Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 3**

Abgabe: Donnerstag, den 16. November 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 9** *(Logik)* 2+3 Punkte

   (a) Verifizieren Sie anhand von Wahrheitstabellen, dass die Aussagen

   i. $x \to y$ und $\neg(x \wedge \neg y)$,   ii. $x \leftrightarrow y$ und $(x \to y) \wedge (y \to x)$

   übereinstimmen.

   (b) Es soll nun der *Sheffer*-Operator (auch NAND-Operator genannt) betrachtet werden. Für zwei Aussagen x und y ist der Sheffer-Operator $x|y$ wie folgt definiert:

x	y	$x\|y$
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	1

   Stellen Sie die logischen Operationen

   $$\neg x, \quad x \wedge y, \quad x \vee y, \quad x \to y, \quad x \leftrightarrow y$$

   nur mithilfe des Sheffer-Operators dar.

   Hinweis: NAND bedeutet „**n**ot **and**“. Der Sheffer-Operator ist also die Negation der Konjunktion, $x|y$ bedeutet also $\neg(x \wedge y)$.

   Motivation: Da alle logischen Operationen nur mit Hilfe des Sheffer-Operators darstellbar sind, lassen sich logische Schaltungen nur mit einem einzigen Schaltelement realisieren.

2. **Aufgabe 10** *(Beweismethoden)* 1+2+2 Punkte
   Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Ist $x \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar, so ist auch x^2 durch 3 teilbar ist (direkter Beweis).

   (b) Ist für $y \in \mathbb{Z}$ die Zahl y^2 durch 3 teilbar, so ist auch y durch 3 teilbar (indirekter Beweis).

   (c) $\sqrt{3}$ ist irrational, d.h. es existiert keine rationale Zahl r mit der Eigenschaft $r^2 = 3$ (indirekter Beweis).

3. **Aufgabe 11** *(Vollständige Induktion)* 3 Punkte

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Summenformel für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4. **Aufgabe 12** *(Potenzen)* 3 Punkte

   Finden Sie das kleinste $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ für das $2^M > M^2$ gilt und beweisen Sie die folgende Aussage:

$$2^n > n^2 \quad \forall n \geq M$$