2015 年概率论期末试题

Deschain

2021 年 8 月 19 日

1. 一个粒子在二维空间中做随机运动，方向可以是上，下，左，右四种，且各方向等概，每一步的步长为 1。假定从原点开始，每一秒运动一次，以第 n 秒时粒子所在位置与原点的距离为半径画圆，请计算这个圆面积的均值。

[法一]　设 n 秒时，共左右移动 X 次，上下移动 $n-X$ 次，则 $X \sim B(X, \frac{1}{2})$。此时水平方向的位移的平方

$$\begin{aligned} Z &= (X-2Y)^2 = X^2 - 4XY + 4Y^2 \\ E(Z|X) &= X^2 - 4X * E(Y|X) + 4E(Y^2|X) \\ &= X^2 - 4X * \frac{X}{2} + 4[Var(Y|X) + E^2(Y|X)] \end{aligned}$$

同理垂直方向位移的平方

$$E(V|X) = n - X$$

设面积为 S，则

$$E(S) = \pi(E(V) + E(Z)) = n\pi$$

[法二]　设有 a 次上下移动，b 次左右移动，$a+b=n$。记第 k 次上下移动量为 $I_k(I_1, I_2, \cdots, I_n = \pm 1)$

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{a} I_k \\ E(X^2) &= E[(\sum_{k=1}^{a} I_k)^2] \\ &= E(\sum_{k=1}^{a} I_k^2) + E(\sum_{m\neq n} I_m I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{a} E(I_k^2) + sum_{m\neq n} E(I_m)E(I_n) \\ &= a \times 1 + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

同理 $E(Y^2) = b$

$$E(S) = \pi E(X^2 + Y^2) = \pi(a+b) = n\pi$$

2. 设枪库里有两种枪，其中一种经过校正，命中率为 p，另外一种尚未校正，命中率为 q。考虑两种射击方式：从枪库里任取一支枪，射击一次，然后放回，如此连续两次；或者是从枪库里任取一支枪，独立射击两次。请问哪一种方式有更高的两次均命中的概率？

$$P1 = (\frac{p+q}{2})^2$$
$$P2 = \frac{p^2+q^2}{2}$$

$P2 \geq P1$(当且仅当 $p = q$ 时取“=”)

3. 随机变量 X,Y 相互独立，分别服从参数为 λ, μ 的指数分布。设

$$Z = \begin{cases} 4X+1, & X > Y \\ 5Y-2, & X < Y \end{cases}$$

请计算 Z 的概率密度与均值。

(1)$X > Y$

$$f_{X_1}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy = \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\mu x}), x > 0$$
$$Z_1 = 4X + 1$$
$$f_{Z_1}(z) = \frac{1}{4} f_{X_1}(\frac{z-1}{4})$$
$$f_{Z_1}(z) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\lambda(z-1)}{4}}(1 - e^{-\frac{\mu(z-1)}{4}}), z \geq 1$$

(2)$X < Y$

$$f_{Y_2}(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx = \mu e^{-\mu y}(1 - e^{-\lambda y}), y > 0$$
$$Z_1 = 5Y - 2$$
$$f_{Z_2}(z) = \frac{1}{5} f_{Y_2}(\frac{y+2}{5})$$
$$f_{Z_2}(z) = \frac{\mu}{4} e^{-\frac{\mu(z+2)}{5}}(1 - e^{-\frac{\lambda(z+2)}{5}}), z \geq -2$$

综上，

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\mu}{4} e^{-\frac{\mu(z+2)}{5}}(1 - e^{-\frac{\lambda(z+2)}{5}}), -2 \leq z \leq 1 \\ \frac{\mu}{4} e^{-\frac{\mu(z+2)}{5}}(1 - e^{-\frac{\lambda(z+2)}{5}}) + \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\lambda(z-1)}{4}}(1 - e^{-\frac{\mu(z-1)}{4}}), z \geq 1 \end{cases}$$
$$E(Z) = \frac{5}{\mu} + \frac{4}{\lambda} - \frac{3\mu}{5(\lambda+\mu)} + \frac{4\lambda - \mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

4. 假设股票市场每一天都是交易日，每个交易日的收盘股指点数是独立同分布的随机变量。从某个起始点开始算起，称一个交易日为拐点，如果从起始日到该交易日间每天收盘股指点数都在上涨，紧随该交易日后的后一天收盘股指点数下跌。请计算拐点到起始日之间的天数的均值。设第 i 天的收盘股指点数为 X_i, X_i 的累积分布函数为 $F(x)$，起始日与拐点之间的天数为 Y。此处定义：如果第 1 天到第 5 天一直上涨，第 6 天下降，那么 $Y = 4$。(1) 排列思想设事件 A 为“收盘股指点数从起始点到第 $k+1$ 天一直

上升”，事件 B 为“收盘股指点数从起始点到第 $k+2$ 天一直上升”。则“第 k 天是拐点”等价于 $A-B$。

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{(k+1)!} \\
P(B) &= \frac{1}{(k+2)!} \\
P(Y=k) &= P(A) - P(B) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \\
E(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{(k+2)!} - 2 \times \frac{k+1}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} - 2 \times \frac{k+2-1}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} - 2 \times \frac{1}{(k+1)!} + 2 \times \frac{1}{(k+2)!} \\
&= e - (2e-2) + 2(e-1-\frac{1}{2}) \\
&= e-1
\end{aligned}
$$

(2) 分布函数法

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= \int_0^{\infty} f(x_{k+1})dx_{k+1} \int_0^{x_{k+1}} f(x_{k+2})dx_{k+2} \int_0^{x_{k+1}} f(x_k)dx_k \int_0^{x_k} f(x_{k-1})dx_{k-1} \cdots \int_0^{x_2} f(x_1)dx_1 \\
&= \int_0^{\infty} f(x_{k+1})dx_{k+1} \int_0^{x_{k+1}} f(x_{k+2})dx_{k+2} \times \frac{1}{k!}[F(x_{k+1})]^k \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{k!}[F(x_{k+1})]^{k+1} f(x_{k+1})dx_{k+1} \\
&= \frac{1}{k!(k+2)}
\end{aligned}
$$

求均值同上。

5. 设 X,Y 均为连续随机变量。X 有密度函数 $f_X(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x}$，而 Y 满足 [0,X] 上的均匀分布，计算 $E(Y^2|Y>1)$。

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{1}{x}, 0<y<x \\
f_{XY}(x,y) &= f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda x}, 0<y<x \\
f_Y(y) &= \int_y^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda e^{-\lambda y}, y>0 \\
f_{Y|Y>1}(y|y>1) &= \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{\int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}dy} \\
&= \lambda e^{\lambda-\lambda y}, y>1 \\
E(Y^2|Y>1) &= \int_1^{\infty} \lambda y^2 e^{\lambda-\lambda y}dy \\
&= 1+\frac{2}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

6. 设 X,Y 服从均值为 1，方差为 0 的高斯分布，且相互独立。试求：$E[X^2+Y^2|cos(\frac{X}{Y})]$。由书后习题可知，$X^2+Y^2$ 与 $\frac{X}{Y}$ 相互独立，所以 X^2+Y^2 与 $cos(\frac{X}{Y})$ 相互独立。

$$E[X^2+Y^2|cos(\frac{X}{Y})]=E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=Var(X)+E^2(X)+Var(Y)+E^2(Y)=2$$

7. 连续投掷一枚不均匀的硬币 N 次,正面向上的概率为 p,其中 N 服从参数为 λ 的 Poisson 分布。设正面向上的次数为 M,反面向上的次数为 K,计算 $E[minM,K]$。答案链接:https://math.stackexchange.com/questions/2198 of-the-minimum-of-two-poisson-random-variables 麻烦看懂了的同学教教我，谢谢！

8. 考虑一枚不均匀的硬币，已知存在随机变量 N，使得连续抛掷 N 次，第 N 次的结果满足出现正面和反面的概率均为 $\frac{1}{2}$。因此，即使是不公平硬币，也可以用于公平游戏。请给出 N 的具体描述，并通过计算验证其公平性。

每组连续丢两次硬币，直到第 k 组出现“正反”或“反正”的组合，此时丢的两次为第 2k-1 次和第 2k 次。那么 N=2k。公平性：$P(+|N)=P(-|N)$。即第 N 次为 + 的组合模式（……-+）与第 N 次为-的组合模式（……-+）一一对应，对应的事件概率相同。

9. 设随机变量 X 和 Y 满足 $E(X)=E(Y)=1$，且有 $E(X|Y)=E(X)$, 计算 $E(XY)$。很明显，如果 X 和 Y 相互独立，一定有 $E(X|Y)=E(X)$。反之成立吗？请举例说明。

$$E(XY)=E(E(Xy|Y=y))=E(YE(X|Y))=E(YE(X))=E(Y)=1$$

举例说明：

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0

10. 篮球赛时长 n 分钟，某球员每一分钟有一次投篮机会，投中概率为 p，并且教练规定，若一次投篮不中，下一分钟不得投篮，需将机会交给队友。请计算一场球赛中该队员的投中次数的均值。

$$E_1 = p$$
$$E_2 = p^2 + p$$
$$E_n = p(1 + E_{n-1}) + (1-p)E_{n-2}$$
$$D_n = E_n - E_{n-1} + \frac{p}{p-2}$$
$$D_n = (p-1)D_{n-1}$$
$$D_n = (p^2 + \frac{p}{p-2})(p-1)^{n-2}, n \geq 2$$
$$E_n = E_1 + \sum_{k=2}^{n} D_n + (n-1) \times \frac{p}{p-2}$$

$$E_n = \begin{cases} p, n = 1 \\ p^2 + (p^2 + \frac{p}{p-2})\frac{1-(p-1)^{n-1}}{2-p} - (n-1)\frac{p}{p-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

参考文献：https://cowandsheep.github.io/Fishtoucher/#/