Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Niklas Schmitt

StudOn-Kennung: ra72hyru

Blatt-Nummer: 02

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ____

17/21 *30 = 24

Niklas Schmitt - ra72hyru

A4)

a) I.A. $(n=1)$: $a_1 = 1 \in (0,4)$

I.S. $(n \to n+1)$: I.V.: Es gelte $a_n \in (0,4)$ $n \in \mathbb{N}$

z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \in (0,2) \\ a_n \in (0,4) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} = a_{n+1} \in (0,4)$$

$\square$

~~b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = -\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$~~

b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq 1$$, da $\frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq \frac{1}{2}$ $(a_n \in (0,4))$

c) ~~Aus a) folgt: Folge a_n ist beschränkt~~

Aus a) folgt: Die Folge (a_n) ist nach oben beschränkt, aus b) folgt: Die Folge wächst monoton, also folgt, dass sie konvergiert. $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\downarrow\, a} = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2} a_n}_{\downarrow\, \frac{1}{2} a} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\downarrow\, \sqrt{a}}}_{\downarrow (n \to \infty)\ \frac{1}{2} a + \sqrt{a}} \quad \Big| \lim_{n \to \infty}$$

(Grenzwert: a)

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} a = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{4} a^2 = a \Leftrightarrow \frac{1}{4} a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$

Niklas Schmitt - ra72hyrn

A15)

a) I.A. $(n=0)$: $a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{0}{x_1 - x_2} = 0$ ✓

$(n=1)$:

$a_1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1$ ✓ ✓

I.S. $(n \to n+1)$:

I.V.: $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ ✓ ; $a_{n-1} = \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$ ✓

$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$ = siehe nächste Seite

$= \alpha\left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) =$

$= \alpha\left(\frac{x_1^n}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^n}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) =$

$= \alpha x_1 \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \alpha x_2 \cdot \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} + \beta \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \beta \cdot \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$

$= \alpha \frac{x_1^n}{x_1 - x_2} - \alpha \frac{x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \beta \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$

$= (\alpha \cdot \beta) \cdot \left[\frac{x_1^n}{(x_1 - x_2) \cdot \beta} + \frac{x_1^{n-1}}{(x_1 - x_2) \cdot \alpha}\right] - \alpha\beta\left[\frac{x_2^n}{(x_1 - x_2)\beta} + \frac{x_2^{n-1}}{(x_1 - x_2) \cdot \alpha}\right] =$

$= \alpha\beta \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} \cdot \left[\frac{x_1}{(x_1 - x_2)\beta} + \frac{1}{\alpha}\right] - \alpha\beta \cdot \frac{x_2^{n-1}}{(x_1 - x_2)} \left[\frac{x_2}{(x_1 - x_2)\beta} + \frac{1}{\alpha}\right] =$

$=$

Niklas Schmitt – ra72hyru

A5) a)

$$\ldots = \alpha \cdot \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \cdot \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$

$$= \alpha \cdot \left(\frac{x_1^n}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^n}{x_1 - x_2} \right) + \beta \cdot \left(\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} \right) =$$

$$= \alpha \frac{x_1^n}{x_1 - x_2} - \alpha \frac{x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} - \beta \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$

Diese Beiden sch

$$= \alpha\beta \cdot \left(\frac{x_1^n}{(x_1 - x_2) \cdot \beta} + \frac{x_1^{n-1}}{(x_1 - x_2) \cdot \alpha} \right) - \alpha\beta \cdot \left(\frac{x_2^n}{(x_1 - x_2) \cdot \beta} + \frac{x_2^{n-1}}{(x_1 - x_2) \cdot \alpha} \right) =$$

$$= \alpha\beta \left[\frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} \cdot \left(\frac{x_1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} \cdot \left(\frac{x_2}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \right] =$$

$$= \frac{x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} \cdot (\alpha x_1 + \beta) - \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} (\alpha x_2 + \beta) =$$

$\leftarrow \alpha x_{1/2} + \beta = x^2$

$$= \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2}{x_1 - x_2} - \frac{x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

$\square$

Niklas Schmitt – ra72hyru

A5) i) Ja, allerdings nur noch in $\mathbb{C}$, da $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4\beta}}{-2}$ (*) Wurzel negativ

b) ~~i) Nein, da $x^2 - \alpha x + \beta$ dann keine Lösung mehr hat~~ $\left(\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4\beta}}{-2}\right)$

ii) ~~Ja, wäre dann ähnlich wie bei Fibonacci $x_1 = x_2$~~

Nein, da dann $x_1 = x_2$, da (*) die Wurzel 0 ergibt, und damit $\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = {}_{"}\frac{0}{0}{}^{"}$ ↯

c) ~~$a_n =$~~

i) $0 = x^2 + x + 1 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{-2}\right)^2 - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}\right)^2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{-2} - \frac{-1-\sqrt{5}}{-2}} = 1$$

Es war nach einer Formel für a_n gefr

$a_3 = \dots (n=3) = 2$ (Fibonacci)

ii) $0 = -x^2 + 4x + 7 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2+28}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{44}}{-2}$

$(2i)^2 = 2i \cdot 2i = 4i^2 = -4$

$a_2 = 4$, $a_3 = 23$

iii) $0 = -x^2 - 1 \rightarrow x_{1/2} = \cancel{\pm\sqrt{4}} \;\; {}_{"}\frac{\pm\sqrt{-4}}{-2}{}^{"} \Rightarrow x_{1/2} = \pm i$

$$a_2 = \frac{i^2 - (-i)^2}{i + i} = \frac{-1+1}{2i} = 0$$

$$a_3 = \frac{i^3 - (-i)^3}{i + i} = \frac{-i - i}{2i} = -1$$

Sind jetzt alle Werte in R oder nicht?

Niklas Schmitt - ra72hyru

A6)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(2-\frac{1}{n^2})}{n^3(3+\frac{2}{n^2})} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n(\frac{5}{n}+2)}{n(\frac{1}{n}+1)}\right)^3 = \underline{\underline{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2+9n}\right)\left(\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}\right)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-(2n^2+9n)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n+1}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{2+\frac{9}{n}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(-8+\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n}}\right)} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3-\sqrt{n^6+n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-(n^6+n^2+1)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2-1}{n^3+n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(-1-\frac{1}{n^2})}{2n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0} \cdot \frac{-1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} = \underline{\underline{0}}$

Niklas Schmitt - ra72hyru

~~e) $\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{n}$~~

f) $\lim_{n\to\infty} = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n^2 - n^3 - 2n^2}{n^2 + 3n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})}$

$= \lim_{n\to\infty} -1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \underline{\underline{-1}}$ ✓ ✓+

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4 + n^3} - \sqrt[4]{n^4 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt{n^4 + n^3}} - \sqrt{\sqrt{n^4 - n^3}} =$

3.B.f.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{\sqrt{\sqrt{n^4 + n^3}} + \sqrt{\sqrt{n^4 - n^3}}} \overset{\text{3.B.f.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n^3 - (n^4 - n^3)}{(\sqrt{\sqrt{n^4 + n^3}} + \sqrt{\sqrt{n^4 - n^3}}) \cdot \sqrt{n^4 + n^3} + \sqrt{n^4 - n^3}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n(\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} + \sqrt{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}) \cdot n^2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} =$

$= \frac{2}{1+1+1+1} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ ✓ ✓+