Sitzung 21

Kenngrößen (4)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 10. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Bedeutung und die Definitionen der wichtigsten Kenngrößen von Verteilungen.
2. Sie können die Definitionen auf beliebige Verteilungen anwenden.
3. Sie kennen den Unterschied zwischen Momenten und Zentralen Momenten.
4. Sie wissen, was die momenterzeugende Funktion ist.
5. Sie kennen den Zusammenhang zwischen st. Unabhängigkeit und Kovarianz und können beides analysieren.
6. Sie können die mehrdimensionale Normalverteilung und deren besonderen Eigenschaften. Sie können normalverteilte Zufallsvektoren transformieren.

Fragen

1. Welche Eigenschaften besitzt die Kovarianz? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kovarianz und der stochastischen Unabhängigkeit?

Fragen

2. Sei X ein n-dimensionaler standardnormalverteilter Zufallsvektor und $Y = \mathbf{A}X + \mathbf{b}$ ergebe sich aus X mit einer linear-affinen Transformation mit $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n}$. Wie ist Y verteilt?
3. Y sei ein beliebig normalverteilter Zufallsvektor, $Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$. Was können Sie über die Kovarianzen und die stochastische Unabhängigkeit zwischen den Randverteilungen aussagen?

Eigenschaften von $Y = \mathbf{A}X + \mathbf{a}$

Es gilt:

x~N(0,1)

1. $EY_i = a_i$.
2. Für die Kovarianz gilt mit $EX_i^2 = 1$ und $EX_k X_l = 0$, $(k \neq l)$ Folgendes:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kov}(Y_i, Y_j) &= \mathrm{E}\,(Y_i - \mathrm{E}\,Y_i)\,(Y_j - \mathrm{E}\,Y_j) \\
&= E\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)_{ij}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Notation

Mit $k_{ij} := \text{Kov}\,(Y_i, Y_j)$ und $k_{ii} := \text{Var}\; Y_i$ gilt

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

Dichte für $Y = \mathbf{a} + \mathbf{A}X$

$$f^Y(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(A^{-1}\right)^T \left(A^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})} \tag{2}$$

bzw.

$$f^Y(\mathbf{y}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Aus transformationssatz

Fragen

4. Lässt sich jeder normalverteilter Zufallsvektor Z auf einen geeigneten standardnormalverteilten Zufallsvektor X transformieren?
5. X sein ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiterhin sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wie ist der Zufallsvektor $Y = \mathbf{b} + \mathbf{B}X$ verteilt.
   `https://www.studon.fau.de/pg636999_2897784.html`

Also X = c+CZ mit X~N(0,1)

Klausur 2018

Gegeben sei der Zufallsvektor $Y = (Y_1, Y_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ und es gelte $Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ mit $\mathbf{a} = (1,2)^\top$ und $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Weiterhin sei für $\beta \in \mathbb{R}$ der Zufallsvektor X durch die folgende Transformation gegeben:

$$X_1 = -1 + Y_1, \quad (4)$$

$$X_2 = -1 + \beta Y_1 + Y_2 \quad (5)$$

-1 0-k

1. (2 Punkte) Geben Sie einen Vektor $\mathbf{b}$ und eine Matrix $\mathbf{B}_\beta$ an so, dass $X = \mathbf{b} + \mathbf{B}_\beta Y$ gilt.
2. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X. (Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{c}_\beta$ und die Matrix $\mathbf{C}_\beta$, so dass $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{c}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$.)
3. (2 Punkte) Wie muss β gewählt werden, damit X standardnormalverteilt ist.

Aufgabe 2014

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4, wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \cdots + X_{T_N}$$

gebildet.

1. (3 Punkte) Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
2. (1 Punkt) Berechnen Sie Z für die Realisierung
$$(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6).$$
3. (6 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z.

Definition 7.30 (Zufällige Summen)

Es sei Y eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von Y. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

alle X_i gleich

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

Satz 7.31

Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\operatorname{E} Y < \infty$ und $\operatorname{E} X_i < \infty$,

$$\operatorname{E} S = \operatorname{E} Y \cdot \operatorname{E} X_1, \tag{6}$$

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{E} Y \cdot \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} Y \cdot (\operatorname{E} X_1)^2 . \tag{7}$$

Wie oft erwarte ich zu würfeln, welc

nicht nur X s

Bedingte Verteilung $P(X \in B|Y = y)$

Die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B|Y = y) = \frac{P[(X \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}. \tag{8}$$

ähnlich gekoppelte Modelle!Kons

Definition 7.32

Der Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = \int x P^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|y)$$

der bedingten Verteilung von X unter Y bzw. die Zufallsvariable $\mathrm{E}(X|Y)$

$$\omega \longmapsto \int x P^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|Y(\omega))$$

heißen der ***bedingte Erwartungswert*** von X unter der Bedingung Y.

Definition 7.33

Sind $S : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \Omega''$ diskrete Zufallsvariablen und existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}\, S$, dann heißt

$$\mathrm{E}\,(S|Y = n) := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P\,(S = k|Y = n) \tag{9}$$

der **bedingte Erwartungswert von S unter $Y = n$**. Es gilt die Formel vom **iterierten Erwartungswert**

$$\mathrm{E}\, S = \sum_{n \in \Omega''} P(Y = n)\,\mathrm{E}\,(S|Y = n)\,. \tag{10}$$

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)