Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Schleifer, Max

StudOn-Kennung: an66iboj

Blatt-Nummer: 1

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3, /

20.5/24*33 = 28

A1

'existiert nicht' $\hat{=}$ n.e.

	$\inf(M)$	$\sup(M)$	$\min(M)$	$\max(M)$
a) $M = [\sqrt{3}, \sqrt{5})$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	n.e.
b) $M = \left\{ \frac{1}{1+x} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
c) $M = \left\{ \frac{1}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$	0	$\frac{1}{2}$	n.e.	$\frac{1}{2}$
d) $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 > 0 \}$	$\cancel{1}$ $-\infty$	$+\infty$	$\cancel{1}$	n.e.
e) $M = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \right\}$	0	1	n.e.	1
f) $M = \left\{ n - \frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	n.e.
g) $M = \left\{ n + \frac{1}{3^m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$	1	$+\infty$	n.e.	n.e.

A2

$n \in \mathbb{N} \wedge 2n \leq m \leq 3n$

$$(i):\ \frac{3n+4m}{5n^2+10} \leq \frac{3n+4(3n)}{5n^2+10} = \frac{3n+12n}{5n^2+10} = \frac{15n}{5n^2+10} = \frac{3n}{n^2+2}$$

$$(ii)\ \frac{5n-m}{2n} \leq \frac{5n-2n}{2n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$(iii)\ \frac{n}{n+m} \leq \frac{n}{n+2n} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$(iv)\ \frac{n+m}{\frac{1}{2}-n} \leq \frac{n+3n}{\frac{1}{2}-n} = \frac{4n}{\frac{1}{2}-n}$$

$$(v)\quad \frac{5n-m+3\cdot 2^{m}}{3n^{3}-m+3} \leq \frac{5n-3n+3\cdot 2^{3n}}{3n^{3}-3n+3} = \frac{2n+3\cdot 2^{3n}}{3(n^{3}-n+1)}$$

$$(vi)\quad m+n+\sin(m)-\sin(17m^{2})+2^{m}+2^{-m} \leq 3n+n+\sin(3n)-\sin(17(3n)^{2})+2^{3n}+2^{-3n}$$

$$= 4n+\sin(3n)-\sin(153n^{2})+2^{3n}+2^{-3n}$$

↳ Die Potenz 2^{m} "gewinnt" gegen die periodische sin-Funktion $\in \{-1;1\}$

A3

a) Monotonie: $n \in \mathbb{N}$

$$(i)\quad a_n = \frac{2n}{n+3}$$

$$a_{n+1}-a_n \overset{!}{\geq} 0 \iff \frac{2(n+1)}{n+1+3} - \frac{2n}{n+3} = \frac{2n+2}{n+4} - \frac{2n}{n+3} =$$

$$= \frac{(2n+2)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{2n(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{(2n+2)(n+3)-2n(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{2n^{2}}+\cancel{6n}+2n+6-\cancel{2n^{2}}-\cancel{8n}}{(n+4)(n+3)} = \frac{6}{(n+4)(n+3)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↳ Folge ist monoton (wachsend)

(ii) $b_n = \frac{n}{4^n} = \frac{n}{2^{2n}}$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{4^{n+1}} - \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4 \cdot 4^n} - \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4 \cdot 4^n} - \frac{4n}{4 \cdot 4^n} =$$

$$= \frac{n+1-4n}{4 \cdot 4^n} = \frac{1-3n}{4 \cdot 4^n} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\hookrightarrow$ Folge ist monoton (fallend)

b) a_n : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

b_n : $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +0$

c) Konvergenz : Epsilon-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$

(i) $a_n = \frac{2n}{n+3}$ Vermutung: konv. geg. 2

Nebenrechnung:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 = \ldots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|a_n - a| = \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+3)}{n+3} \right| = \frac{6}{n+3} \underset{(*)}{\leq} \ldots = \varepsilon$

$\hookrightarrow \frac{6}{n+3} \overset{!}{\leq} \varepsilon \iff 6 \leq \varepsilon(n+3) \iff \frac{6}{\varepsilon} \leq n+3 \iff n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3$

$\hookrightarrow n_0 := \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \right\rceil$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \right\rceil$

Problem:für e=4 is

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+3)}{n+3} \right| = \left| \frac{-6}{n+3} \right| = \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} =$$

$$= \frac{6}{\left\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \right\rceil + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon} - 3 + 3} = \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}} = \frac{6\varepsilon}{6} = \varepsilon \qquad \square$$

(ii) $b_n = \frac{n}{4^n} = \frac{n}{2^{2n}}$. Vermutung: Konvergenz gegen 0