Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 7**

Abgabe: Donnerstag, den 14. Dezember 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 25** *(Normen, $\mathbb{R}^n$)* 2+2 Punkte
   Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

   (a) $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,

   (b) $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$.

   Beweisen Sie also für die in (a) und (b) definierten Abbildungen die Normeigenschaften (N1) - (N4). Die in (a) definierte Abbildung heißt „Betragssummennorm“ und die in (b) definierte Abbildung heißt „Maximumsnorm“.

2. **Aufgabe 26** *(Komplexe Zahlen, Rechnen)* 2+2 Punkte
   Schreiben sie folgende komplexe Zahlen in der Form $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie jeweils den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag.

   (a) $z = (3 + 4\,\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})^2 - (5 - \mathrm{i}) + 27$

   (b) $z = \dfrac{7 - 3\,\mathrm{i}}{6\,\mathrm{i} - 4}$

3. **Aufgabe 27** *(Komplexe Zahlen, Rechenregeln)* 0.5+0.5+0.5+0.5+1 Punkte
   Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Regeln gelten:

   (a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

   (b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

   (c) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$,

   (d) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z)$,

   (e) $z\overline{z} \geq 0$ (d. h. $z\overline{z}$ ist insbesondere reell) und ($z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$).

   Hierbei ist $\mathrm{Re}(z) := x$ der *Realteil* und $\mathrm{Im}(z) := y$ der *Imaginärteil* von $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) und $\overline{z} := x - \mathrm{i}\, y$ die zu z *komplex konjugierte* Zahl.

4. **Aufgabe 28** *(Einheitswurzeln)* 2+1+2 Punkte
   Sei $n \in \mathbb{N}$ und

   $$z_{k,n} := \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad \text{für } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

   (a) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   i. $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ für alle $z = |z|(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$

ii. $z_{k,n}^n = 1$ für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

(b) Berechnen Sie für $n = 4$ die Punkte $z_{k,4}$ für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Skizzieren Sie die Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

und die Punkte $z_{0,4}, z_{1,4}, z_{2,4}$ und $z_{3,4}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.