2016 年概率论期末试题及解答

Deschain

2021 年 8 月 19 日

1 设 X,Y 相互独立，均服从标准正态分布。设 $Z=E(X|(3X-Y+2))$，试求：Z 的均值，方差；$E(YZ)$。

解答

$$
\begin{aligned}
&V=3X-Y+2\\
&\begin{bmatrix}X\\V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\\
&\mu_{\vec{XY}}=(0,0)^T,\Sigma_{XY}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\
&\mu_{\vec{XY}}=\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\\
&\Sigma_{XY}=\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\3&10\end{bmatrix}\\
&\rho=\frac{3}{\sqrt{10}},\sigma_1^2=10,\mu_1=0,\mu_2=2\\
&(X,V)\sim N(0,2,1,10,\frac{3}{\sqrt{10}})\\
&f_{X|V}(x|v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2}}e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}\\
&\mu_3=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(v-\mu_2)=\frac{3}{10}(v-2)\\
&\sigma_3^2=\sigma_1^2(1-\rho_2)=\frac{7}{10}\\
&f_{X|V}(x|v)=\frac{1}{\sqrt{1.4\pi}}e^{-\frac{(x-0.3v+0.6)^2}{1.4}}\\
&Z=0.3v-0.6,V\sim N(2,10)\\
&E(Z)=0.3E(V)-0.6=0\\
&Var(Z)=0.09Var(V)=0.9\\
&\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0.9&-0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\
&\mu_{\vec{XY}}=(0,0)^T,\Sigma_{XY}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\
&\mu_{\vec{YV}}=(0,0)^T,\Sigma_{YV}=\begin{bmatrix}1&-0.3\\-0.3&0.9\end{bmatrix}\\
&Cov(Y,V)=-0.3=E(YV)-E(Y)E(V)\\
&E(YV)=-0.3
\end{aligned}
$$

2 盒中有 4 个黑球和 6 个白球，考虑从盒子取球并放回的游戏。一旦相邻两次取出同色球，则游戏结束。试求：游戏结束时取球次数的均值与方差。

解答设总摸球数为 X，事件 A 为“之前摸的是白球”，事件 B 为“之前摸的是黑球”。

$$
\begin{aligned}
&E(X) = 1 + \frac{3}{5}E(X|A) + \frac{2}{5}E(X|B)\\
&E(X|A) = \frac{3}{5} \times 1 + \frac{2}{5}(1 + E(X|B))\\
&E(X|B) = \frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{5}(1 + E(X|A))\\
&E(X|A) = \frac{35}{19}, E(X|B) = \frac{40}{19}\\
&E(X) = \frac{56}{19}
\end{aligned}
$$

3 设一根木棍的长度在 1 米和 2 米之间均匀分布。在木棍上随机选一个点，将其截为两段，求较长一段超出较短一段的长度的均值和方差。

解答设木棍长度为 X，截取的较短一段长为 Y，两段之差的绝对值为 Z。

$$
\begin{aligned}
&X \sim U(1,2), \quad Y \sim U(0, \frac{x}{2}), \quad Z \sim U(0, x)\\
&E(Z|X) = \frac{x}{2}, \quad Var(Z|X) = \frac{X^2}{12}\\
&E(Z) = E(E(Z|X)) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{3}{4}\\
&Var(Z) = Var(E(Z|X) + E(Var(Z|X))\\
&E(Var(Z|X)) = \int_1^2 \frac{x^2}{12}dx = \frac{7}{36}\\
&Var(E(Z|X)) = Var(\frac{X}{2}) = \frac{1}{4}Var(X) = \frac{1}{48}\\
&Var(Z) = \frac{31}{144}
\end{aligned}
$$

4 设有两个灯泡，其寿命彼此独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布。设对两个灯泡同时通电并开始计时，求第一个灯泡先于第二个灯泡熄灭情况下，第一个灯泡寿命的方差。

解答

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \le t | X_1 < X_2) &= \frac{P(X_1 \le t, X_1 < X_2)}{P(X_1 < X_2)}\\
&= \frac{\int_0^t dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2^2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}\\
&= \int_0^t (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x_1}\\
f_{X_1|X_1<X_2}(x_1|x_1 < x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x_1}, x_1 > 0\\
Var(X_1|X_1 < X_2) &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}
\end{aligned}
$$

5 设随机变量 X 服从 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的均匀分布，考虑随机变量 Y，满足 $X=\frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-1)$，请计算 $E(Y^2)$。

解答

$$
\begin{aligned}
&V=2X+1=\int_{-\inf}^{Y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t_2}{2}}dt\\
&V\sim U(0,1)\\
&F_Y(y)=\int_{-\inf}^{Y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t_2}{2}}dt\\
&Y\sim N(0,1)\\
&E(Y^2)=Var(Y)+E^2(Y)=1
\end{aligned}
$$

6 考虑二维平面上的正方形，边长为 a，两条对角线分别在两个坐标轴上。在该正方形内随机取一个点 (X,Y)，设随机变量 $Z_1=X+Y$,$Z_2=X-Y$，试计算以 Z_1 为条件的，Z_2 的条件概率密度 $f_{Z_2|Z_1}(Z_2|Z_1)$。

解答(建议作图看一看，很明显)

$$
\begin{aligned}
&Z_1=X+Y\sim U(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}})\\
&Z_2=X-Y\sim U(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}})\\
&Z_1\perp Z_2\\
&f_{Z_2|Z_1}(z_2|z_1)=\frac{1}{\sqrt{2}a},-\frac{a}{\sqrt{2}}<z_2<\frac{a}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

7 设随机变量 X_1，X_2，$\cdots$ 独立同分布，其分布函数为 $F_X(x)$，设随机变量 $N(y)$ 满足 $N(y)=min(k:X_k>y)$。请计算

$$\lim_{y\to\infty}P[N(y)\geq E(N(y))]$$

解答

$$
\begin{aligned}
&P(N(y)=k)=(F_X(y))^{k-1}(1-F_X(y))\\
&p=1-F_X(y),\quad N(y)\sim Ge(p),E(N(y))=\frac{1}{p}\\
&m=\lceil\frac{1}{p}\rceil\\
&P(N(y)\geq E(N(y)))=\sum_{k=m}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=(1-p)^{m-1}=(F_X(y))^{m-1}\\
&\lim_{y\to\infty}(F_X(y))^{\lceil\frac{1}{1-F_X(y)}\rceil-1}=\lim_{y\to\infty}(F_X(y))^{\frac{1}{1-F_X(y)}}=e^{-1}
\end{aligned}
$$

8 在单位圆上随机取三个点，构成三角形，请计算三角形最大的内角服从的分布。

解答建模：在 $[0,2\pi]$ 的弧长上随机取两个点，已知同弧所对圆周角是圆心角的一半，故进一步建模：在 $[0,\pi]$ 上任取 2 个点，设为 X，Y。

X,Y 的大小及三段长度共有 6 种等概情况，以下选取一种讨论，其余可类推。以 $0<X<Y<\pi$，

$X > Y - X$，$X > \pi - Y$ 为例。

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{max\{x,\pi-x\}}^{2x} f_{XY}(x,y)dy \\ &= \frac{1}{\pi_2}\int_{max\{x,\pi-x\}}^{2x} dy \\ &= \begin{cases} \frac{x}{\pi^2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ \frac{3x-\pi}{\pi^2}, \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ f_\theta(\theta) &= \begin{cases} \frac{6\theta}{\pi^2}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ \frac{18\theta-6\pi}{\pi^2}, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$