Lösungen zu Übungsblatt 10.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ von

(i) $f(x) = x^4 + \bar{6}x^3 + \bar{6}x^2 + 4x + \bar{4}$,

(ii) $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1}$.

Lösung zu Aufgabe 1. Da in $Z/7Z$ nur $\bar{0}, \ldots, \bar{6}$ als Nullstelle in Frage kommen, können wir diese alle einfach durchprobieren. Es ergibt sich dadurch, dass $\bar{1}$ und $\bar{4}$ die beiden Nullstellen von $f(x)$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sind und $\bar{1}$ die beiden Nullstellen von $g(x)$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Berechnen Sie jeweils $q(x), r(x) \in K[X]$ mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und grad(g) > grad(r) für die Polynome

$$f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{3}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{2} \quad \text{und} \quad g(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}.$$

Lösung zu Aufgabe 2. Mit der Polynomdivision erhalten wir $q(x), r(x) \in K[X]$ mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und grad(g) > grad(r).

- $q(x) = \bar{2}x^2 + \bar{4}x$,
- $r(x) = \bar{4}x + \bar{2}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Berechnen Sie jeweils $q(x), r(x) \in K[X]$ mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und grad(g) > grad(r) für die Polynome

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{1} \quad \text{und} \quad g(x) = \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 3. Mit der Polynomdivision erhalten wir $q(x), r(x) \in K[X]$ mit

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

und grad(g) > grad(r).

- $q(x) = \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$,
- $r(x) = x + \bar{3}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $7|(10^k - 1)$.

Lösung zu Aufgabe 4. Das ist gleichbedeutend mit geben die Ordnung von 10 in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Wir haben $\bar{a}^6 \equiv 1 \mod 7$ (Aufgabe 1, Übungsblatt 8) und $10 \equiv 3 \mod 7$, $10^2 \equiv 2 \mod 7$, $10^3 \equiv 6 \mod 7$, $10^4 \equiv 4 \mod 7$, $10^5 \equiv 5 \mod 7$. Daher ist $k = 6$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft und liegt in der Ordnung von 10.

Zusatzaufgabe 5. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Gleichung $\mathrm{ord(g)} = \mathrm{ord(g^{-1})}$ gilt.