Sitzung 25

Markow-Ketten

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 24. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

- Gleichgewichtsverteilung $\equiv$ stationärer Zustand

$$\pi = \pi P$$

$$p^{n+1} = p^n P$$

$$i \xrightarrow{p_{ij}} j$$

- Zeilensummen $= 1$ $\quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1}$

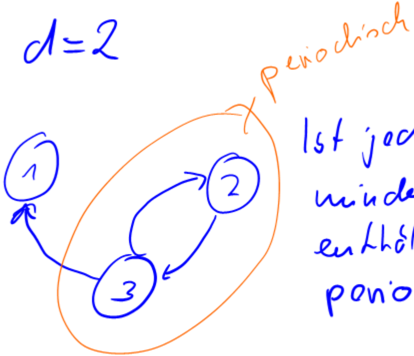
bei MK betrachten wir hier der C4 Matrizen mit Zeilen-summe $= 1$.

oder Spaltensummen $= 1$ $\quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

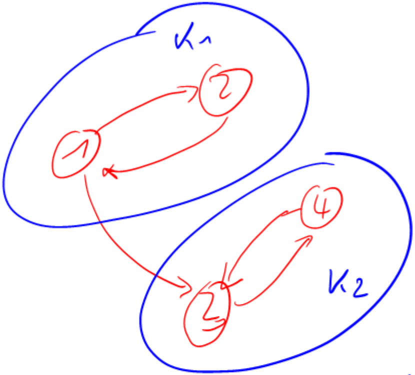
Definition 8.13. Eine Klasse K heißt **periodisch** mit der **Periode** d, wenn es $d(\geqslant 2)$ min Teilmengen in K gibt, die der Reihe nach in d Schritten durchlaufen werden. Eine homogene Markow-Kette heißt **aperiodisch**, wenn es keine periodische Klasse gibt.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$d=2$



Ist jede Klasse die mindestens zwei Knoten enthält, immer periodisch?



K_1, K_2 sind jeweils periodisch

$\pi = (0,1)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p^0 P = (0,\ p^0_1 + p^0_2) = (0,1)$$

nicht irreduzibel

nicht alle Knoten sind in einer Klasse!

$$P^2 = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Markow-Ketten

Ziel dieses Themas

1. Sie wissen was ein stochastischer Prozess ist.
2. Sie können einfache Markow-Prozesse modellieren. (homogene MK)
3. Sie können Markow-Prozesse beschreiben und analysieren.
4. Sie können Gleichgewichtsverteilungen bestimmen.

https://www.studon.fau.de/vote/WWTZ

https://www.studon.fau.de/xlvo3202680.html

Selbststudium

Fragen

1. Was ist eine stochastische Matrix?

(Zeilen stochastisch)

Welche der Matrizen sind **stochastische Matrizen**:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A ist eine stochastische Matrix ✓ zeilenstochastisch

62.5 %

B ist eine stochastische Matrix ~~spaltenstochastisch~~

6.25 %

C ist eine stochastische Matrix ✗ $p_{ij} \geq 0$, $p_{43} < 0$

31.25 %

D ist eine stochastische Matrix ✓

87.5 %

Selbststudium

Fragen

2. Was bedeutet Gleichgewichtsverteilung einer homogenen Markow-Kette und unter welchen Voraussetzungen existiert eines? Konvergiert jede Startverteilung in dieses Gleichgewicht?
Wo sehen Sie einen Bezug zur Page-Rank-Matrix?

π heißt GGV, falls gilt $\pi = \pi \cdot P$, P bezeichnet die Übergangsmatrix der Markow-Kette

π – sind Linkseigenvektoren zum EW 1 von P

$\pi_i \geq 0$

Existenz, was ist darüber bekannt: 8.44

endliche knotenmenge, irreduzibel, aperiodisch

Wiederholung

Definition 8.4 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.

In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Wiederholung

Definition 8.4 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Wiederholung

Definition 8.4 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \dots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Satz 8.15

(a) *Die homogene Markow-Kette* (X_n) *mit der Übergangsmatrix* $\mathbf{P}$ *sei im Gleichgewicht, d.h. es gelte* $P(X_n = i) = \pi_i$ *bzw.* $\mathbf{p} = \pi$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *und* $i \in I$. *Wegen*

$$P(X_n = i) = \sum_{i \in I} P(X_{n-1} = i) \cdot p_{ij}$$

gelten für die Werte π_i $(i \in I)$ *die folgenden Gleichgewichtsbedingungen*

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \qquad \text{für alle } j \in I \text{ bzw.} \qquad \pi = \pi \mathbf{P}, \qquad \text{(G)}$$

$$\pi_j \geqslant 0 \qquad \text{für alle } j \in I \text{ und} \qquad \sum_{j \in I} \pi_j = 1. \qquad \text{(N)}$$

Satz 8.16

(b) *Gelten die Gleichungen* (G) *und* (N) *für* π, *dann ist die homogene Markow-Kette mit Startverteilung* $(\pi_j, j \in I)$ *mit der Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j \in I}$ *im Gleichgewicht.*

wir verlassen pi also nicht

(c) *Zur Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j \in I}$ *gibt es genau dann keine / genau eine / mehrere Gleichgewichtslösung(en), wenn die Bedingungen* (G) *und* (N) *keine / genau eine / mehrere Lösung(en) besitzen.*

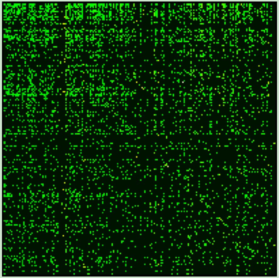
Satz 8.16

(b) *Gelten die Gleichungen* (G) *und* (N) *für* π, *dann ist die homogene Markow-Kette mit Startverteilung* $(\pi_j, j \in I)$ *mit der Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j \in I}$ *im Gleichgewicht.*

(c) *Zur Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j \in I}$ *gibt es genau dann keine / genau eine / mehrere Gleichgewichtslösung(en), wenn die Bedingungen* (G) *und* (N) *keine / genau eine / mehrere Lösung(en) besitzen.*

Beispiel 8.17 (Google-Page-Rank)

Die **Google-Matrix** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des **Page-Rank-Algorithmus** entsteht.



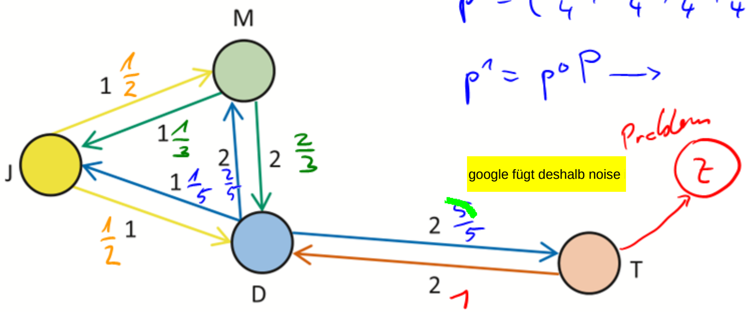
Quelle: Wikipdeia 2018

Zur Berechnung der **Page-Ranks** ist man insbesondere an der Existenz und Vielfachheit von **Linkseigenvektoren** der Matrix interessiert.
Siehe auch: Dörn S. (2018) Markov-Modelle. In: Programmieren für Ingenieure und Naturwissenschaftler. eXamen.press. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg,
`https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-54304-7`
Hier wird auch die Google-Matrix eingeführt.

4 Webseiten, # der Links

$$p^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$p^1 = p^0 P \longrightarrow$$



google fügt deshalb noise

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hyperlinkmatrix

zahlen=anzahl links

Frage: wie werden die Seiten sortiert

$$\begin{array}{cccc} D & J & M & T \end{array}$$
$$v = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$$

Selbststudium

Fragen

3. Geben Sie je ein Beispiel für eine Markow-Kette an, die
   - eine Gleichgewichtsverteilung besitzt, aber nicht jeder Ausgangszustand dagegen konvergiert,
   - jede Startverteilung gegen den Gleichgewichtsverteilung konvergiert.

Satz 8.44 (Grenzwertsatz)

Ist die homogene Markow-Kette (X_n) *mit der Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j\in I}$ ***irreduzibel*** *und* ***aperiodisch****, dann konvergiert* $P(X_n = i)$ *für alle* $i \in I$ *unabhängig von der Startverteilung gegen einen Wert* π_i *mit* $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$*. Dabei sind*

- ***entweder*** *alle* $\pi_i = 0$ *und es gibt keine Gleichgewichtsverteilung zu* (p_{ij})*,*
- ***oder*** *es sind alle* $\pi > 0$ *und* (π_i) *ist die einzige Gleichgewichtsverteilung zu* (p_{ij})*. Die Lösung wird aus* (G) *und* (N) *bestimmt.*

Satz 8.44 (Grenzwertsatz)

Ist die homogene Markow-Kette (X_n) *mit der Übergangsmatrix* $(p_{ij})_{i,j\in I}$ ***irreduzibel*** *und* ***aperiodisch****, dann konvergiert* $P(X_n = i)$ *für alle* $i \in I$ *unabhängig von der Startverteilung gegen einen Wert* π_i *mit* $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$*. Dabei sind*

- ***entweder*** *alle* $\pi_i = 0$ *und es gibt keine Gleichgewichtsverteilung zu* (p_{ij})*,*
- ***oder*** *es sind alle* $\pi_i > 0$ *und* (π_i) *ist die einzige Gleichgewichtsverteilung zu* (p_{ij})*. Die Lösung wird aus* (G) *und* (N) *bestimmt.*

$\pi = 0$: nur bei MK mit unendlicher Zustandsmenge

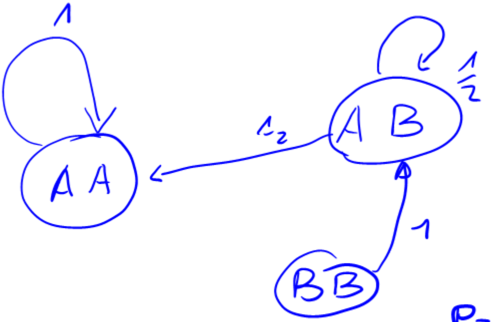
Selbststudium

Fragen

4. Stellen Sie die Wiederholungsaufgabe 77 von Übungsblatt 11 als Markow-Kette dar. hom.

		Genotypen der Eltern		
		AA–AA	AA–AB	AA–BB
Genotyp des Nachwuchses	AA	1	0.5	0
	AB	0	0.5	1
	BB	0	0	0

Bauer Ignaz K. besitzt eine große Hasenzucht und möchte besonders langohrige Hasen züchten. Er hat Hasen mit den Genotypen AA, AB und BB, wobei A einen Genanteil symbolisiert, der lange Ohren verursacht. Das Zuchtprogramm wird durchgeführt, indem in jeder Generation jede Häsin/jeder Hase mit einem Hasen/einer Häsin gekreuzt wird, der/die den Genotyp AA besitzt. Für die zukünftige Zucht werden dann nur noch die neu geborenen Hasen herangezogen, weil Ignaz sehr gerne ältere Hasen an Kinder und Zauberer verschenkt. Folgende Tafel gibt die Verteilung der Typen bei den Nachkommen wieder:



wenn man BB rausnehmen würd

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Das heißt, die Matrix ist einfach die Tabelle transponiert, oder? ✓

P ist nicht irreduzibel, denn BB wird nicht erreicht

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline \Delta & * \end{array}\right)$$

man kommt aus teilgraph, abe

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)

Klausur: C4 20.08 14 Uhr

Die Fragestunde: 17.08, 14 Uhr

BfS: 17.08: 11 Uhr

ohne Gewähr

Wiki: 18.8.