07.11.2022

Aufgabenblatt 1 DiMa

Übungsgruppe:
Linus Keiser
Vi Hoang
Simon Kroll

Aufgabe 1.1

a) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

$\{1,2\} = A$

$\{1,2,3\} = D$

$\{3,4\} = B$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\}$

$\Leftrightarrow \{(a,b)\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} = C$

$C \cup D = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \cup \{1,2,3\} = \{m \in M \mid m \in C \lor m \in D\}$

$\Leftrightarrow \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),1,2,3\}$

b)

$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

c)

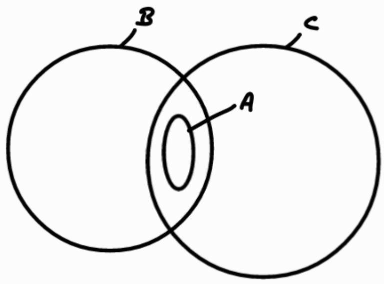
$\bigcap_{i \in \{2,6\}} = \{\frac{i}{2}, i+1\}$

$= \{\frac{2}{2}, 2+1\} \cap \{\frac{6}{2}, 6+1\} = \{1,3\} \cap \{3,7\} = \{3\}$

d)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \{n, n+1, 2n\}$$

Aufgabe 1.2



a) $A \subset B \cap C \iff (A \subset B) \wedge (A \subset C)$

Es gelte: $B \cap C = \{x \mid x \in B \wedge x \in C\}$

und: $A \subset B = \{\forall x \in A : x \in B\}$

Daraus folgt:

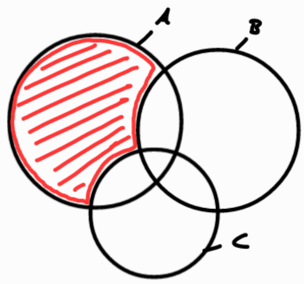
$$A \subset B \cap C \iff x \in A \wedge x \in B \cap C$$

$$\iff x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$$

$$\iff (x \in A \subset x \in B) \wedge (x \in A \subset x \in C)$$

$$\iff (A \subset B) \wedge (A \subset C)$$

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$



Es gelte:

$A \setminus (B \cup C) := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cup C\}$

Daraus folgt:

$A \setminus (B \cup C) \iff \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cup C)$

$\iff \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \cap x \notin C\}$

$\iff \{x \mid x \in A \wedge \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C\}$

$\iff \{x \mid x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C\}$

$\iff (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c)

$\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B = \bigcap_{i \in I} (D_i \cap B)$

$\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B \iff x \in \bigcap_{i \in I} \wedge x \in D_i \wedge x \in B$

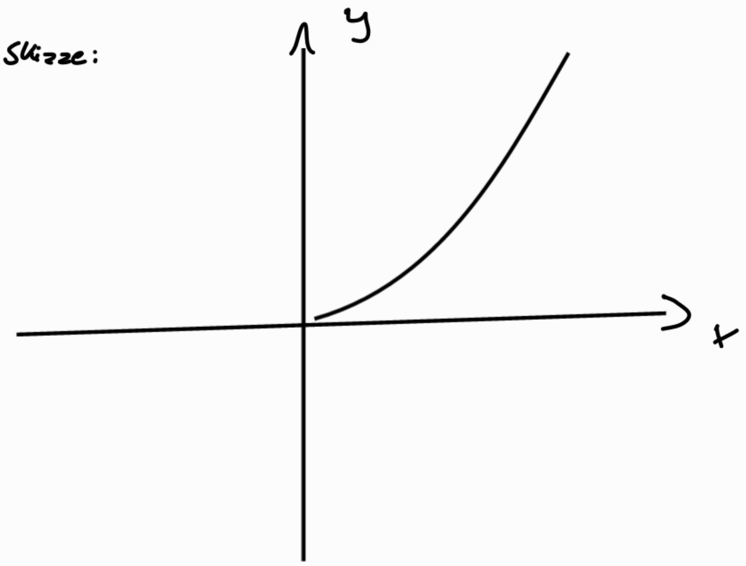
$\iff x \in \bigcap_{i \in I} \wedge x \in D_i \cap B$

$\iff \bigcap_{i \in I} (D_i \cap B)$

Aufgabe 1.3

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_1(n) = n^2$

Skizze:



Surjektiv:

Ja, zu jedem $y \in \mathbb{N}$ gibt es ein Urbild $x \in \mathbb{N}$.

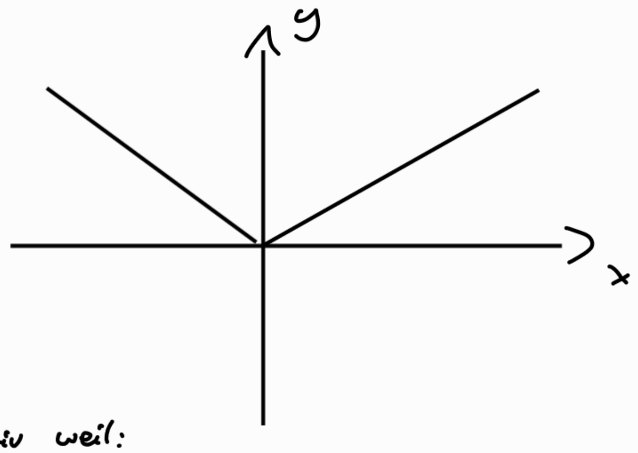
$\forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N}$

Injektiv:

Ja, da für jedes $y \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens ein Urbild $x \in \mathbb{N}$:

$\rightarrow$ Bijektiv, da injektiv und surjektiv

b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f_2(x) = |x|$



Surjektiv:

Ja, $\rightarrow \forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{Z}$

injektiv:

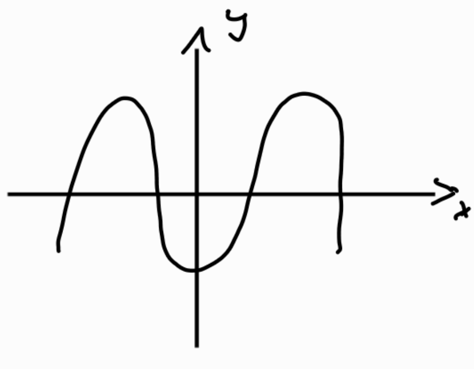
Nein, hier hat jedes $y \in \mathbb{N}$ zwei Urbilder aus $x \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ nicht bijektiv weil:

Surjektiv : wahr
injektiv : falsch

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sin(x)$

Skizze:



surjektiv:

Ja, es gilt:
$\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}$

injektiv:

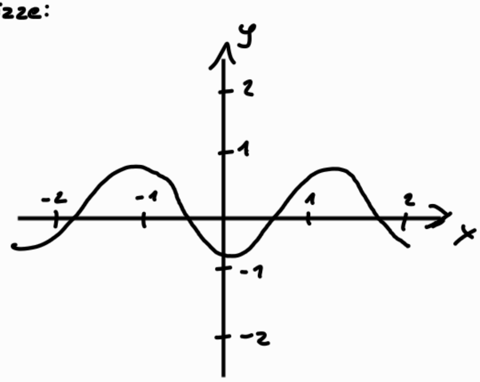
Nicht injektiv, da für $y \in \mathbb{R}$ mehre Urbilder $x \in \mathbb{R}$ existieren.

$\rightarrow$ nicht bijektiv

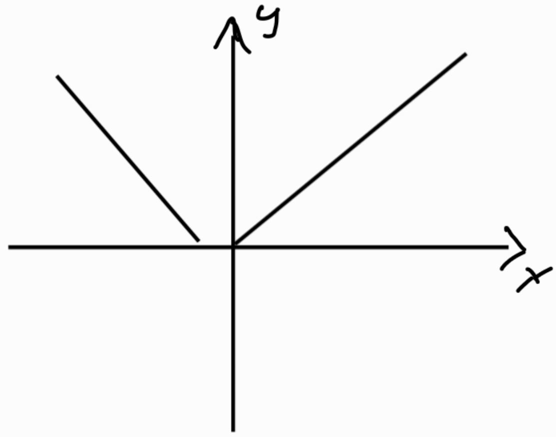
d) $f_4 : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\quad f_4(x) = \sin(x)$

nicht bijektiv, siehe vorherige Aufgabe

Skizze:



e) $f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f_5(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$



surjektiv:

Ja, $\forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{Z}$

für $f_5(x) = -2x-1$ und

$f_5(x) = 2x$

injektiv

Ja, für $f_5(x) = 2x$ und

$f_5(x) = -2x-1$

$\to$ beide Funktionen bijektiv

Aufgabe 1.4

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } b\}$

Reflexiv:

$\forall a \in \mathbb{N} : a \sim a$ ✓ $\to$ Reflexiv

Symmetrisch

$\forall (a,b) \in \mathbb{N}: \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$

für R_1 a teilt b : 2 teilt 4:

$2 - 4 = -2$

$4 - 2 = 2$

$|-2| = 2$ $\to$ Symmetrie ✓

transitivität

$\forall a,b,c \in \mathbb{N} : a \sim b \land b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Wenn :

$a = 2$ teilt $b = 4$, dann $b = 4$ teilt $c = 8$

$\Rightarrow 2 : 4 =$ gerade $\Rightarrow 4 : 8 =$ gerade $\Rightarrow 2 : 8 =$ gerade

$\rightarrow$ transitiv ✓ $\rightarrow$ Äquivalenzrelation

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab$ eine Quadratzahl$\}$

<u>reflexiv</u>

$\forall a \in \mathbb{N}: a \sim a$ ✓ $\rightarrow$ reflexiv

<u>Symmetrisch</u>

$\forall a \in \mathbb{N}: a \sim b \Rightarrow b \sim a$

für ab ist eine Quadratzahl:

$a = b = 2 \subset R_2$

$2 \cdot 2 = 2^2 = 4 \Longleftrightarrow 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$

$\Rightarrow$ Symmetrie ist gegeben

<u>Transitivität:</u>

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: a \sim b \wedge b \sim c \wedge c \sim a$

Für $a = b = c = 2 \subset R_2$

$2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$

Transitiv ✓ $\rightarrow$ Äquivalenzrelation

c) $R_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid (a < c \vee c = a \wedge b < \}$

Reflexivität

$\forall a \in \mathbb{N}^2 : a \sim a$ ✓

Symmetrie