Lösungen zu Übungsblatt 5.

Aufgabe 1 (15 Punkte)**.** Ein Pokerspiel besteht aus 52 Karten mit vier Farben, wobei es also jeweils 13 verschiedene Karten zu jeder Farbe gibt. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Pokerhände, bestehend aus fünf Karten mit folgendem Blatt:

(i) *Flush* (5 Karten gleicher Farbe, beliebiger Wertigkeit),

(ii) *Straight-Flush* (aufsteigende Wertigkeit, gleiche Farbe)

(iii) *zwei Paare* (zwei verschiedene Paare).

(iv) Wie viele Möglichkeiten gibt es bei sechs Spielern insgesamt?

(v) Wie viele Möglichkeiten gibt es bei sechs Spielern, dass ein Spieler alle vier Asse erhält?

Lösung zu Aufgabe 1. Zu (i): Da es jeweils 13 Karten einer Farbe gibt, und diese paarweise verschieden sind, können wir jeweils auf $\binom{13}{5}$ verschiedene Arten fünf dieser 13 Karten auswählen. Jede dieser Hände tritt viermal auf, einmal in jeder Farbe. Es gibt demnach insgesamt $4 \cdot \binom{13}{5}$ mögliche Pokerhände, bei welchen alle Karten die selbe Farbe haben.

Zu (ii): Für jede der 4 Farben gibt es 10 Straßen. Es gibt also $4 \cdot 10 = 40$ Kombinationen. (Falls man die 4 Royal Flushs nicht dazu zählt, sind es $4 \cdot 9 = 36$ Kombinationen.)

Zu (iii): Die beiden Paare können jeweils einen der 13 Werte annehmen. Dafür gibt es $\binom{13}{2} = 78$ Möglichkeiten. Für jeden Wert (der beiden Werte) gibt es noch jeweils $\binom{4}{2} = 6$ Farb-Kombinationen. Die fünfte Karte darf nun 11 Werte annehmen, wobei jede 4 Farben besitzt (also $4 \cdot 11 = 44$ Möglichkeiten). Insgesamt

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 78 \cdot 6^2 \cdot 44 = 123552$$

Möglichkeiten.

Zu (iv): Der erste Spieler kann $\binom{52}{5}$ Kombinationen haben, der Zweite $\binom{47}{5}$, usw. Insgesamt existieren

$$\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}\binom{32}{5}\binom{27}{5}$$

Möglichkeiten.

Zu (v): Wir wählen ein Spieler, dafür gibt es 6 Möglichkeiten. Dieser hat 4 Asse, die fünfte Karte kann aus 48 gewählt werden. Insgesamt $6 \cdot 48$ Möglichkeiten. Die restlichen Spieler können

$$\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}\binom{32}{5}\binom{27}{5}$$

verschiedene Kombinationen erhalten. Also zusammen

$$6 \cdot 48 \cdot \binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}\binom{32}{5}\binom{27}{5}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.** In der Mensa gibt es Käsespätzle, einen Beilagensalat und Vanillepudding. Von den anwesenden Studierenden haben

- 21 Studierende Käsespätzle,
- 16 Studierende einen Beilagensalat und
- 8 Studierende Vanillepudding

auf ihr Tablett gestellt. Davon haben

- genau 12 Studierende Käsespätzle und einen Beilagensalat,

- genau 5 Studierende Käsespätzle und Vanillepudding und
- genau 3 Studierende einen Beilagensalat und Vanillepudding auf ihrem Tablett.

Genau 2 der Studierenden haben sich für alle drei dieser Gerichte entschieden. Wie viele der Studierenden haben mindestens eine der Komponenten Käsespätzle, Beilagensalat oder Vanillepudding auf ihrem Tablett?

Lösung zu Aufgabe 2. Wir bezeichnen mit S die gesuchte Menge der Studierenden, und mit

$$\begin{aligned} A &= \{s \in S,\ s \text{ hat Käsespätzle}\}, \\ B &= \{s \in S,\ s \text{ hat Beilagensalat}\}, \\ C &= \{s \in S,\ s \text{ hat Vanillepudding}\}, \end{aligned}$$

die Mengen der Studierenden, welche Käsespätzle, Salat bzw. Vanillepudding gewählt haben. Dann ist $S = A \cup B \cup C$ und wir suchen $|S| = |A \cup B \cup C|$. Im Text gegeben sind

$$|A| = 21, \quad |B| = 16, \quad |C| = 8, \quad |A \cap C| = 5, \quad |A \cap B| = 12, \quad |B \cap C| = 3, \quad |A \cap B \cap C| = 2.$$

Mithilfe des Prinzips der Inklusion-Exklusion gilt

$$|S| = |A \cup B \cup C| = 21 + 16 + 8 - 12 - 5 - 3 + 2 = 27,$$

demnach haben 27 Studierende mindestens eine der Komponenten gewählt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Wenn fünf Leute zusammen wichteln, wie viele mögliche Auslosungen gibt es, bei denen niemand sich selbst beschenkt?

Lösung zu Aufgabe 3. Wichteln fünf Personen $p_1, \dots, p_5$ mit, so ist eine Auslosung gerade eine Permutation der fünf Personen, wobei dann p_1 die ersten Person beschenkt, p_2 die zweite, p_3 die dritte usw. Es gibt genau 5! Permutationen von fünf Elementen, also auch 5! Auslosungen. Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bezeichnen wir mit M_i die Menge der Auslosungen, bei denen sich p_i selbst beschenkt. Dann ist die gesuchte Anzahl

$$|M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5)| = 5! - |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5|.$$

Für $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5|$ benutzen wir das Abzählprinzip der Inklusion-Exklusion.

+ Beschenkt sich eine Person selber, so können die anderen vier noch beliebig ausgelost werden, also $|M_i| = 4!$ und somit

$$|M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| + |M_5| = 5 \cdot 4! = 5!.$$

− Dabei wurden die Elemente im Schnitt zweier solcher Mengen zu oft gezählt. Hier ist $M_i \cap M_j$ mit $i < j$, $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ die Menge der Auslosungen, bei denen sich p_i und p_j selbst beschenken. Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten um i und j auszuwählen und dann 3! Möglichkeiten für die Auslosungen der verbleibenden drei Personen. Also

$$\sum_{\substack{i,j \in \{1,\dots,5\} \\ i<j}} |M_i \cap M_j| = \binom{5}{2} \cdot 3! = 60.$$

+ Nun haben wir die Auslosungen, bei denen sich drei selbst beschenken, zu oft abgezogen, also die Elemente aus Schnitten $M_i \cap M_j \cap M_k$ für paarweise verschiedene $i < j < k$, $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$. Von diesen Schnitten gibt es $\binom{5}{3}$, jeder enthält 2! Elemente, also

$$\sum_{\substack{i,j,k \in \{1,\dots,5\} \\ i<j<k}} |M_i \cap M_j \cap M_k| = \binom{5}{3} \cdot 2! = 20.$$

− Die Elemente aus den Vierfach-Schnitten sind nun zu wieder zu oft gezählt. Beschenken sich vier Leute selber, so muss dies aber auch die fünfte Person tun, also hat jeder der $\binom{5}{4} = 5$ Vierfach-Schnitte nur ein Element, abzuziehen ist also 5.

+ Der Fünffach-Schnitt enthält nur die Auslosung, bei der sich jeder selbst beschenkt.

Nach dem Prinzip der Inklusion-Exklusion gibt es daher

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5| = 5! - 60 + 20 - 5 + 1 = 5! - 44.$$

Auslosungen, bei denen sich mindestens eine Person selbst beschenkt. Demnach gibt es

$$5! - (5! - 44) = 44$$

mögliche Auslosungen, bei denen sich keine Person selbst beschenkt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sie sind beim Einkaufen und wollen eine Getränkekiste mit $3 \times 4 = 12$ Fächern mit den Sorten Mineralwasser, Apfelsaft, Orangensaft, Cola füllen. (Hierbei unterscheiden wir nur die Sorten!) Wie viele Möglichkeiten gibt es, ...

(i) wenn beliebige Kombinationen zugelassen sind,

(ii) wenn jede Sorte mindestens einmal vorkommen muss?

Lösung zu Aufgabe 4. Zu (i): Wir haben 12 Positionen und 4 Sorten. Insgesammt also 4^{12} Möglichkeiten (hierbei wird die Aufteilung berücksichtigt). Falls die Aufteilung nicht berücksichtigt wird, so lässt sich das Problem kodieren als

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 12$$

mit $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{N}$, oder alternativ

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 16$$

mit $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 1$. Hierfür gibt es

$$\binom{15}{3}$$

Möglichkeiten, da sich dies dazu übersetzen lässt die Position (3 Stück) der Pluszeichen (15 Stück)

$$1 + +1 = 16$$

zu wählen. Zu (ii): Falls die Aufteilung berücksichtigt wird, so gilt (Komplement)

$$4^{12} - |\{\text{ein Wert tritt nicht ein}\}|$$

Per Inklusion/Exklusion folgt

$$|\{\text{ein Wert tritt nicht ein}\}| = \binom{4}{3} 3^{12} - \binom{4}{2} 2^{12} + \binom{4}{1} 1^{12}.$$

Ohne Berücksichtigung der Aufteilung: Wir haben alle möglichen Kombinationen

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 12$$

mit $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 1$ zu zählen. Dafür gibt es $\binom{11}{3}$ Möglichkeiten (vgl. i).

Zusatzaufgabe 5. Wieviele Möglichkeiten gibt es, 14 Personen in 6 Gruppen aufteilen, von denen 2 je 3 Personen und die restlichen 4 je 2 Personen enthalten?