Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 5**

Abgabe: Donnerstag, den 30. November 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 17** *(Konvergenz, Cauchyfolge, Beschränktheit)* 2+2 Punkte
   Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge in einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ mit Grenzwert

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

   Sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Die Folge $(\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $\alpha \cdot a$.
   (b) Jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.

2. **Aufgabe 18** *(Konvergenz, Divergenz, Beschränktheit)* 1+1 Punkte
   Geben Sie Beispiele für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften an (mit Beweis):

   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 3$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

   Hinweis: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bedeutet, dass zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n \geq M$ für $n \geq N$.

3. **Aufgabe 19** *(Konvergenz)* 2+2 Punkte

   (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$$

   konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$a_n := \sqrt{n^2+2} - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

4. **Aufgabe 20** *(Cauchyfolge, Rekursion)* 2+2+2 Punkte
   Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

   $$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_n := \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach n, dass

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Weisen Sie formal nach, dass

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{j=1}^{k} (a_{n+j} - a_{n+j-1})$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie nun, dass die oben definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Zeigen Sie also, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für $m, n \geq N(\varepsilon)$.