Lösungen zu Übungsblatt 9.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob der Chinesische Restsatz auch für nicht teilerfremde n und k gilt. Das heißt: Beweisen ober wiederleegen Sie die folgende Aussage:

$$\mathbb{Z}/nk\mathbb{Z} \text{ ist isomorph zu } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \text{ für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Lösung zu Aufgabe 1. Dies folgt aus dem Beweis des Theorems 5.74 auf der Buchseite 139.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $\bar{a}$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wobei

(i) $a = 8$, $p = 17$;

(ii) $a = 5$, $p = 43$;

(iii) *Zusatzaufgabe:* $a = 12$, $p = 101$.

Geben Sie das Inverse als Element aus $\{\bar{0}, \cdots, \overline{p-1}\}$ an.

Lösung zu Aufgabe 2. Wir wissen, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist, da p eine Primzahl ist. Daher gibt es für jedes $\bar{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein $\bar{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so dass $a \cdot b \equiv 1 \mod p$. Das bedeutet, dass wir diese Gleichung lösen müssen.

(i) $b = 15$.

(ii) $b = 26$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Kongruenzen jeweils, ob diese lösbar sind oder nicht. Geben Sie gegebenenfalls eine Lösung an:

(i) $56 \cdot x \equiv 2 \mod 93$,

(ii) $22 \cdot x \equiv 11 \mod 1212$,

(iii) *Zusatzaufgabe:* $14 \cdot x \equiv 35 \mod 273$.

Lösung zu Aufgabe 3. Wir kennen das Lösungsprinzip, da

$$a \cdot x \equiv c \mod n$$

genau dann lösbar ist, wenn

$$a \cdot x + n \cdot y = c$$

lösbar ist. Zu prüfen ist also, ob $\mathrm{ggT(a, n)|c}$ gilt (2 Punkte). Den ggT kann man hier wieder durch den euklidischen Algorithmus finden.

(i) Hier gilt $\mathrm{ggT}(56, 93) = 1$ und $1|2$, also ist die Kongruenz lösbar. (4 Punkte)

(ii) Da $2|22$ und $2|1212$ ist $\mathrm{ggT}(22, 1212)$ gerade und kann damit nicht 11 teilen. Die Kongruenz ist daher nicht lösbar. (4 Punkte)

(iii) Es ist $\mathrm{ggT}(14, 273) = 7$ und $7|35$, die Kongruenz ist lösbar.

Für i) finden wir, dass

$$56 \cdot 2 = 112 \equiv 19 \mod 93$$

und damit ist dann

$$56 \cdot 10 = 56 \cdot 2 \cdot 5 \equiv 19 \cdot 5 = 95 \equiv 2 \mod 93$$

und somit ist $x = 10$ eine Lösung.

Für iii) finden wir, dass

$$20 \cdot 14 = 280 \equiv 7 \mod 273$$

und da $7 + 14 + 14 = 35$ ist demnach $22 \cdot 14 \equiv 35 \mod 273$ und daher $x = 22$ eine Lösung.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils, ob es eine Lösung gibt, welche alle der angegebenen Kongruenzen gleichzeitig löst. Geben Sie gegebenenfalls eine Lösung an.

(i) $x \equiv 3 \mod 5$, und $x \equiv 5 \mod 7$;

(ii) $x \equiv 3 \mod 9$, und $x \equiv 16 \mod 23$;

(iii) *Zusatzaufgabe:* $x \equiv 7 \mod 8$, und $x \equiv 2 \mod 12$, und $x \equiv 4 \mod 15$;

(iv) *Zusatzaufgabe:* $x \equiv 1 \mod 3$, und $x \equiv 2 \mod 5$, und $x \equiv 3 \mod 8$.

Hinweis: Benutzen Sie hierfür den chinesischen Restsatz.

Lösung zu Aufgabe 4. Sie können dem Beispiel 5.75 der Seite 140 des Buches folgen.

(i) $x \equiv 33 \mod 35$,

(ii) $x \equiv 39 \mod 207$.