15 Determinanten

Wir wollen einen Indikator kennenlernen, mit dessen Hilfe die lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ermittelt werden kann.

Definition 15.1 *Eine Funktion*

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{n−mal}} \to \mathbb{R}$$

heißt Determinanten-Funktion *oder kurz* Determinante*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

(D1) $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$*, falls* $a_j = a_k$ *für ein* $j \neq k$*.*

(D2) $\det$ *ist linear in allen Argumenten, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned}&\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha u + \beta v, a_{k+1}, \ldots, a_n)\\ &= \alpha \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \ldots, a_n) + \beta \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

für alle $1 \leq k \leq n$, $a_1, \ldots, a_{k-1}, u, v, a_{k+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

(D3) $\det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ *für die kanonische Basis* $e_1, e_2, \ldots, e_n$*.*

Sind insbesondere die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *die Spaltenvektoren einer* $n \times n$*-Matrix* $A = (a_{jk})$*, so heißt* $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *die Determinante von* A *und wird geschrieben*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Für $n = 2$ ist

$$\det(a, b) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

für $a = (a_1, a_2)^\top$ und $b = (b_1, b_2)^\top$ eine Determinanten-Funktion. Wir unterstellen zunächst die Existenz einer Determinanten-Funktion im $\mathbb{R}^n$ und untersuchen ihre Eigenschaften.

Satz 15.2 *Die Determinante ist alternierend in dem Sinne, daß sich bei Vertauschen zweier Vektoren das Vorzeichen ändert. Wird zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte addiert, ändert sich die Determinante nicht.*

Beweis. Die erste Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned}0 &= \det(\ldots, a+b, \ldots, a+b, \ldots)\\ &= \det(\ldots, a, \ldots, a, \ldots) + \det(\ldots, a, \ldots, b, \ldots)\\ &\quad + \det(\ldots, b, \ldots, a, \ldots) + \det(\ldots, b, \ldots, b, \ldots)\\ &= \det(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) + (\ldots, b, \ldots, a, \ldots),\end{aligned}$$

und die zweite aus

$$\begin{aligned}\det(\ldots, a+\lambda b, \ldots, b, \ldots) &= \det(\ldots, a, \ldots, b, \ldots) + \lambda \det(\ldots, b, \ldots, b, \ldots)\\ &= \det(\ldots, a, \ldots, b, \ldots).\end{aligned}$$

Satz 15.3 *Es gilt* $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ *genau dann, wenn die Vektoren* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *linear abhängig sind.*

Beweis. Sind die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear abhängig, so können wir ein a_j durch lineare Kombination

$$a_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \lambda_k a_k$$

ausdrücken. Dann wird

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \lambda_k \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \ldots, a_n) = 0,$$

da in jedem Summanden der Vektor a_k zweimal auftritt.

Sei umgekehrt $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Angenommen die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind linear unabhängig, so sind sie eine Basis im $\mathbb{R}^n$. Daher können wir die kanonischen Einheitsvektoren alle als Linearkombinationen $e_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} a_j$ darstellen für $k = 1, \ldots, n$. Dann fogt mit Hilfe von D1, D2 und Satz 15.2 der Widerspruch

$$\det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} \alpha_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}) = 0$$

zu D3. $\square$

Wir stellen zunächst fest, daß es höchstens eine Determinanten-Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ geben kann. Dazu sei $F := \det_1 - \det_2$ die Differenz zweier Determinanten-Funktionen. Dann besitzt F die Eigenschaften D1 und D2, aber anstelle von D3 tritt $F(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$. Da sich jeder Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ durch die kanonische Basis linear kombinieren läßt, muß wie im vorangegangenen Beweis wegen D1, D2 und Satz 15.2 dann $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\det_1 = \det_2$.

Bevor wir zu einer expliziten Darstellung der Determinante gelangen, müssen wir uns kurz mit Permutationen befassen.

Definition 15.4 *Eine* Permutation *der Menge* $V_n := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *ist eine bijektive Abbildung* $\pi : V_n \to V_n$.

Betrachten wir die natürliche Anordnung der Elemente $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, so entspricht einer Permutation eine Anordnung dieser Elemente in einer beliebigen Reihenfolge. Befinden sich zwei Elemente der Menge dann nicht in der durch die Grundordnung gegebenen Reihenfolge, so nennen wir diese Elemente in *Inversion* zueinander stehend.

Die durch eine Permutation bewirkte Veränderung der Anordnung der Elemente

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \mapsto \{\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(n)\}$$

kann durch endlich viele nacheinander ausgeführte Permutationen erreicht werden, bei denen jeweils nur zwei Elemente miteinander vertauscht werden. Dabei kann eine feste permutierte Anordnung zwar auf verschiedene Weisen aus solchen *Paarvertauschungen* erhalten werden, aber die erforderliche Anzahl der benötigten Paarvertauschung ist für eine feste Permutation entweder stets gerade oder stets ungerade.

Bei einer Paarvertauschung zweier Elemente an den Stellen p und q mit $p < q$ bleiben alle zwischen den übrigen $n - 2$ Elementen bestehenden Inversionen erhalten. Desgleichen wird der Inversionszustand bezüglich p und q von Elementen die links von p oder rechts von q stehen nicht verändert. Für Elemente in Positionen zwischen p und q bleibt (in Abhängigkeit von der Grße der beteiligten drei Zahlen) die Anzahl der Inversionen mit p und q unverändert oder ändert sich um 2 oder -2. Der Inversionzustand des Paars p und q ändert sich durch die Vertauschung um 1 oder -1. Zusammenfassend ändert sich also bei einer Paarvertauschung die Anzahl der Inversionen stets um eine ungerade Zahl. Infolgedessen ändert sich bei einer ungeraden (bzw. geraden) Zahl von Paarvertauschungen die Zahl der Inversionen um eine ungerade (bzw. gerade) Zahl.

Gehen wir also von der natürliche Anordnung der Elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ ohne Inversionen aus, so haben wir in der Permutation $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$ entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen. Mithin entspricht dieser entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Paarvertauschungen. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 15.5 *Das* Vorzeichen *eine Permutation $\pi : V_n \to V_n$ ist durch*

$$\operatorname{sgn}(\pi) := (-1)^\sigma$$

erklärt, wobei σ die Zahl der Paarvertauschungen bedeutet, mit der die permutierte Anordnung $\{\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(n)\}$ aus der natürlichen Anordnung $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ erzeugt werden kann.

Damit sind wir nun in der Lage, die Determinanten-Funktion zu konstruieren. Seien dazu also $a_1, \ldots, a_n$ beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^n$. In der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ können wir darstellen $a_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j$ mit Koeffizienten a_{jk}, $j, k = 1, \ldots, n$. Daher folgt mit der Multilinearität der Determinanten-Funktion

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \det\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1,1}\, e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^n a_{j_n,n}\, e_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^n a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

Sind zwei der Indizes $j_1, \ldots, j_n$ gleich, dann ist $\det(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$. Also sind nur die Summanden zu berücksichtigen, bei denen $\{j_1, \ldots, j_n\}$ eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ ist. Damit erhalten wir schließlich

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \tag{15.6}$$

mit der Summation über alle $n!$ Permutationen π der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$.

Wir haben nun gezeigt, daß die Determinanten-Funktion notwendiger Weise die Gestalt (15.6) hat. Es muß jetzt noch bestätigt werden, daß (15.6) in der Tat eine Determinanten-Funktion ist. Die Linearität von (15.6) und