量统2018郭永期中

Deschain

2022 年 1 月 23 日

一、（本题48分，每小题6分）简答题

1.解释下列概念；（1）定态（2）量子隧穿效应（3）宇称

(1)体系的能量有确定值的状态。

(2)能量为E的粒子有一定概率穿透高度为$U_0(U_0 > E)$的势垒。

(3)若$\psi(x) = \psi(-x)$，则是偶（正）宇称；若$\psi(x) = -\psi(-x)$，则是奇（负）宇称。

2.德布罗意关系阐明了微观粒子的粒子性(E, p)与波动性$(\nu, \lambda$或$\omega, k)$之间的关系，用数学公式可将该关系表示为：

$E = \hbar\omega = h\nu, \quad \lambda = \frac{h}{p}$

3.已知升算符与降算符分别为$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - \frac{i}{m\omega}p_x), a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{i}{m\omega}p_x)$，其中$x$为坐标算符，$p_x$为动量算符，计算对易关系$[a, a^\dagger]$。

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar}([x, x] + \frac{i}{m\omega}([\hat{p}_x, x] - [x, \hat{p}_x]) + \frac{i}{m^2\omega^2}[\hat{p}_x, \hat{p}_x]) = \frac{m\omega}{2\hbar} \times \frac{i}{m\omega} \times 2i\hbar = 1$$

4.在Franck-Herz实验中，用电子束撞击氢原子，使氢原子跃迁到第一激发态。设第一激发态电子能量的起伏为 $10^4 eV$，根据量子力学原理估算氢原子第一激发态的寿命。

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta t \geq 3.30 \times 10^{-10} s$$

5.一维谐振子的能级为(　　　　　)，能级简并度为(　　　　　)；二维各向同性谐振子的能级为(　　　　　)，能级简并度为(　　　　　)；三维各向同性谐振子的能级为(　　　　　)，能级简并度为(　　　　　)；

$$\begin{aligned}
&(1)E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (2)1 \\
&(3)E_n = (n + 1)\hbar\omega \quad (4)n + 1 \\
&(5)E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega \quad (2)\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}
\end{aligned}$$

6.设力学量算符（厄米算符）$\hat{F}, \hat{G}$不对易，令$K = i(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})$。证明：（1）$\hat{K}$的本征值是实数；（2）在任何态中，$\overline{F^2} + \overline{G^2} \geq \overline{K}$。

(1)

$$\hat{K}^\dagger = -i(\hat{G}^\dagger\hat{F}^\dagger - \hat{F}^\dagger\hat{G}^\dagger) = i(-\hat{G}\hat{F} + \hat{F}\hat{G}) = \hat{K}$$

$\therefore \hat{K}$是Hermite算符$\therefore \hat{K}$的本征值是实数。

(2)

$$\begin{aligned}
&\hat{A} = \hat{F} + i\hat{G}, \quad \hat{B} = \hat{F} - i\hat{G}, \quad \hat{A}\hat{B} = \hat{F}^2 + \hat{G}^2 - \hat{K}^2 \\
&\because < \psi|\hat{A}\hat{B}|\psi >= |\hat{B}|\psi >|^2 \geq 0, \quad \therefore < \psi|\hat{F}^2\hat{G}^2 - \hat{K}|\psi > \geq 0, \quad \overline{F^2} + \overline{G^2} \geq \overline{K}
\end{aligned}$$

7.$t=0$时，粒子的状态为$\psi(x)=Asin^2(kx)$，求此时动量的可能测值和相应的概率，并计算动量的平均值。

$$\psi(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}(e^{2ikx}+e^{-2ikx}+2)$$
$$P(p_x=2k\hbar)=P(p_x=-2k\hbar)=\frac{1}{6},\quad P(p_x=0)=\frac{2}{3},\quad \overline{p}_x=0$$

8.一量子体系由三个全同玻色子组成，玻色子之间无相互作用，玻色子只有可能的2个单粒子态φ_1和 φ_2，相应的能量为ε_1和ε_2，写出该量子体系所有可能态的波函数和能量。

二、（本题8分）设矩阵A和B满足$A^2=0, AA^\dagger+A^\dagger A=1, B=A^\dagger A$。

(1)证明$B^2=B$；

(2)在B表象中，求出A的矩阵表示（设B本征值无简并）。

(1)

$$\hat{B}^2=\hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}=\hat{A}^\dagger(1-\hat{A}^\dagger\hat{A})\hat{A}=\hat{A}^\dagger\hat{A}=\hat{B}$$

(2)

$$\because A^2=0,\quad B=A^\dagger A$$
$$\therefore A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ e^{i\delta} & 0\end{bmatrix}$$

三、（本题8分）证明并举1-2例说明定理：如果体系具有两个互相不对易的守恒量，那么体系的能级一般是简并的。

1.对于氢原子，$\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$不对易，但都是守恒量，所以能级是简并的。

2.自由粒子的宇称和动量互相不对易，但都是守恒量，所以能级是简并的。

四、（本题8分）氢原子的波函数在球坐标系下写为$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)(e^{i\varphi}sin\theta+cos\theta)$，其中$R(r)$为径向函数。求解下列问题：

(1)角动量平方$\vec{L}^2$的可能测量值和相应的概率；

(2)角动量的z分量L_z的可能测量值、相应的概率及平均值。

参考公式：

$$Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sin\theta e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{20}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3cos^2\theta-1),\quad Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}sin\theta cos\theta e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$$
$$\psi(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2}{3}}R(r)Y_{11}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{1}{3}}R(r)Y_{10}(\theta,\varphi)$$
$$(1)P(L^2=2\hbar^2)=1$$
$$(2)P(L_z=\hbar)=\frac{2}{3},\quad P(L_z=0)=\frac{1}{3},\quad \overline{L_z}=\frac{2}{3}\hbar$$

五、（本题12分）由两个自旋均为$\frac{\hbar}{2}$的非全同粒子组成的量子体系，设粒子间相互作用为 $H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$（不考虑轨道运动）。设初始状态$t=0$时，粒子1自旋“向上”($S_{1z}=\frac{\hbar}{2}$)，粒子2自旋“向下”($S_{2z}=-\frac{\hbar}{2}$)。求解下列问题：

(1)分析并给出该系统的守恒量；

(2)$t>0$时刻该两粒子体系的自旋波函数；

(3)总自旋角动量$\vec{S}^2$和S_z的取值及概率。

$$(1)\{\hat{H},\hat{S},\hat{S}_1,\hat{S}_2\}$$

$$(2)\hat{H}=\frac{A}{2}(\hat{S}^2-\hat{S}_1^2-\hat{S}_2^2)$$

$$j=0,m=0,E_1=-\frac{3}{4}A\hbar^2,\quad \psi_1=|00>$$

$$j=1,m=1,E_2=\frac{1}{4}A\hbar^2,\quad \psi_{21}=|11>$$

$$j=1,m=0,E_2=\frac{1}{4}A\hbar^2,\quad \psi_{22}=|10>$$

$$j=1,m=-1,E_2=\frac{1}{4}A\hbar^2,\quad \psi_{23}=|1-1>$$

$$\Psi(r,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00>+|10>)$$

$$\Psi(r,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}|00>e^{i\frac{3}{4}A\hbar t}+\frac{1}{\sqrt{2}}|10>e^{-i\frac{1}{4}A\hbar t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{1}{4}A\hbar t}(|00>e^{i\frac{1}{2}A\hbar t}+|10>e^{-i\frac{1}{2}A\hbar t})$$

$$=E^{i\frac{1}{4}A\hbar t}(|+->cos(\frac{A\hbar t}{2})-|-+>isin(\frac{A\hbar t}{2}))$$

$$(3)P(S^2=0)=P(S^2=2)=\frac{1}{2},\quad P(S_z=0)=1$$

六、（本题16分）极性分子的转动可用平面转子描述，其哈密顿算符为$H_0=\frac{L_z^2}{2I}$。其中L_z 代表角动量z轴投影，转轴z过分子的质心并与分子的电偶极矩$\vec{D}$垂直，I为分子的转动惯量。

[1]写出它的能级和归一化能量本征函数，指出各能级的简并度。

[2]考虑加入一个微扰哈密顿量$H'=U_0cos^2\varphi$,其中$U_0>0$是常数，φ为平面转子的转动角。那么准确到微扰论的一级修正，求解：(1)基态能级有多大的移动？(2)第一激发态能级的一级近似。

$$(1)E_n=\frac{n^2\hbar^2}{2I},\quad \psi_{n1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi},\quad \psi_{n2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-in\varphi},\quad f_0=1,\quad f_n=2(n\geq 1)$$

$$(2)E_0^{(1)}=H'_{00}=\int_0 2\pi\frac{U_0}{2\pi}cos^2\varphi=\frac{U_0}{2}$$

$$H'_{11}=\int_0 2\pi\frac{U_0}{2\pi}cos^2\varphi=\frac{U_0}{2}=H'_{22}$$

$$H'_{12}=\int_0 2\pi\frac{U_0}{2\pi}e^{-2i\varphi}cos^2\varphi d\varphi=\frac{U_0}{4}=H'_{21}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{U_0}{2}-E & \frac{U_0}{4}\\ \frac{U_0}{4} & \frac{U_0}{2}-E\end{vmatrix}=0,\quad E_1^{(1)}=\frac{U_0}{4},\quad E_2^{(1)}=\frac{3U_0}{4}$$