Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Sadeghi, Sara

StudOn-Kennung: ky40jemy

Blatt-Nummer: 03

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9, ____

8.5/10*30 = 25.5

A7

a) i) Einschachtelung: $\sin(n) \in [-1,1]$

$$\underbrace{\frac{5+(-1)^n - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\substack{0 \\ \uparrow n\to\infty}}}{n^2 \to \infty}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \leq \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\overbrace{\sin n}^{\in[-1,1]}}{n^2} \leq \underbrace{\frac{5+(-1)^n + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\substack{0 \\ \uparrow n\to\infty}}}{n^2 \to \infty}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2} = 0 //$$

ii) Einschachtelung: $\sin(n) \in [-1,1]$, $\cos(n) \in [-1,1]$

$$\frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5(-1)-2(1)}{6+1-(-1)} \leq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\overbrace{\sin(2n)}^{\in[-1,1]}-2\sin(3n)}{6+\underbrace{\cos(4n)}_{\in[-1,1]}-\cos(5n)} \leq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5(1)-2(-1)}{6+(-1)-(+1)}$$

$$\underbrace{-\frac{7}{8} \cdot \frac{n}{n^2+1}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} \leq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \leq \underbrace{\frac{7}{4} \cdot \frac{n}{n^2+1}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} = 0 //$$

b) i) $\Big(\overbrace{(-1)^n+1}^{\substack{=2 \text{ für gerade } n \\ =0 \text{ für ungerade } n}}\Big) \cdot \underbrace{n}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \infty}} \Rightarrow$ 2HP $M = \{0, +\infty\}$, $\lim_n \sup a_n = +\infty$, $\lim_n \inf a_n = 0$

uneigentlich

ii) 2 HP: $M = \{-1, 1\} \Rightarrow \lim_n \sup a_n = 1$, $\lim_n \inf a_n = -1$

iii) HP $M = \{+\infty\} \Rightarrow \lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n = +\infty$

iv) 1. Fall $q > 1 \Rightarrow HP = +\infty \Rightarrow \lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n = +\infty$

2. Fall $q = 1 \Rightarrow HP = 1 \Rightarrow \lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n = 1$

3. Fall $q = 0 \Rightarrow HP = 0 \Rightarrow$ " = " $= 0$

4. Fall $|q| < 1$, $q \neq 0 \Rightarrow HP = 0 \Rightarrow$ " = " $= 0$

5. Fall $q < -1 \Rightarrow$ HP $M = \{-\infty, +\infty\} \Rightarrow \lim_n \sup a_n = +\infty$, $\lim_n \inf a_n = -\infty$

A8

a) $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{k+1}{k+3}}{\frac{k}{2+k}}\right| = \left|\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right| = \left|\frac{\overbrace{k^2+3k}^{:=a}+2}{\underbrace{k^2+3k}_{=a}}\right| \overset{(k\geq 1)}{>} 1 \Rightarrow \text{Die Reihe ist divergent.}$$

alternative: Da $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2+k} = 1 \neq 0$, ist die Reihe Divergent.

b) $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} = \sqrt[k]{\left|\sqrt{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k}\right|} = \sqrt[2k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k\right|} = \sqrt[2]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)\right|} \leq \left|\frac{(k-\cancel{1})}{(3k^2+2k)}\right| \overset{k\geq 2}{\leq} \frac{k}{3k^2+2k}$

$\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(3k+2)} = \frac{1}{3k+2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{:=q<1}^{\forall k\geq 2} \Rightarrow$ Reihe konvergent

c) $\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{\overbrace{|\sin k|}^{\leq 1}}}{\sqrt[k]{|k^k|}} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_k \sup \sqrt[k]{|a_k|} = 0 < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}\,(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cancel{k}+2-\cancel{k}+1}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = \frac{3}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt{\left|\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k}\right|} = \frac{\sqrt{|\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}|}}{\sqrt{2^k}} \overset{\forall k\geq 1}{\leq} \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{:=q} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent

$q \in (0,1)$

A9

a) i) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} \geq \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k}$ also $\frac{4}{3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \Rightarrow$ eine div. Minorante $\Rightarrow$

die geg. Reihe ist divergent.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{4k^2+3}{3k^2-4}}_{a_k}$: Da $\lim \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{4}{3} \neq 0$, ist die Reihe divergent.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ harmonische Reihe $\to$ ist div. Minorante $\Rightarrow \sqrt{k} \overset{\forall k\in\mathbb{N}}{\leq} k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow$ divergent

b) 1. $a_n = \sin n$: Ja $\Rightarrow$ jede $\underbrace{\text{beschränkte}}_{\sin\in[-1,1]}$ komplex (oder reelle) Folge hat mindestens einen HP

2. $b_n = \sin(n^2)$: Ja $\Rightarrow$ " " " " "

3. $c_n = \frac{\sin n}{n}$: Ja $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0 \Rightarrow$ Der Grenzwert einer Folge ist immer auch HP

c) $\sin(n) \Rightarrow$ alle werte von $[-1,1]$ sind Häufungspunkte