Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Schleifer, Max

StudOn-Kennung: an66iboj

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

4, 5, 6, (alle)

11.5/21 *30=16

Aufgabe A4)

$$a_1 \coloneqq 1 \qquad a_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$$

a) Zu zeigen: $a_n \in (0,4)\,\forall\, n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $n = 1$

$a_1 = 1$ ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Es gelte $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (I.V)
Zu zeigen: $a_{n+1} \in (0,4)$
Es ist $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq \frac{1}{2}x + \sqrt{x} \qquad x \in (0,4) \\ f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$f'(x)$ ist positiv für alle $x \in (0,4)$, somit ist $f(x)$ monoton steigend (im Bereich $x \in (0,4)$). Also ist

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) < f(4) = 4 \\ a_{n+1} &= f(a_n) > f(0) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{also } a_{n+1} \in (0,4)$$

$\square$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq \frac{1}{2}x + \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $f'(x)$ (echt) positiv und damit (streng) monoton wachsend.

c)

Da die Folge monoton wachsend und beschränkt (s. a) und b)) ist, ist sie gegen ihr Supremum konvergent.

Grenzwert $:= a$ bei Anwendung von $\lim\limits_{n\to\infty}$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}a + \sqrt{a}, \qquad &| -a \\ 0 &= -\frac{1}{2}a + \sqrt{a} \end{aligned}$$

Damit ist $a \in \{0, 4\}$, wobei nur $a = 4 \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert die Folge gegen den Grenzwert $a = 4$.

Aufgabe A5)

$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha^2 + 4\beta > 0$.

a)

Zu zeigen mit vollständiger Induktion: $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit x_1, x_2 als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = \alpha x + \beta$.

Induktionsanfang: $n = 0$

$a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{0}{x_1 - x_2} = 0$ ✓

Das reicht nicht, man braucht später a_n und a_(n-1), also auch a_0 und a_1

Induktionsschritt: $n + 1 \mapsto n$

Es gelte $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ mit x_1, x_2: Lösungen von $x^2 = \alpha x + \beta$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (I.V)

Zu zeigen: $a_{n+1} = \alpha\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{\text{(I.V.)}}{=} \alpha\left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) = \alpha\left(\frac{x_1 x_1^{n-1} - x_2 x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) = \\ &= \alpha x_1\left(\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) - \alpha x_2\left(\frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) - \beta\left(\frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) = (\alpha x_1 + \beta)\left(\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) \\ &\quad - (\alpha x_2 + \beta)\left(\frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) \end{aligned}$$

Mit $x_{1,2}^2 = \alpha x_{1,2} + \beta$ folgt:

$$a_{n+1} = x_1^2\left(\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) - x_2^2\left(\frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) = \frac{x_1^{n+1}}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

$\square$

b)

i)

c)

i)

ii)

iii)

Aufgabe A6)

a)

$$a_n = \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2-\frac{1}{n^2})}{n^3(3+\frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

b)

$$b_n = \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{5}{n}+2)}{n(\frac{1}{n}+1)}\right)^3 = \left(\frac{0+2}{0+1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

c)

$$c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \frac{\left(\sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}\right) \cdot \left(\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}\right)}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}}$$
$$= \frac{n\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{2+\frac{9}{n}}\right)} = \frac{-8+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{2+\frac{9}{n}}}$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{-8+0}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2+0}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

d)

$$d_n = n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \frac{\left(n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}\right)\cdot\left(n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}}$$

$$= \frac{-n^2-1}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = \frac{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} = \frac{-0-0}{2} = (-)0$$

e)

$$e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \infty$, da das n^3 beim ersten Operanden addiert und beim zweiten Operanden subtrahiert wird.

der typ \infty -\infty ist nicht o.b.d.A. gleich Null (hier ist der Wert der Folge z.B. 1/2)

f)

$$f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2(n+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-n^2}{n^2+3n+2} = \frac{-1}{1+\frac{3}{n}} + \frac{2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{-1}{1+0} = -1$$