Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9, ____

9.5/10 *30 = 28.5

A7 a) i) $a_n = \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

Einschachteln:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-1+\frac{1}{n}}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{5+1+\frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$

$\Rightarrow$ a_n konvergiert ggn 0

ii) $b_n = \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$

Einschachteln:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{-5-2}{6-2} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{5+2}{6+2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{-7}{4} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{7}{8} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq 0$$

$\Rightarrow$ b_n konvergiert ggn 0

			lim inf , lim sup
b) i)	$a_n = ((-1)^n+1)n$	$M = \{0, +\infty\}$	0 , $+\infty$
ii)	$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$	$M = \{-1, 1\}$	-1 , 1
iii)	$a_n = \begin{cases} -n, & \text{falls } n \leq 17 \\ n, & \text{falls } n > 17 \end{cases}$	$M = \{-17, +\infty\}$	-17 , $+\infty$

iv) $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$

für $q > 1$:	$M = \{\infty\}$	$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
$q = 0$:	$M = \{0\}$	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
$q = 1$:	$M = \{1\}$	$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
$0 < q < 1$:	$M = \{0\}$	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
$q < 0$:	$M = \{-\infty, +\infty\}$	$\liminf = -\infty$, $\limsup = +\infty$

A8 a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$: Divergenzkriterium: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{n}+1} = \frac{1}{1} = 1$ ✓

Die Reihe ist divergent, da die dazugeh. Folge <u>nicht</u> gegen 0 konvergiert. ✓

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$: Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|}$

$\leq \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{k(3k+2)}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} = \sqrt{\frac{1}{k}}$

$\Rightarrow k \geq 2$: $\sqrt{\frac{1}{k}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$, für alle k

Die Reihe konvergiert.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$: Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{\sin k}}{\sqrt[k]{k^k}} =$

$= \frac{\sqrt[k]{\sin k}}{k} \leq \frac{\sqrt[k]{1}}{k} = \frac{1}{k} < 1$, für $k > 1$

Die Reihe konvergiert

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k} = (\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}) \cdot 2^{-k}$: Quotientenkriterium:

$\left|\frac{(\sqrt{k+3} - \sqrt{k}) \cdot 2^k}{(\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}) \cdot 2^{k+1}}\right| = \left|\frac{(\sqrt{k+3} - \sqrt{k})(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}{(k+2-k+1) \cdot 2}\right| =$

$= \left|\frac{\sqrt{k^2+5k+6} + \sqrt{k^2+2k-3} - \sqrt{k^2+2k} - \sqrt{k^2-k}}{6}\right| \leq$

$\leq \left|\frac{(k+3) + (k+1) - k - (k-1)}{6}\right| = \frac{5}{6} < 1$

Die Reihe konvergiert.

A9 a) i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 + \overbrace{\frac{3}{k}}^{0 \text{ für } k\to\infty}}{3k - \underbrace{\frac{4}{k}}_{0 \text{ für } k\to\infty}} \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \frac{1}{k}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergente Minorante

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ ist divergent

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$: Divergenzkriterium :

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3}{3n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{4}{n^2}} = \frac{4+0}{3-0} = \frac{4}{3}$

Die Reihe ist divergent, da die dazugeh. Folge nicht gegen 0 konvergiert.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergente Minorante

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent

b) i) Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte reelle (komplexe) Folge hat mindestens einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

$\Rightarrow$ Schranken finden: (1.) -1 , 1

(2.) : -1, 1

(3.) : -1, 1

$\Rightarrow$ Alle Folgen haben mindestens 1 HP

ii) Häufungspunkt für (3.) : 0.