Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Bodky, Daniel

StudOn-Kennung: as37alyj

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9,

9/10*30 = 27

A7 a)

i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

Einschachteln:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)+\frac{1}{n}\cdot(-1)}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{5+1+\frac{1}{n}\cdot 1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$

$\to$ a_n konvergiert gegen 0

ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$

Einschachteln:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{5\cdot(-1)-2\cdot 1}{6+(-1)-1} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{5\cdot 1-2\cdot(-1)}{6+1-(-1)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{-7}{4} \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{7}{8} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq 0$$

$\to$ b_n konvergiert gegen 0

b)

i) $a_n = ((-1)^n+1)n$ $\to$ ∞ viele Teilfolgen der Form $(-1+1)n$ (n für)
$\to$ ∞ viele Teilfolgen der Form $(1+1)n$ (n für)

$\to$ Häufungspunkte 0 (Lim. inf.) und $+\infty$ (Lim. sup.)

ii) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ $\to$ zyklisch

$\to$ Häufungspunkte -1 (Lim. inf.) und 1 (Limes sup.)

iii) $a_n = \begin{cases} -n, & \text{falls } n \leq 17 \\ n, & \text{falls } n > 17 \end{cases}$

$\to$ Häufungspunkt $+\infty$

iv) $a_n = q^n$

$\rightarrow$ Häufungspunkte für $q > 0$: $+\infty$

für $q = 0$: 0

für $q < 0$: $+\infty$, $-\infty$

A8

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} \rightarrow \lim_{k\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{k}+1} = \frac{1}{1} = 1$ ✓

$\rightarrow a_n$ konvergiert nicht gegen 0, also ist s_k divergent. ✓

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$

Wurzelkriterium:

$\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{k\cdot(3k+2)}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} \leq \sqrt[k]{\left|\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} =: \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2k}} = \sqrt{\frac{1}{k}}$ ✓

$\rightarrow$ da $k \geq 2$ ✓, ist $\sqrt{\frac{1}{k}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$ für alle k. s_k konvergiert. ✓

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$

Wurzelkriterium:

$\sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} < 1$ ✓ für $k > 1$ ✓

$\rightarrow s_k$ konvergiert

Nein

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = (\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1})\cdot 2^{-k}$

Quotientenkriterium: $\left|\frac{(\sqrt{k+3}-\sqrt{k})\cdot 2^{-(k+1)}}{(\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1})\cdot 2^{-k}}\right|$

$= \left|\frac{(\sqrt{k+3}-\sqrt{k})\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})}{(k+2-k+1)\cdot 2}\right|$ ✓ $= \left|\frac{\sqrt{k^2+5k+6}+\sqrt{k^2+2k-3}-\sqrt{k^2+2k}-\sqrt{k^2-k}}{6}\right|$ ✓

$\leq \left|\frac{(k+3)+(k+1)-k-(k-1)}{6}\right| = \frac{5}{6}$ ✓

$\rightarrow s_k$ konvergiert.

A9 a)

i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4+\overbrace{\frac{3}{k}}^{0 \text{ für } k\to\infty}}{3k-\underbrace{\frac{4}{k}}_{0 \text{ für } k\to\infty}} \to \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergente Minorante

$\to \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ ist divergent

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$, $a_k = \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}} = \frac{4}{3}$

$\to a_k$ ist keine Nullfolge, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ ist divergent.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent, Begründung s. A9 a) i)

b) i) Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte reelle Folge hat (mindestens) einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Schranken: 1: $-1, 1$

2: $-1, 1$

3: $-1, 1$

$\to$ Die Folgen müssen mindestens einen Häufungspunkt besitzen.

ii) Häufungspunkt für 3: $\underline{0}$