Scharnewski Niklas 05.06.2020

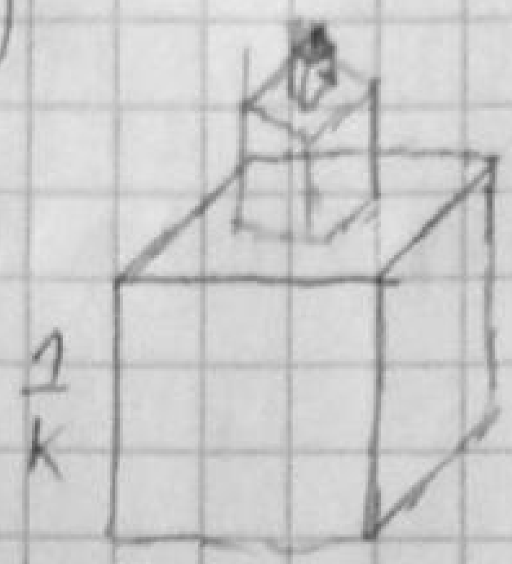
Studon: em89inym Blatt: 6

Übung: Gruppe 7 (Mi 12–14 Uhr)

Freigegebene Aufgaben: A15, A16, A17

18/20*30 = 27.0

A 15 a)



$$h = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}$$

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty \quad \text{harmonische Reihe}$$

$\Rightarrow$ Der Turm wird unendlich Hoch

bedeckte flächen müssen nicht angestrichen werden

b) $A_{\text{Würfel}} = 6 \cdot l \cdot b = 6 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = 6 \cdot \frac{1}{k^2}$

$A_{\text{Turm}} = 6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \longrightarrow$ Konvergent

$\Rightarrow$ Die Flächen des Turms sind beschränkt

$\Rightarrow$ Es reicht endlich viel Farbe

c) $V_{\text{Würfel}} = l \cdot b \cdot h = \frac{1}{k^3}$

$V_{\text{Turm}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \longrightarrow$ Konvergent

$\Rightarrow$ Das Volumen des Turms ist beschränkt

$\Rightarrow$ Es reicht endlich viel Beton

d) Für die Kantenlänge: $\frac{1}{\sqrt{k}}$ würde dies funktionieren

$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow$ Divergent $\rightarrow$ unendlich hoch

$A = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow$ Divergent $\rightarrow$ unendlich Farbe

$V = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \rightarrow$ konvergent $\rightarrow$ endlich viel Beton

A16 a) i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x \quad (0, \frac{\pi}{2})$

1. $f(x)$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen (Polynom, sin, cos) stetig.

$f(0) = 0^3 + \sin(0) - \cos(0) = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + \sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{8} + 1 \approx 4{,}9$

Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat f auf $(0, \frac{\pi}{2})$ min eine Nullstelle.

2. $f'(x) = \underbrace{2x^2}_{\geq 0} + \underbrace{\cos x}_{\geq 0} + \underbrace{\sin x}_{\geq 0} \geq 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$ streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ max eine Nullstelle

3. nach 1. und 2. genau eine Nullstelle

ii) $f(x) = e^{-x} \cos(\pi x) - \frac{1}{2} \quad (0, \frac{1}{2})$

1. $f(x)$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen (exp, cos) stetig.

$f(0) = e^0 \cdot \cos(0) - \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat f auf $(0, \frac{1}{2})$ min eine Nullstelle.

2. $f'(x) = (e^{-x})' \cos(\pi x) + e^{-x} \cdot (\cos(\pi x))' =$

$= -\underbrace{e^{-x} \cdot \cos(\pi x)}_{\geq 0} - \underbrace{e^{-x} \cdot \sin(\pi x)}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

~~3.~~ $\Rightarrow$ max eine Nullstelle

3. nach 1. und 2. genau eine Nullstelle

c) $f(x) := e^{-x^2} \sin(x) \quad D_f = \{11, 17\} \cup ([-5, 5] \setminus (-1, 1))$

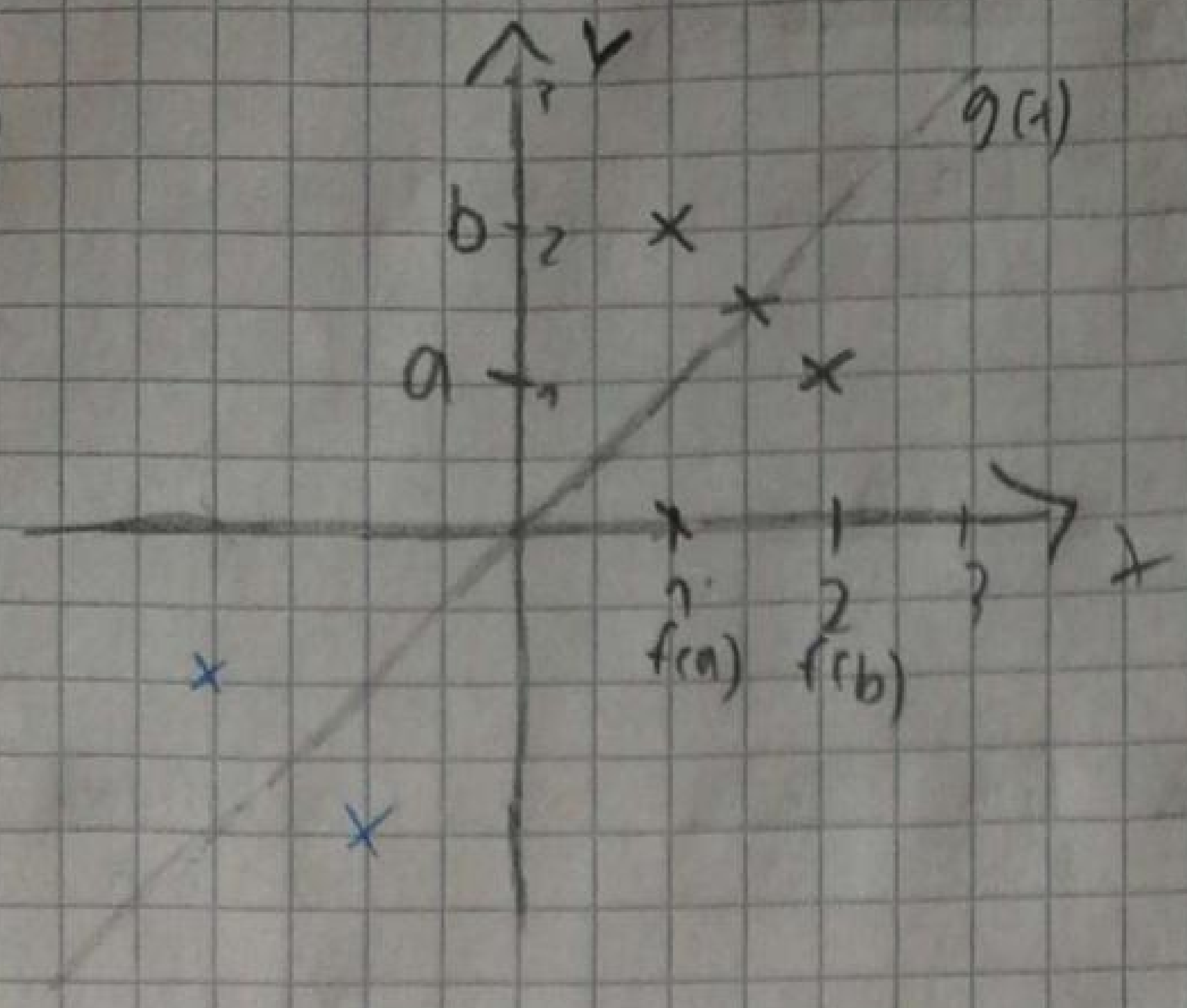
Satz vom Maximum/Minimum:

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum/Minimum an.

f ist stetig, da die Funktion eine Verkettung stetiger Funktionen ist.

D_f ist kompakte Menge, da sowohl abgeschlossen $(M = \overline{M})$ als auch beschränkt (offensichtlich) $\Rightarrow$ f hat Min/Max

A 16 b)



Damit es mindestens ein $x_* \in (a,b)$ mit $f(x_*) = x_*$ gibt muss die Funktion f min einmal die Funktion $g(x)=x$ (Winkelhalbierende der Achsen) schneiden. Da $a<b$ muss f(a) über g und f(b) unter g liegen. Da die Funktion f stetig ist wird sie die Funktion g(x) also min einmal in $x_* = f(x_*)$ schneiden.

A17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$

i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim 2}{\lim\frac{\sin x}{x}}=\frac{2}{1}=2$

ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\ldots\cdot\sin nx}{x^n}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1\cdot\sin x}{1\cdot x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2\cdot x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3\cdot x}\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{n\cdot\sin nx}{n\cdot x}$

$=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!$

iii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}\cdot\frac{5x}{5x}\cdot\frac{6x}{6x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cancel{x}}{6\cancel{x}}=1\cdot1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}}=$

$=\frac{1}{-1\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1-\sin 2x}{x}}=\frac{-1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}}=$

$=\frac{-1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{1}{2}\cdot x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2\cdot x}}=\frac{-1}{\frac{1}{2}\cdot0-2}=\frac{1}{2}$

v) $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)+1-1$

$=\lim\limits_{x\to0}1+\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)-1}=$

$=1+\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)-1\right)\cdot\frac{\pi}{x}\sin x\cos x}{\frac{\pi}{x}\sin x\cos x}=$

$=1+\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)-1\right)}{\frac{\pi}{x}\sin x\cos x}}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{x}\sin x\cos x}=$

das linke fällt schneller, als das rechte steigt.alles muss in einem schritt

$\overset{"}{=}1+0\cdot(\infty\cdot0\cdot1)"=1$ f f