Sitzung 22

Kenngrößen (5)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 13. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Fragen

Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Bedeutung und die Definitionen der wichtigsten Kenngrößen von Verteilungen.
2. Sie können die Definitionen auf beliebige Verteilungen anwenden.
3. Sie kennen den Unterschied zwischen Momenten und Zentralen Momenten.
4. Sie wissen, was die momenterzeugende Funktion ist.
5. Sie kennen den Zusammenhang zwischen st. Unabhängigkeit und Kovarianz und können beides analysieren.
6. Sie können die mehrdimensionale Normalverteilung und deren besonderen Eigenschaften. Sie können normalverteilte Zufallsvektoren transformieren.

Aufgabe 2014

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4, wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \dots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \cdots + X_{T_N}$$

gebildet.

1. (3 Punkte) Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
2. (1 Punkt) Berechnen Sie Z für die Realisierung
$$(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6).$$
3. (6 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z.

Definition 7.30 (Zufällige Summen)

Es sei Y eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von Y. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

Satz 7.31

Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\mathrm{E}\, Y < \infty$ und $\mathrm{E}\, X_i < \infty$,

$$\mathrm{E}\, S = \mathrm{E}\, Y \cdot \mathrm{E}\, X_1, \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}\, S = \mathrm{E}\, Y \cdot \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, Y \cdot (\mathrm{E}\, X_1)^2\,. \tag{2}$$

Definition 7.30 (Zufällige Summen)

Es sei Y eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von Y. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

Satz 7.31

Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\mathrm{E}\,Y < \infty$ und $\mathrm{E}\,X_i < \infty$,

$$\mathrm{E}\,S = \mathrm{E}\,Y \cdot \mathrm{E}\,X_1, \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}\,S = \mathrm{E}\,Y \cdot \mathrm{Var}\,X_1 + \mathrm{Var}\,Y \cdot (\mathrm{E}\,X_1)^2\,. \tag{2}$$

Bedingte Verteilung $P(X \in B|Y = y)$

Die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B|Y = y) = \frac{P[(X \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}. \tag{3}$$

Definition 7.32

Der Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = \int x P^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|y)$$

der bedingten Verteilung von X unter Y bzw. die Zufallsvariable $\mathrm{E}(X|Y)$

$$\omega \longmapsto \int x P^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|Y(\omega))$$

heißen der ***bedingte Erwartungswert*** von X unter der Bedingung Y.

Definition 7.33

Sind $S : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \Omega''$ diskrete Zufallsvariablen und existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}\, S$, dann heißt

$$\mathrm{E}\,(S|Y = n) := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P\,(S = k|Y = n) \tag{4}$$

der **bedingte Erwartungswert von S unter $Y = n$.** Es gilt die Formel vom **iterierten Erwartungswert**

$$\mathrm{E}\, S = \sum_{n \in \Omega''} P(Y = n)\, \mathrm{E}\,(S|Y = n)\,. \tag{5}$$

Definition 7.34

(a) Y_n **konvergiert fast sicher** gegen Y, kurz $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$ wenn

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}\right) = 1,$$

d.h., wenn höchstens innerhalb einer Ausnahmemenge $N \in \mathcal{A}$ mit $P(N) = 0$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)$ nicht existiert oder $\neq Y(\omega)$ ist.

(b) Y_n **konvergiert stochastisch** gegen Y, kurz $Y \xrightarrow{\text{st}} Y$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n - Y| \geqslant \epsilon\right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

d.h. für festes $\epsilon > 0$ und für jedes n darf es eine Ausnahmemenge M_n geben, auf der $|Y_n - Y| \geqslant \epsilon$ gilt, aber mit $P\left(M_n\right) \to 0$ für große n.

Definition 7.34

(c) Y_n **konvergiert im r-ten Mittel** gegen Y, kurz $\left(Y_n \xrightarrow{(r)} Y\right)$, mit $1 \leqslant r < \infty$, wenn

$$\mathrm{E}\,|Y_n - Y|^r \to 0.$$

Für $r = 1$ sagt man **konvergiert im Mittel**, für $r = 2$ **im quadratischen Mittel**.

(d) Y_n **konvergiert nach Verteilung** gegen Y, kurz $Y_n \xrightarrow{\mathrm{V}} Y$, wenn

$$F^{Y_n}(x) \to F^{Y}(x) \text{ für alle } x \text{ mit „} F^Y \text{ stetig im Punkt } x\text{“.}$$

Satz 7.35 (Ungleichung von Chebychew-Markow)

Für jede ZV $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *und* $r \geqslant 1$, $\epsilon > 0$ *gilt:*

$$P(|Y| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^r} \operatorname{E}|Y|^r.$$

Existiert $\operatorname{E} Y$, *so gilt für* $r = 2$

$$P(|Y - \operatorname{E} Y| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2} \operatorname{Var} Y.$$

Definition 7.36

Für ZV $X_1, X_2, \dots$ mit $\operatorname{E} X_i < \infty$ gilt das **starke** bzw. **schwache Gesetz der großen Zahlen**, wenn

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \operatorname{E} X_i)$$

fast sicher is

fast sicher bzw. *stochastisch* gegen 0 konvergiert.
Wenn die X_i identisch verteilt sind, heißt das

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{f.s.}} \operatorname{E} X_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{st}} \operatorname{E} X_1.$$

Satz 7.37

Die ZV $X_1, X_2, \ldots$ seien identisch verteilt mit $\operatorname{Var} X_i < \infty$.

(a) *Sind die X_i auch stochastisch unabhängig, dann gilt das starke Gesetz der großen Zahlen.*

(b) *Sind die X_i nur paarweise unkorelliert, d.h.* $\operatorname{Kov}(X_i, X_j) = 0 \; \forall i \neq j$, *dann gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen.*

Satz 7.38 (Zentraler Grenzwertsatz)

Sind die ZV $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $\operatorname{Str} X_i < \infty$, *dann konvergieren die „standardisierten" Teilsummen nach Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte ZV Y, d.h.*

$$\frac{S_n - \operatorname{E} S_n}{\operatorname{Str} S_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \operatorname{E} X_1}{\sqrt{n} \operatorname{Str} X_1} \xrightarrow{V} Y$$

mit $P^Y = \mathcal{N}(0,1)$.

E(Sum X_i) = Sum EX_i = EX_1 = nX_1

Var(S_n) = Var(sum X_i) =Sum Var(X_i) = nVar(X_1)

Beispiel

Bei der Beladung eines LKWs mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gesamtgewicht der Ladung höchstens 7,8t beträgt. Das Gewicht (in kg) der einzelnen Kisten ist stochastisch unabhängig $R_{[105,135]}$-verteilt.

1. Berechnen Sie das Durchschnittsgewicht und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
2. Berechnen Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von 64 Kisten zwischen 7,56t und 7,8t liegt.
3. Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass das zulässige Gesamtgewicht des LKWs eingehalten wird, wenn 64 Kisten aufgeladen werden.

Bemerkung

Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt für eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ identisch $B(1,p)$-verteilter ZV

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant y\right) = \Phi(y).$$

Daraus werden die Formeln für eine $B(n,p)$-verteilte ZV Y für großes n abgeleitet:

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Bessere Werte werden für ganzzahlige a und b erzielt, wenn die Schranken durch $a-0,5$ und $b+0,5$ ersetzt werden

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Dieses Vorgehen heißt **Stetigkeitskorrektur**.

Beispielaufgaben

Bei einer Fluggesellschaft weiß mann, dass im Mittel 3% derjenigen Personen, die sich einen Platz für einen Flug auf einer bestimmten Route reservieren lassen, zum Abflug nicht erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 300-sitzigen Jet 308 Platzreservierungen vorgenommen.

spez. für Binomialvert.

a) Berechnen Sie mittels des Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Personen, für die eine Platz reserviert wurde, auch einen Platz erhalten.
Dabei nehme man an, dass die Entscheidung darüber, ob die einzelnen Reservierungen wahrgenommen werden, unabhängig zustande kommen.

b) Wieviele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestes 90% beträgt. Geben Sie die Antwort mit Hilfe einer Näherungsrechnung.

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 6.8-6.9
- Skript Kapitel 7.9- 7.10

Fragen

1. Recherchieren Sie nach Anwendungen für den Satz von Chebychev-Markov.
2. Machen Sie sich den Nutzen der Aussage des zentralen Grenzwertsatzes an den Beispielaufgaben klar(er).
3. Wiederholung: Wiederholen Sie die Matrix-Vektor-Multiplikation.
4. Wiederholung: Wiederholen Sie die Berechnung des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(\lambda)$ zu einem gegebenen Eigenwert λ.
   Wie können Sie daraus schließen, ob λ überhaupt ein Eigenvektor ist?

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:**
`https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und
`https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)