Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

8. Mai 2020

Entscheidende bei σ-Algebras Dies für mengenalgebras algemein $\Omega \in \mathscr{A}$ $A \in \mathscr{A} \implies C_\Omega(A) \in \mathscr{A}$ $A_i \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ speziell für sigma Mengenalgebras

$A_i \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$

$\Omega = \{1,2,3\}, \Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$

Welche menge ist mit $X(\omega) = 2\omega$ beschreibbar

$\{x \in A'\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$

z.B. $X \in \{2,4\} = \{1,2\} \subset \Omega$ weil 2*1=2, 2*2=4

und $X \in \{6\} = \{3\} \subset \Omega$ weil 3*2=6

aber nicht $X \in \{5\} = \emptyset$ weil $\nexists \omega \in \Omega : 2\omega = 5$.

1 Maß und Messräume

Das paar $(\Omega, \mathscr{A})$ heißt Messraum.

Maßraum ist $(\Omega, \mathcal{A}, P(x))$

Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$

empirisches Gesetz de großen Zahlen:

$h_n(x) = \frac{|\{x \in \mathscr{A}\}|}{n}$

für $n \to \infty$ gegen Grenzwert.

Annahme ("Heile Welt")

$A \cap B = \emptyset$ mit $A, B \in \mathscr{A}$ $h_n(A+B) = h_n(A) + h_n(B)$ (Das plus ist die Vereinigung zweier **DISJUNKTER** mengen)

$h_n(A \cup B) \leq h_n(A) + h_n(B)$ (sonst)

$0 \leq h_n(A) \leq 1$

$h_n(\emptyset) = 0$

$h_n(\Omega) = 1$

Ein maß auf $\mathscr{A}$ ist eine Abb $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- $\mu(A) \geq 0$
- $\mu(\emptyset) = 0$

- $\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$ (also disjunkte endliche Vereinigung)

$P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ heißt wahrscheinlichkeitsmaß (W-maß)

- $P(A) \geq 0 \forall a \in \mathscr{A}$ (nichtnegativität)
- $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
- $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additiv)

Einpunktverteilung $\begin{cases} 1 & wenn\ x = A \\ 0 & sonst \end{cases}$

- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

oder $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ (ähnlich der definition der Relativen häufigkeit)

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)$$

Also alle “Branches” des Baumes zusammenaddieren!

$P(R) = P(R|W) \cdot P(w) + P(R|M)P(M) = P(R|W) \cdot P(w) + P(R|M)(1 - P(W))$

Umstellen.

2 REGEL VON BAYES

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

Stochastische Unabhängigkeit prior ist egal:

$P(A|B) = P(A)$.

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig bzgl P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

oder

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Weiterführende Aufgaben:

Beispiel für einen Raum, in dem die Forderung $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ notwendig ist.

$(\Omega, \mathbb{B}, P)$-Maßraum.

z.B. Wahrscheinlichkeit eine prim zahl aus den natürlichen Zahlen zu ziehen.

(Summe ist vereinigung disjunkter Mengen, also $A \cap B = \emptyset \implies A \cup B = A + B$)

Wahrscheinlichkeitsraum für Einpunktverteilung anhand Beispiel.

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dessen maß P ein wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Ω ist eine nichtleere Ergebnismenge, Elemente heißen Elementarereignisse

$\mathcal{A}$ ist ein σ-Algebra über Ω, elemente heißten Ereignisse

$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ein beispiel für eine Einpunktverteilung wäre ein Würfel.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to P(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & sonst \end{cases}$ hier $P(A)$ "almost surely"

Aus einem Deck mit 52 Pik-Assen ein Pik-Ass ziehen.

Oder die Wahrscheinlichkeit die Exakte mitte einer Zielscheibe nicht zu treffen.

(Das Ziel ist (0,0))

Machen Sie sich die Rechenregeln 1-8 für Wahrscheinlichkeitsmaße anhand eines Würfels deutlich.