Lösungen zu Übungsblatt 4.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(i) Für $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n > m$ zeige man, dass für jede Abbildung $f\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$ zwei verschiedene Zahlen $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, n\}$ existieren so, dass $f(k_1) = f(k_2)$.

(ii) Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$ und n sei ungerade. Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass das Produkt $(a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$ gerade ist.

Lösung zu Aufgabe 1. Zu (i): Wir haben n Werte $f(1), ..., f(n)$ aus dem Bereich $\{1, \ldots, m\}$. Da $m < n$ gilt, kann es nicht sein, dass all diese Werte paarweise verschieden sind. Mit anderen Worten, es existieren verschiedene Zahlen $k_1, k_2 \in \{1, n\}$ mit $f(k_1) = f(k_2)$. (5 Punkte)

Zu (ii): Wären alle Faktoren ungerade, so wäre $a_1, a_3, \ldots, a_n \in \{2, 4, \ldots, n-1\}$. Dies ist jedoch nicht möglich: Setze

$$f : \{1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}\} \to \{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$$

vermöge $f(i) = a_{2i-1}/2$. Nach (i) existieren verschiedene ungerade Zahlen k_1, k_2 mit $a_{k_1} = a_{k_2}$. Dies steht in Widerspruch dazu, dass die Werte $a_1, a_3, \ldots, a_n$ verschieden sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** In der Fußball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften, davon seien A, B und C drei beliebige, paarweise verschiedene Mannschaften.

(i) Wie viele mögliche Tabellenkonstellationen gibt es?

(ii) Wie viele verschiedene Besetzungen der ersten sechs Plätze sind möglich?

(iii) Angenommen wir wissen, dass A ist eine der letzten drei Mannschaften ist und B vor C liegt. Wie viele mögliche Konstellationen erfüllen dies?

(iv) Geben Sie Bedingungen an Mannschaften und deren Plazierungen an, sodass es genau $6! \cdot 12!$ Konstellationen gibt, welche diesen Bedingungen genügen.

Lösung zu Aufgabe 2. Lösung zu (i). Es gibt 18! Permutationen der 18 Teams, die auftreten können.

Erläuterung: Anschaulich können wir die Tabelle von vorne auffüllen. Dann haben wir für den ersten Platz 18 mögliche Teams, für den zweiten verbleiben dann 17, für den dritten noch 16 etc. so dass sich insgesamt $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cdots \cdot 1 = 18!$ mögliche Konstellationen ergeben. (2.5 Punkte)

Lösung zu (ii). Es gibt $\frac{18!}{12!}$ Besetzungen der ersten sechs Plätze.

Erläuterung: Für den ersten Platz kommen 18 Teams in Frage, für den zweiten verbleiben dann $17, \ldots$ und für den sechsten noch 13. Insgesamt gibt es also $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{18!}{12!}$ mögliche Besetzungen. (2.5 Punkte)

Alternativ: Bei jeder der 18! Besetzungen, können wir die letzten 12 Plätze permutieren ohne die ersten sechs zu verändern. Bei jeweils 12! sind daher die ersten sechs Plätze gleich.

Lösung zu (iii). Für A gibt es drei Möglichkeiten, auf einem der letzten drei Plätze zu landen. In jedem der drei Fälle gibt es dann 17! Möglichkeiten, die anderen Teams auf die verbleibenden 17 Plätze verteilen können. Dabei gibt es genau so viele Konstellationen, wo B vor C landet, wie Konstellationen, wo C vor B landet, da diese immer in Paaren auftreten, bei denen alle Teams gleich liegen und nur B und C vertauscht sind. Von den 17! Möglichkeiten sind also genau $\frac{17!}{2}$ gut. Da dies für jede der drei möglichen Positionen von A zutrifft, gibt es also insgesamt $3 \cdot \frac{17!}{2}$ Konstellationen, die der Bedingung genügen. (2.5 Punkte)

Lösung zu (iv). Die Anzahl der Konstellationen, in denen meine sechs Lieblingsteams auf den ersten sechs Plätzen landen ist $6! \cdot 12!$, denn es gibt 6! Möglichkeiten, meine sechs Lieblingsteams auf die ersten sechs Plätze zu verteilen und dann 12! Möglichkeiten die restlichen 12 Teams auf die verbleibenden 12 Plätze zu verteilen. (2.5 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Eine Klausur wird von 250 Studierenden geschrieben. Wie viele mögliche Verteilungen gibt es, wenn

- die Noten $1,0$ und $4,0$ je 10-mal vergeben werden,
- die Noten $1,3$ und $3,7$ je 15-mal vergeben werden,
- die Noten $1,7$ und $3,3$ je 25-mal vergeben werden,
- die Noten $2,0$ und $3,0$ je 35-mal vergeben werden und
- die Noten $2,3$ und $2,7$ je 40-mal vergeben werden?

Lösung zu Aufgabe 3. Von den 250 Studierenden wählen wir 10 Studis aus, welchen wir eine $1,0$ geben. Hierfür gibt es $\binom{250}{10}$ mögliche Wahlen. Von den verbleibenden 240 wählen wir dann 10 und geben diesen eine $4,0$. Hier gibt es dann $\binom{240}{10}$ Möglichkeiten. Genauso wählen wir 15 von den verbleibenden 230 für die $1,3$ und 15 von den verbleibenden 215 für die $3,7$, dann 25 von den verbleibenden 200 für die $1,7$ und 25 von 175 für die $3,3$, dann 35 von 150 für die $2,0$ und 35 von 115 für die $2,3$ und schließlich 40 von 80 für die $2,3$. Die restlichen 40 bekommen folglich die $2,7$.

Nun multiplizieren wir das alles zusammen und erhalten die Gesamtzahl der möglichen Verteilungen (10 Punkte),

$$\binom{250}{10}\binom{240}{10}\binom{230}{15}\binom{215}{15}\binom{200}{25}\binom{175}{25}\binom{150}{35}\binom{115}{35}\binom{80}{40}$$

Alternativ: Würde jeder Student eine andere Note bekommen, gäbe es insgesamt $250!$ mögliche Verteilungen. Da nun die Leute mit der selben Note untereinander ihre Noten tauschen können, ohne dass sich etwas ändert, sind hiervon jeweils $10! \cdot 10! \cdot 15! \cdot 15! \cdot 25! \cdot 25! \cdot 35! \cdot 35! \cdot 40! \cdot 40!$ Verteilungen gleich. Übrig bleiben also

$$\frac{250!}{10! \cdot 10! \cdot 15! \cdot 15! \cdot 25! \cdot 25! \cdot 35! \cdot 35! \cdot 40! \cdot 40!}$$

verschiedene Verteilungen der Noten. (Das ist die selbe Anzahl wie oben).

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Wir betrachten ein Schachbrett mit 64 quadratischen Feldern, angeordnet als 8×8 Quadrat, und die 16 schwarzen Figuren (8 Bauern, jeweils 2 Springer, Läufer und Türme, eine Dame und ein König). Jede Figur wird nun auf einem der 64 Feldern platziert.

- Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 16 Figuren auf die ersten beiden Reihen des Schachbretts zu stellen?
- Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Figuren auf dem gesamten Schachbrett zu verteilen?

Lösung zu Aufgabe 4. Lösung zu (i). Die Anzahl der möglichen Stellungen ist

$$\frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Erläuterung 1: Wären alle Figuren unterschiedlich, gäbe es $16!$ Stellungen. Da wir jedoch die 2 Springer untereinander permutieren können, ohne die Stellung zu ändern, sind davon jeweils $8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ gleich und es bleiben $\frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$ verschiedene Stellung übrig.

Erläuterung 2: Wir wählen zunächst 8 der 16 Felder aus, dafür gibt es

$$\binom{16}{8}$$

Möglichkeiten. Auf jedes dieser Felder setzen wir einen Bauern. Dann wählen wir von den noch freien 8 Feldern zwei aus, und setzen dort Türme hin, hierfür gibt es $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten. Auf zwei der verbleibenden 6 setzen wir dann Läufer, hier gibt es $\binom{6}{2}$, dann auf der verbleibenden 2 vier Springer, auf einen der verbleibenden zwei die Dame und auf das letzte Feld muss dann der König gestellt werden. Insgesamt gibt dies $\binom{16}{8}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}$ Möglichkeiten. Schreiben wir die Binomialkoeffizienten aus, ergibt sich die Formel von oben.

Lösung zu (ii). In diesem Fall ist die Anzahl der möglichen Stellungen gleich

$$\binom{64}{16} \cdot \frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \binom{64}{16}\binom{16}{8}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = \binom{64}{8}\binom{56}{2}\binom{54}{2}\binom{52}{2}\binom{50}{1}\binom{49}{1}.$$

Erläuterung: Wir wählen zunächst die 16 Felder, auf denen die Figuren landen sollen, dafür gibt es $\binom{64}{16}$ Möglichkeiten. Dann können wir die Figuren auf den Felder platzieren, wobei es gerade die in (i) berechnete Anzahl an Möglichkeiten gibt.