2014 年概率论期末试题

Deschain

2021 年 8 月 19 日

1 市中心一家蛋糕店，一小时内进入这家店的顾客数服从参数为 λ 的泊松分布。蛋糕店内有 K 种蛋糕，每个顾客选取每种蛋糕的概率服从均匀分布。求一小时内被购买的蛋糕种类的期望。

解答设第 i 种蛋糕有人买时 $X_i = 1$，反之 $X_i = 0$。设有 N 人进入蛋糕店。

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$P(X_i = 1|N) = 1 - (1 - \frac{1}{K})^N$$

$$E(X|N) = N - N(1 - \frac{1}{K})^N$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} (n - n(1 - \frac{1}{K})^n)$$

$$= \frac{1}{\lambda} - e^{-\frac{\lambda}{K}} \frac{1}{\lambda(1 - \frac{1}{K})}$$

2 设有长度为 10 的数列 Xi，每个数的值的分布为 U(0,1)。定义局部极大值为 Xi-1<Xi>Xi+1，设其数量为 N。

(1) 求 E(N)。

(2) 求 $E(X_1 N)$。

(1) 解答设 X_i 为局部最大值时 $Y_i = 1$，反之 $Y_i = 0$。

$$Y_1 = 0, \quad Y_1 0 = 0$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{3}, i = 2, 3, \cdots, 9$$

$$E(N) = E(\sum_{i=2}^{9} Y_i) = \sum_{i=2}^{9} E(Y_i) = \frac{8}{3}$$

(2) 解答

$$E(X_1 N) = E(E(x_1 N | X_1))$$

$$E(x_1 N | X_1) = x_1 E(N | X_1) = x_1 E(\sum_{i=3}^{9} Y_i) + x_1 E(Y_2 | X_1)$$

$$= \frac{7}{3} x_1 + x_1 \int_{x_1}^{1} dx_2 \int_{0}^{x_2} dx_3 = \frac{17}{6} x_1 - \frac{1}{2} x_1^3$$

$$E(X_1 N) = \int_0^1 (\frac{17}{6} x_1 - \frac{1}{2} x_1^3) dx_1 = \frac{31}{24}$$

3

设有联合密度函数

$$Z = f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c|xy| & -1 < x < 1, 0 < y < |x| \\ 0 & else \end{cases}$$

(1) 求 c

(2) 求 $P(x > y | y < 0.5)$。

(1) 解答

$$2\int_0^1 dx \int_0^x cxydy = \frac{c}{4} = 1$$
$$c = 4$$

(2) 解答

$$P(x > y | y < 0.5) = \frac{P(x > y, y < 0.5)}{P(y < 0.5)} = \frac{P(x > 0, y < 0.5)}{P(y < 0.5)} = \frac{1}{2}$$

4 有两个灯泡，其寿命服从参数为 λ 的指数分布。同时测试两个灯泡，第一个灯泡使用 T_1 时间后损坏，之后第二个灯泡在 T_2 时间损坏。求 $P(T_2 > 2T_1)$。

$$P(T_2 > 2T_1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} t_1 \int_{2t_1}^\infty \lambda e^{-\lambda t_2} dt_2 = \frac{1}{3}$$

5 有四个硬币，抛掷时正面朝上的概率均为 p。刚开始四个硬币均处于反面朝上的状态，从第一个硬币开始抛掷，若抛到反面继续抛；若抛到正面则抛掷下一个硬币。设抛掷次数为 N，求 P(N=6)。

解答原事件相当于“前 5 次抛掷有且只有两次反面，第 6 次为正面”。

$$P = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

6 设随机变量 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim N(0,1)$，求 $E(X^2 - Y^2 | X^2 + Y^2)$。

解答

$$\begin{aligned} E(X^2 - Y^2 | X^2 + Y^2) &= E(X^2 | X^2 + Y^2) - E(Y^2 | X^2 + Y^2) \\ &= E(X^2 | X^2 + Y^2) - E(X^2 | X^2 + Y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7 抛掷一枚骰子，若抛到 6 则停止抛掷，若抛到 $i (1 \le i \le 5)$ 则休息 i 分钟后继续抛掷。求抛掷时间 X 的期望。

解答

$$E(X) = \frac{1}{6}(E(X)+5) + \frac{1}{6}(E(X)+4) + \frac{1}{6}(E(X)+3) + \frac{1}{6}(E(X)+2) + \frac{1}{6}(E(X)+1)$$
$$E(X) = 15$$

8 在苏格拉底的花园中有 9 朵玫瑰，有一天，苏格拉底要柏拉图去花园中采一朵最漂亮的玫瑰，但有一个规则，不能走回头路，而且只能采一朵。柏拉图采取这样的策略：先观察前三朵玫瑰，之后若出现比前三朵都漂亮的玫瑰，则采下这朵玫瑰。求柏拉图采到的玫瑰是最美的那朵的概率。

解答“柏拉图采到的玫瑰是最美的那朵”需要满足以下条件：

（1）第 k 朵玫瑰最美，$k \ge 4$；

（2）前 $k-1$ 朵玫瑰中，最美的出现在前三朵中。

以第 6 朵玫瑰最美为例。第 6 朵玫瑰最美的概率为 $\frac{1}{9}$，前 5 朵玫瑰中最美的出现在前三朵的概率为 $\frac{3}{5}$。以此类推。

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{9}(1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{3}{7}+\frac{3}{8}) \\
&= \frac{341}{840}
\end{aligned}
$$

9 设有 N 个点，每两个点间有线相连的概率为 p，若三个点每两个点间均有线相连，则称这三个点构成一个三角形。求三角形数量的期望和方差。

解答