Sitzung 5

Bedingt oder unhabhängig

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 8. Mai 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Wahrscheinlichkeitsräume

Ziel dieses Themas

1. Was ist ein Zufallsexperiment?
2. Wie können Ausgänge/Ereignisse/Merkmale von Zufallsexperimente modelliert werden?
3. Wie können Fragestellungen mathematische modelliert werden?
4. Was bedeutet „Wahrscheinlichkeitsmaß“?
5. Welche mathematische Struktur ermöglicht das Arbeiten mit Ereignissen?

Was lernen Sie?

1. Sie können die Begriffe: Ergebnismenge, Elementarereignis, Maßraum, $\sigma-$-Algebra, Zufallsvariable definieren.
2. Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
3. Sie kennen dei Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Rechenregeln.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeitsräume

Ziel dieses Themas

1. Was ist ein Zufallsexperiment?
2. Wie können Ausgänge/Ereignisse/Merkmale von Zufallsexperimente modelliert werden?
3. Wie können Fragestellungen mathematische modelliert werden?
4. Was bedeutet „Wahrscheinlichkeitsmaß“?
5. Welche mathematische Struktur ermöglicht das Arbeiten mit Ereignissen?

Was lernen Sie?

1. Sie können die Begriffe: Ergebnismenge, Elementarereignis, Maßraum, $\sigma-$-Algebra, Zufallsvariable definieren.
2. Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
3. Sie kennen dei Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Rechenregeln.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Ziele der letzten Woche

Lernziele

1. Sie kennen die Unterschiede der Begriffe Ergebnismenge bzw. Ereignismenge, Ereignissystem, Ereignis und Elementarereignis.
2. Sie kennen die Eigenschaften einer σ-Algebra.
3. Sie kennen die Definition eines Messraumes.
4. Sie kennen die Definition der Zufallsvariable.

Modellierung

1. **Aspekt** Die möglichen Ereignisse.
2. **Aspekt** Die möglichen Fragestellungen.
3. **Aspekt** Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Bausteine

1. Baustein Ergebnismenge	2. Baustein Ereignis-System $\mathcal{A}$	3. Baustein Wahrscheinlichkeit P

Wichtige Begriffe

Notiz

Ergebnismenge	Ω	Alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperimen
Ergebnis	$\omega \in \Omega$	ein möglicher Ausgang des Zufallsexperiments
Ereignis	$A \subset \Omega$	Menge möglicher Ergebnisse
Elementarereignis	$\{\omega\} \subset \Omega$	Menge eines Ausgangs
Ereignissystem	$\mathcal{A}$	Abgeschlossenes Mengensystem über Ω

Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Messraum**.

WICHTIG:Ein Maßraum wirds erst mit einem Maß

Ziele dieser Woche

Lernziele

- Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
- Sie kennen die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die können die Rechenregeln anwenden.
- Sie können den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten erklären.

Fragen

Selbststudium

Quellen

- Skript Kapitel Abschnitt 3.7 bis 3.9 (https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html)
- Kopien Buch:Hübner, G. Stochastik. Vieweg. ab Kapitel 2.7 bis 2.9

Weiterführende Fragen

1. Finden Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsraum, in dem die Forderung
$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
benötigt wird.
2. Schreiben Sie anhand eines Beispieles einen Wahrscheinlichkeitsraum für die Einpunktverteilung auf.
3. Machen Sie sich die Rechenregeln 1-8 für Wahrscheinlichkeitsmaße anhand eines Würfels deutlich.

Dunstig

Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2013 raucht ein Viertel der deutschen Bevölkerung (Personen, die älter als 15 Jahre sind). Es wird nur zwischen weiblichen Personen und männlichen Personen unterschieden. Von den weiblichen Personen rauchen 20% und von den männlichen Personen sind 30% Raucher.

1. Geben Sie die Verteilung für männliche Personen und weibliche Personen der deutschen Bevölkerung (Personen älter als 15 Jahre) an.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (älter als 15 Jahre) die raucht auch männlich ist?

Was kennen wir bereits?

$$P(M) = \frac{1}{2} \qquad P(W) = \frac{1}{2} \qquad P(R) = \frac{1}{4} \qquad P(NR) = \frac{3}{4}$$

$$P(R|M) = \frac{3}{10} \qquad P(R|W) = \frac{1}{5}$$

Definition 3.32

Ein **Maß auf** $\mathcal{A}$ **(bzw. über** $(\Omega, \mathcal{A})$**)** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit

(1) $\mu(A) \geqslant 0$,

(2') $\mu(\emptyset) = 0$,

(3') $\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$.

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Borel-Mengen

Potenzmenge

Warum wird für die Ergebnismenge $\Omega = \mathbb{R}$ nicht $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt?

Gründe

- Es gilt (für das sogenannte **Lebesgue-Maß** λ) der Satz:
  Satz (Vitali) Es existieren zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^d$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so dass
  $$\lambda(A_1 \cup A_2) \neq \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$
- Ja, es gibt Mengen $A \subset \mathbb{R}$, die keine Borelmengen sind, also $A \notin \mathbb{B}$. (Vitali-Mengen)

Rechenregeln

(1)	$P(A) \geqslant 0$	Nichtnegativität
(1′)	$P(A) \leqslant 1$	
(2)	$P(\Omega) = 1$	Normiertheit
(2′)	$P(\emptyset) = 0$	Nulltreue
(3)	$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$	Additivität
(3_n)	$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$	endliche Additivität
(3′)	$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$	$\sigma -$ Additivität

Weitere Rechenregeln

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(5) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(7) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ Subadditivität

(8) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ Monotonie

Weitere Rechenregeln

(9) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von unten

(10) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von oben

Weitere Rechenregeln

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(5) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(7) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ Subadditivität

(8) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ Monotonie

Weitere Rechenregeln

(9) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von unten

(10) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von oben

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.33

Es seien A, B Ereignisse in Ω und $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.33

Es seien A, B Ereignisse in Ω und $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Noch mehr Bedingtes

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei $(B_i, i \in I)$ eine abzählbare Zerlegung von Ω und seien $P(B_i)$ und $P(A|B_i)$ für alle $i \in I$ bekannt, dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A|B_i) \ .$$

Formel von Bayes

Sei $(B_i, i \in I)$ eine abzählbare Zerlegung von Ω, dann gilt

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P\left(B_i\right) P\left(A|B_i\right)} \ .$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\ .$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \ .$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\ .$$

Definition 3.35

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots A_n$ in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißen **stochastisch unabhängig** (bzgl. P), wenn für alle Teilmengen $\{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}\}$ von diesen Ereignissen die „Produktformel" gilt:

$$P\left(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}\right) = P\left(A_{i1}\right) P\left(A_{i2}\right) \cdots P\left(A_{ik}\right).$$

Definition 3.35

Die Ereignisse $A_1, A_2, \dots A_n$ in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißen **stochastisch unabhängig** (bzgl. P), wenn für alle Teilmengen $\{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}\}$ von diesen Ereignissen die „Produktformel“ gilt:

$$P(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}) = P(A_{i1})\,P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})\,.$$

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr