Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Pöhl, Celine

StudOn-Kennung: ul14yguf

Blatt-Nummer: 3

Du musst die alte lösung löschen, sonst muss

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A 7, A 8, A ,

8.5/10*30=25.5

Mathe, 3. Aufgabenblatt

Pöhl, Celine

A7

Grenzwert berechnen

a) (i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5) + \lim\limits_{n\to\infty}(-1^n) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2} = 0$$

(ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{0} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \overset{-5;5}{5\sin(2n)} - \lim\limits_{n\to\infty} \overset{-2;2}{(2\sin(3n))}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} \underset{-1;1}{\cos(4n)} - \lim\limits_{n\to\infty} \underset{-1;1}{\cos(5n)}}$$

→ beschränkt zwischen

$\frac{-7}{8}$ und $\frac{7}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) (i) $a_n = ((-1)^n + 1)\, n$

$HP = \{0 ; +\infty\}$

$\lim\sup a_n = +\infty$

$\lim\inf a_n = 0$

(ii) $a_n = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{0,1,0,-1} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{1,0,-1,0}$

$HP = \{1 ; -1\}$

$\lim\sup a_n = 1$

$\lim\inf a_n = -1$

Pöhl, Celine

(iii) $a_n = \begin{cases} -n & \text{falls } n \leq 17 \\ n & \text{falls } n > 17 \end{cases}$

$HP = \{ \quad +\infty \}$

$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$

(iv) $a_n = q^n \qquad q \in \mathbb{R}$ beliebig

für $q > 1$ $HP = \{+\infty\}$

$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$

für $q < -1$ $HP = \{-\infty; +\infty\}$

$\limsup a_n = +\infty$

$\liminf a_n = -\infty$

für $-1 < q < 1$ $HP = \{0\}$

$\limsup a_n / \liminf a_n = 0$

für $q = -1$ $HP = \{-1; 1\}$

$\limsup a_n = 1$

$\liminf a_n = -1$

für $q = 1$ $HP = \{1\}$

$\limsup a_n / \liminf a_n = 1$

A8 Konvergenz untersuchen

Celine Pöhl

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$$

Divergenzkriterium

$$\frac{k}{2+k} = \frac{k}{k\left(\frac{2}{k}+1\right)} = \frac{1}{\frac{2}{k}+1} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

geht nicht gegen 0, also ist Reihe divergent

b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^{\,k}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|\sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^{\,k}\right|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \sqrt{\frac{k \cdot \left(1-\frac{1}{k}\right)}{k^2 \cdot \left(3+\frac{2}{k}\right)}} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \cdot \frac{1-\frac{1}{k}}{\underbrace{3+\frac{2}{k}}_{\to 0}}}$$

$\lim\limits_{k \to \infty} \to 0$

$\lim\sup < 1 \rightarrow$ konvergiert

c) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{|\sin k|}}{k} = 0$$

$\limsup\limits_{k \to \infty} < 1 \rightarrow$ Konvergent

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k}$

Celine Pöhl

Quotientenkriterium

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k}}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}$ ✓

$\lim_{k\to\infty} = \frac{1\cdot(\overbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}^{\to 1})}{2(\underbrace{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}_{\to 1})} \Rightarrow \frac{1}{2}$

Beweis: Erstmal steht hier infty/infty

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \to$ konvergent ✓

Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Pöhl, Celine

StudOn-Kennung: ul14yguf

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A 7, A 8, A 9, ____

Pöhl, Celine

Mathe, 3. Aufgabenblatt

A7

Grenzwert berechnen

a) (i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(5) + \lim_{n\to\infty}((-1)^n) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\right)}{\lim_{n\to\infty} n^2}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{\lim_{n\to\infty} n^2} = 0$$

(ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{0} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} \overset{-5;5}{5\sin(2n)} - \lim_{n\to\infty}(\overset{-2;2}{2\sin(3n)})}{\lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \underset{-1;1}{\cos(4n)} - \lim_{n\to\infty} \underset{-1;1}{\cos(5n)}}$$

$\to$ beschränkt zwischen

$\frac{-7}{8}$ und $\frac{7}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) (i) $a_n = ((-1)^n + 1)\, n$

$HP = \{0 ; +\infty\}$

$\lim\sup a_n = +\infty$

$\lim\inf a_n = 0$

(ii) $a_n = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{0,1,0,-1} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{1,0,-1,0}$

$HP = \{1 ; -1\}$

$\lim\sup a_n = 1$

$\lim\inf a_n = -1$

(iii) $a_n = \begin{cases} -n & \text{falls } n \leq 17 \\ n & \text{falls } n > 17 \end{cases}$

Pöhl, Celine

$HP = \{ \quad +\infty \}$

$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$

(iv) $a_n = q^n$ $\quad q \in \mathbb{R}$ beliebig

für $q > 1$ $HP = \{+\infty\}$

$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$

für $q < -1$ $HP = \{-\infty; +\infty\}$

$\limsup a_n = +\infty$

$\liminf a_n = -\infty$

für $-1 < q < 1$ $HP = \{0\}$

$\limsup a_n / \liminf a_n = 0$

für $q = -1$ $HP = \{-1; 1\}$

$\limsup a_n = 1$

$\liminf a_n = -1$

für $q = 1$ $HP = \{1\}$

$\limsup a_n / \liminf a_n = 1$

A8 Konvergenz untersuchen

Celine Pöhl

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$

Divergenzkriterium

$$\frac{k}{2+k} = \frac{k}{k(\frac{2}{k}+1)} = \frac{1}{\frac{2}{k}+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

geht nicht gegen 0, also ist Reihe divergent

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^{\,k}$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^{\,k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \sqrt{\frac{k\cdot(1-\frac{1}{k})}{k^2\cdot(3+\frac{2}{k})}} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{1}{k}}{3+\frac{2}{k}}}_{\to 0}}$$

$\lim_{k\to\infty} \to 0$

lim sup < 1 $\to$ konvergiert

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\sin k}}{k} = 0$$

$\limsup_{k\to\infty} < 1 \to$ Konvergent

Celine Pöhl

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k}$

Quotientenkriterim

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k}}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} = \frac{1\cdot(\overbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}^{\to 1})}{2(\underbrace{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}_{\to 1})} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \to \text{konvergent}$$

A9 Pöhl, Celine

a)

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} \geq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert}}$

$\rightarrow$ Minorantenkriterium $\rightarrow$ Reihe divergiert

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{k^2(4+\frac{3}{k^2})}{k^2(3-\frac{4}{k^2})} = \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}}$

$\lim_{k\to\infty} (a_k) = \frac{4}{3} \neq 0 \rightarrow$ Divergenzkriterium

$\rightarrow$ Reihe divergiert

(iii) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\sqrt{k} \leq k$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$

divergiert

$\rightarrow$ Minorantenkriterium: Reihe divergiert

b) Jede beschränkte komplexe (reelle) Folge hat mind. einen HP in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)

i) ① $\sin n \in [-1,1] \rightarrow$ beschränkt

$\hookrightarrow$ mind. 1 HP

② $\sin(n^2) \in [-1,1] \rightarrow$ beschränkt

$\hookrightarrow$ mind. 1 HP

③ $\sin n \in [-1,1] \rightarrow \frac{\sin n}{n} \in [-1,1]$

$\rightarrow$ beschränkt $\rightarrow$ mind 1 HP

ii) ③ HP: 0