Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 01

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3, ____

33P

A1) a) $M = [\sqrt{3}, \sqrt{5})$ $\inf(M) = \sqrt{3}$, $\sup(M) = \sqrt{5}$, $\min(M) = \sqrt{3}$,

$\max(M)$ existiert nicht ✓

b) $M = \{\frac{1}{1+x} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$ $\inf(M) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$,

$\sup(M) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ✓, $\min(M) = \inf(M) = \frac{1}{4}$, $\max(M) = \sup(M) =$ ✓

$= \frac{2}{3}$

c) $M = \{\frac{1}{1+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\inf(M) = 0$ (für $n = \pm\infty$), $\sup(M) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓,

$\min(M)$ existiert nicht, $\max(M) = \sup(M) = \frac{1}{2}$ ✓

d) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 > 0\}$ $\inf(M) = -\infty$, $\sup(M) = +\infty$,

$\min(M)$ existiert nicht, $\max(M)$ existiert nicht ✓ ✓

e) $M = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, p \leq q\}$ $\inf(M) = 0$ (für $q = +\infty, p \neq +\infty$), ✓

$\sup(M) = 1$ (für $p = q$), $\min(M)$ existiert nicht, $\max(M) = \sup(M) = 1$ ✓

f) $M = \{n - \frac{1}{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\inf(M) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\sup(M) = +\infty$ (für

$n = \infty$), $\min(M) = \inf(M) = \frac{2}{3}$, $\max(M)$ existiert nicht ✓ ✓

g) $M = \{n + \frac{1}{3m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ $\inf(M) = 1$ (für $n = 1, m = +\infty$),

$\sup(M) = +\infty$ (für $n = +\infty, m = 1$), $\min(M)$ und $\max(M)$ existieren nicht ✓ ✓

A2) $2n \leq m \leq 3n$

(i) $\frac{3n + 4m}{5n^2 + 10} \leq \frac{3n + 3 \cdot 4n}{5n^2 + 10} = \frac{15n}{5n^2 + 10} = \frac{3n}{n^2 + 2}$

(ii) $\frac{5n - m}{2n} \leq \frac{5n - 2n}{2n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$

(iii) $\frac{n}{n+m} \leq \frac{n}{n + 2n} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

(iv) $\frac{n+m}{\frac{1}{2} - n} \leq \frac{n + 3n}{\frac{1}{2} - n} = \frac{4n}{\frac{1}{2} - n}$

(v) $\frac{5n - m + 3 \cdot 2^m}{3n^3 - m + 3} \leq \frac{5n - 3n + 3 \cdot 2^{3n}}{3n^2 - 3n + 3} = \frac{2n + 3 \cdot 6^n}{3(n^2 - n + 1)}$

(vi) $m + n + \sin(m) - \sin(17m^2) + 2^m + 2^{-m} \leq$

$3n + n + \sin(3n) - \sin(17(3n)^2) + 2^{3n} + 2^{-3n} =$

$= 4n + \sin(3n) - \sin(17 \cdot 9 \cdot n^2) + 8^n + 8^{-n} =$

$= 4n + \sin(3n) - \sin(153n^2) + 8^n + 8^{-n}$

Laura Riegel (1708941ik)

A3) a) (i) $a_n = \frac{2n}{n+3}$ $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1+3} = \frac{2n+2}{n+4} =$

$$= \frac{2n}{n+4} + \frac{2}{n+4}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+4} - \frac{2n}{n+3} = \frac{(2n+2)(n+3) - 2n(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$ ✓

$$= \frac{2n^2 + 8n + 6 - 2n^2 - 8n}{n^2 + 7n + 12} = \frac{6}{n^2+7n+12} > 0$$ ✓

$\Rightarrow$ monoton steigend

(ii) $b_n = \frac{n}{2^{2n}}$ $b_{n+1} = \frac{n+1}{2^{2(n+1)}} = \frac{n+1}{2^{2n+2}} =$

$$= \frac{n+1}{2^{2n} \cdot 2^2} = \frac{n+1}{4 \cdot 2^{2n}}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{4 \cdot 2^{2n}} - \frac{n}{2^{2n}} = \frac{n+1}{4 \cdot 2^{2n}} - \frac{4n}{4 \cdot 2^{2n}} =$$ ✓

$$= \frac{n+1-4n}{4 \cdot 2^{2n}} = \frac{1-3n}{4 \cdot 2^{2n}} < 0$$ ✓ , da $\min(b_n) = 1$ und $1-3 = -2 < 0$

$\Rightarrow$ monoton fallend

b) (i) gegen 2, da für sehr große werte die +3 im Nenner rel. unbedeutend wird und dann $\frac{2x}{x} = 2$, wird allerdings nie erreicht. ✓

(ii) gegen 0, da für sehr große Werte der Nenner extrem groß wird. ✓

c) (i) $a_n = \frac{2n}{n+3}$ $a = 2$

$n_0 : n \geq n_0 : |a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+3)}{n+3}\right| =$

$$= \left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \ldots = \varepsilon$$

$$\frac{6}{n+3} \leq \varepsilon \iff \frac{6}{\varepsilon} \leq n+3 \iff n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3 =$$

S

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+3)}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} =$$

$$= \frac{6}{\lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon} + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

(ii) $b_n = \frac{n}{2^{2n}}$ $\qquad b = 0$

n_0: $n \geq n_0 : |b_n - b| = \left|\frac{n}{2^{2n}} - 0\right| = \frac{n}{2^{2n}} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \operatorname{ld} \frac{1}{\varepsilon} \leq n \Rightarrow n_0 = \lceil \operatorname{ld} \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \lceil \operatorname{ld} \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b_n - b| = \frac{n}{2^{2n}} \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2^{\lceil \operatorname{ld} \frac{1}{\varepsilon} \rceil}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{\operatorname{ld} \frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \blacksquare$$