6 Die reellen Zahlen

Wir bezeichnen zwei Cauchyfolgen (a_n) und (b_n) aus $\mathbb{Q}$ als äquivalent, in Zeichen

$$(a_n) \sim (b_n),$$

wenn

$$|a_n - b_n| \to 0, \quad n \to \infty,$$

d.h. wenn die Folge $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist. Diese Relation ist reflexiv, da $(a_n - a_n)$ für jede Folge (a_n) eine Nullfolge ist. Die Relation ist symmetrisch, denn mit $(a_n - b_n)$ ist auch $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge. Und sie ist transitiv, da als Konsequenz der Dreiecksungleichung

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

aus $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n)$ auch $(a_n) \sim (c_n)$ folgt. Wir notieren ausdrücklich, daß jede Folge, die durch Abändern von endlich vielen Elementen aus einer Cauchyfolge (a_n) hervorgeht, zu (a_n) äquivalent ist.

Definition 6.1 *Wir definieren die reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *als die Menge der Äquivalenzklassen* $[(a_n)]$ *von Cauchyfolgen aus* $\mathbb{Q}$*.*

Wir haben drei Ziele. Erstens wollen wir $\mathbb{R}$ zu einem kommutativen Körper machen, zweitens wollen wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ interpretieren und drittens wollen wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Zunächst erklären wir eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ durch

$$[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)] \quad \text{und} \quad [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)].$$

Zunächst müssen wir nachweisen, daß dies eine korrekte Definition ist. Dazu ist erstens zu zeigen, daß mit a_n und b_n auch $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ Cauchyfolgen sind (vgl. Satz 5.4). Zweitens müssen wir zeigen, daß die Definition unabhängig ist von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen. Hierzu ist zu verifizieren, daß aus $(a_n) \sim (\tilde{a}_n)$ und $(b_n) \sim (\tilde{b}_n)$ auch $(a_n + b_n) \sim (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n)$ und $(a_n \cdot b_n) \sim (\tilde{a}_n \cdot \tilde{b}_n)$. Dies sei als Übung überlassen.

Satz 6.2 *Die Menge* $\mathbb{R}$ *ist ein kommutativer Körper mit der Äquivalenzklasse* $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ *als Nullelement und der Äquivalenzklasse* $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ *als Einselement.*

Beweis. Auf den langwierigen Nachweis dafür, daß sich die Rechenregeln im Körper von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ vererben, wollen wir verzichten. Wir befassen uns lediglich mit den inversen Elementen. Das inverse Element zu $[(a_n)]$ bezüglich der Addition ist offensichtlich durch $[(-a_n)]$ gegeben.

Sei $[(a_n)]$ verschieden von dem Nullelement in $\mathbb{R}$. Wir zeigen zuerst, daß es ein $\delta > 0$ aus $\mathbb{Q}$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n| \geq \delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Dazu gehen wir indirekt vor und nehmen an, diese Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ und $|a_{n_k}| < 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Hierzu gehen wir induktiv vor. Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_1}| < 1$, denn andrenfalls wäre $|a_n| \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Nun nehmen wir an, die Folge (n_k) sei bis zu einem $k \in \mathbb{N}$ konstruiert. Dann gibt es ein $n_{k+1} > n_k$ mit $|a_{n_{k+1}}| < 1/(k+1)$, denn andrenfalls wäre $|a_n| \geq 1/(k+1)$ für alle $n \geq n_k+1$. Inbesondere haben wir $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$, und daher gibt es ein $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \geq K(\varepsilon)$. Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$. Wählen wir nun ein $k \geq K(\varepsilon)$ mit $n_k \geq N(\varepsilon)$, so erhalten wir

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$, d.h. die Folge (a_n) ist selbst Nullfolge im Widerspruch zu $[(a_n)] \neq 0$.

Die Folge $(\tilde{a}_n)$ mit

$$\tilde{a}_n := \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}, & \text{falls } a_n \neq 0, \\[2ex] 0, & \text{falls } a_n = 0, \end{cases}$$

ist analog zu Satz 5.5 eine Cauchyfolge. Für alle $n \geq N_\delta$ gilt $a_n \tilde{a}_n = 1$. Somit haben wir

$$[(a_n)] \cdot [(\tilde{a}_n)] = [(a_n \cdot \tilde{a}_n)] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}],$$

d.h. wir haben mit $[(\tilde{a}_n)]$ das inverse Element von $[(a_n)]$ bzgl. der Multiplikation. $\square$

Als nächstes führen wir eine Wohlordnung ein auf den reellen Zahlen.

Definition 6.3 *Eine Cauchyfolge* (a_n) *aus* $\mathbb{Q}$ *heißt positiv, wenn es ein* $\delta > 0$ *aus* $\mathbb{Q}$ *und ein* $N_\delta \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $a_n \geq \delta$ *für alle* $n \geq N_\delta$*.*

Satz 6.4 *Ist die Cauchyfolge* (a_n) *aus* $\mathbb{Q}$ *positiv und* $(a_n) \sim (b_n)$*, so ist auch* (b_n) *positiv.*

Beweis. Aus $|a_n - b_n| \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Existenz eines $N_\delta^* \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b_n| < \delta/2$ für alle $n \geq N_\delta^*$. Dann folgt $b_n > a_n - \delta/2 \geq \delta/2$ für alle $n \geq \max\{N_\delta, N_\delta^*\}$. □

Dieser Satz ermöglicht die folgende Definition und die Aussage des folgenden Satzes, auf dessen Beweis wir verzichten.

Definition 6.5 *Eine reelle Zahl* $[(a_n)]$ *heißt positiv, in Zeichen* $[(a_n)] > 0$*, wenn die Cauchyfolge* (a_n) *positiv ist.*

Satz 6.6 *Die reellen Zahlen bilden einen geordneten kommutativen Körper.*

Beweis. An Hand der Definitionen ist unmittelbar einsichtig, daß für positive $[(a_n)]$ und $[(b_n)]$ auch $[(a_n)] + [(b_n)]$ und $[(a_n)] \cdot [(b_n)]$ positiv sind. □

Wir notieren ausdrücklich, daß mit der Definition von positiven reellen Zahlen automatisch auch die negativen reellen Zahlen sind sowie eine Wohlordnung, d.h. die Relationen größer und kleiner analog zu Definition 4.4. Analog zu Definition 4.8 können wir auch den Absolutbetrag von reellen Zahlen erklären durch

$$|[(a_n)]| := \begin{cases} [(a_n)], & \text{falls } [(a_n)] \geq 0, \\ \\ -[(a_n)], & \text{falls } [(a_n)] < 0. \end{cases}$$

Offenbar gilt dann dann

$$|[(a_n)]| = [(|a_n|)].$$

Damit stehen uns dann automatisch in den reellen Zahlen die Begriffe Konvergenz und Cauchyfolgen und alle Ergebnisse aus dem vorangegangen Abschnitt zu Folgen zur Verfgüng.

Unser Ziel war es, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu erweitern. Dabei haben wir mit $\mathbb{R}$ einen geordneten Körper geschaffen, dessen Elemente vollkommen andersartige Objekte sind. Daher müssen wir die rationalen Zahlen in geeigneter Weise einbetten. Dies geschieht durch die Abbildung

$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto F(a) := [(a)],$$

d.h. die rationale Zahl a wird abgebildet auf die Äquivalenzklasse aller zu der konstanten Folge $n \mapsto a, n \in \mathbb{N}$, äquivalenten Folgen. Diese Abbildung ist injektiv, denn $F(a) = F(b)$ impliziert $a = b$, und F ist zusammen mit ihrer Inversen $F^{-1} : F(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ mit den Körper- und Ordnungsstrukturen in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ verträglich im folgenden Sinn. Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$F(a+b) = F(a) + F(b),$$

$$F(a \cdot b) = F(a) \cdot F(b),$$

$$a < b \Rightarrow F(a) < F(b).$$

Falls $u, v \in F(\mathbb{Q})$, gilt

$$F^{-1}(u+v) = F^{-1}(u) + F^{-1}(v),$$

$$F^{-1}(u \cdot v) = F^{-1}(u) \cdot F^{-1}(v),$$

$$u < v \Rightarrow F^{-1}(u) < F^{-1}(v).$$

Daher können wir $\mathbb{Q}$ und $F(\mathbb{Q})$ miteinander identifizieren, d.h. als im Sinne der Körper- und Ordnungsstrukturen nicht unterscheidbar ansehen. Aus diesem Grund kehren wir zu der Standardnotation zurück und bezeichnen die reellen Zahlen in gleicher Weise wie bislang die rationalen Zahlen mit einfachen Buchstaben.

Satz 6.7 *Für jede reelle Zahl $a = [(a_n)]$ gilt $F(a_n) \to a$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive rationale Zahl ε^* gibt mit $F(\varepsilon^*) < \varepsilon$. Da ε positiv ist, ist jede zugehörige Cauchyfolge $\varepsilon = [(\varepsilon_n)]$ positiv, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ aus $\mathbb{Q}$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon_n \geq \delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Dann sind die Cauchyfolgen $(\epsilon_n - \delta/2)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varepsilon^*)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon^* := \delta/2$ ebenfalls positiv,

Wir schließen daraus, daß $F(\varepsilon^*) = [(\varepsilon_n^*)]$ und $\varepsilon - F(\varepsilon^*)$ positiv sind.

Da (a_n) Cauchyfolge aus $\mathbb{Q}$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon^*}{2}$$

für alle $m, n \geq N$. Für festgehaltenes $n \geq N$ betrachten wir die Folge

$$b_m := \varepsilon^* - |a_m - a_n|, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Mit der Dreiecksungleichung bestätigt man, daß (b_m) eine Cauchyfolge und positiv ist, d.h. wir haben $[(b_m)] > 0$ und somit

$$|[(a_m - a_n)_{m\in\mathbb{N}}]| = [(|a_m - a_n)_{m\in\mathbb{N}}|] < [(\varepsilon^*)_{m\in\mathbb{N}}] < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$|a - F(a_n)| = |[(a_m)_{m\in\mathbb{N}}] - [(a_n)_{m\in\mathbb{N}}]| = |[(a_m - a_n)_{m\in\mathbb{N}}]| < \varepsilon.$$

Da $n \geq N$ beliebig war, haben wir $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = a$ in $\mathbb{R}$. □

Sei (c_n) eine konvergente Folge (c_n) aus $\mathbb{Q}$ mit Grenzelement $c \in \mathbb{Q}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren dazu $\varepsilon^* \in \mathbb{Q}$ wie im Beweis von Satz 6.7. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|c_n - c| < \varepsilon^*$ für alle $n \geq N$. Da die Abbildung F die Körper- und Ordnungsstruktur erhält, folgt $|F(c_n) - F(c)| < F(\varepsilon^*) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also gilt auch Konvergenz $F(c_n) \to F(c)$ für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$.

Satz 6.8 $\mathbb{R}$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei (a_n) eine Cauchyfolge aus $\mathbb{R}$. Nach Satz 6.7, angewandt auf einen Repräsentanten für a_n, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{a}_n \in \mathbb{Q}$, so daß

$$|a_n - F(\tilde{a}_n)| < F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |F(\tilde{a}_n) - F(\tilde{a}_m)| &\leq |F(\tilde{a}_n) - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - F(\tilde{a}_m)| \\ &< F\left(\frac{1}{n}\right) + |a_n - a_m| + F\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Daher ist $(F(\tilde{a}_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und folglich $(\tilde{a}_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$. Somit erzeugt $(\tilde{a}_n)$ ein $a \in \mathbb{R}$. Nach Satz 6.7 wissen wir, daß $F(\tilde{a}_n) \to a$ für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$. Dann folgt aus

$$|a - a_n| \leq |a - F(\tilde{a}_n)| + |F(\tilde{a}_n) - a_n| \leq |a - F(\tilde{a}_n)| + F\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

auch die Konvergenz $a_n \to a$ für $n \to \infty$. □

Abschließend befassen wir uns mit der Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbruch. Dabei reicht es, den Fall $a \geq 0$ zu betrachten. Wir bestimmen zunächst eine nichtnegative ganze Zahl a_0 mit $a_0 \leq a < a_0 + 1$. Diese können wir gemäß Satz 3.7 im Dezimalsystem darstellen. Daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es sei $0 \leq a < 1$ Dann bestimmen wir die Folge β_{-n} aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$ rekursiv aus den Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{-k} 10^{-k} \leq a < \sum_{k=1}^{n} \beta_{-k} 10^{-k} + 10^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \beta_{-k} 10^{-k}$$

gilt dann

$$a_n \leq a < a_n + 10^{-n} \tag{6.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen

$$|a_n - a_m| \leq 9 \sum_{k=m+1}^{n} 10^{-k} < 10^{-m}$$

für alle $n > m$ ist (a_n) eine Cauchyfolge und somit konvergent in $\mathbb{R}$. Aus (6.1) folgt für den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

siehe Satz 8.4. Auf diese Weise haben wir eine Dezimaldarstellung gewonnen, die die reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$ als Reihe

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} 10^{-k}$$

bzw.

$$a = \beta_{-1} \beta_{-2} \beta_{-3} \ldots$$

auffaßt.

Definition 6.9 *Eine Menge M heißt* abzählbar, *wenn es eine bijektive Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ gibt.*

Satz 6.10 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar,* $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ zeigen wir mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren.* Dazu schreiben wir alle Brüche p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$ in ein Rechteckschema, so daß alle Brüche mit dem gleichen Nenner in derselben Zeile und alle Brüche mit dem gleichen Zähler in derselben Spalte stehen. Von den Diagonalen von links unten nach rechts oben stehen dann jeweils Brüche mit der gleichen Summe aus Zähler und Nenner. Wir durchlaufen die Elemente des Rechteckschemas nun längs dieser Diagonalen und nummerieren sie durch, wobei die Zahlen ausgelassen werden, die schon in anderer Darstellung durchlaufen worden sind.

Für die Nichtabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ reicht es, das Intervall $[0, 1]$ zu betrachten. Wir nehmen an, es sei $[0, 1] = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit Dezimaldarstellungen

$$z_n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k,n} 10^{-k}.$$

Wir wählen eine Zahlenfolge α_{-k} aus $\{0, 1, \ldots, 8\}$ (die 9 lassen wir aus, um Nichteindeutigkeitsprobleme zu umgehen!) mit der Eigenschaft

$$\alpha_{-k} \neq \beta_{-k,k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} 10^{-k}.$$

eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$, die mit keiner der z_n, $n \in \mathbb{N}$, übereinstimmt. □

Neben der hier gewählten Einführung der reellen Zahlen gibt es noch andere Zugänge, insbesondere die nach Dedekind benannten Schnitte oder Intervallschachtelungen. Wir haben den Weg über die Äquivalenzklassen gewählt wegen der bestehenden Erweiterungsmöglichkeiten dieses Zugangs in anderen Bereichen der Mathematik und weil wir uns auf diese Weise mit dem wichtigen Konzept der Folgen und deren Konvergenz beschäftigen konnten.

Die vielen Beweise, die wir bei der Einführung der reellen Zahlen ausgelassen haben, können (in leicht veränderter Notation) nachgelesen werden z.B. in Endl, K. und Luh, W.: *Analysis I.* Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden 1977.