Lösungen zu Übungsaufgaben 02

Gruppe: Mi 08-10 SR 2, Barbara Rieß

Linus Keiser

November 8, 2023

Aufgabe 5

(a) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

Proof. Wir zeigen die Gleichheit der Mengen durch Nachweis der gegenseitigen Inklusion.

Zu zeigen: $f^{-1}(V_1 \cup V_2) \subseteq f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ und $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \subseteq f^{-1}(V_1 \cup V_2)$.

1. Inklusion: Sei $x \in f^{-1}(V_1 \cup V_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &f(x) \in V_1 \cup V_2 \\ &\qquad \Rightarrow f(x) \in V_1 \text{ oder } f(x) \in V_2 \\ &\qquad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1) \text{ oder } x \in f^{-1}(V_2) \\ &\qquad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \end{aligned}$$

2. Inklusion: Sei $x \in f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}(V_1) \text{ oder } x \in f^{-1}(V_2) \\ &\quad \Rightarrow f(x) \in V_1 \text{ oder } f(x) \in V_2 \\ &\quad \Rightarrow f(x) \in V_1 \cup V_2 \\ &\quad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1 \cup V_2) \end{aligned}$$

Da x in beiden Fällen zu $f^{-1}(V_1 \cup V_2)$ gehört, folgt die Gleichheit der Mengen:

$$f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$$

□

(b) $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$

Proof. Wir zeigen die Gleichheit der Mengen durch Nachweis der gegenseitigen Inklusion.

Zu zeigen: $f^{-1}(V_1 \cap V_2) \subseteq f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$ und $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \subseteq f^{-1}(V_1 \cap V_2)$.

1. Inklusion: Sei $x \in f^{-1}(V_1 \cap V_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&f(x) \in V_1 \cap V_2 \\
&\qquad \Rightarrow f(x) \in V_1 \text{ und } f(x) \in V_2 \\
&\qquad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1) \text{ und } x \in f^{-1}(V_2) \\
&\qquad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)
\end{aligned}$$

2. Inklusion: Sei $x \in f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&x \in f^{-1}(V_1) \text{ und } x \in f^{-1}(V_2) \\
&\quad \Rightarrow f(x) \in V_1 \text{ und } f(x) \in V_2 \\
&\quad \Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2 \\
&\quad \Rightarrow x \in f^{-1}(V_1 \cap V_2)
\end{aligned}$$

Da x in beiden Fällen zu $f^{-1}(V_1 \cap V_2)$ gehört, folgt die Gleichheit der Mengen:

$$f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$$

□

(c) $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$

Proof. Wir zeigen die Gleichheit der Mengen durch Nachweis der gegenseitigen Inklusion.

Zu zeigen: $f(U_1 \cup U_2) \subseteq f(U_1) \cup f(U_2)$ und $f(U_1) \cup f(U_2) \subseteq f(U_1 \cup U_2)$.

1. Inklusion: Sei $y \in f(U_1 \cup U_2)$. Dann existiert ein $x \in U_1 \cup U_2$, so dass $f(x) = y$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&x \in U_1 \cup U_2 \\
&\quad \Rightarrow x \in U_1 \text{ oder } x \in U_2 \\
&\quad \Rightarrow f(x) \in f(U_1) \text{ oder } f(x) \in f(U_2) \\
&\quad \Rightarrow y \in f(U_1) \cup f(U_2)
\end{aligned}$$

2. Inklusion: Sei $y \in f(U_1) \cup f(U_2)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&y \in f(U_1) \text{ oder } y \in f(U_2) \\
&\quad \Rightarrow \exists x_1 \in U_1 : f(x_1) = y \text{ oder } \exists x_2 \in U_2 : f(x_2) = y \\
&\quad \Rightarrow \exists x \in U_1 \cup U_2 : f(x) = y \\
&\quad \Rightarrow y \in f(U_1 \cup U_2)
\end{aligned}$$

Da y in beiden Fällen zu $f(U_1 \cup U_2)$ gehört, folgt die Gleichheit der Mengen:

$$f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$$

□

(d) $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$

Proof. Wir zeigen, dass jedes Element der Bildmenge von $U_1 \cap U_2$ auch in der Schnittmenge der Bildmengen von U_1 und U_2 liegt.

Zu zeigen: $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$.

Sei $y \in f(U_1 \cap U_2)$. Dann existiert ein $x \in U_1 \cap U_2$ so, dass $f(x) = y$. Da x sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt, gilt:

$$\begin{aligned}
&x \in U_1 \cap U_2 \\
&\quad \Rightarrow x \in U_1 \text{ und } x \in U_2 \\
&\quad \Rightarrow f(x) \in f(U_1) \text{ und } f(x) \in f(U_2) \\
&\quad \Rightarrow y \in f(U_1) \text{ und } y \in f(U_2) \\
&\quad \Rightarrow y \in f(U_1) \cap f(U_2)
\end{aligned}$$

Daher ist jedes Element von $f(U_1 \cap U_2)$ auch ein Element von $f(U_1) \cap f(U_2)$, und somit ist $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$ bewiesen. □

(e) Ist f injektiv, so gilt $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$

Proof. Da f injektiv ist, hat jedes Element in N höchstens ein Urbild in M. Wir zeigen die Gleichheit der Mengen durch Nachweis der gegenseitigen Inklusion.

Zu zeigen: $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$ und $f(U_1) \cap f(U_2) \subseteq f(U_1 \cap U_2)$.

Die erste Inklusion $f(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$ haben wir bereits in Teil (d) bewiesen.

Für die umgekehrte Inklusion, sei $y \in f(U_1) \cap f(U_2)$. Dann existieren $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$ so, dass $f(x_1) = y$ und $f(x_2) = y$. Da f injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$. Also liegt x_1 (welches gleich x_2 ist) sowohl in U_1 als auch in U_2, d.h. $x_1 \in U_1 \cap U_2$. Daher ist $y = f(x_1) \in f(U_1 \cap U_2)$.

Somit ist $f(U_1) \cap f(U_2) \subseteq f(U_1 \cap U_2)$ und zusammen mit der ersten Inklusion folgt die Gleichheit der Mengen:

$$f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$$

$\square$

Gegenbeispiel zur Aussage (e)

Um zu zeigen, dass auf die Injektivität von f in Teil (e) nicht verzichtet werden kann, geben wir ein Beispiel einer nicht-injektiven Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{Z}$ an, für die gilt: $f(U_1 \cap U_2) \neq f(U_1) \cap f(U_2)$.

Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x^2$. Diese Funktion ist offensichtlich nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

Wählen wir $U_1 = \{1\}$ und $U_2 = \{-1\}$, dann erhalten wir:

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $f(U_1 \cap U_2) = \emptyset$.
- $f(U_1) = \{1^2\} = \{1\}$ und $f(U_2) = \{-1^2\} = \{1\}$, also $f(U_1) \cap f(U_2) = \{1\}$.

Es folgt, dass $f(U_1 \cap U_2) = \emptyset$ nicht gleich $f(U_1) \cap f(U_2) = \{1\}$ ist. Dieses Beispiel zeigt, dass ohne die Injektivität von f die Gleichheit in Aussage (e) nicht gewährleistet ist.

Aufgabe 7

(a) Beweise zu Injektivität und Surjektivität

Satz 1.10 (Teilaussagen): Für Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ gilt:

1. Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
2. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Proof. **Teil 1:** Wir nehmen an, dass f und g surjektiv sind. Für jedes Element n in N existiert aufgrund der Surjektivität von g ein Element m in M mit $g(m) = n$. Da f ebenfalls surjektiv ist, existiert für dieses m ein Element l in L mit $f(l) = m$. Folglich gilt für die Verkettung $g \circ f$, dass $(g \circ f)(l) = g(f(l)) = g(m) = n$. Da n beliebig gewählt war, ist $g \circ f$ surjektiv.

Teil 2: Wir nehmen nun an, dass $g \circ f$ injektiv ist. Angenommen, es gibt $l_1, l_2 \in L$ mit $f(l_1) = f(l_2)$. Dann folgt $(g \circ f)(l_1) = g(f(l_1)) = g(f(l_2)) = (g \circ f)(l_2)$. Da $g \circ f$ injektiv ist, muss $l_1 = l_2$ gelten. Dies zeigt, dass f injektiv ist. □

(b) Gegenbeispiele zur Umkehrung v. Aussagen aus Teil (a)

Ziel: Wir zeigen, dass die Umkehrungen der Aussagen aus Teil (a) nicht allgemeingültig sind, indem wir geeignete Gegenbeispiele konstruieren.

1. **Gegenbeispiel für die Surjektivität:** Wir definieren die Funktionen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ wie folgt:

   - Sei $L = \{1\}$, $M = \{a, b\}$, und $N = \{\alpha\}$.
   - Die Funktion f ist gegeben durch $f(1) = a$.
   - Die Funktion g ist gegeben durch $g(a) = g(b) = \alpha$.

   Obwohl f nicht surjektiv ist, da kein Element in L auf b abgebildet wird, ist die Verkettung $g \circ f$ surjektiv, da für jedes Element in N ein Urbild in L existiert, nämlich 1.

2. **Gegenbeispiel für die Injektivität:** Wir betrachten die Mengen und Funktionen:

   - Sei $L = \{1, 2\}$, $M = \{a, b\}$, und $N = \{\alpha\}$.
   - Die Funktion f ist definiert durch $f(1) = a$ und $f(2) = b$, und ist somit injektiv.
   - Die Funktion g ist definiert durch $g(a) = g(b) = \alpha$.

   Hier ist f injektiv, aber die Verkettung $g \circ f$ ist nicht injektiv, da sowohl $f(1)$ als auch $f(2)$ auf das gleiche Element α in N abgebildet werden.

Diese Gegenbeispiele zeigen, dass die Umkehrungen der Aussagen aus Teil (a) nicht zutreffen und somit die Originalaussagen nicht umkehrbar sind.

Aufgabe 8

Gegeben ist der logische Ausdruck:

$$([\neg(A \vee B)] \oplus [C \wedge (\neg D)]) \to [A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B)]$$

(a) Belegung: $(A, B, C, D) = (1, 0, 1, 0)$

$$\begin{aligned}
\neg(A \vee B) &\Rightarrow \neg(1 \vee 0) \Rightarrow \neg 1 \Rightarrow 0 \\
C \wedge (\neg D) &\Rightarrow 1 \wedge (\neg 0) \Rightarrow 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 \\
A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B) &\Rightarrow 1 \wedge (1 \vee 0) \wedge (\neg 0) \Rightarrow 1 \wedge 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 \\
[\neg(A \vee B)] \oplus [C \wedge (\neg D)] &\Rightarrow 0 \oplus 1 \Rightarrow 1 \\
([\neg(A \vee B)] \oplus [C \wedge (\neg D)]) \to [A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B)] &\Rightarrow 1 \to 1 \Rightarrow \text{WAHR}
\end{aligned}$$

Daher ist der Wahrheitswert der Aussage für die **Belegung (a) WAHR**.

(b) Belegung: $(A, B, C, D) = (0, 1, 1, 0)$

$$\begin{aligned}
\neg(A \vee B) &\Rightarrow \neg(0 \vee 1) \Rightarrow \neg 1 \Rightarrow 0 \\
C \wedge (\neg D) &\Rightarrow 1 \wedge (\neg 0) \Rightarrow 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 \\
A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B) &\Rightarrow 0 \wedge (1 \vee 0) \wedge (\neg 1) \Rightarrow 0 \wedge 1 \wedge 0 \Rightarrow 0 \\
[\neg(A \vee B)] \oplus [C \wedge (\neg D)] &\Rightarrow 0 \oplus 1 \Rightarrow 1 \\
([\neg(A \vee B)] \oplus [C \wedge (\neg D)]) \to [A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B)] &\Rightarrow 1 \to 0 \Rightarrow \text{FALSCH}
\end{aligned}$$

Daher ist der Wahrheitswert der Aussage für die **Belegung (b) FALSCH**.