Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
E. Viada, P. Buterus

Diskrete Mathematik für Studierende der Informatik
Wintersemester 2022/23

Aufgabenblatt 1

Abgabe bis Montag, 07.11.2022, 16:00 Uhr.

Name(n)	Übungsgruppe	1	2	3	4	Σ
						/40

Bitte verwenden Sie unbedingt die Form: **DiMa01_Nachname1_N2_N3_N4.pdf**. Details zum Abgabeort folgen in den Übungsgruppen. Abgabe als Gruppe bis zu 4 Personen erlaubt, mindestens 2er-Abgabe!

Aufgabe 1.1 (8 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

b) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

c) $\bigcap_{i\in\{2,6\}} \left\{\frac{i}{2}, i+1\right\}$

d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n, n+1, 2n\}$

Aufgabe 1.2 (12 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $A \subset B \cap C \;\leftrightarrow\; (A \subset B) \wedge (A \subset C)$

b) $A \setminus (B \cup C) \;=\; (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c) $\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) \cap B \;=\; \bigcap_{i\in I} (D_i \cap B)$

Hinweis: In der Logik steht $\leftrightarrow$ für *genau dann, wenn*, $\wedge$ für *und* (und $\vee$ für *oder*).

Aufgabe 1.3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils, ob diese surjektiv, injektiv und/oder bijektiv sind.

a) $f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_1(n) = n^2$

b) $f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f_2(x) = |x|$

c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sin(x)$

d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}, \quad f_4(x) = \sin(x)$

e) $f_5\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f_5(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv sind.

a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } b\}$

b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab \text{ ist eine Quadratzahl.}\}$

c) $R_3 = \Big\{\big((a, b), (c, d)\big) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \;\Big|\; (a < c) \;\vee\; (c = a \wedge b < d)\Big\}$

Hinweis: Eine Relation heißt *Äquivalenzrelation*, falls diese reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Für die folgenden Zusatzaufgaben gibt es keine Punkte und diese sollen auch nicht mit abgegeben werden. Nutzen Sie diese, wenn Sie weitergehend üben möchten.

Zusatzaufgabe. Beweisen Sie die folgende Aussage oder widerlegen Sie diese durch Angabe eines Gegenbeispiels:
Seien A_1, A_2 und A_3 beliebige Mengen, sodass $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ gelten, dann folgt $\bigcap_{i \in 1,2,3} A_i \neq \emptyset$.

Zusatzaufgabe. Beweisen Sie die beiden Aussagen aus der Vorlesung:

a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \emptyset$

b) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

Zusatzaufgabe. Entscheiden Sie, welche der Eigenschaften aus Aufgabe 1.3 auf die Funktion $f : \emptyset \to \mathbb{N}$ zutrifft, und welche der Eigenschaften aus Aufgabe 1.4 auf die Relation $\emptyset \subset A \times A$.