Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Sadeghi, Sara

StudOn-Kennung: ky40jemy

Blatt-Nummer: 02

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ______

18/21 * 30=24

Sara Sadeghi

A4

a) I.A $(n=1)$: $a_1 = 1 \in (0,4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ✓

I.S $(n \to n+1)$: Es gelte $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (I.V.) z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \in (0,2) \\ a_n \in (0,4) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+1} := \underbrace{\frac{1}{2} a_n}_{\in (0,2)} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\in (0,2)} \in (0,4) \checkmark$$

b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{\underbrace{\sqrt{a_n}}_{\in (0,2)}}}^{\text{immer größer als } \frac{1}{2}} > 1 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

$$a_n \in (0,4) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} < 1$$

c) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge ist (in $\mathbb{R}$) konvergiert, und zwar gegen ihr Supremum. Nach a) und b) $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert

$$\text{rek. gl. } \underbrace{a_{n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} a} = \underbrace{\frac{1}{2} a_n}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}a} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}} \overset{RR}{\Longrightarrow} a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{2} a = 0$$

$$a\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \begin{array}{l} \to a_1 = 0 \\ \searrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a_2 = 4 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow a \in \{0,4\}$$

Die Folge ist monoton wachsend und startet bei $x_1 = 1$, d.h. 4 scheidet als Grenzwert/Sup aus, also kommt nur $a=4$ in Frage.

A5

a) I.A. $(n=0)$: $a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{1-1}{x_1 - x_2} = 0 = a_0$ Passt. $(a=1)$: $a_1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1 = a_1$ Passt. ✓

I.V.: Es gelte $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ für $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ✓ sowie für $n-1$ (I.V.) $a_{n-1} = \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$ ✓

I.S. $(n \to n+1)$ z.z $a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$ $\quad * \; x^2 = \alpha x + \beta$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} = \alpha \cdot \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \cdot \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \checkmark$$

$$\frac{\alpha x_1 \cdot \underline{\alpha x_1^{n-1}} - \alpha x_2 \cdot \underline{\alpha x_2^{n-1}} + \underline{\beta x_1^{n-1}} - \underline{\beta x_2^{n-1}}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} \overset{(*)}{=} \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2 - x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} \checkmark$$

$$= \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}.$$

b) i) $x^2 = \alpha x + \beta \Leftrightarrow x^2 - \alpha x - \beta = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{+\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}$, Da $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ muss $\sqrt{\alpha^2+4\beta} \geqslant 0$ sein.

$\Rightarrow \alpha^2 + 4\beta < 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt nicht

x muss nicht aus R sein, nur alpha und beta

ii) $\Rightarrow \alpha^2 + 4\beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. $\Rightarrow x_1 = x_2$

Was steht dann im Nenner des Bruchs?

c) i) $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{2\sqrt{5}}{\cancel{2}}}$

$a_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1$, $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot a_{n-1} = a_n + a_{n-1} = 1$ ✓

$a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, ...

ii) $x^2 = 4x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+28}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{11})}{2} = 2 \pm \sqrt{11} \Rightarrow a_n = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2 \cdot \sqrt{11}}$

$a_2 = \frac{(2+\sqrt{11})^2 - (2-\sqrt{11})^2}{2\sqrt{11}} = 4$, $a_{n+1} = 4a_n + 7a_{n-1} \Rightarrow a_2 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 7 = 4$ ✓

$a_3 = 16 + 7 = 23$, $a_4 = 120$, ...

$(-i)^n$

iii) $x^2 = -1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm i \Leftrightarrow a_n = \frac{i^n + \boxed{i^n}}{2i} \Rightarrow a_2 = \frac{i^2 + i^2}{2 \cdot i} = \frac{-1-1}{2 \cdot i} = \frac{-2}{2i} = \frac{-1}{i} = -1(-i) = i \Rightarrow$ ~~komplexe Zahlen (nicht reell)~~

$a_3 = \frac{i^3 + i^3}{2i} = \frac{-i-i}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1$, ...

A6

a) Typus "$\frac{\infty}{\infty}$" $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\overbrace{\left(2 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)}^{\to 2}}{\cancel{n^3}\underbrace{\left(3 + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$

b) Typus "$\frac{\infty}{\infty}$" $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5+2n)^3}{(1+n)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left[n\left(\frac{5}{n}+2\right)\right]^3}{\left[n\left(\frac{1}{n}+1\right)\right]^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(\frac{5}{n}+2\right)^3}{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n}+1\right)^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{5}{n}+2\right)}^{\to 2}{}^3}{\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}+1\right)}_{\to 1}{}^3} = \frac{2^3}{1^3} = 8$

e) Typus "$\infty - \infty$" $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}\right)\left(\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}\right)}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{2n^2} + n + 1 - \cancel{2n^2} - 9n}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-8n}{\sqrt{2n^2+n+1} + \sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\overbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - 8\right)}^{\to -8}}{\cancel{n}\left(\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{9}{n}}\right)}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 8}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{9}{n}}} = \frac{0-8}{\sqrt{2+0+0} + \sqrt{2+0}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

Typus "$\infty - \infty$"

d) $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}\right)\cdot\left(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^6}-\cancel{n^6}+n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} = \frac{0+0}{1+\sqrt{1+0+0}} = 0 /\!\!/$$

e) Typus "$\infty - \infty$" $\Rightarrow$ $$\lim_{n\to\infty} e_n \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3}\right)}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}+n^3-\cancel{n^4}+n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n^3}}{\cancel{n}\left(\sqrt[4]{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}}+\sqrt[4]{1-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}}\right)\cdot \cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}}+\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}}\right)} = \frac{2}{\underbrace{\left(\sqrt[4]{1+0}+\sqrt[4]{1-0}\right)}_{2}\underbrace{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}_{2}} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} /\!\!/$$

f) $$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}-2n^2}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{-1}{1+0+0} = -1 /\!\!/$$