Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

18. Juni 2020

1 4

$\Gamma = \{length : string \to int, name : person \to string\}$

$$
(\to_i)\ \dfrac{(\to_e)\ \dfrac{(\to_e)\ \dfrac{(AX)\ \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : person} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash name : person \to string}}{\Gamma_1 \vdash name\ x : string} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash length : string \to int}}{\underbrace{\Gamma[x \mapsto person]}_{\Gamma_1} \vdash length(name\ x) : int}}{\Gamma \vdash \lambda x.length(name\ x) : person \to int}
$$

2.

$$
(\to_i)\ \dfrac{(\to_i)\ \dfrac{(\to_i)\ \dfrac{(\to_e)\ \dfrac{\dfrac{(AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash y : int} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash f : int \to char \to string}}{\Gamma_2 \vdash fy : char \to string} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash x : char}}{\underbrace{\Gamma_1[y \mapsto int]}_{\Gamma_2} \vdash fyx : string}}{\underbrace{\Gamma[x \mapsto char]}_{\Gamma_1} \vdash \lambda y.fyx : int \to string}}{\underbrace{\{f : char \to int \to string\}}_{\Gamma} \vdash \lambda xy.fyx : char \to int \to string}}{\vdash \lambda fxy.fyx : (int \to char \to string) \to (char \to int \to string)}
$$

3.

$$
(\to_i)\ \dfrac{(\to_i)\ \dfrac{(\to_i)\ \dfrac{(\to_e)\ \dfrac{\dfrac{(AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash y : \alpha} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash f : \alpha \to \beta \to \gamma}}{\Gamma_2 \vdash fy : \beta \to \gamma} \qquad (AX)\ \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash x : \beta}}{\underbrace{\Gamma_1[y \mapsto \alpha]}_{\Gamma_2} \vdash fyx : \gamma}}{\underbrace{\Gamma[x \mapsto \beta]}_{\Gamma_1} \vdash \lambda y.fyx : \alpha \to \gamma}}{\underbrace{\{f : \beta \to \alpha \to \gamma\}}_{\Gamma} \vdash \lambda xy.fyx : \beta \to \alpha \to \gamma}}{\vdash \lambda fxy.fyx : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\beta \to \alpha \to \gamma)}
$$

Also genau das gleiche Nochmal

2 5

- $PT(\Gamma; \lceil 2 \rceil succ; a_0)$
  - $PT(\Gamma; \lceil 2 \rceil; a_1 \to a_0)$
    - $PT(\Gamma; \lambda fa.ffa; a_1 \to a_0)$
      - $PT(\underbrace{PT(\Gamma[f \mapsto a_2]}_{\Gamma_1}; \lambda a.ffa; a_3)$
        - $PT(\underbrace{\Gamma_1[a \mapsto a_4]}_{\Gamma_2}; ffa; a_5)$
          - $PT(\Gamma_2; f; a_6 \to a_5)$
            - $\{a_2 \doteq a_6 \to a_5\}$
          - $PT(\Gamma_2; fa; a_6)$
            - $PT(\Gamma_2; f; a_7 \to a_6)$
              - $\{a_7 \to a_6 \doteq a_2\}$
            - $PT(\Gamma_2; a; a_7)$
              - $\{a_7 \doteq a_4\}$
        - $\{a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$
      - $\{a_2 \to a_3 \doteq a_1 \to a_0\}$
  - $PT(\Gamma; succ; a_1)$
    - $\{a_1 \doteq int \to int\}$

Also zu Unifizierende Menge:

$\{a_1 \doteq int \to int, a_6 \to a_5 \doteq a_2, a_7 \to a_6 \doteq a_2, a_7 \doteq a_4, a_2 \to a_3 \doteq a_1 \to a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

elim $\{a_1 \doteq int \to int, a_6 \to a_5 \doteq a_2, a_7 \to a_6 \doteq (a_6 \to a_5), a_7 \doteq a_4, (a_6 \to a_5) \to a_3 \doteq (int \to int) \to a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

elim $\{a_1 \doteq int \to int, a_6 \to a_5 \doteq a_2, a_7 \to a_6 \doteq (a_6 \to a_5), a_7 \doteq a_4, (a_6 \to a_5) \to (a_4 \to a_5) \doteq (int \to int) \to a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

destruct: $\{a_1 \doteq int \to int, a_6 \to a_5 \doteq a_2, a_7 \doteq a_6, a_6 \doteq a_5, a_7 \doteq a_4, (a_6 \to a_5) \doteq (int \to int), a_4 \to a_5 \doteq a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

destruct $\{a_1 \doteq int \to int, a_6 \to a_5 \doteq a_2, a_7 \doteq a_6, a_6 \doteq a_5, a_7 \doteq a_4, a_6 \doteq int, a_5 \doteq int, a_4 \to a_5 \doteq a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

elim $\{a_1 \doteq int \to int, int \to int \doteq a_2, a_4 \doteq a_6, a_6 \doteq a_5, a_7 \doteq a_4, a_6 \doteq int, a_5 \doteq int, int \to int \doteq a_0, a_4 \to a_5 \doteq a_3\}$

Also ist der Typ von $\{succ : int \to int\} \vdash \lceil 2 \rceil succ : int \to int$.

2.

- $PT(\Gamma, \lambda xy.y(\lambda z.xsz), a_0)$
  - $\{a_0 \doteq a_1 \to a_2\}$
  - $PT(\underbrace{\Gamma[x \mapsto a_1]}_{\Gamma_1}, \lambda y.y(\lambda z.xsz), a_2)$
    - $\{a_2 \doteq a_3 \to a_4\}$
    - $PT(\underbrace{\Gamma_1[y \mapsto a_3]}_{\Gamma_2}, y(\lambda z.xsz), a_4)$
      - $PT(\Gamma_2, y, a_5 \to a_4)$
        - $\{a_3 \doteq a_5 \to a_4\}$
      - $PT(\Gamma_2, \lambda z.xsz, a_5)$
        - $\{a_6 \to a_7 \doteq a_5\}$
        - $PT(\underbrace{\Gamma_2[z \mapsto a_6]}_{\Gamma_3}, xsz, a_7)$
          - $PT(\Gamma_3, xs, a_8 \to a_7)$
            - $PT(\Gamma_3, x, a_9 \to (a_8 \to a_7))$
              - $\{a_1 \doteq a_9 \to (a_8 \to a_7)\}$
            - $PT(\Gamma_3, s, a_9)$
              - $\{a_9 \doteq string\}$
          - $PT(\Gamma_3, z, a_8)$
            - $\{a_8 \doteq a_6\}$

Daraus $\{a_0 \doteq a_1 \to a_2, a_2 \doteq a_3 \to a_4, a_3 \doteq a_5 \to a_4, a_6 \to a_7 \doteq a_5, a_1 \doteq a_9 \to (a_8 \to a_7), a_9 \doteq string, a_8 \doteq a_6\}$

elim: $\{a_0 \doteq (string \to (a_8 \to a_7)) \to (((a_6 \to a_7) \to a_4) \to a_4), a_2 \doteq ((a_6 \to a_7) \to a_4) \to a_4, a_3 \doteq (a_6 \to a_7) \to a_4, a_6 \to a_7 \doteq a_5, a_1 \doteq string \to (a_8 \to a_7), a_9 \doteq string, a_8 \doteq a_6\}$

elim: $\{a_0 \doteq (string \to (a_6 \to a_7)) \to (((a_6 \to a_7) \to a_4) \to a_4), a_2 \doteq ((a_6 \to a_7) \to a_4) \to a_4, a_3 \doteq (a_6 \to a_7) \to a_4, a_6 \to a_7 \doteq a_5, a_1 \doteq string \to (string \to a_7), a_9 \doteq string, a_8 \doteq a_6\}$

Also $\Gamma \vdash \lambda xy.y(\lambda z.xsz) : (string \to a_6 \to a_7) \to ((a_6 \to a_7) \to a_4) \to a_4$

3 6

a) $\lambda x.x$

b) $\lambda f.\lambda x.f$

c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y((xz)z)$

d) $\lambda zy.z(\lambda x.y)$

2.

Curry-Howard: $(p \to p) \to q \to p$ ist logisch nicht gültig.

(bzw wäre semantisch equivalent zu einer funktion, die eine funktion von $p \to p$ entgegennimmt, dann als argument ein q bekommt und wieder ein p herstellt. Es gibt keine Verbindung, um von dem q zu einem benötigten p zu kommen, also ungültig)

3.

a) $\Gamma \vdash \lambda x.xx : \alpha \implies$

$\alpha = \gamma \to \beta \; mit \; \Gamma[x \mapsto \gamma] \vdash xx : \beta \implies$

$\alpha = \gamma \to \beta \; mit \; (\Gamma[x \mapsto \gamma] \vdash x : \xi \to \beta \; und \; \Gamma[x \mapsto \gamma] \vdash x : \xi)$

Widerspruch in $x : \xi \to \beta$ und $x : \xi$ nicht unifizierbar.

b) $\{y : char\} \vdash \lambda x.yx : \alpha \implies \{y : char\} \vdash \alpha = \gamma \to \beta \; mit \; \{y : char, x : \gamma\} \vdash yx : \beta \implies$

$\{y : char\} \vdash \alpha = \gamma \to \beta \; mit \; (\{y : char, x : \gamma\} \vdash y : \xi \to \beta \; und \; \{y : char, x : \gamma\} \vdash x : \xi)$

Widerspruch in $y : \xi \to \beta$ und $y : char$, nicht unifizierbar.