Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Pleasance Benno

StudOn-Kennung: gi86jyhy

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A6, ____, ____

14.5/18 *18=14.5

A4)

a) Anfang $(n=1)$: $a_1 = 1 \in (0,4)$

Schritt $(n \to n+1)$: Es gelte $a_n \in (0,4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (IV) z.z. ist

$a_{n+1} \in (0,4)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$ $\quad a_n \in (0,4) \to \frac{1}{2} a_n \in (0,2) \wedge \sqrt{a_n} \in (0,2)$

$\to \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

b) z.z. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\quad \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq 1$ (weil $\sqrt{a_n} \leq 2$)

bzw sqrt(a_n) in sqrt(4)=2

$\Rightarrow$ monoton wachsend

c) Laut a) sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, laut b) monoton wachsend, also $\Rightarrow$ konvergiert gegen ihr Supremum

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}\right)$$

$$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$$

Das kann man nicht sofort sehen.Außerdem gibt es no

$$\frac{1}{2} a = \sqrt{a}$$

$$a \in (0,4) \Rightarrow a = 4$$

A6)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n\cdot(3n^2+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot(2-\frac{1}{n^2})}{n^3\cdot(3+\frac{2}{n^3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{0}}{3+\underbrace{\frac{2}{n^3}}_{0}} = \underline{\frac{2}{3}}$ ✓ ✓

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot(\overbrace{\frac{5}{n}}^{0}+2)}{n\cdot(\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}+1)}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{1}\right)^3 = \underline{8}$ ✓ ✓

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2-9n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot(-8+\frac{1}{n})}{n\cdot\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\cdot\sqrt{2-\frac{9}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8+\overbrace{\frac{1}{n}}^{0}}{\sqrt{2+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}_{0}}+\sqrt{2-\underbrace{\frac{9}{n}}_{0}}} = \underline{\cancel{-4\sqrt{2}}}$ ✓

-2sqrt(2)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3-\sqrt{n^6+n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(-1-\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{1}} = 0\cdot(-\frac{1}{2}) = \underline{0}$ ✓ ✓

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3})\cdot(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n\cdot(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})\cdot n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$

$= \frac{2}{(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1})\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}$ ✓ ✓

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(n+1)-n^2\cdot(n+2)}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\cdot(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = -1$ ✓ ✓