Bearbeitete Aufgaben: A4, A5, A6

A4

30

a)

Induktionsanfang [z.z.: $a_1 \in (0,4)$]

$a_1 = 1 \in (0,4)$

Induktionsvoraussetzung

$a_n \in (0,4)$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$
[z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$]

$$a_{n+1} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{a_n}_{\text{IV } \in(0,4)}}^{\in(0,2)} + \overbrace{\sqrt{\underbrace{a_n}_{\text{IV } \in(0,4)}}}^{\in(0,2)}}_{\in(0,4)} \in (0,4) \qquad \blacksquare$$

b)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} - a_n = -\frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} = \sqrt{a_n}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a_n} + 1\right)$$

$$= \underbrace{\overbrace{(\sqrt{a_n})}^{>0}\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{<0}\overbrace{(\sqrt{a_n} - 2)}^{<0}}_{>0}$$

Nach Aufgabe a) gilt $\sqrt{a_n} \in (0,2)$.
Somit Berechnet sich das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n$ wie folgt: "$(+) \cdot (-) \cdot (-) = (+)$"
Da die Differenz zwischen einem Folgenglied und seinem direktem Vorgänger positiv ist, ist die Folge monton wachsend.

c) Da (a_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist, ist sie nach einem Satz der Vorlesung konvergent gegen ihr Infimum.

$$a = \frac{1}{2}a + \sqrt{a} \iff 0 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{a} \qquad x := \sqrt{a}$$
$$\implies 0 = -\frac{1}{2}x^2 + x \implies x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 0}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1 \mp 1$$
$$\implies x_1 = 0 \wedge x_2 = 2 \implies a_1 = 0 \wedge a_2 = 4 \qquad a = x^2$$

Der Grenzwert ist $a = 4$.
a_1 muss größer als 0 sein ($a_n \in (0,4)$). Da (a_n) monoton wächst, müssen auch alle nachfolgenden Werte größer gleich aller vorherigen Werte sein. Somit entfernt sich die Folge mit zunehmenden n vom Nullpunkt. Der Grenzwert muss also 4 sein.

A5

a)

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \tag{1}$$

$$x^2 = \alpha x + \beta \tag{2}$$

$A(n) :=$ "Die Formel (1) gilt für n und $n-1$"

Induktionsanfang [Es ist zu zeigen, dass die Formel für $n = 0$ und $n = 1$ gilt]
Für $n = 0$:

$$a_0 \stackrel{(1)}{=} \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{1-1}{x_1 - x_2} = \frac{0}{x_1 - x_2} = 0$$

Für $n = 1$:

$$a_1 \stackrel{(1)}{=} \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{1} = 1$$

Induktionsvoraussetzung "Die Formel (1) gilt für n und $n-1$"

Induktionsschritt $(n \to n+1)$
[z.z.: $\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$]

$$a_{n+1} \overset{(1)}{=} \frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2} = \frac{x_1^{n-1}\cdot x_1^2 - x_2^{n-1}\cdot x_2^2}{x_1-x_2} \overset{(2)}{=} \frac{x_1^{n-1}\cdot(\alpha x_1+\beta) - x_2^{n-1}\cdot(\alpha x_2+\beta)}{x_1-x_2}$$
$$= \frac{x_1^{n-1}\cdot\alpha x_1 + x_1^{n-1}\cdot\beta - x_2^{n-1}\cdot\alpha x_2 - x_2^{n-1}\cdot\beta}{x_1-x_2} = \frac{x_1^{n-1}\cdot\alpha x_1 - x_2^{n-1}\cdot\alpha x_2 + \beta(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})}{x_1-x_2}$$
$$= \frac{x_1^{n-1}\cdot\alpha x_1 - x_2^{n-1}\cdot\alpha x_2}{x_1-x_2} + \beta\frac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2} = \alpha\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2} + \beta\frac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2} \overset{IV}{=} \alpha a_n + \beta a_{n-1} \qquad \blacksquare$$

b) $x^2 - \alpha x - \beta = 0 \implies x_{1/2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta}$
Ungleichung Diskriminante größer 0: $\frac{\alpha^2}{4} + \beta > 0 \implies \alpha^2 + 4\beta > 0$

(i) wenn $\alpha^2 + 4\beta < 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
Ja, unter der Voraussetzung dass die dazugehörigen x_1 und x_2 auch komplexe Zahlen sein dürfen. Die Diskriminante ist in diesem Fall negativ, weshalb es im Reellen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = \alpha x + \beta$ gibt.

(ii) wenn $\alpha^2 + 4\beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
Nein, da es für $x^2 = \alpha x + \beta$ nur eine Lösung für x gäbe, und zwar $\frac{\alpha}{2}$. Somit würde man bei der Verwendung der Formel (1) durch $x - x$ teilen, also durch 0 teilen. Dies ist offensichtlich verboten.

c)

(i) $\alpha = 1, \beta = 1$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \implies x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(ii) $\alpha = 4, \beta = 7$

$$x_{1/2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 7} \implies x_1 = 2 + \sqrt{11} \wedge x_2 = 2 - \sqrt{11}$$
$$a_n = \frac{\left(2+\sqrt{11}\right)^n - \left(2-\sqrt{11}\right)^n}{2+\sqrt{11} - 2 + \sqrt{11}} = \frac{\left(2+\sqrt{11}\right)^n - \left(2-\sqrt{11}\right)^n}{2\sqrt{11}}$$

(iii) $\alpha = 0, \beta = -1$

$$x_{1/2} = \frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - 1} \implies x_{1/2}^2 = -1 \implies x_1 = i \wedge x_2 = -i$$
$$a_n = \frac{i^n - (-i)^n}{i+i} = \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = \frac{i \cdot i^{n-1} - (-i)\cdot(-i)^{n-1}}{2i} = \frac{i(i^{n-1} + (-i)^{n-1})}{2i} = \frac{i^{n-1} + (-i)^{n-1}}{2}$$

Folgenglieder sind entweder 0, -1 oder 1 und somit reell. i^{n-1} und $(-i)^{n-1}$ ergeben für ungerade n jeweils -1 oder 1 (und somit reell). Für gerade n ergibt der eine Term $-i$ und der andere Term i, dies beides addiert ergibt dann somit 0 (ebenfalls reell).

A6

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2 - \frac{1}{n^2})}{n^3(3 + \frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(\frac{5}{n}+2)}{n(\frac{1}{n}+1)}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{5}{n}+2}{\frac{1}{n}+1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n})(\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n})}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-8n}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{1}{n}-8)}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{2+\frac{9}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-8}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{2+\frac{9}{n}}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -2\cdot\sqrt{2}
\end{aligned}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}\right)\left(n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - n^6 - n^2 - 1}{n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-1}{n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-1-\frac{1}{n^2})}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1-\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = 0 \qquad „\frac{0}{\infty}“$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3})(\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3})}{\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[2]{n^4+n^3} - \sqrt[2]{n^4-n^3})(\sqrt[2]{n^4+n^3} + \sqrt[2]{n^4-n^3})}{(\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3})(\sqrt[2]{n^4+n^3} + \sqrt[2]{n^4-n^3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{(\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3})(\sqrt[2]{n^4+n^3} + \sqrt[2]{n^4-n^3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2}{(1+1)(1+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

f)

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = -1$$