5 Zahlenfolgen

Die rationalen Zahlen sind nicht reichhaltig genug, um etwa die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen, wie wir aus Satz 2.2 wissen. Um dieses Defizit zu beseitigen, müssen wir zur Einführung der reellen Zahlen etwas weiter ausholen. Dabei gehen wir so allgemein vor, daß die Begriffsbildungen in der noch zu definierenden Menge der reellen Zahlen gültig bleiben. Dazu sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Zahlenkörper mit Nullelement 0 und Einselement 1, etwa die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Definition 5.1 *Eine* Zahlenfolge *bzw. kurz eine* Folge *in* $\mathbb{K}$ *ist eine Abbildung von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{K}$. *Wir verwenden die Schreibweise*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{oder kurz} \quad (a_n)$$

anstelle der für Abbildungen üblichen Form $n \mapsto a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *und fassen die Folge auch auf als eine Teilmenge von* $\mathbb{K}$. *Die Zahlen* $a_n \in \mathbb{K}$ *heißen die* Glieder *der Folge.*

Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft* $n_k < n_{k+1}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann heißt die Folge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 5.2 *Eine Zahlenfolge* (a_n) *heißt* konvergent*, wenn es ein* $a \in \mathbb{K}$ *gibt derart, daß zu jedem* $\varepsilon > 0$ *aus* $\mathbb{K}$ *eine natürliche Zahl* $N(\varepsilon)$ *existiert mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. *Wir nennen die Folge* (a_n) *konvergent gegen das* Grenzelement *oder den* Limes a *und schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{oder} \quad a_n \to a, \quad n \to \infty.$$

(Das Symbol ∞ *steht dabei für Unendlich.) Eine konvergente Folge heißt* Nullfolge*, wenn sie gegen das Nullelement* $0 \in \mathbb{K}$ *konvergiert. Eine nicht konvergente Folge nennen wir* divergent*.*

Die Definition faßt logisch fundiert die umgangssprachlich formulierte Eigenschaft, daß sich die Folgenglieder a_n dem Grenzwert a immer mehr annähern.

Die Zahlenfolge

$$a_n := \frac{1}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

aus $\mathbb{Q}$ ist eine Nullfolge. Denn zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.6 eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > 1/\varepsilon$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Satz 5.3 *Sei $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ und $1 + a > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die* Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Beweis. Induktionsanfang aus $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ und Induktionsschritt durch

$$(1 + a)^{n+1} > (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a$$

liefert die Behauptung. □

In $\mathbb{Q}$ ist die geometrische Zahlenfolge

$$a_n := q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Nullfolge, falls $|q| < 1$. Für $q = 0$ ist die Folge trivialer Weise eine Nullfolge. Für $q \neq 0$ setzen wir $\delta := 1/|q| - 1$ und haben

$$|q| = \frac{1}{1 + \delta}$$

mit $\delta > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + \delta)^n} < \frac{1}{1 + n\delta} < \frac{1}{n\delta} .$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir nun nach Satz 4.6 ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > 1/(\delta\varepsilon)$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\delta n} \leq \frac{1}{\delta N} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Satz 5.4 *Das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{K}$ nach Definition der Konvergenz ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_2$. Für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ folgt daraus mit der Dreiecksungleichung

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

Also haben wir $|a-b| < 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Die Annahme $|a-b| > 0$ führt durch Wahl von $\varepsilon = |a - b|/4$ auf $|a - b| < |a - b|/2$ und somit den Widerspruch $2 < 1$. Folglich muß $|a - b| = 0$ und daher $a = b$. □

Satz 5.5 *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten a und b. Dann sind mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch die Zahlenfolgen $(\alpha a_n + \beta b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ konvergent mit den Grenzwerten $\alpha a + \beta b$ und $a \cdot b$. Falls für alle Glieder $a_n \neq 0$ und das Grenzelement $a \neq 0$ gilt, so ist auch die Folge $(1/a_n)$ konvergent mit dem Grenzelement $1/a$.*

Beweis. Wir beweisen nur die letzte Aussage. Zunächst erhalten wir durch Wahl von $\varepsilon = |a|/2$ in der Konvergenz von $a_n \to a$ für $n \to \infty$ die Ungleichung $|a - a_n| \leq |a|/2$ für alle $n \geq N_0$ mit einem $N_0 \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt mit Hilfe der zweiten Dreiecksungleichung

$$\frac{1}{2}\,|a| \leq |a| - |a - a_n| \leq \big|\,|a| - |a - a_n|\,\big| \leq |a_n|$$

für alle $\geq N_0$. Ferner gibt es wegen der Konvergenz $a_n \to a$ für $n \to \infty$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\,|a|^2 \varepsilon$$

für alle $n \geq N_1$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n a|} \leq \frac{2|a - a_n|}{|a|^2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N := \max\{N_0, N_1\}$. □