量统 2017-2018 郭永期末

Deschain

2022 年 1 月 23 日

一、(15 分，每小题 3 分) 简答题：解释下列概念：1. 全同粒子 2. 玻尔兹曼关系 3. 等几率原理 4. 费米能 5.μ 空间

1. 全同粒子：质量、电荷、自旋等内禀属性完全相同的粒子，具有不可区分性。

2. 玻尔兹曼关系：$S = kln(W\{n_i\})$，S 是熵，k 是 Boltzmann 常数，$W\{n_i\}$ 是系统的微观状态数。

3. 等几率原理：对于处于平衡态的孤立系统，各个微观态出现的几率相等。

4. 费米能：在 $T = 0K$ 时，低于费米能的能级全被填满，高于费米能的能级全部空着。

5.μ 空间：以广义坐标和广义动量为直角坐标系基矢的 $2r$ 维空间。

二、（本题 20 分）一个由大量全同和近独立的玻色子组成的孤立系统，具有确定粒子数 N、能量 E 和体积 V，设 ε_i, g_i, n_i 分别是单粒子能级 i 的能量、简并度和占有数。解答下列问题：

1. 写出该玻色系统中任意一组分布 $\{n_i\}$ 所包含的微观状态数。

$$W\{n_i\} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}$$

2. 基于等几率原理并采用 Lagrange 待定乘子法，导出玻色-爱因斯坦分布 $n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_1} - 1}, (i = 1, 2, \cdots)$，进而解释该分布的含义。

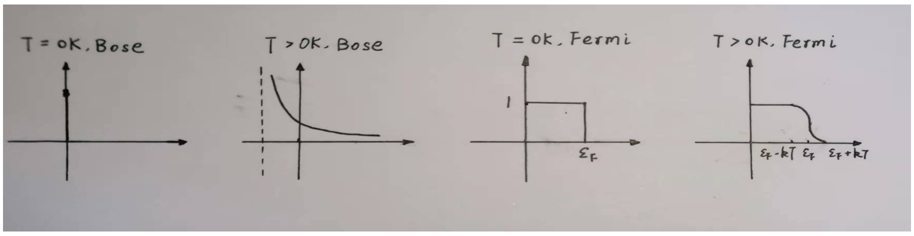
$$\begin{aligned}
&W\{n_i\} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \\
&ln(W\{n_i\}) \approx \sum (n_i + g_i) ln(n_i + g + i) - n_i ln n_i - g_i ln g_i \\
&F(n_i) = ln(W\{n_i\}) + \alpha(N - \sum n_i) + \beta(E - \sum n_i\varepsilon_i) \\
&\frac{\partial F}{\partial n_i} = ln(1 + \frac{g_i}{n_i}) - \alpha - \beta\varepsilon_i = 0 \\
&n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_i} - 1}
\end{aligned}$$

3. 直接给出玻色气体可以采用半经典近似 $n_i = g_i e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}$ 的条件。

$$e^{\alpha} >> 1$$

4. 分别做出由玻色-爱因斯坦统计及费米-狄拉克统计所支配的近独立粒子系统在两不同温度时能级 ε 上分布的粒子数随能级 ε 变化的草图。

参考公式：Stirling 公式 $N! \approx N^N e^{-N} \quad (N >> 1)$



三、（本题 20 分）一定域系统含有 N 个近独立粒子，每个粒子有两个非简并能级 ε_0 和 $\varepsilon_1(\varepsilon_1 > \varepsilon_0)$，解答下列问题：

1. 在温度为 T 的热平衡状态下，粒子在能级 ε_0 和 ε_1 的粒子分布数。

$$n_i = g_i e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}, \quad g_0 = g_1 = 1$$
$$n_0 = e^{-\alpha-\frac{\varepsilon_0}{kT}}, \quad n_1 = e^{-\alpha-\frac{\varepsilon_1}{kT}}$$
$$n_0 + n_1 = N \qquad n_0 = \frac{N}{1+e^{\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{kT}}}, \quad n_1 = \frac{N}{1+e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT}}}$$

2. 在温度为 T 的热平衡状态下系统的内能、定容热容及熵；

$$z = e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_1}$$
$$\overline{E} = -N\frac{\partial lnz}{\partial\beta} = N\frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0} + \varepsilon_1 e^{-\beta\varepsilon_1}}{e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_1}}$$
$$C_V = (\frac{\partial\overline{E}}{\partial T})_V = \frac{N(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}{kT^2}e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT}}\frac{\varepsilon_0 + (\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}{kT^2})e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT^2}} - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}{kT^2}e^{\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{kT}}}{(1+e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT}})^2}$$
$$S = Nk(lnz - \beta\frac{\partial lnz}{\partial\beta}) = Nk(ln(e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_1}) + \frac{\beta(\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0} + \varepsilon_1 e^{-\beta\varepsilon_1})}{e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_1}})$$

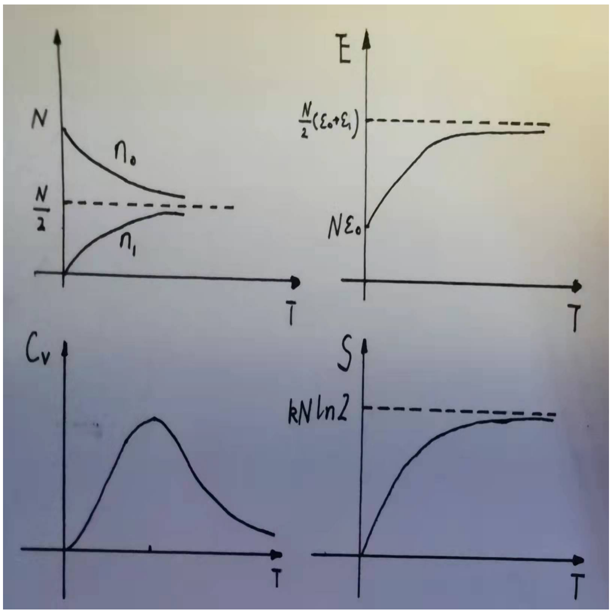
3. 讨论在低温和高温极限下，粒子数分布、内能、定容热容及熵的结果，并画出粒子数分布、定容热容及熵随系统温度变化的草图。

(1)

$$\lim_{T\to 0} n_0 = N, \quad \lim_{T\to 0}\overline{E} = N\varepsilon_0, \quad \lim_{T\to 0} C_V = 0, \quad \lim_{T\to 0} S = 0,$$

(2)

$$\lim_{T\to\infty} n_0 = \lim_{T\to\infty} n_1 = \frac{N}{2}, \quad \lim_{T\to\infty}\overline{E} = \frac{N}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_1), \quad \lim_{T\to\infty} C_v = 0,$$
$$\lim_{T\to\infty} S = kln(W\{n_i\}) = kln(\frac{N!}{((\frac{N}{2})!)^2}) \approx kNln2$$



四、（本题 25 分）白矮星中心的温度为 $T\approx 10^7K$，可以把它看做是 N 个电子和 $\frac{N}{2}$ 个氢核的系统。白矮星的费米温度 $T_F\approx 10^9K$，因此其电子其他是高度简并的，可以把它看做是温度为绝对零度的理想费米气体。白矮星的存在是气体的简并压力与自引力达到暂态平衡的结果。如果这个气体是极端相对论的，则存在一个临界质量 M_c，当白矮星的质量 M 大于临界质量 M_c 时，它将塌缩。只要电子是非相对论的，该费米气体就能抵抗引力塌缩而保持稳定。

1. 在极端相对论条件下，粒子的能量动量关系为 $\varepsilon=pc$，证明在体积 V，能量 $\varepsilon\sim\varepsilon+d\varepsilon$ 的范围内，极端相对论粒子（自旋简并度为 J）的量子态数为 $g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi JV}{(ch)^3}\varepsilon^2d\varepsilon$;

$$\Omega(\varepsilon)=\int dxdydzdp_xdp_ydp_z=V\int p^2sin\theta dpd\theta d\varphi=4\pi V\int_0^{\frac{\varepsilon}{c}}p^2dp=\frac{4\pi V\varepsilon^3}{3c^3}$$
$$g(\varepsilon)=\frac{J}{h^3}\frac{d\Omega(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\frac{4\pi JV\varepsilon^2}{(ch)^3}=\frac{8\pi V\varepsilon^2}{(ch)^3}$$

2. 在极端相对论情况下，利用费米-狄拉克统计导出电子气体在 $T=0K$ 时的费米能量、内能和简并压。

$$N=\int_0^{\varepsilon_F}g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi JV}{(ch)^3}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^2d\varepsilon=\frac{4\pi JV\varepsilon_F^3}{3(ch)^3}$$
$$\varepsilon_F=(\frac{3N(ch)^3}{4\pi JV})^{\frac{1}{3}}=(\frac{3N}{8\pi V})^{\frac{1}{3}}ch$$
$$\overline{E}=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi JV}{(ch)^3}\frac{\varepsilon_F^4}{4}=\frac{3}{4}chN(\frac{3N}{8\pi V})^{\frac{1}{3}}$$
$$P=-\frac{\partial\overline{E}}{\partial V}=\frac{chN}{8V}(\frac{3N}{\pi V})^{\frac{1}{3}}$$

3. 在非相对论条件下，当费米动量为 $\frac{m_cc}{10}$ 时，求电子数密度。

$$P_F=\frac{m_cc}{10},\qquad \varepsilon_F=\frac{p^2}{2mc}=\frac{m_cc^2}{200}$$
$$n=\frac{2}{3}\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}\times\frac{2\pi J(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}=\frac{\pi m^3c^3}{375h^3}$$

4.（选做 3 分）试导出白矮星临界质量 M_c 的表达式（忽略辐射）。

五、（本题 20 分）考虑由同种、无相互作用、非相对论的玻色子组成的气体，根据玻色-爱因斯坦分布解答以下问题：

1. 如果最低能级取 $\varepsilon_0=0$，分析并给出化学势 μ 的取值范围。

$$n_0=\frac{g_i}{e^{-\frac{\mu}{kT}}-1} \qquad n_0>0 \qquad e^{-\frac{\mu}{kT}}>1, \qquad \mu<0$$

2. 在系统的体积 V 和总粒子数 N 保持不变时，如果玻色气体是单原子分子组成的气体，证明 $\frac{\partial\mu}{\partial T}<0$;

$$N=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial T}=-\frac{\partial N}{\partial T}/\frac{\partial N}{\partial\mu}=-\frac{\int_0^\infty\frac{\varepsilon-\mu}{kT^2}\frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}{(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1)^2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{\int_0^\infty\frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}{(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1)^2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT}d\varepsilon}<0$$

3. 导出基态能级 $\varepsilon_0=0$ 及激发态能级 $\varepsilon>0$ 上分布的粒子数与系统总粒子数 N 及温度 T 的关系，进而说明该三维系统能否存在玻色-爱因斯坦凝聚？

$$N_1=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}=\frac{2\pi VJ(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}dx}{e^x-1}=2.612J(\frac{2\pi mkT}{h^2})^{\frac{3}{2}}=(\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}}N$$

$$N_0=N-N_1=(1-(\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}})N$$

能存在 Bose-Einstein 凝聚。

4. 如何理解玻色-爱因斯坦凝聚是动量空间的凝聚？（定性说明即可）

参考公式：$\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}dx}{e^x-1}=2.612\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=2.31$

凝聚到 $\varepsilon=0$ 的粒子的动量、能量、熵都为 0。