Universität Göttingen — Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Prof. Dr. G. Plonka-Hoch — M.Sc. Y. Riebe

Mathematik für Studierende der Informatik I

Übungen zur Vorlesung im WS 2023/2024 - **Blatt 6**

Abgabe: Donnerstag, den 07. Dezember 2023, bis 10.15h.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösungen jeweils Ihren Namen, den Namen Ihres Übungsgruppenleiters sowie ihre Übungsgruppennummer!

---

1. **Aufgabe 21** *(Harmonische Reihe, Cauchyfolge)* 2 Punkte

   Zeigen Sie direkt mithilfe der Definition einer Cauchyfolge, dass die durch
   $$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.

2. **Aufgabe 22** *(Cauchyfolgen, Arithmetische Operationen)* 3+3 Punkte

   In der Vorlesung wurden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als die Menge der Äquivalenzklassen $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ von Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ eingeführt.
   Es wurden dann die Addition und Multiplikation durch
   $$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$
   definiert. Hierfür muss gezeigt werden, dass diese Definition korrekt ist. Zeigen Sie also:

   (a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ sind, so ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ sind, so ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{a}_n \cdot \tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Tipp: Es wird die Dreiecksungleichung benötigt und für Teil (b) ist es hilfreich, die Aussage aus Aufgabe 17 (b) zu verwenden.

3. **Aufgabe 23** *(Abzählbarkeit)* 2+2 Punkte

   Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Wenn M und N abzählbare Mengen sind, dann ist auch $M \cup N$ abzählbar.

   (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar.

4. **Aufgabe 24** *($\mathbb{R}^n$, Vektorraum)* 4 Punkte

   Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^n$ durch
   $$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$
   und
   $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
   für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ wird.