Lösungen zu Übungsblatt 2.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv sind.

(i) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } b\}$

(ii) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ ist eine Quadratzahl.}\}$

(iii) $R_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid (a < c) \ \vee \ (c = a \wedge b < d)\}$

Hinweis: Eine Relation heißt *Äquivalenzrelation*, falls diese reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Lösung zu Aufgabe 1. Für die Definition einer reflexiven, symmetrischen und transitiven Relation erhielten die Studierenden (1 Punkt).

- Lösung zu Aufgabe (i) (3 Punkte). Die Relation R_1 ist **reflexiv** (1 Punkt), denn: Für jedes $a \in \mathbb{N}$ gilt $a|a$ (a teilt a), also $(a,a) \in R_1$. Die Relation ist **nicht symmetrisch** (1 Punkt), denn: Zum Beispiel gilt $2|4$ aber $4 \not| 2$, also $(2,4) \in R_1$ aber $(4,2) \notin R_1$. Die Relation ist **transitiv** (1 Punkt), denn: Gilt $(a,b),(b,c) \in R_1$, also $a|b$ und $b|c$, so ist also $b = k \cdot a$ und $c = l \cdot b$. Dann ist $c = k \cdot l \cdot a$ und somit auch $a|c$, sprich $(a,c) \in R_1$.

- Lösung zu Aufgabe (ii) (3 Punkte). Die Relation R_2 ist **reflexiv** (1 Punkt), denn: Für jedes $a \in N$ ist $a \cdot a = a^2$ eine Quadratzahl, also $(a,a) \in R2$. Die Relation ist **symmetrisch** (1 Punkt), denn: Ist $(a,b) \in R_2$, also $a \cdot b$ eine Quadratzahl, so auch $b \cdot a = a \cdot b$, also $(b,a) \in R_2$. Die Relation ist **nicht transitiv** (1 Punkt), denn: Zum Beispiel liegen $(1,0),(0,2) \in R_2$, da $1 \cdot 0 = 0^2$ und $0 \cdot 2 = 0^2$ Quadratzahlen sind, aber $1 \cdot 2 = 2$ ist keine Quadratzahl und so $(1,2) \notin R_2$. (Schließen wir die 0 aus den natürlichen Zahlen aus, so wäre R_2 jedoch transitiv.)

- Lösung zu Aufgabe (iii) (3 Punkte). Die Relation R_3 ist **nicht reflexiv** (1 Punkt), denn: Zum Beispiel ist $(0,0) \in \mathbb{N}^2$, aber $((0,0),(0,0)) \notin R_3$, da $0 \not< 0$. Die Relation ist **nicht symmetrisch** (1 Punkt), denn: Zum Beispiel ist $((0,0),(1,1)) \in R_3$, da $0 < 1$ gilt, jedoch ist $((1,1),(0,0)) \notin R_3$, da $1 \not< 0$. Die Relation ist **transitiv** (1 Punkt), denn: Ist$((a,b),(c,d)) \in R_3$ und $((c,d),(e,f)) \in R_3$, so tritt einer der folgenden Fälle ein:

  (i) Es gilt $a < c$. Außerdem ist $c = e$ oder $c < e$, also in jedem Fall $a < e$ und somit $((a,b),(e,f)) \in R_3$.

  (ii) Es gilt $a = c$ und $b < d$. Außerdem gilt entweder $c < e$, also $a < e$, oder es gilt $c = e$ und $d < f$, also $a = e$ und $b < f$. Es folgt also ebenfalls $((a,b),(e,f)) \in R_3$.

  In jedem Fall gilt also $((a,b),(e,f)) \in R_3$, somit ist Transitivität gezeigt.

Aufgabe 2 (Mächtigkeit der Potenzmenge - 10 Punkte)**.** Zeigen Sie: Ist A eine endliche Menge mit n Elementen, so gilt,

(i) dass die Anzahl der Teilmengen gleich 2^n ist,

(ii) dass die Anzahl echter Teilmengen gleich $2^n - 1$ ist.

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge X bezeichnet die Anzahl der Elemente von X und wird durch $|X|$ oder $\#X$ notiert.

Lösung zu Aufgabe 2. Dies folgt aus dem Beweis von Proposition 1.45 von Pottmeyer und der Tatsache, dass nicht jede echte Teilmenge gleich A ist. Sei A eine endliche Menge mit n Elementen. Sei $2^A = \{B,\ B \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A. Wir werden durch Induktion beweisen, dass

$$|2^A| = 2^n.$$

- Für $k = 0$ ist $A = \emptyset$ und $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$.

- Inductionvoraussetzung: Es gelte $|2^A| = 2^n$ für alle Mengen A mit n Elementen, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest ist.
- Induktionsschritt: Seien A eine Menge mit $|A| = n+1$ und $a \in A$ beliebig. Die Abbildung

$$\{B \subseteq A,\ a \in B\} \to 2^{A \setminus \{a\}}$$
$$B \mapsto B \setminus \{a\}$$

ist bijektiv. Es gilt also

$$|\{B \subseteq A,\ a \in B\}| \to |2^{A\setminus\{a\}}|.$$

Weiter ist $|A \setminus \{a\}| + |\{a\}| = n+1$, also $|A \setminus \{a\}| = n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |2^A| &= |\{B \subseteq A,\ a \notin B\} \cup \{B \subseteq A,\ a \in B\}| \\ &= |2^{A\setminus\{a\}}| + |\{B \subseteq A,\ a \in B\}| \\ &= 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Geben Sie jeweils eine Bijektion von A nach B an, um dadurch zu zeigen, dass die beiden Mengen die gleiche Mächtigkeit besitzen.

(i) $A = \{1,2,3\}$, und $B = \{a,b,c\}$

(ii) $A = \mathbb{N}$, und B die Menge der geraden natürlichen Zahlen

(iii) A die Menge der geraden ganzen Zahlen, B die Menge der ungeraden ganzen Zahlen

(iv) A die Menge der durch k teilbaren Zahlen, B die Menge der durch m teilbaren Zahlen $(k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

(v) $A = \mathbb{N}$, und $B = \mathbb{Z}$

Lösung zu Aufgabe 3.
- Zum Beispiel die Funktion $f : A \to B$, definiert durch $f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = c$ (2 Punkte).
- Zum Beispiel die Funktion $f : A \to B$, definiert durch $f(n) = 2n$ (2 Punkte).
- Zum Beispiel die Funktion $f : A \to B$, definiert durch $f(n) = n+1$ (2 Punkte).
- Nach Definition sind die Mengen A und B gegeben durch

$$A = \{l \cdot k,\ l \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \{l \cdot m,\ l \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Funktion $f : A \to B$, definiert durch $f(a) = \frac{am}{k}$ ist eine Bijektion (2 Punkte).
- Zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definiert durch $f(n) = -\frac{n}{2}$, für gerade $n \in \mathbb{N}$ und $f(n) = \frac{n+1}{2}$, für ungerade $n \in \mathbb{N}$ (2 Punkte).

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen der Relation

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5|(a-b)\}.$$

Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier verschiedener Äquivalenzklassen leer ist.

Lösung zu Aufgabe 4. Zwei Zahlen (a,b) liegen in einer Äquivalenzklasse wenn $(a,b) \in R$, also wenn $a-b$ durch 5 teilbar ist. Es muss also gelten,

$$a - b = 5 \cdot k, \qquad \text{bzw.} \qquad a = b + 5 \cdot k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Man kann jede Zahl $z \in Z$ schreiben als $z = 5l + r$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0,1,2,3,4\}$, wobei r bei der Rest der ganzzahligen Division durch 5 mit Rest ist. Zwei Zahlen $z_1 = 5l_1 + r,\ z_2 = 5l_2 + r$ mit gleichem Rest haben Differenz $z_1 - z_2 = 5(l_1 - l_2)$, also liegt $(z_1, z_2) \in R$, bzw. z_1 und z_2 in einer

Äquivalenzklasse. Für zwei Zahlen mit unterschiedlichem Rest, ist die Differenz nicht durch 5 teilbar, also liegen solche nicht in einer Restklasse. Es gibt demnach die fünf Restklassen (5 Punkte):

$$\begin{aligned}
[0] &= \{5k+0,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}\\
[1] &= \{5k+1,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}\\
[2] &= \{5k+2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}\\
[3] &= \{5k+3,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}\\
[4] &= \{5k+4,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass der Schnitt zweier Äquivalenzklassen leer ist, da jede Zahl einen eindeutigen Rest bei der Division durch 5 lässt, und damit nur in einer Äquivalenzklasse auftaucht.

Wir können auch zeigen, dass dies für jede Äquivalenzrelation gelten muss: Sei $R \subset X \times X$ ist eine Äquivalenzrelation, $A \subset X$ die Äquivalenzklasse von $a \in X$ und $B \subset X$ die Äquivalenzklasse von $b \in X$. Angenommen $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gibt es also ein $x \in A \cap B$. Da $x \in A$ in der Äquivalenzklasse von a ist, gilt also $(a, x) \in R$. Genauso ist $x \in B$, also $(b, x) \in R$. Da R symmetrisch ist, gilt also auch $(x, b) \in R$. Da R transitiv ist, ist folglich $(a, b) \in R$ und somit b in der Äquivalenzklasse von $a, b \in A$. Dann gilt aber für jedes $b' \in B$, dass $(b, b') \in B$ und da $(a, b) \in R$ durch Transitivität dann auch $(a, b') \in R$. sprich $b' \in A$. Folglich ist also $B \subset A$ und die beiden Äquivalenzklassen sind gleich. Tauschen wir die Rollen von A und B, so folgt mit dem selben Argument, dass auch $B \subset A$, also $A = B$.

Folglich gibt es keine zwei verschiedenen Äquivalenzklassen mit nicht-leerem Schnitt (5 Punkte).