Universität Göttingen | Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch | M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 2**

Abgabe: Donnerstag, den 9. November 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 5** *(Bild und Urbild)* 1+1+1+1+1+1 Punkte
   Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung, $U_1, U_2 \subset M$ und $V_1, V_2 \subset N$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$.
   (b) $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$.
   (c) $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$.
   (d) $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$.
   (e) Ist f injektiv, so gilt $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$.

   Zeigen Sie weiter, dass in Teil (e) nicht auf die Injektivität verzichtet werden kann, d.h. geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f : M \to N$ und Mengen $U_1, U_2 \subset M$ an, sodass $f(U_1 \cap U_2) \neq f(U_1) \cap f(U_2)$.

2. **Aufgabe 6** *(Urbild)* 2 Punkte
   Es sei folgende Funktion gegeben:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -12, & \text{falls } x < -5, \\ -x^2 - 2x + 3, & \text{falls } -5 \leq x \leq 3, \\ -3x - 3, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

   Skizzieren Sie den Graphen von f in einem kartesischen Koordinatensystem und ermitteln Sie zu jedem $y \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ von y unter f.

3. **Aufgabe 7** *(Injektivität und Surjektivität)* 2+2 Punkte

   (a) Beweisen Sie für zwei Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$ die folgenden Aussagen (diese Aussagen sind Teilaussagen des Satzes 1.10, die in der Vorlesung nicht bewiesen wurden):
      i. Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
      ii. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

   (b) Zeigen Sie, dass die Umkehrungen der Aussagen aus Teil (a) nicht wahr sind, d.h. finden Sie Beispiele für Abbildungen $f : L \to M$ und $g : M \to N$, sodass gilt:
      i. $g \circ f$ ist surjektiv, aber f und g sind nicht beide surjektiv.
      ii. f ist injektiv, aber $g \circ f$ ist nicht injektiv.

4. **Aufgabe 8** *(Logik)* 2+2 Punkte

In der Vorlesung wurden am Anfang von Kapitel 2 (Grundlagen der Logik) die *Negation*, die *Implikation*, die *Äquivalenz*, die *Konjunktion* und die *Disjunktion* eingeführt.

Es sei nun weiterhin die *Antivalenz* bzw. das *exklusive oder* definiert. Für zwei Aussagen A und B ist die Aussage $A \operatorname{xor} B$ (e**x**clusive **or**) über folgende Wahrheitstabelle definiert:

A	B	$A \operatorname{xor} B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Es seien nun die vier Aussagen A, B, C und D gegeben sowie der folgende aus ihnen zusammengesetzte logische Ausdruck:

$$([\neg(A \vee B)] \operatorname{xor} [C \wedge (\neg D)]) \to [A \wedge (C \vee D) \wedge (\neg B)].$$

Geben Sie den Wahrheitswert dieser zusammengesetzten Aussage an, wenn (A, B, C, D) wie folgt belegt ist:

(a) $(A, B, C, D) = (1, 0, 1, 0)$

(b) $(A, B, C, D) = (0, 1, 1, 0)$.