3 Die natürlichen Zahlen

Zahlen spielen in der Mathematik eine wesentliche Rolle. Wir unterscheiden

1. die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots, \}$,
2. die ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \}$,
3. die rationalen Zahlen (Brüche aus ganzen Zahlen),
4. die reellen Zahlen, bei denen irrationale und transzendente Zahlen wie $\sqrt{2}$ und π hinzukommen,
5. die komplexen Zahlen, die außerdem eine Zahl i enthalten mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.

Das Wichtigste bei den Zahlen sind die Rechenoperationen $+, -, \cdot, /$ und die dafür geltenden Rechenregeln. Alles Zählen, Messen und Bewerten in anderen Wissenschaften, wie z.B. das Berechnen der Kontostände in der Betriebswirtschaft, der Auswertung von Statistiken, das Erstellen von Computertomographien in der Medizin oder das Abspielen digitaler Signale auf einem CD- oder MP3-Player, beruht auf der *Verarbeitung von Zahlen.* Die Zahlen werden wir in dieser Vorlesung, obwohl der Umgang mit ihnen aus der Schule schon gut bekannt sein sollte, in der oben angegebenen Reihenfolge sauber definieren.

Definition 3.1 *Die Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen ist definiert durch die* Peano-Axiome

P1: *Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl.*

P2: *Es gibt eine Nachfolgerabbildung* $\operatorname{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

P3: succ *ist injektiv.*

P4: *Ist* $M \subset \mathbb{N}$ *eine Teilmenge mit den Eigenschaften*

a) $1 \in M$ *und*

b) falls $m \in M$*, so ist auch* $\operatorname{succ}(m) \in M$,

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Man sollte sich vorstellen, daß $\mathrm{succ}(m) = m + 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, wobei die Definition der Operation $+$ noch nachzuholen ist. Dies ist eine umfassende Definition der natürlichen Zahlen, wenn wir davon absehen, daß grundsätzlich noch die Zeichen $0, 1, 2, 3, \ldots, 27$ usw. definiert werden müssen. (Im Prinzip könnten wir hier auch in unpraktischer Weise die lateinischen Zahlzeichen benutzen.) Häufig wird in der mathematischen Literatur auch die Null mit in die natürlichen Zahlen einbezogen, d.h. in der Definition 3.1 wird 1 durch 0 ersetzt. Diesen Fall unterscheiden wir durch die Bezeichung $\mathbb{N}_0$. Es ist dann $1 = \mathrm{succ}(0)$.

Neben den Peano-Axiomen gibt es noch andere Möglichkeiten der Einführung der natürlichen Zahlen. Gegenüber diesen hat die Vorgehensweise nach Peano den Vorteil, daß sie unmittelbar das Beweisprinzip der vollständigen Induktion liefert.

Satz 3.2 Vollständige Induktion. *Es sei $A(n)$ eine Aussage über eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:*

1. **Induktionsanfang:** $A(1)$ *ist wahr.*

2. **Induktionsschritt:** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ wahr ist* **(Induktionsannahme)***, so folgt, daß auch $A(\mathrm{succ}(n))$ wahr ist* **(Induktionsschluß)***.*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir definieren die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann gilt nach dem Induktionsanfang $1 \in M$. Nach dem Induktionsschritt folgt $\mathrm{succ}(n) \in M$, falls $n \in M$. Nach dem Axiom P4 folgt $M = \mathbb{N}$, d.h. $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Natürlich gilt das Induktionsprinzip auch für $\mathbb{N}_0$. Im folgenden Beispiel (und im Weiteren) benutzen wir die abkürzende Summenschreibweise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

bzw. naheliegende Modifikationen hiervon.

Satz 3.3 *Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen beträgt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\, n(n+1). \tag{3.1}$$

Beweis. (Gauß hat als 7-jähriger Schüler hierfür einen direkten Beweis gegeben!) Für $n = 1$ ist (3.1) richtig, da beide Seiten der Gleichung dann den Wert 1 haben. Die Induktionsannahme lautet: Gleichung (3.1) sei für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ richtig. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + n + 1 = \frac{1}{2}\, n(n+1) + n + 1 = \frac{1}{2}\,(n+1)(n+2),$$

und dies bedeutet, daß (3.1) auch für den Nachfolger $n+1$ richtig ist. Damit liefert vollständige Induktion die Behauptung. □

Wir müssen noch aufbauend auf die Definition 3.1 die Definition der Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen nachholen. Dies geschieht durch eine Rekursion.

Definition 3.4 *Eine* rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ *von den natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *in eine Menge* M *ist eine Vorschrift der folgenden Form:*

R1: *Es ist eine Vorschrift zur Berechnung von* $f(1)$ *gegeben.*

R2: *Die Berechnung von* $f(\mathrm{succ}(n))$ *wird durch*

$$f(\mathrm{succ}(n)) := F(n, f(n))$$

auf die Berechnung von $f(n)$ *zurückgeführt mit einer (möglichst einfachen) Funktion* $F : \mathbb{N} \times M \to M$.

Ist eine rekursive Definition gegeben, so ist die Berechnung von f möglich für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist eine Folge der Peano'schen Axiome. Dazu definieren wir

$$M := \{n \in N : f(n) \text{ ist durch Anwendungen von R1, R2 berechenbar}\}.$$

Dann ist nach R1 die Zahl l in M. Nach R2 ist zu einer Zahl n auch ihr Nachfolger $\mathrm{succ}(n)$ in M. Somit gilt nach P4 die Gleichheit $M = \mathbb{N}$ und wir können $f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ berechnen. Somit ist Rekursion eine direkte Folge der Peano'schen Axiome. Wiederum können wir analog rekursive Funktionen auf $\mathbb{N}_0$ betrachten.

Definition 3.5 *Wir definieren die* Addition *als eine Abbildung (Operation)*

$$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad (m, n) \mapsto m + n$$

mit der rekursiven Definition

$$\begin{aligned} m + 0 &:= m && \textit{für alle } m \in \mathbb{N}_0, \\ m + \operatorname{succ}(n) &:= \operatorname{succ}(m + n) && \textit{für alle } m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Auf der Addition aufbauend definieren wir die Multiplikation *als eine Abbildung (Operation)*

$$\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad (m, n) \mapsto m \cdot n$$

mit der rekursiven Definition

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &:= m && \textit{für alle } m \in \mathbb{N}_0, \\ m \cdot \operatorname{succ}(n) &:= m \cdot n + m && \textit{für alle } m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir nun durch

$$m + 1 = m + \operatorname{succ}(0) = \operatorname{succ}(m + 0) = \operatorname{succ}(m)$$

die Rechtfertigung für die Interpretation $\operatorname{succ}(m) = m + 1$. Durch eine Vielzahl von Induktionsbeweise kann man die Rechenregeln

$$\begin{aligned} m + n &= n + m && \text{Kommutativität von } + \\ m \cdot n &= n \cdot m && \text{Kommutativität von } \cdot \\ m + 0 &= m && \text{Neutralität von 0 bzg. } + \\ m \cdot 1 &= m && \text{Neutralität von 1 bzg. } \cdot \\ k + (m + n) &= (k + m) + n && \text{Assoziativität von } + \\ k \cdot (m \cdot n) &= (k \cdot m) \cdot n && \text{Assoziativität von } \cdot \\ k \cdot (m + n) &= (k \cdot m) + (k \cdot n) && \text{Distributivität von } + \text{ und } \cdot \end{aligned}$$

für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$ verifizieren. Dies alles durchzuführen, ersparen wir uns. Exemplarisch beweisen wir Assoziativität und Kommutativität der Addition. Wir wählen $k, m \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und haben bei der Assoziativität als Induktionsanfang $(k+m)+0 = k+m = k+(m+0)$. Der Induktionsschritt erfolgt durch

$$\begin{aligned}&(k+m)+(n+1) = (k+m)+\operatorname{succ}(n)\\&\quad = \operatorname{succ}((k+m)+n) = \operatorname{succ}(k+(m+n)) = k+\operatorname{succ}(m+n)\\&\quad = k+(m+\operatorname{succ}(n)) = k+(m+(n+1)).\end{aligned}$$

Für die Kommutativität müssen $0+m = m+0$ als Induktionsanfang sowie $1+m = m+1$ vorab induktiv beweisen.Die Induktionsschritte hierfür erfolgen nach

$$0+(m+1) = 0+\operatorname{succ}(m) = \operatorname{succ}(0+m) = \operatorname{succ}(m+0) = \operatorname{succ}(m) = m+1.$$

und

$$\begin{aligned}&1+(m+1) = 1+\operatorname{succ}(m) = \operatorname{succ}(1+m) = \operatorname{succ}(m+1) = m+\operatorname{succ}(1)\\&\quad = m+\operatorname{succ}(1+0) = m+(1+\operatorname{succ}(0)) = m+(1+1) = (m+1)+1.\end{aligned}$$

Der eigentliche Induktionsschritt erfolgt durch

$$\begin{aligned}&m+(n+1) = m+\operatorname{succ}(n) = \operatorname{succ}(m+n) = \operatorname{succ}(n+m)\\&\quad = n+\operatorname{succ}(m) = n+(m+1) = n+(1+m) = (n+1)+m,\end{aligned}$$

wobei wir auch die schon bewiesene Assoziativität benutzen.

Die *Subtraktion* und *Division* lassen sich als inverse Operationen im folgenden Sinne einführen. Falls es zu $m, n \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x+n = m,$$

so ist dieses eindeutig bestimmt (aus der Injektivität der Nachfolgerabbildung!), und wir setzen

$$m-n := x.$$

Offensichtlich haben wir dann $(m-n)+n = m$. Analog setzen wir

$$m/n := y,$$

falls es ein $y \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$y \cdot n = m.$$

Wiederum ist y eindeutig bestimmt und heißt ein *Teiler* von m. Wir haben $(m/n) \cdot n = m$.

Definition 3.6 *Wir definieren das* Potenzieren *als eine Abbildung*

$$(m, n) \mapsto m^n$$

von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ *in* $\mathbb{N}$ *mit der rekursiven Definition*

$$m^0 := 1 \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

$$m^{n+1} := m \cdot m^n \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Wiederum durch Induktion lassen sich die Rechenregeln

$$m^{n+k} = m^n \cdot m^k$$

$$m^{n \cdot k} = (m^n)^k$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n, k \in \mathbb{N}_0$ beweisen.

Damit haben wir nun die Möglichkeit, die natürlichen Zahlen durch *Ziffernsysteme* darzustellen. Wir wählen eine *Basis*-Zahl b, die im *Dezimalsystem* gleich 10 ist, im *Dualsystem* gleich 2 und im *Hexadezimalsystem* gleich 16. Dann brauchen wir b Zeichen für *Ziffern* zwischen 0 und $b - 1$ (im Hexadezimalsystem 0 bis 9, dann A,B,C,D,E,F) und schreiben die natürlichen Zahlen in der b-*adischen Form* des folgenden Satzes.

Satz 3.7 *Jede natürliche Zahl* n *hat eine eindeutige Darstellung der Form*

$$n = \sum_{j=0}^{k} \beta_j b^j \tag{3.2}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, $b_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ *für* $j = 0, 1, \ldots, k$ *und* $\beta_k \neq 0$. *Entsprechend schreiben wir* n *in der* b*-adischen Form als Zeichenkette*

$$n = \beta_k \cdots \beta_2 \beta_1 \beta_0.$$

Der Beweis kann per Induktion geführt werden und gleichzeitig konstruktiv sein. Wir überlassen ihn der Vorlesung *Diskrete Mathematik*. Die rekursive Grundidee folgt aus der einfachen Beobachtung, daß in (3.2) die Anfangsziffer β_0 der Divisionsrest von n bei Division durch b ist, denn $n - \beta_0$ ist ein Vielfaches von b. Wir bilden dann $m := (n - \beta_0)/b$ und bekommen aus (3.2) die Darstellung

$$m = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b^{j-1}.$$

Jetzt ist also β_1 der Divisionsrest von m bei Division durch b, und dieses Verfahren kann man fortsetzen.

Wir probieren das für die Berechnung der Binärdarstellung von 23. Der Divisionsrest von 23 durch 2 ist l, weil 23 ungerade ist. Wir haben also $\beta_0 = 1$, und $m = (23 - 1)/2 = 11$. Dies ist wieder ungerade, also folgt $\beta_1 = 1$. So fortfahrend erhalten wir

$$\begin{aligned} m &= (11-1)/2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 1, \\ m &= (5-1)/2 \;\; = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = 0, \\ m &= (2-0)/2 \;\; = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_4 = 1, \\ m &= (1-1)/2 \;\; = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_5 = 0. \end{aligned}$$

Die Darstellung der dezimal als 23 geschriebenen Zahl als binäre Zeichenkette ist also 10111.