Mathe Übung ol74 umaq

18,5/20= 27.5

A15)

a) Höhe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ → harmonische Reihe

b) Oberfläche $5 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergent, da } k^{1+\alpha} \text{ mit } k\ \alpha \geq 1}$ → endlich viel Farbe reicht aus

Die oberseite des Würfels wird immer von der ur

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ← Volumen; konvergent, da $k^{1+\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ → endlich viel Beton reicht

d) Ja, mit $W_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Dann ergibt sich für die Höhe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (divergent), für die Oberfläche $5 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ (divergent) und für das Volumen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ (konvergent, da $k^{1+\alpha}$ mit $\alpha > 0$).

A17)

i) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 2 : \frac{\sin x}{x} = 2 : \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2$

abschreibfehler

mit der : schreibweise

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin nx}{x} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} = k$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to 0} \frac{n \sin nx}{nx} \cdot \lim_{x\to 0} \cdot \frac{1}{x} = \prod_{k=2}^{n} k \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x \cdot x}{\sin 6x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} : \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} : \lim_{x\to 0} 6 \cdot \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{5}{6}$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2} + \sin 2x} = \lim_{x\to 0} 1 : \frac{1-\cos\frac{x}{2} + \sin 2x}{x} = 1 : \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin 2x}{x} =$

$= 1 : \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{-1+\cos\frac{x}{2}}{-\frac{x}{2}} + \frac{2\sin 2x}{2x} = 1 : \left(\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\frac{x}{2} - 1}{\frac{x}{2}} + \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 1 : (0+2) = \frac{1}{2}$

v) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \cdot \sin x \cos x\right) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\sin x}{x} \pi \cos x\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \pi \cos x\right) =$

$= \cos(1 \cdot \pi \cdot 1) = \cos(\pi) = -1$

A16) a) i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$ z.z.: eine Nst. auf $(0, \frac{\pi}{2})$

$f(0) = -1$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + 1$ f ist eine Kombination aus Polynom- und Sinus/Cosinus-Funktion → stetig. Lt. Nullstellensatz von Bolzano mind. 1 Nst. im Intervall.

$f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$ → Die Funktion ist streng monoton steigend im Intervall

→ $\frac{\pi}{2}$: wächst, wächst von 0 auf 1, fällt von 1 auf 0 ↳ sie hat höchstens 1 Nst. ⇒ genau eine Nst.

ii) $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ z.z.: eine Nst. auf $(0, \frac{1}{2})$

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-0,5} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ f ist stetig, da Exponential- und Cosinus-Funktion kombiniert. Lt. Nullstellensatz von Bolzano gibt es mind. eine Nst. zwischen 0 und $\frac{1}{2}$. $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ ⇒ Funktion ist streng monoton fallend

wenn x steigt: wird kleiner, fällt von 1 auf 0, konstant

⇒ höchstens eine Nullstelle ⇒ mind. 1 und höchstens 1 Nst ⇒ genau 1 Nst.

THE BRUCKLYN APARTMENTS

A16 b)

$a < b$, f stetig, $f(a) = b$, $f(b) = a$ z.z.: $\exists x: f(x) = x$

$h(x) = f(x) - x$, $h(x)$ stetig, da $f(x)$ stetig und Gerade $y = x$ auch

$h(a) = f(a) - a = \underbrace{b - a}_{>0}$ $h(b) = f(b) - b = \underbrace{a - b}_{<0}$ -> Nach Nullstellensatz von Bolzano muss $h(x)$ im Intervall (a, b) mind. 1 Nst. haben!

$0 = h(x) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = x$ Es gibt ein $x \in (a, b)$ für dass $f(x) = x$, weil $h(x)$ eine Nullstelle in diesem Intervall haben muss.

c) z.z.: D_f ist abgeschlossen.

Das Intervall $(-1, 1)$ ist per Definition offen.

$[-5, 5] \setminus (-1, 1)$ lässt sich schreiben als $[-5, -1] \cup [1, 5]$

Der Abschluss dieser Menge ist auch genau diese Menge, weil

$(x_n)_1 = x_{n-1} + 1$ $x_0 = -5$ $\underset{x_n \in M}{\perp}$ $\lim_{x_{n1}} = -1$ (da x in M)

ähnliche Folgen lassen sich auch für die anderen kritischen Punkte konstruieren:

$x_{n+1_2} = x_n - 1$ $x_0 = -1$ $x_n \in M$ $\lim_{x_{n2}} = -5$

$x_{n+1_3} = x_n - 1$ $x_0 = 5$ $x_n \in M$ $\lim_{x_{n3}} = 1$

$x_{n+1_4} = x_n + 1$ $x_0 = 1$ $x_n \in M$ $\lim_{x_{n4}} = 5$

$[-5, 5] \setminus (-1, 1)$ ist somit abgeschlossen

Eine Menge $\{11, 17\}$ ist per Definition abgeschlossen. Die Vereinigung dieser beiden Mengen ist somit ebenfalls abgeschlossen.

D_f ist beschränkt: $\forall$ alle $x \in D_f \geq -5$, $x \in D_f \leq 17$

Daraus folgt: D_f ist kompakt (abgeschlossen und beschränkt)

$f(x) = e^{-x^2} \sin x$ ist stetig nach Stetigkeit der e-Fkt und sin-Fkt.

lt. Satz der Vorlesung: Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum und Minimum an $\Rightarrow$ $f(x)$ hat Maximum und Minimum auf D_f