2017 年概率论期末试题及解答

Deschain

2021 年 8 月 20 日

1 设有三个灯泡，其寿命彼此独立，分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的指数分布。设对三个灯泡同时通电并计时，求：第一个灯泡晚于第二个灯泡熄灭情况下，

(a) 第三个灯泡亦晚于第二个灯泡熄灭的概率？

(b) 第三个灯泡与第二个灯泡寿命之差的均值与方差？

解答 (a)设三个灯泡寿命分别为 X_1, X_2, X_3。

$$
\begin{aligned}
P(X_3 > X_2|X_1 > X_2) &= \frac{P(X_3 > X_2, X_1 > X_2)}{P(X_1 > X_2)} \\
&= \frac{\int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} dx_3 \int_{x_2}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3} dx_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}} \\
&= \frac{\int_0^{+\infty} \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x_2} dx_2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}} \\
&= \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}
\end{aligned}
$$

解答 (b)设三个灯泡寿命分别为 X_1, X_2, X_3。

$$
\begin{aligned}
f_{X_2|X_1>X_2}(x_2|x_1 > x_2) &= \frac{\int_{x_2}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_1}{\int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_1} \\
&= (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2|X_1 > X_2 &\sim Exp(\lambda_1+\lambda_2) \\
E(X_2|X_1 > X_2) &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \\
E(X_3 - X_2|X_1 > X_2) &= E(X_3|X_1 > X_2) - E(X_2|X_1 > X_2) \\
&= E(X_3) - E(X_2|X_1 > X_2) \\
&= \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \\
Var(X_2|X_1 > X_2) &= \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} \\
Var(X_3) &= \frac{1}{\lambda_3^2} \\
Var(X_2 - X_3|X_1 > X_2) &= Var(X_2|X_1 > X_2) + Var(X_3) \\
&= \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}
\end{aligned}
$$

2 设 X,Y 的联合概率密度为 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{cy}{x},0<y<x<1\\ 0,other\end{cases}$。计算常数 c，并请计算 X 和 Y 的期望，以及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

解答

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx\int_0^x \frac{cy}{x}dy=\int_0^1\frac{cx}{2}dx=\frac{c}{4}=1,c=4\\
&E(X)=\int_0^1 xdx\int_0^x\frac{4y}{x}dy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}\\
&E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{4y^2}{x}dy=\int_0^1\frac{4x^2}{3}dx=\frac{4}{9}\\
&f_Y(y)=\int_y^1\frac{4y}{x}dx=-4yln(y),0<y<1\\
&f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=-\frac{1}{xln(y)},y<x<1
\end{aligned}$$

3 设一个罐子中有 8 个黑球，2 个白球，不断进行有放回的摸球，直到白球和黑球都曾出现为止。求：(a) 摸球次数的均值和方差；(b) 最后一次出现黑球的概率。

解答 (a)设摸球次数为 X。原问题分解为“第一个摸出的是白球，之后黑球第一次出现”和“第一个摸出的是黑球，之后白球第一次出现”。可以看出，第一次摸球之后，原问题分解为两个服从几何分布的问题。若 $Y\sim Ge(p)$，则 $E(Y)=\frac{1}{p},Var(Y)=\frac{1-p}{p^2},E(Y^2)=\frac{2-p}{p^2}$

$$\begin{aligned}
&P(X=k)=0.8^{k-1}\times 0.2+0.2^{k-1}\times 0.8,k\geq 2\\
&E(X)=0.8\times\frac{1}{0.2}+0.2\times\frac{1}{0.8}+1=5.25\\
&E((X-1)^2)=0.8\times\frac{2-0.2}{0.2^2}+0.2\times\frac{2-0.8}{0.8^2}=36.375\\
&E(X^2)=E((X-1)^2)+2E(X)-1=45.875\\
&Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=18.3125
\end{aligned}$$

解答 (b)P(最后一次是黑球)=P(第一次是白球)=0.2

4 环线汽车从起点站开出后，共有 N 站，只下不上，然后回到起点站。设有 n 位乘客在起点站上车，n 服从参数为 λ 的泊松分布。设对于每一位乘客，其目的站都是相互独立的，并且是等可能地在 N 站之一下车。求汽车停靠站数的均值和方差。

解答定义随机变量 X_i，如果在第 i 站停车，则 $X_i = 1$，否则 $X_i = 0$。设停靠总站数为 X，乘客数为 Y。

$$X = \sum_{i=1}^{N} X$$

$$P(X_i = 1|Y = y) = 1 - (\frac{N-1}{N})^Y$$

$$E(X|Y) = \sum E(X_i|Y) = N(1 - (\frac{N-1}{N})^Y)$$

$$P(Y = y) = \frac{\lambda_y}{y!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} N(1 - (1 - \frac{1}{N})^Y) e^{-\lambda} = N(1 - e^{-\frac{\lambda}{N}})$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2|Y) = E((\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j)|Y) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i|Y) + \sum_{i \neq j} \qquad P(X_iX_j = 1)(i \neq j) = 1 - 2(1 - \frac{1}{N})^Y + (1 -$$

$$\sum_{i=1}^{N} E(X_i|Y) = N(1 - (1 - \frac{1}{N})^Y)$$

$$\sum_{i \neq j} E(X_iX_j|Y) = (N^2 - N)(1 - 2(1 - \frac{1}{N})^Y + (1 - \frac{2}{N})^Y) \qquad E(\sum_{i=1}^{N} E(X_i|Y)) = N(1 -$$

$$Lemma : \sum_{y=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{N})^y \times \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{2\lambda}{N}}$$

$$Lemma : \sum_{y=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{N})^y \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{N}}$$

$$E(X^2) = N(1 - e^{-\frac{\lambda}{N}}) + (N^2 - N) - 2(N^2 - N)e^{-\frac{\lambda}{N}} + (N^2 - N)e^{-\frac{2\lambda}{N}}$$

$$= N^2 + (N - 2N^2)e^{-\frac{\lambda}{N}} + (N^2 - N)e^{-\frac{2\lambda}{N}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = Ne^{-\frac{\lambda}{N}} - Ne^{-\frac{2\lambda}{N}}$$

5 同时抛掷 5 枚均匀硬币，将正面朝上的硬币拾起后再次抛掷。设第一次抛掷反面朝上的硬币个数为 X，第二次抛掷正面向上的硬币个数为 Y，请计算 $E(X+Y)$ 和 $E(X|Y)$。

解答

$$X \sim B(5, \frac{1}{2}), Z = 5 - X \sim B(5, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(z, \frac{1}{2}), Z - Y \sim B(Z, \frac{1}{2})$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{5}{2} + E(Y)$$

$$E(Y|X) = \frac{5-X}{2}, E(Y) = E(\frac{5-x}{2}) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$E(X+Y) = \frac{15}{4}$$

如果已知一个硬币在第二次是反面，那么它在第一次是反面的概率

$$
P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
$$

$$
E(X|Y) = \frac{2}{3}(5 - Y)
$$

6 请举例说明，存在这样的三个随机变量 X,Y,Z，满足 X,Y 相互独立，但是在给定 Z 的条件下，两者不再独立了。你需要分别写出 $f_X(x), f_Y(y), f_{X,Y}(x,y), f_{X|Z}(x|z), f_{Y|Z}(y|z), f_{X,Y|Z}(x,y|z)$。

解答Z=0 时，X,Y 满足

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z=1 时，X,Y 满足

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

X,Y 独立，但给定 Z 时，X,Y 不独立。

7 考虑某种掷骰子游戏，游戏规定，若掷出奇数点，则游戏结束；若掷出偶数点，则需付给庄家与所掷出点数数目相同的钱，并继续掷。游戏结束时，游戏者将从庄家手里拿到一笔固定数目的钱。请问，庄家应在游戏结束时付出多少钱，才能确保自己平均意义上不赔本。

解答设庄家能从游戏者手中得到的钱数为 X

$$
E(X) = \frac{1}{6}(2 + E(X)) + \frac{1}{6}(4 + E(X)) + \frac{1}{6}(6 + E(X))
$$

$$
E(X) = 4
$$

8 设随机变量 X 服从高斯分布，$X \sim N(0, \sigma^2)$，请计算 $Y = \sqrt{max\{X, 0\}}$ 的概率密度。

$$
E(X) = \frac{1}{6}(2 + E(X)) + \frac{1}{6}(4 + E(X)) + \frac{1}{6}(6 + E(X))
$$

$$
E(X) = 4
$$

解答

$$
P(Y = 0) = \frac{1}{2}
$$

$$
Y = \sqrt{X}, |\frac{dx}{dy}| = 2y \qquad (X > 0)
$$

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^4}{2\sigma^2}}, y > 0 \\ \frac{1}{2}\delta(y), y = 0 \\ 0, other \end{cases}
$$