9169 dabe

Alexander Mallich

18.

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x<a \vee x>b \\ \frac{2}{(b-a)^2}x^2 - \frac{4ax}{(b-a)^2} & a\leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-2}{(a-b)^2}x^2 + \frac{4bx}{(b-a)^2} & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases} + C$$

Für das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ ist der erste Fall irrelevant (weil $=0$)

Also zweiter Fall: $\cancel{F(\frac{a+b}{2}) - F(a)}$ $\lim_{x\to\frac{a+b}{2}} F(x) - F(a)$

$$\lim_{x\to\frac{a+b}{2}} \frac{2x^2}{(b-a)^2} - \frac{4ax}{(b-a)^2} - \left(\frac{2a^2}{(b-a)^2} - \frac{4a^2}{(b-a)^2}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} - \frac{4a\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} + \frac{2a^2}{(b-a)^2} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-3a)+2a^2}{(b-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(ab-3a^2+b^2-3ab)+2a^2}{(b-a)^2} = \frac{-ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2}{(b-a)^2} = \frac{\frac{1}{2}(b-a)^2}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}$$

dritter Fall $\left[\frac{2x(2b-x)}{(b-a)^2}\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$

$$= \frac{2b(2b-b)}{(b-a)^2} - \frac{2\frac{a+b}{2}(2b-\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2} = \frac{2b^2-(a+b)(2b-\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}$$

$$= \frac{2b^2-2ba+\frac{a+b}{2}a-2b^2+\frac{a+b}{2}b}{(b-a)^2} = \frac{-2ba+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}{(b-a)^2}$$

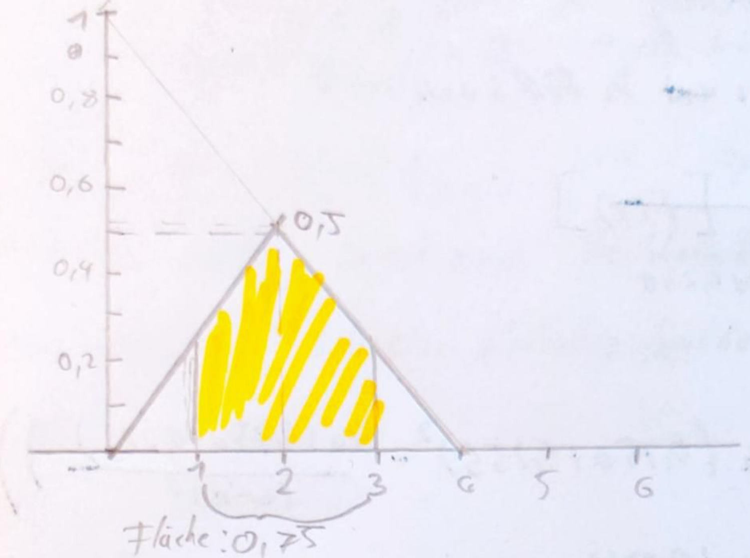
$$= \frac{\frac{1}{2}(b-a)^2}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}$$

Das führt zu Fall 1 + Fall 2 + Fall 3 $= 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Die Funktion ist also eine W-Dichte.

b) ~~0,25a+0,75b~~ $0{,}75a+0{,}25b = \frac{1}{4}(3a+b) < \frac{a+b}{2}$

$\iff 3a+b < 2a+2b \iff a+b<2b \iff a<b$, gilt nach Aufgabenstellung. Weil man nie in Fall 1. landen kann, muss $0{,}75a+0{,}25b$ immer in Fall 2. liegen


1
0,8
0,6
0,5
0,4
0,2
1
2
3
4
5
6
Fläche: 0,75

$0{,}25a + 0{,}75 = \frac{1}{4}(a+3b) > \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a+3b > 2a+2b$

$\Leftrightarrow a+b > 2a \Leftrightarrow b > a$ nach Aufgabenstellung

Wahr. Wir landen nie in Fall 1, also muss dies ~~au~~ in Fall 3 sein.

Der Wert ist also $\cancel{[F(x)]_{\frac{a+b}{2}}^{0{,}75a+0{,}25b} + [F(x)]}$

$$[F(x)]_{0{,}75a+0{,}25b}^{\frac{a+b}{2}} + [F(x)]_{\frac{a+b}{2}}^{0{,}75b+0{,}25a}$$

$$= \left(\frac{2}{(b-a)^2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{4a\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} - \left(\frac{2}{(b-a)^2}(0{,}75a+0{,}25b)^2 - \frac{4a(0{,}75a+0{,}25b)}{(b-a)^2}\right)\right)$$

$$+ \left[\frac{-2}{(b-a)^2}(0{,}25a+0{,}75b)^2 + \frac{4b(0{,}25a+0{,}75b)}{(b-a)^2} - \left(\frac{-2}{(b-a)^2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{4a\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\Big(4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 4(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2(0{,}75a+0{,}25b)^2 + 4a(0{,}75a+0{,}25b)^2 -$$

$$2(0{,}25a+0{,}75b)^2 + 4b(0{,}25a+0{,}75b)\Big)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(4\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - a - b\right) + 3a^2 + 2ba - 1{,}25a^2 - 1{,}5ab - 1{,}25b^2 + 3b^2\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(-(a+b)^2 \cancel{+3a^2} \cancel{+2ba}\ 3a^2 + 3b^2 + 0{,}5ba - 1{,}25a^2 - 1{,}25b^2\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(0{,}75a^2 - 1{,}5ab + 0{,}75b^2\right) = \frac{0{,}75(a^2-2ab+b^2)}{(b-a)^2} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

Daraus folgt auch direkt der Spezialfall mit $a=0$, $b=4 \Rightarrow 0{,}75$.

2 a)

Ableitung der Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\cos x}{1+\sin x} & 0 < x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

für f_2 folgt: $\frac{\cos x}{1+\sin x} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, \frac{3}{4}\pi]$ $F(x)$ ist also nicht isoton, also keine Verteilungsfunktion.

b) $F(x) = (1-\exp(-x))1_{[0,\infty)}(x)$ nur $x \geq 0$ muss betrachtet werden, weil sonst $1_{[0,\infty)}(x) = 0$ ist.

$f'(x) = \exp(-x)$ $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$ (0 für $x<0$, $\exp(-x)$ $x \geq 0$) also isoton

$\lim_{x \to \infty} (1-\underbrace{\exp(-x)}_{\to 0}) 1_{[0,\infty)}(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} (1-\exp(-x)) \underbrace{1_{[0,\infty)}(x)}_{0} = 0$

Die Funktion ist außerdem stetig: Der Einzige kritische Punkt ist $x=0$, für diesen gilt jedoch

$\lim_{x \to 0^-} (1-\exp(x)) 1_{[0,\infty)}(x) = 0$ wegen Indikatorfunktion

$\lim_{x \to 0^+} (1-\exp(-x)) 1_{[0,\infty)}(x) = 0$ wegen $(1-\exp(-x))$

F ist also stetig, somit auch Rechtsseitig stetig.

Daraus folgt F ist eine Verteilungsfunktion.