

# 1 Übung 4

## 1.1

```
reverse :: List a -> List a
reverse Nil = Nil
reverse (Cons x xs) = snoc (reverse xs) x
```

$$\forall xs\ ys. reverse(xs \oplus ys) = (reverse\ ys) \oplus (reverse\ xs)$$

Sei  $ys :: List\ a$  beliebig aber fest. (so schwachsinnige diese Schreibweise auch ist)

I.A.  $xs = Nil$

wir erhalten,

$reverse\ (Nil \oplus ys) = reverse\ ys$

und

$(reverse\ ys) \oplus (reverse\ Nil) = (reverse\ ys) \oplus Nil = reverse\ ys$

per Übung 2.3.a

Der induktionsanfang gilt also für beliebige  $ys$ .

I.V.:  $xs = Cons\ z\ zs$ , für  $zs$  gilt

$reverse\ (zs \oplus ys) = (reverse\ ys) \oplus (reverse\ zs)$

linke Seite Umformen:

$reverse\ ((Cons\ z\ zs) \oplus ys) \stackrel{def\ \oplus}{=} reverse\ (Cons\ z\ (zs \oplus ys)) \stackrel{def\ reverse}{=} snoc\ (reverse\ (zs \oplus ys))\ z \stackrel{def\ IV}{=} snoc\ ((reverse\ ys) \oplus (reverse\ zs))\ z$

von der anderen Seite

$(reverse\ ys) \oplus (reverse\ (Cons\ z\ zs)) \stackrel{def\ reverse}{=} (reverse\ ys) \oplus (snoc\ (reverse\ zs)\ z) \stackrel{(1)}{=} snoc\ ((reverse\ ys) \oplus (reverse\ zs))\ z$

(1) Anwendung von 2.3.b von rechts nach links.

Somit gilt auch die I.V. also gilt die Aussage.

## 1.2

### 1.2.1

$$\forall xs\ ys. reverse'\ xs\ ys = (reverse'\ xs\ Nil) \oplus ys$$

(idee: der rechte parameter bleibt unverändert, bis auf hinzufügen der Liste im "stackformat")

I.A. die Aussage gilt für  $xs = Nil$

$reverse'\ Nil\ ys = ys \stackrel{def\ \oplus}{=} Nil \oplus ys = reverse\ (Nil\ Nil) \oplus ys$

per definition von reverse'.

I.V.  $xs = \text{Cons } z \text{ } zs$

Die Aussage gilt für  $zs$ :  $\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{bel} = (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus \text{bel}$

$$\text{reverse}' (\text{Cons } z \text{ } zs) \text{ } ys \stackrel{\text{def } \text{reverse}'}{=} \text{reverse}' \text{ } zs (\text{Cons } z \text{ } ys) \stackrel{IV}{=} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus (\text{Cons } z \text{ } ys)$$

andere Seite

$$\begin{aligned} (\text{reverse}' (\text{Cons } z \text{ } zs) \text{ } \text{Nil}) \oplus ys &\stackrel{\text{def } \text{reverse}'}{=} (\text{reverse}' \text{ } zs (\text{Cons } z \text{ } \text{Nil})) \oplus ys \stackrel{IV}{=} ((\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus (\text{Cons } z \text{ } \text{Nil})) \oplus ys \stackrel{(1)}{=} \\ (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus ((\text{Cons } z \text{ } \text{Nil}) \oplus ys) &\stackrel{\text{def } \oplus}{=} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus (\text{Cons } z (\text{Nil} \oplus ys)) \stackrel{\text{def } \oplus}{=} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus (\text{Cons } z \text{ } ys) \end{aligned}$$

wobei in (1) die Assoziativität der konkatenation benutzt wurde (Beweis aus Vorlesung cc und  $\oplus$  sind  $\alpha$ -Äquivalent)

## 1.2.2

I.A.: sei  $xs = \text{Nil}$

$$\text{reverse Nil} = \text{Nil} \stackrel{\text{def } \text{reverse}'}{=} (\text{reverse}' \text{ Nil Nil})$$

gilt.

I.V.  $xs = \text{Cons } z \text{ } zs$

Die Aussage gilt für  $zs$ :  $\text{reverse } zs = \text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}$

$$\text{reverse} (\text{Cons } z \text{ } zs) \stackrel{\text{def } \text{reverse}}{=} \text{snoc} (\text{reverse } zs) \text{ } z \stackrel{IV}{=} \text{snoc} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \text{ } z$$

$$\text{reverse}' (\text{Cons } z \text{ } zs) \text{ } \text{Nil} \stackrel{\text{def } \text{reverse}'}{=} \text{reverse}' \text{ } zs (\text{Cons } z \text{ } \text{Nil}) \stackrel{\text{Lemma a)}}{=} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \oplus (\text{Cons } z \text{ } \text{Nil}) \stackrel{3.3}{=} \text{snoc} (\text{reverse}' \text{ } zs \text{ } \text{Nil}) \text{ } z$$

Somit gilt die Aussage.

## 2

### 2.1

$$\forall f \ g \ xs. (\text{map } f. \text{map } g) \ xs = \text{map } (f.g) \ xs$$

Sei  $f, g$  beliebig, aber fest.

I.A.:  $xs = \text{Nil}$

$$(\text{map } f. \text{map } g) \text{ Nil} = \lambda x. (\text{map } f) ((\text{map } g) (x)) \text{ Nil} = (\text{map } f) ((\text{map } g) (\text{Nil})) = (\text{map } f) (\text{Nil}) = \text{Nil}$$

Anwenden der definition von  $(.)$  und dann 2 mal von  $\text{map}$

$$\text{map } (f.g) \text{ Nil} = \text{Nil}.$$

definition von  $\text{map}$ .

I.V.  $xs = \text{Cons } z \text{ } zs$

Die Aussage gilt für  $zs$ :  $(\text{map } f. \text{map } g) \text{ } zs = \text{map } (f.g) \text{ } zs$

$$(\text{map } f. \text{map } g) (\text{Cons } z \text{ } zs) \stackrel{\text{def } (.)}{=} \lambda x. (\text{map } f) ((\text{map } g) (x)) (\text{Cons } z \text{ } zs) \stackrel{\text{applikation}}{=} (\text{map } f) ((\text{map } g) (\text{Cons } z \text{ } zs)) \stackrel{\text{def } \text{map}}{=} \text{map } (f.g) (\text{Cons } z \text{ } zs)$$

$$(\text{map } f)(\text{Cons } (g \ z) \ (\text{map } g \ zs)) \stackrel{\text{def } map}{=} \text{Cons } (f \ (g \ z)) \ (\text{map } f \ (\text{map } g \ zs))$$

Andere Seite

$$\begin{aligned} \text{map } (f.g) \ (\text{Cons } z \ zs) &\stackrel{\text{def } map}{=} \text{Cons } ((f.g) \ z) \ (\text{map } (f.g) \ zs) \stackrel{\text{def } (.)}{=} \text{Cons } ((\lambda x.f \ (g \ x)) \ z) \ (\text{map } (f.g) \ zs) \stackrel{\beta}{=} \\ &\text{Cons } (f(g \ z)) \ (\text{map } (f.g) \ zs) \stackrel{IV}{=} \text{Cons } (f(g \ z)) \ ((\text{map } f.\text{map } g) \ zs) \stackrel{\text{def } (.)}{=} \text{Cons } (f(g \ z)) \ (\lambda x.(\text{map } f)((\text{map } g)(x)) \ zs) \stackrel{\beta}{=} \\ &\text{Cons } (f(g \ z)) \ ((\text{map } f)((\text{map } g)(zs))) \stackrel{\text{applikation}}{=} \text{Cons } (f(g \ z)) \ ((\text{map } f)((\text{map } g \ zs))) \stackrel{\text{applikation}}{=} \\ &\text{Cons } (f(g \ z)) \ (\text{map } f \ (\text{map } g \ zs)) \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

### 2.1.1

$$\forall f \ ys \ xs. \text{map } f \ (xs \oplus \ ys) = (\text{map } f \ xs) \oplus (\text{map } f \ ys)$$

I.A.  $xs = \text{Nil}$

$$\begin{aligned} \text{map } f \ (\text{Nil} \oplus \ ys) &\stackrel{\text{def } \oplus}{=} \text{map } f \ ys \\ (\text{map } f \ \text{Nil}) \oplus (\text{map } f \ ys) &\stackrel{\text{def } map}{=} \text{Nil} \oplus \text{map } f \ ys \stackrel{\text{def } oplus}{=} \text{map } f \ ys \end{aligned}$$

I.V.  $xs = \text{Cons } z \ zs$

Die Aussage gilt für  $zs$ :  $\text{map } f \ (zs \oplus \ ys) = (\text{map } f \ zs) \oplus (\text{map } f \ ys)$

$$\begin{aligned} \text{map } f \ ((\text{Cons } z \ zs) \oplus \ ys) &\stackrel{\text{def } \oplus}{=} \text{map } f \ ((\text{Cons } z \ (zs \oplus \ ys)) \stackrel{\text{def } map}{=} \text{Cons } (f \ z) \ (\text{map } f \ (zs \oplus \ ys))) \stackrel{IV}{=} \\ &\text{Cons } (f \ z) \ ((\text{map } f \ zs) \oplus (\text{map } f \ ys)) \end{aligned}$$

Andere Seite.

$$\begin{aligned} (\text{map } f \ (\text{Cons } z \ zs)) \oplus (\text{map } f \ ys) &\stackrel{\text{def } map}{=} \\ (\text{Cons } (f \ z) \ (\text{map } f \ zs))) \oplus (\text{map } f \ ys) &\stackrel{\text{def } \oplus}{=} \text{Cons } (f \ z) \ ((\text{map } f \ zs) \oplus (\text{map } f \ ys)) \end{aligned}$$

Aussage gilt.

## 3

### 3.1

$$\forall t. \text{mirror} \ (\text{mirror } t) = t$$

I.A.  $t = \text{Leaf}$ .

$$\text{mirror} \ (\text{mirror} \ (\text{Leaf})) \stackrel{\text{def } mirror}{=} \text{mirror} \ (\text{Leaf}) \stackrel{\text{def } mirror}{=} \text{Leaf} = \text{Leaf}$$

gilt.

I.V.  $t = \text{Bin left } x \ \text{right}$

Die Aussage gilt für left und right.

$$\text{mirror} \ (\text{mirror left}) = \text{left}$$

$$\text{mirror} \ (\text{mirror right}) = \text{right}$$

$$\begin{aligned} \text{mirror (mirror (Bin left x right))} &\stackrel{\text{def mirror}}{=} \text{mirror (Bin (mirror right) x (mirror left))} \stackrel{2 \times IV}{=} \text{mirror (Bin right x left)} \\ &\stackrel{\text{def mirror}}{=} (\text{Bin (mirror left) x (mirror right)}) \stackrel{IV}{=} \text{Bin left x right} \end{aligned}$$

### 3.2

$$\forall t. \text{inorder (mirror t)} = \text{reverse (inorder t)}$$

I.A.  $t = \text{Leaf}$

$$\text{inorder (mirror (Leaf))} \stackrel{\text{def mirror}}{=} \text{inorder (Leaf)} \stackrel{\text{def inorder}}{=} \text{Nil}$$

andere Seite:

$$\text{reverse (inorder Leaf)} \stackrel{\text{def indrder}}{=} \text{reverse Nil} \stackrel{\text{def reverse}}{=} \text{Nil}$$

gilt.

I.V.  $t = \text{Bin left x right}$

Die Aussage gilt für left und right.

$$\text{inorder (mirror left)} = \text{reverse (inorder left)}$$

$$\text{inorder (mirror right)} = \text{reverse (inorder right)}$$

$$\begin{aligned} \text{inorder (mirror (Bin left x right))} &\stackrel{\text{def mirror}}{=} \text{inorder (Bin (mirror right) x (mirror left))} \stackrel{\text{def inorder}}{=} \text{inorder (mirror right)} \\ &\oplus (\text{Cons x (inorder (mirror left))}) \stackrel{2 \times IV}{=} \text{reverse (inorder right)} \oplus (\text{Cons x (reverse (inorder left))}) \end{aligned}$$

Andere Seite:

$$\begin{aligned} \text{reverse (inorder (Bin left x right))} &\stackrel{\text{def inorder}}{=} \text{reverse (inorder left} \oplus (\text{Cons x (inorder right)})) \stackrel{4.1}{=} (\text{reverse (Cons x (inorder} \\ &\text{right))}) \oplus \text{reverse (inorder left)} \stackrel{\text{def reverse}}{=} (\text{snoc (reverse (inorder right)) x} \oplus \text{reverse (inorder left)}) \stackrel{\text{Lemma A}}{=} \\ &\text{reverse (inorder right)} \oplus (\text{Cons x (reverse (inorder left))}) \end{aligned}$$

Die Aussage gilt.

Lemma A:

$$(\text{snoc xs x}) \oplus \text{ys} = \text{xs} \oplus (\text{Cons x ys})$$

I.A.  $\text{xs} = \text{Nil}$

$$(\text{snoc Nil x}) \oplus \text{ys} \stackrel{\text{def snoc}}{=} (\text{Cons x Nil}) \oplus \text{ys} \stackrel{\text{def} \oplus}{=} \text{Cons x (Nil} \oplus \text{ys)} \stackrel{\text{def} \oplus}{=} \text{Cons x ys}$$

andere Seite:

$$\text{Nil} \oplus (\text{Cons x ys}) \stackrel{\text{def} \oplus}{=} \text{Cons x ys}.$$

gilt.

I.V.  $\text{xs} = \text{Cons z zs}$

Die Aussage gilt für zs:  $(\text{snoc zs x}) \oplus \text{ys} = \text{zs} \oplus (\text{Cons x ys})$ .

$$(\text{snoc (Cons z zs) x}) \oplus \text{ys} \stackrel{\text{def snoc}}{=} (\text{Cons z (snoc zs x)}) \oplus \text{ys} \stackrel{\text{def} \oplus}{=} \text{Cons z ((snoc zs x)} \oplus \text{ys)} \stackrel{IV}{=} \text{Cons z (zs} \oplus (\text{Cons x ys}))$$

Andere Seite:

$$(\text{Cons z zs}) \oplus (\text{Cons x ys}) \stackrel{\text{def} \oplus}{=} \text{Cons z (zs} \oplus (\text{Cons x ys})).$$

Das Lemma ist gültig.