Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Wurm, Jens

StudOn- Kennung: qy28qise

Blatt- Nummer: 0

Übungsgruppe- Nr. 7

Die Folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei: Alle

19,5/20*30=29

A 15) a)

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\infty}}$$ unendlich hoch

b) Mantelfläche $M_n = 5\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, da Bodenfläche nicht dazuzählt $5\frac{1}{n^2}$ und oberste Auflagefläche abziehen $-\frac{1}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(5\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

A: Ja, er kann mit endlich viel Farbe angestrichen werden

c) $V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$

A: Ja, er kann ... Beton gebaut werden.

A 15) d) $\forall a > 1 : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} < \infty$

Kantenlänge $\frac{1}{\sqrt{k}}$

$B_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{k})^3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \Rightarrow$ konv., da $\frac{3}{2} > 1$

$B_f = 5\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}^2}}_{\hat{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Rightarrow\infty} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{k}+1)^2} = 5\cdot\infty - 6 = \infty$

divergiert auch

A 16) a)(i) $\left.\begin{matrix} f(0) = -1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 1{,}87 \end{matrix}\right\}$ bewegt sich zwischen $-1 < 0 < 1{,}87$, daher mindestens 1 Nst.

„f ist als Verknüpfung stetiger Fkt. stetig. Nach dem Nst.-Satz von Bolzano hat f auf $(0, \frac{\pi}{2})$ daher mindestens eine Nst.

$$\underbrace{f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\text{monoton steigend}} + \underbrace{\cos(x) + \sin(x)}_{\text{zwischen 0 und } \frac{\pi}{2} \text{ positiv}} \Rightarrow > 0.}_{}$$

ausschließlich steigend von -1 nach $1{,}87$, d.h. genau 1 Nst.

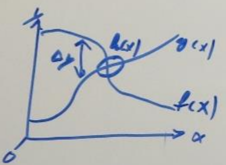
A 16) a) (ii) $f(0) = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ } zwischen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$

$f'(x) = -(\pi e^{-x} \sin(\pi x)) - e^{-x} \cos(\pi x))$

$= \underbrace{-e^{-x}}_{\text{ist positiv}} (\pi \cdot \underbrace{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)}_{\text{ist zwischen 0 und } \frac{1}{2} \text{ negativ}})$

monoton fallend => hat genau eine NST, da es bei $\frac{1}{2}$ anfängt und fällt

b)



$\Delta y = h(x) = f(x) - g(x) = 0$

1. $h(x)$ ist konvergent, $g(x)$ ist konvergent => $h(x)$ ist konvergent
2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
3. $h(a) \cdot h(b) < 0 \Leftrightarrow (f(a) - g(a))(f(b) - f(b)) < 0 \Leftrightarrow (b-a)(a-b) < 0 \Leftrightarrow ab - b^2 - a^2 + ab < 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0 \Rightarrow \exists x_* \in [a,b] : h(x_*) = 0 \Leftrightarrow f(x_*) = g(x_*) = x_*$

A 16) c) $f(x)$ ist kompakt, da D_f abgeschlossen ist

Auf Folie 4 S. 22 heißt es "Stetige Funktionen auf kompakten Mengen [...] nehmen Maximum und Minimum an. D.h. $\max f(x)$, $\min f(x)$ existiert.

A 17) (i) $\frac{\sin(x)}{x} = 1$ (laut Vorlesung) $\Rightarrow \frac{x}{\sin(x)} = 1 \Rightarrow 2 \frac{x}{\sin(x)} = 2$ ✓ ✓

(ii) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{x} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{x} \right) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$ ✓

(iv) $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\lim_{x \to 0} |x|}{\lim_{x \to 0} (1 - \cos(\frac{x}{2}) + \sin(2x))} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \text{l'Hôpital} = f'(x) = \frac{\lim_{x \to 0} (1)}{\lim_{x \to 0} (\frac{\sin(\frac{x}{2})}{2} + 2\cos(2x))} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$ ✓

(v) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\cos(\pi \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos(x)}{1}) \right) = \cos(\lim_{x \to 0}(\pi) \cdot \lim_{x \to 0} (\frac{\sin(x)}{x}) \cdot \lim_{x \to 0}(\cos(x))) = \cos(\pi \cdot 1 \cdot 1) = -1$ ✓

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(6x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(6x)} = 5 \cdot \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(5x)}{x}}_{=1} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(6x)}{x}}_{=1}} = \frac{5}{6}$ ✓