Erläuterung monotonie

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

9. Mai 2020

Konstruieren wir ein Gegenbeispiel:

Sei $a_n = (-1)^n \cdot n$ also $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

Machen wir also einen Widerspruchsbeweis, dass der Widerspruchsbeweis funktioniert.

Annahme: ein Widerspruchsbeweis funktioniert.

Dafür nehmen wir einfach monoton steigend $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ an.

wir erhalten $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \iff \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(-1)^n \cdot n} \geq 1 \overset{\text{kürzen}(-1)^n}{\iff} \frac{(-1)\cdot(n+1)}{n} \geq 1 \iff \frac{-n-1}{n} \geq 1 \iff \frac{-n}{n} - \frac{1}{n} \geq 1 \iff -1 + \frac{1}{n} \geq 1 \iff \perp \forall n \in \mathbb{N}$

aus dem Widerspruch folgern wir: a_n ist monoton wachsend.

Das ist aber offensichtlich falsch: $a_2 = 2 > a_3 = -3$.

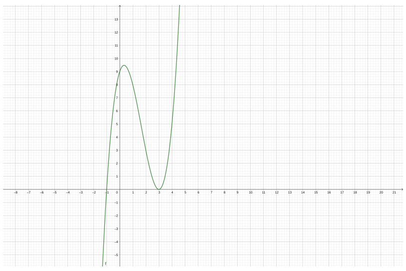
Dies ist ein Widerspruch dazu, dass ein Widerspruchsbeweis funktioniert. (analog wenn man monoton fallend annimmt)

Das Problem mit dem Widerspruchsbeweis ist, dass ein Widerspruchsbeweis immer davon ausgeht, dass es zwei Zustände gibt, die sich beide gegenseitig ausschließen: z.B. "alle Werte dieser Funktion sind gerade" es gibt entweder "Wahr" oder "Falsch".

Im Fall der Monotonie gibt es aber **3 Fälle: monoton wachsend, monoton fallend und keins von beiden!** Aus "nicht monoton wachsend" folgt entweder "monoton fallend" oder "keine Monotonie". Welches von beiden das ist kann man nur aus "nicht monoton wachsend" nicht rausfinden.

$$\neg\text{“monoton steigend”} \implies \text{“nicht monoton wachsend”} \oplus \text{“keine Monotonie”}$$

Das hab ich auch versucht mit der Funktion zu zeigen: $f(x) = (x-3)^2(x+1)$ sieht so aus



Wenn man hier versucht allgemein streng monoton steigend zu beweisen, schlägt das offensichtlich fehl.

$(x+1-3)^2(x+1+1) - (x-3)^2(x+1) \geq 0 \iff 3x^2 - 7x - 1 \geq 0 \iff \perp$ für z.B. $x = 1$

heißt das jetzt das $f(x)$ streng monoton fällt?

Auf logischer Ebene ist das Problem vielleicht etwas Eindeutiger, wenn man Monotonie von Folgen einmal formal aufschreibt:

$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (ersetz $>$ mit $<, \leq, \geq$ für die anderen monotonien)

Dein Widerspruchsbeweis will jetzt $\neg\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ zeigen.

Umformen liefert: $\neg\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n \iff \exists n \in \mathbb{N} : \neg(a_{n+1} > a_n) \iff \exists n \in \mathbb{N} : \neg(a_{n+1} \leq a_n)$

Also in Worten: monoton steigend heißt, dass der Nachfolger größer als der vorgänger ist.

nicht monoton steigend heißt, dass es mindestens einen gibt, für den dies nicht gilt.

(ein einziges n das nicht steigt macht ein $\forall$ schon kaputt...)

Monoton fallend heißt aber, dass für alle n diese Aussage nicht gilt.

$\forall n \in \mathbb{N} : \neg(a_{n+1} > a_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} : (a_{n+1} \leq a_n)$