

Aufgabenblatt 1 DiMa

Aufgabe 1.1

a) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

$$\{1,2\} = A$$

$$\{1,2,3\} = D$$

$$\{3,4\} = B$$

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\Leftrightarrow \{(a,b)\} = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} = C$$

$$C \cup D = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \cup \{1,2,3\} = \{m \in M \mid m \in C \vee m \in D\}$$

$$\Leftrightarrow \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), 1, 2, 3\}$$

b)

$$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$$

$$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

c)

$$\bigcap_{i \in \{2,6\}} = \{\frac{i}{2}, i+1\}$$

$$i \in \{2,6\}$$

$$= \{\frac{2}{2}, 2+1\} \cap \{\frac{6}{2}, 6+1\} = \{1,3\} \cap \{3,7\} = \{3\}$$

d)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} = \{n, n+1, 2n\}$$

Aufgabe 1.2

$$a) A \subset B \cap C \iff (A \subset B) \wedge (A \subset C)$$

$$\text{Es gelte: } B \cap C = \{x \mid x \in B \wedge x \in C\}$$

$$\text{und: } A \subset B = \{\forall x \in A: x \in B\}$$

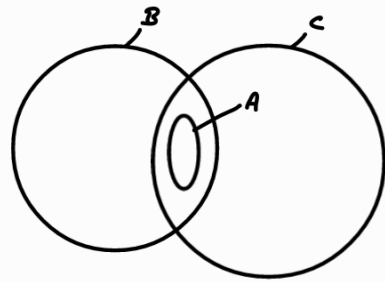
Daraus folgt:

$$A \subset B \cap C \iff x \in A \wedge x \in B \cap C$$

$$\iff x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$$

$$\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\iff (A \subset B) \wedge (A \subset C)$$



$$b) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Es gelte:

$$A \setminus (B \cup C) := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cup C\}$$

Daraus folgt:

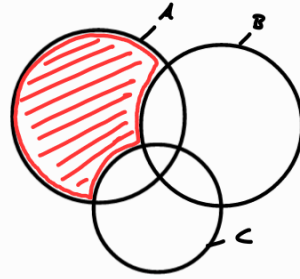
$$A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cup C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge \neg B \wedge x \in A \wedge \neg C\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C\}$$

$$\Leftrightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$



c)

$$\bigcap_{i \in I}$$

Aufgabe 1.3

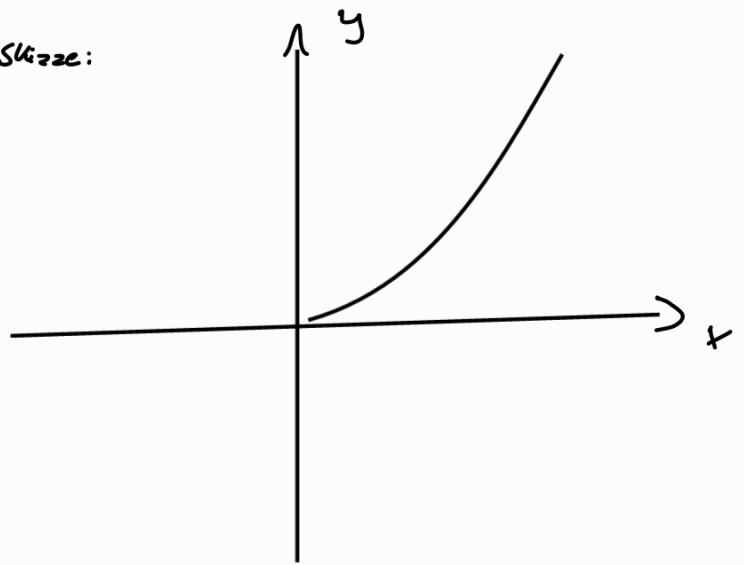
a) $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(n) = n^2$

Surjektiv:

Ja, zu jedem $y \in \mathbb{N}$ gibt es ein Urbild $x \in \mathbb{N}$.

$$\forall y \in \mathbb{N}: \exists x \in \mathbb{N}$$

Skizze:



Injektiv:

Ja, da für jedes $y \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens ein Urbild $x \in \mathbb{N}$.

→ Bijektiv, da injektiv und surjektiv

b) $f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(x) = |x|$

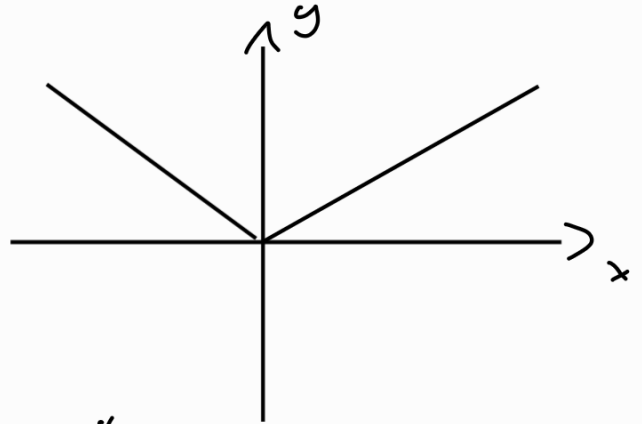
Surjektiv:

$$\text{Ja, } \rightarrow \forall y \in \mathbb{N}: \exists x \in \mathbb{Z}$$

injektiv:

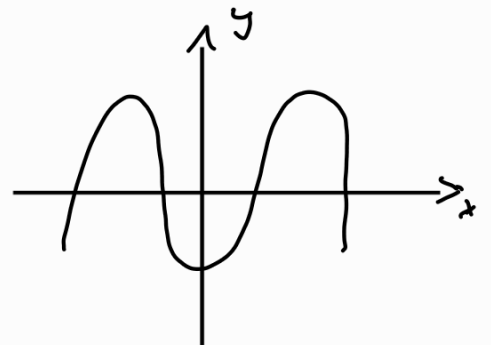
Nein, hier hat jedes $y \in \mathbb{N}$ zwei Urbilder aus $x \in \mathbb{Z}$ → nicht bijektiv weil:

Surjektiv: wahr
injektiv: falsch



c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \sin(x)$

Skizze:



surjektiv:

Ja, es gilt:

$$\forall y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}$$

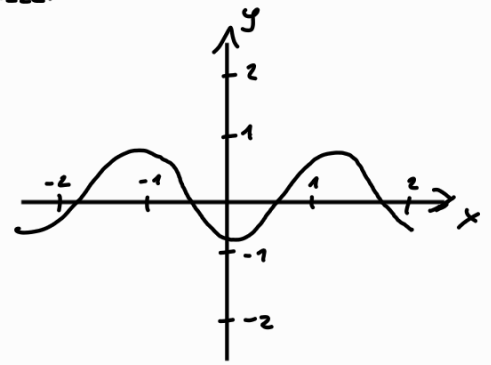
injektiv:

Nicht injektiv, da für $y \in \mathbb{R}$ mehrere Urbilder $x \in \mathbb{R}$ existieren.

→ nicht bijektiv

d) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $f_4(x) = \sin(x)$

Skizze:



e) $f_5: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f_5(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$

Surjektiv:

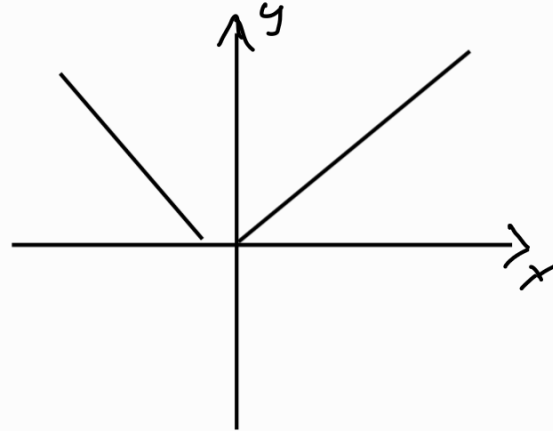
$\exists a, \forall y \in \mathbb{N}: \exists x \in \mathbb{Z}$

für $f_5(x) = -2x-1$ und
 $f_5(x) = 2x$

injektiv

$\exists a$, für $f_5(x) = 2x$ und
 $f_5(x) = -2x-1$

→ beide Funktionen
bijektiv



Aufgabe 1.4

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } b\}$

Reflexiv:

$\forall a \in \mathbb{N}: a \sim a \quad \checkmark \rightarrow \text{Reflexiv}$

Symmetrisch

$\forall (a,b) \in \mathbb{N}: a \sim b \Rightarrow b \sim a$

für R_1 a teilt b : 2 teilt 4:

$2-4 = -2$

$4-2 = 2$

$| -2 | = 2 \rightarrow \text{Symmetrie } \checkmark$

transitivität

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

