Het studeren van een wiskundig bewijs - en algemener, het studeren van theorie wiskunde - verloopt in vijf stappen:

Stap 1. Begrijp elke overgang

Stap 2. Begrijp het geheel

Stap 3. Test jezelf

Stap 4. Controleer

Stap 5. Herhaal

We lichten deze stappen toe aan de hand van een bewijs dat je in het derde jaar gestudeerd hebt.

Voorbeeld

Stelling: Het getal $\sqrt{2}$ is een irrationaal getal.

Bewijs: Er zijn twee mogelijkheden: ofwel is $\sqrt{2}$ een irrationaal getal, ofwel is het geen irrationaal getal.

Mocht $\sqrt{2}$ geen irrationaal getal zijn, dan is

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ voor een zekere } a, b \in \mathbb{Z} \text{ met } b \neq 0 \tag{1}$$

Bovendien kunnen we er voor zorgen dat a en b geen deler gemeen hebben.
Nemen we in (1) het kwadraat van beide leden dan verkrijgen we

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$$

Omdat het linkerlid deelbaar is door 2, is ook het rechterlid deelbaar door 2. Dus 2 is een deler van a^2.
Daaruit volgt dat 2 een deler is van a. Dus $a = 2k$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}$.

Vervangen we $a = 2k$ in (1) dan verkrijgen we

$$\sqrt{2} = \frac{2k}{b} \tag{2}$$

Nemen we in (2) het kwadraat van beide leden, dan verkrijgen we

$$2 = \frac{4k^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2k^2$$

Omdat het rechterlid deelbaar is door 2, is ook het linkerlid deelbaar door 2. Dus 2 is een deler van b^2. Daaruit volgt dat 2 een deler is van b.

Maar nu is 2 een deler van a en 2 is een deler van b, terwijl we ervoor hadden gezorgd dat a en b geen deler gemeen hebben. Een strijdigheid: het is dus niet waar dat $\sqrt{2}$ geen irrationaal getal is.

We besluiten dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is. $\square$

Stap 1. Begrijp elke overgang

Je begint met het bewijs regel per regel door te nemen. Zorg dat het duidelijk is hoe je van de ene regel naar de andere gaat (een berekening, steunen op een eerder geziene eigenschap, etc.).

Het doel van een les wiskunde is dat je tijdens de les alle overgangen begrijpt. Stap 1 dient dus om na te gaan of dat nu nog steeds zo is.

Wellicht is het geheel van het bewijs nog niet duidelijk, maar dat komt pas in Stap 2.

Voorbeeld.

> Mocht $\sqrt{2}$ geen irrationaal getal zijn, dan is
> $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ voor een zekere } a, b \in \mathbb{Z} \text{ met } b \neq 0 \qquad (1)$$

Waarom? Als een getal niet irrationaal is, dan is het rationaal (breuk).
Waarom is $b \neq 0$? Delen door 0 mag niet.

> Bovendien kunnen we er voor zorgen dat a en b geen deler gemeen hebben.

Waarom? Mochten a en b toch een deler gemeen hebben, dan kun je die breuk $\frac{a}{b}$ vereenvoudigen.

Etc.

Stap 2. Begrijp het geheel

Om het geheel te begrijpen, ga je na:

- Wat moeten we eigenlijk bewijzen (opgave)?
- Toont de redering van het bewijs nu wel de opgave aan?
- Is er een truc in het bewijs?

Voorbeeld.

- We moeten aantonen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. M.a.w. we moeten aantonen dat $\sqrt{2}$ geen breuk is.
- In het bewijs doen we alsof $\sqrt{2}$ wel een breuk is. Maar dan loopt er blijkbaar iets fout. Dus op het einde van het verhaal zullen we bewezen hebben dat $\sqrt{2}$ toch geen breuk is.
- Door te doen alsof $\sqrt{2}$ een breuk is, kunnen we het schrijven als $\frac{a}{b}$. De truc is om die gelijkheid $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ te kwadrateren. En dat later nog eens toe te passen eens we a geschreven hebben als $2k$.

Tracht daarna het bewijs in twee of drie regels samen te vatten. Door die regels te onthouden, zul je het bewijs later kunnen reconstrueren.

Voorbeeld.

1. Doen alsof $\sqrt{2}$ een breuk is: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
2. Kwadraat nemen levert dat 2 een deler is van a, dus $a = 2k$.
3. Vervangen, opnieuw kwadraat nemen levert dat 2 een deler is van b.

Stap 3. Test jezelf

Leg je cursus of boek weg, en neem een leeg cursusblad. Je schrijft op wat je gaat bewijzen (opgave), en probeert het bewijs nu helemaal zelf op te schrijven. Als je vast komt te zitten, geef je het niet onmiddellijk op door terug in je cursus te kijken. In plaats daarvan denk je even na:

- Kan ik een regel open laten, en het verder verloop van het bewijs toch opschrijven? Denk aan je samenvatting in Stap 2.
- Is er een truc in het bewijs die ik vergeten ben?
- Weet ik nog wat ik wil bewijzen?

Kijk pas terug in je cursus als je het echt niet meer weet. Maar beperk je dan niet tot het lezen van die ene regel die je vergeten bent: ga ook eens na waarom je die regel vergeten bent. Daarna neem je een leeg cursusblad en begin je opnieuw het bewijs op te schrijven.

Stap 4. Controleer

Als je denkt dat je klaar bent, neem dan je cursus en vergelijk jouw bewijs met dat in de cursus. Wees streng op jezelf, en ga nauwkeurig na of je bewijs nu ook correct is:

- Heb ik de opgave juist?
- Heb ik elke tussenstap opgeschreven? Minstens evenveel zoals in de cursus?
- Heb ik de eventuele tekeningen of schetsen nauwkeurig gemaakt en alles aangeduid?

Als je iets vergeten bent, of iets fout geschreven hebt, dan duid je de fout op je cursusblad aan met een fluorescerende stift. Houd je cursusblad bij (zie Stap 5).

Stap 5. Herhaal

Op het einde van de dag test je jezelf opnieuw (Stap 3), met controle (Stap 4). Bij die controle vergelijk je ook met de fouten die je op je eerste cursusblad hebt gemaakt.
De kracht van de herhaling kan nauwelijks onderschat worden. Daags nadien test je jezelf nog een derde keer. Je zal ervan versteld staan dat je zelfs dagen later het bewijs nog kan opschrijven.

Tip. Om het jezelf gemakkelijk te maken kun je steekkaarten maken. Op elke steekkaart schrijf je de vraag op zoals de stelling (of een definitie, etc.) gevraagd kan worden op een toets of examen. Telkens je het bewijs herhaalt, neem je die steekkaart en lees je de opgave. Je schrijft je antwoord uiteraard niet op die steekkaart, zodat die later nog bruikbaar is. Op het einde van elk hoofdstuk (en dus ook bij de voorbereiding van je examens) heb je dan een aantal steekkaarten waaruit je de theorie kan studeren.

Voorbeeld.

Vul de volgende stelling aan (schrappen wat niet past), en bewijs:

Het getal $\sqrt{2}$ is wel/niet een irrationaal getal.

Bewijs.