Felix Damm

ol74umoq

Mathe - Übung

Gruppe 7

19.5/21 * 30=27.5

A5) a) z.Z.: $a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$

IA: $a_0 = 0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{1-1}{x_1 - x_2} = 0 \quad a_1 = 1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1$ ✓

IV: $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ ✓ $a_{n-1} = \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$ ✓

IS: $n \to n+1$: $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{IV}{=} \alpha \cdot \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \cdot \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$

$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$ ✓

$= \frac{x_1^n(\alpha + \beta \frac{1}{x_1}) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2}$ ✓ $x_{1/2}$ Lsg. = von $x_1^2 = \alpha x + \beta$

$= \frac{x_1^{n-1}(x_1^2) - x_2^{n-1}(x_2^2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$ ✓ $\square$

b)

i) Gilt, auch wenn $x^2 = \alpha x + \beta$ in diesem Fall komplexe Lösungen hat. ✓

Das wichtige ist,dass bei der direkten Formel 0 im nenner steht. Nur, dass alle Folg

ii) Gilt nicht, da dann für $x^2 = \alpha x + \beta$ nur eine Lösung existiert. Dann wären alle Folgenglieder lt. dieser Formel 0, da $x_1 = x_2$. ✓

c) i) $x_{1/2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$= \cancel{\frac{\frac{(1+\sqrt{5})^n}{4} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{4}}{\frac{2\sqrt{5}}{2}}} = \cancel{\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{4\sqrt{5}}}$

das ist ^n nicht ^2

ii) $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 7}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$

$a_n = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{(2+\sqrt{11}) - (2-\sqrt{11})} = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2\sqrt{11}}$ ✓

iii) $x_{1/2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4}\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))}{2} = \frac{\pm\sqrt{4}\, i}{2} = \pm i$

$a_n = \frac{(+i)^n - (-i)^n}{+i - (-i)} = \frac{i^n - (-i)^n}{2i}$ ✓ alle Folgenglieder reel, da:

Für i^n gibt es max. 4 versch. Werte, da $i^4 = 1$. Dies kann aus i^n mit höherem n immer „herausgezogen" werden. Somit 4 Fälle: ✓

$n=1: \frac{i-(-i)}{2i} = 1 \quad n=2: \frac{i^2 - (-i)^2}{2i} = 0 \quad n=3: \frac{i^3 - (-i)^3}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1 \quad n=4: \frac{i^4 - (-i)^4}{2i} = 0$

Felix Damm   Mathe - Übung

0174amog

A4) $a_1 := 1$ $a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

a) z.z.: $a_n \in (0,4)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

IA: $a_1 = 1$ $1 \in (0,4)$

IV: $a_n \in (0,4)$

IS: $n \to n+1$: $a_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2} a_n} + \boxed{\sqrt{a_n}}$ per IV sind die a_n's $\in (0,4)$

$\in (0,2)$ $\in (0,2)$

durch halbieren   durch ziehen der Wurzel

da beide Summanden $\in (0,2)$, ist die Summe insgesamt $\in (0,4) \Rightarrow a_{n+1} \in (0,4)$.

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = \underbrace{-\frac{1}{2} a_n}_{(-2,0)} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{(0,2)} \geq 0$ $\Rightarrow$ monoton wachsend

c) aus a) folgt obere Schranke $= 4$, aus b folgt monoton wachsend

$\Rightarrow$ Ht. Satz: konvergent

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} a + \sqrt{a} = a \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} a \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} a^2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} a^2 + a = 0$ $a_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot 0}}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{-1 \pm 1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a_1 = 0$ $a_2 = 4$

a_1 keine Lsg., da a_1 der Folge $= 1$ und Folge monoton wachsend. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

A6) a) $a_n = \frac{2n^2 - n}{n(3n^2+2)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(2 - \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^3}(3 + \frac{3}{n^2})} = \frac{2}{3}$ ✓ ✓

b) $b_n = \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2 + \frac{5}{n})}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} = 2$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{b_n}^{\,3} = 2^3 = 8$ ✓ ✓

c) $c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(-8 + \frac{1}{n})}{\cancel{n}(\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{9}{n}})} = -\frac{8}{2\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$ ✓ ✓

d) $d_n = n^3 - \sqrt{n^6 + n^2 + 1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^6} - \cancel{n^6} + n^2 + 1}{n^3 + \sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1 + \frac{1}{n})}{n^{\cancel{3}}(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}})} = 0$ ✓ ✓

e) $e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$ $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^4+n^3} - n^4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt[4]{n^4-n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2-n})}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n(1+1)(1+1)} = \frac{1}{2}$ ✓ ✓

f) $f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(-1)}{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})} = -1$ ✓ ✓