Deckblatt f. d. Abgabe d. Übungsaufgaben
Ing Math C2

Name, Vorname: Gavril, Vasily

StudOn Kennung: og65akyh

Blatt-Nummer: 06

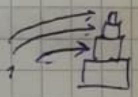
Übungsgruppen-Nr.: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur f

A15, A16, A17

20/20*30 = 30

Gesamt

(A15) $h = \frac{1}{k}$, W_{k+1} 

a) Der Turm wird unendlich hoch, denn

$h_W = \frac{1}{k} \Rightarrow h_{ges} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, harmonische Reihe ist divergent.

b) A_W (Seite) $= 4\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}\right) = 4\frac{1}{k^2}$

$A_W = 4\frac{1}{k^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)}_{\text{Dach}} \Rightarrow A_{ges} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 5\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \frac{1}{\infty}$ $\to 0$

letzten Dach ist sehr klein

$A_{ges} = 5\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\text{konvergent}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}}_{\text{konvergent}} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ (*) $\Rightarrow$ ~~divergent~~

$\Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow A_{ges}$ = konvergent

$\Rightarrow$ Kann mit endlich viel Farbe gestrichen werden.

c) $V_W = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^3}$

$\Rightarrow V_{ges} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ $\Rightarrow$ konvergent

$\Rightarrow$ Ja, er reicht endlich viel.

d) $h = \frac{1}{k^{\frac{3}{7}}}$ Nach (*) $A_{ges} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{7}}}\cdot\frac{1}{k^{\frac{3}{7}}}$

$\alpha = \frac{6}{7} < 1$ $= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{6}{7}}}$

Nach (P11) a) ist Reihe divergent $\Rightarrow A_{ges}$ unbegrenzt

$V_k = \frac{1}{k^{\frac{3}{7}}}\cdot\frac{1}{k^{\frac{3}{7}}}\cdot\frac{1}{k^{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{k^{\frac{8}{7}}}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{8}{7} > 1$

Zu (P11) b) und genau für $\alpha > 1$ ist Reihe konvergent

$\Rightarrow V_{ges}$ ist konvergent $\Rightarrow$ Ja man kann.

A16

a) (i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$, $(0, \frac{\pi}{2})$

x^3 ist stetig, $\sin x$ ist stetig, $\cos x$ ist stetig

=> $f(x)$ ist stetig

$f(0) = 0 + \sin(0) - \cos(0) = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + 1 - 0 = \frac{\pi^3}{8} + 1 > 0$

=> nach Bolzano min. 1 Nullstelle.

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 + \underbrace{\cos(x) + \sin(x)}_{x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \ldots > 0}}_{\ldots > 0 \text{ bei } x \in (0, \frac{\pi}{2})}$$ => monoton steigend

=> Genau eine Nullstelle.

(ii) $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ $x \in (0, \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{e^x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ → stetig

$f(0) = \frac{1}{e^0}\cos(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \underbrace{\cos(\pi \frac{1}{2})}_{0} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

=> nach Bolzano min. 1 Nullstelle.

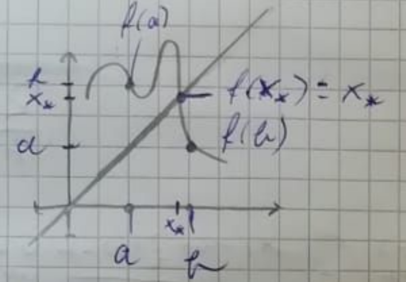
$f'(x) = (-1)e^{-x}\cos(\pi x) + e^{-x}(-\sin(\pi x)\pi)$

$$= \frac{1}{e^x} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{(-\cos \pi(x))}_{>0,\, x \in (0, \frac{1}{2})} - \pi \underbrace{\sin(\pi x)}_{>0\, x \in (0, \frac{1}{2})}\right)}_{<0,\, x \in (0, \frac{1}{2})}$$

=> monoton fallend

=> Genau eine Nullstelle

Gauß

b) 

<u>Hilfsfunktion</u>: $\underline{g(x) = x}$, (für $\forall x$ gilt $g(x) = x$)

Nun ist; $f(a) > a$, da $f(a) = b \wedge b > a$

$\Rightarrow \underline{f(a) > g(a)}$,

Dagegen kommt: $f(b) < b$, da $f(b) = a \wedge a < b$

$\Rightarrow \underline{f(b) < g(b)}$.

Da beide Funktionen stetig sind, müssen sie sich nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano min. ein Mal schneiden. ■, oder Bildmenge $g(x)$ in ~~zwischen~~ (a, b) ist $\in (b, a) \wedge f(a) = b \wedge f(b) = a \wedge f$ ist stetig

$\Rightarrow g(a)$ muss $f(a)$ schneiden.

c) $\{11, 17\}$ ist klar abgeschlossen.
$\wedge ([-5, 5] \setminus (-1, 1))$ ist auch abgeschlossen, da die Randpunkte $-1 \wedge 1$ ja noch dabei sind.
$\Rightarrow$ <u>D_f ist abgeschlossen</u>.) 1

Da $:= e^{\hat{x}}$ stetig $\hat{x} = -x^2$ stetig und $\sin(x)$ stetig ist, ist auch $f(x)$ <u>stetig</u>.) 2

D_f ist auch klar ersichtlich <u>beschränkt</u>.) 3

<u>Satz 1</u>: Eine Menge die abgeschlossen und beschränkt ist heißt <u>kompakt</u>.

[<u>Satz 2</u>: Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum und Minimum an]

A17

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

$= 2 \cdot \frac{1}{1} = \underline{2}$ ✓✓

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \ldots \frac{\sin nx}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{(x)} \cdot \frac{2\sin(2x)}{(2x)} \cdot \frac{3\sin(3x)}{(3x)} \cdot \ldots \cdot \frac{n\sin(nx)}{(nx)}\right)$ ✓

$= n! \left(\lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \underbrace{\frac{\sin\tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot \frac{\sin\tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\tilde{x}}{\tilde{x}}}_{n \text{ mal } \to 1}\right) = n! \cdot 1 = \underline{n!}$ ✓

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(6x)} = \lim\limits_{x\to 0} 5x\left(\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{\sin(6x)}{6x}\right)}\right) \cdot \frac{1}{6x}\right)$ ✓

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5\cancel{x}}{6\cancel{x}} \left(\left(\frac{\sin(5x)}{(5x)}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin(6x)}{(6x)}\right)}\right) = \frac{5}{6} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{1}\right) = \underline{\frac{5}{6}}$ ✓

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos\frac{x}{2} + \sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{x} + \frac{2\sin 2x}{2x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right) + \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2\sin(2x)}{(2x)}\right)$ ✓

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{(x/2)}\right) + 2 = \left(-\frac{1}{2} \cancel{\ldots}\right)^{0} + 2 = \underline{\cancel{1}2}$ ((endlich))

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1 - \cos\frac{x}{2} + \sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1 - \cos\frac{x}{2} + \sin 2x}{x}\right)}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ ✓

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \sin x \cos x\right)$

$$\underset{\tilde{x} \to 1}{} \qquad \underset{\tilde{x} \to 1}{}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos\left(\pi \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot (\cos x)\right)$$

$$= \lim_{\tilde{x} \to 1} \cos\left(\pi \cdot \tilde{x} \cdot \tilde{x}\right) = \cos(\pi) = \underline{-1}$$