Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Lösung zu Blatt 4**

---

1. **Aufgabe 13** *(b-adische Darstellung)* 1+1+1 Punkte

   In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung der b-adischen Darstellung einiger Zahlen (siehe hierzu auch Satz 3.7).

   (a) Bestimmen Sie die Binärdarstellung von 101.

   (b) Bestimmen Sie die Hexadezimaldarstellung von 107470.

   (c) Bestimmen Sie die Oktaldarstellung (dies bedeutet Basis 8) von 95.

   Geben Sie auch den Rechenweg an!

   Lösung:

   (a) Der Rest bei der Division von 101 durch 2 ist $\beta_0 = 1$.

$$\begin{aligned} m = (101-1)/2 = 50 &\quad\Rightarrow\quad \beta_1 = 0 \\ m = (50-0)/2 = 25 &\quad\Rightarrow\quad \beta_2 = 1 \\ m = (25-1)/2 = 12 &\quad\Rightarrow\quad \beta_3 = 0 \\ m = (12-0)/2 = 6 &\quad\Rightarrow\quad \beta_4 = 0 \\ m = (6-0)/2 = 3 &\quad\Rightarrow\quad \beta_5 = 1 \\ m = (3-1)/2 = 1 &\quad\Rightarrow\quad \beta_6 = 1 \\ m = (1-1)/2 = 0 &\quad\Rightarrow\quad \beta_7 = 0 \end{aligned}$$

   Daher ist $101 = 1100101_2$.

   (b) Der Rest bei der Division von 107470 durch 16 ist 14 und daher $\beta_0 = E$.

$$\begin{aligned} m = (107470-14)/16 = 6716 &\quad\Rightarrow\quad \beta_1 = C \\ m = (6716-12)/16 = 419 &\quad\Rightarrow\quad \beta_2 = 3 \\ m = (419-3)/16 = 26 &\quad\Rightarrow\quad \beta_3 = A \\ m = (26-10)/16 = 1 &\quad\Rightarrow\quad \beta_4 = 1 \\ m = (1-1)/16 = 0 &\quad\Rightarrow\quad \beta_5 = 0 \end{aligned}$$

   Daher ist $107470 = 1A3CE_{16}$.

   (c) Der Rest bei der Division von 95 durch 8 ist $\beta_0 = 7$.

$$\begin{aligned} m = (95-7)/8 = 11 &\quad\Rightarrow\quad \beta_1 = 3 \\ m = (11-3)/8 = 1 &\quad\Rightarrow\quad \beta_2 = 1 \\ m = (1-1)/8 = 0 &\quad\Rightarrow\quad \beta_3 = 0 \end{aligned}$$

   Daher ist $95 = 137_8$.

2. **Aufgabe 14** *(Rationale Zahlen)* 2+1+1 Punkte

Man kann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mittels folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ definieren:

$$(m,n) \sim (p,q) \quad \text{genau dann, wenn} \quad m \cdot q = n \cdot p$$

Die Äquivalenzklasse eines Elementes $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ lautet

$$[(m,n)] = \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \,:\, (p,q) \sim (m,n)\}.$$

Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Die Addition und die Multiplikation sind definiert durch

$$[(m,n)] + [(u,v)] := [(m \cdot v + u \cdot n, n \cdot v)] \text{ und } [(m,n)] \cdot [(u,v)] := [(m \cdot u, n \cdot v)]$$

für alle $m, u \in \mathbb{Z}$ und alle $n, v \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

(a) Zeigen Sie: Die Addition und die Multiplikation sind wohldefiniert, d. h. dass die Äquivalenzklassen $[(m \cdot v + u \cdot n, n \cdot v)]$ und $[(m \cdot u, n \cdot v)]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten (m,n) und (u,v) aus den Äquivalenzklassen $[(m,n)]$ und $[(u,v)]$ abhängen. Für die Multiplikation ist damit also zu zeigen, dass wenn $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ und $(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2)$ gilt, dann auch $(m_1 \cdot u_1, n_1 \cdot v_1) \sim (m_2 \cdot u_2, n_2 \cdot v_2)$. Analoges ist für die Addition zu zeigen.

(b) Zeigen Sie: Die Äquivalenzklasse $[(0,1)]$ fungiert als Nullelement und die Äquivalenzklasse $[(1,1)]$ fungiert als Einselement.

(c) Zeigen Sie: Alle Äquivalenzklassen, die von der Null verschieden sind, haben die Form $[(m,n)]$ mit $m, n \neq 0$. Weiterhin besitzen diese Äquivalenzklassen eine multiplikative Inverse.

Lösung:

(a) Für $(m_1,n_1), (m_2,n_2), (u_1,v_1), (u_2,v_2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gelte $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ und $(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2)$, d.h. $m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2$ und $u_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot u_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}(m_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot n_1) \cdot (n_2 \cdot v_2) &= (m_1 \cdot n_2) \cdot (v_1 \cdot v_2) + (u_1 \cdot v_2) \cdot (n_1 \cdot n_2) \\ &= (n_1 \cdot m_2) \cdot (v_1 \cdot v_2) + (v_1 \cdot u_2) \cdot (n_1 \cdot n_2) \\ &= (n_1 \cdot v_1) \cdot (m_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot n_2)\end{aligned}$$

und daher $(m_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot n_1, n_1 \cdot v_1) \sim (m_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot n_2, n_2 \cdot v_2)$. Damit ist die Addition wohldefiniert.

Weiter gilt

$$(m_1 \cdot u_1) \cdot (n_2 \cdot v_2) = (m_1 \cdot n_2) \cdot (u_1 \cdot v_2) = (n_1 \cdot m_2) \cdot (v_1 \cdot u_2) = (n_1 \cdot v_1) \cdot (m_2 \cdot u_2)$$

und daher $(m_1 \cdot u_1, n_1 \cdot v_1) \sim (m_2 \cdot u_2, n_2 \cdot v_2)$. Damit ist die Multiplikation wohldefiniert.

(b) Für $[(m,n)] \in \mathbb{Q}$ gilt

$$[(m,n)] + [(0,1)] = [(m \cdot 1 + 0 \cdot n, n \cdot 1)] = [(m,n)].$$

Damit fungiert $[(0,1)]$ als Nullelement.

Weiter gilt

$$[(m,n)] \cdot [(1,1)] = [(m \cdot 1, n \cdot 1)] = [(m,n)].$$

Damit fungiert $[(1,1)]$ als Einselement.

(c) Es sei $[(m,n)] \in \mathbb{Q}$ mit $[(m,n)] \neq [(0,1)]$. Dann gilt $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, also $n \neq 0$. Wäre $m = 0$, so wäre $m \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0 = n \cdot 0$ und damit $(m,n) \sim (0,1)$, also $[(m,n)] = [(0,1)]$. Damit muss auch $m \neq 0$ sein, womit das Element $[(n,m)]$ sinnvoll definiert ist. Nun gilt

$$[(m,n)] \cdot [(n,m)] = [(m \cdot n, n \cdot m)] = [(1,1)],$$

da $(m \cdot n) \cdot 1 = m \cdot n = n \cdot m = (n \cdot m) \cdot 1$, womit $(m \cdot n, n \cdot m) \sim (1,1)$ gilt. Das Inverse Element zu $[(m,n)]$ bezüglich der Multiplikation ist damit $[(n,m)]$.

3. **Aufgabe 15** *(Minimum, Maximum, Infimum und Supremum)* 1+1+1+1+1 Punkte
Entscheiden Sie in den folgenden Fällen darüber, ob die Menge M nach unten bzw. nach oben beschränkt ist und diskutieren Sie die Existenz eines Minimums, Maximums, Infimums und Supremums der Menge M in $\mathbb{Q}$.

(a) $M := \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
(b) $M := \mathbb{Z}$;
(c) $M := \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x^2 < 50\}$;
(d) $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 4\}$;
(e) $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2}{3+n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Lösung:

(a) $\mathbb{N}_0$ ist nach unten beschränkt, das Minimum (und damit auch das Infimum) ist 0, denn für alle $x \in \mathbb{N}_0$ gilt $x \geq 0$ und $0 \in \mathbb{N}_0$. $\mathbb{N}_0$ ist nicht nach oben beschränkt, denn zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gibt es nach Satz 4.6 ein $x \in \mathbb{N}_0$ mit $x > q$ und damit gibt es kein Supremum (und auch kein Maximum).

(b) $\mathbb{Z}$ ist nicht nach oben beschränkt, denn zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gibt es nach Satz 4.6 ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x > q$ und damit gibt es kein Supremum (und auch kein Maximum). $\mathbb{Z}$ ist nicht nach unten beschränkt, denn zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gibt es nach Satz 4.6 ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x > -q$, also $-x < q$, und damit gibt es kein Infimum (und auch kein Minimum).

(c) Es gilt $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x^2 < 50\} = \{-7,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7\}$ und damit ist diese Menge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Das Minimum (und damit auch das Infimum) ist gleich -7, das Maximum (und damit auch das Supremum) ist gleich 7, da $x \geq -7$ und $x \leq 7$ für alle $x \in M$ und $-7, 7 \in M$.

(d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 4\}$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Das Supremum ist gleich 2, da $x \leq 2$ für alle $x \in M$ (für $x > 2$ ist $x^2 > 4$) und es zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 2$ ein $x \in M$ mit $x > q$ gibt (für $q > 1$ wähle man $x = q + \frac{2-q}{2}$). Da aber $2 \notin M$, besitzt die Menge kein Maximum. Analog ist das Infimum gleich -2, da $x \geq -2$ für alle $x \in M$ (für $x < -2$ ist $x^2 > 4$) und es zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > -2$ ein $x \in M$ mit $x < q$ gibt (für $q < -1$ wähle man $x = q - \frac{q+2}{2}$). Da aber $-2 \notin M$, besitzt die Menge kein Minimum.

(e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2}{3+n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Das Maximum (und damit auch das Supremum) ist gleich $\frac{2}{3}$, da $\frac{2}{3+n} \leq \frac{2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\frac{2}{3} = \frac{2}{3+0} \in M$. Das Infimum ist gleich 0, da $\frac{2}{3+n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und es zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{2}{3+n} < q$ gibt (man wähle $n > \frac{2}{q} - 3$ gemäß Satz 4.6). Allerdings ist $0 \notin M$ daher besitzt die Menge kein Minimum.

4. **Aufgabe 16** *(Konvergenz, Divergenz)* 2+2 Punkte

(a) Zeigen Sie mithilfe von Definition 5.2 aus der Vorlesung, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{4n^3 + n^2}{5n^3}$$

gegen den Grenzwert $\frac{4}{5}$ konvergiert (d.h. Sie müssen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit den geforderten Eigenschaften finden).

(b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^n$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := 2^n$ nicht konvergieren.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{5\varepsilon}$ gemäß Satz 4.6. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

$$\left|\frac{4n^3 + n^2}{5n^3} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{4}{5} + \frac{1}{5n} - \frac{4}{5}\right| = \frac{1}{5n} \leq \frac{1}{5N} < \varepsilon.$$

(b) Würde die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b \in \mathbb{Q}$ konvergieren, so würden auch die Teilfolgen

$$(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = ((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)$$

und

$$(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = ((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \ldots)$$

gegen b konvergieren. Da der Grenzwert nach Satz 5.4 eindeutig ist und $(1, 1, 1, \ldots)$ gegen 1 konvergiert und $(-1, -1, -1, \ldots)$ gegen -1 konvergiert, folgt einerseits $b = 1$ und andererseits $b = -1$, was ein Widerspruch ist. Daher konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Würde die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so wäre sie nach Satz 5.6 beschränkt. Zu jedem $M > 0$ gibt es nach Satz 4.6 aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > M$ und damit $c_n = 2^n > n > M$ (vergleiche Aufgabe 12), weswegen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. Daher konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.