随机过程 2019-2020 期末

Deschain

2022 年 1 月 24 日

1. 连续投掷色子 n 次，设 S_n 为 n 次投掷结果之和，当 n 充分大时，请计算 S_n 被 7 除余数为 2 的概率。

$$S_n = 0,1,2,3,4,5,6, \quad P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & i \neq j \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\pi = \pi \cdot P, \quad \sum \pi_i = 1, \quad \therefore \pi_i = \frac{1}{6}, \quad i = 0,1,\cdots,6 \quad \lim_{n\to\infty} P(S_n = 2) = \frac{1}{7}$$

2. 到达公园钓鱼的游客人数服从参数为 λ 的泊松过程，λ 为在 $[\alpha, \beta]$ 区间上均匀分布的随机变量，$\beta > \alpha > 0$、每位游客能钓到鱼的概率为 p。公园中鱼的重量是随机的，均值为 μ，方差为 σ^2。已经统计得知在 $[0,t]$ 时间内到达游客数为 N。设 $[t,2t]$ 时间内所有游客钓到的鱼的总重量为 A，求 A 的均值和方差。

设能钓到鱼的游客的到达为 $Y(t)$，则 $Y(t)$ 是参数为 $p\lambda$ 的泊松过程。在 $N(t) = N$ 的情况下，λ 的后验概率分布为 $g(\lambda)$，设 $[t,2t]$ 内第 i 位游客 Y_i 钓到鱼的重量为 V_i，则 $A = \sum_{i=1}^{Y(t)} V_i$。

$$g(\lambda) = \frac{(2\lambda t)^N e^{-2\lambda t}}{\int_\alpha^\beta (2\lambda t)^N e^{-2\lambda t} d\lambda}$$

$$E[A] = E_Y[\sum_{i=1}^{Y} E[V_i]|Y(t) = Y] = E_Y[\mu Y] = \mu E_\lambda[E_Y[Y|\lambda]] = \mu E_\lambda[pt\lambda] = \mu pt \int_\alpha^\beta \lambda g(\lambda) d\lambda$$

$$E[A^2] = E_Y[E^2[\sum_{i=1}^{Y}[V_i]]|Y(t) = Y] = E_Y[(\mu^2+\sigma^2)Y^2] = (\mu^2+\sigma^2)E_\lambda[E_Y[Y^2|\lambda]] = (\mu^2+\sigma^2)ptE_\lambda(\lambda + pt\lambda^2)$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)pt\int_\alpha^\beta (\lambda + pt\lambda^2) g(\lambda) d\lambda$$

$$Var(A) = E^2[A] - E[A^2]$$

3. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为独立的零均值宽平稳高斯过程，自相关函数为 $R_X(\tau) = R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$，请计算 $E[cos(X(3)+Y(3))|(X(0)+Y(0))]$。

$$\vec{X}_1 = [X(0), X(3), Y(0), Y(3)]^T, \quad \vec{X}_1 \sim N(0, \Sigma_1), \quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & e^{-3} & 0 & 0 \\ e^{-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{-3} \\ 0 & 0 & e^{-3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_2 = [X(3)+Y(3), X(0)+Y(0)]^T, \quad \vec{X}_2 = A\vec{X}_1, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_2 \sim N(0, \Sigma_2), \quad \Sigma_2 = A\Sigma_1 A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2e^{-3} \\ 2e^{-3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = (X(3)+Y(3))|(X(0)+Y(0)), \quad X_3 \sim N(\mu_3, \sigma_3^2), \quad \mu_3 = e^{-3}(X(0)+Y(0)), \quad \sigma_3^2 = 2(1-e^{-6})$$

$$E[cos(X_3)] = \frac{1}{2}(E[e^{jx_3}] + E[E^{-jx_3}]) = \frac{1}{2}[\phi(1) + \phi(-1)] = cos(e^{-3})e^{e^{-6}-1}$$

4. 到达商店的客流服从参数为 λ 的泊松过程，每个客人在商店中消费的钱数为相互独立的随机变量，均值与方差均为 1。设 $Y(t)$ 为截止到时刻 t 为止，商店的总收入。请确定参数 T，使得 $Z(t) = Y(t+T) - Y(t)$ 为宽平稳过程，并计算其相关函数。

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad X_k i.i.d, \quad E[X_k] = Var[X_k] = 1$$

$$Z(t) = Y(t+T) - Y(t) = Y(T) = \sum_{k=1}^{N(T)} X_k$$

$$\therefore \forall T > 0, Z(t) w.s.s.$$

$$E[Z(t)] = E[\sum_{k=1}^{n} E[X_k]|N(T) = n] = E_N(n) = \lambda T$$

$$Var[Z(t)] = E[Var[\sum_{k=1}^{n} X_k|N(T) = n]] + Var[E[\sum_{k=1}^{n} X_k|N(T) = n]] = E[n] + Var[n] = 2\lambda T$$

$$E[Z(t)Z(s)] = E[Z^2(t)] = \lambda^2 T^2 + 2\lambda T$$

5.$X(t)$ 为零均值宽平稳高斯过程，自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$。

(1) 设 $Y(t)$ 为 $X(t)$ 的导数，求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合分布。

(2) 求 $E[X(0)|Y(1) = 2]$

6. 到达道路监控系统从车流服从参数为 λ 的泊松过程，设车流中有 3 种类型：小客车、货车与公交车。对于通过监控系统的每一辆车而言，其车型属于上述三类的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$。请计算：两台公交车通过的时间间隙中，通过的小客车与货车各一辆的概率。

设小客车、货车。公交车的通过依次为 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$，两辆公交车的间隔为 T，事件 A 为“两台公交车通过的时间间隙中，通过的小客车与货车各一辆”。

$$N_1(t) \sim Poisson(\frac{\lambda}{2}), \quad N_2(t) \sim Poisson(\frac{\lambda}{3}), \quad N_3(t) \sim Poisson(\frac{\lambda}{6}), \quad T \sim Exp(\frac{\lambda}{6})$$

$$P(A|T) = P(N_1|T)P(N_2 = 1|T) = \frac{\lambda^2 T^2}{6} e^{-\frac{5}{6}\lambda T}, \quad P(A) = \int_0^\infty \frac{\lambda^2 T^2}{6} e^{-\frac{5}{6}\lambda T} \times \frac{\lambda}{6} e^{-\frac{1}{6}\lambda T} = \frac{1}{18}$$

7. 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为零均值高斯过程，相关函数为 $R(\tau)$，令 $Y(t) = 2e^{\frac{X(t)}{2}}$, 试判断 $\{Y(t)\}$ 是否宽平稳。

$X \sim N(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = R(0)$

$E[Y(t)] = 2E[e^{\frac{X(t)}{2}}] = 2\phi(-2j) = e^{2R(0)}$

$R_Y(t, s) = E[Y(t)Y(s)] = E[e^{\frac{1}{2}(X(t)+X(s))}]$

$[X(t), X(s)]^T \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} R(0) & R(t-s) \\ R(t-s) & R(0) \end{bmatrix}, \quad Z = X(t) + X(s) \sim N(0, 2R(0) + 2R(t-s))$

$R_Y(t, s) = 4E[e^{\frac{Z}{2}}] = 4\phi_Z(-\frac{j}{2}) = 4e^{\frac{1}{4}(R(0)+R(t-s))}$

$\therefore Y \quad w.s.s.$

8. 厂家 A 出厂的灯泡 80% 是合格品，平均寿命 10 年，20% 是次品，平均寿命是 1 年。厂家 B 出厂的灯泡 90% 是合格品，平均寿命 5 年，10% 是次品，平均寿命是 0.5 年。假设灯泡的寿命均服从指数分布。小李买了厂家 A 的一个灯泡，小王买了厂家 B 的一个灯泡，并同时开始使用。试求，小李的灯泡先于小王的灯泡熄灭的概率是多大？

$$P = \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} \times \frac{5}{10+5} + \frac{1}{5} \times \frac{9}{10} \times \frac{5}{1+5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{0.5}{10+0.5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{0.5}{1+0.5} = \frac{841}{2100} = 0.40$$

9.N 个黑球和 N 个白球混合在一起，装在两个罐子里，每个罐子里有 N 个球。假设在每一个时刻进行一次“交换”操作，即从两个罐子里分别取出一个球，交换后放回。请计算在时间充分长后，第一个罐子中白球数目所服从的统计分布。

相当于从 $2N$ 个球中，选 N 个放进罐子中。$P(X = k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{N}{N-k}}{\binom{2N}{N}}$。

10. 设 X 和 Y 为独立同分布的 n 维高斯随机变量，服从 $N(0, \Sigma)$，其中 $\Sigma \in R^{n \times n}$ 非奇异，请给出矩阵 A，使得 $Z = AY$ 满足 $Var(X^T Z) = n$。

$\because Var(X^T Z) = n \quad \therefore Var(X^T AY) = n$

$\Sigma = LL^T, \quad X_1 = L^{-1}X \sim N(0, I_n), \quad Y_1 = L^{-1}Y \sim N(0, I_n)$

$X_1^T Y_1 \sim N(0, n), \quad X_1^T Y_1 = X^T (L^{-1})^T L^{-1} Y = X^T \Sigma^{-1} Y$

$\therefore A = \Sigma^{-1}$