Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

6. Juli 2020

$$E(XY) = EXEY$$

gilt wenn X und Y st.u.

Es gibt ukorrelierte größen, die nixht st.u. sind (nur bei normalverteilung ein gdw)

WEnn X_1 und X_2 stochastisch unabhängig identisch verteilt sind, gilt

$$VarX_1 = VarX_2$$

wegen identisch

$$Var(X_1 + X_1) = Var(2X_1) = 4Var(X_1)$$

wegen multiplikationsregel

$$Var(X_1 + X_2) = 2Var(X_1)$$

wegen identisch und unabhängig.

Der unterschied zwischen dem letzten und Vorletzen ensteht dadurch, dass das erste eine streckung ist, während das andere als Faltung modeliert wird. Somit ist der zweite Wert "beengt" durch den ersten per $\int_{-\infty}^{z} f(x)f(x-z)$.

würfeln und mal 2 nehmen vs summe der augenzahlen

Das heißt, dass die Varianz vom ersten ist kleiner, als beim zweiten (Erwartungswert bleibt gleich)

$$Kov(X, X) = E((X - EX) \cdot (X - EX)) = Var(X)$$

Frage: ist die Kovarianz linear? Ja, $Kov(aX + b, cY + d) = ac \cdot Kov(X, y)$

Definition $k \in \mathbb{N}$

$$M_k = E(|X|^k)$$

nennt man k-tes absolutes Moment von X.

Ist X eine reelle TV mit dichte f^X

$$m_k^X = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^X(x)dx$$

das Zentrale Moment ist definiert als

$$\mu_k := E((X-\mu)^2)$$

das dritte zentrale Moment heißt Schiefe, das vierte Wölbung

Die Momenterzeugende Funktion ist definiert durch

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

ist ein Parameterintegral, abhängig von t.

heißt Laplacetransformation von t. (zweiseitig)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + tx + \frac{t^2}{2!} x^2 + \dots) f(x) dx$$

$$= 1 + t m_1^X + \frac{t^2}{2!} m_2^X$$

Diese hat jetzt folgende Eigenschaften:

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = EX$, $M_X''(0) = EX^2 = Var(X) + (EX)^2$
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}$
3. $M_{X+Y}(t) = M_Y(t)M_Y(t)$ wenn X,Y st.u
4. $M_{X_n}(t) \to M_{X_n}(t) \iff X_n \to X$ für $n \to \infty$ wenn X,Y st.u
5. $Y \sim N(0,1) \iff M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

THEMAWECHSEL!!

Es gibt auch linkseigenvektoren

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v^T(A - \lambda I) = 0$$

sind nur gleich, wenn A symmetrisch.

Diagonalisierung $D = T^{-1}AT$

A ist eine Symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A ist diagonalisierbar (in $\mathbb{R}$),

$q_A(x) = \frac{1}{2} x^T A x \in \mathbb{R}$

vgl quadratische Optimierung mit ZF.: $\frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c = \frac{1}{2} < Ax, x > + < x, b > +c$

Es gilt A ist diagonalisierbar (mit hilfe dieses Satzes)

$$A = SDS^T$$

$q_A(x) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} x^T SD \underbrace{s^T x}_{:=y} = y^T D y = q_D(y)$

(Außerdem gilt) $< Ax, x >= x^T A x = x^T L^T L x = y^T y = ||X||_A$

Die mehrdimensionale Normalverteilung

$$f^X(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}(x_1 + \cdots + x_n^2)} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}x^T x} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}||x||^2}$$

Es gilt

1. $E_{Y_i} = a_i$

2. Für Kovarianzen gilt

$$\begin{aligned} Kov(Y_i, Y_j) &= E(Y_i - EY_i)(Y_j - EY_j) \\ &= E(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k)(\sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l) \\ &= AA^T \end{aligned}$$

Dichte für $Y = a + AX$

$$f^Y(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{|det(K)|}(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}})^n e^{-\frac{1}{2}(y-a)^T (K^{-1})(y-a)}$$