ist aber $f(A_1) = [0, 4], f(A_2) = [0, 1]$, also $f(A_1) \setminus f(A_2) = (1, 4]$.

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

c) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$y \in f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(B) : f(x) = y$

Dabei gilt: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Es gilt also $y \in B$.

Man kann hier kein Gleichheitszeichen schreiben. Beispiel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Für $B = [-1, 1]$ gilt $f^{-1}(B) = [0, 1]$ und $f(f^{-1}(B)) = [0, 1] \neq B$.

Aufgabe 24. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1\}, \quad M_2 = \{1, 2\}.$$

a) Finden Sie alle Abbildungen

- von M_1 nach M_1,
- von M_1 nach M_2,
- von M_2 nach M_1,
- von M_2 nach M_2.

b) Geben Sie für jede dieser Abbildungen den dazugehörigen Graphen an.

c) Entscheiden Sie für jede dieser Abbildungen, ob sie jeweils injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

Lösung:

- von M_1 nach M_1:

  $$f_1 : \{1\} \to \{1\}, \quad f(1) = 1.$$

  Der Graph: $G(f_1) = \{(1,1)\}$.

  Die Abbildung ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

- von M_1 nach M_2:

  $$f_2 : \{1\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 1.$$

  Der Graph: $G(f_2) = \{(1,1)\}$.

  Die Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv, also nicht bijektiv.

  $$f_3 : \{1\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 2.$$

  Der Graph: $G(f_3) = \{(1,2)\}$.

  Die Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv, also nicht bijektiv.

- von M_2 nach M_1:

  $$f_4 : \{1,2\} \to \{1\}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 1.$$

  Der Graph: $G(f_4) = \{(1,1),(2,1)\}$.

  Die Abbildung ist nicht injektiv, aber surjektiv. Sie ist nicht bijektiv.

- von M_2 nach M_2:

  $$f_5 : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 2.$$

  Der Graph: $G(f_5) = \{(1,1),(2,2)\}$.

  Die Abbildung ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

  $$f_6 : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 1.$$

  Der Graph: $G(f_6) = \{(1,2),(2,1)\}$.

  Die Abbildung ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

  $$f_7 : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 1.$$

  Der Graph: $G(f_7) = \{(1,1),(2,1)\}$.

  Die Abbildung ist weder injektiv, noch surjektiv, also nicht bijektiv.

  $$f_8 : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 2.$$

  Der Graph: $G(f_7) = \{(1,2),(2,2)\}$.

  Die Abbildung ist weder injektiv, noch surjektiv, also nicht bijektiv.

Aufgabe 25. Bestimmen Sie für folgende Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = |x| - 2$

b) $f_2 : (-\infty, -2] \to [0, \infty),\ f_2(x) = |x| - 2$

c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax + b \ \text{ mit } \ a, b \in \mathbb{R}$

d) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ h(n) = n^2$

Lösung:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = |x| - 2$

Nicht injektiv, da z.B. $f_1(-1) = f_1(1) = -1$.

Nicht surjektiv, da z.B. $f_1^{-1}(\{-3\}) = \emptyset$.

Nicht bijektiv.

b) $f_2 : (-\infty, -2] \to [0, \infty),\ f_2(x) = |x| - 2$

Injektiv, da für $x \leq -2$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$.

Surjektiv, da für jedes $y \geq 0$ gilt: $f_2^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, denn:

$y = |x| - 2$

$\Leftrightarrow |x| = y + 2$

$\Leftrightarrow x = -(y + 2) \leq -2$

Für jedes $y \in [0, \infty)$ existiert also ein $x \in (-\infty, -2]$ mit $f(x) = y$.

Bijektiv.

c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

1. Fall: $a \neq 0$. Der Graph ist eine schiefe Gerade. Die Funktion ist injektiv, surjektiv, bijektiv.

2. Fall: $a = 0 : f(x) = b$. Der Graph ist eine zur x-Achse parallele Gerade. Die Funktion ist nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv.

d) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ h(n) = n^2$

Injektiv, da für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt: $n_1 \neq n_2 \Rightarrow n_1^2 \neq n_2^2$.

Nicht surjektiv, da z.B. $h^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

Nicht bijektiv.

Aufgabe 26. Bestimmen Sie den maximalen Definitionbereich für jede der folgenden Funktionen. Schränken Sie, wenn nötig, für jede der Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich so ein, dass die neu definierte Funktion bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

b) $g(x) = x^2 - 1$

c) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

d) $u(x) = \frac{1}{x}$

e) $v(x) = e^x + 1$

Lösung:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv.

Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$y = \frac{1}{3}x + 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x = y - 2$

$\Leftrightarrow x = 3(y - 2)$

$f^{-1}(y) = 3(y - 2)$

b) $g(x) = x^2 - 1$

Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.

g ist auf $\mathbb{R}$ nicht injektiv, da z.B. $g(-1) = g(1) = 0$.

Einschränkung: z.B. $g : [0, \infty) \to [-1, \infty)$.

Umkehrfunktion: $g^{-1} : [-1, \infty) \to [0, \infty)$.

$y = x^2 - 1, \quad x \in [0, \infty)$

$\Leftrightarrow x^2 = y + 1, \quad x \in [0, \infty)$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1}$

$g^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$

c) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Maximaler Definitionsbereich: $[-2, 2]$.

Nicht injektiv, da z.B. $h(-2) = h(2) = 0$.

Einschränkung: z.B. $h : [0, 2] \to [0, 2]$.

Umkehrfunktion: $h^{-1} : [0, 2] \to [0, 2]$.

$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [0, 2]$

$\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2, \quad x \in [0,2]$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2, \quad x \in [0,2]$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$

$h^{-1}(y) = \sqrt{4 - y^2}$

d) $u(x) = \dfrac{1}{x}$

Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Injektiv.

$u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion: $u^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$u^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$

e) $v(x) = e^x + 1$

Maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.

$v : \mathbb{R} \to (1, \infty)$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion: $v^{-1} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$.

$y = e^x + 1$

$\Leftrightarrow e^x = y - 1$

$\Leftrightarrow x = \ln(y - 1)$

$v^{-1}(y) = \ln(y - 1)$

Aufgabe 27. Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln x.$$

Bilden Sie die Verkettungen $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$, $g \circ f$, wenn möglich.

Lösung:

1) $f \circ f$

$f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ liegt im Definitionsbereich von f. Die Verkettung ist möglich.

$f \circ f : \mathbb{R} \to [3, \infty),\ (f \circ f)(x) = f(2x^2 + 1) = 2(2x^2 + 1)^2 + 1 = 8x^4 + 8x^2 + 3$

2) $f \circ g$

$g((0, \infty)) = \mathbb{R}$ liegt im Definitionsbereich von f. Die Verkettung ist möglich.

$f \circ g : (0, \infty) \to [1, \infty),\ (f \circ g)(x) = f(\ln x) = 2(\ln x)^2 + 1$

3) $g \circ g$

$g((0, \infty)) = \mathbb{R}$ liegt nicht im Definitionsbereich von g.

Die Verkettung ist nicht möglich.

4) $g \circ f$

   $f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ liegt im Definitionsbereich von g. Die Verkettung ist möglich.

   $g \circ f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\;(g \circ f)(x) = g(2x^2 + 1) = \ln(2x^2 + 1)$

Bemerkung: Bei der Angabe des Wertebereichs der Verkettungen reicht es, $\mathbb{R}$ anzugeben.

Aufgabe 28. a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und die Menge aller ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 ergeben, gleichmächtig sind.

Lösung:

a) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, da es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gibt, z.B.:

   $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

   $f(1) = 0$

   $f(2) = 1$

   $f(3) = -1$

   $f(4) = 2$

   $f(5) = -2$

   usw.

   (Man kann diese Funktion so angeben: $f(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Teil von x bezeichnet.)

b) $\mathbb{N}$ und $A = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ sind gleichmächtig, da es eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to A$ gibt, z.B.:

   $g(n) = 3 \cdot f(n) + 1$, wobei $f(n)$ die Funktion aus Teilaufgabe a) bezeichnet.

Aufgabe 29. Seien $a, b, c, p, q \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie folgende Regeln für die Teilbarkeit:

a) $a \mid b \;\Rightarrow\; a \mid (bc)$

b) $a \mid p \wedge b \mid q \;\Rightarrow\; (ab) \mid (pq)$

Lösung:

a) $a \mid b \;\Rightarrow\; a \mid (bc)$

   <u>Beweis:</u>

   $a \mid b \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$

   $bc = kac = (kc)a = \ell a$ mit $\ell = kc \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; a \mid (bc)$

b) $a \mid p \wedge b \mid q \;\Rightarrow\; (ab) \mid (pq)$

Beweis:

$a \mid p \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : p = ak$

$b \mid q \;\Rightarrow\; \exists \ell \in \mathbb{Z} : q = b\ell$

$pq = akb\ell = (k\ell)(ab) = m(ab)$ mit $m = k\ell \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; (ab) \mid (pq)$

Aufgabe 30. Seien $t, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $t \mid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b + c)$

b) $t \nmid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b + c)$

Lösung:

a) $t \mid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b + c)$

Die Aussage ist wahr.

Beweis:

Es gelte $t \mid b$. Wir beweisen in dem Fall die Implikation $t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b + c)$ durch Kontraposition: $t \mid (b + c) \;\Rightarrow\; t \mid c$.

$t \mid (b + c) \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : b + c = tk$

$t \mid b \;\Rightarrow\; \exists \ell \in \mathbb{Z} : b = t\ell$

$c = (b + c) - b = tk - t\ell = (k - \ell)t = mt$ mit $m = k - \ell \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; t \mid c$

Damit ist die Kontraposition bewiesen.

b) $t \nmid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b + c)$

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $3 \nmid 4 \wedge 3 \nmid 5$, aber $3 \mid (4 + 5) = 9$.

Aufgabe 31. Bestimmen Sie die Teilermengen der Zahlen 60, 92, -54.

Lösung:

$T(60) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60\}$

$T(92) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 23, \pm 46, \pm 92\}$

$T(-54) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54\}$

Aufgabe 32. Teilen Sie a durch b mit Rest, d.h. bestimmen Sie $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < b$, so dass $a = qb + r$ ist.

a) $a = 27$, $b = 45$

b) $a = 219$, $b = 17$

c) $a = -219,\, b = 17$

Lösung:

a) $a = 27,\, b = 45: \quad 27 = 45 \cdot 0 + 27$

b) $a = 219,\, b = 17: \quad 219 = 17 \cdot 12 + 15$

c) $a = -219,\, b = 17: \quad -219 = 17 \cdot (-13) + 2$ (Beachte: Der Rest ist immer positiv.)

Aufgabe 33. Eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn $2 \mid a$. Sonst heißt a ungerade. Beweisen Sie folgende Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen. Hier sind $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k$

b) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k + 1$

c) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad a^2$ ist gerade

d) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad a^2$ ist ungerade

e) ab ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad a$ ist ungerade und b ist ungerade

Lösung:

a) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad 2 \mid a \quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k$

b) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad 2 \nmid a$

Teile a durch 2 mit Rest: $\quad a = 2k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 \leq r < 2.$

Es gibt zwei Mögilchkeiten: $r = 0$, dann ist a gerade, oder $r = 1$, dann ist a ungerade.

Also gilt: $\quad a$ ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k + 1.$

c) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad a^2$ ist gerade

“ $\Rightarrow$ ”:

a ist gerade $\;\Rightarrow\; a = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) = 2\ell$ mit $\ell = 2k^2 \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow a^2$ ist gerade.

“ $\Leftarrow$ ”:

a^2 ist gerade $\;\Rightarrow\; 2 \mid a \cdot a$

2 ist eine Primzahl $\;\Rightarrow\; 2 \mid a \;\Rightarrow\; a$ ist gerade.

d) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad a^2$ ist ungerade

“ $\Rightarrow$ ”:

a ist ungerade $\;\Rightarrow\; a = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow\ a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\cdot(2k^2+2k)+1 = 2m+1$ mit $m = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow\ a^2$ ist ungerade.

" $\Leftarrow$ ":

Durch Kontraposition: a ist gerade $\Rightarrow$ a^2 ist gerade. Das wurde in Aufgabenteil c) bewiesen.

e) ab ist ungerade $\Leftrightarrow$ a ist ungerade und b ist ungerade.

" $\Leftarrow$ ":

a ist ungerade $\Rightarrow$ $a = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{Z}$

b ist ungerade $\Rightarrow$ $b = 2\ell+1$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow\ ab = (2k+1)(2\ell+1) = 4k\ell+2k+2\ell+1 = 2(2k\ell+k+\ell)+1 = 2m+1$ mit $m = 2k\ell+k+\ell \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ ab ist ungerade.

" $\Rightarrow$ ":

Durch Kontraposition: a ist gerade oder b ist gerade $\Rightarrow$ ab ist gerade.

Sei O.B.d.A. a gerade. Dann ist $a = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $ab = 2kb = 2m$ mit $m = kb \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ ab ist gerade.

Aufgabe 34. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von a und b mit dem Euklidischen Algorithmus und durch die Primfaktorenzerlegung:

a) $a = 27,\ b = 45$

b) $a = -219,\ b = 60$

c) $a = 1092,\ b = 390$

Lösung:

a) $a = 27,\ b = 45$

Euklidischer Algorithmus:

$45 = 27\cdot 1 + 18$
$27 = 18\cdot 1 + 9$
$18 = 9\cdot 2 + 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{ggT}(27,45) = 9$

Primfaktorenzerlegung:

$45 = 3\cdot 3\cdot 5$
$27 = 3\cdot 3\cdot 3 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{ggT}(27,45) = 3\cdot 3 = 9$

b) $a = -219,\ b = 60$

Euklidischer Algorithmus: $\mathrm{ggT}(-219,60) = \mathrm{ggT}(219,60)$

$219 = 60\cdot 3 + 39$
$60 = 39\cdot 1 + 21$
$39 = 21\cdot 1 + 18$

$21 = 18 \cdot 1 + 3$
$18 = 3 \cdot 6 + 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(-219, 60) = 3$

Primfaktorenzerlegung:

$-219 = -3 \cdot 73$
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(-219, 60) = 3$

c) $a = 1092$, $b = 390$

Euklidischer Algorithmus:

$1092 = 390 \cdot 2 + 312$
$390 = 312 \cdot 1 + 78$
$312 = 78 \cdot 4 + 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(1092, 390) = 78$

Primfaktorenzerlegung:

$1092 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
$390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(1092, 390) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$

Aufgabe 35. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $n = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{k_i}$ seine Primfaktorenzerlegung mit Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, M$, und $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, M$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ genau dann gilt, wenn alle k_i, $i = 1, \ldots, M$, gerade sind.

Lösung:

“ $\Leftarrow$ ”:

Seien alle k_i gerade $\Rightarrow$ $\sqrt{n} = \sqrt{\prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{k_i}} = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{\frac{k_i}{2}}$ mit $\frac{k_i}{2} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, M$.

$\Rightarrow$ $p_i^{\frac{k_i}{2}} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, M$ $\Rightarrow$ $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

“ $\Rightarrow$ ”:

Sei $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{n} = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{\ell_i}$ mit $\ell_i \in \mathbb{N}$ und Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, M$.

$\Rightarrow n = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{2\ell_i}$. Das ist eine Primfaktorenzerlegung und damit eindeutig.

Die Zerlegung $n = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{2\ell_i} = \prod\limits_{i=1}^{M} p_i^{k_i}$ ist also eine eindeutige Zerlegung der Zahl n.

$\Rightarrow$ $k_i = 2\ell_i$, $i = 1, \ldots, M$ $\Rightarrow$ alle k_i sind gerade.

Aufgabe 36. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten folgende Relation:

$$x \equiv y, \quad \text{wenn } x - y \text{ ungerade ist.}$$

Ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation?

Lösung:

Das ist keine Äquivalenzrelation, denn:

- Die Relation $\equiv$ ist nicht reflexiv: $x - x = 0$ ist gerade $\Rightarrow x \not\equiv x$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$.
- Die Relation $\equiv$ ist nicht transitiv:
  $x \equiv y \;\Leftrightarrow\; x - y$ ist ungerade $\;\Leftrightarrow\; x - y = 2k + 1,\; k \in \mathbb{Z}$,
  $y \equiv z \;\Leftrightarrow\; y - z$ ist ungerade $\;\Leftrightarrow\; y - z = 2m + 1,\; m \in \mathbb{Z}$.
  Dann ist $x-z = (x-y)+(y-z) = 2k+1+2m+1 = 2(k+m+1)$ gerade $\;\Rightarrow\; x \not\equiv z$.
- (Die Relation $\equiv$ ist aber symmetrisch: $x \equiv y \;\Rightarrow\; y \equiv x$.)

Aufgabe 37. Berechnen Sie:

$$[2]_3 + [2]_3, \quad [4]_7 + [3]_7, \quad [7]_2 + [1]_2, \quad [8]_{10} + [7]_{10},$$
$$[2]_3 \cdot [2]_3, \quad [4]_7 \cdot [3]_7, \quad [7]_2 \cdot [1]_2, \quad [8]_{10} \cdot [7]_{10}.$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll}
[2]_3 + [2]_3 = [4]_3 = [1]_3 & \text{bzw.} & 2 + 2 \equiv 1 \mod 3 \\
[4]_7 + [3]_7 = [7]_7 = [0]_7 & \text{bzw.} & 4 + 3 \equiv 0 \mod 7 \\
[7]_2 + [1]_2 = [8]_2 = [0]_2 & \text{bzw.} & 7 + 1 \equiv 0 \mod 2 \\
[8]_{10} + [7]_{10} = [15]_{10} = [5]_{10} & \text{bzw.} & 8 + 7 \equiv 5 \mod 10 \\
[2]_3 \cdot [2]_3 = [4]_3 = [1]_3 & \text{bzw.} & 2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3 \\
[4]_7 \cdot [3]_7 = [12]_7 = [5]_7 & \text{bzw.} & 4 \cdot 3 \equiv 5 \mod 7 \\
[7]_2 \cdot [1]_2 = [7]_2 = [1]_2 & \text{bzw.} & 7 \cdot 1 \equiv 1 \mod 2 \\
[8]_{10} \cdot [7]_{10} = [56]_{10} = [6]_{10}. & \text{bzw.} & 8 \cdot 7 \equiv 6 \mod 10
\end{array}$$

Aufgabe 38. Versuchen Sie, analog zu $\mathbb{Z}_m$ mit $m \geq 2$ die Restklassen $\mathbb{Z}_1$ und $\mathbb{Z}_0$ zu definieren. Was passiert dabei?

Lösung:

- $\mathbb{Z}_1$: $a \equiv b \mod 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \mid (a - b)$.
  Das gilt aber für alle $a, b \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod 1$. Daraus folgt, dass $\mathbb{Z}_1 = \{[0]_1\}$ ist.
- $\mathbb{Z}_0$: $a \equiv b \mod 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \mid (a - b) \;\Leftrightarrow\; a - b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$. Daraus folgt, dass $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 39. Berechnen Sie alle möglichen Summen und Produkte in $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$.

Lösung:

1) $\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$

   $[0]_2 + [0]_2 = [0]_2$

   $[0]_2 + [1]_2 = [1]_2$

   $[1]_2 + [1]_2 = [0]_2$

$[0]_2 \cdot [0]_2 = [0]_2$

$[0]_2 \cdot [1]_2 = [0]_2$

$[1]_2 \cdot [1]_2 = [1]_2$

2) $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

$[0]_3 + [0]_3 = [0]_3$

$[0]_3 + [1]_3 = [1]_3$

$[0]_3 + [2]_3 = [2]_3$

$[1]_3 + [1]_3 = [2]_3$

$[1]_3 + [2]_3 = [0]_3$

$[2]_3 + [2]_3 = [1]_3$

$[0]_3 \cdot [0]_3 = [0]_3$

$[0]_3 \cdot [1]_3 = [0]_3$

$[0]_3 \cdot [2]_3 = [0]_3$

$[1]_3 \cdot [1]_3 = [1]_3$

$[1]_3 \cdot [2]_3 = [2]_3$

$[2]_3 \cdot [2]_3 = [1]_3$

Aufgabe 40. Finden Sie alle Restklassen $[m]_4$ und $[n]_4$, so dass

a) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [1]_4$,

b) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [0]_4$ und $[m]_4 \neq [0]_4$, $[n]_4 \neq [0]_4$.

Lösung:

a) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [1]_4$

$n = 0: \quad [m]_4 \cdot [0]_4 = [0]_4 \neq [1]_4.$

$n = 1: \quad [m]_4 \cdot [1]_4 = [m]_4 = [1]_4 \;\Leftrightarrow\; m \equiv 1 \mod 4.$

$$n = 2: \quad [m]_4 \cdot [2]_4 = [2m]_4 = \begin{cases} [0]_4, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ [2]_4, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$n = 3:$ Wir haben nur $m = 3$ zu untersuchen, weil man m und n vertauschen kann. Die anderen Fälle haben wir also schon vorher untersucht.
$[3]_4 \cdot [3]_4 = [9]_4 = [1]_4.$

Die Lösungen sind also $[1]_4 \cdot [1]_4 = [1]_4$ und $[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$.

b) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [0]_4$ und $[m]_4 \neq [0]_4$, $[n]_4 \neq [0]_4$

$n = 1: \quad [m]_4 \cdot [1]_4 = [m]_4 \neq [0]_4.$

$n = 2: \quad [m]_4 \cdot [2]_4 = [2m]_4 = \begin{cases} [0]_4, & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ [2]_4, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$

Es muss also m gerade sein und $m \neq 0 \Rightarrow m = 2$.
Also: $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$.

$n = 3:$ Wieder brauchen wir nur $m = 3$ zu untersuchen:
$[3]_4 \cdot [3]_4 = [9]_4 = [1]_4 \neq [0]_4$.

Die einzige Lösung ist also $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$.

Aufgabe 41. a) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt: $a^2 < ab < b^2$.

b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Lösung:

a) Betrachte $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Zu zeigen: $a^2 < ab < b^2$.

$a < b \quad | \cdot a > 0$

$a^2 < ab$

und

$a < b \quad | \cdot b > 0$

$ab < b^2$

$\Rightarrow \quad a^2 < ab < b^2$

b) Betrachte $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Zu zeigen: $a < \frac{a+b}{2} < b$.

$a < b \quad | + a$

$a + a < a + b$

$2a < a + b \quad \left| \cdot \frac{1}{2} > 0 \right.$

$a < \frac{a+b}{2}$

und

$a < b \quad | + b$

$a + b < b + b$

$a + b < 2b \quad \left| \cdot \frac{1}{2} > 0 \right.$

$\frac{a+b}{2} < b$

$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$