2019 年概率论期末试题及解答

Deschain

2021 年 8 月 22 日

1 将 52 张扑克牌洗匀后，一张一张翻开，直到翻出红色的 A 为止。请计算所需翻牌次数的均值。

解答

$$P(X=k)=\frac{1}{52}$$
$$E(X)=\sum_{k=1}^{52}\frac{k}{52}=26.5$$

2 直角坐标系中，三角形 ABC 的三个顶点分别为 A(-1,0),B(1,0) 和 C(0,1)。在该三角形的内部随机取一个点，设其坐标为 (X,Y)，请计算 (X,Y) 的联合概率密度和各自边缘密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立？

解答

$$f_{XY}(x,y)=1,-1<x<1,0<y<1-|x|$$
$$f_X(x)=\int_0^{1-|x|}f_{XY}(x,y)dy=1-|x|,-1<x<1$$
$$f_Y(y)=\int_{y-1}^{1-y}f_{XY}(x,y)dx=2-2y,0<y<1$$

X,Y 不独立

3 假定有 A 和 B 两个彩票站，所售彩票的中奖概率分别为 a 和 b，a>b，彩票价格分别为 2 元和 1 元。夫妻两人分别在两个彩票站买彩票，每个月买一张，两人都会在自己中奖后停止购买并结算花费。请计算当 a 和 b 满足什么条件时，丈夫花费钱数的均值大于妻子花费钱数的均值？

解答设丈夫购买 X 张，妻子购买 Y 张。

$$X\sim Ge(a),Y\sim Ge(b)$$
$$E(X)=\frac{1}{a},E(Y)=\frac{1}{b}$$

a<2b 时，丈夫花费钱数的均值大于妻子花费钱数的均值。

4 考虑独立的随机变量：$X_1, X_2 \sim N(0,\sigma_1^2), Y_1, Y_2 \sim N(0,\sigma_2^2)$，如果 $A = X_1^2 + X_2^2, B = Y_1^2 + Y_2^2$。请计算（这里 t 为确定性参数）$P(A < B|A > t) + P(A > B|B > t$。

解答

$$\begin{cases} X_1 = \rho cos\theta \\ X_2 = \rho sin\theta \end{cases} \quad |\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\rho,\theta)}| = \rho$$

$$f_{\rho,\theta}(\rho,\theta) = f_{X_1,X_2}(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho = \frac{\rho}{1\pi\sigma_1^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_1^2}}, \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

$$f_\rho(\rho) = \int_0^{2\pi} f_{\rho,\theta}(\rho,\theta)d\theta = \frac{\rho}{\sigma_1^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$A = \rho^2, f_A(a) = \frac{1}{2\sigma_1^2}e^{-\frac{a}{2\sigma_1^2}}, F_A(a) = 1 - e^{-\frac{a}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_B(b) = \frac{1}{2\sigma_2^2}e^{-\frac{b}{2\sigma_2^2}}, F_B(b) = 1 - e^{-\frac{b}{2\sigma_2^2}}$$

$$f_{AB}(a,b) = \frac{1}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}e^{-\frac{a}{2\sigma_1^2}-\frac{b}{2\sigma_2^2}}$$

$$P(A > t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_1^2}e^{-\frac{a}{2\sigma_1^2}} = e^{-\frac{t}{2\sigma_1^2}}$$

$$P(B > t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{2\sigma_2^2}e^{-\frac{b}{2\sigma_2^2}} = e^{-\frac{t}{2\sigma_2^2}}$$

$$P(A < B|A > t) = \frac{P(t < A < B)}{P(A > t)} = \frac{\int_t^{+\infty} da \int_a^{+\infty} f_{AB}(a,b)db}{e^{-\frac{t}{2\sigma_1^2}}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}e^{-\frac{t}{2\sigma_2^2}}$$

$$P(A < B|B > t) = \frac{P(A < B, B > t)}{P(B > t)} = \frac{\int_t^{+\infty} db \int_0^b f_{AB}(a,b)da}{e^{-\frac{t}{2\sigma_2^2}}} = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}e^{-\frac{t}{2\sigma_1^2}}$$

$$P(A < B|A > t) + P(A < B|B > t) = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}e^{-\frac{t}{2\sigma_1^2}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}e^{-\frac{t}{2\sigma_2^2}}$$

5 从 0-499 这 500 个整数中随机取一个数 X，并计算其各位数字之和 S（例如，245 的各位数字之和即为 S=2+4+5=11），请计算 S 的均值。

解答

$$S = \frac{1}{500}(45 \times \frac{500}{10} + 45 \times \frac{500}{100} \times 10 + (1 + 2 + 3 + 4) \times 100) = 11$$

6 设非负随机变量 X_1, X_2 独立同分布，设 U 在区间 $[0,t]$ 上均匀分布，且与 X_1, X_2 相互独立，试计算 $P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) =?$

解答 [法一]设 X_1 和 X_2 的密度函数为 $f_X(x), Y = X_1 + X_2$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_X(y-x) f_X(x) dx$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_X(x_1) f_X(x_2)$$

$$\frac{\partial(y, x_1)}{\partial(x_1, x_2)} = 1$$

$$f_{X_1 Y}(x_1, y) = f_X(x_1) f_X(y - x_1)$$

$$f_{X_1|Y}(x_1|y) = \frac{f_X(x_1) f_X(y - x_1)}{\int_0^t f_X(x) f_X(t-x) dx}, 0 < x_1 < t$$

$$X_1 = x_1, P(U < x_1 | X_1 < x_1, X_2 = t - x_1) = P(U < x_1) = \frac{x_1}{t}$$

$$P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) = \int_0^t P(U < X_1 | X_1 = x_1, X_2 = t - x_1) f_{X_1|t}(x|t) = \frac{\int_0^t \frac{x_1}{t} f_X(x_1) f_X(t - x_1) dx_1}{\int_0^t f_X(t-x) f_X(x) dx}$$

$$\int_0^{\frac{t}{2}} x_1 f(x_1) f_X(t - x_1) dx_1 = \int_{\frac{t}{2}}^t (t - x_1) f_X(x_1) f_X(t - x_1) dx_1$$

$$\int_0^t x_1 f(x_1) f_X(t - x_1) dx_1 = \int_{\frac{t}{2}}^t t f_X(x_1) f_X(t - x_1) dx_1$$

$$P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) = \frac{\int_{\frac{t}{2}}^t f_X(x_1) f_X(t - x_1) dx_1}{\int_0^t f(x_1) f_X(t - x_1) dx_1} = \frac{1}{2}$$

解答 [法二]U 与 X_1, X_2 独立，关于 U 的概率仅与区间长度有关。

$$\begin{aligned}
&P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) = P(t - X_1 < U < t | X_1 + X_2 = t) \\
&= P(X_2 < U < t | X_1 + X_2 = t) = P(U > X_1 | X_1 + X_2 = t) \\
&P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) + P(U > X_1 | X_1 + X_2 = t) = 1 \\
&P(U < X_1 | X_1 + X_2 = t) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$ 设 $Z = min(X,Y), W = \begin{cases} 1, & if \quad Z = X \\ 0, & if \quad Z = Y \end{cases}$

试求 Z 与 W 的相关系数?

解答

$$f_Z(z) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)z}$$

$$P(W=1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, P(W=0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$Y = WZ, Y = \begin{cases} X, & X < Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y \lambda\mu x e^{-\lambda x - \mu y} dx = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^2$$

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$E(W) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$E(ZW) - E(Z)E(W) = Cov(Z,W) = 0$$

$$Corr(Z,W) = 0$$

8 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布。定义 $U = X + Y, V = \frac{X}{X+Y}$,试写出 U 和 V 的联合分布,并计算 $E(V|U)$。

解答

$$X = UV, Y = U - UV, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = |u| = u$$

$$f_{UV}(u,v) = ue^{-uv}e^{-(u-uv)} = ue^{-u}, u > 0, 0 < v < 1$$

$$f_V(v) = \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = 1$$

$$f_U(u) = \int_0^1 ue^{-u} dv = ue^{-u}$$

$$f_{V|U} = \frac{f_{UV}(u,v)}{f_U(u)} = 1$$

$$E(V|U) = \int_0^1 v dv = \frac{1}{2}$$

9　在边长为 2 的正方形区域内随机选择一个点，计算该点到区域边界的最短距离的均值与方差。

解答将正方形沿两条中线和两条对角线切分成 8 个区域，由对称性，在求密度函数时可用下半侧的左起第二个代表其他区域。设距离为 Z。

$$
\begin{aligned}
&f_{XY}(x,y)=\frac{1}{4}, 0<y<x<1\\
&Z=Y\\
&f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{4}dx=\frac{1-y}{4}\\
&f_Z(z)=8f_Y(z)=2-2z, 0\le z\le 1\\
&E(Z)=\frac{1}{3}, Var(Z)=\frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

10　连续抛掷硬币，直到出现连续的一个正面一个反面（或一个反面一个正面）位置，计算已经完成的抛掷中，正面向上数目的期望与方差。

解答两种情况：（1）N 正 +1 反（2）N 反 +1 正，（1）和（2）是等概率的。设正面数为 Y。

注：本题中级数求和的结果直接给出，详细证明来自几何分布的均值与方差。

$$
\begin{aligned}
&P(Y=1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\frac{3}{4}\\
&P(Y=k)=\frac{1}{2^{k+1}}\qquad (k\ge 2)\\
&E(Y)=\frac{3}{4}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{2^{k+1}}=\frac{3}{2}\\
&E(Y^2)=\frac{3}{4}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{2^{k+1}}=\frac{7}{2}\\
&Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$