Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

22. Juli 2020

Norm ist eine Abbildung $||\cdot||:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

1) $||x||\geq 0$ und $||x||=0 \implies x=\vec{0}$

2) $\alpha||x||=||\alpha x||$

3) $||x+y||\leq ||x||+||y||$

Durch $||\cdot||$ erzeugte Operatornorm: $|||\cdot|||:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$

$|||A|||=max\{||A\cdot x||\ |x\in\mathbb{R}^n,||x||=1\}$

$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

Spaltensummennorm $|||\cdot|||_1$ wird durch die 1-Norm $||\cdot||_1$ erzeugt.

$$|||A|||_1=max_{k=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^{n}a_{jk}=max(|3|+|1|,|-4|+|-2|)=max(4,6)=6$$

k ist spaltenindex, j ist Zeilenindex.

$$||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

Zeilensummennorm $|||\cdot|||_\infty$ wird erzeugt durch die maximumsnorm.

$$|||A|||_\infty=max_{j=1,\ldots,n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|=max(3+4,1+2)=7$$

Frobeniusnorm ist keine Induzierte Norm (ist aber kompatibel mit der Euklid-norm). Behandelt die Matrix wie einen Vektor

$$|||A|||_F=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}a_{jk}^2}=\sqrt{9+16+1+4}=\sqrt{30}$$

Spektralnorm $|||\cdot|||_2$ wird erzeugt durch euklidische Norm $|||\cdot|||_2=\sqrt{\lambda_{max}}$ wobei λ_{max} der größte EW von A^TA ist.

$$AA^T=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\to EW(\lambda_1=15+\sqrt{221},\lambda_2=15-\sqrt{221})$$

$$|||A|||_2=\sqrt{15+\sqrt{221}}\approx 5,464$$

i.A.

$$\kappa(A) = \frac{max\{||Ax|| \mid ||x|| = 1\}}{min\{||Ax|| \mid ||x|| = 1\}} = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$$

falls A invertierbar

spez κ_2 Konditionszahl bzgl $|| \cdot ||_2$

$$\kappa_2(A) = |||A|||_2 \cdot |||A^{-1}|||_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} = \frac{\sqrt{15+\sqrt{221}}}{\sqrt{15-\sqrt{221}}} \approx 14,933$$

Frobenius aus SVD

$$\sqrt{spur(AA^T)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2} = |||A|||_F$$

$spur(AA^T)$ die spur ist gleich der summe der Eigenwerte von AA^T

Singulärwerte von A. $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \rightarrow |||A|||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$

Spektralnorm mit SVD

$$|||A|||_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

also einfach der Singulärwert ganz oben links in der mitte.

Konditionszahl ist links oben geteilt durch rechts unten.

aus matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit vollem Rang ($Rank(B) = m$) gilt:

B^TB ist nicht singulär.

$\rightarrow B^TB$ hat die EW $\lambda_i = \sigma_i^2, 1 \leq i \leq m, \lambda_i > 0$, da die matrix Rang m hat.

$\rightarrow det(B^TB) = \prod_{i=1}^m \lambda_i > 0 \implies B^TB$ ist invertierbar.

Zeige $(B^TB)^{-1}B^T = B^{\sim 1}$

die Pseudoinverse ist einfach $\sigma^{\sim 1}$ mit den reziproken singulärwerten. und gedrehten dimensionen $\mathbb{R}^{m\times n}$ (also wir haben $V\Sigma^{\sim 1}U^T$

$B^TB = (U\Sigma V^T)^T\Sigma V^T = V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{=E_n} \Sigma V^T = V \underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{=x;\ diagonalmatrix\ aus\ eigenwerten\ invertierbar} V^T$

$$(B^TB)^{-1}B^T = (VXV^T)^{-1}(U\Sigma V^T)^T = VX^{-1}V^TV\Sigma U^T = VX^{-1}\Sigma^T U^T$$

$$X^{-1}\Sigma^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} = \Sigma^{\sim 1}$$

und das ist mal $V\Sigma^{\sim 1}U^T = B^{\sim 1}$

d)

zZ.:$x = B^{\sim 1}b$ löst die gleichung

$$B^T(Bx - b) = 0 \iff B^TBx - B^Tb = 0 \iff B^TBx = B^Tb \iff x = \underbrace{(B^TB)^{-1}B^T}_{B^{\sim 1}} b \iff x = B^{\sim 1}b$$

Also statt $A^T Ax = A^T b$ umzustellen, um x zu bekommen

$$x = A^{\sim 1} b$$

ist numerisch auch meist die beste Lösung. (falls A tatsächlich invertierbar, dann gilt $A^{\sim 1} = A^{-1}$)