Karataev Phillip
u: 93; idd
Blatt: 03
Gruppe: 7
Aufgaben: alle

9/10*30 = 27

A7) a)

(i)
$$0 \leq \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \frac{6+1}{n^2}$$
$\xrightarrow{(n\to\infty)} 0$ $\qquad$ $\downarrow \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$

$\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0

(ii)
$$\underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{\text{Nullfolge}} \cdot \underbrace{\frac{-7}{4}}_{\text{beschränkt}} \leq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{8+\cos(4n) - \cos(5n)} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{*} \cdot \underbrace{\frac{7}{4}}$$
$\Rightarrow \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$ $\qquad$ $\xrightarrow{(n\to\infty)} 0$

$\Rightarrow$ Konvergenz gegen 0

b)

(i) $M = \{0, \infty\}$ $\quad \lim_n \inf = 0 \quad \lim_n \sup = \infty$

(ii) $M = \{-1, 1\}$ $\quad \lim_n \inf = -1 \quad \lim_n \sup = 1$

(iii) $M = \{\infty\}$ $\quad \lim_n \inf = \infty \quad \lim_n \sup = \infty$

(iv)

$q > 1$: $M = \{\infty\}$ $\quad \lim_n \inf = \infty \quad \lim_n \sup = \infty$

$q = 1$: $M = \{1\}$ $\quad \lim_n \inf = \lim_n \sup = 1$

$-1 < q < 1$: $M = \{0\}$ $\quad \lim_n \inf = 0 \quad \lim_n \sup = 0$

$q = -1$: $M = \{-1, 1\}$ $\quad \lim_n \inf = -1 \quad \lim_n \sup = 1$

$q < -1$: $M = \{-\infty, +\infty\}$ $\quad \lim_n \inf = -\infty \quad \lim_n \sup = \infty$

A8)

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{k}} \right)$$

Quot.-Kriterium:
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\left(\frac{k+1}{k+3}\right)}{\left(\frac{k}{k+2}\right)} = \frac{(k+1)(k+2)}{(k+3)\cdot k} =$$
$$= \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k} = 1 + \frac{2}{(k+3)\cdot k} > 1$$

$\Rightarrow$ Divergenz

b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k(3k+2)}\right)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1 - 1/k}{3k+2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{\overbrace{(1 - 1/k)^{\frac{k}{2}}}^{\leq 1}}{(3k+2)^{\frac{k}{2}}} \leq \frac{1}{k^2}$$ ($\frac{1}{k^2}$ ist konvergent siehe P-11b)

$(3k+2)^{\frac{k}{2}}$ ← Exponential > Quadrat

$\frac{1}{k^2}$ ist Majorante und die Reihe ist somit konvergent.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$

Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{\sqrt[k]{k^k}} \leq \frac{1}{k} < 1$ für $k \geq 2$

$\Rightarrow \lim_n \sup \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} < 1$ für $k \geq 2$

$\Rightarrow$ konvergent (absolut)

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2-k+1}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left| \frac{\frac{3}{2^{k+1} \cdot \sqrt{(k+1)+2} + \sqrt{k}}}{\frac{3}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}} \right| = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{k}} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{2}{k}} + \sqrt{1-\frac{1}{k}}}$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ konvergent

A9)

a) (i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4+\frac{3}{k}}{3k-\frac{4}{k}}$

$\frac{4+\frac{3}{k}}{3k-\frac{4}{k}} \geq \frac{4}{3k} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} > \frac{1}{k}$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ divergent

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{4}{3}$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Divergenz nach Divergenzkriterium

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ $\Rightarrow$ Divergenz, $\frac{1}{k}$ ist Minorante

b)

(i)

(1.) $a_n = \sin n \in [-1;1]$ Jede beschränkte komplexe Folge hat mind. einen Häufungspunkt

(2.) $b_n = \sin(n^2) \in [-1;1]$ – " –

(3.) $c_n = \frac{\sin n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sin n}_{b_n}$ Wenn a_n eine Nullfolge und b_n eine beschränkte Folge

$\Rightarrow \lim_n a_n b_n = 0$

$\rightarrow$ mind. ein Häufungspunkt

(ii) $c_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sin n}_{b_n}$ Häufungspunkt $= \{0\}$

Karataev, Phillip