Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Sadeghi, Sara

StudOn-Kennung: ky40jemy

Blatt-Nummer: 06

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

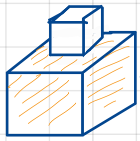
A15, A16, A17, ______

20/20*30

A15

a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ $\longrightarrow$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ divergent $\Rightarrow$ d.h. der Turm ist unendlich hoch.

b)



$\longrightarrow O_{w_k}=5\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}O_{w_k}=\sum_{k=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2=5\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\text{konvergent}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}}_{\text{konvergent}}$ $\Rightarrow$ man kann den Turm mit endlich viel Farbe anstreichen.

c) $V_{w_k}=\left(\frac{1}{k}\right)^3=\frac{1}{k^3}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ ist konvergent $\Rightarrow$ es reicht endlich viel Beton

d) z.B zu Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sum_{k=1}^{\infty}O_{w_k}=5\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{divergent}}-\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}}_{\text{divergent}}$ $\Rightarrow$ unendlich viel Farbe

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ $\Rightarrow$ konvergent (Da $\frac{3}{2}>1$ ist) $\Rightarrow$ endliche Menge an Baumaterialien.

A16

a) i) $f(0) = 0 + \sin 0 - \cos 0 = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5 > 0$

f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig $\Rightarrow$ mindestens eine Nullstelle

$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{>0} + \underbrace{\sin x}_{\substack{>0 \\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}} + \underbrace{\cos x}_{\substack{>0 \\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}} > 0 \Rightarrow$ Streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ genau eine Nullstelle

ii) $f(0) = e^0 \cdot \cos(0 \cdot \pi) - \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 0 - \frac{1}{2} < 0$

$\Rightarrow$ mindestens eine Nullstelle (e^{-x} stetig, $\cos(x)$ stetig)

$f'(x) = -e^{-x}\cos(\pi x) - e^{-x} \cdot \pi \sin(\pi x) = \underbrace{-e^{-x}}_{<0}(\underbrace{\pi \sin(\pi x) + \cos(\pi x)}_{\substack{>0 \\ x\in(0,\frac{1}{2})}}) < 0 \Rightarrow$ Streng monoton fallend

$\Rightarrow$ genau eine Nullstelle

b) $g(x) = f(x) - x$, wenn $f(x)$ stetig ist, dann $g(x)$ ist auch stetig.

$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$ (Da $a < b$)

$g(b) = f(b) - b = a - b < 0$ (Da $a < b$)

$\Rightarrow$ existiert eine x_* mit $g(x_*) = 0 \Leftrightarrow f(x_*) - x_* = 0$

$\Leftrightarrow f(x_*) = x_*$

für $x_* \in (a,b)$

c) $D_f \Rightarrow$ ist abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ kompakt ($D_f = \overline{D_f}$)

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge und $f(x)\, D_f \to \mathbb{R}$ ist stetig ($\sin$, e^x ist stetig)

Dann ist f beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt x_{**}, $x_* \in D_f$ mit

$f(x_*) = \inf_{x\in D_f} f(x) = \min_{x\in D_f} f(x)$ $\qquad$ $f(x_{**}) = \sup_{x\in D_f} f(x) = \max_{x\in D_f} f(x)$

$\Rightarrow$ Die Bildmenge $f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ hat ein Minimum und ein Maximum.

A17

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 2\cdot \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 2\cdot \frac{1}{1} = 2 \,//$$

ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cdot \sin 2x \cdots \sin nx}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \frac{\sin 2x}{x}\cdot \ldots \cdot \frac{\sin nx}{x} = \lim_{x\to 0} 1\cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot 2\, \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1}\cdot 3\, \underbrace{\frac{\sin 3x}{x}}_{=1}\cdot \ldots \cdot n\cdot \underbrace{\frac{\sin nx}{nx}}_{=1} = n! \,//$$

iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{1}\cdot 5x\cdot \frac{6x}{\sin 6x}\cdot \frac{1}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}\cdot \frac{5x}{6x}\cdot \underbrace{\frac{\lim 1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}}}_{=1} = \frac{5}{6}\cdot 1\cdot 1 = \frac{5}{6} \,//$$

iv) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}}\cdot \frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}}}_{=0} + 2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot 0 + 2\cdot 1} = \frac{1}{2} \,//$$

v) $$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\pi\cdot \cos x\cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \cos\left(\pi\cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=}\cdot \cos x\right) = \cos\left(\pi\cdot \lim_{x\to 0} 1\cdot \cos x\right) =$$

$\cos(0)=1$

$$\cos(\pi) = -1 \,//$$