Lösungen zu Übungsaufgaben 07

Gruppe: Mi 08-10 SR 2, Barbara Rieß

Linus Keiser

13. Dezember 2023

Aufgabe 25

(a) Betragssummennorm

Zu zeigen: die Abbildung $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Beweis. Wir überprüfen die Normeigenschaften (N1) bis (N4).

(N1) Positivität: Da der Betrag einer jeden reellen Zahl nichtnegativ ist, folgt, dass die Summe der Beträge der Komponenten von x ebenfalls nichtnegativ ist. Daher gilt $\|x\|_1 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(N2) Definitheit: Es gilt $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn jeder Betrag $|x_k| = 0$ für $k = 1, \dots, n$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes $x_k = 0$ ist. Daher ist $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(N3) Homogenität: Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten wir $\|\alpha x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\alpha x_k|$. Aufgrund der Eigenschaften des Betrags gilt $|\alpha x_k| = |\alpha||x_k|$. Daher ist $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\alpha|\|x\|_1$.

(N4) Dreiecksungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, gilt $\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|$. Aufgrund der Dreiecksungleichung für Beträge folgt $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$. Daher ist $\|x + y\|_1 \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Damit sind die Normeigenschaften für $\|x\|_1$ gezeigt. □

(b) Maximumsnorm

Zu zeigen: die Abbildung $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Beweis. Hierbei überprüfen wir erneut die Normeigenschaften (N1) bis (N4).

(N1) Positivität: Das Maximum einer Menge nichtnegativer Zahlen ist nichtnegativ. Da die Beträge der Komponenten von x nichtnegativ sind, folgt, dass $\|x\|_\infty \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(N2) Definitheit: Wenn $\|x\|_\infty = 0$, dann ist das Maximum der Beträge der Komponenten von x null. Dies bedeutet, dass jede Komponente x_k null sein muss, und somit ist $x = 0$.

(N3) Homogenität: Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten wir $\|\alpha x\|_\infty$. Es gilt $\|\alpha x\|_\infty = \max\{|\alpha x_1|, ..., |\alpha x_n|\} = |\alpha| \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = |\alpha|\|x\|_\infty$, was aus den Eigenschaften des Betrags folgt.

(N4) Dreiecksungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, ..., |x_n + y_n|\}$. Unter Anwendung der Dreiecksungleichung für Beträge ergibt sich $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$. Daher ist $\|x + y\|_\infty \leq \max\{|x_k| + |y_k|, ..., |x_n| + |y_n|\}$. Da für jede Komponente gilt, dass $|x_k|, |y_k| \leq \|x\|_\infty, \|y\|_\infty$, folgt, dass $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Damit sind die Normeigenschaften (N1) bis (N4) für $\|x\|_\infty$ gezeigt. □

Aufgabe 26

Ziel: Umformung in die Form $z = x + iy$ und Berechnung von Realteil, Imaginärteil und Betrag.

(a) $z = (3+4i)(2-i)^2 - (5-i) + 27$

Zunächst erweitern wir den quadratischen Term $(2-i)^2$. Unter Verwendung der binomischen Formel und der Eigenschaft $i^2 = -1$ gilt:

$$\begin{aligned}(2-i)^2 &= (2-i)(2-i) \\ &= 2^2 - 2\cdot 2\cdot i + i^2 \\ &= 4 - 4i - 1 \\ &= 3 - 4i.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem verbundenen Term $(3+4i)$ erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned}(3+4i)(3-4i) &= (3+4i)\cdot(3-4i) \\ &= 25.\end{aligned}$$

Zusammen mit den anderen Termen ergibt sich:

$$\begin{aligned}z &= 25 - (5-i) + 27 \\ &= 25 - 5 + i + 27 \\ &= 47 + i.\end{aligned}$$

Daher ist der Realteil $x = 47$, der Imaginärteil $y = 1$ und der Betrag von z ist $|z| = \sqrt{47^2 + 1^2} = \sqrt{2210}$.

(b) $z = \frac{7-3i}{6i-4}$

Wir vereinfachen den Bruch durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der konjugierten Zahl des Nenners. Dies führt zu einem reellen Nenner. Die konjugierte Zahl zu $6i-4$ ist $-4+6i$. Damit ist der vereinfachte Bruch

$$\begin{aligned}z &= \frac{7-3i}{6i-4}\cdot\frac{-6i-4}{-6i-4} \\ &= \frac{(7-3i)(-6i-4)}{(6i-4)(-6i-4)}.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation im Zähler und Nenner erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\text{Zähler: } (7-3i)(-6i-4) &= 7(-6i) - 7\cdot 4 - 3i(-6i) - 3i\cdot 4 \\
&= -42i - 28 + 18i^2 - 12i \\
&= -42i - 28 - 18 - 12i \\
&= -46 - 54i. \\
\text{Nenner: } (6i-4)(-6i-4) &= 6i(-6i) - 6i\cdot 4 - 4(-6i) - 4\cdot 4 \\
&= -36i^2 + 24i + 24i + 16 \\
&= 36 + 48i + 16 \\
&= 52.
\end{aligned}$$

Vereinfacht ergibt sich:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-46-54i}{52} \\
&= -\frac{23}{26} - \frac{15i}{26}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir also:

$$\begin{aligned}
\text{Realteil: } x &= -\frac{23}{26}, \\
\text{Imaginärteil: } y &= -\frac{15}{26}, \\
\text{Betrag: } |z| &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{23}{26}\right)^2 + \left(-\frac{15}{26}\right)^2} = \frac{\sqrt{754}}{26}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 27

(a)

Wir zeigen, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ gilt.

Beweis. Es sei

1. $z = x + yi$, wobei x der Realteil und y der Imaginärteil von z ist (und i die imaginäre Einheit).
2. $w = u + vi$, wobei u der Realteil und v der Imaginärteil von w ist.

Wir berechnen die linke und rechte Seite der Gleichung $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und zeigen, dass beide Seiten identisch sind. Für die linke Seite gilt:

$$z + w = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i.$$

Dann ist $\overline{z+w} = \overline{(x+u)+(y+v)i} = (x+u)-(y+v)i$. Für die rechte Seite $\overline{z}+\overline{w}$ gilt:

$$\begin{aligned}\overline{z}+\overline{w} &= \overline{x+yi}+\overline{u+vi}\\ &= x-yi+u-vi\\ &= (x+u)-(y+v)i.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die linke und rechte Seite identisch sind. Daher ist die Gleichung $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ wahr. □

(b)

Wir zeigen, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gilt.

Beweis. Es gelte die Definition von z und w wie in (a). Wir berechnen die linke und rechte Seite der Gleichung $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und zeigen, dass beide Seiten identisch sind. Zuerst berechnen wir wir:

$$\begin{aligned}z \cdot w &= (x+yi)\cdot(u+vi)\\ &= xu + xvi + yiu + yvi^2\\ &= (xu-yv)+(xv+yu)i. \quad \text{Da } i^2 = -1 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(xu-yv)+(xv+yu)i}\\ &= (xu-yv)-(xv+yu)i.\end{aligned}$$

Für die rechte Seite $\overline{z}\cdot\overline{w}$ gilt:

$$\begin{aligned}\overline{z}\cdot\overline{w} &= \overline{x+yi}\cdot\overline{u+vi}\\ &= x-yi\cdot u-vi\\ &= xu - xvi - yui + yvi^2\\ &= (xu-yv)-(xv+yu)i.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die linke und rechte Seite identisch sind. Daher ist die Gleichung $\overline{z \cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ wahr. □

(c)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ gilt.

Beweis. Es gelte die Definition von z wie in (a). Das komplex Konjugierte von z ist $\overline{z} = x - yi$. Dann ist

$$\begin{aligned}z+\overline{z} &= (x+yi)+(x-yi)\\ &= 2x.\end{aligned}$$

Der Realteil von z ist x, also ist $2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Daher ist die Gleichung $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wahr. □

(d)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ gilt.

Beweis. Es gelte die Definition von z wie in (a). Das komplex Konjugierte von z ist $\overline{z} = x - yi$. Dann ist

$$\begin{aligned} z - \overline{z} &= (x + yi) - (x - yi) \\ &= 2yi. \end{aligned}$$

Der Imaginärteil von z ist y, also ist $2yi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. Daher ist die Gleichung $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wahr. □

(e)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z\overline{z} \geq 0$ und $z\overline{z} = 0 \leftrightarrow z = 0$ gilt.

Beweis. Es gelte wieder die Definition von z wie in (a). Für $z\overline{z}$ gilt:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x + yi)(x - yi) \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $z\overline{z} \geq 0$, weil sowohl x^2 als auch y^2 als Quadrate reeler Zahlen immer positiv sind, also ist auch die Summe $x^2 + y^2 \geq 0$. Für die Bedingung der Äquivalenz gilt für die Hinrichtung, dass wenn $z\overline{z} = 0$ ist, dann muss $x^2 + y^2 = 0$ sein. Da Quadrate nur dann null sind, wenn die Basis null ist, folgt $x = 0$ und $y = 0$. Also ist $z = 0$. Für die Rückrichtung gilt, dass wenn $z = 0$ ist, dann ist offensichtlich $x = 0$ und $y = 0$, und somit ist$z\overline{z} = x^2 + y^2 = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $z\overline{z}$ immer nichtnegativ ist und nur dann null wird, wenn z selbst null ist. □

Aufgabe 28

(a)

Satz 1. *Es gilt $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.*

betrachten die Behauptung $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$