Bearbeitete Aufgaben: A15, A16, A17

17/20 *30=25.5

A15

a) Höhe des Turms mit n vielen Würfeln in Meter: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{(n\to\infty)} +\infty$ (harmonische Reihe)

Der Turm wird also unendlich hoch.

b) Benötigte Farbe zum Streichen des Turms mit n vielen Würfeln in Quadratmeter:

$$F_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 5 \cdot \frac{1}{k^2}}_{\text{Seitenflächen und Dachfläche}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}}_{\text{Bodenfläche}} = 5 \cdot \frac{1}{1^2} + 4 \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 5 + 4 \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \forall n \geq 1$$

sum 1/k^2 = pi^2/2

Benötigte Farbe für einen Turm mit unendlich vielen Würfeln: $5 + 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergent lt. A.}}$

Es reicht zu zeigen: erste Rei

Somit wird nur endlich viel Farbe benötigt um den Turm aus unendlich vielen Würfeln zu streichen.

c) Benötigter Beton zum Bau des Turms aus n vielen Würfeln in Kubikmeter: $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

Benötigter Beton zum Bau des Turms aus unendlich vielen Würfeln in Kubikmeter: $B = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}}_{\text{konvergent lt. Angabe}}$

Somit wird ebenfalls nur endlich viel Beton benötigt um den Turm aus unendlich vielen Würfeln zu bauen.

d) Neue Formel für Kantenlänge der Würfel: $W_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

Neue Formel für die benötigte Farbe um den Turm zu streichen: $F = 5 + 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{divergent lt. Ü.}}$

Neue Formel für den benötigten Beton um den Turm zu bauen: $F = 5 + 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1,5}}}_{\text{konvergent lt. A.}}$

A16

a)

(i) Die Funktion $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$ ist offensichtlich stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

$$f(0) = 0^3 + \sin 0 - \cos 0 = -1 < 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} + 1 - 0 > 0$$

Somit hat die Funktion nach dem Nullstellensatz von Bolzano auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mindestens eine Nullstelle.
Da x^3 für $x > 0$ und $\sin x$ im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton steigend sind und $\cos x$ im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton fällt und somit die Negation $-\cos x$ ebenfalls streng monton steigt, ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend.
Somit hat $f(x)$ in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle.
$\rightsquigarrow f(x)$ hat in diesem Intervall genau eine Nullstelle

(ii) Die Funktion $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ ist offensichtlich stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.
$f(0) = e^0\cos(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$
$f(0) = e^{\frac{1}{2}}\cos(\pi\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$
Somit hat die Funktion nach dem Nullstellensatz von Bolzano auf $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ mindestens eine Nullstelle.
Da e^x streng monoton steigend ist, ist e^{-x} streng monoton fallend. Zudem ist e^{-x} stets positiv. $\cos \pi x$ ist für x im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ streng monoton fallend.
Somit ist dann auch das Produkt dieser beiden Terme subtrahiert mit einem Konstanten Fakter streng monoton fallend. Also ist $f(x)$ im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ streng monoton fallend, und $f(x)$ kann in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle haben.
$\rightsquigarrow$ die Funktion hat in diesem Intervall genau eine Nullstelle

b) Hilfsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$
Die Funktion h ist stetig, da sie aus der setetigen Anteilen $f(x)$ und x zusammengesetzt ist.
$h(a) = f(a) - a = b - a > 0$, da laut Angabe $a < b$ gilt
$h(b) = f(b) - b = a - b < 0$, da laut Angabe $a < b$ gilt
Somit gibt es nach dem Nullstellensatz von Bolzano mindestens eine Nullstelle in dem Intervall $[a, b]$, für die gilt $0 = f(x) - x \rightsquigarrow f(x) = x$

c)

$$\begin{aligned} D_f :&= \{11, 17\} \cup ([-5, 5] \setminus (-1, 1)) \\ &= \{11, 17\} \cup [-5, -1] \cup [1, 5] \\ \mathrm{HP}(D_f) &= [-5, -1] \cup [1, 5] =: A \\ D_f &= A \cup 11, 17 \end{aligned}$$

A ist abgeschlossen und offensichtlich beschränkt, somit ist A kompakt. Da $f(x)$ aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist und nur einer der beiden Faktoren, nämlich $\sin(x)$, negativ werden kann, ist auch $f(x)$ stetig.
Deshalb lässt sich der Satz aus der Vorlesung von der Existenz eines Maximums und eines Minimums auf $f(x)$ auf A anwenden.
Nun ist das Maximum der Funktion auf der Menge angewandt $max(f(11), f(17), max(A))$ und das Minimum $min(f(11), f(17), min(A))$

A17

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 2$$

(ii)

sin x

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin nx}{x} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot n \cdot \frac{\sin nx}{nx} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} \\ &= n! \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin nx}{nx} \cdot \cancel{\frac{1}{x}} \\ &= n! \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} \cdot \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}} \\ &= n! \cdot 1 \cdot \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Grenzwert existiert nicht - die Funktion ist unbestimmt divergent an der Stelle $x = 0$

(iii)

wo kommt das 1/x her?Das x ist sc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{1} \cdot \frac{1}{\sin 6x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \boxed{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 6x}{6x}} \cdot \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Grenzwert existiert nicht - die Funktion ist unbestimmt divergent an der Stelle $x = 0$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin 2x}{x}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{x}{2}-1+1}{x} + \frac{\sin 2x}{x}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}} - \frac{1}{x} + \frac{\sin 2x}{x}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}}}_{\to 0} + 2\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

hier teilst du den bruch auf,um das gleich

(v)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) &= \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\cos x - 1 + 1}{x}\cdot\pi\cdot\sin x\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\cos x - 1}{x}\cdot\pi\cdot\sin x + \frac{1}{x}\cdot\pi\cdot\sin x\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \cos\left(\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x}}_{\to 0}\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin x}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\pi\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \cos(\pi) = \cos(\pi) = -1
\end{aligned}
$$

x unter sinus schieben:pi * s