Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Prof. Dr. E. Viada, Dr. V. Cantoral

Diskrete Mathematik
Wintersemester 2023/24

Lösungen zu Übungsblatt 3.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Summe der ersten n ungeraden Zahlen,

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1),$$

und wollen eine Formel zur Berechnung dieser Summe finden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie die gesuchte Summe $S(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
Finden Sie anhand dieser Beispiele eine mögliche Formel für $S(n)$.

(ii) Prüfen Sie, dass für Ihre Vermutung die Gleichung

$$S(n) + (2n+1) = S(n+1)$$

erfüllt ist. Was bedeutet diese Gleichung?

(iii) Formulieren Sie einen Beweis für Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

Lösung zu Aufgabe 1.

- (3 Punkte) Lösung zu (i): Wir berechnen die ersten Summen,

$$\begin{aligned}
S(0) &= 0\\
S(1) &= 1\\
S(2) &= 1+3 = 4\\
S(3) &= 1+3+5 = 9\\
S(4) &= 1+3+5+7 = 16\\
S(5) &= 1+3+5+7+9 = 25
\end{aligned}$$

und stellen fest, dass scheinbar gerade die Quadratzahlen rauskommen. Also vermuten wir $S(n) = n^2$, dies würde mit unseren berechneten Beispielen übereinstimmen.

- (3 Punkte) Lösung zu (ii): Wir sollen nun für $S(n) = n^2$ prüfen, ob $S(n) + (2n+1) = S(n+1)$ gilt, also ob die Gleichung

$$n^2 + 2n + 1 \stackrel{?}{=} (n+1)^2$$

erfüllt ist. Dies ist aber genau die erste Binomische Formel, und ist daher erfüllt. Was bedeutet diese Gleichung? Nehmen wir nun mal an, dass unsere Vermutung für die Summe der n ungeraden Zahlen erfüllt ist. Dann erhalten wir die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen durch addieren der nächsten ungeraden Zahl, was gerade $2n+1$ ist. Dies ist dann nach der obigen Gleichung genau unsere Vermutung für $n+1$, und somit stimmt unsere Vermutung dann auch hier. Gezeigt durch diese Gleichung also: Stimmt unsere Vermutung für ein n, so auch für $n+1$. Das ist genau dass, was im Induktionsschritt zu tun ist.

- (4 Punkte) Lösung zu (iii): Wir müssen nur noch die Ergebnisse aus (i) und (ii) zusammentragen und sauber aufschreiben.

Behauptung: (1 Punkt) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2.$$

Induktionsanfang: (1 Punkt) Für $n = 0$ gilt die Behauptung, denn

$$\sum_{k=0}^{-1}(2k+1) = 0 \qquad \text{und} \qquad 0 = 0^2.$$

Induktionsvorraussetzung: (1 Punkt) Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2.$$

Induktionsschritt: (1 Punkt) Sei also $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

und somit gilt unsere Vermutung also auch für $n+1$.

Damit ist die Induktion vollständig und die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass die folgend Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 2. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt die Behauptung, denn

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0 \qquad \text{und} \qquad 0 = \frac{0 \times 1 \times 2}{3}.$$

Induktionsvorraussetzung: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Induktionsschritt: Wir betrachten die Summe für $n+1$ und stellen fest:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=0}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}
\end{aligned}$$

was gerade die Behauptung für $n+1$ ist. Somit gilt diese auch für $n+1$.
Damit ist die Induktion vollständig und die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** In Abbildung 1 ist ein "Beweis" mittels vollständiger Induktion gegeben, welcher offensichtlich jedoch falsch sein muss. Finden und erläutern Sie den Fehler.

Lösung zu Aufgabe 3. Betrachten wir den Induktionsschritt genauer und spielen diesen mal für $n = 1 \to n+1 = 2$ durch, so fällt uns der Fehler auf:

Die Menge der Studierenden ist hier also $S = \{s_1, s_2\}$. Wir sollen die Menge $S' = S \setminus \{s_2\} = \{s_1\}$ anschauen und die Schuhgröße von allen Studis hier, also nur s_1, nun x nennen.

Insbesondere fällt uns auf: Die Behauptung, dass $s_2 \in S'$ ist falsch, und wir sehen hier nicht, dass s_1 die selbe Schuhgröße haben muss wie s_2. Damit funktioniert hier der Rest des Arguments nichtmehr. Was hier also passiert ist, ist dass im Induktionsschritt implizit angenommen wurde, dass es für $n+1$ mindestens drei Studierende gibt, also n mindestens zwei ist. Da im Induktionsanfang aber nur fr $n = 1$ geprüft wurde, wissen wir nicht, ob die Aussage für $n = 2$ gilt oder nicht und können dann auch nicht über den Induktionsschritt auf größere Zahlen schließen.

BEHAUPTUNG: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir n beliebige Studierende aus, so haben alle dieselbe Schuhgröße.

BEWEIS: Wir führen eine Induktion über n.
Induktionsanfang: $\boxed{n = 1}$ Haben wir nur einen Studierenden ausgewählt, so haben sicher alle ausgewählten Studierenden dieselbe Schuhgröße. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges, aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass n beliebig ausgewählte Studierende alle dieselbe Schuhgröße haben.
Induktionsschritt: $\boxed{n \to n+1}$ Sei also $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n+1}\}$ eine Menge von $n+1$ Studierenden. Wir betrachten die Menge $S' = S \setminus \{s_{n+1}\}$. In S' sind genau n Studierende und somit haben diese nach Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Schuhgröße – sagen wir x. Insbesondere haben s_1 und s_2 die Schuhgröße x.
Betrachte nun $S'' = S \setminus \{s_1\}$. Wieder folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass alle Studierenden in S'' dieselbe Schuhgröße haben – sagen wir y. Da aber s_2 in S'' ist und die Schuhgröße von s_2 gleich x ist, muss $x = y$ gelten.
Weiter ist $S = S' \cup S''$. Wir haben also gezeigt, dass alle Studierenden aus S dieselbe Schuhgröße haben. Das war zu zeigen. □

Abbildung 1: Hier stimmt doch was nicht... Vom Aufbau her ist alles richtig, es geht um einen Fehler in der Logik des Beweises.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Füllen Sie folgende die Wahrheitstabelle.

A	B	$\neg(A \wedge \neg B)$	$(\neg A) \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Lösung zu Aufgabe 4. Wir füllen die Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg(A \wedge \neg B)$	$(\neg A) \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	w	w	f
f	f	w	w	w	w

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie die logische Äquivalenz

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \;\leftrightarrow\; (A \leftrightarrow B)$$

mithilfe einer Wahrheitstabelle.

Lösung zu Aufgabe 5. Wir zerlegen die Aussage in kleinere Teile und füllen die Tabelle spaltenweise mithilfe der Tabelle aus Aufgabe 4.

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Diese Wahrheitstabelle zeigt also, dass $(B \vee \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$ eine wahre Aussage ist, da in den zugehörigen Spalten die Aussagen übereinstimmen.