4a) Ordnungsstatistik

43	48	48	49	49	50	50	50	50	50
51	52	53 53	54	54	54	54	56	57	57
57	58	58	58	59	60	60	60	60	60
61	62	62	62	65	65	66	68	69	71
71	71	73	73	73	74	74	74	75	75
76	76	77	77	77	78	78	79	79	79
80	80	80	80	80	80	81	81	81	81
81	81	81	82	82	82	83	83	84	84
85	85	86	86	87	87	87	87	88	88
89	89	90	91	92	92	93	93	108	

Arithmetisches Mittel $\frac{1}{n}\sum x_i = 71{,}62 = \bar{x}$

Notiz: alle x% Zahlen sind ganze Zahlen, weil $n=100$

8% - Quantil $= \frac{1}{2}(x_8 + x_9) = \frac{1}{2}(50 + 50) = 50$

92% - Quantil $= \frac{1}{2}(x_{92} + x_{93}) = \frac{1}{2}(89 + 89) = 89$

median = 50% - Quantil $= \frac{1}{2}(x_{50} + x_{51}) = 75$

Da dies nur eine Stichprobe ist, macht es Sinn hier die empirische Standardabweichung zu verwenden:

(falls die normale std gefragt ist)

$$\sigma_{em} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \approx 14.153 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \approx 14{,}08$$

Funktionsplots und Programmlisting → letzte Seite

5) Die Funktion ist konvex, also ist die Extremstelle das globale Minimum.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \frac{\delta}{\delta a} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2ax_i + a^2)\frac{\delta}{\delta a} = \sum_{i=1}^{n}(2a - 2x_i) =$$

$$f'(a) = n \cdot 2a - \sum_{i=1}^{n} 2x_i \overset{!}{=} 0 \iff a_n - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \overset{I}{\iff} a - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\iff a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \iff a = \bar{x}$$

Bei I wurde angenommen, dass $n \neq 0$ ist.

[$f''(a) = 2n - 0 > 0 \Rightarrow a = \bar{x}$ ist globales Minimum.
falls "konvex" nicht ausreicht]

Hausaufgabe 4 a)

In [1]:
```
import math
data = [80,81,84,74,93,80,108,62,81,51,71,57,80,
        75,77,60,86,50,89,54,90,73,60,83,54,85,58,
        79,57,88,68,85,75,65,76,58,91,50,54,86,53,
        78,52,83,60,60,92,43,89,60,84,69,50,77,57,
        80,61,82,48,79,54,80,73,81,62,81,74,59,81,
        66,87,53,80,82,58,81,49,92,50,88,77,65,76,
        87,87,74,81,71,50,62,56,82,78,48,49,71,73,
        79,87,93]
n=len(data)
n
```

Out[1]:
```
100
```

In [2]:
```
ordnungsstatistik = sorted(data)
print(ordnungsstatistik)
```

```
[43, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 50, 51, 52, 53, 53, 54, 54, 54, 54, 56,
57, 57, 57, 58, 58, 58, 59, 60, 60, 60, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 65, 65, 66, 6
8, 69, 71, 71, 71, 73, 73, 73, 74, 74, 74, 75, 75, 76, 76, 77, 77, 77, 78, 7
8, 79, 79, 79, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 81, 81, 81, 81, 81, 81, 81, 82, 82, 8
2, 83, 83, 84, 84, 85, 85, 86, 86, 87, 87, 87, 87, 88, 88, 89, 89, 90, 91, 9
2, 92, 93, 93, 108]
```

In [3]:
```
durchschnitt = sum(ordnungsstatistik)/len(ordnungsstatistik)
print("durchschnitt",durchschnitt)
```

```
durchschnitt 71.62
```

In [4]:
```
# Achtung: python listen sind 0-indiziert!
achte_quantil = 1/2* (ordnungsstatistik[int(n*0.08)-1]+ordnungsstatistik[int(n
*0.08)])
zweiundneunzigstes_quantil = 1/2* (ordnungsstatistik[int(n*0.92)-1]+ordnungst
atistik[int(n*0.92)])
median = 1/2* (ordnungsstatistik[int(n*0.5)-1]+ordnungsstatistik[int(n*0.5)])
print("8-quantil",achte_quantil,ordnungsstatistik[int(n*0.08)-1],ordnungsstati
stik[int(n*0.08)])
print("92-quantil",zweiundneunzigstes_quantil,ordnungsstatistik[int(n*0.92)-
1],ordnungsstatistik[int(n*0.92)])
print("median",median,ordnungsstatistik[int(n*0.5)-1],ordnungsstatistik[int(n*
0.5)])
```

```
8-quantil 50.0 50 50
92-quantil 89.0 89 89
median 75.0 75 75
```

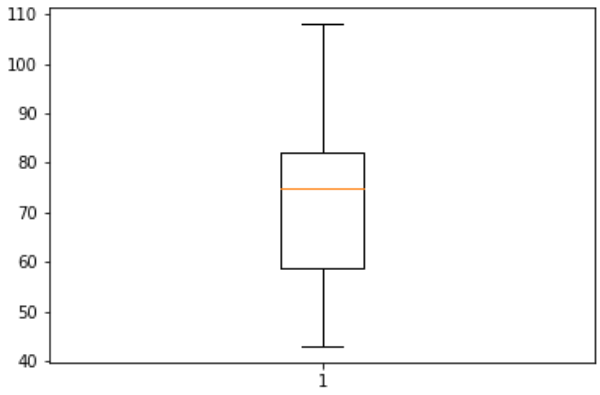
In [5]:
```
std_empirisch = ((1/(len(ordnungsstatistik)-1)) *sum([(x-durchschnitt)**2 for
x in ordnungsstatistik]))**0.5
print("std_empirisch", std_empirisch)
std_normal = ((1/(len(ordnungsstatistik))) *sum([(x-durchschnitt)**2 for x in
ordnungsstatistik]))**0.5
print("std_normal",std_normal)
```

```
std_empirisch 14.152688290872012
std_normal 14.081747050703614
```

Teil b

In [6]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

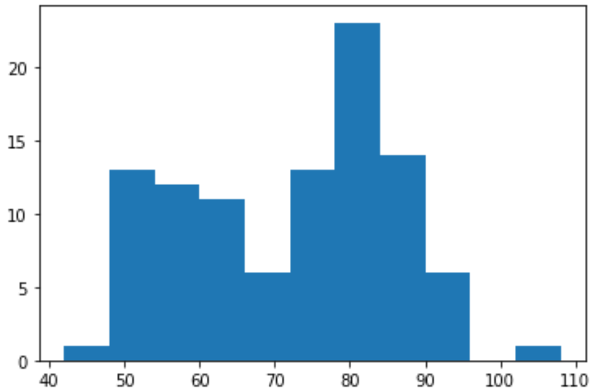
In [7]:
```
l_quartil = 1/2* (ordnungsstatistik[int(n*0.25)-1]+ordnungsstatistik[int(n*0.25)])
u_quartil = 1/2* (ordnungsstatistik[int(n*0.75)-1]+ordnungsstatistik[int(n*0.75)])
plt.boxplot(ordnungsstatistik)
plt.show()
#sanity check für die Quartile
print("unteres quartil",l_quartil, "oberes quartil", u_quartil)
```




```
unteres quartil 58.5 oberes quartil 82.0
```

Teilaufgabe c

In [8]:
```
#manuelle berechnung der bins
bins = np.ones((max(ordnungsstatistik)-42)//6+1)*6
bins[0] = 42
bins = np.cumsum(bins)
plt.hist(ordnungsstatistik,bins=bins, label = map(str,bins))
plt.show()
```



Aufgabe 5

für die minimierung ableiten w.r.t. a:
$\nabla_a \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} \nabla_a (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} \nabla_a (x_i^2 - 2ax_i + a^2) = \sum_{i=1}^{n}(2a - 2x_i) = n * 2a - \sum_{i=1}^{n} 2x_i \rightarrow$
auflösen:
$n * 2a - \sum_{i=1}^{n} 2x_i = 0 \iff n * a - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff a - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ Der Letzte schritt geht, weil $n > 0$ für alle möglichen messreihen gilt. da $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ und die Funktion konvex ist, muss im minimum $a = \overline{x}$ gelten. (bzw $f''(a) = n * 2a \frac{\partial}{\partial a} = 2n > 0 \ (\forall n > 0)$)

In [ ]: