Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Altmann, Johannes

StudOn-Kennung: ge67qude

Blatt-Nummer: 03

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

07, 08, 09, ______

9/10 * 30 = 27

A 7) a)

i) $a_n = \dfrac{5 + (-1)^n + \frac{1}{n} \cdot \sin(n)}{n^2}$

$$\frac{3}{n^2} \leq a_n \leq \frac{7}{n^2}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n^2} = 0 \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{7}{n^2} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5 \cdot \sin(2n) - 2 \cdot \sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$b_n = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{5 \cdot \sin(2n) - 2 \cdot \sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5 \cdot \sin(2n) - 2 \cdot \sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n} \neq \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

b) i) HP bei 0 und (uneigentlichen) bei $+\infty$

Limes Superior: $+\infty$

Limes Inferior: 0

ii) Unendlich viele HP $\in [-\sqrt{2} ; +\sqrt{2}]$

Limes Superior: $+\sqrt{2}$

Limes Inferior: $-\sqrt{2}$

iii) Uneigentlicher HP bei $+\infty$

Limes Superior / Inferior bei $+\infty$

iv) Für $q = 1$ uneigentlicher HP bei $+\infty$

Lim sup $= +\infty$ Lim inf $= +\infty$

Für $q \in (-1;1)$ HP bei 0 $\text{Lim sup} = 0$
$\text{Lim inf} = 0$

Für $q = -1$ HP bei 1 und -1 $\text{Lim sup} = 1$; $\text{Lim inf} = -1$

Für $q < -1$ uneigentliche HP bei $-\infty$ und $+\infty$

$\text{Lim sup} = \infty$, $\text{Lim inf} = -\infty$

A8) i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$ $\qquad \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2+k} = 1$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} \to$ Divergent

ii) $$\sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \sqrt{\frac{\cancel{k^2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)}{\cancel{k^2}\cdot\left(3+\frac{2}{k}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}{3+\frac{2}{k}}} = 0$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent

c) = Nullfolge

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{\sin k}{k^k}} = \frac{\overbrace{\sqrt[k]{\sin k}}^{\text{bleibt endlich}}}{\underbrace{k}_{\to\infty}} = 0$$

Wichtig: Wurzelkriterium und Quotientekrit

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent

d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$$

$$= \frac{3}{2^{k+1}\cdot(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} \cdot \frac{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)}{\sqrt{k}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{k}}\right)}$$

$$\lim_{k \to \infty} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$ $\Rightarrow$ Reihe konvergent

A 09)

I) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\qquad \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{4k^2}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{4k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ ist Minorante : Reihe divergent

II) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\qquad \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2}{3k^2} = \frac{4}{3}$

=> Reihe divergent => a_n keine Nullfolge

III) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ Minorante : Reihe divergent

b) Jede Beschränkte Folge hat mindestens einen HP

1) $\sin(n) \in [-1;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ => beschränkt -> besitzt HP

2) $b_n = \sin(n^2) \in [-1,1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ beschränkt -> besitzt HP

3) $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ => c_n hat HP

II) für 3.) HP bei 0