Vorlesung 6

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

11. Mai 2020

1 Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion

Ziel $A \in \mathcal{A} : P(A) =?$

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion.

Skalieren eines histograms auf relative häufigkeiten: $\sum\limits_{k=0}^{n} h_n(k) = 1$

$\Omega = \{1, \ldots, n\}$ $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$ Ω sei eine abzählbare Ergebnismenge und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

1. Ist P ein W-Maß über $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f(\omega) = P(\{\omega\})$

$$f(\omega) \geq 0, \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega),\ (A \in \mathcal{A})$$

Jede Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den beiden Eigneschaften ist ein W-Maß auf P mit eigenschaft

$$P(\{\omega\}) = f(\omega)$$

die Abbildung f heißt Zähldichte (Z-Dichte) was ist mit kontinuirlichen Verteilung über z.B. $\mathbb{N}$?

$f(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$

$P(\Omega) = P(\mathbb{N}) = P(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{k\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\{k\})$

Ein Beispiel wäre $f(k) = cq^k$ mit $q \in (0, 1)$, $c \in \mathbb{R}$

i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$ ii) nichtnegativität $P(\Omega) = 1$ normiertheit iii) sigma-additivität

Binomialverteilung

Sei $p + q = 1, p, q \in \mathbb{R}$ und $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$

$$f(k) = b(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

wobei der graph über k läuft und n/p nur parameter sind.

Beweis:

$P(\{k\}) \geq 0$ $P(\Omega) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$

additivität folgt aus der Verlauf über $\mathbb{R}$

$A \to h_n(A) = \frac{1}{n}$Anzahl x mit$x \in A$

Zähldichte der **empirische Verteilung** von x

$$f_n^x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i}(x) \ x \in \Omega$$

$\to$ diskretes Rieman-Integral.

Stetige Dicht:

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x. f(x) \geq 0 \text{ und } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.

Jeder R-Dichte über $\mathbb{R}$ definiert eindeutig ein W-Maß p über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P((a,b]) = P([a,b]) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

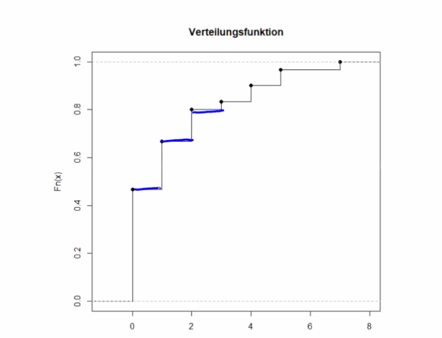
mit $a \leq b$ und $P(\{\omega\}) = 0$

Fortsetzungssatz:

Ist P auf einem geeigneten erzeuger ε von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf ε nicht-negativ, sigma-additiv und normiert, kann man sie eindeutig auf P von $\mathcal{A}$ fortsetzen.

Empirische Verteilungsfunktion

$\hat{F}_n^x := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty)}(x), \ x \in \mathbb{R}$



Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion muss nicht stetig sein $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (b-1) & x \leq b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$

Diese kann stetig gemacht werden, indem man den integral der Riemann-Dichte integriert:

$$P([a,b]) = \int_b^a f(t)dt$$

also ist

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt$$

Ω-abzählbar	Ω-kont
$P(\{\omega\}) = f(\omega)$ $P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega)$ Z-dichte	$f(x) \geq 0,\ \int^{f} d\tau = 1$ $P((a,b]) = \int_a^b f d\tau$ R-dichte

Ist F die VF (verteilungsfunktion) eines W-Maßes P über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

- F ist isoton, d.h. monoton nicht fallend (entweder steigend, oder konstant)
- F ist "normiert", d.h. die grenzwerte sind 0 und ∞
- F ist rechtsseitig stetig
- F besitzt einen linksseitigen Grenzwert $F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P((-\infty, x))$
- Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt: $P(\{x\}) = F(x) - F(x-)$