Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

1. Juli 2020

$$\int_{\mathbb{R}^2} Cxy1_{(0,x)}(y)1_{(0,2)}(x)d(x,y) = 1$$

$$\int_0^2 \int_0^x Cxy\ dydx = 1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 Cx^3\ dx = 1$$

$$\frac{1}{2\cdot 4}[Cx^4]_0^2 = 1$$

$$\frac{1}{2\cdot 4}[C2^4] = 1$$

$$\frac{16}{2\cdot 4}C = 1$$

$$2C = 1$$

$$C = \frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}xy1_{(0,x)}(y)1_{(0,2)}(x)dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}xy1_{(0,2)}(x)dy \\ &= [\frac{1}{2\cdot 2}xy^2 1_{(0,2)}(x)]_0^x \\ &= \frac{1}{2\cdot 2}xx^2 1_{(0,2)}(x) \\ &= \frac{1}{2\cdot 2}x^3 1_{(0,2)}(x) \end{aligned}$$

Bei Y muss aufgepasst werden, da (abhängig vom y) nicht alle x Werte einen Wert ungleich null haben. Der beginn der Zeit, an der x-Werte relevant werden, ist der punkt, an dem der y wert für x liegt liegt: Es gilt $0 < y \leq x < 2 \implies Cxy$ (da für $y > x$ der wert null wäre), Wenn man nur den rechten Constraint betrachtet, sieht man $y \leq x < 2$, das sind die grenzen

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}xy1_{(0,x)}(y)1_{(0,2)}(x)dx$$

$$= \int_y^2 \frac{1}{2} xy 1_{(0,x)}(y) dx$$

$$= [\frac{1}{2 \cdot 2} x^2 y 1_{(0,x)}(y)]_y^2$$

$$= 1_{(0,2)}(y)[\frac{1}{2 \cdot 2} 2^2 y - \frac{1}{2 \cdot 2} y^3]$$

c)

$$P(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{2} xy \; dydx$$

$$P(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 [\frac{1}{2 \cdot 2} xy^2]_0^x \; dx$$

$$P(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 [\frac{1}{2 \cdot 2} xx^2] \; dx$$

$$P(X < 1, Y < 1) = [\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} x^4]_0^1$$

$$P(X < 1, Y < 1) = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1, Y < 1) = \int_1^1 \int_0^1 \frac{1}{2} xy \; dydx = 0$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^1 \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{2} xy 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,2)}(x) \; dydx$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^x xy \; dydx$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^1 [xy^2]_{\frac{1}{2}}^x dx$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^1 [xx^2 - x(\frac{1}{2})^2] dx$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 2} [\frac{1}{4} x^4 - x^2 \frac{1}{2^3}]_0^1$$

$$P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2 \cdot 2} (\frac{1}{4} 1^4 - 1^2 \frac{1}{2^3}) = \frac{1}{32}$$

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{2 \cdot 2} x^3 1_{(0,2)}(x) = \int_0^1 \frac{1}{2 \cdot 2} x^3 = [\frac{x^4}{4^2}]_0^1 = \frac{1}{16}$$