量统 2019 郭永期中

Deschain

2022 年 1 月 23 日

一、简答题

1. 解释下列概念：

(1) 德布罗意假设 (2) 束缚态 (3)Zeeman 效应

(1) 实物粒子具有波粒二象性。

(2) 粒子在无穷远处出现的概率为 0 的状态。

(3) 正常 Zeeman 效应：没有外磁场时的一条谱线在有外磁场时分裂成 3 条；反常 Zeeman 效应：没有外磁场时的一条谱线在有外磁场时分裂成偶数条。

2. 填写下列对易关系，其中 x, y, z 代表坐标算符，$\hat{p}, \hat{L}$ 分别为动量算符和轨道角动量算符。

$$
\begin{aligned}
&(1)[y, \hat{p}_y] = (\qquad\quad); (2)[\hat{p}_y, x] = (\qquad\quad); (3)[\hat{p}_x, \hat{p}_z] = (\qquad\quad);\\
&(4)[\hat{L}_x, x] = (\qquad\quad); (5)[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = (\qquad\quad); (6)[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = (\qquad\quad);\\
&(1)[y, \hat{p}_y] = i\hbar; (2)[\hat{p}_y, x] = 0; (3)[\hat{p}_x, \hat{p}_z] = 0;\\
&(4)[\hat{L}_x, x] = 0; (5)[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = -i\hbar\hat{L}_y; (6)[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = 0
\end{aligned}
$$

3. 设厄米算符 $\hat{A}$ 满足 $\hat{A}^2 = \hat{A}$（假设算符 $\hat{A}$ 的本征值无简并），直接给出（1）$\hat{A}$ 的本征值（2）在自身表象中算符 $\hat{A}$ 的矩阵表示。

$$
(1)\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0
$$

$$
(2)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

4. 在轨道角动量分量算符 $\hat{L}_z$ 的本征态中，求角动量分量算符 $\hat{L}_x$ 的平均值 $\overline{L_x}$。

$$
\begin{aligned}
\overline{L_x} &= \frac{1}{i\hbar} < m|[\hat{L}_y, \hat{L}_z]|m >= \frac{1}{i\hbar} < m|\hat{L}_y\hat{L}_z|m > -\frac{1}{i\hbar} < m|\hat{L}_z\hat{L}_y|m >\\
&= \frac{1}{i\hbar} m\hbar < m|\hat{L}_y|m > -\frac{1}{i\hbar} m\hbar < m|\hat{L}_y|m >= 0
\end{aligned}
$$

5. 一刚性振子绕一固定点转动，转子转动惯量为 I，能量的经典表达式为 $H = \frac{\vec{L}^2}{2I}$，其中 $\vec{L}$ 为轨道角动量。求该转子的定态能量本征值、能量本征波函数并给出能级的简并度。

$$
E_n = \frac{n(n+1)}{2I}\hbar^2, \quad Y_{nm} = Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad f_n = 2n + 1
$$

6. 威尔逊云室是一个充满“过饱和蒸气”的容器，射入的高速电子使气体分子或原子电离成离子。以离子为中心，过饱和蒸气便凝结成小液滴。在强光照射下，可以看到一条白亮的带状的痕迹——粒子的径迹。若测出径迹的线度约为约为 $10^{-6}cm$，测出云室中的电子动能为 10^8eV。用量子力学原理简单说明可

以采用“轨道”的概念描述威尔逊云室中电子的运动。

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx 10^{-28} kg\cdot m/s, \quad p=\sqrt{2mE}=1.8\times 10^{-23} kg\cdot m/s, \quad p>>\Delta p_x$$

7. 设每个粒子可占据单粒子态 ψ_1,ψ_2,ψ_3 中的一个态，相应的能量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$。对于两个全同 Bose 子体系，直接给出体系可能态的数目、相应的态函数及能量。

$$\begin{aligned}
&E_1=2\varepsilon_1, \quad \Psi_1=\psi_1(1)\psi_2(2)\\
&E_2=2\varepsilon_2, \quad \Psi_2=\psi_2(1)\psi_2(2)\\
&E_3=2\varepsilon_3, \quad \Psi_3=\psi_3(1)\psi_3(2)\\
&E_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2, \quad \Psi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(1)\psi_2(2)+\psi_2(1)\psi_1(2))\\
&E_5=\varepsilon_1+\varepsilon_3, \quad \Psi_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(1)\psi_3(2)+\psi_3(1)\psi_1(2))\\
&E_6=\varepsilon_2+\varepsilon_3, \quad \Psi_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2(1)\psi_3(2)+\psi_3(1)\psi_2(2))
\end{aligned}$$

8. 已知厄米算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$，给出算符 $(\hat{A}+i\hat{B})^2$ 厄米性的条件。

$$(\hat{A}+i\hat{B})^2=\hat{A}^2+2i\hat{A}\hat{B}-\hat{B}^2, \quad 2i\hat{A}\hat{B}=-2i\hat{B}\hat{A}, \quad \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=0$$

二、（本题 12 分）设氢原子处于波函数 $\psi(r,\theta,\varphi,s_z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\varphi) \\ -\sqrt{3}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}$ 描写的状态。

(1) 直接写出氢原子的守恒量;

(2) 求力学量 $\hat{H},\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_z,\hat{S}_z,\hat{M}_z$ 的可能取值。这些可能值出现的概率及平均值，其中 $\hat{M}_z$ 为总磁矩 $\hat{\vec{M}}=-\frac{e}{2m}\hat{\vec{L}}-\frac{e}{m}\hat{\vec{S}}$ 的 z 分量。

$$\begin{aligned}
&(1)\{\hat{H},\hat{L}^2,\hat{L}_z\}\\
&(2)P(E=\frac{E_0}{4})=1, \quad \overline{E}=\frac{E_0}{4}\\
&\quad P(L^2=2\hbar^2)=1, \quad \overline{L^2}=2\hbar^2\\
&\quad P(L_z=\hbar)=\frac{1}{4}, \quad P(L_z=-\hbar)=\frac{3}{4}, \quad \overline{L_z}=-\frac{\hbar}{2}\\
&\quad P(S_z=\frac{\hbar}{2})=\frac{1}{4}, \quad P(S_z=-\frac{\hbar}{2})=\frac{3}{4}, \quad \overline{S_z}=-\frac{\hbar}{4}\\
&\quad P(J_z=\frac{3}{2}\hbar)=\frac{1}{4}, \quad P(J_z=-\frac{3}{2}\hbar)=\frac{3}{4}, \quad \overline{J_z}=-\frac{3}{4}\hbar\\
&\quad P(M_z=-\frac{e\hbar}{m})=\frac{1}{4}, \quad P(M_z=\frac{e\hbar}{m})=\frac{3}{4}, \quad \overline{M_z}=\frac{e\hbar}{2m}
\end{aligned}$$

三、（本题 10 分）设一维粒子 Hamilton 量 $H=\frac{p_x^2}{2m}+V(x)$，分别求出坐标 x 表象及动量 p_x 表象中 Hamilton 量 H 的矩阵元。

$$H_{x'x''}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)]\delta(x-x'')dx=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\delta(x'-x'')+V(x')\delta(x'-x'')$$

$$H_{p'p''}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(p-p')[\frac{p^2}{2m}+V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]\delta(p-p'')dp=[\frac{{p'}^2}{2m}+V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'})]\delta(p'-p'')$$

四、（本题 15 分）

(1) 写出在 $\hat{S}_z$ 表象中电子自旋矩阵 $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_z$。

(2) 测量一个处于自由空间的电子自旋的 z 分量，结果为 $\frac{\hbar}{2}$。问第二次测量自旋的 x 分量，可能得到什么结果？得到这些结果的概率是多少？

(3) 假设两个电子组成的量子系统有哈密顿算符 $\hat{H} = A(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) + B\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$ 描述，其中 A,B 为实常数，$\hat{\vec{S}}_1$ 和 $\hat{\vec{S}}_2$ 分别是两电子的自旋，$\hat{S}_{1z}$ 和 $\hat{S}_{2z}$ 分别是这两个电子自旋的 z 分量。求该量子系统的所有能级及能量本征函数。

(4) 在第 (3) 问的基础上，若初始时刻 $t = 0$ 时，电子 1 自旋“向上”（$s_{1z} = \frac{\hbar}{2}$），电子 2 自旋“向下”（$s_{2z} = -\frac{\hbar}{2}$），求 $t > 0$ 时刻该两电子系统的自旋波函数、总自旋角动量 $\hat{\vec{S}}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 的取值及概率。

$$(1)\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$(2)P(S_x = \frac{\hbar}{2}) = P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$(3)\hat{H} = A\hat{J}_z + \frac{B}{2}(\hat{J}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)$$

$$j = 0, m = 0, E_1 = -\frac{3}{4}B\hbar^2, \quad \psi_1 = |00>$$

$$j = 1, m = 1, E_2 = A\hbar + \frac{1}{4}B\hbar^2, \quad \psi_{21} = |11>$$

$$j = 1, m = 0, E_2 = \frac{1}{4}B\hbar^2, \quad \psi_{22} = |10>$$

$$j = 1, m = -1, E_2 = -A\hbar + \frac{1}{4}B\hbar^2, \quad \psi_{23} = |1-1>$$

$$(4)\Psi(r,0) = |00> + |10>$$

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00> e^{i\frac{3}{4}B\hbar t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|10> e^{-i\frac{1}{4}B\hbar t}$$

$$P(S^2 = 0) = P(S^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{2}, \quad P(S_z = 0) = 1$$

五、（本题 15 分）考虑一个质量为 μ 的粒子在三维各向同性谐振子势 $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$ 中运动，解答以下问题：

(1) 直接给出该量子系统的两组守恒量完全集；

(2) 在笛卡尔坐标系中采用分离变量法，可以得到三个一维谐振子，利用一维谐振子中所学知识给出粒子在三维各向同性谐振子势中运动时的能量本征值及本征函数，并给出能级的简并度（注：能级本征函数用一维谐振子的能量本征函数 $\psi_n(x)$ 表达即可。）；

(3) 设粒子受到微扰 $\hat{H}' = \lambda x^2 yz$ 作用（其中 λ 为实常数，刻画耦合强度），计算并讨论粒子基态和第一激发态两种情况的一级微扰能。

(4)（附加题，选做）若该粒子是自旋量子数为 $\frac{1}{2}$ 的核子，考虑核子受到自旋轨道耦合 $-C\vec{S}\cdot\vec{L}$ 作用（其中假设 C 是常数且 $C > 0, \vec{S}$ 为核子自旋），通过计算讨论自旋轨道耦合效应对能级带来的影响。

【参考公式】在占有数表象中，坐标矩阵元为

$$x_{n'n} = < n'|x| > = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}[\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}], \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

$$x^2_{n'n} = < n'|x^2|n > = \frac{1}{2\alpha^2}[\sqrt{n(n-1)}\delta_{n',n-2} + (2n+1)\delta_{n',n} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n',n+2}]$$

其中 $|n>$ 为一维线性谐振子的第 n 个能量本征态，在坐标表象中 $|n>=\psi_n(x)$。

(1)$\{\hat{H},\hat{L}^2,\hat{L}_z\}, \quad \{\hat{H}_z,\hat{H}_y,\hat{H}_z\}$

(2)$E_n=(n+\dfrac{3}{2})\hbar\omega, \quad \Psi_n(x,y,z)=\psi_{n1}(x)\psi_{n2}(y)\psi_{n3}(z), \quad n_1+n_2+n_3=n, \quad f_n=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(3)$E_0=<0|H'|0>=\lambda<0|x^2|0><0|y|0><0|z|0>=0, \quad E_0=\dfrac{3}{2}\hbar\omega$

$E_1^{(0)}=\dfrac{5}{2}\hbar\omega, quad\Psi_1=\psi_1(x)\psi_0(y)\psi_0(z), \quad \Psi_2=\psi_0(x)\psi_1(y)\psi_0(z), \quad \Psi_3=\psi_0(x)\psi_0(y)\psi_1(z)$

$H'_{23}=H'_{32}=\dfrac{\lambda}{4\alpha^4}, \quad else H'_{mn}=0$

$$\begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & -\frac{\lambda}{4\alpha^4} \\ 0 & -\frac{\lambda}{4\alpha^4} & \end{vmatrix}=E(E-\frac{\lambda}{4\alpha^4})(E+\frac{\lambda}{4\alpha^4})=0, \quad E_{11}^{(1)}=0, \quad E_{12}^{(1)}=\frac{\lambda}{4\alpha^4}, \quad E_{13}^{(1)}=-\frac{\lambda}{4\alpha^4}, \quad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$