# Lösungen zu Übungsaufgaben 07

Gruppe: Mi 08-10 SR 2, Barbara Rieß

Linus Keiser

13. Dezember 2023

## Aufgabe 25

### (a) Betragssummennorm

*Zu zeigen:* die Abbildung $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

*Beweis.* Wir überprüfen die Normeigenschaften (N1) bis (N4).

**(N1) Positivität:** Da der Betrag einer jeden reellen Zahl nichtnegativ ist, folgt, dass die Summe der Beträge der Komponenten von $x$ ebenfalls nichtnegativ ist. Daher gilt $\|x\|_1 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

**(N2) Definitheit:** Es gilt $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn jeder Betrag $|x_k| = 0$ für $k = 1, \dots, n$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes $x_k = 0$ ist. Daher ist $\|x\|_1 = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

**(N3) Homogenität:** Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten wir $\|\alpha x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k|$. Aufgrund der Eigenschaften des Betrags gilt $|\alpha x_k| = |\alpha||x_k|$. Daher ist $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\alpha|\|x\|_1$.

**(N4) Dreiecksungleichung:** Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, gilt $\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|$. Aufgrund der Dreiecksungleichung für Beträge folgt $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$. Daher ist $\|x + y\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Damit sind die Normeigenschaften für $\|x\|_1$ gezeigt. □

### (b) Maximumsnorm

*Zu zeigen:* die Abbildung $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

*Beweis.* Hierbei überprüfen wir erneut die Normeigenschaften (N1) bis (N4).

**(N1) Positivität:** Das Maximum einer Menge nichtnegativer Zahlen ist nichtnegativ. Da die Beträge der Komponenten von $x$ nichtnegativ sind, folgt, dass $\|x\|_\infty \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

**(N2) Definitheit:** Wenn $\|x\|_\infty = 0$, dann ist das Maximum der Beträge der Komponenten von $x$ null. Dies bedeutet, dass jede Komponente $x_k$ null sein muss, und somit ist $x = 0$.

**(N3) Homogenität:** Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, betrachten wir $\|\alpha x\|_\infty$. Es gilt $\|\alpha x\|_\infty = \max\{|\alpha x_1|, ..., |\alpha x_n|\} = |\alpha| \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = |\alpha|\|x\|_\infty$, was aus den Eigenschaften des Betrags folgt.

**(N4) Dreiecksungleichung:** Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, ..., |x_n + y_n|\}$. Unter Anwendung der Dreiecksungleichung für Beträge ergibt sich $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$. Daher ist $\|x + y\|_\infty \leq \max\{|x_k| + |y_k|, ..., |x_n| + |y_n|\}$. Da für jede Komponente gilt, dass $|x_k|, |y_k| \leq \|x\|_\infty, \|y\|_\infty$, folgt, dass $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Damit sind die Normeigenschaften (N1) bis (N4) für $\|x\|_\infty$ gezeigt. □

## Aufgabe 26

*Ziel:* Umformung in die Form $z = x + iy$ und Berechnung von Realteil, Imaginärteil und Betrag.

**(a)** $z = (3 + 4i)(2 - i)^2 - (5 - i) + 27$

Zunächst erweitern wir den quadratischen Term $(2 - i)^2$. Unter Verwendung der binomischen Formel und der Eigenschaft $i^2 = -1$ gilt:

$$\begin{aligned}(2 - i)^2 &= (2 - i)(2 - i) \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 \\ &= 4 - 4i - 1 \\ &= 3 - 4i.\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem verbundenen Term $(3 + 4i)$ erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(3 - 4i) &= (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) \\ &= 25.\end{aligned}$$

Zusammen mit den anderen Termen ergibt sich:

$$\begin{aligned}z &= 25 - (5 - i) + 27 \\ &= 25 - 5 + i + 27 \\ &= 47 + i.\end{aligned}$$

Daher ist der Realteil $x = 47$, der Imaginärteil $y = 1$ und der Betrag von $z$ ist $|z| = \sqrt{47^2 + 1^2} = \sqrt{2210}$.

**(b)** $z = \frac{7-3i}{6i-4}$

Wir vereinfachen den Bruch durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der konjugierten Zahl des Nenners. Dies führt zu einem reellen Nenner. Die konjugierte Zahl zu $6i - 4$ ist

$$\text{Konjugierte: } 6i - 4 \to -6i - 4.$$

Damit ist der vereinfachte Bruch

$$\begin{aligned}z &= \frac{7 - 3i}{6i - 4} \cdot \frac{-6i - 4}{-6i - 4} \\ &= \frac{(7 - 3i)(-6i - 4)}{(6i - 4)(-6i - 4)} \\ &= \frac{-46 - 30i}{52}.\end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir:

$$z = -\frac{23}{26} - \frac{15i}{26}.$$

Daher ist der Realteil $x = -\frac{23}{26}$, der Imaginärteil $y = -\frac{15}{26}$ und der Betrag von $z$ ist $|z| = \sqrt{\left(-\frac{23}{26}\right)^2 + \left(-\frac{15}{26}\right)^2}$.

# Aufgabe 27

## (a)

Wir zeigen, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ gilt.

*Beweis.* Es sei

1. $z = x + yi$, wobei $x$ der Realteil und $y$ der Imaginärteil von $z$ ist (und $i$ die imaginäre Einheit).
2. $w = u + vi$, wobei $u$ der Realteil und $v$ der Imaginärteil von $w$ ist.

Wir berechnen die linke und rechte Seite der Gleichung $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und zeigen, dass beide Seiten identisch sind. Für die linke Seite gilt:

$$z + w = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i.$$

Dann ist $\overline{z+w} = \overline{(x+u) + (y+v)i} = (x + u) - (y + v)i$. Für die rechte Seite $\overline{z} + \overline{w}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{z} + \overline{w} &= \overline{x + yi} + \overline{u + vi} \\
&= x - yi + u - vi \\
&= (x + u) - (y + v)i.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die linke und rechte Seite identisch sind. Daher ist die Gleichung $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ wahr. □

## (b)

Wir zeigen, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gilt.

*Beweis.* Es gelte die Definition von $z$ und $w$ wie in (a). Wir berechnen die linke und rechte Seite der Gleichung $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und zeigen, dass beide Seiten identisch sind. Zuerst berechnen wir wir:

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (x + yi) \cdot (u + vi) \\
&= xu + xvi + yiu + yvi^2 \\
&= (xu - yv) + (xv + yu)i. \quad \text{Da } i^2 = -1 \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\overline{z \cdot w} &= \overline{(xu - yv) + (xv + yu)i} \\
&= (xu - yv) - (xv + yu)i.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite $\overline{z} \cdot \overline{w}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{z} \cdot \overline{w} &= \overline{x + yi} \cdot \overline{u + vi} \\
&= x - yi \cdot u - vi \\
&= xu - xvi - yui + yvi^2 \\
&= (xu - yv) - (xv + yu)i.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die linke und rechte Seite identisch sind. Daher ist die Gleichung $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ wahr. $\square$

### (c)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ gilt.

*Beweis.* Es gelte die Definition von $z$ wie in (a). Das komplex Konjugierte von $z$ ist $\overline{z} = x - yi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z + \overline{z} &= (x + yi) + (x - yi) \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Der Realteil von $z$ ist $x$, also ist $2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Daher ist die Gleichung $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wahr. $\square$

### (d)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ gilt.

*Beweis.* Es gelte die Definition von $z$ wie in (a). Das komplex Konjugierte von $z$ ist $\overline{z} = x - yi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z - \overline{z} &= (x + yi) - (x - yi) \\
&= 2yi.
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil von $z$ ist $y$, also ist $2yi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. Daher ist die Gleichung $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ wahr. $\square$

### (e)

Wir zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Regel $z\overline{z} \geq 0$ und $z\overline{z} = 0 \leftrightarrow z = 0$ gilt.

*Beweis.* Es gelte wieder die Definition von $z$ wie in (a). Für $z\overline{z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
z\overline{z} &= (x + yi)(x - yi) \\
&= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $z\overline{z} \geq 0$, weil sowohl $x^2$ als auch $y^2$ als Quadrate reeler Zahlen immer positiv sind, also ist auch die Summe $x^2 + y^2 \geq 0$. Für die Bedingung der Äquivalenz gilt für die Hinrichtung, dass wenn $z\overline{z} = 0$ ist, dann muss $x^2 + y^2 = 0$ sein. Da Quadrate nur dann null sind, wenn die Basis null ist, folgt $x = 0$ und $y = 0$. Also ist $z = 0$. Für die Rückrichtung gilt, dass wenn $z = 0$ ist, dann ist offensichtlich $x = 0$ und $y = 0$, und somit ist$z\overline{z} = x^2 + y^2 = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $z\overline{z}$ immer nichtnegativ ist und nur dann null wird, wenn $z$ selbst null ist. $\square$

# Aufgabe 28

## (a) i

**Satz.** Es gilt $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ für alle $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

*Beweis.* Gegeben ist $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ in der Polarform.

Wir wollen $z^n$ bestimmen. Da $z$ in Polarform vorliegt können wir die Moivre'sche Formel anwenden, die besagt, dass $(r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{R}$. In unserem Fall ist dann In unserem Fall ist $r = |z|$ und $\theta = \varphi$.

Durch einsetzen der Werte in die Moivre'sche Formel erhalten wir:

$$z^n = (|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Das ist genau die Formel, die wir zeigen wollten. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

## (a) ii

**Satz.** Es gilt $z_{k,n}^n = 1$ für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

*Beweis.* Gegeben ist $z_{k,n} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, eine Darstellung von $z_{k,n}$ in der Polarform, mit dem Betrag $|z_{k,n}| = 1$ (da Kosinus und Sinus auf dem Einheitskreis liegen) und dem Argument $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$. Wie zuvor nutzen wir die Moivre'sche Formel. Für $z^n$, wobei $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, gilt $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Für $z_{k,n}$ wird dies zu $z_{k,n}^n = (\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right))^n$. Für $z_{k,n}^n$ gilt dann:

$$z_{k,n}^n = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)^n = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k).$$

Ferner ist $\cos(2\pi k) = 1$ und $\sin(2\pi k) = 0$, da $2\pi k$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$ ist, und der Kosinus und Sinus von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi$ sind jeweils 1 bzw. 0. Daher ist $z_{k,n}^n = 1$ für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. $\square$

## (b)

Wir berechnen zunächst die Punkte $z_{k,4}$ mit der algemeinen Formel $z_{k,n} = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n})$. Für $n = 4$ und $k = 0, 1, 2, 3$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
z_{0,4} &= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 0}{4}\right) \\
z_{1,4} &= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 1}{4}\right) \\
z_{2,4} &= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 2}{4}\right) \\
z_{3,4} &= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 3}{4}\right)
\end{aligned}$$

Die Menge $K$ ist der Einheitskreis in der komplexen Ebene, definiert durch $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Der Einheitskreis $K$ ist definiert als die Menge aller Punkte in der Ebene, deren Entfernung vom Ursprung genau 1 ist, was durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ausgedrückt wird. Die Punkte $z_{k,4}$ werden auf dem Einheitskreis $K$ liegen, da $|z_{k,4}| = 1$ für alle $k$. Sie repräsentieren die vierten Einheitswurzeln und sind durch ihre Winkel $\frac{2\pi k}{4}$ für $k = 0, 1, 2, 3$ bestimmt.

- $z_{0,4}$ liegt bei $(1, 0)$,
- $z_{1,4}$ bei $(0, 1)$,
- $z_{2,4}$ bei $(-1, 0)$,
- $z_{3,4}$ bei $(0, -1)$.

Damit ergibt sich folgende Darstellung der Punkte $z_{k,4}$ in der komplexen Ebene: