# Lösungen zu Übungsaufgaben 05

Gruppe: Mi 08-10 SR 2, Barbara Rieß

Linus Keiser

30. November 2023

## Aufgabe 17

*Zu zeigen:* Die Folge $(\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $\alpha \cdot a$.

*Beweis.* Gegeben ist eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $a$. Nach der Definition der Konvergenz, für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon/\alpha$, wobei $\alpha$ eine konstante reelle Zahl ist.

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a$. Dafür betrachten wir den Ausdruck $|(\alpha \cdot a_n) - (\alpha \cdot a)|$, der sich zu $\alpha \cdot |a_n - a|$ vereinfacht. Da $|a_n - a| < \varepsilon/\alpha$ für alle $n \geq N$, folgt, dass $\alpha \cdot |a_n - a| < \varepsilon$, und somit $|(\alpha \cdot a_n) - (\alpha \cdot a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Somit konvergiert die Folge $(\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\alpha \cdot a$, da die Bedingung der Konvergenz für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt ist, sobald $n$ groß genug ist. □

### Teil (b)

*Zu zeigen:* Jede Cauchyfolge in $K$ ist beschränkt.

*Beweis.* Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $K$. Nach der Definition einer Cauchyfolge gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt, dass $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Wählen wir speziell $\varepsilon = 1$, dann existiert ein solches $N$.

Für alle $n \geq N$ gilt dann $|b_n - b_N| < 1$, was bedeutet, dass $b_n$ im Intervall $[b_N - 1, b_N + 1]$ liegt. Betrachten wir nun die Folgenglieder $b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}$. Es gibt ein maximales Element $b_{max}$ und ein minimales Element $b_{min}$ bezüglich ihres Betrages.

Wir definieren $M$ als das Maximum von $|b_{max}|$, $|b_{min}|$, und $|b_N + 1|$. Dadurch ist sichergestellt, dass $|b_n| \leq M$ für alle $n < N$ und $|b_n| \leq |b_N + 1| \leq M$ für alle $n \geq N$.

Somit ist die gesamte Folge $(b_n)$ beschränkt, da es ein $M > 0$ gibt, so dass $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

# Aufgabe 18

## Teil (a)

*Zu zeigen:* Für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 3$

*Beweis.* Wir wählen $a_n = n$ und $b_n = \frac{3}{n}$.

Zuerst betrachten wir die Folge $(a_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Für die Folge $(b_n)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0.$$

Für das Produkt der beiden Folgen erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3.$$

Damit sind alle drei Bedingungen erfüllt. □

## Teil (b)

*Zu zeigen:* Für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
- Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

*Beweis.* Wir definieren $a_n = (-1)^n n$ und $b_n = \frac{1}{n}$.

Für $a_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

da die Beträge der Folgenglieder gegen unendlich streben, obwohl die Folge selbst nicht gegen einen spezifischen Wert konvergiert, sondern oszilliert.

Für $b_n$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Für das Produkt $(a_n b_n)$ gilt:

Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)$ ist offensichtlich beschränkt, da sie nur die Werte -1 und 1 annimmt. Jedoch ist sie nicht konvergent, da kein Grenzwert existiert, gegen den die Folge konvergiert.

Somit sind alle geforderten Eigenschaften nachgewiesen. □

# Aufgabe 19

## Teil (a)

*Zu zeigen:* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

*Beweis.* Wir betrachten die Partialbruchzerlegung der Terme der Reihe:

$$\frac{5}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

wobei $A$ und $B$ so gewählt werden, dass die Gleichheit für alle $k$ gilt. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 5$ und $B = -5$, also:

$$\frac{5}{k(k+1)} = \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}$$

Dies führt zu einer teleskopierenden Reihe, deren Partialsummen $S_N$ sich wie folgt verhalten:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) = 5 \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right)$$

Da $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, konvergiert $S_N$ gegen 5.

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$ und ihr Grenzwert ist 5. □

## Teil (b)

*Zu zeigen:* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{n^2+2} - n$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

*Beweis.* Um die Konvergenz der Folge zu zeigen, formen wir $a_n$ um:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2} + n\right)}{\sqrt{n^2+2} + n} = \frac{n^2 + 2 - n^2}{\sqrt{n^2+2} + n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+2} + n}$$

Für große $n$ nähert sich der Term $\sqrt{n^2+2}$ dem Term $n$, und daher strebt der Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ gegen 0.

Somit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, da der Grenzwert der Folge für $n$ gegen unendlich 0 ist. □

# Aufgabe 20

## Teil (a)

*Zu zeigen:* Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis.

**Induktionsanfang (n = 0):**

$$\begin{aligned} a_{0+1} - a_0 &= a_1 - a_0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \\ &= \frac{(-1)^0}{2^0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt für $n = 0$.

**Induktionsschritt:** *Induktionsvoraussetzung:* Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

*Zu zeigen:* Die Behauptung gilt auch für $n + 1$, also

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Aus der Rekursionsformel folgt:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + a_n}{2} - a_{n+1} \\ &= \frac{a_n - a_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{-\frac{(-1)^n}{2^n}}{2} \\ &= -\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung auch für $n + 1$.

Der Induktionsbeweis ist damit abgeschlossen, und die Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

## Teil (b)

*Zu zeigen:* Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{j=1}^{k} (a_{n+j} - a_{n+j-1}).$$

*Beweis.* Zur Beweisführung nutzen wir die Eigenschaft von Teleskopsummen, dass sich in der Summe der aufeinanderfolgenden Differenzen benachbarter Glieder die meisten Terme gegenseitig aufheben.

Betrachten wir die gegebene Summe:

$$\sum_{j=1}^{k} (a_{n+j} - a_{n+j-1}).$$

Jeder Summand kann als Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge interpretiert werden. Indem wir die Terme der Summe einzeln anschreiben, beobachten wir, dass sich aufeinanderfolgende Terme aufheben:

$$\begin{aligned}
&(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \ldots + (a_{n+k} - a_{n+k-1}) \\
&= a_{n+1} - a_n + a_{n+2} - a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} - a_{n+k-1} \\
&= -a_n + a_{n+k}.
\end{aligned}$$

Hier heben sich alle Terme außer $-a_n$ und $a_{n+k}$ auf, was zur Formulierung $a_{n+k} - a_n$ führt.

Somit ist die Gleichung

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{j=1}^{k} (a_{n+j} - a_{n+j-1})$$

formal bewiesen. □

## Teil (c)

*Zu zeigen:* Die durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \text{ für } n = 2, 3, \ldots$$

definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchyfolge.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist, müssen wir beweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Aus Teil (a) wissen wir, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $m > n$ kann $|a_m - a_n|$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{i=n}^{m-1} (a_{i+1} - a_i)\right|$$

Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt:

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |a_{i+1} - a_i| = \sum_{i=n}^{m-1} \left|\frac{(-1)^i}{2^i}\right|$$

Da $\left|\frac{(-1)^i}{2^i}\right| = \frac{1}{2^i}$, haben wir:

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^i}$$

Diese Summe ist eine endliche geometrische Reihe, die sich zu $2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 2^{-m}$ vereinfacht. Für $m, n \geq N(\varepsilon)$ mit $N(\varepsilon) = \lceil -\log_2(\varepsilon/2) \rceil$, ist:

$$|a_m - a_n| \leq 2 \cdot 2^{-n} < \varepsilon.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge. □