Lösungen zu Übungsaufgaben 01

Gruppe: Do 08-10 HS 3, Runa Pflume

39/40 Punkte

Linus Keiser

November 5, 2023

Notiz: Aufgrund einer Erkrankung in den ersten zwei Vorlesungswochen konnte ich noch keine Lerngruppe finden. Daher reiche ich die Lösungen zu den Übungsaufgaben dieser Woche eigenständig ein. Ich bemühe mich aktiv um Anschluss an eine Gruppe und hoffe, dass Sie unter diesen Umständen meine Einzelabgabe für diese Woche entschuldigen.

Aufgabe 1 10/10

(i) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Die Identität $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ist **falsch**.

Gegenbeispiel: Seien A und B nicht-leere, disjunkte Mengen, d.h., $A \cap B = \emptyset$. Betrachten wir ein Element $a \in A$ und ein Element $b \in B$. Die Menge $\{a, b\}$ ist ein Element von $\mathcal{P}(A \cup B)$, aber nicht von $\mathcal{P}(A)$ oder $\mathcal{P}(B)$. Folglich ist $\{a, b\}$ nicht in $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, was beweist, dass die Gleichheit nicht gilt.

(ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Die Identität $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ist **wahr**.

Beweis: Sei X eine Teilmenge von $A \cap B$, d.h. $X \subseteq A \cap B$. Dann gilt $X \subseteq A$ und $X \subseteq B$, also ist X in $\mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B)$. Daher ist X in $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Umgekehrt, sei X ein Element von $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dann ist X eine Teilmenge von A und B, d.h. $X \subseteq A$ und $X \subseteq B$. Also ist $X \subseteq A \cap B$, und daher ist X ein Element von $\mathcal{P}(A \cap B)$.

Somit ist $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2 7/8

a) $\{1, 2\} \times \{3, 4\} \cup \mathbf{\{1,\ 2,\ 3\}}$

$\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \cup \{1,2,3\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),1,2,3\}$

b) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

Seien $A = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ und $B = \mathcal{P}(\{1,2\})$, dann ist

$$\begin{aligned} A &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \\ B &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \\ A \setminus B &= \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}. \end{aligned}$$

c) $\bigcap_{i=2}^{6} \left\{\frac{i}{2}, i+1\right\}$

- Für $i = 2$: $\left\{\frac{2}{2}, 2+1\right\} = \{1, 3\}$
- Für $i = 3$: $\left\{\frac{3}{2}, 3+1\right\} = \left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$
- Für $i = 4$: $\left\{\frac{4}{2}, 4+1\right\} = \{2, 5\}$
- Für $i = 5$: $\left\{\frac{5}{2}, 5+1\right\} = \left\{\frac{5}{2}, 6\right\}$
- Für $i = 6$: $\left\{\frac{6}{2}, 6+1\right\} = \{3, 7\}$

Da keine Elemente in allen Mengen gemeinsam vorkommen, ist die Schnittmenge aller dieser Mengen die leere Menge:

$$\bigcap_{i=2}^{6} \left\{\frac{i}{2}, i+1\right\} = \emptyset$$

d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, n+1, 2n\}$

Da die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ alle positiven ganzen Zahlen enthalten, und für jede natürliche Zahl n, die Menge $\{n, n+1, 2n\}$ die Zahl n und ihren Nachfolger $n+1$ enthält, sowie die gerade Zahl $2n$, wird jede natürliche Zahl in mindestens einer dieser Mengen erscheinen. Daher ist die Vereinigung dieser Mengen gleich der Menge aller natürlichen Zahlen: ✓

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, n+1, 2n\} = \mathbb{N}$$

Somit enthält die Vereinigungsmenge alle Elemente von $\mathbb{N}$, was bedeutet, dass sie identisch mit $\mathbb{N}$ ist. ✓

Aufgabe 3 12/12

a) $A \subset B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (A \subset C)$

Zu zeigen: $A \subset B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (A \subset C)$

Teil 1: $A \subset B \cap C \Rightarrow (A \subset B) \wedge (A \subset C)$

Annahme: $A \subset B \cap C$

Unter dieser Annahme folgt, dass jedes Element von A auch ein Element von $B \cap C$ ist. Weil $B \cap C$ ausschließlich Elemente enthält, die in B und in C liegen, ergibt sich daraus, dass jedes Element von A auch in B und in C enthalten sein muss. Somit erhalten wir $A \subset B$ und $A \subset C$, was äquivalent zu $(A \subset B) \wedge (A \subset C)$ ist. ✓

Teil 2: $(A \subset B) \wedge (A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$

Annahme: $(A \subset B) \wedge (A \subset C)$

Diese Annahme impliziert, dass jedes Element von A sowohl ein Element von B als auch von C ist. Demnach muss jedes Element von A zur Schnittmenge $B \cap C$ gehören, denn die Schnittmenge umfasst genau jene Elemente, die in beiden Mengen, B und C, vorkommen. Folglich liegt A in $B \cap C$. ✓

Da wir beide Implikationen gezeigt haben, ist die Äquivalenz bewiesen:

$$A \subset B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (A \subset C)$$ ✓

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Zu zeigen: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
Wir zeigen die Inklusion in beide Richtungen.

Teil 1: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Annahme: Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Das bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin B \cup C$. Da $x \notin B \cup C$, folgt daraus, dass $x \notin B$ und $x \notin C$. Also ist $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$. Daraus ergibt sich, dass $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Teil 2: $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

Annahme: Sei $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Das bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin B$ und $x \notin C$. Also $x \notin B \cup C$. Zusammengefasst ist $x \in A$ und $x \notin B \cup C$, was bedeutet, dass $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Damit ist gezeigt, dass jedes Element der Menge $A \setminus (B \cup C)$ in $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ enthalten ist und umgekehrt, womit die Gleichheit der Mengen bewiesen ist.

c) $\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B = \bigcap_{i \in I}(D_i \cap B)$

Zu zeigen: $\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B = \bigcap_{i \in I}(D_i \cap B)$
Wir zeigen die Inklusion in beide Richtungen.

Teil 1: $\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B \subseteq \bigcap_{i \in I}(D_i \cap B)$

Annahme: Sei x ein beliebiges Element von $\left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B$.

Dann gilt $x \in D_i$ für alle $i \in I$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in D_i \cap B$ für alle $i \in I$, und somit ist $x \in \bigcap_{i \in I}(D_i \cap B)$.

Teil 2: $\bigcap_{i \in I}(D_i \cap B) \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B$

Annahme: Sei x ein beliebiges Element von $\bigcap_{i \in I}(D_i \cap B)$.

Dann gilt $x \in D_i \cap B$ für alle $i \in I$, was bedeutet, dass $x \in D_i$ und $x \in B$ für alle $i \in I$. Folglich ist $x \in \left(\bigcap_{i \in I} D_i\right) \cap B$.

Damit sind beide Inklusionen gezeigt und die Gleichheit der Mengen ist bewiesen.

Aufgabe 4 10/10

(i)

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_1(n) = n^2$

Injektivität: f_1 ist injektiv, weil wenn $f_1(a) = f_1(b)$, also $a^2 = b^2$, dann muss $a = b$ sein, da es im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ keine negativen Zahlen gibt, die zu demselben Quadrat führen könnten. ✓

Surjektivität: f_1 ist jedoch nicht surjektiv, da nicht jede natürliche Zahl als Quadrat einer anderen natürlichen Zahl geschrieben werden kann. Zum Beispiel gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n^2 = 2$, da 2 kein Quadrat einer natürlichen Zahl ist. ✓

Bijektivität: Da f_1 nicht surjektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv. ✓

(ii)

$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f_2(x) = |x|$

Injektivität: f_2 ist nicht injektiv. Zum Beispiel sind $f_2(1) = |1| = 1$ und $f_2(-1) = |-1| = 1$, aber $1 \neq -1$. Es werden also zwei verschiedene Zahlen aus dem Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ auf denselben Wert im Wertebereich $\mathbb{N}$ abgebildet, weshalb f_2 nicht injektiv ist. ✓

Surjektivität: f_2 ist surjektiv, da jede natürliche Zahl n als der Betrag einer ganzen Zahl dargestellt werden kann. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir $x = n$ oder $x = -n$ wählen, und es gilt $f_2(x) = |x| = n$. ✓

Bijektivität: Da f_2 nicht injektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein. ✓

(iii)

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = sin(x)$

Injektivität: f_3 ist nicht injektiv. Zum Beispiel ist $sin(0) = sin(\pi)$, aber $0 \neq \pi$. ✓

Surjektivität: f_3 ist auch nicht surjektiv. Der Wertebereich der Sinusfunktion ist das Intervall $[-1, 1]$. Da für jeden Wert y im Intervall $[-1, 1]$ ein x existiert, so dass $\sin(x) = y$, ist die Funktion f_3 surjektiv auf diesem Intervall. Jedoch, da der Wertebereich hier als $\mathbb{R}$ definiert ist und es Werte in $\mathbb{R}$ gibt, die außerhalb von $[-1, 1]$ liegen, die von $\sin(x)$ nicht erreicht werden, ist f_3 in diesem Kontext nicht surjektiv. ✓

Bijektivität: Da f_3 weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

(iv)

$f_4 : \mathbb{R} \to \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}, \quad f_4(x) = sin(x)$

f_4 ist eine Eingrenzung der Sinusfunktion auf den Wertebereich [-1, 1].

Injektivität: Wie bereits bei f_3 festgestellt, ist die Sinusfunktion nicht injektiv über den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$, da sie periodisch ist. Das bedeutet, dass es mehrere x-Werte gibt, die denselben $\sin(x)$-Wert erzeugen. Daher ist auch f_4 nicht injektiv.

Surjektivität: Im Gegensatz zu f_3 ist f_4 surjektiv, weil der Wertebereich genau dem Bereich entspricht, den die Sinusfunktion annimmt. Für jeden Wert y im Intervall $[-1, 1]$ gibt es mindestens ein x in $\mathbb{R}$, so dass $\sin(x) = y$. Daher erreicht f_4 jeden möglichen Wert im angegebenen Wertebereich.

Bijektivität: Da f_4 zwar surjektiv aber nicht injektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

(v)

$f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f_5(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$

Injektivität: f_5 ist injektiv.

Angenommen, $f_5(a) = f_5(b)$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.

Wenn a und b beide positiv sind, dann gilt $2a = 2b$, was impliziert, dass $a = b$.

Wenn a und b beide negativ sind, dann gilt $-2a - 1 = -2b - 1$, was ebenfalls impliziert, dass $a = b$.

Wenn a negativ und b positiv ist (oder umgekehrt), dann würde $f_5(a)$ ungerade und $f_5(b)$ gerade sein, was ein Widerspruch zur Annahme $f_5(a) = f_5(b)$ ist.

Da es keine zwei unterschiedlichen ganzen Zahlen gibt, die denselben Funktionswert haben, ist f_5 injektiv.

Surjektivität: f_5 ist surjektiv.

Jede gerade natürliche Zahl n kann als $2x$ für ein $x \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden.

Jede ungerade natürliche Zahl m kann als $-2x-1$ für ein $x < 0$ geschrieben werden, da $m + 1$ gerade ist und somit $m = -2(-\frac{m+1}{2}) - 1$.

Da jeder Wert in $\mathbb{N}$ als Funktionswert auftritt, ist f_5 surjektiv.

Bijektivität: Da f_5 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist sie bijektiv.