Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

3. Juli 2020

Polynominterpolation

Gesucht ist eine lineare gewichtung eines Polynoms:

$a \in \mathbb{R}^n$ zur basis $c \in \mathbb{P}(n)$

Eine mögliche Basis ist die Monombasis.$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$

Das ist aber i.A. sehr schlecht konditioniert (Vandermonde Matrix)

Aufgabe 1:

1 Lagrange-Basis

Stützstellen

$x_0 = -2$, $x_1 = 0$,$x_2 = 1$, $x_3 = 4$

$y_0 = 4$, $y_1 = -2$,$y_2 = 1$, $y_3 = 4$

Interpolationspolynom mit Lagrange-Basis

Idee: wir suchen n+1 polynome (also hier 4)

das i-te Lagrange-polynom L_i soll in $x_i = 1$ sein, sonst $x_j = 0, \forall j, j \neq i$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Die division durch $x_i - x_n$ entsteht dadurch, dass wir bei x_i den wert 1 haben wollen. Wir müssen also L_i für $x = x_i$ normieren.

$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{(-2)(-3)(-6)} = \frac{-1}{36}x(x-1)(x-4)$

$L_1 = \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2)(-1)(-4)} = \frac{1}{8}(x+2)(x-1)(x-4)$

$L_2 = \frac{-1}{9}(x+2)x(x-4)$

$L_3 = \frac{1}{72}(x+2)x(x-1)$

b) $P(x) = c_0L_0(x) + c_1L_1(x) + c_2L_2(x) + c_3L_3(x)$

Weil wir die Polynome explizit so designed haben, dass sie nur in bei ihrem jeweiligen x-wert den Wert eins haben, für alle andern x_j gilt 0!

Wenn wir jetzt ein LGs aufstellen würden, erhälten wir die Einheitsmatrix.

$$Ec = y \iff c = y$$

also $c_i = y_i$

in unserem fall entsteht also

$$P(x) = 4L_0(x) - 1 \cdot L_1(x) + 1L_2(x) + 4L_3(x)$$

$$4 \cdot \frac{1}{8}(x+2)(x-1)(x-4) - 2\frac{1}{8}(x+2)(x-1)(x-4) + \frac{-1}{9}(x+2)x(x-4) + 4 \cdot \frac{1}{72}(x+2)x(x-1)$$

Das auflösen geht zwar schnell, hat aber große numerische Kosten (und sind insgesamt sehr teuer aufzustellen).

c) Werte aus $P(0)$ (also probe, wir haben es ja so designed…)

$L_0(0) = 0, L_1(0) = 1, L_2(0) = 0, L_3(0) = 0$

2 Newton-Basis

Idee: Das i-te Newtonpolynom N_i wird in $x_0, \ldots, x_{i-1}$ null.

$N_i = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1}) \ldots$

a)

$N_0(x) = 1$ (es gibt nichts vorher, was nullstellen hat)

$N_1(x) = N_0 \cdot (x - x_0) = (x + 2)$

$N_2(x) = N_1 \cdot (x - x_1) = (x + 2)x$

$N_3(x) = N_2 \cdot (x - x_2) = (x + 2)x(x - 1)$

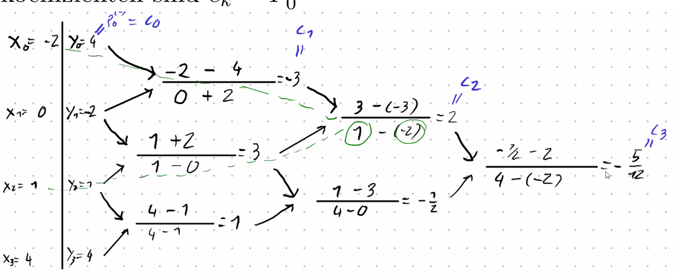
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x+2) & 0 & 0 \\ 1 & (x+2) & x & 0 \\ 1 & (x+2) & x & (x-1) \end{bmatrix} \cdot c = y$$

Aitken-Nevill-Rekursion.

$$P_i^{(0)} = y_i \tag{1}$$

$$P_i^{(k)} = \frac{p_{i+1}^{(k-1)} - p_i^{(k-1)}}{x_{i+k}} \tag{2}$$

koeffizienten sind $c_k = P_0^{(k)}$



Nebeinander liegende y's c) effizienter Auswertung von Polynomen

Horner-Schema:

$p(x) = 4 + (x+2)[-3 + 2(x - 5/12x(x-1))]$

wiederholen x ausklammern

$p(x) = 4 + (x+2)[-3 + 2x(1 - 5/12(x-1))]$

3 lokale Interpolation mit Catmul-Rom-interpolation

kleine Teilpolynome aneinanderketten.

Stützstellen $\{(-3,-1), (-1,1), (1,2), (3,2)\}$ Catmull-Rom ist Glatt in jedem Punkt (also stetig diff'bar)

Zentrale Differenz allgemein

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

Zentrale Differenz zwischen (x_1, y_1) und (x_3, y_3): $y'_2 = \frac{2-(-1)}{1-(-3)} = \frac{3}{4}$ (wir haben eine equidistante Schrittweite 2)

Zentrale Differenz zwischen (x_4, y_4) und (x_2, y_2) $y'_3 = \frac{2-1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$