Sitzung 7

# Von Dichten und Verteilungsfunktionen (II)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 15. Mai 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

# Fragen

## Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Begriffe Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion?
2. Sie wissen, warum es Zähldichten und stetige Dichten benötigt werden.
3. Sie können Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichten und Verteilungsfunktionen berechnen.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen den Begriffen Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion
5. Sie kennen Beispiele für verschiedene Verteilungen

## Antworten auf die ...

### ... weiterführenden Fragen

1. Stellen Sie sich eine Liste der bis jetzt erwähnten Verteilungen zusammen. Führen dazu die Dichtefunktion, Verteilungsfunktion und mögliche Beispiele auf.
   Teilen Sie ihre Informationen im Wiki
   `https://www.studon.fau.de/wikiwpage_38248_3058524.html`
2. Zeigen Sie, dass für die geometrischen Verteilung die Aussage

   $$P(\mathbb{N}) = 1$$

   gilt.
3. Was bedeutet der Begriff **gemischte Verteilung**?

# Antworten

## Verteilungen

Stellen Sie sich eine Liste der bis jetzt erwähnten Verteilungen zusammen. Führen dazu die Dichtefunktion, Verteilungsfunktion und mögliche Beispiele auf.

Teilen Sie ihre Informationen im Wiki

`https://www.studon.fau.de/wikiwpage_38248_3058524.html`

Welche Verteilungen haben es auf Ihre Liste geschafft?

# Antworten

## Geometrische Verteilung

Zeigen Sie, dass für die geometrischen Verteilung die Aussage

$$P(\mathbb{N}) = 1$$

gilt.

# Antworten

## Gemischte Verteilung

Was bedeutet der Begriff **gemischte Verteilung**?

## Definition 4.8

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geqslant 0 \ (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 1 \tag{1}$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.

Jede R-Dichte definiert eindeutig ein W-Maß $p$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P\left((a, b]\right) = P\left([a, b]\right) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, x \tag{2}$$

mit $(a \leqslant b)$ und $P\left(\{\omega\}\right) = 0$.

## Satz 4.9 (Fortsetzungssatz)

*Ist $P$ auf einem geeigneten Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf $\mathcal{E}$ nicht-negativ, $\sigma$-additiv und normiert, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von $P$ auf $\mathcal{A}$.*

**Definition 4.8**

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geqslant 0 \; (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 1 \tag{1}$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.
Jede R-Dichte definiert eindeutig ein W-Maß $p$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P\left((a,b]\right) = P\left([a,b]\right) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, x \tag{2}$$

mit $(a \leqslant b)$ und $P\left(\{\omega\}\right) = 0$.

**Satz 4.9 (Fortsetzungssatz)**

*Ist $P$ auf einem geeigneten Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf $\mathcal{E}$ nicht-negativ, $\sigma$-additiv und normiert, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von $P$ auf $\mathcal{A}$.*

**Definition 4.8**

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geqslant 0 \ (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 1 \tag{1}$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.
Jede R-Dichte definiert eindeutig ein W-Maß $p$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P\left((a, b]\right) = P\left([a, b]\right) = \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}\, x \tag{2}$$

mit $(a \leqslant b)$ und $P\left(\{\omega\}\right) = 0$.

**Satz 4.9 (Fortsetzungssatz)**

*Ist $P$ auf einem geeigneten Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf $\mathcal{E}$ nicht-negativ, $\sigma$-additiv und normiert, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von $P$ auf $\mathcal{A}$.*

**Definition 4.8**

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geqslant 0 \ (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1 \tag{1}$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.
Jede R-Dichte definiert eindeutig ein W-Maß $p$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P\left((a, b]\right) = P\left([a, b]\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{2}$$

mit $(a \leqslant b)$ und $P\left(\{\omega\}\right) = 0$.

**Satz 4.9 (Fortsetzungssatz)**

*Ist P auf einem geeigneten Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf $\mathcal{E}$ nicht-negativ, $\sigma$-additiv und normiert, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von P auf $\mathcal{A}$.*

## Empirische Verteilungsfunktion

Zur empirischen Verteilung eines Datensatzes $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ gehört die **empirische Verteilungsfunktion**

$$\hat{F}_n^{\mathbf{x}}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

### Definition 4.16 (Verteilungsfunktion)

Ist $P$ ein beliebiges W-Maß über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann heißt die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := P\left((-\infty, x]\right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

die **Verteilungsfunktion von P**. Es gilt

$$P\left((a, b]\right) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, \; a \leqslant b. \tag{5}$$

### Berechnung von Verteilungsfunktionen

Für ein W-Maß über $\mathbb{R}$ mit der Riemann-Dichte $f$ gilt mit dieser Definition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{und} \quad P\left((a, b]\right) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(b) - F(a). \tag{6}$$

**Definition 4.16 (Verteilungsfunktion)**

Ist $P$ ein beliebiges W-Maß über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann heißt die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := P\left((-\infty, x]\right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

die **Verteilungsfunktion von P**. Es gilt

$$P\left((a, b]\right) = F(b) - F(a), \;\; a, b \in \mathbb{R}, \; a \leqslant b. \tag{5}$$

**Berechnung von Verteilungsfunktionen**

Für ein W-Maß über $\mathbb{R}$ mit der Riemann-Dichte $f$ gilt mit dieser Definition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{und} \quad P\left((a, b]\right) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(b) - F(a). \tag{6}$$

## Definition 4.16 (Verteilungsfunktion)

Ist $P$ ein beliebiges W-Maß über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann heißt die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := P\left((-\infty, x]\right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

die **Verteilungsfunktion von P**. Es gilt

$$P\left((a, b]\right) = F(b) - F(a), \;\; a, b \in \mathbb{R}, \;\; a \leqslant b. \tag{5}$$

## Berechnung von Verteilungsfunktionen

Für ein W-Maß über $\mathbb{R}$ mit der Riemann-Dichte $f$ gilt mit dieser Definition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{und} \quad P\left((a, b]\right) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(b) - F(a). \tag{6}$$

## Folgerung 4.18

Ist $F$ die VF eines W-Maßes $P$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. $F$ ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. $F$ ist „normiert", d. h. $F$ besitzt die Grenzwerte

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F$ ist rechtsseitig stetig.
4. $F$ besitzt linksseitige Grenzwerte

$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P\left((-\infty, x)\right).$$

5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:

$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

## Folgerung 4.18

Ist $F$ die VF eines W-Maßes $P$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. $F$ ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. $F$ ist „normiert", d. h. $F$ besitzt die Grenzwerte

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F$ ist rechtsseitig stetig.
4. $F$ besitzt linksseitige Grenzwerte

$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P\left((-\infty, x)\right).$$

5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:

$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

## Folgerung 4.18

Ist $F$ die VF eines W-Maßes $P$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. $F$ ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. $F$ ist „normiert“, d. h. $F$ besitzt die Grenzwerte
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$
3. $F$ ist rechtsseitig stetig.
4. $F$ besitzt linksseitige Grenzwerte
$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P\left((-\infty, x)\right).$$
5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:
$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

## Folgerung 4.18

Ist $F$ die VF eines W-Maßes $P$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. $F$ ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. $F$ ist „normiert“, d. h. $F$ besitzt die Grenzwerte

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F$ ist rechtsseitig stetig.
4. $F$ besitzt linksseitige Grenzwerte

$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P\left((-\infty, x)\right).$$

5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:

$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

**Folgerung 4.18**

Ist $F$ die VF eines W-Maßes $P$ über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. $F$ ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. $F$ ist „normiert“, d. h. $F$ besitzt die Grenzwerte

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F$ ist rechtsseitig stetig.
4. $F$ besitzt linksseitige Grenzwerte

$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P\left((-\infty, x)\right).$$

5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:

$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

**Definition 4.12 (Normalverteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$)**

Für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

eine Riemann-Dichte. Das zugehörige W-Maß heißt **Normalverteilung** mit „Mittelwert" $a$ und der „Streuung" $\sigma$; kurz $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

**Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$**

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} . \tag{8}$$

**Definition 4.12 (Normalverteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$)**

Für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

eine Riemann-Dichte. Das zugehörige W-Maß heißt **Normalverteilung** mit „Mittelwert“ $a$ und der „Streuung“ $\sigma$; kurz $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

**Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$**

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

**Definition 4.12 (Normalverteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$)**

Für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

eine Riemann-Dichte. Das zugehörige W-Maß heißt **Normalverteilung** mit „Mittelwert“ $a$ und der „Streuung“ $\sigma$; kurz $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

**Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$**

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

## Verteilungsfunktion $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{9}$$

## Verteilungsfunktion $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ und $\mathcal{N}(0,1)$

$$F_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2} \, \mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{10}$$

## Substitution

$$u = \frac{t-a}{\sigma}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}t$$

## Verteilungsfunktion $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{9}$$

## Verteilungsfunktion $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ und $\mathcal{N}(0,1)$

$$F_{a,\sigma^2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2} \,\mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{10}$$

## Substitution

$$u = \frac{t-a}{\sigma}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}t$$

# Ihre Fragen

## ... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

| | | |
|---|---|---|
| Wigand Rathmann | 09131/85-67129 | Mi 11-12 Uhr |
| Marius Yamakou | 09131/85-67127 | Di 14-15 Uhr |

**Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure**
**Wann:** dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)