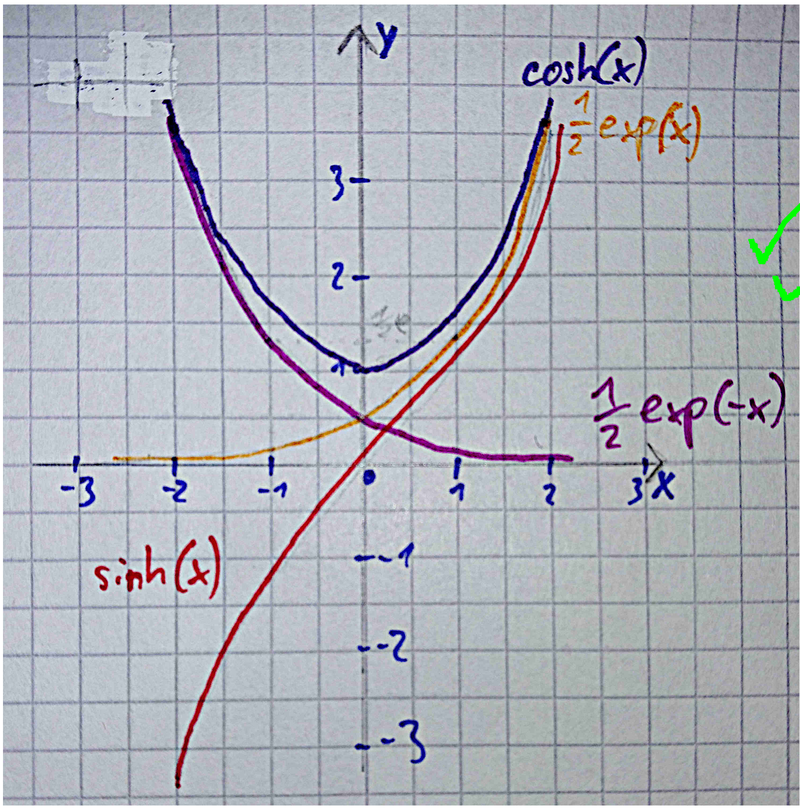
Bearbeitete Aufgaben A13, A14

A13

14/14 *30

a)



b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1 - \frac{e^{-x}}{e^x})}{e^x(1 + \frac{e^{-x}}{e^x})}
\end{aligned}
$$

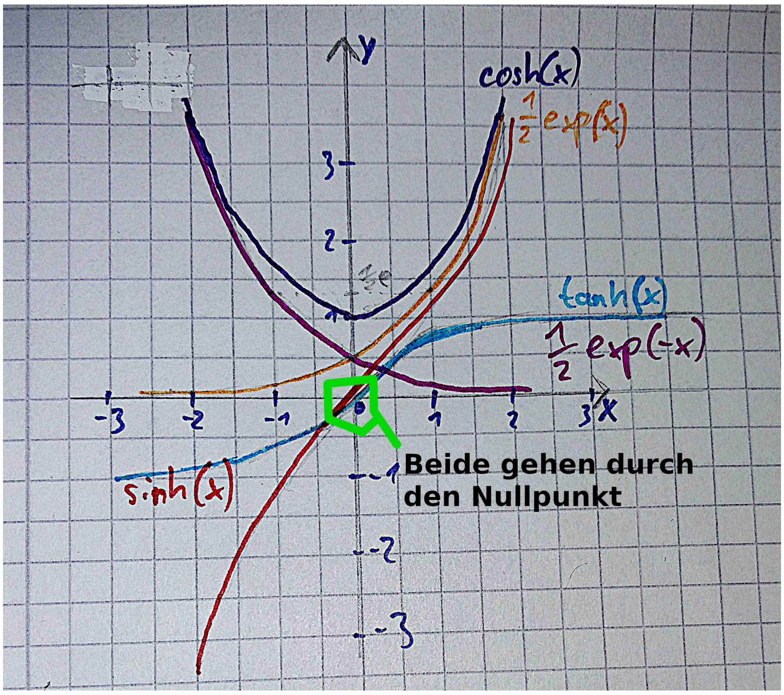
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{e^{-x}}{e^x}}{1+\frac{e^{-x}}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(\frac{e^x}{e^{-x}} - 1)}{e^{-x}(\frac{e^x}{e^{-x}} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = -1$$



c)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{2+2}{4} = 1$$

d)

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-x)^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-x)^k}{2(k!)} \overset{**}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k} + x^{2k}}{2(2k!)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{2(2k!)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{2(k!)} \overset{***}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1} + x^{2k+1}}{2((2k+1)!)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{2((2k+1)!)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

$*$: e^x ist absolut konvergent
$**$: $x^k + (-x^k)$ ist für ungerade k: $x^k - x^k = 0 \rightsquigarrow$ Es werden nur noch gerade k betrachtet, also $2k$ für die dann der Term x^{2k} im Zähler gilt

***: $x^k - (-x^k)$ ist für gerade k: $x^k - x^k = 0 \rightsquigarrow$ Es werden nur noch ungerade k betrachtet, also $2k+1$ für die dann der Term x^{2k+1} im Zähler gilt

e)

$$\begin{aligned}
\cos(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (i^2)^k \cdot \frac{y^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (-1)^k \cdot \frac{y^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cosh(y) \\
\sin(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (i^2)^{k+1} \cdot \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (i^2)^k \cdot i \cdot \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= i \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (-1)^k \cdot \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= i \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sinh(y)
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\
&= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

g) $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht beschränkt, da $\sinh(y) \xrightarrow{(y\to+\infty)} = +\infty$ und nach f) gilt für $x = 0$ und $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \sin(0)\cosh(y) + i\cos(0)\sinh(y) \\
&= i\sinh(y) \xrightarrow{(y+\infty)} \text{"}\ i \cdot \infty\text{"}
\end{aligned}$$

A14

a) Annahme: Es ist der Wertevorrat $\mathbb{R}$ gemeint
$D_f = (-1, 1)$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \qquad „\frac{2}{\sqrt{0}}“$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$
$$= 0$$

b)

(i) Die Funktion ist an allen Stellen außer $x = 0$ offensichtlich stetig, da sie aus Verkettungen von stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} 0 = 0$$
$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x \searrow 0} 1 + x - \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow 0} f(x) \implies \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Da auch $f(0) = 0$ folgt, dass f überall stetig ist.

(ii) Die Funktion ist an allen Stellen außer $x = 0$ offensichtlich stetig, da sie aus Verkettungen von stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \nearrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x \nearrow 0} 1 + x - \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x \searrow 0} 1 + x - \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = 0 \neq +\infty = \lim_{x \searrow 0} g(x) \implies \lim_{x \to 0} g(x) \text{ existiert nicht}$$

$\implies g(x)$ ist nicht stetig

c)

(i)

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\underbrace{x^2+x+1}_{\xrightarrow{(x\to 0)} 1}} - \underbrace{x}_{\xrightarrow{(x\to 0)} 0} = \sqrt{1} - 0 = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x &\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{(-x)^2-x+1} + x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} + x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = \infty
\end{aligned}$$

$*$: Substitution: $x_{neu} := -x_{alt}$

(iv) $\lim_{x\to+\infty} x|\sin \pi x|$ existiert nicht, man betrachte zuerst die Folge $x_n = n \xrightarrow{(n\to\infty)} +\infty$, für sie gilt

$$f(x_n) = n|\sin \pi n| = 0 \xrightarrow{(n\to+\infty)} 0$$

und anschließend betrachte man die Folge $x_n = 2n + \frac{1}{2} \xrightarrow{(n\to\infty)} +\infty$ für welche

$$\mathrm{f(x}_n) = \left(2n+\tfrac{1}{2}\right) |\sin \pi \left(2n+\tfrac{1}{2}\right)| = \left(2n+\tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{(n\to+\infty)} +\infty$$

gilt.

(v)

$$\lim_{x\to 0} x|\sin \pi x| = 0|\sin 0| = 0 \cdot 0 = 0$$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x \cos^2 \dfrac{2}{x}$ existiert nicht:
Man betrachte die Folge $x_n = \frac{4}{(2n+1)\pi} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$, für sie gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos x_n \cos^2 \frac{2}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos \frac{4}{(2n+1)\pi}}_{\xrightarrow{(n\to\infty)} 1} \underbrace{\cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}}_{\xrightarrow{(n\to\infty)} 0} = 0$$

Nun betrachte man die Folge $x_n = \frac{2}{n\pi} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$, für sie gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos x_n \cos^2 \frac{2}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos \frac{2}{n\pi}}_{\xrightarrow{(n\to\infty)} 1} \underbrace{\cos^2 n\pi}_{\xrightarrow{(n\to\infty)} 1} = 1$$