2018 年概率论期末试题及解答

Deschain

2021 年 8 月 21 日

1　在一根长为 1 的木棍上随机取两个点，将木棍截为三段，求其中最短的那一段长度的概率密度。

解答设截取的两个点到木棍左端的距离分别为 X,Y，根据 X,Y 的大小与 $|Y-X|$ 三段木棍长度分类，共有 6 种等概发生的情况。以下选取 1 种进行讨论，之后对概率密度乘 6 即得到结果：$X < Y-X, X < 1-Y$。

$$f_X(x) = \int_{2x}^{1-x} f_{XY}(x,y)dy = \int_{2x}^{1-x} dy = 1-3x$$
$$f_Z(z) = 6-18z, 0 < z < \frac{1}{3}$$

2　U 是连续随机变量，V 是离散随机变量，且 U 独立于 V。U 的概率密度为 $f_U(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, |x| \le 1$。V 的分布为 $P(V=1) = P(V=-1) = \frac{1}{2}$。请计算 U^V 的累积分布函数。

解答

$$f_U(u) = \frac{2}{\pi(1+u^2)}, -1 \le u \le 1$$
$$Z = U^V = \begin{cases} U, p = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{U}, p = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}, \quad (z = \frac{1}{u})$$
$$f_Z(z) = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+z^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi(z^2+1)} \quad (-1 < z < 1)$$
$$f_Z(z) = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{z})^2} \times \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi(z^2+1)} \quad (|z| > 1)$$
$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi(z^2+1)}$$
$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctan(z)$$

3 $X_k, k=1,\cdots,n$ 为独立同分布的随机变量，服从均匀分布 $U(0,1)$，考虑 $Y_n = X_1+\cdots+X_n$。令随机变量 Z_n 为 Y_n 的小数部分。请计算 Z_n 的概率密度。

解答设 Z_2 为 X_1+X_2 的小数部分

$$Y_2 = X_1+X_2, f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} y_2, 0<y_2<1 \\ 2-y_2, 1<y_2<2 \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} y_2, 0<y<1, f_{Z_2}(z) = f_{Y_2}(y) \\ y_2-1, 1<y<2, f_{Z_2}(z) = f_{Y_2}(y) \end{cases}$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}(2-y_2) = 1$$

$$Z_2 \sim U(0,1)$$

$$X_1 \sim U(0,1), X_2 \sim U(0,1), Z_2 \sim U(0,1)$$

$$Z_3 \sim U(0,1)$$

$$Z_n \sim U(0,1)$$

4 X 和 Y 是独立同分布随机变量,其分布满足 $P(X=0)=\frac{1}{2}, P(X>t)=\frac{1}{2}e^{-t}, t>0$ 请计算 $Z=X+Y$ 的累积分布函数。

解答

5 考虑下列场景：不断抛掷骰子并读数，直到连续三次得到结果 1，抛掷行为才能结束。请计算从开始抛掷起到结束为止，抛掷次数的均值。

解答

$$Z = \begin{cases} 0, X=Y=0 \\ X, X>0, Y=0 \\ Y, X=0, Y>0 \\ X+Y, X>0, Y>0 \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, z=0 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$f_{Z_2}(z) = \frac{1}{2}f_X(z) = \frac{1}{4}e^{-z}, z>0$$

$$f_{Z_3}(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) = \frac{1}{4}e^{-z}, z>0$$

$$f_{Z_4}(z) = \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx = \frac{1}{4}ze^{-z}, z>0$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, z=0 \\ \frac{1}{2}e^{-z} + \frac{1}{4}ze^{-z}, z>0 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z<0 \\ \frac{1}{4}, z=0 \\ 1-(\frac{1}{4}z+\frac{3}{4})e^{-z}, z>0 \end{cases}$$

6 考虑以下场景：不断抛掷骰子并读数，直到连续三次得到结果 1，抛掷行为才能结束。请计算从开始抛掷到结束为止，抛掷次数的均值。

解答设抛掷次数为 X，事件 A 为“第一次投出 2 到 6 点”，事件 B 为“第一次投出 1 点，第二次投出 2 到 6 点”，事件 C 为“第一次和第二次投出 1 点，第三次投出 2 到 6 点”，事件 D 为“前三次都是 1 点”。

$$
\begin{aligned}
&P(A)=\frac{5}{6},E(X|A)=1+E(X)\\
&P(B)=\frac{5}{36},E(X|B)=2+E(X)\\
&P(C)=\frac{5}{216},E(X|C)=3+E(X)\\
&P(D)=\frac{1}{216},E(X|D)=3\\
&E(X)=\frac{5}{6}(1+E(X))+\frac{5}{36}(2+E(X))+\frac{5}{216}(3+E(X))+\frac{3}{216}\\
&E(X)=258
\end{aligned}
$$

7 某种游戏规则如下：你同时掷两枚骰子，如果得到的点数之和为 7，那么游戏结束，你将得到 0 元；如果点数之和不为 7，那么你将得到数目与该点数之和相同的钱。同时，你还可以选择结束游戏，或者再掷一次，将游戏进行下去。假定你采用如下策略：事先设定一个门限值 T，如果某一次掷骰子得到的钱数超过该门限值，则结束游戏。那么，请给出使得你收入总和的均值最大的门限值，也就是最优的门限值。

解答设点数之和为 X，收入为 Y，门限为 T。当 $X \le T$ 时，游戏继续，否则游戏结束。显然，游戏继续进行的概率与 T 有关，定义这种关系为 $P(T)$。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$
\begin{aligned}
f(T)&=\sum_{x_i>T}x_ip(x_i)\\
E(Y)&=p(T)E(Y)+f(T)\\
E(Y)&=\frac{f(T)}{1-p(T)}
\end{aligned}
$$

T	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(T)	$\frac{208}{36}$	$\frac{202}{36}$	$\frac{190}{36}$	$\frac{170}{36}$	$\frac{140}{36}$	$\frac{140}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{64}{36}$	$\frac{34}{36}$	$\frac{12}{36}$	0
p(T)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{30}{36}$

代入计算可知 T=6 或 7 最优。

8 设 X_1, X_2 相互独立，均服从参数为 λ 的指数分布，求 $E((X_1-X_2)^2|X_1<X_2)$。

解答

$$
\begin{aligned}
&Z = X_1 - X_2, V = X_2, |\frac{\partial(z,v)}{\partial(x_1,x_2)}| = 1 \\
&f_{ZV}(z,v) = f_{x_1x_2}(z+v,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(z+2v)}, v>0, z>-v \\
&f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(z+2v)} dv = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z}, z>0 \\ \int_{-z}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(z+2v)} dv = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z}, z<0 \end{cases} \\
&P(z<0) = \frac{1}{2} \\
&f_{Z|Z<0} = \lambda e^{\lambda z}, z<0 \\
&E(Z^2|Z<0) \int_{-\infty}^{0} \lambda z^2 e^{\lambda z} dz = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

9 A 和 B 轮流掷一对骰子，当 A 掷出“和为 9”或 B 掷出“和为 6”时游戏停止。假设 A 先掷。求游戏结束时 A 投掷次数的均值。

解答设事件 A_i 为“第 i 次投掷和为 9”，事件 B_i 为“第 i 次投掷和为 6”。设 A 投掷次数为 X。

$$
\begin{aligned}
&P(A_i) = \frac{1}{9}, P(B_i) = \frac{5}{36} \\
&E(X|A_1) = 1, \quad P(A_1) = \frac{1}{9} \\
&E(X|\overline{A_1}B_2) = 1, P(\overline{A_1}B_2) = \frac{10}{81} \\
&E(X|\overline{A_1B_2}) = 1 + E(X), P(\overline{A_1B_2}) = \frac{62}{81} \\
&E(X) = \frac{1}{9} + \frac{10}{81} \times 1 + \frac{62}{81}(E(X)+1) \\
&E(X) = \frac{81}{19}
\end{aligned}
$$

10 在一根长为 1 的木棍上随机选取一个点 A，若 A 点左边一段长度小于 $\frac{1}{3}$，则在 A 点左边取一点 B，否则在 A 点右边取一点 B，计算 A、B 两点间距离的均值和方差。

解答设 A 距左端点距离为 X，AB 间距为 Y。

$$Y \sim U(0,X), f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}, 0<y<x, E(Y|X<\frac{1}{3}) = \frac{x}{2} \qquad (X<\frac{1}{3})$$

$$Y \sim U(0,1-X), f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{1-x}, 0<y<1-x, E(Y|X>\frac{1}{3}) = \frac{1-x}{2} \qquad (X>\frac{1}{3})$$

$$E(Y) = \int_0^1 E(Y|X)f_X(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{2}dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1-x}{2}dx = \frac{5}{36}$$

$$Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$$

$$Var(Y|X) = \begin{cases} \frac{x^2}{12}, 0<x<\frac{1}{3} \\ \frac{(1-x)^2}{12}, \frac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

$$E(Y|X) = \begin{cases} \frac{x}{2}, 0<x<\frac{1}{3} \\ \frac{1-x}{2}, \frac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

$$E(Var(Y|X)) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{12}dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(1-x)^2}{12}dx = \frac{1}{108}$$

$$E(Y|X) = \begin{cases} \frac{x}{2}, 0<x<\frac{1}{3} \\ \frac{1-x}{2}, \frac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

$$Var(E(Y|X)) = E(E^2(Y|X)) - E^2(E(Y|X))$$

$$E(E(Y|X)) = \frac{5}{36}$$

$$E(E^2(Y|X)) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{4}dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (\frac{x-1}{2})^2dx = \frac{1}{36}$$

$$Var(E^2(Y|X)) = E(E^2(Y|X)) = \frac{11}{1296}$$

$$Var(Y)) = \frac{1}{108} + \frac{11}{1296} = \frac{23}{1296}$$