A4 $\quad a_1 : 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

19/21 * 30 = 27

a)

IA: $a_1 = 1, \; a_1 \in (0,4)$

IS: $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$; $\frac{1}{2} a_n$ monoton steigend

$\sqrt{a_n}$ monoton steigend

-> da a_n in $(0,4)$, gilt also

$\frac{1}{2} \cdot 0 + \sqrt{0} < \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} < \frac{1}{2} \cdot 4 + \sqrt{4}$

$\Leftrightarrow \; 0 < \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} < 4 \; \Leftrightarrow \; 0 < a_{n+1} < 4 \; \Leftrightarrow a_{n+1} \in (0,4)$

q.e.d.

b) Wenn a_n monoton wächst, muss gelten $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$\rightarrow \; \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n \geq 0$

$\Leftrightarrow \; \sqrt{a_n} - \frac{1}{2} a_n \geq 0 \; \Leftrightarrow \; \sqrt{a_n} \geq \frac{1}{2} a_n \; \Leftrightarrow \; 2\sqrt{a_n} \geq a_n$

$\Leftrightarrow \; 4 a_n \geq a_n^2$, da $a_n \in (0,4)$ ist $a_n^2 \in (0,16)$

und somit immer $\leq 4a_n$, da $4a_n \in (0,16)$

c) a_n ist monoton steigend (s. b)) und nach oben beschränkt ($a_n \in (0,4)$, s. a)), also konvergiert a_n

Der Grenzwert ist das Supremum aller Folgenglieder.

$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = a$ existiert

$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \right)$

$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} =$

$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} = \sqrt{a}$

$\Leftrightarrow \; \frac{a^2}{4} = a \quad \rightarrow \quad a_1 = 0, \; a_2 = 4$

$\Rightarrow$ a_n konvergiert gegen 4

A6

a) $a_n = \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot (2 - \frac{1}{n^2})}{n^3(3+\frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b) $b_n = \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\cdot(\frac{5}{n}+2)}{n\cdot(\frac{1}{n}+1)}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} 2^3 = 8$

c) $c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}$, $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(-8+\frac{1}{n})}{n\cdot(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n}})}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$ =2sqrt(2)

d) $d_n = n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}$, $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3})}{n^3\cdot(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}})}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2} = 0$

e) $e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$, $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4+n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})}{n\cdot(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{2(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

f) $f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(n+1) - n^2\cdot(n+2)}{n^2+3n+2} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(-1)}{n^2\cdot(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1} = -1$

A5 a) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha^2 + 4\beta > 0$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

IA (a_0): $a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = 0$

IA (a_1): $a_1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1$ ✓

IV: Es gelte (1) für a_n ✓ und a_{n-1} ✓

Besser, es gelte für alle k<n

IS: $a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{(IV)}{=} \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$$ ✓

$$= \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{x_1^{n-1} x_1^2 - x_2^{n-1} x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$ ✓ ✓ q.e.d.

b) i) Nein, da $\alpha x + \beta = x^2$ dann keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt. (Außer $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$)

exakt darauf wollte man hinau

ii) Ebenfalls nein. Die quadratische Gleichung hat nur die Lösung $\frac{\alpha}{2}$, a_n ist also immer 0.

Die gleichheit von beiden F

c) i) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$(a_n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{2}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$ ✓ → s. P16/C1

c) ii) $x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$

$(a_n) = \frac{(2 \pm \sqrt{11})^n - (2 \pm \sqrt{11})^n}{2 + \sqrt{11} - 2 + \sqrt{11}} = \frac{1}{2\sqrt{11}} \left[(2 + \sqrt{11})^n - (2 - \sqrt{11})^n \right]$ ✓

iii) $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$

$(a_n) = \frac{i^n - (-i)^n}{i - (-i)} = \frac{i^n - (-i)^n}{2i}$ ✓

Es fehlt: sind alle werte jetzt aus R oder in C?Wenn man sich die Folge ausrechnet stellt sich nämlich