5. Projet : Équation de Black et Scholes avec contrainte Gamma

On considère un portefeuille constitue d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risque S_t, évoluant suivant

$$dS^0 = S^0 r dt \qquad \text{et} \qquad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(t, S_t) dB_t)$$

Notons Y_t la part d'actif risque a l'instant t. Dans le modèle de Black-Scholes, la stratégie de hedging classique consiste à prendre $Y_t = \frac{\partial v}{\partial s}(t, S_t)$. En pratique les contraintes du marché font que cette stratégie optimale n'est pas toujours possible, et on examine ici un modèle où l'on impose une contrainte sur les variations de Y. Plus précisément, on se donne une constante $\Gamma > 0$ et on considère contrainte

$$s\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq \Gamma$$

(On dit alors que v est Γ-concave).

On montre [16] que le prix de l'option v avec contrainte Gamma est solution de

$$\begin{cases} \min\left(-\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs\dfrac{\partial v}{\partial s} + rv, \Gamma - s\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = 0 \\ v(T,s) = \hat{g}(s). \end{cases} \tag{5.1}$$

La fonction $\hat{g}$ est elle même définie comme la plus petite fonction Γ-concave majorant $g(s)$, et on montre que cette fonction est solution de l'équation

$$\min\left(\hat{g}(s) - g(s), \Gamma - s\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial s^2}\right) = 0, \qquad s > 0.$$

1. On commencera en particulier par proposer un algorithme de calcul de $\hat{g}$ dans le cas du put : $g(s) = (K - s)_+$. On pourra adapter la méthode de Newton pour les options américaines [6].

On pourra comparer avec la solution analytique $\hat{g}(s)$ donnée dans [14, Sec. 8].

2. Programmer les différences finies pour (5.1).

Applications numeriques : $K = 100$, $\sigma(t,s) = 0.1$, $r = 0.1$, $T = 0.1$, $\Gamma = 1$, et avec cas 1 : $g(s) = (K - s)_+$, puis cas 2 : $g(s) = (K - 2|s - K|)_+$.

3. Comparer ces résultats (cas 1 et 2) avec le prix d'une option u de payoff g évoluant sans contraintes, cad suivant le modèle classique de Black et Scholes :

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - rs\frac{\partial u}{\partial s} + ru = 0$$

avec la condition terminale : $u(T;s) = \hat{g}(s)$.

4. Réfléchir à un schéma aux différences finies, et éventuellement le programmer, pour une option avec coût de transaction (modèle de Leland, 1985), et contrainte Gamma, modélisée par

$$\min\left[-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \mathrm{Le}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|\right) - rs\frac{\partial v}{\partial s} + rv, \Gamma - s\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right] = 0$$

avec Le (nombre de Leland) petit, et $v(T,s) = \hat{g}(s)$.