

# 2021 年量子与统计试题（郭永）

Deschain

2021 年 11 月 10 日

## 一、简答题

1. 从以下 7 个概念中任选 2 个简要解释。

(1) 定态 (2) 束缚态 (3) 纠缠态 (4) 可分离态 (5) 散射 (6) 纯态 (7) 混态

2. 德布罗意关系阐明了微观粒子的粒子性 ( $E, p$ ) 与波动性 ( $\nu, \lambda$  和  $\omega, k$ ) 之间的关系, 用数学公式可将该关系表示为:

3. 直接写出以下对易关系:

$$(1) [\hat{p}_x, y] = \quad (2) [\hat{p}_z, \hat{L}_z] = \quad (3) [\hat{p}_z, \hat{p}_y] = \\ (4) [z, \hat{L}_z] = \quad (5) [\hat{L}_z, \hat{L}_y] = \quad (6) [\hat{L}_x, \hat{L}^2] =$$

4. 已知氢原子处在波函数

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

描述的态上, 求  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$  和  $\hat{L}_z$  的可能取值与平均值。

5. 已知厄米算符  $\hat{A}$  满足  $\hat{A}^2 = \hat{A}$ , 求  $\hat{A}$  的本征值和  $\hat{A}$  在自身表象中的矩阵表示。

6. 在量子态  $\varphi$  上, 力学量算符  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  的不确定度的乘积的下限:

写出坐标  $y$  和动量的分量  $\hat{p}_y$  的不确定度关系:

写出时间  $t$  和能量  $E$  的不确定度关系:

7. 已知粒子可能处在单粒子态  $\varphi_1$  或  $\varphi_2$  上, 对应的能量分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ , 请写出两个全同粒子可能出现的状态的波函数和对应的能量。分两种情况: (1) 两个玻色子 (2) 两个费米子

8. 一维自由粒子 (无自旋), 能量和宇称同时具有确定值的状态波函数为:

能量与动量同时具有确定值的波函数为:

9. 已知系统的哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + V(x)$$

(1) 求  $[x, \hat{H}]$

(2) 粒子处于束缚定态, 求  $\overline{p_x}$

## 二、

已知系统的哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_x} (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) + \frac{1}{2I_z} \hat{L}_z^2$$

(1) 写出守恒量和守恒量完全集。

(2) 求出体系的能量本征值、能量本征函数、能级简并度。

三、

粒子处在一维无限深势阱里，势阱宽度为  $a$ ， $t = 0$  时刻的归一化波函数为

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{3a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{\sqrt{4a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \frac{C_3}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$$

已知一维无限深势阱中，粒子的能级和波函数为

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(1) 求  $C_3$  的值。

(2) 在  $t = 0$  时刻，求  $E$  的可能取值、取值概率和平均值。

(3) 写出  $t = 0$  时波函数在能量表象中的矩阵表示。

(4) 求任意时刻的波函数  $\psi(x, t)$

四、

质量为  $m$ ，能量为  $E$  的粒子入射势垒，势垒在  $x < 0$  处为 0，在  $x > 0$  处为  $V_0$ 。

(1)  $E > V_0 > 0$  时，求透射率和反射率。

(2)  $V_0 > E > 0$  时，直接写出透射率和反射率，并给出理论分析。

(3)  $E > 0 > V_0$  时，透射率  $T = 1$  吗？不需推导，只要求给出定性解释。

(4) 浅谈你对隧穿效应的认识（不多于 100 字）。

五、

(1) 对于两电子系统，忽略电子之间的相互作用和  $s-s$  自旋耦合作用，总自旋角动量  $s$  可以取哪些值？给出单体近似下的对称和反对称自旋波函数。

(2) 一个电子在沿  $x$  轴方向的磁场中运动，系统的哈密顿量

$$H = \frac{eb\hbar}{2mc} \sigma_x$$

$t = 0$  时电子自旋“向上” ( $s_z = \hbar/2$ )。求  $t > 0$  时，电子的总自旋角动量  $\vec{s}$  的平均值。