随机过程 2020 期中

Deschain

2022 年 1 月 23 日

1. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为独立的零均值平稳高斯过程，自相关函数为 $R_X(\tau) = R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$
，请计算 $E[cos^2(X(1) + Y(1))|(X(0) + Y(0))]$。

$$\vec{w} = [X(0), X(1), Y(0), Y(1)]^T, \quad \vec{w} \sim N(0, \Sigma_W), \quad \Sigma_W = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ \frac{1}{e} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = [X(1) + Y(1), X(0) + Y(0)]^T, \vec{v} = A\vec{w}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_V = A\Sigma_W A^T = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{e} \\ \frac{2}{e} & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = (X(1) + Y(1))|(X(0) + Y(0)), \quad U \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{e}(X(0) + Y(0)), \quad \sigma_1^2 = 2(1 - \frac{1}{e^2})$$

$$E[cos^2 u] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[cos(2u)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}E[e^{2ju} + e^{-2ju}]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\phi_U(2) + \frac{1}{4}\phi_U(-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{4(\frac{1}{e^2}-1)}cos(2\mu_1)$$

2. 假设 $X(t)$ 和 $V(t)$ 是两个相互独立的宽平稳随机过程，它们的自相关函数分别为 $R_{XX}(\tau)$ 和 $R_{VV}(\tau)$。

(a) 利用 $X(t)$ 和 $V(t)$ 构造一个随机过程 $G(t)$，使得 $G(t)$ 的自相关函数满足 $R_{GG}(\tau) = R_{XX}(\tau)R_{VV}(\tau)$，并证明之。

(b) 令 $W(t)$ 表示一个自相关函数为 $R_{WW}(\tau) = \delta(\tau)$ 的宽平稳随机过程，并将 $W(t)$ 输入一个因果的线性时不变系统。该系统的输入 $W(t)$ 和输出 $Z(t)$ 满足以下线性常系数微分方程为 $\frac{dZ(t)}{dt} + aZ(t) = bW(t)$。请确定常系数 a 和 b 的取值，从而使系统的输出 $Z(t)$ 的自相关函数为 $R_{ZZ}(\tau) = 2e^{-|\tau|}$。

(c) 是否可以找到一个宽平稳随机过程 $U(t)$，使得它的自相关函数满足 $R_{UU}(\tau) = R_{XX}(\tau) * R_{VV}(\tau)$，其中 $*$ 表示卷积，$R_{XX}(\tau) = 2e^{-|\tau|}, R_{VV}(\tau) = 3e^{-|\tau|}$。如果不可以，请说明原因；如果可以，请说明如何利用宽平稳随机过程 $W(t)$ 以及任意因果的线性时不变滤波器得到 $U(t)$，其中 $W(t)$ 的自相关函数为 $R_{WW}(\tau) = \delta(\tau)$。

$(a)G(t)=X(t)V(t),\quad R_{GG}(t,s)=E[X(t)V(t)X(s)V(s)]=E[X(t)X(s)]E[V(t)V(s)]=R_{XX}(\tau)R_{VV}(\tau)$

$(b)R_{ZZ}(\tau)=2e^{-|\tau|},\quad S_Z(\omega)=\dfrac{4}{\omega^2+1},\quad S_W(\omega)=1,\quad W(t)=H(t)*Z(t),|H(j\omega)|^2=\dfrac{\omega^2+1}{4}$

$$\because H(j\omega)=\frac{j\omega}{b}+\frac{a}{b},\quad \therefore \frac{a^2}{b^2}+\frac{\omega^2}{b^2}=\frac{\omega^2+1}{4},\quad b=\pm 2,\quad a=\pm 1$$

$(c)S_U(\omega)=S_X(\omega)S_Y(\omega)=\dfrac{24}{(\omega^2+1)^2},\quad R_{UU}(\tau)=6(|\tau|+1)e^{-|\tau|}$

3. 在正交幅度调制通信系统中，$X(t)$ 定义为 $X(t)=Acos(2\pi f_c t)+Bsin(2\pi f_c t)$。这里 f_c 是“载波”频率，A 和 B 是均值为 0、方差为 σ^2 的独立随机变量，假设 A 和 B 除了均值外的所有阶矩都是非零的。
(a) 求 $X(t)$ 的均值。
(b) 求 $X(t)$ 的自相关函数。
(c)$X(t)$ 是否为宽平稳随机过程？
(d)$X(t)$ 是否为严平稳随机过程？

(a)$E[X(t)]=0$
(b)$R_X(t,s)=\sigma^2 cos[2\pi f_c(t-s)]$
(c)$X(t)$ 是宽平稳。
(d)$X(t)$ 不是严平稳。

4. 已知随机变量 R,Θ 相互独立,R 服从 Rayleigh 分布,即其概率密度函数为 $f_R(r)=\begin{cases}\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\\ 0, & r<0\end{cases}$,Θ 服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布。令 $X(t)=Rcos(\omega t+\Theta),-\infty<t<+\infty$，其中 ω 是常数。试判断 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是否为高斯过程，并详细说明理由。

$$(U,V)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0),\quad U=Rcos(\Theta),\quad V=Rsin(\Theta)$$

$$f_{UV}(u,v)=f_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$R\sim Rayleigh(\sigma),\quad \Theta\sim Uniform(0,2\pi)$$

$$X=Rcos(\Theta)=U,\quad X\sim N(0,\sigma^2)$$

5. 设 X_n 是独立的 Bernoulli 分布随机变量，满足 $P(X_n=0)=\frac{1}{3},P(X_n=1)=\frac{2}{3}$，考虑随机过程 $Y_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，请计算：
(a)Y_n 的均值。
(b)Y_n 的自相关函数。
(c)Y_n 的自协方差函数，并判断其宽平稳性。

$(a)E[Y_n]=\dfrac{2}{3}$

$(b)R_Y(m,n)=E[(Y_m-\dfrac{2}{3})(Y_n-\dfrac{2}{3})]=E[Y_mY_n]-\dfrac{2}{3}E[Y_m]-\dfrac{2}{3}E[Y_n]+\dfrac{4}{9}$

$$\because Y_n=\frac{m}{n}Y_m+\frac{n-m}{m}Y'_{n-m},\quad \therefore R_Y(m,n)=\frac{m}{n}E[Y_m^2]+\frac{n-m}{n}E[Y'_{n-m}]E[Y_m]-\frac{4}{9}=\frac{m}{n}+\frac{4(n-m)}{9n}-\frac{4}{9}=\frac{2m}{9n}$$

$(c)C_Y(m,n)=E[Y_mY_n]=\dfrac{m}{n}E[Y_m^2]+\dfrac{n-m}{n}E[Y'_{n-m}]E[Y_m]=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9n}$

Y_n 不是宽平稳。