量统2017郭永期中

Deschain

2022 年 1 月 23 日

一、（本题共36分，每小题6分）简答题

1.解释概念：（1）德布罗意假设；（2）束缚态

(1)实物粒子具有波粒二象性。

(2)粒子在无穷远处出现的概率为0的状态。

2.设每个粒子可占据单粒子态ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3中的一个态，对于两个全同Bose子体系，直接给出体系可能态的数目及相应的态函数。

共6种。

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \phi_1(1)\phi_1(2), \quad \psi_2 = \phi_2(1)\phi_2(2), \quad \psi_3 = \phi_3(1)\phi_3(2) \\
\psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(1)\phi_2(2) + \phi_2(1)\phi_1(2)] \\
\psi_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(1)\phi_3(2) + \phi_3(1)\phi_1(2)] \\
\psi_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_2(1)\phi_3(2) + \phi_3(1)\phi_2(2)]
\end{aligned}
$$

3.已知厄米算符$\hat{A}, \hat{B}$，给出算符$(\hat{A} + i\hat{B})^2$厄米性的条件。

$$
\begin{gathered}
(\hat{A} + i\hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2i\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2 \\
\therefore 2i\hat{A}\hat{B} = -2i\hat{A}\hat{B}, \quad \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0
\end{gathered}
$$

4.写出三维自由粒子及三维各向同性谐振子的各两组守恒量完全集。

(1)三维自由粒子：$[\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z], [\hat{H}_x, \hat{H}_y, \hat{H}_z]$

(2)三维各向同性谐振子：$[\hat{H}, \hat{p}], [\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z]$

5.设厄米算符$\hat{A}$和$\hat{B}$满足$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 = 1$（$\hat{A}, \hat{B}$的本征值无简并），直接给出：（1）$\hat{A}, \hat{B}$的本征值；（2）在$\hat{A}$表象中算符$\hat{A}$的矩阵表示。

(1)A,B的本征值都是$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

(2)

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

6.在$\hat{L}_z$的本征态$Y_{lm}(\theta, \varphi)$中，计算$\hat{L}_x$和$\hat{L}_y$的不确定度关系 $\Delta L_x \cdot \Delta L_y$。

$$
[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad \therefore \Delta\hat{L}_x \cdot \Delta\hat{L}_y \geq \frac{\hbar}{2}\overline{L_z} = \frac{m\hbar^2}{2}
$$

二、（本题8分）（以下两题任选一题）

1，在一维势场中运动的粒子，势能关于原点对称，即$U(-x) = U(x)$，证明粒子的定态波函数具有确定的宇称。

$$
\begin{aligned}
&E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) \\
&E\psi(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(-x) + U(-x)\psi(-x) \\
&\because U(-x) = U(x) \therefore \psi(x) = \psi(-x) \quad or \quad \psi(x) = -\psi(-x)
\end{aligned}
$$

2.证明定理：如果算符$\hat{F}$和$\hat{G}$有一组共同本征函数ψ_n，而且ψ_n组成完备系，则 $\hat{F}$和$\hat{G}$对易。

$$
\begin{aligned}
&\hat{F}\psi_n = F_n\psi_n, \quad \hat{G}\psi_n = G_n\psi_n \\
&(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\psi_n = \hat{F}G_n\psi_n - \hat{G}F_n\psi_n = F_N G_n\psi_n - G_n F_n\psi_n = 0 \\
&\because \forall\psi, \psi = \sum C_n\psi_n \\
&\therefore [\hat{F}, \hat{G}]\psi = 0, \quad [\hat{F}, \hat{G}] = 0
\end{aligned}
$$

三、（本题8分）设氢原子处于波函数$\psi(r, \theta, \varphi, s_z) = \frac{1}{\sqrt{3}}R_{21}(r)\begin{pmatrix}\sqrt{2}Y_{10}(\theta, \varphi) \\ Y_{11}(\theta, \varphi)\end{pmatrix}$

描写的状态中，求力学量$\hat{H}, \vec{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z, \hat{J}_z$的可能取值，这些可能值出现的概率和这些力学量的平均值。

$$
\begin{aligned}
&P(H = \frac{E_0}{4}) = 1, \quad \overline{H} = \frac{E_0}{4} \\
&P(L^2 = 2\hbar^2) = 1, \quad \overline{L^2} = 2\hbar^2 \\
&P(L_z = 0) = \frac{2}{3}, \quad P(L_z = \hbar) = \frac{1}{3}, \quad \overline{L_z} = \frac{\hbar}{3} \\
&P(S_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{2}{3}, \quad P(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{3}, \quad \overline{S}_z = \frac{\hbar}{6} \\
&P(J_z = \frac{\hbar}{2}) = 1, \quad \overline{J}_z = \frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
$$

四、（本题8分）一个量子“刚体”，具有惯性矩I_z，自由地在xy平面内转动，φ为转角。此系统的Hamilton量为$H = \frac{L_Z^2}{2I_z}, L_z$为$z$方向的轨道角动量。在$t = 0$时，转子由波包 $\psi(0) = Asin^2\varphi$描述，求系统在$t > 0$时的波函数$\psi(t)$。

$$
\begin{aligned}
&\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}, \quad E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I_z}, \quad \psi_{m1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \quad \psi_{m2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\varphi}, \\
&\psi(0) = Asin^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_{21} + \psi_{22} + \psi_0) \\
&\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_{21}e^{\frac{im^2\hbar}{2I_z}t} + \psi_{22}e^{-\frac{im^2\hbar}{2I_z}t}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0
\end{aligned}
$$

五、（本题20分）

1.（3分）直接写出在$\hat{S}_z$表象中电子自旋磁矩矩阵$\hat{S}_x, \hat{S}_y$和$\hat{S}_z$。

$$
S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 9\end{bmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & i \\ -i & 0\end{bmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}
$$

2.（4分）求在$\hat{S}_z$表象中$\hat{S}_x$的本征值及相应的本征态。

S_x的本征值$\lambda_1 = \frac{\hbar}{2}, \lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$,本征函数 $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$

3.（4分）测量一个处于自由空间的电子自旋的z分量，结果为$\frac{\hbar}{2}$。问第二次测量自旋的x 分量，可能得到什么结果？得到这些结果的概率是多少？

$$P(S_x=\frac{\hbar}{2})=P(S_x=-\frac{\hbar}{2})=\frac{1}{2}$$

4.（4分）一个具有两个电子的原子，处于自旋单态($S=0$)。讨论自旋-轨道耦合作用$\hat{H}=\xi(\vec{r})\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}$对能量的贡献。

$$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{S}}+\hat{\vec{L}},\quad \hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}=\frac{1}{2}(\hat{J}^2-\hat{S}^2-\hat{L}^2)=\frac{1}{2}(\hat{J}^2-\hat{L}^2)$$
$$\hat{H}|l>=\xi(r)\frac{1}{2}(\hat{J}^2-\hat{L}^2)|l>=\xi(r)\frac{1}{2}(j^2-l^2)|l>=0$$

5.（5分）一系统由两个可区分的自旋$\frac{1}{2}$的粒子组成，实验测得粒子1的自旋投影总朝上（+z方向），粒子2的自旋投影总是朝下（-z方向）。试求测量系统的总自旋平方$\vec{S}^2$及S_z得到的可能值和相应概率。

$$|+->=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10>+|00>),\quad P(\hat{S}^2=2\hbar^2)=\frac{1}{2},\quad P(\hat{S}^2=0)=\frac{1}{2},P(S_z=0)=1$$

六、（本题20分）已知二维谐振子的哈密顿算符为$\hat{H}_0=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2)$，对其施加微扰$\hat{W}=\lambda xy$（$\lambda$为常数）。求解下列问题：

1.（10分）求$\hat{H}_0$的本征值和本征态，并讨论各能级的简并度。

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega,\quad \psi_n(x)=H_{n1}(\alpha x)H_{n2}(\alpha y)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x^2+y^2)},\quad n=n_1+n_2,\quad f_n=n+1$$

2.（10分）利用定态微扰论求$\hat{H}=\hat{H}_0=\hat{W}$基态能量及第二激发态能量至一级修正。

参考公式：在$\hat{H}_0$表象中，坐标矩阵元为

$$x_{n'n}=<n'|x|n>=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}[\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}+\sqrt{n}\delta_{n',n-1}]$$

$|n>$为一维线性谐振子的第n个能量本征态，在坐标表象中即为$|n>=\psi_n(x)$

$$(1)E_0^{(0)}=\hbar\omega,\quad \psi_0(x)=H_0(\alpha x)H_0(\alpha y)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x^2+y^2)}$$
$$E_0^{(1)}=-\lambda<0|x|0><0|y|0>=0$$
$$E_0=\hbar\omega$$
$$(2)E_2^{(0)}=3\hbar\omega,\quad \psi_1=|20>,\quad \psi_2=|11>,\quad \psi_3=|02>$$
$$W_{11}=W_{22}=W_{33}=W_{13}=W_{31}=0,\quad W_{12}=W_{23}=W_{21}=W_{32}=-\frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}\mu\omega}$$
$$\begin{vmatrix} E & \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}\mu\omega} & 0 \\ \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}\mu\omega} & E & \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}\mu\omega} \\ 0 & \frac{\lambda\hbar}{\sqrt{2}\mu\omega} & E \end{vmatrix}=0,\quad E(E-\frac{\lambda\hbar}{\mu\omega})(E+\frac{\lambda\hbar}{\mu\omega})=0$$
$$E_{21}^{(1)}=0,\quad E_{22}^{(1)}=\frac{\lambda\hbar}{mu\omega},\quad E_{23}^{(1)}=-\frac{\lambda\hbar}{\mu\omega}$$

七、附加题（本题10分）（以下三题任选其一）

1.设体系在$t=0$时处于基态$|0>$，若$t=0$开始对体系施加微扰$\hat{H}'(x,t)=\hat{F}(x)e^{-\frac{t}{\tau}}$，长时间加上微扰后证明该体系处于另一能量本征态$|1>$的概率为$\frac{|<0|\hat{F}|1>|^2}{(E_1-E_0)^2+(\frac{\hbar}{\tau})^2}$。

2.谈谈你对《量子力学》的认识（200~300字以内）。

3.谈谈你对一种量子现象或效应的认识（200~300字以内）。