7 Der $\mathbb{R}^n$ und die komplexen Zahlen

Definition 7.1 *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist der* euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ *definiert als das* n*-fache kartesische Produkt von* $\mathbb{R}$*, d.h.*

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ mal} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, n\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ *nennen wir* Punkte *oder* Vektoren*. Die* Addition *zweier Vektoren* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *und* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *ist definiert durch*

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

und das skalare Produkt *oder die* skalare Multiplikation *eines Vektors* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *mit einer Zahl* $\alpha \in \mathbb{R}$ *durch* $\alpha \cdot x := (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n)$.

Wenn wir den $\mathbb{R}^2$ als *Ebene* interpretieren, dann können wir $x = (x_1, x_2)$ als gerichtete Strecke vom Nullpunkt $(0, 0)$ nach (x_1, x_2) auffassen und damit die Bezeichungsweise Vektor motivieren. Die Addition läßt sich dann interpretieren als Hintereinanderfügen der Strecke von $(0, 0)$ nach (x_1, x_2) und der Strecke von (x_1, x_2) nach $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Die skalare Multiplikation mit α entspricht einer Streckung des Vektors (x_1, x_2) um den Faktor α verbunden mit einer Richtungsumkehr bei negativem α. Die Rechenregeln für die Addition und die skalare Multiplikation auf dem $\mathbb{R}^n$ bringen wir in der folgenden Definition unter.

Definition 7.2 *Eine nichtleere Menge* V *heißt ein* Vektorraum *oder ein* linearer Raum *über einem Körper* $\mathbb{K}$*, wenn eine Addition* $+ : V \times V \to V$ *und eine skalare Multiplikation* $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ *definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:*
1. V *ist bezüglich der Addition eine* Abelsche Gruppe*, d.h. die Addition ist assoziativ und kommutativ, es gibt ein neutrales Element* 0 *und zu jedem Element* $v \in V$ *ein eindeutig bestimmtes Inverses* $-v \in V$ *mit* $v + (-v) = 0$.
2. *Die skalare Multiplikation ist* bilinear*, d.h.*

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \quad \textit{und} \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

für alle $u, v \in V$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
3. *Es gilt ferner*

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad \textit{und} \quad 1 \cdot v = v$$

für alle $v \in V$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *und dem Einselement* 1 *in* $\mathbb{K}$.

Wir schenken uns die langwierige Überprüfung der Vektorraumeigenschaften für $\mathbb{R}^n$. Stattdessen geben wir zwei weitere Beispiele für Vektorräume. Funktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$x \mapsto p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit reellen Koeffizienten a_k und $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ heißen *Polynome* vom *Grad n*. Die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n bezeichnen wir mit P_n. Wir können eine Addition von zwei Polynomen

$$p(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad \text{und} \quad q(x) := \sum_{k=1}^{n} b_k x^k$$

durch

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

und die skalare Multiplikation mit einer reellen Zahl α durch

$$(\alpha \cdot p)(x) := \alpha p(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

definieren. Hiermit wird P_n zu einem Vektorraum. Als Übung überlege man sich, wie man reelle Zahlenfolgen als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen kann, siehe Satz 5.5.

Wir werden später ausführlich auf Vektorräume zurückkommen. Auf dem Weg zu den komplexen Zahlen wollen wir jedoch zunächst eine *Länge* bzw. eine *Norm* von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ einführen. Hierzu nutzen wir zur Motivation den *Satz von Pythagoras*, nach dem zwischen den Katheten a und b und der Hypothenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Von den über hundert möglichen Beweisen für diesen antiken Satz wählen wir den folgenden geometrischen Beweis durch Ergänzung.

Das große Quadrat in der Abbildung 1 hat die Seitenlänge $a + b$, und somit die Fläche $(a + b)^2$. Subtrahiert man davon die Fläche der 4 seitlichen Dreiecke, die jeweils eine Fläche von $ab/2$ haben, so verbleibt die Fläche c^2 des inneren Quadrats mit der Seitelänge c. Also haben wir $(a+b)^2 - 2ab = c^2$ und daraus folgt sofort die Behauptung.

Als Umkehrung des Quadrierens gibt es vermöge des Babylonischen Wurzelziehens zu jeder nichtnegativen reellen Zahl α eine nichtnegative Wurzel $\sqrt{\alpha}$ mit der Eigenschaft $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

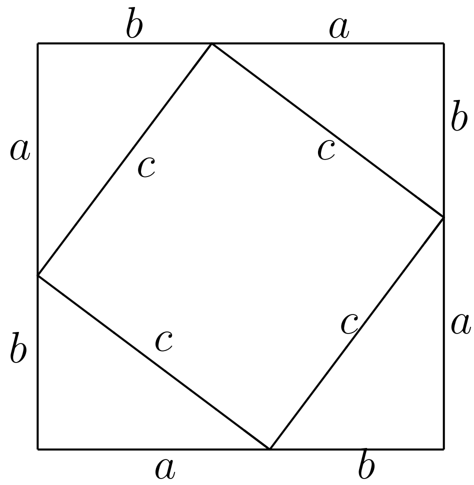

Abbildung 1: Zum geometrischen Beweis des Satz von Pythagoras

Satz 7.3 Cauchy–Schwarzsche Ungleichung *Für* $2n$ *reelle Zahlen* $a_1, \ldots, a_n$ *und* $b_1, \ldots, b_n$ *gilt die Ungleichung*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Beweis. Wir setzen

$$A := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}, \quad B := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \quad C := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Wurzeln weglassen

und können $A > 0$ annehmen, da für $A = 0$ die Ungleichung richtig ist. Wir setzen außerdem

$$\beta := \sqrt{A}, \quad \alpha =: -\frac{C}{\sqrt{A}}$$

und haben

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)^2 = \alpha^2 A + 2\alpha\beta C + \beta^2 B = AB - C^2$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Aus dem Beweis ersehen wir, daß Gleichheit in der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung auftritt genau dann, wenn der Vektor a ein Vielfaches von b ist (oder umgekehrt).

Nun können wir motiviert durch den Satz von Pythagoras, die Länge des Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

definieren. Hierfür gelten analog zu Satz 4.9 die Eigenschaften

$$\begin{array}{llcll}
\text{(N1)} & \|x\| & \geq & 0 & \text{(Positivität)} \\
\text{(N2)} & \|x\| & = & 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0 & \text{(Definitheit)} \\
\text{(N3)} & \|\alpha x\| & = & |\alpha| \, \|x\| & \text{(Homogenität)} \\
\text{(N4)} & \|x+y\| & \leq & \|x\| + \|y\| & \text{(Dreiecksungleichung)}
\end{array}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ and alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Dreiecksungleichung (deren Namen wir nun auch verstehen) erhalten wir aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Wir wollen nun auf dem $\mathbb{R}^2$ (im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2$ läßt sich dies nicht durchführen!) eine Multiplikation so definieren, daß wir einen Körper erhalten. Dabei wird einerseits die Wohlordnungseigenschaft verloren gehen, andrerseits aber die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 = -1$ erhalten.

Neben der oben eingeführten Addition auf $\mathbb{R}^2$ definieren eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu) \tag{7.1}$$

für alle $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Man kann nun nachweisen, daß auf diese Weise ein kommutativer Körper entsteht mit dem Nullelement $(0, 0)$ und dem Einselement $(1, 0)$. Auf das Bestätigen der Rechenregeln wollen wir verzichten und lediglich das inverse Element bezüglich der Multiplikation betrachten. Dazu machen wir für $(x, y) \neq 0$ den Versuch mit

$$(u, v) := \left(\frac{x}{x^2 + y^2} , \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

und erhalten

$$(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0),$$

d.h. (u, v) ist in der Tat das multiplikative Inverse von (x, y). Den so erhaltenen Körper bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$ und nennen seine Elemente *komplexe Zahlen*. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wir als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0).$$

Die komplexe Zahl

$$i := (0, 1)$$

hat die fundamentale Eigenschaft $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$, d.h. $i^2 = -1$. Unter Ausnutzung der Vektorraumeigenschaft von $\mathbb{R}^2$ können wir jedes Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$$

bzw. abgekürzt

$$z = x + iy$$

schreiben. Wir nennen i die *imaginäre Einheit* und Zahlen der Form iy *imaginäre Zahlen*. Weiterhin bezeichnen wir x als den *Realteil* und y als den *Imaginärteil* der komplexen Zahl $z = x + iy$.

Unter Verwendung der Eigenschaft $i^2 = -1$ erfolgt das Rechnen mit komplexen Zahlen analog zum Rechnen mit reellen Zahlen, da die gleichen Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetze gelten. Die Definition der komplexen Multiplikation (7.1) übersetzt sich in

$$(x + iy)(u + iv) = xu + i^2 yv + i(xv + yu) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Eine komplexe Zahl haben wir eingeführt als ein Element von $\mathbb{R}^2$. Daher nennen wir $\mathbb{C}$ auch die *komplexe Zahlenebene* und können jede komplexe Zahl als Punkt in dieser Ebene bzw. als Vektor vom Nullpunkt zu diesem Punkt auffassen.

Die Addition zweier komplexen Zahlen haben wir oben schon geometrisch als Addition zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gedeutet. Um die Multiplikation geometrisch zu veranschaulichen müssen wir als weitere Begriffe den Betrag einer komplexen Zahl und die Darstellung von komplexen Zahlen mit Hilfe des Polarwinkels einführen. Analog zu der Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ ist der *Betrag* der komplexen Zahl $z = x + iy$ erklärt als die positive Wurzel

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Insbesondere übertragen sich die obigen Eigenschaften N1–N4 der Länge eines Vektors auf den Betrag einer komplexen Zahl. Wir bemerken ausdrücklich, daß auf den komplexen Zahlen sowie im $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$ keine Ordnung definiert ist.

Für einen Punkt z auf dem Kreis mit dem Radius Eins um den Nullpunkt, d.h. eine komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ betrachten wir den Winkel φ, den z als Vektor aufgefaßt mit der x-Achse bildet. Dabei messen wir den Winkel im *Bogenmaß*, d.h. als Länge des Kreissegments, welches ein Vektor der Länge Eins durchläuft, wenn er vom Punkt $1 = (1, 0)$ zum Punkt $z = (x, y)$ um den Nullpunkt $0 = (0, 0)$ gedreht wird. Dann setzen wir

$$\cos\varphi := x, \quad \sin\varphi := y.$$

Offenbar ist $\cos\varphi$ die Länge der Ankathete und $\sin\varphi$ die Länge der Gegenkathete in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x, 0)$ und (x, y), dessen Hypothenuse die Länge Eins hat.

Wir können nun jede komplexe Zahl durch ihren Betrag und ihren Winkel ausdrücken gemäß

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

In dieser Darstellung ergibt sich für das Produkt zweier Zahlen

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

unter Verwendung der Additionstheoreme

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \tag{7.2}$$

und

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 \tag{7.3}$$

die Beziehung

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

d.h. die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert. Den Beweis der beiden Additionstheoreme verschieben wir auf später.

Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist die *konjugiert komplexe* Zahl definiert durch

$$\overline{z} := x - iy,$$

d.h. durch Spiegelung an der x-Achse. Hierfür gelten die Regeln

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ferner können wir schreiben

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Mit den komplexen Zahlen kann nicht nur die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ gelöst werden, sondern jede sogenannte *algebraische Gleichung* der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Der *Fundamentalsatz der Algebra* sagt, daß diese Gleichung mindestens eine und höchstens n Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt.

Obwohl auf den komplexen Zahlen keine Ordnung definiert ist, reicht der Betrag mit seinen dem Betrag reeller Zahlen entsprechender Eigenschaften, insbesondere der Dreiecksungleichung aus, um unsere früheren Definitionen und Ergebnisse zu Folgen und Reihen auf die komplexen Zahlen auszudehnen.