Sitzung 12

Bildmodelle und Zufallsvariablen (2)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 5. Juni 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

Bildmodelle und Zufallsvariablen

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Nutzen des Begriffs Zufallsvariable.
2. Sie lernen verschiedenen Verteilungen kennen und wissen, welche Situationen diese Verteilungen angewendet werden können.
3. Sie können erklären, wie die Verteilungen in den Bildmodellen entstehen.
4. Sie kennen die Möglichkeiten, die Binomialverteilung zu approximieren.
5. Sie können mit den Begriffen gemeinsame Verteilung und Randverteilung arbeiten und den Zusammenhang zur stochastischen Unabhängigkeit herstellen.
6. Sie wissen, wie Summen von Zufallsvariablen gebildet werden und können die entstehenden Verteilungen mit Hilfe der Faltung berechnen.

Selbststudium

Weiterführende Fragen

1. Wie wird ein Bildmodell unter einer Zufallsvariablen X definiert bzw. konstruiert?

Definition 6.5

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, Ω' eine (nicht leere) Menge, $\mathcal{A}'$ ein Ereignissystem über Ω' und $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable, dann ist die Zuordnung

$$A' \mapsto P^X(A') := P(X^{-1}(A')) = P(X \in A') \tag{1}$$

mit $A' \in \mathcal{A}'$ ein W-Maß über $(\Omega', \mathcal{A}')$.
P^X heißt **Bildmaß von** P **unter X** oder **Verteilung von X** (bzgl. P).
$\left(\Omega', \mathcal{A}', P^X\right)$ ist das **Bildmodell** von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unter X.

Selbststudium

Weiterführende Fragen

2. Unter Welchen Voraussetzungen ist eine Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung nur sinnvoll?

https://www.studon.fau.de/pg730792_2897784.html

Poisson-Approximation der Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung kann durch die Poission-Verteilung approximiert werden kann. Es gilt aber nur für $n \to \infty$ und p sehr klein. Dabei wird dann $\lambda = np$ gesetzt.

Bemerkung

Die Verteilungsfunktionen lauten:

$$b(n, p_n; k) = \frac{(n)_k}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

und

$$\pi(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Selbststudium

Weiterführende Fragen

1. Was ist die Aussage vom **Zentralen Grenzwertsatz**?

Die Normal-Approximation der Binomial-Verteilung

Satz 6.9 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Summe vieler kleiner und voneinander unabhängiger zufälliger Ereignisse verhält sich näherungsweise – und für wachsende Anzahl der Summanden mit zunehmender Genauigkeit – wie eine Normalverteilung.

Satz 6.10

Ist F^{S_n} die Verteilungsfunktion der Binomial(n, p)-Verteilung, und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, dann gilt

$$F^{S_n}(x) \approx \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

wobei $a = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ der approximierenden Normalverteilung ist.

Visualisierung

`https://www.studon.fau.de/pg636995_2897784.html`

Selbststudium

Weiterführende Fragen

1. Wie kann der Name „Negative Binomialverteilung“ begründet werden?

Definition 6.13 (Negative Binomialverteilung)

Die **negative Binomialverteilung** $\mathrm{Nb}^{+}(r, p)$ die die Anzahl W_r der Versuche bis zum r-ten Erfolg beschreibt, besitzt die Z-Dichte

$$f^{W_r}(k) = \mathrm{nb}^{+}(r, p; k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1, \ldots. \tag{3}$$

Werden nur die Misserfolge gezählt, dann ergibt sich $\mathrm{Nb}^{0}(r, p)$ mit der Z-Dichte

$$f^{W_r - t}(k) = \mathrm{nb}^{0}(r, p; k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Satz 6.14

Es sei P^X eine Verteilung über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und die Zufallsvariable $Y = a + bX$ eine lineare Funktion von X mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, hier $b > 0$.

1. *Besitzt P^X die VF F^X, dann besitzt P^Y die Verteilungsfunktion*
$$F^Y(y) = F^X\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$
2. *Besitzt P^X die R-Dichte f^X, dann besitzt P^Y die R-Dichte*
$$f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$
3. *Ist P^X die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ mit VF Φ und R-Dichte ϕ, dann hat $Y = a + bX$ die VF*
$$F^Y(y) = \Phi\left(\frac{y-a}{b}\right)$$
und die R-Dichte
$$f^Y(y) = \frac{1}{b}\phi\left(\frac{y-a}{b}\right).$$
Y entspricht der Normalverteilung $\mathcal{N}(a, b^2)$.

Visualisierung

https://www.studon.fau.de/pg730938_2897784.html

Folgerung 6.15

1. Ist X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ und der VF F^X, dann besitzt $Y = X^2$ die Verteilungsfunktion

$$F^Y(y) = F^{X^2}(y) = \left(F^X(\sqrt{y}) - F^X\left((-\sqrt{y})-\right)\right) 1_{[0,\infty)}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

2. Besitzt X eine R-Dichte f^X, dann hat $Y = X^2$ die R-Dichte

$$f^Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f^X(-\sqrt{y}) + f^X(\sqrt{y})\right) 1_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Satz 6.16

Ist P^X die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$, dann besitzt die Verteilung P^{X^2} die VF

$$F^{X^2}(y) = [2\Phi(\sqrt{y}) - 1]\, 1_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

und die R-Dichte

$$f^{X^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\phi(\sqrt{y}) 1_{[0,\infty)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}} 1_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

*Die Verteilung P^{X^2} heißt **Chi(1)-Quadrat-Verteilung**, kurz χ_1^2, und ist eine spezielle Gamma-Verteilung $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.*

Transformationen von ZV ($Y = g(X)$)

Besitzt die ZV X eine stetige Verteilung über $\mathbb{R}^2$ mit R-Dichte f^X und ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt für die VF F^Y der ZV $Y = g(X)$

$$F^Y(y) = P(Y \leqslant y) = \int_{B_y} f^X(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

mit $B_y := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) \leqslant y\right\}$.
Dies lässt sich auf mehr als zwei Dimensionen übertragen.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)