2 Grundlagen der Logik

Grundlage der Logik sind formale Sprachen. Diese bauen auf auf einem *Alphabet*, welches aus einer Menge von *Zeichen* besteht. Durch Zeichenketten werden *Worte* und aus diesen wiederum *Sätze* zusammengesetzt. Ein Wort oder eine Satz der Länge n über einem Alphabet A ist also eine Verkettung von n Zeichen aus A. Eine *Sprache* S über einem Alphabet A besteht aus einer Teilmenge der Worte aller Längen. In der Regel haben Sprachen ein Leer- oder Trennzeichen, die es erlauben zwischen Worten und Sätzen zu unterscheiden. Ein Satz ist dann eine Aneinanderreihung von Worten.

In der theoretischen Informatik werden formale Sprachen in diesem Sinne ausgiebig und genauer untersucht. Programmiersprachen bilden dabei die wichtigsten Beispiele.

In der Umgangsprache können Sätze *Aussagen* enthalten, aber auch Fragen und Anweisungen. Aussagen zeichnen sich dadurch aus, daß sie sowohl wahr oder auch falsch sein können. Diese Eigenschaft nimmt die Logik als konstituierend, d.h. es wird für Aussagen einer formalen Sprache gefordert, daß man ihnen die Wahrheitswerte 1 bzw. *wahr* oder 0 bzw. *falsch* zuordnen kann. (Damit beschränken wir uns in der Sprechweise der Logiker auf eine zweiwertige Logik.) Genauer müssen wir in der Zuordnung der Wahrheitswerte eine Abbildung verstehen aus einer Teilmenge T der Sprache S, den Aussagen, in die Menge der Wahrheitswerte

$$B := \{1, 0\} = \{wahr, falsch\},$$

die man dann als Interpretation bezeichnen kann. Das Symbol B steht dabei für *Boolesehe Variable* nach dem englischen Mathematiker und Logiker George Boole (1815–1864).

Die Logik beschäftigt sich grundsätzlich damit, wie aus wahren Aussagen weitere wahre Aussagen in zwingender Form geschlußfolgert werden können. Betrachten wir die Aussagen *Gabriele ist 17 Jahre alt* und *Wer 17 Jahre alt ist, ist volljährig.* Letzteres nennt man auch eine *Implikation.* Hier wird die zweite Aussage von der ersten erzwungen bzw. ist in der ersten enthalten. (Natürlich könnten wir dies auch durch die Aussage *17jährige sind minderjährig* ausdrücken.) Wenn wir annehmen, beide Sätze seien wahr, dann ist nach unserem intuitiven Verständnis auch die Aussage *Gabriele ist volljährig* wahr.

Hier fragen wir uns: wie können wir dies allgemeiner fassen und besser verstehen? Hierzu abstrahieren wir die Aussagen und führen Abkürzungen ein. p stehe für die erste Aussage, der Pfeil $\rightarrow$ für die Folgerung des zweiten Satzes und q für die Aussage *Gabriele ist volljährig*. Dann erhalten wir die logische Form unserer Argumentation

$$p \quad \text{UND} \quad (p \rightarrow q) \Rightarrow q.$$

Der Doppelpfeil steht hier für die *logische Implikation*, d.h. aus der Wahrheit der Aussagen der linken Seite folgt die Wahrheit der Aussagen der rechten Seite. Umgangssprachlich bedeutet dies: Wenn p gilt und aus p die Aussage q folgt, so gilt die Aussage q.

Wie können wir nun solche Folgerungen aus dem rein intuitiven Verständnis herausnehmen und ihre Ergebnisse zwingend bzw. nachvollziehbar machen? Ein übliches Vorgehen ist der Gebrauch von Wahrheitstabellen. Es werden dabei logische Operationen wie UND oder die Implikation $\rightarrow$ wie folgt in Form von Tabellen ausgedrückt:

und	$\wedge$
oder	$\vee$
impliziert	$\rightarrow$
nicht	$\neg$
genau dann wenn	$\leftrightarrow$

Das logische 'und' heißt auch *Konjunktion*, das logische 'oder' auch *Disjunktion*. Beim 'nicht' spricht man von *Negation*, bei $\rightarrow$ von der *Implikation*, bei $\leftrightarrow$ von der *Äquivalenz*.

Die Wahrheitswerte der logischen Ausdrücke werden nun wie folgt festgesetzt und damit der weiteren Argumentation eine Grundlage gegeben.

p	q	$p \wedge q$
1	0	0
1	1	1
0	1	0
0	0	0

Um die Wahrheitswerte von $p \wedge q$ zu ermitteln, schlagen wir die Wahrheitswerte von p und q nach und suchen dann in der Tabelle die entsprechende Zeile heraus, um dort den Wahrheitswert des Ausdrucks $p \wedge q$ abzulesen. Das Vorgehen ist also ausgesprochen einfach und modelliert das intuitive Verständnis des Wortes 'und'. Umgangssprachlich ist also $p \wedge q$ genau dann wahr, wenn p und q beide wahr sind.

Analog definiert man nun weitere logische Ausdrcke. Die Disjunktion wird festgelegt durch

p	q	$p \vee q$
1	0	1
1	1	1
0	1	1
0	0	0

Also ist $p \vee q$ genau dann wahr, wenn p oder q oder beide wahr sind.

Die Implikation hat die Wahrheittabelle

p	q	$p \to q$
1	0	0
1	1	1
0	1	1
0	0	1

und bildet das umgangsprachliche *wenn p, dann q* ab, zeigt aber deutliche Unterschiede zur Umgangsprache. Die Implikation $p \to q$ ist immer wahr, außer wenn p wahr und q falsch ist, insbesondere also immer, wenn p falsch ist.

In der Umgangsprache wird eine inhaltliche Verbindung, eine Kausalbeziehung zwischen der *Voraussetzung* p und der *Schlußfolgerung* q vorausgesetzt, die aber hier nicht besteht, da wir über die inhaltliche Bedeutung der Aussagen und ihre Zusammenhänge nichts wissen. Die Aussage $p \to q$ ist neben p und q eine neue Aussage, der ein Wahrheitswert zugeschrieben wird. Ist $p \to q$ wahr, so heißt dies nicht, daß q wahr ist. Letzeres wird üblicherweise in der Umgangsprache intendiert und ist dort auch richtig, weil üblicherweise auch p als wahr angenommen wird. Der dabei gezogene Schluß ist: Sind die Aussagen p und $p \to q$ wahr, so ist auch q wahr, wie dies in unserem obigen Beispiel der Fall ist. Diese Schlußform ist zu unterscheiden von der Verknüpfung $p \to q$ der Aussagen p und q. Es ist $p \to q$ eine neue Aussage und nicht der Schluß von p auf q. Wir können uns dies deutlich machen an der Aussage *Wenn die Katze ein Hund ist, dann ist Gabriele volljährig.* Diese ist immer richtig, denn hier ist die Aussage p als offensichtlicher Unsinn falsch. Dagegen ist die Aussage *Wenn die Katze krank ist, so ist Gabriele volljährig* falsch, wenn die Katze krank und Gabriele 15 Jahre alt ist. Die Implikation $p \to q$ modelliert, daß nicht gleichzeitig p wahr ist und q falsch ist.

Bei den bisher angesprochenen logischen Operationen waren jeweils zwei Aussagen beteiligt und wurden zu einer zusammengesetzten Aussage kombiniert. Wir sprechen dann auch von einer binären Operation. Die folgende logische Operation der Negation operiert nur auf einer Aussage und wird auch unärer Operator genannt.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Die Äquivalenz wird modelliert durch

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	0	0
1	1	1
0	1	0
0	0	1

In Analogie zu Satz 1.2 gilt der folgende Satz, den man mit den Wahrheitstabellen unmittelbar einsehen kann.

Satz 2.1 *Für die logischen Operationen gelten die Regeln:*

$$
\begin{aligned}
p \wedge q &= q \wedge p && \textit{Kommutativität von } \wedge \\
p \vee q &= q \vee p && \textit{Kommutativität von } \vee \\
(p \wedge q) \wedge r &= p \wedge (q \wedge r) && \textit{Assoziativität von } \wedge \\
(p \vee q) \vee r &= p \vee (q \vee r) && \textit{Assoziativität von } \vee \\
(p \wedge q) \vee r &= (p \vee r) \wedge (q \vee r) && \textit{Disstributivität von } \wedge \textit{ und } \vee \\
(p \vee q) \wedge r &= (p \wedge r) \vee (q \wedge r) && \textit{Disstributivität von } \vee \textit{ und } \wedge \\
p \wedge p &= p && \textit{Idempotenz von } \wedge \\
p \vee p &= p && \textit{Idempotenz von } \vee \\
\neg(p \wedge q) &= (\neg p) \vee (\neg q) && \textit{Morgansche Regel} \\
\neg(p \vee q) &= (\neg p) \wedge (\neg q) && \textit{Morgansche Regel} \\
\neg(\neg p) &= p
\end{aligned}
$$

Grundsätzlich sind wir damit in der Lage, komplexe Aussagen mit Hilfe der logischen Operatoren zu analysieren und ihre Wahrheitswerte zu ermitteln. Dies werden wir vor allem in den mathematischen Beweisen tun, bei denen wir aus Aussagen, die schon bewiesen sind, d.h. deren Wahrheitswert schon bestimmt ist, die Gültigkeit neuer Aussagen beweisen. Ohne die obigen Tabellen jeweils expizit heranzuziehen, werden sie gewissermaßen stets die Grundlagen unserer Beweisführung bilden.

Die meisten mathematischen Sätze haben die Form $p \to q$, wobei p und q wohldefinierte Aussagen sind, oder sie enthalten derartige Implikationen als Komponenten. (Ein Satz, der die Äquivalenz zweier Aussagen behauptet, besteht aus den beiden zugehörigen Implikationen). Da eine Implikation nur dann nicht wahr ist, wenn p wahr und q falsch ist, ist zum Beweis der Aussage ausreichend zu zeigen, daß p wahr und q falsch nicht zutreffen kann, daß also bei wahrer Voraussetzung p auch die Aussage q wahr ist.

Für die Beweise gibt es im wesentlichen drei mögliche Verfahren.

1. Der direkte Beweis.

2. Der indirekte oder Widerspruchsbeweis.

3. Der Beweis durch vollständige Induktion.

Der *direkte Beweis* ist die naheliegenste Beweismethode. Hierbei wird ausgehend von der Voraussetzung, daß p wahr ist, durch Aneinanderreihen logisch korrekter Schlußfolgerungen darauf geschlossen, daß auch q wahr ist.

Wir machen uns dies an einem einfachen Beispiel klar und zeigen, daß die Aussage *Ist eine natürliche Zahl n durch 2 teilbar, so ist auch n^2 durch 2 teilbar* ein Satz ist.

Die Aussage p ist *n ist durch 2 teilbar* und die Aussage q ist *n^2 ist durch 2 teilbar*. Wir machen folgende Beweisschritte

a: Es ist $n = 2k$ mit einer natürlichen Zahl k (Voraussetzung).
b: $(2k)^2 = 2(2k^2)$ (wahre Aussage über natürliche Zahlen).
c: $n^2 = 2(2k^2)$ (Verwendung von b in a).
d: $m = 2 \cdot k^2$ ist eine natürliche Zahl (wahre Aussage).
e: $n^2 = 2 \cdot m$ mit einer natürlichen Zahl (Folgerung aus c und d).

Formal im Sinne der Logik können wir dies auffassen als

$$p \leftrightarrow a, \quad a \wedge b \to c, \quad c \wedge d \to e, \quad e \leftrightarrow q,$$

und somit $p \to q$.

Der *indirekte Beweis* besteht im Prinzip darin, zu zeigen, daß die Implikation $p \to \neg q$ falsch ist, d.h. daß bei wahrem p die Negation $\neg q$ falsch ist. Anders formuliert: Bei Vorliegen der Voraussetzung p muß nach dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten (in der zweiwertigen Logik!) entweder q oder $\neg q$ richtig sein. Um den indirekten Beweis zu führen, nehmen wir also an q sei falsch und führen diese Annahme (in Verbindung mit der Voraussetzung p) zu einem Widerspruch. Dabei spielt es keine Rolle, ob dieser Widerspruch zu p, zu $\neg q$, zu einer Folgerung aus p oder $\neg q$ oder zu irgendeiner anderen wahren Aussage eintritt. Zur Illustration wollen wir den Satz *Ist das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n durch 2 teilbar, so ist auch n durch 2 teilbar* indirekt beweisen (mit weniger ausführlichkeit als im vorangehenden Beispiel). Die Aussage p ist *n^2 ist durch 2 teilbar* und die Aussage q ist *n ist durch 2 teilbar.* Offenbar entspricht $\neg q$ der Aussage *n ist nicht durch 2 teilbar.* Aus der Annahme, dies sei richtig, folgt dann $n = 2m - 1$ mit einer natürlichen Zahl m und hieraus weiter

$$n^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1.$$

Damit erweist sich n^2 als nicht durch 2 teilbar im Widerspruch zu p. Also muß $\neg q$ falsch und q somit richtig sein. Der Beweis des nächsten Satzes ist ein weiteres Beispiel für einen indirekten Beweis,

Satz 2.2 *Es gibt keine rationale Zahl q mit der Eigenschaft $q^2 = 2$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gibt eine (positive) rationale Zahl q mit der Eigenschaft $q^2 = 2$. Die rationale Zahl hat eine eindeutige Darstellung $q = m/n$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen m und n. Aus $q^2 = 2$ folgt dann $m^2 = 2n^2$. Daher ist m^2 durch 2 teilbar, und folglich ist nach dem vorangehenden Satz auch m selbst durch 2 teilbar. Hieraus folgt

$$n^2 = \frac{1}{2}\, m^2 = 2\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

und somit ist n^2 durch 2 teilbar. Wiederum nach dem vorangehenden Satz erweist sich auch n durch 2 teilbar. Damit sind m und n beide durch 2 teilbar und im Widerspruch zum vorhergehenden nicht teilerfremd. □

Wir haben hier von Eigenschaften der natürlichen und rationalen Zahlen Gebrauch gemacht, ohne daß wir die Begriffe und die Struktur der natürlichen

Zahlen, der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen geklärt haben. Auch für das dritte Beweisprinzip, die vollständige Induktion, müssen wir uns zunächst mit den natürlichen Zahlen etwas genauer befassen. Daher werden Zahlen der Gegenstand der folgenden Kapitel sein.

Vorher wollen wir jedoch noch auf die Bedeutung von Gegenbeispielen als (negatives!) Beweiswerkzeug eingehen. Daß ein Satz falsch, d.h. daß eine Implikation $p \to q$ falsch ist, kann nachgewiesen werden durch die Angabe eines Sachverhalts, bei dem die Aussage p wahr und die Aussage q falsch ist. Zum Beispiel: *Alle durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen sind auch durch 3 teilbar* ist ein falscher Satz, denn 4 ist durch 2 aber nicht durch 3 teilbar.