Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Bacanlı, Defne Su

StudOn-Kennung: ys74ynim

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ______

(8.5+9)/21 * 30 = 25

$\boxed{A4)}$

a) rekursiv definierte Folge,

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + \sqrt{a_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

I.A.: $(n=1)$: $a_1 = 1 \in (0,4)$

I.S.: $(n \to n+1)$:

I.V.: Es gilt $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$

$$a_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overbrace{a_n}^{\in (0,4)}}_{\in (0,2)} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\in (0,2)}$$

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n =$

$$= \overbrace{-\frac{1}{2} a_n}^{\in [-2,0]} + \overbrace{\sqrt{a_n}}^{\in [0,2]} \geq 0$$

$\Rightarrow$ Folge ist monoton steigend

c) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reele Folge ist (in $\mathbb{R}$) konvergent gg. ihr Supremum $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$\lim a_n = a$ existiert

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + \sqrt{a_n} \quad | \lim_{n\to\infty}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \cdot a + \sqrt{a} \quad | - \frac{1}{2} a$$

$$\frac{1}{2} a = \sqrt{a} \quad | \; (\ldots)^2$$

$$\frac{1}{4} a^2 = a \quad | - a$$

$$\frac{1}{4} a^2 - a = 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0}}{2 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1 \pm 1}{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 4$$

$\Rightarrow a \in \{0, 4\}$; $a = 4$; $a_1 = 1$, Die Folge ist monoton steigend ist

A5)

a) $a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x^2 = \alpha x + \beta$$

I.A.: $(n=1)$: $\frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = 0 = a_0$

$$\frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1 = a_1$$

I.S.: $(n \to n+1)$

I.V.: Es gilt $\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

sowie für $n-1$

Schöner gehts mit: "Es gilt für alle k 0<=k<=

2.2. $\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ gilt für $n+1$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$$
$$= \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$
$$= \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n - \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$$
$$= (\alpha x_1 + \beta) \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} \cdot (\alpha x_2 + \beta) \cdot \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$
$$= x_1^2 \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - x_2^2 \cdot \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$
$$= \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

b) (i) nein

x^2 = ax+b ==> 0=-x^2+ax+bAlso diskriminante D = a^2-4*(-1)*b = a^2+4

(ii) nein

begründung

c) (i) $\alpha = 1$

$\beta = 1$

$x^2 = 1x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\rightarrow \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

du kannst das 1/2 nicht einfach aus dem

$$\Rightarrow a_n = \frac{\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2}}{\frac{1+\sqrt{5} - 1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)}{\sqrt{5}}$$

(ii) $\alpha = 4$

$\beta = 7$

$x^2 = 4x + 7$

$x_2 - 4x - 7 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

$\rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{11}$

$x_2 = 2 - \sqrt{11}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2 + \sqrt{11} - 2 + \sqrt{11}}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2\sqrt{11}}$$

(iii) $\alpha = 0$ $\qquad x_{1\,2} = i$

$\beta = -1$

$x_2 = 0 \cdot x - 1$

$x_2 - 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = \frac{i^n \left(1 - (1)^n\right)}{2i}$$

Es war noch gefragt, ob alle Folg

A6)

a) $$\lim_n \frac{2n^3 - n}{n(3n^3+2)} = \lim_n \frac{n^3\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3 - \frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_n \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

b) $$\lim_n \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim_n \frac{(5+2n)^3}{(1+n)^3} =$$

$$= \lim_n \frac{8n^3 + 60n^2 + 150n + 125}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}$$

$$= \lim_n \frac{n^3\left(8 + \frac{60}{n} + \frac{150}{n^2} + \frac{125}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_n \frac{8}{1} = 8$$

c) $$\lim_{n} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{(2n^2+n+1)-(2n^2+9n)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{n\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} =$$

$$= \lim_{n} -\frac{8}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

d) $$\lim_{n} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\left(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1}\right)\cdot\left(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{n^6-(n^6+n^2+1)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n} \frac{n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}}$$

$$= \lim_{n} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3+\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = \lim_{n} \frac{0}{2} = 0$$

e) $\lim\limits_{n} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} =$

$$= \lim_{n} \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3}\right)}{\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4(1+\frac{1}{n})} + \sqrt[4]{n^4(1-\frac{1}{n})}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^2}\right)}{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+n^3} + \sqrt{n^4-n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n} \frac{(n^4+n^3)-(n^4-n^3)}{n\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} + (1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}}\right)\cdot n^2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n} \frac{2n^3}{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} + (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}} + (1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} + (1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

hier vllt ein zwischenschritt

$$= \lim_{n} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

f) $\lim\limits_{n} \dfrac{n^2}{n+2} - \dfrac{n^2}{n+1} =$

$$= \lim_{n} \frac{n^2(n+1) \cdot n^2(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)}$$

$$= \lim_{n} \frac{-n^2}{n^2+3n+2}$$

$$= \lim_{n} \frac{n^2(-1)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n} \frac{-1}{1} = -1$$