Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 4**

Abgabe: Donnerstag, den 23. November 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 13** *(b-adische Darstellung)* 1+1+1 Punkte

   In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung der b-adischen Darstellung einiger Zahlen (siehe hierzu auch Satz 3.7).

   (a) Bestimmen Sie die Binärdarstellung von 101.

   (b) Bestimmen Sie die Hexadezimaldarstellung von 107470.

   (c) Bestimmen Sie die Oktaldarstellung (dies bedeutet Basis 8) von 95.

   Geben Sie auch den Rechenweg an!

2. **Aufgabe 14** *(Rationale Zahlen)* 2+1+1 Punkte

   Man kann die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mittels folgender Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ definieren:

   $$(m,n) \sim (p,q) \quad \text{genau dann, wenn} \quad m\cdot q = n\cdot p$$

   Die Äquivalenzklasse eines Elementes $(m,n) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ lautet

   $$[(m,n)] = \{(p,q) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \,:\, (p,q) \sim (m,n)\}.$$

   Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

   Die Addition und die Multiplikation sind definiert durch

   $$[(m,n)] + [(u,v)] := [(m\cdot v + u\cdot n, n\cdot v)] \text{ und } [(m,n)]\cdot[(u,v)] := [(m\cdot u, n\cdot v)]$$

   für alle $m,u \in \mathbb{Z}$ und alle $n,v \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

   (a) Zeigen Sie: Die Addition und die Multiplikation sind wohldefiniert, d. h. dass die Äquivalenzklassen $[(m\cdot v+u\cdot n, n\cdot v)]$ und $[(m\cdot u, n\cdot v)]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten (m,n) und (u,v) aus den Äquivalenzklassen $[(m,n)]$ und $[(u,v)]$ abhängen. Für die Multiplikation ist damit also zu zeigen, dass wenn $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$ und $(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2)$ gilt, dann auch $(m_1\cdot u_1, n_1\cdot v_1) \sim (m_2\cdot u_2, n_2\cdot v_2)$. Analoges ist für die Addition zu zeigen.

   (b) Zeigen Sie: Die Äquivalenzklasse $[(0,1)]$ fungiert als Nullelement und die Äquivalenzklasse $[(1,1)]$ fungiert als Einselement.

   (c) Zeigen Sie: Alle Äquivalenzklassen, die von der Null verschieden sind, haben die Form $[(m,n)]$ mit $m,n \neq 0$. Weiterhin besitzen diese Äquivalenzklassen eine multiplikative Inverse.

3. **Aufgabe 15** *(Minimum, Maximum, Infimum und Supremum)* 1+1+1+1+1 Punkte
Entscheiden Sie in den folgenden Fällen darüber, ob die Menge M nach unten bzw. nach oben beschränkt ist und diskutieren Sie die Existenz eines Minimums, Maximums, Infimums und Supremums der Menge M in $\mathbb{Q}$.

   (a) $M := \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
   (b) $M := \mathbb{Z}$;
   (c) $M := \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x^2 < 50\}$;
   (d) $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 < 4\}$;
   (e) $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2}{3+n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$.

4. **Aufgabe 16** *(Konvergenz, Divergenz)* 2+2 Punkte

   (a) Zeigen Sie mithilfe von Definition 5.2 aus der Vorlesung, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{4n^3 + n^2}{5n^3}$$

   gegen den Grenzwert $\frac{4}{5}$ konvergiert (d.h. Sie müssen zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit den geforderten Eigenschaften finden).

   (b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^n$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := 2^n$ nicht konvergieren.