8 Mehr über Zahlenfolgen

Wir wollen nun unsere Kenntnisse über reelle und komplexe Zahlen nutzen, um weiteres über Zahlenfolgen zu erarbeiten.‘

Definition 8.1 *Eine Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathbb{R}$ *heißt* monoton wachsend*, wenn*

$$a_n \leq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Sie heißt* streng monoton wachsend*, wenn*

$$a_n < a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Eine Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathbb{R}$ *heißt* monoton fallend*, wenn*

$$a_n \geq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Sie heißt* streng monoton fallend*, wenn*

$$a_n > a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*.*

Satz 8.2 *Jede monoton wachsende (bzw. fallende) und nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge aus* $\mathbb{R}$ *ist konvergent.*

Beweis. Wir zeigen, daß eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge (a_n) eine Cauchyfolge ist. Dazu gehen wir indirekt vor und nehmen an, (a_n) sei nicht Cauchyfolge. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, zu dem kein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Hieraus folgt durch Induktion die Existenz einer Teilfolge (a_{n_k}), so daß

$$|a_{n_k} - a_{n_{k-1}}| \geq \varepsilon \tag{8.1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Als Induktionsanfang gibt es $n_1 < n_2$ mit $|a_{n_2} - a_{n_1}| \geq \varepsilon$, denn andrenfalls wäre $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Folge sei bis zu einem $k \in \mathbb{N}$ konstruiert. Dann gibt es ein $n_{k+1} > n_k$ mit $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geq \varepsilon$, denn andrenfalls wäre $|a_m - a_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $m \geq n_k$ und wegen der Monotonie dann auch $|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $m > n \geq n_k$.

Mit der Monotonie folgt aus (8.1) weiter

$$a_{n_k} \geq a_{n_{k-1}} + \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und hieraus durch Induktion

$$a_{n_k} \geq a_{n_1} + k\varepsilon \geq a_1 + k\varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist im Widerspruch zur Beschränktheit von (a_n) nach oben, d.h. zur Existenz einer Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit $a_{n_k} \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Die Funktion *Fakultät* von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}$ ist rekursiv definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1) \cdot (n!)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Offenbar gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 8.3 *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist konvergent.

Beweis. Die Folge der Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ist streng monoton wachsend. Für $n \geq 2$ gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \geq 2^{n-1}$$

und daher können wir unter Verwendung der geometrischen Reihe (5.1) für $q = 1/2$ abschätzen

$$S_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} < 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3.$$

Also ist die Folge (S_n) auch nach oben beschränkt und die Behauptung folgt aus Satz 8.2. □

Die Summe der Reihe aus Satz (8.3) stellt eine der wichtigsten reellen Zahlen dar und heißt *Eulersche Zahl* e, also

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, .$$

Offenbar gilt $2 < e < 3$. Man kann zeigen, daß die Zahl e keine rationale Zahl ist.

Satz 8.4 *Seien* (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen aus* $\mathbb{R}$ *mit Grenzwerten* a *und* b *sowie der Eigenschaft*

$$a_n \leq b_n \tag{8.2}$$

Dann gilt $a \leq b$.

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $a > b$. Dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}\,(a - b) > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{and} \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$b_n = b + (b_n - b) < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a - (a - a_n) = a_n,$$

d.h. $b_n < a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung (8.2) $\square$

Satz 8.5 *Seien* $(a_n), (b_n)$ *und* (c_n) *Folgen aus* $\mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{8.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *und seien die Folgen* (a_n) *und* (c_n) *konvergent gegen den gleichen Grenzwert. Dann ist auch die Folge* (b_n) *konvergent gegen diesen Grenzwert.*

Beweis. Wir bezeichnen den Grenzwert der beiden konvergenten Folgen mit b. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen N_1 und N_2 so, daß

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

und

$$|c_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Dann setzen wir $N := \max\{N_1, N_2\}$ und haben unter der Verwendung der Voraussetzung

$$|b_n - b| = |b_n - a_n + a_n - b| \le |b_n - a_n| + |a_n - b| \le |c_n - a_n| + |a_n - b|$$
$$\le |c_n - b| + |b - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. □

Korollar 8.6 *Sei (c_n) eine Nullfolge und (b_n) eine Folge mit der Eigenschaft*

$$0 \le b_n \le c_n \tag{8.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch b_n eine Nullfolge.

Satz 8.7 Bolzano–Weierstrass *Jede beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (b_n) eine beschränkte Folge und α und γ eine untere und obere Schranke. Wir definieren nun rekursiv Folgen (a_k) und (c_k) durch Intervallhalbierung, derart daß stets unendlich viele Glieder der Folge (b_n) in dem Intervall $[a_k, c_k]$ enthalten sind. Dazu starten wir mit $a_1 = \alpha$ und $c_1 = \gamma$ und erklären rekursiv

$$a_{k+1} := a_k \quad \text{und} \quad c_{k+1} := \frac{a_k + c_k}{2} ,$$

falls unendlich viele Glieder von (b_n) in dem Intervall

$$\left[a_k, \frac{a_k + c_k}{2}\right]$$

liegen und andrenfalls

$$a_{k+1} := \frac{a_k + c_k}{2} \quad \text{und} \quad c_{k+1} := c_k.$$

Dann liegen stets unendlich viele Glieder von (b_n) in dem Intervall $[a_k, c_k]$ der Länge $c_k - a_k = 2^{-k+1}(\gamma - \alpha)$. Daher können wir eine streng monoton steigende Folge (n_k) aus $\mathbb{N}$ so auswählen, daß

$$a_k \le b_{n_k} \le c_k \tag{8.5}$$