Lösungen zu Übungsblatt 6.

Aufgabe 1 (9 Punkte)**.** Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus um die folgenden Werte zu berechnen:

i) $\text{ggT}(225, 162)$ ii) $\text{ggT}(144, 100)$ iii) $\text{ggT}(1909, 1660)$

Zusatzaufgabe: Stellen Sie hierbei auch den größten gemeinsamen Teiler in der Form

$$\text{ggT}(a, b) = xa + yb$$

mit $x, y \in \mathbb{Z}$ dar.

Lösung zu Aufgabe 1. Lösung zu i). Wir führen den euklidischen Algorithmus aus:

$$\begin{aligned}
225 &= 1 \cdot 162 + 63 \\
162 &= 2 \cdot 63 + 36 \\
63 &= 1 \cdot 36 + 27 \\
36 &= 1 \cdot 27 + 9 \\
27 &= 3 \cdot 9 + 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(225, 162) = 9$. Außerdem lesen wir ab, dass

$$\begin{aligned}
9 &= 36 - 1 \cdot 27 \\
&= 36 - (63 - 1 \cdot 36) \\
&= 2 \cdot 36 - 63 \\
&= 2 \cdot (162 - 2 \cdot 63) - 63 \\
&= 2 \cdot 162 - 5 \cdot 63 \\
&= 2 \cdot 162 - 5 \cdot (225 - 1 \cdot 162) \\
&= 7 \cdot 162 - 5 \cdot 225.
\end{aligned}$$

Lösung zu ii). Wir führen den euklidischen Algorithmus aus:

$$\begin{aligned}
144 &= 1 \cdot 100 + 44 \\
100 &= 2 \cdot 44 + 12 \\
44 &= 3 \cdot 12 + 8 \\
12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\
8 &= 2 \cdot 4 + 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(144, 100) = 4$. Außerdem lesen wir ab, dass

$$\begin{aligned}
4 &= 12 - 1 \cdot 8 \\
&= 12 - 1 \cdot (44 - 3 \cdot 12) \\
&= 4 \cdot 12 - 44 \\
&= 4 \cdot (100 - 2 \cdot 44) - 44 \\
&= 4 \cdot 100 - 9 \cdot 44 \\
&= 4 \cdot 100 - 9 \cdot (144 - 1 \cdot 100) \\
&= 13 \cdot 100 - 9 \cdot 144.
\end{aligned}$$

Lösung zu iii). Wir führen den euklidischen Algorithmus aus:

$$\begin{aligned} 1909 &= 1 \cdot 1660 + 249 \\ 1660 &= 6 \cdot 249 + 166 \\ 249 &= 1 \cdot 166 + 83 \\ 166 &= 2 \cdot 83 + 0. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{ggT}(1909, 1660) = 83$. Außerdem lesen wir ab, dass

$$\begin{aligned} 83 &= 249 - 1 \cdot 166 \\ &= 249 - 1 \cdot (1660 - 6 \cdot 249) \\ &= 7 \cdot 249 - 1660 \\ &= 7 \cdot (1909 - 1660) - 1660 \\ &= 7 \cdot 1909 - 8 \cdot 1660. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die gegebenen Gleichungen ganzzahlige Lösungen besitzen. Falls möglich, geben Sie eine solche Lösung an.

i) $6x + 8y = 38$ ii) $65x - 26y = 91$ iii) $522x - 132y = 8$

Lösung zu Aufgabe 2. Lösung zu i). Zu den Koeffizienten ist der ggT gegeben durch $\operatorname{ggT}(6, 8) = 2$, da $2|38$ erfüllt ist, gibt es Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gilt $8 - 6 = 2$, daher ist

$$38 = 19 \cdot 2 = 19 \cdot (8 - 6) = 6 \cdot (-19) + 8 \cdot 19$$

Folglich ist $x = -19$ und $y = 19$ eine Lösung.

Lösung zu ii). Wir bestimmen den ggT der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 65 &= 2 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0, \end{aligned}$$

also ist $\operatorname{ggT}(65, 26) = 13$. Da $7 \cdot 13 = 91$, gilt $13|91$, somit gibt es Lösungen$x, y \in \mathbb{Z}$. Tatsächlich ist $91 = 65 + 26 = 65 \cdot (1) - 26 \cdot (1)$, also ist $x = 1$ und $y = -1$ eine Lösung.

Lösung zu iii). Wir bestimmen den ggT der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 522 &= 3 \cdot 132 + 126 \\ 132 &= 1 \cdot 126 + 6 \\ 126 &= 21 \cdot 6 + 0, \end{aligned}$$

also ist $\operatorname{ggT}(522, 132) = 6$. Da $6 \not| 8$ gilt, gibt es keine Lösung mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (9 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, nicht beide glecih 0, gilt, dass

$$\operatorname{ggT}\left(\frac{a}{\operatorname{ggT}(a,b)}, \frac{b}{\operatorname{ggT}(a,b)}\right) = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 3. Der ggT ist der größte gemeinsame Teiler, insbesondere teilt also

$$c = (\frac{a}{\mathrm{ggT(a, b)}}, \frac{b}{\mathrm{ggT(a, b)}}) = 1$$

beide Argumente, also

$$c|\frac{a}{\mathrm{ggT(a, b)}} \qquad \text{und} \qquad c|\frac{b}{\mathrm{ggT(a, b)}}$$

Das heißt auch, dass dann $c \cdot \mathrm{ggT(a, b)}$ sowohl a als auch b teilt. Da aber $\mathrm{ggT(a, b)}$ der größte solche Teiler ist, kann $c \cdot \mathrm{ggT(a, b)}$ nicht größer sein als $\mathrm{ggT(a, b)}$ und somit muss $-1 \leq c \leq 1$. Da c eine positive natürliche Zahl ist, und muss $c = 1$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ eine Zahl mit Ziffern a_i in Dezimaldarstellung.

(i) Beweisen Sie, dass a genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots,$$

durch 11 teilbar ist.

(ii) Zeigen Sie mithilfe von a), dass 82199295211 durch 11 teilbar ist.

Lösung zu Aufgabe 4. Lösung zu Aufgabe i). Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 10^0 \equiv 1 \mod 11, \\ 10 &\equiv 10^1 \equiv -1 \mod 11, \\ 100 &\equiv 10^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 11, \\ 10^3 &\equiv (-1)^3 \equiv -1 \mod 11, \\ &\ldots \end{aligned}$$

und wir sehen algemeiner (mittels binomischer Formel), dass

$$10^n \equiv (11-1)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 11^{n-k} \equiv (-1)^n \mod 11$$

und $(-1)^n \mod 11 \equiv -1$ falls n ungerade ist und $(-1)^n \mod 11 \equiv 1$ falls n gerade ist.

Damit ergibt sich

$$a_n \cdot 10^n + \cdots + a_0 \equiv a_n \cdot (-1)^n + \cdots + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv a_0 - a_1 + a_2 \ldots \mod 11$$

wodurch die Teilbarkeitsregel bewiesen ist.

Lösung zu Aufgabe ii). Wir wenden die Teilbarkeitsregel aus i) an:

$$1 - 1 + 2 - 5 + 9 - 2 + 9 - 9 + 1 - 2 + 8 = 11,$$

was durch 11 teilbar ist, also ist auch 82199295211 durch 11 teilbar.

Zusatzaufgabe 5. Das Alphabet hat 26 Buchstaben; darunter sind 5 Vokale.

(i) Wieviele Worte mit 5 Buchstaben, die 3 verschiedene Konsonanten und 2 verschiedene Vokale enthalten, gibt es?

(ii) Wieviele der Worte aus i) enthalten den Buchstaben B?

(iii) Wieviele der Worte aus i) enthalten die Buchstaben B und C?

(iv) Wieviele der Worte aus i) beginnen mit B und enthalten den Buchstaben C?

(v) Wieviele der Worte aus i) beginnen mit B und enden mit C?

(vi) Wieviele der Worte aus i) enthalten die Buchstaben A und B ?

(vii) Wieviele der Worte aus i) beginnen mit A und enthalten den Buchstaben B ?

(viii) Wieviele der Worte aus i) beginnen mit B und enthalten ein A ?

(ix) Wieviele der Worte aus i) beginnen mit A und enden mit B ?

(x) Wieviele der Worte aus i) enthalten die Buchstaben A, B und C ?

Lösung zu Aufgabe 5. (i) (1 Punkt) $\binom{21}{3}\binom{5}{2}5! = 1596000$;

(ii) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{10}{2}\binom{5}{2}5! = 228000$;

(iii) (1 Punkt) $\binom{2}{2}\binom{19}{1}\binom{5}{2}5! = 22800$;

(iv) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{19}{1}\binom{5}{2}4! = 4560$;

(v) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{19}{1}\binom{5}{2}3!\binom{1}{1} = 1140$;

(vi) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}5! = 91200$;

(vii) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{4}{1}4! = 18240$;

(viii) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}4! = 18240$;

(ix) (1 Punkt) $\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{4}{1}3!\binom{1}{1} = 4560$;

(x) (1 Punkt) $\binom{3}{3}\binom{4}{1}\binom{19}{1}5! = 9120$.

Zusatzaufgabe 6. Bei einem Würfelspiel werden fünf identische, sechsseitige, faire Würfel geworfen. Zwischen den Würfeln kann nicht unterschieden werden, uns interessieren also nur die verschiedenen Ergebnisse. Bestimmen Sie wie viele verschiedene Ergebnisse es mit den folgenden Bedingungen jeweils gibt.

(i) Genau ein Würfel zeigt eine Fünf, ⚄.

(ii) Keiner der Würfel zeigt eine Eins, ⚀.

(iii) Alle sechs Augenzahlen werden angezeigt.

(iv) Die angezeigen Augenzahlen sind paarweise verschieden.

(v) Die Würfel ergeben ein Full-House, es werden also genau zwei verschiedene Augenzahlen angezeigt, eine davon dreimal, die andere zweimal, zum Beispiel ⚁⚁⚁⚄⚄.

Lösung zu Aufgabe 6. Lösung zu (i). (2 Punkte) Wir nehmen einen der Würfel und stellen ihn so, dass er ⚄ zeigt. Die anderen vier dürfen nun beliebig Zahlen aus der Menge {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚅} zeigen. Wir wählen also $k = 4$ Elemente aus der Menge mit $n = 5$ Elementen aus, mit Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge. Demnach ist die Anzahl der Möglichkeiten

$$\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = 70.$$

Lösung zu (ii). (2 Punkte) Wie in (i), jetzt wählen wir $k = 5$ Elemente aus {⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}, also $n = 5$ Elementen, mit Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge. Demnach ist die Anzahl der Möglichkeiten

$$\binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = 126.$$

Lösung zu (iii). (2 Punkte) Offensichtlich null, da es nur fünf Würfel gibt. Lösung zu (iv). (2 Punkte) Alle fünf Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen genau dann, wenn genau eine Augenzahl nicht angezeigt wird. Es gibt hierfür also sechs Möglichkeiten. Lösung zu (v). (2 Punkte) Für die drei Gleichen gibt es sechs Möglichkeiten. Dann bleiben für die zwei Gleichen noch fünf, da diese verschieden zu den dreien sein müssen. Damit kommen wir auf $6 \cdot 5 = 30$ Möglichkeiten für ein Full-House.

Zusatzaufgabe 7. Gib an, auf wieviele Arten sich 5 Personen in eine reihe setzen können. Wieviel Möglichkeiten gibt es, wenn zwei davon unbedingt nebeneinandersitzen wollen?