Scharnewski Niklas 11.06.2020

Studon: em89inym Blatt: 7

Übung: Gruppe 7 (Mi 12-14 Uhr)

20/20*30

Freigegebene Aufgaben: A18, A19, A20

A18

a) $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x^3}$

b) $f(x) = \left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^4$

$f'(x) = 4\left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2\right) = 4\left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$

c) $f(x) = x e^{x^2} \cdot \ln(2 + 3x)$ 3fach Multiplikation

$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln(2+3x) + x \cdot e^{x^2} \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3 =$

$= e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) \cdot (1 + 2x^2) + 3x e^{x^2} \cdot \frac{1}{2+3x}$

d) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x}\right)$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{\cos(2x) \cdot 2 \cdot \ln(x^2+1) - \sin 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x}{\left(\ln(x^2+1)\right)^2}$

f) $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$

$f'(x) = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

g) $f(x) = x^{-x^2} = e^{-x^2 \cdot \ln x}$

$f'(x) = x^{-x^2} \cdot \left[-2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}\right]$

h) $f(x) = \ln\left(x + \ln(2 \ln x)\right)$

$f'(x) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln x} \cdot \frac{2}{x}\right)$

A19

a) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos(x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = -\sin x$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan' x = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

i) $= \frac{1}{\cos^2 x}$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ii) $= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \tan^2 x$

c) i) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$, da $\tan(\arctan(y)) = y$

ii) $\tan''(x) = 0 + 2\tan(x) \cdot (1+\tan^2(x)) = 2(\tan(x) + \tan^3(x))$

$\tan'''(x) = 2 \cdot ((1+\tan^2 x) + 3\tan^2 x \cdot (1+\tan^2 x)) =$

$= 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$

A20 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a)

$x > 0 \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + x^\alpha \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2)\frac{1}{x^3}$

b) $x = 0 \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^\alpha \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \underbrace{\sin\frac{1}{h^2}}_{\text{beschränkt}}$

1. Fall $\alpha - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}$ existiert nicht $\Rightarrow f'$ existiert nicht

2. Fall $\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} = 1 \Rightarrow f'$ existiert nicht, da $\sin\frac{1}{h^2}$ "schwankt"

3. Fall $\alpha - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} = 0 \Rightarrow f'$ existiert und $f'(0) = 0$

A20 c) f' ist an der Stelle $x=0$ stetig falls

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = f'(x) = \lim_{x \searrow 0} f'(x)$$

Da $x \in [0, \infty]$ für f (also auch für f')
ist der $\lim_{x \nearrow 0} f'(x)$ zu vernachlässigen.

$x=0 \quad f'(0) = 0$

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} \alpha \cdot x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2)\frac{1}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \searrow 0} \underbrace{\alpha}_{\text{const}} \cdot \underbrace{x^{\alpha-1}}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{beschränkt}} + x^{\alpha-3} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{x^2}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{(-2)\frac{x^3}{x^3}}_{\text{const}}$$

Da $\alpha - 1 > 0$.

$$= \text{"}\lim_{x \searrow 0} \quad 0 + \underbrace{x^{\alpha-3}}_{} \cdot \text{beschränkt"}$$

$\to 0$ für $\alpha - 3 > 0$

$\Rightarrow \lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0 = f'(x) \quad$ für $\alpha - 3 > 0$

$\Rightarrow f'$ an der Stelle $x=0$ stetig für alle $\alpha - 3 > 0$

d)

$$f''(x) = \left[\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(-2)}{x^3}\right] +$$

$$+ \left[\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(-2)}{x^3} + x^{\alpha} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \frac{(-2)}{x^3} \cdot \frac{(-2)}{x^3} + \right.$$

$$\left. + x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-3) \cdot \frac{(-2)}{x^4}\right]$$