随机过程 2017-2018 期末

Deschain

2022 年 3 月 6 日

1.$X(t)$ 为宽平稳的实高斯过程。均值为 0，相关函数为 $R(t)=\frac{1}{1+t^2}$。

(1) 请判断 $X(t)$ 是 Markov 过程吗？

(2) 用 X_t 作为 $X(t)$ 的简写，令 $A=E[X_3|X_0], B=X_3-E[X_3|X_0]$，求 A 和 B 的联合分布函数。

(1) 否。

$$[X_3,X_0]^T \sim N(0,\Sigma_1),\quad \Sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0.1 & 1\end{bmatrix},\quad A=0.1X_0,\quad B=X_3-0.1X_0$$

$$[A,B]^T \sim N(0,\Sigma_2),\quad \Sigma_2=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.99\end{bmatrix},\quad f_{AB}(a,b)=\frac{1}{2\pi\times\frac{3\sqrt{11}}{100}}e^{-\frac{a^2}{0.02}-\frac{b^2}{1.98}}$$

2. 考虑 Gaussian 随机变量 X，定义随机变量 Y 为 $Y=\begin{cases}X, & |X|\geq a\\ -X, & |X|<a\end{cases}$ 请计算 Y 的概率密度，并计算 $E(XY)$。

$$X\sim N(\mu,\sigma^2),\quad f_Y(y)=f_X(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad XY=\begin{cases}X^2, & |X|\geq a\\ -X^2, & |X|<a\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[XY]&=2\int_0^a-\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_a^\infty\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\\&=E[X^2]-4\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2--4\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\end{aligned}$$

3. 设进入货运站有 A 线和 B 线。A 线货车到达服从参数分布为 λ 的泊松过程，每车货物重量独立均服从 $[2,4]$ 吨的均匀分布。A 线和 B 线相互独立运行。求 $[0,T]$ 内两线到达货物总量之差的均值和方差。设 A、B 线的到达分别为 $N_A(t), N_B(t)$，货物总量为 $Y_A(t), Y_B(t)$。

$$Y_A(t) = \sum_{k=1}^{N_A(t)} X_{Ak}, X_{Ak} \sim U(2,4)$$

$$Y_B(t) = \sum_{k=1}^{N_B(t)} X_{Bk}, X_{Bk} \sim U(1,2)$$

$$E[Y_A(T)] = E[Y_A(T)|N_A] = E[N_A E[X_A]] = 3E[N_A] = 3\lambda T$$

$$E[Y_B(T)] = E[Y_B(T)|N_B] = E[N_B E[X_B]] = \frac{3}{2}E[N_B] = \frac{9}{2}\lambda T$$

$$E[Y_A(T) - Y_B(T)] = E[Y_A(T)] - E[Y_B(T)] = -\frac{3}{2}\lambda T$$

$$Var[Y_A(T)|N_A] = N_A Var[X_A] = \frac{1}{3}N_A$$

$$Var[Y_A(T)] = Var[E[Y_A(T)|N_A]] + E[Var[Y_A(T)|N_A]] = Var[3N_A] + E[\frac{N_A}{3}] = 9\lambda T + \frac{1}{3}\lambda T = \frac{28}{3}\lambda T$$

$$Var[Y_B(T)|N_B] = N_B Var[X_B] = \frac{1}{12}N_B$$

$$Var[Y_B(T)] = Var[E[Y_B(T)|N_B]] + E[Var[Y_B(T)|N_B]] = Var[\frac{3}{2}N_B] + E[\frac{1}{12}N_B] = \frac{27}{4}\lambda T + \frac{1}{4}\lambda T = 7\lambda T$$

$$Var[Y_A(T) - Y_B(T)] = Var[Y_A(T)] + Var[Y_B(T)] = \frac{49}{3}\lambda T$$

4. 考虑零均值高斯过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$，自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$。试求：已知 $X(0)+X(1) = 1$ 时，$X(\frac{1}{2})$ 的均值和方差？

$$X_1 = [X(\frac{1}{2}), X(0), X(1)]^T, \quad X_1 \sim N(0, \Sigma_1), \quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{2}} \\ e^{-\frac{1}{2}} & 1 & e^{-1} \\ e^{-\frac{1}{2}} & e^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = [X(\frac{1}{2}), X(0)+X(1)]^T, \quad X_2 \sim N(0, \Sigma_2), \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 2e^{-\frac{1}{2}} & 2+2e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$E[X(\frac{1}{2})|(X(0)+X(1)=1)] = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+e^{-1}}, \quad Var[X(\frac{1}{2})|(X(0)+X(1)=1)] = \frac{e-1}{e+1}$$

5. 考虑如下的 Markov 链，从某一个状态 k 出发，链或者以概率 $1 > a_k > 0$ 转移到 $k+1$，或者以概率 $1 - a_k$ 回到 0。计算其转移概率的极限，并请判断该链是常返还是非常返。

$$P = \begin{cases} a_i, & j = i+1 \\ 1 - a_i, & j = 0 \\ 0, & else \end{cases} \qquad \pi = \pi \cdot P, \quad \therefore \pi_k = \pi_0 \prod i = 0^{k-1} a_i, \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1} a_i}$$

6. 某人正在逐次进行实验。如果本次实验和上次实验都成功，则下次实验成功的概率是 0.8，否则下次实验成功的概率为 0.5。

(1) 定义状态 1 为 {本次实验失败}，状态 2 为 {本次实验成功，上次实验失败}，状态 3 为 {本次实验和上次实验都成功}。令 X_n 表示第 n 次实验后的状态，请判断 $\{X_n\}$ 是否是 Markov 链，并求出 $\{X_n\}$ 的一步转移概率矩阵。

(2) 经过很多次实验之后，求每次实验成功的概率。

$$(1)\{X_n\} is Markov Chain$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(2)\pi = \pi \cdot P, \quad \pi_1 = \frac{4}{11}, \quad \pi_2 = \frac{2}{11}, \quad \pi_3 = \frac{5}{11}$$

$$P = \pi_2 + \pi_3 = \frac{7}{11}$$

7. 考虑 n 个独立的指数分布，分别记为 $X_1, \cdots, X_n$，其参数分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，请计算 $P(X_1 < X_2 < \cdots < X_n)$。

$$P(X_1 < \cdots < X_n) = P(X_1 < \cdots < X_{n-1} | X_{n-1} < X_n) P(X_{n-1} < X_n)$$

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad P(X_1 < X_2 < X_3) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)}, \cdots, \quad P(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_{i+}}$$

8.$N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程。定义 $X(t) = X_0(-1)^{N(t)}$，其中 X_0 为随机变量且以等概率取 1 或-1，设 X_0 与 $N(t)$ 独立。

(1) 计算 $X(t)$ 的自相关函数。并判断其是否为宽平稳过程。

(2) 令 $\int_{t-T}^{t} X(\tau) d\tau$，其中 T 为常数，求 $Y(t)$ 的功率谱密度。

$$R_X(t,s) = E[X_0^2(-1)^{N(t)+N(s)}] = E[(-1)^{N(t)+N(s)}] = E[(-1)^{N(t-s)}]$$

$$P(N(t-s) = odd) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda(t-s)}), \quad P(N(t-s) = even) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda(t-s)})$$

$$R_X(t,s) = e^{-2\lambda(t-s)}, \quad R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

9. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$ 的非齐次泊松过程，试求：已知 $[0,T]$ 内发生一次事件条件下，该事件发生时刻的分布密度？

$$P(N(T) = 1) = \int_0^T e^{-s} ds e^{-\int_0^T e^{-s} ds} = (1 - e^{-T}) e^{-1 + e^{-T}}$$

$$P(X > x | N(T) = 1) = \frac{P(N(x) = 0, N(T-x) = 1)}{P(N(T) = 1)} = \frac{1 - e^{-x} - e^{-T+x} + e^{-T}}{1 - e^{-T}} e^{-1 + e^{-T} - e^{-x} - e^{-T+x}}$$

$$F_X(x | N(T) - 1) = 1 - P(X > x | N(T) = 1), \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$