随机过程 2014-2015 期末

Deschain

2022 年 2 月 8 日

1. 设 X,Y 是两个实随机变量，服从联合高斯分布。

$$\binom{X}{Y} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

计算 $P(|X - E[X|Y]| \geq 1)$（用 $\Phi(x)$ 来表达）。

$E[X|Y] = \rho Y$

$P[|X - \rho Y| \geq 1] = P(X \geq \rho Y + 1) + P(X \leq \rho Y - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{1+\rho y}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\rho y - 1}) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+y^2-2xy\rho}{2(1-\rho^2)}} dxdy$

$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy (\int_{1+\rho y}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\rho y - 1}) e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} dx$

$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy (\int_{\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}}) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= 2\Phi(-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}})$

2. 设 X 服从高斯分布，$X \sim N(0,1), Y = |X|$，请给出确定性参数 a, b, c 的值，求解下述优化问题

$$\min_{a,b,c} E|Y - (a + bX + cX^2)|^2$$

并计算上述目标函数能够取到的最小值。

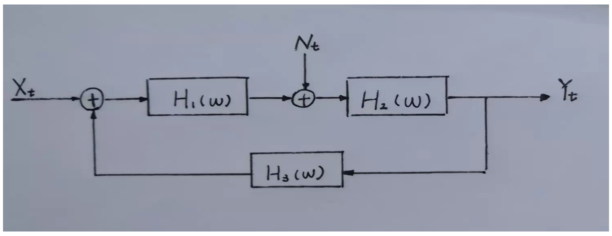
$$E[(Y - f(x))^2] = \frac{1}{2}E[(cX^2 + (b-1)X + a)^2] + \frac{1}{2}E[(cX^2 + (b+1)X + a)^2]$$
$$= \frac{1}{2}E[c^2X^4 + 2c(b-1)X^3 + (2ac + (b-1)^2)X^2 + 2a(b-1)X + a^2]$$
$$+ \frac{1}{2}E[c^2X^4 + 2c(b+1)X^3 + (2ac + (b+1)^2)X^2 + 2a(b+1)X + a^2]$$
$$= 3c^2 + b^2 + 2ac + a^2 + 1 \geq 1 (a = b = c = 0)$$

3. 设 X,Y 是两个实随机变量，服从联合高斯分布。

$$\binom{X}{Y} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

设 $Z(t)=cos(Xt+Y),-\infty<t<+\infty$，计算其功率谱密度 $S_Z(\omega)$。

4. 考虑如下的系统框图，其中 X_t 为输入，Y_t 为输出，N_t 为与 X_t 不相关的零均值白噪声，如果 X_t 的功率谱密度为 $S_X(\omega)$，请计算 Y_t 的功率谱密度 $S_Y(\omega)$。



$$
\begin{aligned}
&Y(\omega)=((X(\omega)+H_3(\omega)Y(\omega))H_1(\omega)+N(\omega))H_2(\omega)=A(\omega)X(\omega)+B(\omega)Y(\omega)\\
&A(\omega)=\frac{H_2(\omega)H_1(\omega)}{1+H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)},\quad B(\omega)=\frac{H_2(\omega)}{1+H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)}\\
&S_Y(\omega)=|A(\omega)|^2S_X(\omega)+|B(\omega)|^2S_N(\omega)=|A(\omega)|^2S_X(\omega)+|B(\omega)|^2\frac{n_0}{2}
\end{aligned}
$$

5. 设 X,Y 为随机变量，设随机过程 $Z(t)$ 满足 $Z(t)=Xcos^2(t)+Ysin^2(t)$，请给出 X,Y 的具体例子，使得 $Z(t)$ 分别为宽平稳和非宽平稳过程。

$$
\begin{aligned}
&(1)Y=X,\quad X\sim U(0,1)\\
&(2)Y\equiv 0,\quad X\sim U(0,1)
\end{aligned}
$$

6. 设 $U_n,n\in N$ 为独立同分布随机变量，服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，令 $X_k=max(U_{k-1},U_k)$，计算随机过程 X_k 的相关函数。

$$
\begin{aligned}
&X_k=max\{U_{k-1},U_k\},\quad F_X(x)=F_{U_1}(x)F_{U_2}(x)=x^2,\quad f_X(x)=2x,\quad E[X]=\frac{2}{3}\\
&(1)n\ge 2,\quad R_X(n)=E[X_{m+n}]E[X_m]=\frac{4}{9}\\
&(2)n=0,\quad R_X(0)=E[X^2]=\frac{1}{2}\\
&(3)n=1,\quad R_X(1)=E[X_nX_{n+1}]\\
&=\frac{1}{3}E[U_n^2|U_n>U_{n-1},U_n>U_{n+1}]+\frac{1}{3}E[U_{n-1}U_{n+1}|U_n<U_{n-1},U_n<U_{n+1}]\\
&+\frac{1}{6}E[U_{n-1}U_n|U_{n-1}>U_n>U_{n+1}]+\frac{1}{6}E[U_{n+1}U_n|U_{n+1}>U_n>U_{n-1}]\\
&=\frac{1}{5}+\frac{4}{27}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{13}{27}
\end{aligned}
$$

7. 设 $N(t)$ 为 Poission 过程，参数为 λ，请计算在时间段 $[0,2]$ 内发生两次事件，且时间段 $[1,3]$ 内发生两次事件的条件下，时间段 $[1,2]$ 内发生事件次数的概率分布；并请计算在同样的条件下，时间段 $[0,3]$ 内最早发生的事件和最晚发生的事件之间的时间间隔的均值。

设 $[0,1],[1,2],[2,3]$ 内发生事件的次数依次为 X_1,X_2,X_3, 事件从前到后依次为 $Z_1,Z_2,\cdots$。题中描述的事件 A 为互斥事件 A_1,A_2,A_3 的并集。

$$A_1 := \{X_1 = X_3 = 2, X_2 = 0\}, \quad A_2 := \{X_1 = X_2 = X_3 = 1\}, \quad A_3 := \{X_1 = X_3 = 0, X_2 = 2\}$$

$$P(A_1) = \frac{\lambda^4}{4}e^{-3\lambda}, \quad P(A_2) = \lambda^3 e^{-3\lambda}, \quad P(A_3) = \frac{\lambda^2}{2}e^{-3\lambda}$$

$$P(A_1|A) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+4\lambda+2}, \quad P(A_2|A) = \frac{4\lambda}{\lambda^2+4\lambda+2}, \quad P(A_3|A) = \frac{2}{\lambda^2+4\lambda+2}$$

$$given \quad A_1, \quad F_{Z_1}(z) = 2z - z^2, f_{Z_1}(z) = 2 - 2z, E[Z_1] = \frac{1}{3}$$

$$E[Z_2] = \frac{8}{3}, E[Y|A_1] = E[Z_4] - E[Z_1] = \frac{7}{3}$$

$$given \quad A_2, \quad Z_1 \sim U(0,1), Z_3 \sim U(2,3), E[Y|A_2] = E[Z_3 - Z_1] = 2$$

$$given \quad A_3, E[Y] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[Y] = \frac{7\lambda^3 + 24\lambda^2 + 6}{3\lambda(\lambda^2+4\lambda+2)}$$

8. 设进入公园的人数服从参数为 2 的 Poission 流，每一个人在公园内停留的时间服从 1 小时到 2 小时之间的均匀分布，如果公园的初始人数为 0，请计算公园内人数 $N(t)$ 的均值和方差。

设 $X_k(t,\tau_k) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ ，$X_k = 1$ 代表 τ_k 时刻到达的人 t 时刻还在，反之为 0。

$$N(t) = \sum_{k=1}^{Y(t)} X_k(t,\tau_k)$$

$$E[X_k(t,\tau_k)] = \begin{cases} 0, & t_k \geq t \quad or \quad \tau_k \leq t-2 \\ 1, & t-1 \leq \tau_k < t \\ 2-t+\tau_k, & t-2 < \tau_k < t-1 \end{cases}$$

$$E[X^2] = E[X]$$

$$given \quad t \geq 2, \quad \int_0^t E[X(t,\tau)]d\tau = \int_{t-2}^{t-1}(2-t+\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t} d\tau = \frac{3}{2}$$

$$\therefore E[Y(t)] = \lambda\int_0^t E[X(t,\tau)]d\tau = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2+4t-3, & 1 < t < 2 \\ 3, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$Var[Y(t)] = \lambda\int_0^t E[X^2(t,\tau)]d\tau = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2+4t-3, & 1 < t < 2 \\ 3, & t \geq 2 \end{cases}$$

9. 考虑正立方体，一只蚂蚁在该立方体上运动，每一步都从一个顶点到与之相邻的三个顶点之一。设蚂蚁到达三个顶点的概率相同。设蚂蚁的起点为顶点 a，Y_n 为蚂蚁第 n 不到达的顶点与 a 点之间的最短距离，请给出 Markov 链 Y_n 的一步转移概率矩阵，并计算其极限分布。

$$Y_n = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \pi = \pi \cdot P, \pi_0 = \pi_3 = \frac{1}{8}, \pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{8}$$

10. 考虑三个不可分辨的球，分别放在数轴的整数点上，每个点上允许放置不止一个球。球的位置按照如下步骤进行变动，每一步的具体做法是：将最左端的球拿起，从剩下两个球中等概率地选取一个（不拿起），将拿起的球放置到选中的球所在整数点的右侧相邻整数点上。请构造 Markov 链来描述三个球的相对位置关系，写出一步转移概率矩阵，并计算其极限概率分布。

考虑以下简化方法：定义左、中两球间距为 n，中、右两球间距为 m 的状态为 (m, n)，则所有的状态可以被归结为 5 种：$(m, n), (m, 1), (1, 1), (1, 0), (0, 1)$，其状态转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \pi = \pi \cdot P, \pi_1 = \pi_2 = 0, \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{3}$$