A7 a) i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin(n)}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+(-1)^n}{n^2}\right)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sin(n)}{n^2}\right)}_{\mathrm{II}}$

5/10 *30 = 15

I $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+(-1)}{n^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+(-1)^n}{n^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+1}{n^2}\right)$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\right)}_{0} \leq \quad '' \quad \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{n^2}\right)}_{0}$

$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+(-1)^n}{n^2}\right) \leq 0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+(-1)^n}{n^2}\right) = \underline{\underline{0}}$

II $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}(-1)}{n^2}\right)}_{0} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sin(n)}{n^2}\right) \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}(1)}{n^2}\right)}_{0}$

$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sin(n)}{n^2}\right) \leq 0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sin(n)}{n^2}\right) = \underline{\underline{0}}$

I + II $= 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

ii)

$b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$

$\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\cancel{\sin}(-1) - 2\cancel{\sin}(1)}{6+(-1)-1} \leq \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \leq \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5(1)-2(-1)}{6+(-1)-1}$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{7}{4}\right)}_{-\frac{7}{4}} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}\right) \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{4}\right)}_{\frac{7}{4}}$

$0 \cdot -\dfrac{7}{4} \leq \quad '' \quad \leq 0 \cdot \dfrac{7}{4}$

$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}\right) \leq 0$

$\lim_{n\to\infty}(b_n) = \underline{\underline{0}}$

b) i) $M = \{0, \infty\}$ $\quad \limsup = \infty \quad \liminf = 0$

ii) $M = \{-1, 1\}$ $\quad \limsup = 1 \quad \liminf = -1$

iii) $M = \{+\infty\}$ $\quad \limsup = \liminf = +\infty$

iv) $$M = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |q| < 1 \\ 1 & \text{wenn } q = 1 \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \\ 1 & \text{wenn } q = -1 \text{ und } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } q = -1 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ \infty & \text{wenn } q < -1 \text{ und } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{wenn } q < -1 \text{ und } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\limsup = \infty \quad \liminf = -\infty$

$\boxed{A8}$ a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k}$ für $k \to \infty$ bruch geht gegen 1 das heißt der ~~Bruch ist divergent~~ Bruch konvergiert gegen 1

$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{2k}\right) = 1 \neq 0$, die Reihe ist divergent

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} = \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{k}{3k^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(3k+2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3k+2}} < q < 1$

Du hast hier nur bewiesen, dass es eine obere S

die Reihe ist ~~divergent~~

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin(k)}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{|\sin(k)|}}{\sqrt[k]{|k^k|}} \leq \frac{1}{k}$ $\quad \forall k \geq 2 \; q < 1$

die Reihe ist divergent

Die Folge 1/k ist eine Nullfolge, also wäre das h

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k} = \frac{k+2-k+1}{2^k(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})} = \frac{3}{2^k(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{3}{2^{k+1}(\sqrt{k+3} + \sqrt{k})}}{\frac{3}{2^k(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}}\right| = \left|\frac{2^k(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}{2^{k+1}(\sqrt{k+3} + \sqrt{k})}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}{2(\sqrt{k+3} + \sqrt{k})}\right| \leq \left|\frac{\cancel{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}}}{2(\cancel{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}})}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

die Reihe ist ~~divergent~~

Die Reihe ist genau deswegen konvergent

$\boxed{A9}$ a) i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4\cancel{k}}{3k^{\cancel{2}}} = \frac{4}{3k} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k}$

div. Minorante die Reihe divergiert

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\frac{4k^2+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k^2}{3k^2} = \frac{4}{3} > 0$

Die Reihe ist keine Nullfolge sie ist divergent

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$

div. Minorante die Reihe divergiert

b) i) 1. hat keinen Häufungspunkt
2. hat keinen Häufungspunkt
Da n eine Folge von natürlichen Zahlen ist, und für Sinus ein n ein vielfaches von 2π sein müsste um einen Häufungspunkt zu bilden, ist es nicht möglich das mit $n \in \mathbb{N}$ darzustellen
3. hat einen häufungspunkt

ii) Folge $\frac{\sin(n)}{n}$ hat den Häufungspunkt $\underline{\underline{0}}$