4 Die ganzen und die rationalen Zahlen

Um die Subtraktion und die Division unbeschränkt ausführen zu können, bedarf es der ganzen und der rationalen Zahlen. Eine der Möglichkeiten, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ einzuführen, besteht darin, auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Äquivalenzrelation zu definieren durch

$$(m,n) \sim (p,q) \quad \text{genau dann, wenn} \quad m+q = n+p.$$

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind dann definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $[(m,n)]$. Alle Paare der Form $(m,0)$ sind dann nicht äquivalent, denn aus $(m,0) \sim (p,0)$ folgt $m+0 = 0+p$. Diese Paare entsprechen den üblichen nichtnegativen Zahlen, während die (ebenfalls nicht zueinander äquivalenten) Paare $(0,n)$ den üblichen nichtpositiven Zahlen entsprechen. Der Null entspricht $(0,0)$. Die nichtnegativen bzw. nichtpositiven ganzen Zahlen ohne die Null sind die positiven bzw. negativen ganzen Zahlen. Hinter dieser Vorgehensweise steht die Idee, daß (m,n) in herkömmlicher Sichtweise der Zahl $m-n$ entspricht, und $(m,n) \sim (p,q)$ bedeutet $m-n = p-q$, d.h. die beiden Paare stellen dieselbe herkömmliche Zahl dar.

Man definiert dann einfach die Addition durch

$$[(m,n)] + [(u,v)] := [(m+u, n+v)] \quad \text{für alle } m,n,u,v \in \mathbb{N}_0$$

und kann dann verifizieren, daß dem die übliche Beziehung

$$(m-n) + (u-v) = (m+u) - (n+v)$$

entspricht und daß die Addition wohldefiniert ist. Die Multiplikation definiert man als

$$[(m,n)] \cdot [(u,v)] := [(m \cdot u + n \cdot v, m \cdot v + n \cdot u)] \quad \text{für alle } m,n,u,v \in \mathbb{N}_0,$$

weil im üblichen Sinne

$$(m-n) \cdot (u-v) = (m \cdot u + n \cdot v) - (m \cdot v + n \cdot u)$$

gilt. Jetzt brauchen wir noch die Subtraktion als neue binäre Operation. Man kann aber auch erst die Vorzeichenumkehr als einstellige Operation durch

$$-[(u,v)] := [(v,u)] \quad \text{für alle } u,v \in \mathbb{N}_0$$

definieren und dann die Subtraktion als

$$[(m,n)] - [(u,v)] := [(m,n)] + (-[(u,v)]) \quad \text{für alle } m,n,u,v \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus folgt

$$[(m,n)] - [(u,v)] = [(m+v, n+u)] \quad \text{für alle } m,n,u,v \in \mathbb{N}_0$$

und insbesondere

$$[(m,n)] + (-[(m,n)]) = [(m,n)] + [(n,m)] = [(m+n, m+n)] = [(0,0)]$$

für alle $m,n \in \mathbb{N}_0$. Man nennt das Element $-[(m,n)]$ das additive Inverse zu $[(m,n)]$. Die Vorlesung *Diskrete Mathematik* bringt weiteres hierzu, z.B. daß die ganzen Zahlen einen *kommutativen Ring mit Einselement* bilden. Für uns reicht es, daß man mit ganzen Zahlen genau wie in der Schule rechnen kann, und wir kehren zu der naiven Notation negativer Zahlen und der Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation zurück. Insbesondere schreiben wir also anstelle der Äquivalenzklasse $[(n,0)]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ einfach n, und anstelle der Äquivalenzklasse $[(0,n)]$ vermöge $[(0,n)] = -[(n,0)]$ einfach $-n$.

Sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ durch die obige Konstruktion gegeben, so kann man als nächstes die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aufbauen, und zwar wieder mit einer Äquivalenzrelation. Wir denken uns einen Bruch $\dfrac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ als äquivalent zu allen seinen Erweiterungen $\dfrac{km}{kn}$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und schreiben ihn als Äquivalenzklasse $[(m,n)]$. Die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ zwischen zwei solchen Brüchen ist dann gegeben durch

$$(m,n) \sim (p,q) \quad \text{genau dann, wenn} \quad m \cdot q = n \cdot p.$$

Dies entspricht $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ im herkömmlichen Sinn. Die Addition und die Multiplikation sind dann definiert durch

$$[(m,n)] + [(u,v)] := [(m \cdot v + u \cdot n, n \cdot v)] \quad \text{und} \quad [(m,n)] \cdot [(u,v)] := [(m \cdot u, n \cdot v)]$$

für alle $m,u \in \mathbb{Z}$ und alle $n,v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Die Äquivalenzklasse $[(0,1)]$ fungiert als Null, die Äquivalenzklasse $[(1,1)]$ als Eins. Alle Äquivalenzklassen, die von der Null verschieden sind, haben die Form $[(m,n)]$ mit $m,n \neq 0$. Sie haben eine multiplikative Inverse, nämlich $[(n,m)]$ wegen

$$[(m,n)] \cdot [(n,m)] = [(m \cdot n, n \cdot m)] = [(1,1)].$$

Die positiven rationalen Zahlen werden durch die Äquivalenzklassen der Form $[(m,n)]$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ dargestellt.

Auch mit diesen rationalen Zahlen kann man wie von der Schule gewohnt rechnen, wobei man wieder zur Standardnotation zurückkehrt, d.h. anstelle von $[(m,n)]$ den Bruch $\frac{m}{n}$ schreibt. Wir stellen die obigen Rechenregeln für Brüche auf die Standardnotation um:

$$\frac{m}{n} + \frac{u}{v} = \frac{m \cdot v + u \cdot n}{nv} \quad \text{und} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{u}{v} = \frac{m \cdot u}{n \cdot v}$$

für alle $m,u \in \mathbb{Z}$ und alle $n,v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Die Vorlesung *Diskrete Mathematik* beweist, daß die rationalen Zahlen einen *kommutativen Körper* bilden. Die allgemeinen Rechenregeln in einem kommutativen Körpern $\mathbb{K}$, wie sie für rationale Zahlen, und später dann auch für reelle und komplexe Zahlen gelten, stellen wir hier übersichtlich zusammen

1. Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Körper mit zwei Abbildungen $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$. Dabei sollte man sich hier zunächst als $\mathbb{K}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vorstellen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Es gilt

$$\begin{array}{rll} a+b = b+a & & \text{Kommutativität von } + \\ a \cdot b = b \cdot a & & \text{Kommutativität von } \cdot \\ a+(b+c) = (a+b)+c & & \text{Assoziativität von } + \\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & & \text{Assoziativität von } \cdot \\ a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) & & \text{Distributivität von } + \text{ und } \cdot \end{array}$$

   für alle $a,b,c \in \mathbb{K}$.

2. K hat zwei spezielle Elemente, die mit 0 und 1 bezeichnet werden und verschieden sind. Sie haben die Eigenschaften

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a$$

   für alle $a \in \mathbb{K}$.

3. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es genau ein Element $-a \in \mathbb{K}$ mit $a + (-a) = 0$.

4. Zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein Element $a^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

Die Existenz des inversen Elements bzgl. der Addition benutzen wir gemäß

$$a - b := a + (-b)$$

zur Definition der Subtraktion, und die Existenz des inversen Elements bzgl. der Multiplikation zur Definition der Division

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \quad \text{bzw.} \quad a/b := a \cdot b^{-1} \ .$$

Die Definition 3.6 des Potenzierens läßt sich erweitern auf die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bzw. allgemein auf kommutative Körper $\mathbb{K}$.

Definition 4.1 *Wir definieren das Potenzieren als eine Abbildung*

$$(a, n) \mapsto a^n$$

von $\mathbb{K} \times \mathbb{Z}$ *in* $\mathbb{K}$ *mit der rekursiven Definition*

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 && \textit{für alle } a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \\ a^{n+1} &:= a \cdot a^n && \textit{für alle } a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, \\ a^{-n} &:= (a^{-1})^n && \textit{für alle } a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dies impliziert die Rechenregeln

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

für alle $a \in K \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$.

Oft nutzt man eine einfache Visualisierung der natürlichen und ganzen Zahlen in Form eines *Zahlenstrahls* oder einer *Zahlengeraden*. Auch die rationalen Zahlen können in dieser Weise angeordet werden, weil wir ihnen eine Ordnung geben können. Wir erinnern an die Definition 1.5 einer Ordnungsrelation. Eine Ordnungsrelation R auf einer Menge M heißt *total* oder eine *Wohlordnung*, falls für zwei Elemente $x, y \in M$ stets eine der Relationen $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ gilt.

Bei der Einführung der ganzen Zahlen haben wir geklärt, daß wir $P := \{1, 2, \ldots\}$ als die positiven ganzen Zahlen und $\{-1, -2, \ldots\}$ als die negativen ganzen Zahlen verstehen. Durch jeweiliges Hinzufügen der Null erhalten wir die nichtnegativen und die nichtpostiven ganzen Zahlen. Durch Erweitern mit der Zahl -1 können wir eine rationale Zahl a stets auf die Form $a = p/q$ bringen mit einer positiven ganzen Zahl q. Nach Definition ist die Zahl a dann positiv bzw. negativ, falls p positiv bzw. negativ ist. Durch Hinzufügen der Null erhalten wir dann wiederum die nichtnegativen und die nichtpositiven rationalen Zahlen. Diese Begriffsbildungen lassen sich in der folgenden Definition allgemeiner fassen.

Definition 4.2 *Ein kommutativer Körper* $\mathbb{K}$ *heißt* geordnet*, wenn es einen* Positivbereich P *als Teilmenge* $P \subset \mathbb{K}$ *gibt mit den Eigenschaften*

1. *Die Mengen* P, $-P := \{-x : x \in P\}$ *und* $\{0\}$ *sind disjunkt.*
2. $\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\}$.
3. *Aus* $x, y \in P$ *folgt* $x + y \in P$ *und* $x \cdot y \in P$.

Für die rationalen Zahlen erklären wir $P := \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ ist positiv}\}$ und haben damit einen geordnet Körper.

Satz 4.3 *Die rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ *bilden einen geordneten Körper.*

Beweis. Aus der Bruchdarstellung $x = a/p$ mit natürlichen Zahlen a und p ist ersichtlich, daß aus $x > 0$ die Eigenschaft $-x < 0$ folgt. Wir müssen noch zeigen, daß aus $x > 0$ und $y > 0$ auch $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$ folgen. Wir schreiben

$$x = \frac{a}{p} \quad \text{und} \quad y = \frac{b}{q}$$

mit positiven ganzen Zahlen a, b, p, q und haben

$$x + y = \frac{a \cdot q + b \cdot p}{p \cdot q} \quad \text{und} \quad x \cdot y = \frac{a \cdot b}{p \cdot q} .$$

Hier sind Zähler und Nenner jeweils wieder positive ganze Zahlen, da die Addition und die Multiplikation $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ abbilden. □

Mit Hilfe der Begriffe positiv und negativ können wir Zahlen aus einem geordneten Körper nicht nur mit der Null vergleichen, sondern auch paarweise untereinander. In der folgenden Definition denke man sich wiederum zuächst für $\mathbb{K}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Definition 4.4 *Sei* $\mathbb{K}$ *ein geordneter kommutativer Körper mit Positivbereich* P*. Eine Zahl* $x \in \mathbb{K}$ *heißt* größer *als eine Zahl* $y \in \mathbb{K}$*, falls es ein* $z \in P$ *gibt mit* $x = y + z$*. Wir schreiben hierfür* $x > y$*. Eine Zahl* $x \in \mathbb{Q}$ *heißt* größer oder gleich *einer Zahl* $y \in \mathbb{Q}$*, falls es ein* $z \in P \cup \{0\}$ *gibt mit* $x = y + z$*. Wir schreiben hierfür* $x \geq y$*. Eine Zahl* $x \in \mathbb{K}$ *heißt* kleiner *bzw.* kleiner oder gleich *einer Zahl* $y \in \mathbb{K}$*, wenn* y größer *bzw.* größer oder gleich x *ist. Wir schreiben hierfür* $x < y$ *bzw.* $x \leq y$*.*

Wegen $x - y = x + (-y) = z + y + (-y) = z$ ist $x \geq y$ äquivalent zu $x - y \geq 0$, usw.

Satz 4.5 *Durch* $\geq$ *bzw.* $\leq$ *sind Wohlordnungen auf* $\mathbb{Q}$ *gegeben.*

Beweis. Es ist $x \geq x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, da $x + 0 = x$. Die Eigenschaften $x \geq y$ und $y \geq z$ implizieren $x = y + a$ und $y = z + b$ mit nichtnegativen a und b. Es folgt $x = z + c$ mit $c = a + b$ und c ist nichtnegativ, da die Addition und die Multiplikation $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{N}_0$ abbilden. Aus $x \geq y$ und $y \geq x$ folgt $x - y \geq 0$ und $y - x \geq 0$ und daher $x - y = 0$, da für den Positivbereich P der rationalen Zahlen $P \cap (-P) = \emptyset$ gilt. Es folgt $x = y$. Die Wohlordung ergibt sich aus $x = y + z$ mit der Setzung $z = y - x$. □

Für das Rechnen mit Ungleichungen notieren wir, daß aus $x > y$ die *Monotonie* bezüglich der Addition $x + a > y + a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ folgt und die Monotonie $x \cdot a > y \cdot a$ für alle positiven $a \in \mathbb{Q}$, sowie, falls $y > 0$, die Umkehrung $1/x < 1/y$. Der Umgang mit Ungleichungen bedarf ausgiebiger Übung.

Satz 4.6 (Axiom von Archimedes) *Für jede positive rationale Zahl* a *gibt es eine natürliche Zahl* n *mit* $a < n$*.*

Beweis. Schreibe $a = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und wähle $n = p$. □

Definition 4.7 *Eine Teilmenge* U *eines geordneten kommutativen Körpers* $\mathbb{K}$ *heißt nach oben* beschränkt *bzw. nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl* $M \in \mathbb{K}$ *gibt, so daß*

$$u \leq M \quad \textit{bzw.} \quad u \geq M \tag{4.1}$$

für alle $u \in U$*.*

Jedes Element $M \in \mathbb{K}$ *mit der Eigenschaft* (4.1) *heißt eine* obere Schranke *bzw.* untere Schranke *von* U*.*

Eine obere Schranke bzw. untere Schranke von U heißt Maximum *bzw.* Minimum *von U, wenn sie in U liegt.*

Eine obere Schranke bzw. untere Schranke M von U heißt Supremum *bzw.* Infimum *von U, wenn sie die kleinste obere Schranke bzw. die größte untere Schranke von U ist, d.h. wenn für alle oberen bzw. unteren Schranken $\tilde{M}$ von U gilt $M \leq \tilde{M}$ bzw. $M \geq \tilde{M}$.*

Eine Teilmenge von $\mathbb{K}$ heißt beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Unter einem Intervall *verstehen wir Teilmengen von $\mathbb{K}$ von der Form*

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$$

mit Zahlen $a < b$ aus $\mathbb{K}$.

Wir notieren, daß eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$, die nur endlich viele Elemente enthält, stets nach oben und nach unten beschränkt ist. In diesem Fall existieren das Maximum und das Supremun und beide stimmen miteinander überein. Entspechendes gilt für Minimum und Infimum. Jedes Maximum ist gleichzeitig Supremum und jedes Minimum gleichzeitig Infimum. Die Umkehrung hiervon gilt nicht. Den Unterschied zwischen Maximum und Supremum kann man sich etwa an den Intervallen deutlich machen. Für $[a,b) \subset \mathbb{Q}$ ist b das Supremum, aber kein Maximum.

Definition 4.8 *Zu einer Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ist* Absolutbetrag *oder kurz der* Betrag *definiert durch*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wir notieren als erstes, daß $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Satz 4.9 *Für den Absolutbetrag gelten die Regeln*

$$\begin{aligned}|x| &\geq 0,\\ |-x| &= |x|,\\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y|,\\ |x+y| &\leq |x| + |y|,\\ ||x| - |y|| &\leq |x-y|\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Die ersten drei Regeln sind unmittelbar einsichtig. Die vierte wird aus später noch klar werdenden Gründen die *Dreiecksungleichung* genannt. Zu ihrem Beweis machen wir eine Fallunterscheidung. Sind x und y beide nichtnegativ oder nichtpositiv, so gilt $|x+y| = |x| + |y|$. Sind x und y von verschiedenem Vorzeichen, so nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $|x| \geq |y|$ gilt und bekommen

$$|x+y| = |x| - |y| \leq |x| - |y| + 2 \cdot |y| = |x| + |y|.$$

Die letzte Ungleichung, die auch die zweite Dreiecksungleichung genannt wird, führen wir auf die Dreiecksungleichung zurück. Wir haben

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$$

und hieraus folgt

$$|x| - |y| \leq |x-y|.$$

Vertauschen der Rollen von x und y ergibt

$$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|,$$

und Zusammenfassen der beiden letzten Ungleichungen liefert die Behauptung. □