1 Mengen und Abbildungen

Wesentliche Grundbausteine der Mathematik sind Mengen und Abbildungen zwischen ihnen. Wir werden uns damit begnügen eine *naive Mengenlehre* zu beschreiben ohne deren Fundierung mittels strukturierter Logik.

Definition 1.1 *Eine* Menge *(im Sinne der naiven Mengenlehre) ist eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (nach* **Cantor***). Die Objekte einer Menge heißen deren Elemente.*

Mengen werden in geschweiften Klammern geschrieben. Sie können durch Aufzählung erklärt werden wie in

$$M := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

für die aus den Zahlen 2,3,5,7,11,13,17 und 19 bestehende Menge oder durch Angabe einer Eigenschaft, welche alle Elemente der Menge charakterisiert, wie in

$$M := \{n : n \text{ ist eine Primzahl und kleiner als } 20\},$$

bzw. allgemein

$$M := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft E}\}.$$

Hierbei verwenden wir die Notation :=, um im Sinne von *ist definiert durch* die linke Seite des Ausdrucks durch die rechte Seite zu definieren.

Ist x ein Element einer Menge M, so schreiben wir $x \in M$. Ist x nicht Element einer Menge M, so schreiben wir $x \notin M$. Die Menge, die keine Elemente besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wir sagen *eine Menge M ist in einer Menge N enthalten* oder *eine Menge M ist in eine* **Teilmenge** *der Menge N*, wenn für jedes $x \in M$ auch $x \in N$ gilt. Hierfür schreiben wir $M \subset N$. Falls M nicht Teilmenge von N ist, schreiben wir $M \not\subset N$. Ein einfaches Beispiel liegt mit $M \subset M$ und $\emptyset \subset M$ für alle Mengen M vor. Ferner definieren wir $N \supset M$ als gleichbedeutend mit $M \subset N$.

Zwei Mengen M und N heißen gleich, in Zeichen $M = N$, wenn sie genau dieselben Elemente haben. Dies ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft, daß sowohl $M \subset N$ und $N \subset M$ zutreffen. Falls M und N nicht gleich sind, schreiben wir $M \neq N$.

Wichtige Mengen sind die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

und die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}.$$

Dabei können wie etwa in der Menge

$$M := \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\}$$

der Buchstaben die drei Punkte ... nur dann zur Beschreibung der Menge genutzt werden, wenn aus dem Kontext klar ist, wie die Ergänzung zur Gesamtmenge aussieht.

Die **Potenzmenge** $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M. Insbesondere gilt $\emptyset \in P(M)$ und $M \in P(M)$. Zum Beispiel hat die Menge $M := \{1, 2, 3\}$ die Potenzmenge

$$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Die **Schnittmenge** $M \cap N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, d.h.

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

Zwei Mengen M und N mit $M \cap N = \emptyset$ heißen **disjunkt**. Die **Vereinigungsmenge** $M \cup N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die in M oder in N enthalten sind, d.h.

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Die **Differenzmenge** $M \setminus N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die in M aber nicht N enthalten sind, d.h.

$$M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$

Für die Mengen $M = \{1, 3, 4\}$ und $N = \{1, 2\}$ haben wir zum Beispiel $M \cap N = \{1\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$ und $M \setminus N = \{3, 4\}$.

In der Mathematik sind *Definitionen* und *Aussagen* streng voneinander zu unterscheiden. Definitionen als bloße Festsetzungen sind nicht zu beweisen (lediglich ihre Widerspruchsfreiheit muß gewährleistet sein), während mathematische Aussagen als Behauptungen stets eines Beweises bedürfen (durch logische Deduktion aus den Definitionen und vorher bewiesenen Aussagen). Bei den Aussagen unterscheidet man *Sätze* (oder *Theoreme*) als unmittelbar interessierende Aussagen, *Lemmata* als nur mittelbar interessierenden Hilfsaussagen und *Korollare* als leicht einsichtige spezielle Konsequenzen zuvor bewiesener Sätze.

Wir können nun schon einige Aussagen zu den obigen Mengenoperationen treffen (und grundsätzlich beweisen).

Satz 1.2 *Für beliebige Mengen M, N und Q gelten die folgenden Regeln:*

$$\begin{array}{rll}
M \cap N = N \cap M & & \textit{Kommutativität von } \cap \\
M \cup N = N \cup M & & \textit{Kommutativität von } \cup \\
(M \cap N) \cap Q = M \cap (N \cap Q) & & \textit{Assoziativität von } \cap \\
(M \cup N) \cup Q = M \cup (N \cup Q) & & \textit{Assoziativität von } \cup \\
(M \cap N) \cup Q = (M \cup Q) \cap (N \cup Q) & & \textit{Distributivität von } \cap \textit{ und } \cup \\
(M \cup N) \cap Q = (M \cap Q) \cup (N \cap Q) & & \textit{Distributivität von } \cup \textit{ und } \cap \\
M \cap M = M & & \textit{Idempotenz von } \cap \\
M \cup M = M & & \textit{Idempotenz von } \cup \\
M \cap \emptyset = \emptyset & & \textit{Absorptionsgesetz für } \cap \\
M \cup \emptyset = M & & \textit{Absorptionsgesetz für } \cup .
\end{array}$$

Beweis. Die Beweise sind elementar nach dem Muster

$$\begin{aligned}
(M \cap N) \cap Q &= \{x : x \in M \cap N \text{ und } x \in Q\} \\
&= \{x : x \in M \text{ und } x \in N \text{ und } x \in Q\} \\
&= \{x : x \in M \text{ und } x \in N \cap Q\} \\
&= M \cap (N \cap Q).
\end{aligned}$$

Die Beweise der anderen Aussagen sind zum Üben überlassen. □

Ist M eine Teilmenge von G, so kann das **Komplement** M_G^c von M bezüglich G gebildet werden durch

$$M_G^c := \{x : x \in G \text{ und } x \notin M\}.$$

Offenbar ist $M_G^c = G \setminus M$.

Im folgenden Satz und in Zukunft schreiben wir $A \Rightarrow B$ für die Aussage: aus der Eigenschaft A fogt die Eigenschaft B.

Satz 1.3 *Für Teilmengen M und N von G gelten die folgenden Regeln:*

$$\begin{aligned}
M \setminus N &= M \cap N^c \\
(M \cup N)^c &= M^c \cap N^c && \textit{Morgansche Regel} \\
(M \cap N)^c &= M^c \cup N^c && \textit{Morgansche Regel} \\
M \subset N &\Rightarrow N^c \subset M^c \\
(M^c)^c &= M \\
(M \cup M^c) &= G && \textit{Komplementarität von } \cup \\
(M \cap M^c) &= \emptyset && \textit{Komplementarität von } \cap\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist abkürzend der Subskript G bei dem Komplement weggelassen.

Beweis. Die Beweise erfolgen nach dem Muster

$$\begin{aligned}
(M \cup N)^c &= \{x : x \in G \text{ und } x \notin M \cup N\} \\
&= \{x : (x \in G \text{ und } x \notin M) \text{ und } (x \in G \text{ und } x \notin N)\} \\
&= \{x : x \in M^c \text{ und } x \in N^c\} \\
&= M^c \cap N^c
\end{aligned}$$

und sind als Übung empfohlen. □

Sind M und N Mengen, so heißt (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ ein **geordnetes Paar**. Die Menge

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M \text{ und } y \in N\}$$

aller geordneter Paare heißt **kartesisches Produkt** der Mengen M und N. Zum Beispiel ist für $M := \{1, 2, 3\}$ und $N = \{\text{Stuhl}, \text{Tisch}\}$ das kartesische Produkt die Menge

$$M \times N = \{(1, \text{Stuhl}), (2, \text{Stuhl}), (3, \text{Stuhl}), (1, \text{Tisch}), (2, \text{Tisch}), (3, \text{Tisch})\}.$$

Natürlich kann man auch mehrfache kartesische Produkte bilden für n Mengen $M_1, \ldots, M_n$. Falls $x_j \in M_j$ für $j = 1, \ldots, n$ ist, so heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein geordnetes n–**Tupel**. Die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in M_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

aller n-Tupel heißt **kartesisches Produkt** der Mengen $M_1, \ldots, M_n$.

Definition 1.4 *Eine* Relation R *zwischen zwei Mengen ist eine Teilmenge* $R \subset M \times N$. *Für* $(x, y) \in R$ *sagt man, daß* x *in Relation mit* y *steht und schreibt* $x \sim y$ *(oder ein anderes Zeichen).*

Man kann Relationen in einen orthogonalen Achsenkreuz veranschaulichen, indem man zunächst auf der horizontalen Achse für jedes $x \in M$ und auf der vertikalen Achse für jedes $y \in N$ eine Stelle markiert. Dann drückt man die Eigenschaft $(x, y) \in R$ dadurch aus, daß man den Punkt (x, y) im Achsenkreuz markiert.

Beispiele sind

$$M = N = \mathbb{N}, \quad R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \text{ teilt } n\}$$

und

$$M = N = \mathbb{R}, \quad R := \{(x, y) : y = x^2\}.$$

Ein weiteres Beispiel einer Relation ist die Eigenschaft *ist Kind von* auf der Menge $M \times M$ von Paaren von Menschen, etwa den Gästen einer Geburtstagsparty.

Ist für eine Menge M eine Relation R auf $M \times M$ gegeben, so sprechen wir auch von einer (zweistelligen) Relation auf M.

Definition 1.5 *Eine Relation* $\prec$ *auf einer Menge* M *heißt eine* Ordnungsrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*

Reflexivität:	*Für alle* $x \in M$ *gilt* $x \prec x$.
Transitivität:	*Aus* $x \prec y$ *und* $y \prec z$ *folgt* $x \prec z$.
Antisymmetrie:	*Aus* $x \prec y$ *und* $y \prec x$ *folgt* $x = y$.

Eine Menge mit einer Ordnungsrelation nennt man halbgeordnet.

Als Übung empfiehlt es sich, die Eigenschaften aus der Definition 1.5 in der Mengenschreibweise darzustellen. Als Beispiele nennen wir die durch $x \prec y \;\Leftrightarrow\; x \leq y$ auf $\mathbb{R}$ und durch $A \prec B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$ auf der Potenzmenge $P(M)$ für Teilmengen A und B einer beliebigen Menge M definierten Halbordnungen. (Hier schreiben wir $E \Leftrightarrow F$ für die Aussage: aus E folgt F und aus F folgt E. Hierfür sagen wir, daß die Aussagen E und F äquivalent sind.)

Definition 1.6 *Eine Relation* $\sim$ *auf einer Menge* M *heißt eine* Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*

Reflexivität:	*Für alle* $x \in M$ *gilt* $x \sim x$.
Transitivität:	*Aus* $x \sim y$ *und* $y \sim z$ *folgt* $x \sim z$.
Symmetrie:	*Aus* $x \sim y$ *folgt* $y \sim x$.

Ist $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* M *und* $x \in M$, *so heißt die Menge*

$$[x] := \{y \in M : y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse *von* x.

Wir betrachten einige Beispiele. Auf der Menge M aller Dreiecke in der euklidischen Ebene setzen wir $A \sim B$ genau dann, falls die Dreiecke A und B gleichen Flächeninhalt haben. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Auf der Menge $M := \mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen setzen wir $m \sim n$ genau dann, falls $m - n$ durch 4 teilbar ist. Dies ist wiederum eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind gegeben durch

$$[m] = \{n \in \mathbb{Z} : m - n \text{ ist durch 4 teilbar}\} = \{m + 4k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Offenbar ist $\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$ die Zerlegung der ganzen Zahlen in vier Klassen: diejenigen, die bei Division durch 4 den Rest $0, 1, 2$ oder 3 lassen.

Definition 1.7 *Eine* Abbildung f *einer Menge* M *in eine Menge* N *ist eine Vorschrift, die jedem Element* $x \in M$ *genau ein Element* $y \in N$ *zuordnet. Wir nennen dann* y *das* Bild *oder den* Wert *von* x *unter der Abbildung* f *und schreiben* $y = f(x)$. *Ferner nennen wir* x *das* Urbild *oder* Argument *von* $f(x)$. *Die Menge* M *heißt* Urbildmenge *oder* Definitionsbereich *von* f, *die Menge* N *heißt* Zielmenge *oder* Bildbereich. *Die* Bildmenge *einer Teilmenge* $U \subset M$ *unter* f *ist*

$$f(U) := \{f(x) : x \in U\} \subset N$$

und analog heißt

$$f^{-1}(V) : \{x \in M : f(x) \in V\} \subset M$$

für $V \subset N$ *die* Urbildmenge *einer Teilmenge* $V \subset N$. *Abbildungen werden synonym auch als* Funktionen *bezeichnet.*

Wir schreiben abkürzend

$$f : M \to N \quad \text{oder} \quad M \xrightarrow{f} N \quad \text{oder} \quad x \mapsto f(x).$$

Es ist wichtig, zwischen der Funktion $f : M \to N$ und ihrem Wert $f(x) \in N$ an einer Stelle $x \in M$ zu unterscheiden.

Abbildungen können durch explizite Angaben definiert werden, wie in dem Beispiel $M := \{1, 2, 3\}$ und $N = \{\text{Stuhl}, \text{Tisch}\}$ durch $1 \mapsto$ Stuhl, $2 \mapsto$ Tisch und $3 \mapsto$ Stuhl, oder durch eine allgemeine Vorschrift, wie in dem Beispiel $M = N = \mathbb{R}$ und $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Falls $M = N$, so heißt $\mathrm{id}_M : M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$ die *Identitätsabbildung* auf M. In der Informatik kann alles, was aus einem Input einen Output erzeugt, als Abbildung interpretiert werden!

Abbildungen lassen sich als spezielle Relationen interpretieren, da man die obige Definition, die hinsichtlich der Bedeutung des Begriffs *zuordnen* etwas unklar ist, ersetzen kann durch die folgende logisch befriedigender Definition.

Definition 1.8 *Eine* Abbildung f *einer Menge* M *in eine Menge* Y *ist gegeben durch eine Relation* R_f *zwischen* M *und* N*, bei der jedes* $x \in M$ *mit genau einem* $y \in N$ *in Relation steht, d.h. ist* $(x, y) \in R_f$ *und* $(x, \hat{y}) \in R_f$*, so folgt* $y = \hat{y}$*. Wir setzen* $f(x) := y$*, wenn* x *in Relation mit* y *steht.*

Zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ heißen gleich, wenn $M = \hat{M}$, $N = \hat{N}$ und $f(x) = \hat{f}(x)$ für alle $x \in M$. Für eine Abbildung $f : M \to N$ und eine nichtleere Teilmenge $U \subset M$ ist die *Einschränkung* oder *Restriktion* $f|_U : U \to N$ von f auf U definiert durch $f|_U(x) := f(x)$ für alle $x \in U$.

Die *Komposition* oder *Hintereinanderschaltung* oder *Verkettung* $g \circ f : L \to N$ zweier Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ ist gegeben durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in L$.

Definition 1.9 *Eine Abbildung* $f : M \to N$ *heißt*

1. injektiv*, wenn jedes* $y \in N$ *höchstens ein Urbild hat, d.h. wenn aus* $f(x) = f(\hat{x})$ *folgt* $x = \hat{x}$*.*

2. surjektiv*, wenn jedes* $y \in N$ *mindestens ein Urbild hat, d.h. wenn es zu jedem* $y \in N$ *ein* $x \in M$ *gibt mit* $y = f(x)$*.*

3. bijektiv*, wenn* f *injektiv und surjektiv ist.*

Mit einer Abbildung $f : M \to N$ versteht man bei gegebenem $y \in N$ unter dem Lösen der Gleichung

$$f(x) = y \tag{1.1}$$

das Auffinden eines $x \in M$, welches von f auf y abgebildet wird. Falls f injektiv ist, besitzt die Gleichung (1.1) für jedes $y \in Y$ höchstens eine Lösung, falls f surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in N$ mindestens eine Lösung und falls f bijektiv ist, so gibt es für jedes $y \in N$ genau eine Lösung.

Satz 1.10 *Für Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ gilt:*

1. *Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*
2. *Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.*
3. *Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.*
4. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.*
5. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.*
6. *Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.*

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die erste und fünfte Aussage. Seien also f und g injektiv und $g \circ f(x) = g \circ f(\hat{x})$. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = f(\hat{x})$. Hieraus wiederum folgt $x = \hat{x}$ wegen der Injektivität von f. Also ist $g \circ f$ injektiv.

Sei nun $g \circ f$ surjektiv und $y \in N$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in L$ mit $g \circ f(x) = y$. Wir setzen $z := f(x) \in N$ und haben wegen $g(z) = y$ die Surjektivität von g.

Die dritte Aussage des Satzes folgt natürlich unmittelbar aus der ersten und zweiten, und die letze Aussage aus den beiden vorangehenden. □

Satz 1.11 *Zu einer bijektiven Abbildung $f : M \to N$ gibt es genau eine Abbildung $f^{-1} : N \to M$ mit*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N,$$

d.h. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in N$. Die Abbildung f^{-1} heißt Umkehrabbildung *oder* inverse Abbildung *von f.*

Beweis. Für jedes $y \in N$ gibt es wegen der Bijektivität von f genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Dann ist $f^{-1} : N \to M$ durch $f^{-1} : y \mapsto x$ wohl definiert. Wir haben dann erstens $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ für alle $y \in N$, und zweitens für jedes $x \in M$ durch Setzen von $y := f(x)$ trivialer Weise $f^{-1}(y) = x$ und daher $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. $\square$

Die Eigenschaft, daß die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung wiederum bijektiv ist kann man entweder *zu Fuß* beweisen, oder eleganter direkt aus Satz 1.10 folgern.

Um mehr über Eigenschaften von Abbildungen aussagen zu können, müssen die Mengen zwischen denen die Abbildungen operieren mit passenden Strukturen versehen sein. Daher werden wir uns als nächstes befassen mit der mathematischen Fundierung von Zahlen, d.h. von natürlichen Zahlen, von ganzen Zahlen, von rationalen Zahlen und reellen Zahlen. Bevor wir dies tun, schieben wir ein Kapitel mit einigen elementaren Grundlagen zur Logik.