Lösungen zu Übungsaufgaben 04

Gruppe: Mi 08-10 SR 2, Barbara Rieß

Linus Keiser

23. November 2023

Aufgabe 13

(a) Binärdarstellung von 101 ist 1100101:

$$\begin{aligned} 101/2 &= 50 && \text{Rest } 1\\ 50/2 &= 25 && \text{Rest } 0\\ 25/2 &= 12 && \text{Rest } 1\\ 12/2 &= 6 && \text{Rest } 0\\ 6/2 &= 3 && \text{Rest } 0\\ 3/2 &= 1 && \text{Rest } 1\\ 1/2 &= 0 && \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

(b) Hexadezimaldarstellung von 107470 ist 1A3C6:

$$\begin{aligned} 107470/16 &= 6716 && \text{Rest } 6\\ 6716/16 &= 419 && \text{Rest } 12\\ 419/16 &= 26 && \text{Rest } 3\\ 26/16 &= 1 && \text{Rest } 10\\ 1/16 &= 0 && \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

(c) Oktaldarstellung von 95 ist 137:

$$\begin{aligned} 95/8 &= 11 && \text{Rest } 7\\ 11/8 &= 1 && \text{Rest } 3\\ 1/8 &= 0 && \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 15

a): $M := \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

- **Nach unten beschränkt:** Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist nach unten beschränkt, da alle Elemente in dieser Menge größer oder gleich 0 sind. Also ist 0 eine untere Schranke.

- **Nach oben beschränkt:** Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist nicht nach oben beschränkt. Dies liegt daran, dass es in den natürlichen Zahlen kein größtes Element gibt; für jede natürliche Zahl n gibt es eine größere Zahl $n + 1$.
- **Minimum:** Das Minimum von $\mathbb{N}_0$ ist 0, da es das kleinste Element in der Menge ist.
- **Maximum:** Es gibt kein Maximum, da die Menge nach oben nicht beschränkt ist.
- **Infimum:** Das Infimum ist ebenfalls 0, da es keine kleinere Zahl in $\mathbb{Q}$ gibt, die noch eine Schranke für $\mathbb{N}_0$ ist.
- **Supremum:** Das Supremum existiert nicht in $\mathbb{Q}$, da die Menge nach oben unbegrenzt ist.

b): $M := \mathbb{Z}$

- **Nach unten beschränkt:** Die Menge $\mathbb{Z}$ ist nicht nach unten beschränkt, da für jede Zahl in $\mathbb{Z}$ eine noch kleinere Zahl existiert.
- **Nach oben beschränkt:** $\mathbb{Z}$ ist auch nicht nach oben beschränkt, da es zu jeder Zahl in $\mathbb{Z}$ eine größere Zahl gibt.
- **Minimum:** Es gibt kein Minimum, da es keine kleinste ganze Zahl gibt.
- **Maximum:** Ebenso gibt es kein Maximum, da es keine größte ganze Zahl gibt.
- **Infimum:** Das Infimum existiert nicht in $\mathbb{Q}$, da es keine größte untere Schranke gibt. Jede Zahl, die man als Infimum betrachten könnte, hätte eine noch kleinere Zahl als untere Schranke.
- **Supremum:** Das gleiche gilt für das Supremum – es gibt keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$.

c): $M := \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x^2 < 50\}$

Elemente in M

- Die Ungleichung $x^2 > 8$ ist erfüllt für ganzzahlige x, deren Betrag größer als $\sqrt{8}$ ist. Da $\sqrt{8}$ ungefähr 2,83 ist, bedeutet dies, dass $|x| > 2$ sein muss.
- Die Ungleichung $x^2 < 50$ ist erfüllt für ganzzahlige x, deren Betrag kleiner als $\sqrt{50}$ ist. Da $\sqrt{50}$ ungefähr 7,07 ist, bedeutet dies, dass $|x| < 7$.

Daraus folgt, dass die ganzen Zahlen x in M diejenigen sind, für die $3 \leq |x| \leq 7$. Das bedeutet, x kann -7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6 oder 7 sein.

- **Nach unten beschränkt:** Da -7 die kleinste Zahl in M ist, ist M nach unten beschränkt.

- **Nach oben beschränkt:** Da 7 die größte Zahl in M ist, ist M nach oben beschränkt.
- **Minimum:** Das Minimum von M ist -7, da es das kleinste Element in der Menge ist.
- **Maximum:** Das Maximum von M ist 7, da es das größte Element in der Menge ist.
- **Infimum:** Das Infimum von M ist ebenfalls -7, da es die größte Zahl in $\mathbb{Q}$ ist, die kleiner oder gleich allen Elementen von M ist.
- **Supremum:** Das Supremum von M ist 7, da es die kleinste Zahl in $\mathbb{Q}$ ist, die größer oder gleich allen Elementen von M ist.

d): $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 4\}$

Elemente in M

- Die Ungleichung $x^2 > 2$ ist erfüllt für x, dessen Betrag größer als $\sqrt{2}$ ist. Da $\sqrt{2}$ ungefähr 1,41 ist, bedeutet dies, dass $|x| > \sqrt{2}$.
- Die Ungleichung $x^2 < 4$ ist erfüllt für x, dessen Betrag kleiner als 2 ist.

Somit umfasst die Menge M alle rationalen Zahlen x, für die $\sqrt{2} < |x| < 2$.

- **Nach unten beschränkt:** Da es keine rationale Zahl in M gibt, die kleiner als $-\sqrt{2}$ ist, ist M nach unten beschränkt.
- **Nach oben beschränkt:** Ebenso gibt es keine rationale Zahl in M größer als $\sqrt{2}$, daher ist M nach oben beschränkt.
- **Minimum:** Es gibt kein Minimum in M, da für jede rationale Zahl x in M eine kleinere rationale Zahl x' existiert, so dass $\sqrt{2} < x'^2 < x^2 < 4$.
- **Maximum:** Ebenso gibt es kein Maximum in M, da für jede rationale Zahl x in M eine größere rationale Zahl x' existiert, so dass $2 < x^2 < x'^2 < 4$.
- **Infimum:** Das Infimum von M ist $-\sqrt{2}$, da es die größte Zahl in $\mathbb{Q}$ ist, die kleiner als alle Elemente von M ist (obwohl $-\sqrt{2}$ selbst nicht rational und somit nicht in M ist).
- **Supremum:** Das Supremum von M ist $\sqrt{2}$, da es die kleinste Zahl in $\mathbb{Q}$ ist, die größer als alle Elemente von M ist (obwohl $\sqrt{2}$ selbst nicht rational und somit nicht in M ist).

e): $M := \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2}{3n+1} \textbf{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

- **Nach unten beschränkt:** Da sowohl der Zähler (2) als auch der Nenner $(3n+1)$ immer positiv sind, sind alle Werte in M positiv. Daher ist die Menge nach unten beschränkt durch die untere Schranke 0.
- **Nach oben beschränkt:** Der größte Wert in M tritt auf, wenn $n = 0$, was zu $x = 2$ führt. Daher ist die Menge nach oben beschränkt durch 2.
- **Minimum:** Es gibt kein Minimum, da es keine kleinste positive rationale Zahl gibt. Für jedes $x \in M$ kann ein kleineres positives x' in M gefunden werden, indem ein größeres n gewählt wird.
- **Maximum:** Das Maximum der Menge ist 2, erreicht für $n = 0$.
- **Infimum:** Das Infimum von M ist 0, da es die größte Zahl in $\mathbb{Q}$ ist, die kleiner als alle Elemente von M ist, obwohl 0 selbst nicht in M ist.
- **Supremum:** Das Supremum von M ist 2, was der kleinste Wert in $\mathbb{Q}$ ist, der größer oder gleich allen Elementen von M ist.

Aufgabe 16

Teil (a): Konvergenz der Folge (a_n)

Satz. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{4n^3+n^2}{5n^3}$ konvergiert gegen den Grenzwert $\frac{4}{5}$.*

Beweis. Wir zeigen durch Anwendung der Definition 5.2 der Grenzwertkonvergenz, dass die Folge (a_n) gegen $\frac{4}{5}$ konvergiert.

1. Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck a_n:

$$a_n = \frac{4n^3 + n^2}{5n^3} = \frac{n^2(4n+1)}{5n^3} = \frac{4n+1}{5n}$$

2. Nun betrachten den Abstand zwischen a_n und dem Grenzwert $\frac{4}{5}$:

$$|a_n - \frac{4}{5}| = \left| \frac{4n+1}{5n} - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{4n+1-4n}{5n} \right| = \left| \frac{1}{5n} \right|$$

   Da n positiv ist, können wir den Absolutbetrag weglassen:

$$|a_n - \frac{4}{5}| = \frac{1}{5n}$$

3. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir ein $N(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - \frac{4}{5}| < \varepsilon$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\frac{1}{5n} < \varepsilon$ sein muss. Daraus folgt $n > \frac{1}{5\varepsilon}$ und somit setzen wir $N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{5\varepsilon} \rceil$.

Wir haben damit bestätigt, dass die Folge (a_n) den Konvergenzkriterien entspricht und gegen $\frac{4}{5}$ konvergiert. □

Teil (b): Divergenz der Folgen (b_n) und (c_n)

Satz. *Die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 2^n$ sind divergent.*

Beweis. Wir führen einen direkten Beweis, um zu zeigen, dass beide Folgen die Bedingungen der Konvergenz nicht erfüllen und somit divergent sind.

1. Die Folge $b_n = (-1)^n$ alterniert zwischen -1 und 1. Für ungerade n ist $b_n = -1$ und für gerade n ist $b_n = 1$. Diese ständige Oszillation zwischen zwei Werten bedeutet, dass für jeden angenommenen Grenzwert a und für jedes $\varepsilon > 0$, das kleiner ist als min —a - 1—, —a + 1— , kein $N(\varepsilon)$ existiert, sodass $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Daher kann kein Grenzwert a gefunden werden, der die Konvergenzbedingung erfüllt, und somit ist (b_n) divergent.

2. Die Folge $c_n = 2^n$ wächst unbeschränkt. Für jeden potenziellen Grenzwert a und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es immer ein n, sodass $|c_n - a|$ nicht kleiner als ε ist. Daher ist (c_n) divergent.

Wir haben damit gezeigt, dass sowohl (b_n) als auch (c_n) nicht divergieren. □