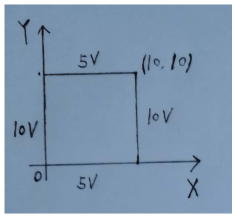
2015 年电磁场与波期末试题

Deschain

2021 年 6 月 27 日

1

一个二维正方形区域的静电场边界条件如右图。



1.1

求区域内的电位分布 $\varphi(x,y)$ 的解析表达式，通解的选取需要说明理由（10 分）。

解答

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 5$$

φ_1 是左边界为 5，其余为 0 的电势。φ_2 是右边界为 5，其余为 0 的电势。

$$\varphi_1 = \sum_n A_n sin(\frac{n\pi}{10}y)sh(\frac{n\pi}{10}(10-x))$$

$$\varphi_2 = \sum_m B_m sin(\frac{n\pi}{10}y)sh(\frac{n\pi}{10}x)$$

其中 $n = 1,3,5,\cdots$ $m = 1,3,5,\cdots$

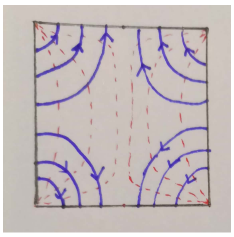
$$\varphi = 5 + \varphi_1 + \varphi_2$$

1.2

在答题纸上（不是试卷）用虚线画出等位线。（5 分）

1.3

在答题纸上用实线画出电场线。（5 分）



1.4

在 0 时刻，坐标（5,4）点上有一个静止的带正电荷的球，假设球和边界均为不形变的刚体，碰撞时不损失能量，请文字描述该球在 0 时刻过后的运动轨迹，不需要公式。（5 分）

解答先垂直下落，与边界碰撞后原速反弹，回到原点后停止，然后重复上述过程。

2

2.1

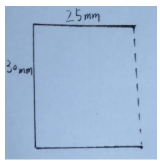
请写出理想导体矩形波导（尺寸 40mm*30mm）截止频率最低的 3 个模式，并计算出它们各自的截止频率。(5 分）

解答

$$\begin{aligned}
&TE_{10}\\
&k^2=(\frac{2\pi}{\lambda})^2=(\frac{2\pi f}{c})^2=(\frac{\pi}{a})^2\\
&f=3.75GHz\\
&TE_{01}\\
&k^2=(\frac{2\pi}{\lambda})^2=(\frac{2\pi f}{c})^2=(\frac{\pi}{b})^2\\
&f=5GHz\\
&TE_{11}\\
&k^2=(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{\pi}{b})^2\\
&f=12.5GHz
\end{aligned}$$

2.2

请写出右图混合边界矩形波导（三个实线面为理想导体、电壁；虚线面为理想磁壁）可以传播的电磁波模式（TE?TM?TEM?）并说明为什么可以，为什么不可以。(5 分）



解答可以传 TM 和 TE，不能传 TEM。

2.3

请计算该混合边界矩形波导最低截止频率。(5 分）

解答

$$\frac{\pi}{2X}=\frac{2\pi f}{c}$$
$$f=3GHz$$

2.4

请写出该混合边界矩形波导对应于最低截止频率的电场、磁场各分量的表达式（假设波导内场沿 +Z 方向传播，表达式中需要包含 z 的变化项，需要虚数符号 j，不要求准确系数）。(5 分）

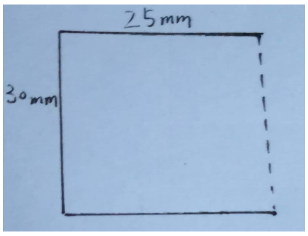
解答

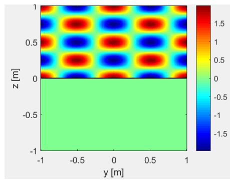
$$\begin{aligned}
&a=50mm,b=30mm\\
&\vec{E}=\hat{y}jAsin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-kz)}\\
&\vec{H}=(\hat{z}Bcos(\frac{\pi}{a}x)+\hat{x}Csin(\frac{\pi}{a}x))e^{j(\omega t-kz)}
\end{aligned}$$

2.5

在答题纸上（不是试卷）画出该混合边界矩形波导对应于最低频率模式的三维电场（实线）的分布，三维磁场分布（虚线）。(5 分）

3





已知 z<0 的空间为理想金属，全空间 $\mu_r = 1$。入射波的频率为 300MHz，右图为 yz 平面内总场的场分布图。

3.1

请问这是垂直极化波（E_x）还是平行极化波（H_x）？理由？（5 分）

平行极化波。x 方向的场在电壁上有切向分量，因此是磁场。

3.2

假设波从左上角入射进来，求解入射波的 k 矢量。（5 分）

$$\lambda_z = 0.5m, k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$$
$$\lambda_y = 1m, k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$$
$$k = \sqrt{k_z^2 + k_y^2} = 14.05$$

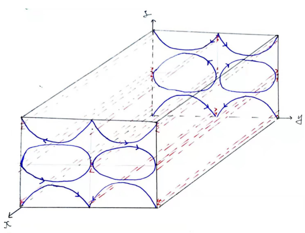
3.3

求解介质的相对介电常数 ε_r。（5 分）

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_r = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} = 5$$

3.4

请在答题纸上（不是试卷）画出电场图，要求在 z，y 方向上各画一个整周期（2π）。（5 分）



3.5

如果希望在 z>0 空间加一面无限大的理想导体平面，形成导波结构。加入后需保证 z 从 0 到 0.4 米的区域内，在传输相同频率的电磁波时，场型结构不变。请问理想导体表面可以加入的位置有哪些？（5 分）

$$z = 0.375 + 0.25n, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$

4

右图所示二维静电场问题中，X,Y 正半轴上除虚线部分均满足 $\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} = 0$。在 X 轴上 [a,b] 虚线区间内 $\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial n} = f(x)$，图中的灰色区域的电荷分布为 g(x,y)。

4.1

请给出本问题所对应的格林函数空间内的表达式 G(x,y,x',y')=?（5 分）

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r'}) = -\delta(\vec{r},\vec{r'})$$

4.2

请问这是格林函数的第几类边值问题？请给出该格林函数 G 的边界条件。（5 分）

$$\frac{\partial G}{\partial y}|_{y=0} = 0, G|_{x=0} = 0$$

第一类边值问题。

4.3

请给出本问题化简后电势的积分形式格林函数表达式。$\varphi(\vec{r}) =$?（5 分）

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\rho G}{\varepsilon} dS - \int_a^b f(x) G$$

其中 S 是 g(x,y) 存在的区域。

4.4

请给出该格林函数的解析解 $G(\vec{r},\vec{r'})$。（提示：二维问题，通解 ln）（5 分）

$$G(\vec{r},\vec{r'}) = \frac{1}{2\pi} ln(\frac{1}{r_1 r_2 r_3 r_4})$$
$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2}$$
$$r_3 = \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2}$$
$$r_4 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

4.5

假定源点位于 (x',y')，在答题纸上（不是试卷）画出该格林函数的电场（实线）、等位线（虚线）。（5 分）