5 Zahlenfolgen

Die rationalen Zahlen sind nicht reichhaltig genug, um etwa die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen, wie wir aus Satz 2.2 wissen. Um dieses Defizit zu beseitigen, müssen wir zur Einführung der reellen Zahlen etwas weiter ausholen. Dabei gehen wir so allgemein vor, daß die Begriffsbildungen in der noch zu definierenden Menge der reellen Zahlen gültig bleiben. Dazu sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Zahlenkörper mit Nullelement 0 und Einselement 1, etwa die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Definition 5.1 *Eine* Zahlenfolge *bzw. kurz eine* Folge *in* $\mathbb{K}$ *ist eine Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{K}$. *Wir verwenden die Schreibweise*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{oder kurz} \quad (a_n)$$

anstelle der für Abbildungen üblichen Form $n \mapsto a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *und fassen die Folge auch auf als eine Teilmenge von* $\mathbb{K}$. *Die Zahlen* $a_n \in \mathbb{K}$ *heißen die* Glieder *der Folge.*

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft* $n_k < n_{k+1}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann heißt die Folge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 5.2 *Eine Zahlenfolge* (a_n) *heißt* konvergent, *wenn es ein* $a \in \mathbb{K}$ *gibt derart, daß zu jedem* $\varepsilon > 0$ *aus* $\mathbb{K}$ *eine natürliche Zahl* $N(\varepsilon)$ *existiert mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. *Wir nennen die Folge* (a_n) *konvergent gegen das* Grenzelement *oder den* Limes a *und schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{oder} \quad a_n \to a, \quad n \to \infty.$$

(Das Symbol ∞ *steht dabei für Unendlich.) Eine konvergente Folge heißt* Nullfolge, *wenn sie gegen das Nullelement* $0 \in \mathbb{K}$ *konvergiert. Eine nicht konvergente Folge nennen wir* divergent.

Die Definition faßt logisch fundiert die umgangssprachlich formulierte Eigenschaft, daß sich die Folgenglieder a_n dem Grenzwert a immer mehr annähern.

Die Zahlenfolge

$$a_n := \frac{1}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

aus $\mathbb{Q}$ ist eine Nullfolge. Denn zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.6 eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > 1/\varepsilon$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Satz 5.3 *Sei $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ und $1 + a > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die* Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Beweis. Induktionsanfang aus $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ und Induktionsschritt durch

$$(1 + a)^{n+1} > (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a$$

liefert die Behauptung. □

In $\mathbb{Q}$ ist die geometrische Zahlenfolge

$$a_n := q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Nullfolge, falls $|q| < 1$. Für $q = 0$ ist die Folge trivialer Weise eine Nullfolge. Für $q \neq 0$ setzen wir $\delta := 1/|q| - 1$ und haben

$$|q| = \frac{1}{1 + \delta}$$

mit $\delta > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + \delta)^n} < \frac{1}{1 + n\delta} < \frac{1}{n\delta} \, .$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir nun nach Satz 4.6 ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > 1/(\delta\varepsilon)$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\delta n} \leq \frac{1}{\delta N} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Satz 5.4 *Das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{K}$ nach Definition der Konvergenz ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_2$. Für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ folgt daraus mit der Dreiecksungleichung

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also haben wir $|a-b| < 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Die Annahme $|a-b| > 0$ führt durch Wahl von $\varepsilon = |a - b|/4$ auf $|a - b| < |a - b|/2$ und somit den Widerspruch $2 < 1$. Folglich muß $|a - b| = 0$ und daher $a = b$. □

Satz 5.5 *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten a und b. Dann sind mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch die Zahlenfolgen $(\alpha a_n + \beta b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ konvergent mit den Grenzwerten $\alpha a + \beta b$ und $a \cdot b$. Falls für alle Glieder $a_n \neq 0$ und das Grenzelement $a \neq 0$ gilt, so ist auch die Folge $(1/a_n)$ konvergent mit dem Grenzelement $1/a$.*

Beweis. Wir beweisen nur die letzte Aussage. Zunächst erhalten wir durch Wahl von $\varepsilon = |a|/2$ in der Konvergenz von $a_n \to a$ für $n \to \infty$ die Ungleichung $|a - a_n| \leq |a|/2$ für alle $n \geq N_0$ mit einem $N_0 \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt mit Hilfe der zweiten Dreiecksungleichung

$$\frac{1}{2}\,|a| \leq |a| - |a - a_n| \leq \big|\,|a| - |a - a_n|\,\big| \leq |a_n|$$

für alle $\geq N_0$. Ferner gibt es wegen der Konvergenz $a_n \to a$ für $n \to \infty$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\,|a|^2 \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n a|} \leq \frac{2|a - a_n|}{|a|^2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N := \max\{N_0, N_1\}$. □

Satz 5.6 *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Hieraus folgt $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für alle $n \geq N$. Ferner gilt $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|\}$ für $n = 1, \dots, N-1$. Also gilt mit

$$M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$$

in der Tat $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 5.7 *Sei* (a_n) *eine Folge aus dem Körper* $\mathbb{K}$*. Die* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt konvergent*, wenn die Folge* (S_n) *der Partialsummen*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergiert. Der Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ *heißt die* Summe *der Reihe. Eine nicht konvergente Reihe heißt* divergent*.*

Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit $|q| < 1$ ist in $\mathbb{Q}$ konvergent. Denn für $S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$ haben wir

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1},$$

und daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} .$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \tag{5.1}$$

für $|q| < 1$.

Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent. Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\sigma_j := \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k}$$

und können abschätzen

$$\sigma_j \geq (2^j - 2^{j-1}) \, \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \, .$$

Aus

$$S_{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

ergibt sich, daß die Folge S_n der Partialsummen nicht beschränkt ist. Nach Satz 5.6 kann sie daher nicht konvergieren. $\square$

Um Konvergenz von Zahlenfolgen zu entscheiden, ist die folgende Definition von grundlegender Bedeutung.

Definition 5.8 *Eine Folge (a_n) in einem Körper $\mathbb{K}$ heißt eine* Cauchyfolge, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{K}$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$.*

Wir beachten, daß in der Definition der Cauchyfolge nur die Glieder der Folge und keine Grenzwerte auftauchen.

Satz 5.9 *Jede konvergente Folge aus $\mathbb{K}$ ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $a_n \to a$, $n \to \infty$. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Durch ein Beispiel wollen wir zeigen, daß im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ die Umkehrung von Satz 5.9 nicht gilt, d.h. nicht jede Cauchyfolge aus $\mathbb{Q}$ ist konvergent in $\mathbb{Q}$. Dazu betrachten wir zu einem beliebigen positiven $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Folge, die rekursiv durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha}{a_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

definiert ist mit einem beliebigen Startelement a_0 mit $a_0^2 \geq \alpha$. Wir nehmen an diese Folge sei konvergent mit dem Grenzelement $a \in \mathbb{Q}$. Unter Ausnutzung von Satz 5.5 muß dann

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\alpha}{a}\right)$$

gelten und daher $a^2 = \alpha$. Dies ist bei Wahl von $\alpha = 2$ ein Widerspruch zu Satz 2.2. Andrerseits werden wir nun zeigen, daß die Folge (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Zunächst ist durch Induktion klar, daß alle Folgenglieder a_n positiv sind. Mit Hilfe der Ungleichung

$$(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq \geq 4pq$$

für positive rationale Zahlen p und q erhalten wir

$$a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right)\right]^2 \geq a_n \cdot \frac{\alpha}{a_n} = \alpha \tag{5.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt dann auch die Monotonie

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n \tag{5.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Inbesondere ergibt sich aus (5.3) und (5.4) als weitere Abschätzung

$$1 \geq \left(1 - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}\right) \geq \left(1 - \frac{\alpha}{a_n^2}\right) \geq 0. \tag{5.5}$$

Indem wir die durch Ersetzen von n durch $n - 1$ aus (5.2) entstehende Gleichung von (5.2) subtrahieren erhalten wir

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})\left(1 - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}\right)$$

und können mit Hilfe von (5.4) und (5.5) abschätzen

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Induktion ergibt sich hieraus

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n\, |a_1 - a_0|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

mit $q := 1/2$. Für $m > n$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})|a_1 - a_0| \\ &= \frac{q^n - q^m}{1-q}\,|a_1 - a_0| < \frac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0| = \frac{1}{2^{n-1}}\,|a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $n \leq 2^n$ (Induktion!) wählen wir $N \in \mathbb{N}$ mit

$$N - 1 > |a_1 - a_0|\,\frac{1}{\varepsilon}$$

und erhalten

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m > N$, d.h. (a_n) ist in der Tat eine Cauchyfolge.

n	a_n
0	5.00000000
1	2.70000000
2	1.72037037
3	1.44145537
4	1.41447098
5	1.41421359
6	1.41421356

Tabelle 1: Die ersten Glieder der Folge (5.2) für $\alpha = 2$ und $a_0 = 5$.

Ein Blick auf die numerischen Ergebnisse in Tabelle 1 läßt jedoch vermuten, daß vielleicht doch irgendwie eine Konvergenz vorliegt. In der Tat ist das Verfahren (5.2) als *babylonisches Wurzelziehen* bekannt. Wegen seiner schnellen Konvergenz wird es allgemein auf elektronischen Rechnern eingesetzt. Es wurde auf einer Keilschrifttafel aus Babylon aus dem Jahr 1675 v. Chr. gefunden.

Der Ausweg aus dem Dilemma besteht in der Einführung der reellen Zahlen als einem Zahlkörper, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, in dem also das Cauchy Kriterium aus Definition 5.8 nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für Konvergenz ist.

Definition 5.10 *Ein Zahlkörper* $\mathbb{K}$ *heißt* vollständig, *wenn jede Cauchyfolge aus* $\mathbb{K}$ *konvergent ist (mit Grenzelement in* $\mathbb{K}$*).*

Vor der Einführung der reellen Zahlen betrachten wir jedoch noch die Erweiterung der Darstellung natürlicher Zahlen in b-adischer Ziffernform auf die rationalen Zahlen. Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns dabei auf das Dezimalsystem.

Satz 5.11 *Jede rationale Zahl* $a \neq 0$ *hat eine eindeutige Darstellung als Reihe*

$$a = \pm \sum_{j=-\infty}^{k} \beta_j 10^j \tag{5.6}$$

mit $\beta_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ *für alle* j *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $\beta_k \neq 0$ *falls* $|a| \geq 1$ *sowie* $k = 0$ *und* $\beta_0 = 0$ *falls* $|a| < 1$. *Entsprechend schreiben wir* a *als* Dezimalbruch

$$a = \pm \beta_k \cdots \beta_2 \beta_1 \beta_0, \beta_{-1} \beta_{-2} \beta_{-3} \ldots .$$

Der Dezimalbruch einer rationalen Zahl ist periodisch, *d.h. es gibt (von* a *abhängige) natürliche Zahlen* p *und* q *so, daß*

$$\beta_{-p-nq-j} = \beta_{-p-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, q,\ n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Man gewinnt den Dezimalbruch, indem man für $a = \pm u/v$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen u und v das übliche Verfahren der Division durch v durchführt (mit Multiplikation des Restes mit 10 nach jedem Divisionsschritt und gegebenenfalls Multiplikation mit einer entsprechenden Potenz von 10 zu Beginn). Das Verfahren bricht entweder nach endlich vielen Schritten ab mit dem Rest Null und dann sind alle folgenden Dezimalstellen gleich Null. Andrenfalls tritt in jeder Stufe des Verfahrens ein Rest zwischen 1 und $v - 1$ auf, so daß es im Höchstfalle $v - 1$ Möglichkeiten für die Werte des Rests gibt. Dies bedeutet, daß nach höchstens v Divisionen ein Rest z zum zweiten Mal vorkommen muß. Dann aber werden sich alle weiteren Reste stets in derselben Reihenfolge wiederholen, in der sie nach dem ersten Auftreten des Restes z erschienen sind. Zur Konvergenz der Reihe (5.6) bemerken wir, daß diese auf Grund der Periodizität eine geometrische Reihe ist. □