Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Schmitt, Niklas

StudOn-Kennung: ra72hyru

Blatt-Nummer: 06

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17, ______

19/20*30=28.5

Niklas Schmitt – ra72hyru

A15)

a) Kantenlänge: $\frac{1}{k}$ Meter, unendlich viele Würfel

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ [Meter], Reihe divergent, der Turm wird also unendlich hoch

b) Eine Seitenfläche von Würfel W_k ergibt sich aus $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$ [m^2] (Länge · Breite)

Boden und Decke müssen nicht gestrichen werden, da sie verdeckt sind

$\Rightarrow$ 4 Seitenflächen pro Würfel: $4 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$ [m^2] für W_k

die würfel werden konst

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ konvergent, also reicht endlich viel Farbe

$\left(4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \underline{\underline{4 \cdot \frac{\pi^2}{6}}}\right)$

c) ~~Für~~ Das Volumen des Würfels W_k ergibt sich aus $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$ [m^3]

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ auch konvergent $\rightarrow$ es reicht endlich viel Beton

d) Dass Fläche divergent ist und somit unendlich Farbe benötigt wird: $A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ [m^2]

$\Rightarrow$ Also Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{k}}$ [m], da $\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k}$

Volumen: $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}}}$ (nach Hinweis ist die Reihe konvergent, also reicht endlich viel Beton.) $(\alpha = \frac{1}{2} > 0)$

Niklas Schmitt – ra72hyru

A15)

a) i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$

$f(0) = 0^3 + \sin 0 - \cos 0 = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = (\frac{\pi}{2})^3 + 1 - 0 \approx 4{,}88 > 0$

f ist stetig (Verknüpfung stetiger Funktionen)

$\Rightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle (Nullstellensatz von Bolzano)

x^3 monoton ~~steigend~~ wachsen für Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$

$+\sin x - \cos x \geq -1$ für Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$, monoton wachsend

$\Rightarrow$ also wird ~~im~~ im Intervall immer mehr addiert (weniger subtrahiert) auf das ~~st~~ monoton steigende x^3

~~$\Rightarrow$ f gen~~ f hat genau eine Nullstelle

ii) $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$

f stetig (Verknüpfung stetiger Funktionen)

$f(0) = e^0 \cdot \cos(\pi \cdot 0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

f hat mind. eine Nst.

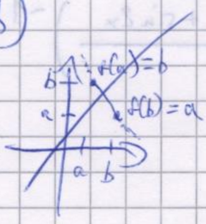
e^{-x} streng monoton fallend, $\cos(\pi x)$ streng monoton fallend für Intervall $(0, \frac{1}{2})$

beides positiv für Intervall $(0, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle

Niklas Schmitt - ra72hyru

b)



Hilfsfunktion: $h(x) = f(x) - x$

$h(x) = 0 \rightarrow f(x) = x \rightarrow$ Nullstelle von $h(x)$ ist Fixpunkt

$h(a) = f(a) - a = b - a > 0$, da $b > a$

$h(b) = f(b) - b = a - b < 0$, da $b > a$

$\Rightarrow$ h hat Nullstelle, die s.o. bei $f(x) = x$ ist, also gibt es ein $f(x_*) = x_*$ □

c) Satz vom Maximum (Minimum): Stetige Funktionen auf kompakten Funktionen haben ein Maximum (Minimum); D_f ist abgeschlossen und beschränkt $\rightarrow$ kompakt; f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig

A17) ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin nx}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{x} =$

warum nicht gleich mit 2 erweitern?

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{x} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} \cdot \frac{nx}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot 2 \cdot \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n = \underline{\underline{n!}}$ ✓

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2 \cdot \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2 \cdot 1^{-1} = \underline{\underline{2}}$ ✓ ✓

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{5x}{6x} = \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot \left(\lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{6} =$ ✓

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$ ✓

Niklas Schmitt - ra72hyra

iv) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}\right)^{-1} =$

$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x}\cdot(-1) + \frac{\sin 2x}{x}\right)^{-1} =$

einfach gleich mit 2 erweitern

$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{x}\right)^{-1} = \left(\lim_{\substack{\tilde{x}\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cos\tilde{x}-1}{\tilde{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sin y}{y}\cdot 2\right)^{-1}$

mit $\frac{1}{2}$ erweitern

$\to 1$ Siehe i)

$= \left(0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 2\right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{x}\sin x\cos x$

$\tilde{x} := \frac{\pi}{x}\sin x\cos x$

$= \pi\frac{\sin x}{x}\cos x \xrightarrow{x\to 0} \pi$

~~$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)}{\frac{\pi}{x}\sin x\cos x}$~~

$-\frac{1}{\tilde{x}}+\frac{1}{\tilde{x}}$

~~$\lim_{\tilde{x}\to\pi}\frac{\cos\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{x}} = \lim_{\tilde{x}\to\pi}\frac{\cos\tilde{x}-1}{\tilde{x}}+\frac{1}{\tilde{x}}$~~

~~$= \lim_{\tilde{x}\to\pi}\frac{\cos\tilde{x}}{\tilde{x}}\cdot\tilde{x} - \frac{1}{\tilde{x}}+\frac{1}{\tilde{x}} = \lim_{x\to\pi}\tilde{x}\cdot\frac{\cos\tilde{x}-1}{\tilde{x}}+\frac{1}{\tilde{x}}$~~

v) $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) = \lim_{\tilde{x}\to\pi}\cos\tilde{x} = -1$

$\tilde{x} := \frac{\pi}{x}\sin x\cos x$

$= \pi\cdot\frac{\sin x}{x}\cos x \xrightarrow{x\to 0} \pi$

da braucht man keinen limes zu pi zu machen:cosinus ist stetig, also kann man den lim