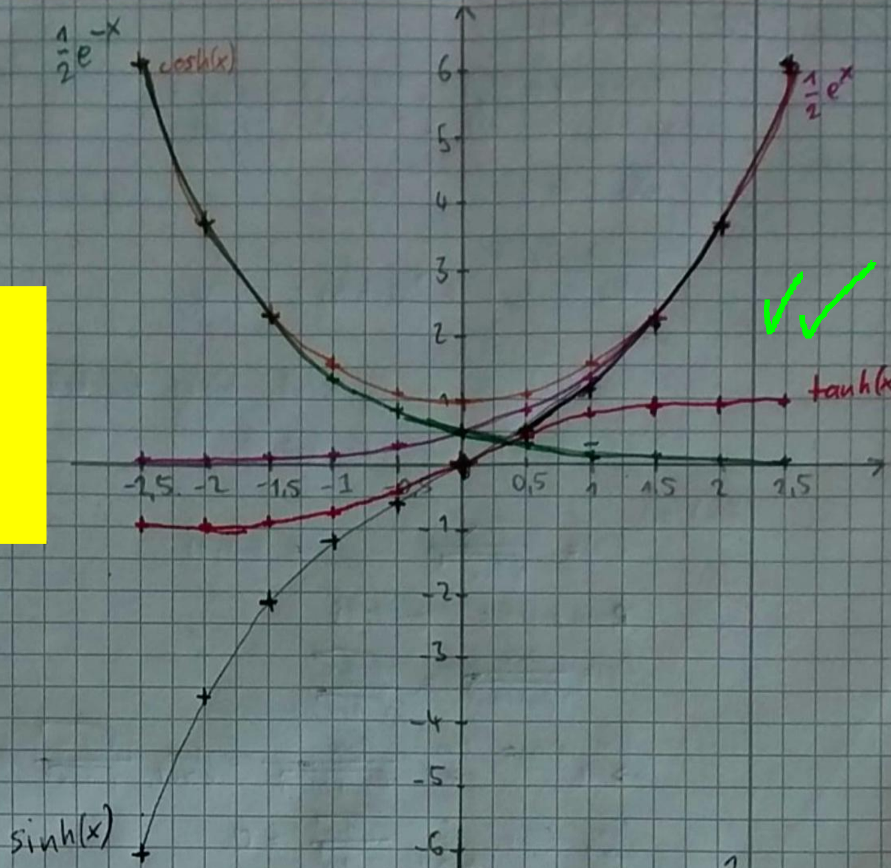
Karataev, Phillip
vi93jida
Blatt: 05
Gruppe: 7
Aufgaben: alle

A13) a.)

14/14 *30



b.) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\tanh(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{-1}{1} = -1$

c.) $\cosh^2 x - \sinh^2 x$

$= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{4} =$

$= \frac{(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})}{4} = \frac{2e^{-x}\;2e^x}{4} = 1$

d.)
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x)+\exp(-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k\right)$

$\Rightarrow \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$

(mit k ungerade $\frac{1}{k!}x^k - \frac{1}{k!}x^k = 0$
k gerade $\frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{k!}x^k = \frac{2x^k}{k!}$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x)-\exp(-x)) =$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k\right)$ (mit k gerade $\frac{1}{k!}x^k - \frac{1}{k!}(x)^k = 0$

$\Rightarrow \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ k ungerade $\frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{k!}x^k = \frac{2}{k!}x^k$

e.)
$\cos(ix) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(ix)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)$

$\sin(ix) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(ix)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} i\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sinh(x)$

f.) $\sin(x+iy) =$

$= \sin(x) \cdot \cos(iy) + \sin(iy) \cdot \cos(x) =$
$= \sin(x) \cdot \cosh(y) + i\sinh(y) \cdot \cos(x)$

g.) $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\sin(x+iy) =$
$= \sin(x)\cosh(y) + i\sinh(y) \cdot \cos(x)$

$x = 0$

$\Rightarrow \sin(iy) = + i\sinh(y)$ nicht beschränkt

$\Rightarrow \sin(x+iy)$ nicht beschränkt.

A14) a.)
$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1;1)$$

Randpunkte: $\{-1;1\}$

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = 0$$

b.) (i)
$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0$$
$$\lim_{x\searrow 0} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} f(x) = f(0)$$
$\Rightarrow$ Funktion ist stetig

(ii)
$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\nearrow 0} g(x) = \lim_{x\nearrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \infty$$
$$\lim_{x\nearrow 0} -\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) \neq \lim_{x\nearrow 0} g(x)$$
$\Rightarrow$ Funktion ist nicht stetig

c.) (i)
$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = \sqrt{0+0+1} - 0 = 1$$

(ii)
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

(iii)
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1 > 0 \\ \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = +\infty$$

Karataş, Phillip

(iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,|\sin \pi x| = \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot c & x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{N}_0\} \quad c \in (0;1] \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Funktion hat zwei Häufungspunkte ($+\infty$ und 0)

$\Rightarrow$ Funktionsgrenzwert existiert nicht

(v) $\lim\limits_{x \to 0} x\,|\sin \pi x| = 0 \cdot 0 = 0$

(vi) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x \, \cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$ existiert nicht (Aufgabe P 16)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \cos x \, \cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$ existiert nicht

verschiedene Häufungspunkte $\Rightarrow$ Funktionsgrenzwert existiert nicht

Karataev, Phillip