Scharnewski Niklas 28.05.2020

Studon: em89inym Blatt 5

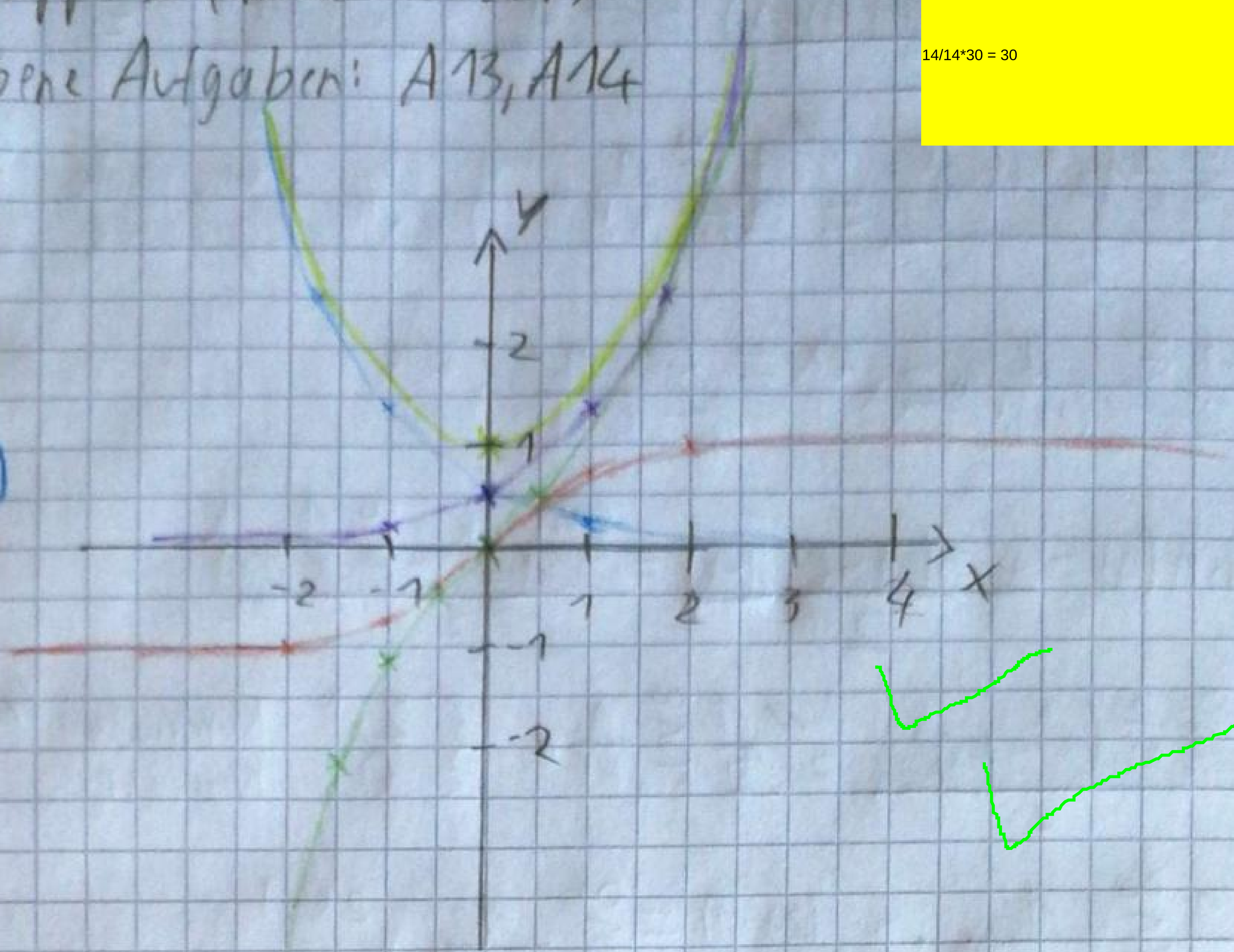
Übung Gruppe 7 (Mi 12-14 Uhr)

Freigegebene Aufgaben: A13, A14

14/14*30 = 30

A13 a)

- $\frac{1}{2}\exp(x)$
- $\frac{1}{2}\exp(-x)$
- $\cosh(x)$
- $\sinh(x)$



b)

- $\tanh(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}}{\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)\left(1-\frac{e^{-x}}{e^{x}}\right)}{\exp(x)\left(1+\frac{e^{-x}}{e^{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1\cdot(1-\overbrace{e^{-x-x}}^{\to 0})}{1\cdot(1+\underbrace{e^{-x-x}}_{\to 0})}=\longrightarrow\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\exp(-x)\left(\frac{e^{x}}{e^{-x}}-1\right)}{\exp(-x)\left(\frac{e^{x}}{e^{-x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1(\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}-1)}{1(\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+1)}=\longrightarrow\frac{-1}{1}=-1$$

c)

$$(\cosh(x))^2-(\sinh(x))^2=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}=\frac{0+4e^{0}+0}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\Rightarrow \cosh^2 x=1+\sinh^2 x$$

d) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(x^k + (-x)^k\right)}{2} \text{"}=\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ 2x^k & k \text{ gerade} \end{cases} \text{"}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot 2 x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(x^k - (-x)^k\right)}{2} \text{"}=\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \begin{cases} 2x^k & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \text{"}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot 2 x^{(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

e) $\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot i^{2k} y^{2k} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^k}}{(2k)!} \cdot \cancel{(-1)^k} \cdot y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} y^{2k} = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot i^{2k+1} \cdot y^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^k}}{(2k+1)!} \cdot \cancel{(-1)^k} \cdot i \cdot y^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i}{(2k+1)!} y^{2k+1} = i\sinh(y)$$

f) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

g) $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht beschränkt, da für $\sin(z) = \sin(a+bi)$

$$a = 0 \quad \lim_{b\to\infty} \sin(a+bi) = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\sin(0)}_{\to 0}\underbrace{\cosh(b)}_{\to\infty} + i\underbrace{\cos(0)}_{\to 1}\underbrace{\sinh(b)}_{\to\infty}$$

$$= \text{"}0 \cdot \infty + i \cdot 1 \cdot \infty\text{"} = i\infty$$

$$a = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{b\to\infty} \sin(a+bi) = \text{"}1 \cdot \infty + i \cdot 0 \cdot \infty\text{"} = \infty$$

Ein unbeschränkheitsbeweis reicht

der lim gegen ∞ geht

A14 a) $f(x) := \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_f = (-1,1)$, da für $1-x^2 \leq 0$ $\sqrt{\ }$ nicht Def bzw durch 0 teilen

$\Rightarrow$ Randpunkte $\{1,-1\}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \text{"}\frac{0}{\sqrt{2}}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \text{"}\frac{\sqrt{2}}{0}\text{"} = \infty$$

b) i) $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$

An allen stellen $x_* \neq 0$ ist f „offensichtlich" stetig (Nullreihe, bzw Verkettung von exp funktion und polynom)

$\Rightarrow$ betrachtung $x_* = 0$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} 0 = 0$

$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} e^{\underbrace{1+x}_{\to 0}\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to -\infty}} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$

alle gleich $\Rightarrow f(x)$ stetig

ii) $g\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} e^{1+x+\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Da an der stelle $x_*=0$ $f(0)=0$ ist nicht gleich

$\lim_{x\nearrow 0} e^{\underbrace{1+x}_{\to 0}\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to\infty}} = \text{"}e^{\infty}\text{"} = \infty$, ist an der stelle $x_*=0$ ein sprung

$\Rightarrow g(x)$ ist nicht stetig

c) i) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\underbrace{x^2}_{\to 0}\underbrace{+x}_{\to 0}+1}\ \underbrace{-x}_{\to 0} = \sqrt{1} = 1$

ii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{>1} - x = "1+\infty" = \infty$

iv) $\lim\limits_{x \to \infty} x|\sin \pi x|$ existiert nicht, da

$x_n := 2n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \Rightarrow f(x_n) = 2n \cdot |\sin 2\pi n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\tilde{x}_n := 2n + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \infty \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = 2n \cdot |\sin(2\pi n + \frac{\pi}{2})| \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

v) $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{|\sin \pi x|}_{\text{beschränkt}} = 0$

vi) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x \left(\cos \frac{2}{x}\right)^2$ existiert nicht, da

$x_n := \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow f(x_n) = \underbrace{\cos(\tfrac{1}{\pi n})}_{\to 1} \cdot \underbrace{(\cos 2\pi n)}_{\to 1^2} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

$\tilde{x}_n := \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{4}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = \underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{4}}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{(\cos 2\pi n + \tfrac{\pi}{2})}_{\to 0^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$