Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Brolich, Nina
StudOn-Kennung: eq13yjit
Blatt-Nummer: 7
Übungsgruppen-Nr.: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:
A18, A19, A20

19.5/20*30=29

ING MATH C2 : BLATT 7

A18: Differenzieren mit Rechenregeln

a) $f(x) = x^2 + x + \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}} + 1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{1x^{-1}} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}$ ✓

b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{2x})^4$

$f'(x) = 4 \cdot (x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot (2x + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2) =$

$= 4 \cdot (x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot (2x + \frac{1}{\sqrt{2x}})$ ✓

c) $f(x) = (x \cdot e^{x^2}) \cdot \ln(2 + 3x)$

$f'(x) = (x \cdot e^{x^2}) \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3 + \ln(2+3x) \cdot (e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x) =$

$= \frac{3 \cdot x \cdot e^{x^2}}{2+3x} + \ln(2+3x) \cdot e^{x^2}(1 + 2x^2)$ ✓

d) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$ ✓

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{\ln(x^2+1) \cdot \cos 2x \cdot 2 - \sin 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x}{(\ln(x^2+1))^2} =$ ✓ ✓✗

$= \frac{2 \cdot \cos 2x \cdot \ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot \sin 2x}{(\ln(x^2+1))^2}$

f) $f(x) = x^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

[ausführlich: $f(x) = e^{\ln x \cdot \alpha}$ ✓✗

$f'(x) = e^{\ln x \cdot \alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ ✓]

g) $f(x) = x^{-x^2} = \frac{1}{x^{x^2}} = e^{\ln(x) \cdot (-x^2)}$

$f'(x) = e^{\ln(x) \cdot (-x^2)} \cdot (\ln(x) \cdot (-2x) + \frac{1}{x} \cdot (-x^2)) =$ ✓ ✓✗

$= \frac{-2x \cdot \ln x - x}{x^{x^2}}$

h) $f(x) = \ln(x + \ln(2 \ln x))$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{\ln}(x + \ln(2\ln x))} \cdot (1 + \frac{1}{2 \cdot \ln x} \cdot \frac{2}{x}) =$ ✓

$= \frac{1 + \frac{1}{x \cdot \ln x}}{\ln(x + \ln(2\ln x))}$

A19: Ableitung von cos, tan, arctan

a) $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \qquad \frac{d}{dx}\cos x \overset{!}{=} -\sin x$

$= \frac{\cos x \cosh - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$

$= \cos x \cdot \underbrace{\frac{(\cosh - 1)}{h}}_{\to 0?} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1?}$

zz: $\lim_{h\to 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$\to$ beide Grenzwerte bekannt aus VL

$\left[\left| \frac{\sin h}{h} - 1 \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \dots \right) - h \right| \le \right.$

$|h|^2 \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{h^2}{5!} + \frac{h^4}{7!} + \dots \right) \le$

$\left. |h|^2 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^6}{6!} + \dots \right) \le |h|^2 \cdot e^{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0 \right]$

$\to \frac{d}{dx}\cos x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to \tan' x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

i) $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad [\cos^2 x + \sin^2 x = 1]$

ii) $\tan' x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (\tan x)^2$

c) i) $f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$f = \tan \qquad f^{-1} = \arctan$

$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1 + y^2}$

ii) $\tan''(x) = (1 + \underbrace{(\tan^2 x)}_{1+\tan})' = 2 \cdot \tan x \cdot (1 + \tan^2 x) =$

$= 2 \tan x + 2 \tan^3 x$

$\tan'''(x) = 2 \cdot (1 + \tan^2 x) + (2 (\tan x)^3)' =$

$= 2 + 2\tan^2 x + 3 \cdot 2 \cdot (\tan x)^2 \cdot (1 + \tan^2 x) =$

$= 2 + 2\tan^2 x + 6 \tan^2 x \cdot (1 + \tan^2 x) =$

$= 2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x$

A20: Ableitung, Differenzenquotient, Stetigkeit

a) $f(x) = x^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin \frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-2) x^{-3} =$

$= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin \frac{1}{x^2} - 2 x^{\alpha-3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) =$

$= x^{\alpha-3} \cdot \left(\alpha \cdot \sin \frac{1}{x^2} \cdot x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - 0}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{h^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}_{\text{lim ex. nicht, aber } \in [-1,1]}$

für $\alpha = 1$
$\to 1 \qquad \to$ Dann existiert der Grenzwert nicht

für $\alpha > 1 \to$ "0 · "fester Wert"" $= 0$, d.h.
$\to 0$
$\lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$ für $\alpha \neq 1$

für $\alpha < 1 \to$ Grenzwert existiert nicht

c) $f'(0)$ existiert für $\alpha > 1$

Stetigkeit an Stelle x_* bedeutet, dass $\lim\limits_{x \to x_*} f'(x)$ existiert

und gleich $f'(x_*)$ ist. (s. b16)

$x_* = 0 \qquad f'(x_*) = f'(0) = 0 \quad$ (für $\alpha \neq 1$)

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x^{\alpha-3}}_{\text{für } \alpha > 3 \to 0} \cdot \left(\underbrace{\alpha \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x^2}}_{\in[-1,1]} \cdot \underbrace{x^2}_{\to 0}}_{0} - \underbrace{2 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\in[-1,1]}}_{\in[-2,2]}\right)$

$=$

$\to$ für $\alpha > 3$ $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$ (damit auch stetig)

$\to$ Sonst nicht existent

d) $\cancel{f''(x) = \left(\sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} - 2x^{\alpha-3}\right)\right)' =}$

$$\cancel{= \sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2} - 2\cdot(\alpha-3)\,x^{\alpha-4}\right) +}$$

$$\cancel{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^3}\cdot\left(\alpha x^{\alpha-1} - 2x^{\alpha-3}\right)}$$

$$f''(x) = \left(x^{\alpha-3}\cdot\left(\alpha\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2 - 2\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)' =$$

$$= (\alpha-3)\cdot x^{\alpha-4}\cdot\left(\alpha\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2 - 2\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) +$$

$$x^{\alpha-3}\cdot\left(\alpha\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot 2x + \alpha\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\cdot x^2 -\right.$$

$$\left.2\left(-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) =$$

$$= (\alpha-3)\cdot x^{\alpha-4}\cdot\left(x^2\alpha\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$+ x^{\alpha-3}\cdot\left(2x\alpha\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\alpha\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} - \frac{4\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}\right)$$