Sitzung 13

Bildmodelle und Zufallsvariablen (3)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 8. Juni 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Nutzen des Begriffs Zufallsvariable.
2. Sie lernen verschiedenen Verteilungen kennen und wissen, welche Situationen diese Verteilungen angewendet werden können.
3. Sie können erklären, wie die Verteilungen in den Bildmodellen entstehen.
4. Sie kennen die Möglichkeiten, die Binomialverteilung zu approximieren.
5. Sie können mit den Begriffen gemeinsame Verteilung und Randverteilung arbeiten und den Zusammenhang zur stochastischen Unabhängigkeit herstellen.
6. Sie wissen, wie Summen von Zufallsvariablen gebildet werden und können die entstehenden Verteilungen mit Hilfe der Faltung berechnen.

Definition 6.5

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, Ω' eine (nicht leere) Menge, $\mathcal{A}'$ ein Ereignissystem über Ω' und $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable, dann ist die Zuordnung

$$A' \mapsto P^X(A') := P(X^{-1}(A')) = P(X \in A') \tag{1}$$

mit $A' \in \mathcal{A}'$ ein W-Maß über $(\Omega', \mathcal{A}')$.
P^X heißt **Bildmaß von P unter X** oder **Verteilung von X** (bzgl. P).
$\left(\Omega', \mathcal{A}', P^X\right)$ ist das **Bildmodell** von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unter X.

Satz 6.14

Es sei P^X eine Verteilung über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ und die Zufallsvariable $Y = a + bX$ eine lineare Funktion von X mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, hier $b > 0$.

1. *Besitzt P^X die VF F^X, dann besitzt P^Y die Verteilungsfunktion*

$$F^Y(y) = F^X\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

deswegen funkti

2. *Besitzt P^X die R-Dichte f^X, dann besitzt P^Y die R-Dichte*

$$f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

3. *Ist P^X die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ mit VF Φ und R-Dichte ϕ, dann hat $Y = a + bX$ die VF*

$$F^Y(y) = \Phi\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

und die R-Dichte

$$f^Y(y) = \frac{1}{b}\phi\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

Y entspricht der Normalverteilung $\mathcal{N}(a, b^2)$.

Visualisierung

https://www.studon.fau.de/pg730938_2897784.html

Folgerung 6.15

1. Ist X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ und der VF F^X, dann besitzt $Y = X^2$ die Verteilungsfunktion

$$F^Y(y) = F^{X^2}(y) = \left(F^X(\sqrt{y}) - F^X((-\sqrt{y})-)\right) 1_{[0,\infty)}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

2. Besitzt X eine R-Dichte f^X, dann hat $Y = X^2$ die R-Dichte

$$f^Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f^X(-\sqrt{y}) + f^X(\sqrt{y})\right) 1_{[0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

linksseitiger grenzwert, wegen evtl. sp

Transformationen von ZV ($Y = g(X)$)

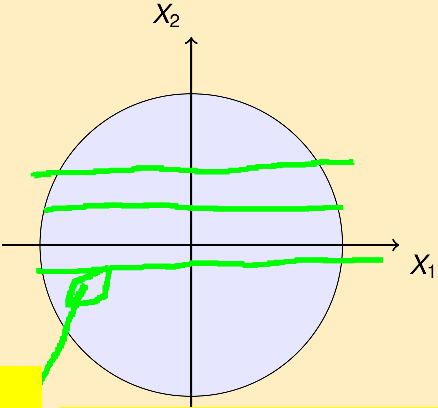
Besitzt die ZV X eine stetige Verteilung über $\mathbb{R}^2$ mit R-Dichte f^X und ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt für die VF F^Y der ZV $Y = g(X)$

$$F^Y(y) = P(Y \leqslant y) = \int_{B_y} f^X(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\, x_1 \, \mathrm{d}\, x_2, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

mit $B_y := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) \leqslant y \right\}$.
Dies lässt sich auf mehr als zwei Dimensionen übertragen.

häufig: Z = x_1+x_2

gekoppelte stetige Modelle



support

f(x_2) = int ^infty_-infty f^[X_1,X_2] (x_1,x_2) dx_1 v

Beispiel 6.25

Verteilung für die Auftragsarten 1,2,3 und die Auftragsdauer $d = 5, 10, 15, 20$:

t	Z-Dichte $f(t,d)$ $d=5$	$d=10$	$d=15$	$d=20$	$\sum = f^T(t)$
1	0,06	0,12	0,02	0,00	0,2
2	0,10	0,20	0,15	0,05	0,50
3	0,03	0,09	0,12	0,06	0,30
$\sum = f^D(d)$	0,19	0,41	0,29	0,11	$\sum = 1$

Die Produktdichte für das Beispiel 6.8

d hängt von t ab

t	$f(t,d) = f_1(t)f_2^1(t;d)$ $d=5$	$d=10$	$d=15$	$d=20$
1	0,2·0,3	0,2·0,6	0,2·0,1	0,2·0,0
2	0,5·0,2	0,5·0,4	0,5·0,3	0,5·0,1
3	0,3·0,1	0,3·0,3	0,3·0,4	0,3·0,2

2 stufiges problem: erste stufe t, zweite djedes f

Definition 6.27

Die Übergangsdichten

$$f_i^{i-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}; y_i) = P(Y_i = y_1 | Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

heißen **bedingte Dichten.** Die zugehörigen Übergangs-W-Maße heißen **bedingte Verteilungen**. Es wird auch $f^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ bzw. $P^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ geschrieben.

Definition 6.28

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ heißen **stochastisch unabhängig** wenn für die gemeinsame Verteilung die Produktformel

$$P^{Y_1,\ldots,Y_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P^{Y_1}(A_1)\cdots P^{Y_n}(A_n) \tag{9}$$

für beliebige Ereignisse $A_i \in \Omega_i$ gilt.

Folgerung 6.29

Besitzen die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ R-Dichten, dann ist die stochastische Unabhängigkeit äquivalent dazu, dass die gemeinsame Verteilung eine Produktdichte besitzt.

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 5.8-5.10
- Skript Kapitel 6.4-6.6 (`https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html`)

Fragen

1. Wie können aus einer gegebenen gemeinsamen Dichte $f^{(Y_1,\dots,Y_n)}$ rekursiv die Übergangsdichten
$$f_i^{i-1}(y_1,\dots,y_{i-1};y_i) \quad (i=1,\dots,n)$$
berechnet werden.
2. Gegeben sei die gemeinsame Dichte $f^{(Z_1,Z_2)}$ zweier stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen Z_1 und Z_2. Was können Sie daraus über den Träger $\operatorname{supp}\left(f^{(Z_1,Z_2)}\right)$ von $f^{(Z_1,Z_2)}$ schließen.
Hinweis: $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}}$.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)