

Mathematik für Studierende der Informatik IIÜbungen zur Vorlesung im SS 2024 - **Blatt 1**

Abgabe: Donnerstag, den 18. April 2024, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie Ihre Übungsgruppennummer!

1. Aufgabe 1 (*Aufstellen linearer Gleichungssysteme*) 3 Punkte

Zum Start der Uni-Liga schließen sich Benjamin, Max, Patrick, Robert und Stefan zusammen, um auf den Sieger der diesjährigen Uni-Liga zu wetten.

Rechnet man zu Benjamins Besitz das Doppelte der Summe, über die Patrick verfügt, hinzu und zieht Stefans Besitz ab, so bleiben noch 800€ übrig.

Der verdreifachte Besitz von Patrick sowie die Summen, über die Benjamin und Robert verfügen, entsprechen zusammengekommen dem Besitz von Stefan zuzüglich 1200€.

Rechnet man zur Summe, die Max zur Verfügung hat, das Doppelte der Summe, die Patrick und Robert zusammen zur Verfügung haben, hinzu, so erhält man 900€.

Das Doppelte dessen, was Stefan zur Verfügung hat, entspricht 300€ abzüglich der Summe, über die Max verfügt.

Das Doppelte dessen, was Max zur Verfügung hat, entspricht dem zusammengekommenen Besitz von Patrick und Stefan.

Man möchte nun wissen, wie viel jeder einzelne als Wetteinsatz zur Verfügung hat. Setzen Sie das Problem in mathematischen Gleichungen an und ermitteln Sie den Betrag, den jeder einzelne zur Verfügung hat.

2. Aufgabe 2 (*Gauß-Algorithmus*) 3+3 Punkte

- (a) Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_4 &= 9 \\x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 32 \\-3x_1 - 6x_2 + 3x_4 &= -27\end{aligned}$$

- (b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung und Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned}2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -8 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\-3x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= -3 \\2x_1 + x_2 - x_4 &= 2\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet Spaltenpivotisierung, dass in den jeweiligen Eliminationsschritten u. U. eine Zeilenvertauschung vorgenommen wird, so dass das Eliminationselement $a_{mm}^{(m)}$ das betragsmäßig größte Element der Eliminationsspalte ist.

3. **Aufgabe 3** (*Inverse Matrix*)

3 Punkte

Es sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die inverse Matrix A^{-1} .

4. **Aufgabe 4** (*LR-Zerlegung*)

2+2 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine LR-Zerlegung von A . Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Bestimmen Sie die unteren Dreiecksmatrizen $L^{(1)}, L^{(2)}$ und $L^{(3)}$, so dass

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot L^{(1)} \cdot A = R$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix R .

- (b) Bestimmen Sie die Inverse L des Produkts $L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot L^{(1)}$, um die Zerlegung $A = L \cdot R$ zu erhalten.