Übungsblatt 3.

Name

Übungsgruppe (Name des Tutors)

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**
Punkte						

Abgabetermin: **Montag, 20.11.2023, 14:00 Uhr**.

Bitte verwenden Sie bei Abgabe in Papierform diese Seite als Deckblatt und tragen Sie oben Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe ein. Bitte heften Sie die Blätter zusammen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Summe der ersten n ungeraden Zahlen,

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1),$$

und wollen eine Formel zur Berechnung dieser Summe finden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie die gesuchte Summe $S(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
Finden Sie anhand dieser Beispiele eine mögliche Formel für $S(n)$.

(ii) Prüfen Sie, dass für Ihre Vermutung die Gleichung

$$S(n) + (2n+1) = S(n+1)$$

erfüllt ist. Was bedeutet diese Gleichung?

(iii) Formulieren Sie einen Beweis für Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass die folgend Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** In Abbildung 1 ist ein "Beweis" mittels vollständiger Induktion gegeben, welcher offensichtlich jedoch falsch sein muss. Finden und erläutern Sie den Fehler.

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir n beliebige Studierende aus, so haben alle dieselbe Schuhgröße.

Beweis: Wir führen eine Induktion über n.
Induktionsanfang: $\boxed{n = 1}$ Haben wir nur einen Studierenden ausgewählt, so haben sicher alle ausgewählten Studierenden dieselbe Schuhgröße. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges, aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass n beliebig ausgewählte Studierende alle dieselbe Schuhgröße haben.
Induktionsschritt: $\boxed{n \to n+1}$ Sei also $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Studierenden. Wir betrachten die Menge $S' = S \setminus \{s_{n+1}\}$. In S' sind genau n Studierende und somit haben diese nach Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Schuhgröße – sagen wir x. Insbesondere haben s_1 und s_2 die Schuhgröße x.
Betrachte nun $S'' = S \setminus \{s_1\}$. Wieder folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass alle Studierenden in S'' dieselbe Schuhgröße haben – sagen wir y. Da aber s_2 in S'' ist und die Schuhgröße von s_2 gleich x ist, muss $x = y$ gelten.
Weiter ist $S = S' \cup S''$. Wir haben also gezeigt, dass alle Studierenden aus S dieselbe Schuhgröße haben. Das war zu zeigen. □

Abbildung 1: Hier stimmt doch was nicht...
Vom Aufbau her ist alles richtig, es geht um einen Fehler in der Logik des Beweises.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Füllen Sie folgende die Wahrheitstabelle.

A	B	$\neg(A \land \neg B)$	$(\neg A) \lor B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie die logische Äquivalenz

$$(A \to B) \land (B \to A) \ \leftrightarrow \ (A \leftrightarrow B)$$

mithilfe einer Wahrheitstabelle.