

Sitzung 29

Finale

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 7. August 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis

Department Mathematik

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

Finale

Offene Punkte

- Beispiel für einen Hypothesentest
- Frage von den Markow-Ketten:
Geben Sie je ein Beispiel für eine Markow-Kette an, die
 - eine Gleichgewichtsverteilung besitzt, aber nicht jeder Ausgangszustand dagegen konvergiert,
 - jede Startverteilung gegen den Gleichgewichtsverteilung konvergiert.
- Ggf. Blatt 11, ZA 72

Beispiel 11.1

Typische Fragestellungen sind:

- Ist der Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit gleich einem Wert μ_0 .
- Ist der Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit größer oder kleiner einem Wert μ_0 .
- Ist die Grundgesamtheit entsprechend einer gegebenen Verteilung verteilt?
- Besitzen zwei verschiedenen Grundgesamtheiten den gleichen Erwartungswert?

Fehlerarten

	nicht abgelehnt	abgelehnt
H_0 richtig	richtige Entscheidung $p_1 = 1 - \alpha$	Fehler 1. Art $p_2 = \alpha$
H_0 falsch	Fehler 2. Art $p_3 = \beta$	richtige Entscheidung $p_1 = 1 - \beta$

Idee

Bestimme den kritischen Bereich K derart, dass die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung falscher H_0 möglichst groß ist. Dies entspricht dann der Wahrscheinlichkeit, H_1 anzunehmen unter der Voraussetzung, dass H_1 richtig ist.

$$P(U \in K | H_1) = 1 - \beta. \quad (1)$$

β heißt **Güte** oder **Trennschärfe** des Tests oder Prüfverfahrens.

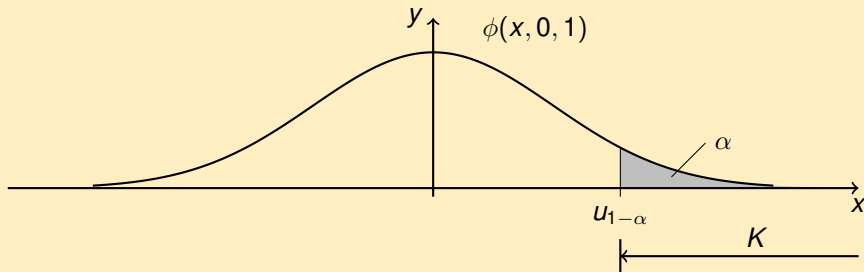
beta ist i.A nicht bekannt

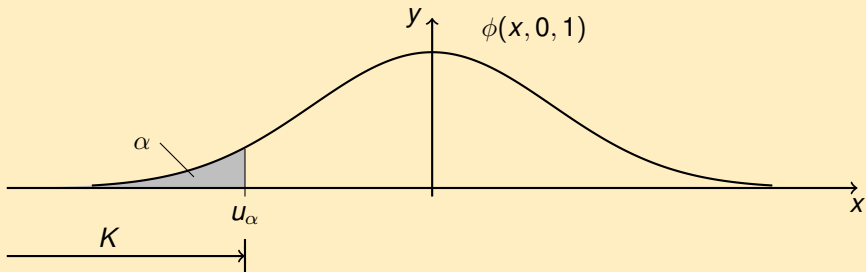
Einseitige Fragestellungen

U ist symmetrisch verteilt und es wird

$$U \geq u_{1-\alpha} \text{ oder } U \leq -u_{1-\alpha}$$

gewählt.

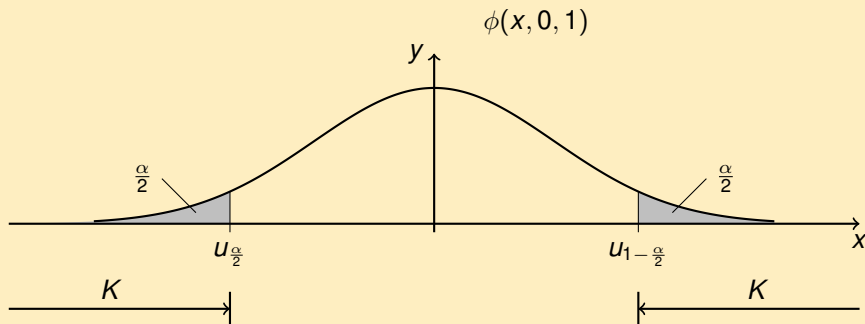




Zweiseitige Fragestellungen

Für die Prüfgröße U und die gegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α wählen wir

$$P(|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} | H_0) = \alpha.$$



Vorgehen bei Tests

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 .
2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .
3. Wahl einer geeigneten Prüfgröße $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Die Verteilungsfunktion sei bekannt.
4. Ermittlung von K aus $P(U \in K | H_0) = \alpha$.
5. Berechnung einer Realisierung u von U mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_1, x_2, \dots, x_n) vom Umfang n .
6. Falls $u \in K$, wird H_0 abgelehnt; falls $u \notin K$, wird H_0 nicht abgelehnt.

Hypothesentest

Beim Bäcker Ihres Vertrauens kaufen Sie regelmäßig Brötchen. Sie wollen prüfen, ob die **Brötchen das erwartete Gewicht von 50g** haben. Folgende Stichprobe haben Sie zur Verfügung:

50, 0; 49, 3; 48, 9; 49, 9; 47, 8; 48, 1; 48, 7; 48, 5; 48, 1; 49, 2;

Quelle: Huebner Stochastik, Vieweg+Teubner 2009, 5. Auflage, A 10.4.2

keines der brötchen hat > 50g...

Bearbeitung

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 .

$$H_0 : \mu = 50$$

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .
Da keine Niveau vorgegeben wurde, wird

$$\alpha = 0.05$$

gewählt.

Bearbeitung

3. Wahl einer geeigneten Prüfgröße $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Als Prüfgröße wird

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

gewählt. X_i $i = 1, \dots, n$ werden als identisch und stochastisch unabhängig normalverteilt angenommen.

arithmetisches mittel ist schätzer für EW, Mittelwert ist

Bearbeitung

4. Ermittlung von K aus $P(U \in K | H_0) = \alpha$.

standardisierung von Mittelwertvariable

$$\begin{aligned}
 P(\mu_0 - \delta \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \delta | H_0) &= P\left(-\delta \frac{\sqrt{n}}{S} \leq (\bar{X} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{S} \leq \delta \frac{\sqrt{n}}{S} | H_0\right) \\
 &= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \leq (\bar{X} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{S} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} | H_0\right)
 \end{aligned}$$

symmetrische Fragestellung

Streuung unbek.

Nun ist $(\bar{X} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{S} \sim t_{n-1}$, es müssen also für $n = 10$. Also muss das $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil der t_9 -Verteilung abgelesen werden:

student t zu n-1, weil s unbek.

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9, 1-\frac{\alpha}{2}} = 2.262$$

= -u_(a/2) wegen symmetrie!

Daraus ergibt sich der kritische Bereich

$$K = \left\{ (\bar{X} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{S} \leq -t_{9, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ (\bar{X} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{S} \geq t_{9, 1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

wir sind symmetrisch über null (dank st

Bearbeitung

5. Berechnung einer Realisierung u von U mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_1, x_2, \dots, x_n) vom Umfang n .

Aus der gegebenen Stichprobe ergibt sich: $\bar{x} = 48.85$, $s^2 = 0.5125$.

Damit erhalten wir: angepasster Wert

gemessener Wert

$$(\bar{x} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{s} = (48.85 - 50) \sqrt{\frac{10}{0.5125}} = -5.080$$

6. Falls $u \in K$, wird H_0 abgelehnt; falls $u \notin K$, wird H_0 nicht abgelehnt.
Nun gilt

$$(\bar{x} - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{s} = -5.080 < t_{9, 1 - \frac{\alpha}{2}} = -2.262$$

Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt.

DER VERARSCHT UNS BEI DEN BRÖTCHEN!

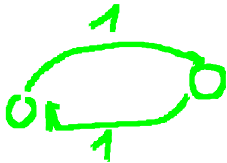
Testsammlung

- Test für $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (EW) bei bekannter Varianz σ^2
- Test für $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (EW) bei unbekannter Varianz σ^2 (Einstichproben t -Test)
- Test $E X = E Y$, wobei X, Y st. u. und $\text{Var } X = \text{Var } Y$ (Zweistichproben t -Test)
- $F^X(t) \equiv F_0(t)$, χ^2 -Anpassungstest

Markow-Kette

Geben Sie je ein Beispiel für eine Markow-Kette an, die

- eine Gleichgewichtsverteilung besitzt, aber nicht jeder Ausgangszustand dagegen konvergiert,
- jede Startverteilung gegen den Gleichgewichtsverteilung konvergiert.



hat eine gleichgewichtsverteilung für $(1/2, 1/2)$ aber



das konv. immer zum ende

Übungsblatt 11, Zusatzaufgabe 72

1. Ja, Teilaufgabe ist so einfach. Aufgabenstellung abschreiben und dabei in einen Vektor/Matrix packen.
2. Schlüssel zum Erfolg: Folgerung 7.29 d) und $K_Z = BK_Y B$ bilden.
3. Ergebnis aus b) wieder interpretieren und abschreiben.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum <https://www.studon.fau.de/frm2897793.html>,
- per Telefon

Wigand Rathmann 09131/85-67129

Marius Yamakou 09131/85-67127

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure

Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:**

<https://webconf.vc.dfn.de/ssim/> (Adobe Connect) und

<https://fau.zoom.us/j/91308761442> (Zoom)