

Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

18. Juni 2020

Typisierungsurteil

$$\Gamma = \{x : \alpha, y : \beta\} \vdash t : \alpha$$

1 Übung 1

1. $x : int, add : int \rightarrow int \rightarrow int \vdash \lambda y.add\ x(add\ x\ y)$

Das wurde auf der rechten Seite schon gezeigt

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash y : int}{\Gamma \vdash addx : int \rightarrow int} \quad \frac{\Gamma \vdash add : int \rightarrow int \rightarrow int \quad \Gamma \vdash x : int}{\Gamma \vdash addx : int \rightarrow int}}{\Gamma \vdash addxy : int} \rightarrow_i \frac{\Gamma_0[y \mapsto int] \vdash add\ x(addxy) : int}{x : int, add : int \rightarrow int \rightarrow int \vdash \lambda y.add\ x(add\ x\ y)}$$

Seien α und β beliebige Typen.

$$\frac{\frac{x : \alpha, y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y.x : \beta \rightarrow \alpha}}{\vdash \lambda xy.x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha}$$

2 Übung 2

1.

$$\Gamma = \emptyset, t = \lambda xyz.x(yz)$$

$$PT(\emptyset; \lambda xyz.x(yz); a_0)$$

$$PT(x : a_1; \lambda yz.x(yz); a_2) \{a_1 \rightarrow a_2 \doteq a_0\}$$

$$PT(x : a_1, y : a_3; \lambda z.x(yz); a_4) \{a_3 \rightarrow a_4 \doteq a_2\}$$

$$PT(\underbrace{x : a_1, y : a_3, z : a_5}_{\Gamma_0}; x(yz); a_6) \{a_5 \rightarrow a_6 \doteq a_4\}$$

$$PT(\Gamma_0; x; a_7 \rightarrow a_6) \quad PT(\Gamma_0, yz, a_7)$$

$$\{a_7 \rightarrow a_6 \doteq a_1\} \quad PT(\Gamma_0; y; a_8 \rightarrow a_7) \quad PT(\Gamma_0, z, a_8)$$

$$\{a_8 \rightarrow a_7 \doteq a_3\} \quad \{a_5 \doteq a_8\}$$

Unifikation:

$$\{a_1 \rightarrow a_2 \doteq a_0, a_3 \rightarrow a_4 \doteq a_2, a_5 \rightarrow a_6 \doteq a_4, a_7 \rightarrow a_6 \doteq a_1, a_8 \rightarrow a_7 \doteq a_3, a_5 \doteq a_8\}$$

Liefert also

$\text{elim } \{(a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow a_2 \dot{=} a_0, a_3 \rightarrow a_4 \dot{=} a_2, a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_4, a_7 \rightarrow a_6 \dot{=} a_1, a_8 \rightarrow a_7 \dot{=} a_3, a_5 \dot{=} a_8\}$
 $\text{elim } \{(a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow (a_3 \rightarrow a_4) \dot{=} a_0, a_3 \rightarrow a_4 \dot{=} a_2, a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_4, a_7 \rightarrow a_6 \dot{=} a_1, a_8 \rightarrow a_7 \dot{=} a_3, a_5 \dot{=} a_8\}$
 $\text{elim } \{(a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow (a_8 \rightarrow a_7) \rightarrow a_4 \dot{=} a_0, a_3 \rightarrow a_4 \dot{=} a_2, a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_4, a_7 \rightarrow a_6 \dot{=} a_1, a_8 \rightarrow a_7 \dot{=} a_3, a_5 \dot{=} a_8\}$
 $\text{elim } \{(a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow (a_8 \rightarrow a_7) \rightarrow a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_0, a_3 \rightarrow a_4 \dot{=} a_2, a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_4, a_7 \rightarrow a_6 \dot{=} a_1, a_8 \rightarrow a_7 \dot{=} a_3, a_5 \dot{=} a_8\}$
 $\text{elim } \{(a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow (a_5 \rightarrow a_7) \rightarrow a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_0, a_3 \rightarrow a_4 \dot{=} a_2, a_5 \rightarrow a_6 \dot{=} a_4, a_7 \rightarrow a_6 \dot{=} a_1, a_8 \rightarrow a_7 \dot{=} a_3, a_5 \dot{=} a_8\}$
 $\text{also } \vdash \lambda xyz.x(yz) : (a_7 \rightarrow a_6) \rightarrow (a_5 \rightarrow a_7) \rightarrow a_5 \rightarrow a_6$

2.

$PT(\Gamma, \lambda x.add(length\ x); a_0)$
 $PT(\underbrace{\Gamma[x \mapsto a_1]}_{\Gamma_1}, add(length\ x); a_2) \cup \{a_1 \rightarrow a_2 \dot{=} a_0\}$
 $PT(\Gamma_1, add; a_3 \rightarrow a_2) \quad PT(\Gamma_1, (length\ x); a_3)$
 $\{int \rightarrow int \rightarrow int \dot{=} a_3 \rightarrow a_2\} \quad PT(\Gamma_1, length; a_4 \rightarrow a_3) \quad PT(\Gamma_1, x; a_4)$
 $\{string \rightarrow int \dot{=} a_4 \rightarrow a_3\} \quad \{a_1 \dot{=} a_4\}$

mit zwischenumformungen:

$\{string \dot{=} a_4, int \dot{=} a_3, a_1 \dot{=} a_4, a_3 \dot{=} int, a_2 \dot{=} int \rightarrow int, a_0 \dot{=} a_1 \rightarrow a_2\}$
 elim
 $\{string \dot{=} a_4, int \dot{=} a_3, a_1 \dot{=} a_4, a_3 \dot{=} int, a_2 \dot{=} int \rightarrow int, a_0 \dot{=} a_4 \rightarrow a_2\}$
 $\{string \dot{=} a_4, int \dot{=} a_3, a_1 \dot{=} a_4, a_3 \dot{=} int, a_2 \dot{=} int \rightarrow int, a_0 \dot{=} string \rightarrow a_2\}$
 $\{string \dot{=} a_4, int \dot{=} a_3, a_1 \dot{=} a_4, a_3 \dot{=} int, a_2 \dot{=} int \rightarrow int, a_0 \dot{=} string \rightarrow int \rightarrow int\}$
 $\Gamma \vdash \lambda x.add(length\ x) : string \rightarrow int \rightarrow int$