Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik II

Übungen zur Vorlesung im SS 2024 - **Präsenzblatt**

Besprechung: Mittwoch, den 17. April 2024, **KEINE ABGABE!**

---

1. **Aufgabe 1** *(Matrixpotenzen)*
Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
die Matrixpotenzen A^n für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie eine allgemeine Formel für A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

2. **Aufgabe 2** *(Matrixprodukt, Verknüpfung linearer Abbildungen)*
Es seien Abbildungen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x, \quad \mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x.$$
Bestimmen Sie für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ das Bild $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x)$ oder $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x)$ (je nachdem, welche Variante möglich ist).

3. **Aufgabe 3** *(Lineare Abbildungen und Matrizen, Kern, Injektivität, Surjektivität)*
Es sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die gegeben ist durch
$$\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)^T) := (3x_1 - x_2 + 4x_3, -2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_3)^T.$$
   (a) Schreiben Sie $\mathcal{A}$ in der Form $\mathcal{A}(x) = A \cdot x$ mit einer Matrix A.
   (b) Berechnen Sie den Kern von $\mathcal{A}$.
   (c) Ist $\mathcal{A}$ injektiv?
   (d) Ist $\mathcal{A}$ surjektiv?

4. **Aufgabe 4** *(Rang, Invertierbarkeit)*
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen. Welche der Matrizen sind invertierbar?
$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 13 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$