Sitzung 27

Schätzen und Testen (2)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 31. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

Schätzen und Testen

Leitfragen

- Wie können aus einer Stichprobe Kenngrößen einer Verteilung geschätzt werden?
- Wie könnnen Parameter in einer Verteilung geschätzt werden?
- Entspricht die Schätzung unseren Erwarungen

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Zusammenhang zwischen beschreibender und schließender Statistik.
2. Sie können den Unterschied zwischen **Schätzer** und **Schätzung** erklären.
3. Sie können den Maximum-Likelihood-Schätzer anwenden.
4. Sie können Hypothesentests anwenden.

Fragen

1. Warum ist die empirische Varianz aus der beschreibenden Statistik ein „besserer Schätzer“als die Stichprobenvarianz?
2. Warum ist die Länge des Konfidenzintervalls umgekehrt proportional zum Irrtumswahrscheinlichkeit.
3. Was ist bei der Konfidenzschätzung einer normalverteilter Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz zu beachten? (Verteilung)
4. Wie ist ein Hypothesentest aufgebaut? (Ende Kapitel 11.1.)

Begriffe

$\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **Schätzfunktion**, Schätzer

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **Schätzwert**

Stichprobenfunktionen

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{arithmetisches Mittel} \tag{1}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad \text{empirische Varianz} \tag{2}$$

Schätzfunktionen formuliert in ZV

Definition 10.3

Eine Schätzfunktion $\hat{\Theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ eines Parameters Θ heißt **erwartungstreu (unverzerrt)**, wenn der $\mathrm{E}(\hat{\Theta}) = \Theta$ ist.
Eine Schätzfunktion $\hat{\Theta}$ eines Parameters Θ heißt **asymptotisch erwartungstreu**, falls für wachsenden Stichprobenumfang der Grenzwert des Erwartungswertes von $\hat{\Theta}$ gleich dem Parameter Θ ist, d.h. wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)\right) = \Theta.$$

Frage

Ist die Schätzfunktion

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

erwartungstreu?

ja, wenn X_i iid

Ausgangspunkt

Es sei eine Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit X gegeben. Der Verteilungstyp sei bekannt, die Parameter Θ_i, $(i = 1, \ldots, m)$ seien unbekannt und sollen geschätzt werden. Es wird nur ein Parameter betrachtet.

Beispiel

Schätzen des Parameters p einer Bernoulli-p-Verteilung. Dazu wird das Experiment n-mal durchgeführt und ist $m \leqslant n$ erfolgreich.

https://www.studon.fau.de/vote/RH28

https://www.studon.fau.de/xlvo3210029.html

Definition 10.9

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei eine Stichprobe vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit, die durch eine stetige ZV X mit Dichte $f^X(x;\Theta)$, $x \in \mathbb{R}$, Θ unbekannt, beschrieben wird. Die Funktion

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta\right) := \prod_{i=1}^{n} f^X\left(x_i; \Theta\right) \tag{3}$$

heißt dann **Likelihood-Funktion** der Stichprobe.

Definition 10.10

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine Stichprobe vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit, die durch eine diskrete ZV X beschrieben wird. Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind $P\left(X = x_i; \Theta\right)$, wobei Θ unbekannt ist. Die Funktion

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta\right) := \prod_{i=1}^{n} P\left(X = x_i; \Theta\right) \tag{4}$$

heißt dann **Likelihood-Funktion** der Stichprobe.

Prinzip der Maximum-Likelihood-Methode

1. Die Likelihood-Funktion ist für jede Stichprobe eine Funktion in Θ.
2. Als Schätzwert $\hat{\theta}$ wird derjenige Wert gewählt, für den

$$\max_{\theta} L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta\right)$$

gilt. (L kann mehrere Maxima besitzen.)

Differenzierbarkeit

Anwenden der notwendigen Bedingung, falls L differenzierbar ist

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,\Theta} = 0 \tag{5}$$

Enthält die Likelihood-Funktion einen Exponentialausdruck, so ist es günstig $\ln L$ statt L zu verwenden und von der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\,\Theta} = 0 \tag{6}$$

auszugehen.
Die Lösung $\hat{\theta} = \hat{\theta}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta)$ ist eine Realisierung (ein Punktschätzwert) der Schätzfunktion $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta)$.

große X

Fragen

1. Warum ist die empirische Varianz aus der beschreibenden Statistik ein „besserer Schätzer“ als die Stichprobenvarianz?

1. Erwartungswerttreue, E(S^2)2. asympt. erwartun

Warum Konfidenzschätzung?

Bisher wurde nur der Parameter Θ geschätzt. Daraus lässt sich aber keine Aussage über die Genauigkeit einer solchen Schätzung ableiten. Die Abweichungen vom Wert des Parameters Θ können erheblich sein, insbesondere bei kleinen Stichproben.

Idee

Gesucht wird ein Intervall $I = (G_1, G_2)$ derart, dass gilt

$$P(G_1 < \Theta < G_2) = 1 - \alpha. \tag{7}$$

Begriffe

G_1, G_2	**Konfidenzgrenzen**
(G_1, G_2)	**Konfidenzintervall**
$1 - \alpha$	**Konfidenzniveau**
α	**Irrtumswahrscheinlichkeit**

Fragen

2. Warum ist die Länge des Konfidenzintervalls umgekehrt proportional zum Irrtumswahrscheinlichkeit.

klar: je weniger ich mich irren möchte, desto mehr Werte muss ich

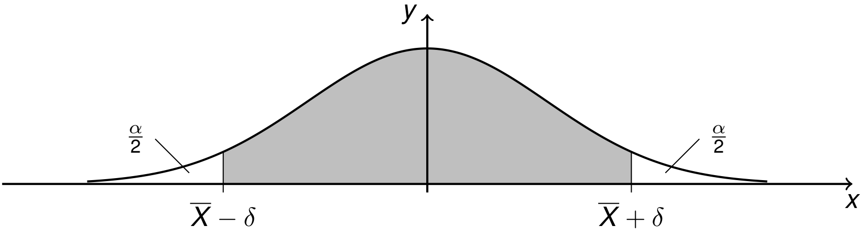
Es wird die Konfidenzschätzung für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit X betrachtet, wobei σ^2 bekannt ist.

Die Schätzfunktion für $\Theta = \mu$ lautet $\hat{\Theta} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

wir haben hier +- den gleichen v

Es folgt

$$P(\bar{X} - \delta < \mu < \bar{X} + \delta) = P\left(|\bar{X} - \mu| < \delta\right) = 1 - \alpha. \tag{8}$$



muss nicht symmetrisch sein: könnte auch bei z.B. B

Bestimmung δ (Schätzung von μ bei bekannter Varianz σ^2)

Es ist $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$; $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ist $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Damit gilt

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1-\alpha \qquad (9)$$

delta ist unbekannt, n ist beka

bzw.

$$P\left(|Z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \quad \text{mit } z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (10)$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ist ein Perzentil der Normalverteilung und kann aus entsprechenden Tabellen abgelesen werden.

Fragen

3. Was ist bei der Konfidenzschätzung einer normalverteilter Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz zu beachten? (Verteilung)

Student-t-Verteilung, *t*-Verteilung

Für zwei stoch.unabh. ZV gelte $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_n \sim \chi^2(n)$. Dann besitzt die ZV

$$Z_n := \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}} \tag{11}$$

die Dichtefunktion

$$f^{Z_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Definition 9.10

Eine stetige ZV Z_n mit der Dichtefunktion (12) unterliegt einer **Student-t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.**

bei bekannter Varianz:Z = (X-mu)/(sigma

Schätzung von μ bei unbekannter Varianz σ^2

Es wird die Konfidenzschätzung für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit X betrachtet, wobei σ^2 *nicht* bekannt ist.
Die Schätzfunktion für $\Theta_1 = \mu$ lautet $\hat{\Theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Die Schätzfunktion für $\Theta_2 = \sigma^2$ lautet $\hat{\Theta}_2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

Ansatz zur Berechnung von δ_1 und δ_2

$$Z^*_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}, \qquad (13)$$

wobei Z Student-t-verteilt mit $m = n - 1$ Freiheitsgraden ist.
Wegen der Symmetrie gilt: $\delta = \delta_1 = \delta_2$.

Bestimmung δ (Schätzung von μ bei unbekannter Varianz σ^2)

Der Wert $t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ wird aus der Tabelle für die Student-t-Verteilung abgelesen, da gelten muss:

$$P\left(|Z^*_{n-1}| < t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\alpha. \tag{14}$$

Einsetzen von Z^*_m liefert:

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\alpha \tag{15}$$

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\alpha. \tag{16}$$

wir nehmen also die empirische Standardabweich

Daraus ergibt sich die Konfidenzschätzung

$$\boxed{\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};m}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};m}\frac{S}{\sqrt{n}}.}$$

Für eine konkrete Stichprobe **x** ergibt sich dann

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Beispiel 10.14

Hektarerträge von Versuchsflächen einer neuen Getreidesorte [dt]:

35,6; 33,7; 37,8; 31,2; 37,2; 34,1; 35,8; 36,6; 37,1; 34,9; 35,6; 34,0

Fragen

4. Wie ist ein Hypothesentest aufgebaut? (Ende Kapitel 11.1.)

1. Aufstellen der Nullhypothese H_02. Vorgabe der Irrtumswahrsc

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)