Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC1

Name, Vorname: Rück, Julia

StudOn-Kennung: cy06leco

Blatt-Nummer: 06

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17

15/20*30 = 22.5

A15 a) Würfel $W_1, W_2, W_3, \dots$
mit Kantenlänge von $W_K = \frac{1}{K}$ m

Da der Mittelpunkt/Schwerpunkt des Würfels immer auf der gleichen X-Achse liegt, kann die Turmhöhe unendlich hoch sein.

b) Die Oberfläche des gesamten Turms ist kleiner als die Summe der Würfelflächen. Daraus folgt, dass endlich viel Farbe reicht.

Die verdeckten flächen müssen nicht bemalt werden

$$\sum_{K=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{K}\right)^2 = 6 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \pi$$

↳ Summe der Würfelflächen ist endlich ⟶ Summe des gesamten Turms ist endlich.

c) $$V = \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{K}\right)^3 < \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{K}\right)^2$$

← da diese Summe größer als die Summe des Würfels ist, und endlich ist, folgt daraus, dass endlich viel Beton reicht.

d) Idee: Wenn der Würfel die Kantenlänge $W_K = \frac{1}{\sqrt{K}}$ m hat,

dann: $$\sum_{K=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^2 = \sum_{K=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{K} = \text{„}6 \cdot \infty\text{"} = \infty$$

Somit würde unendlich viel Farbe für die Oberflächen benötigt.
Dennoch würde er nur endlich viel Beton brauchen:

$$V = \sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^3 = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{1\frac{1}{2}}}}$$

→ konvergent wegen der Voraussetzung

A16

a) i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$

$f'(x) = 3x^2 + \cos x + \sin x > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ sms

$f(0) = \sin 0 - \cos(0) = 0 = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} + 1 - 0 = \frac{\pi^3 + 8}{8} > 0$

↳ f ist streng monoton steigend und stetig.
Somit hat die Funktion laut Nullstellensatz von Bolzano genau eine Nullstelle im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$

ii) $f(x) = e^{-x}\cos\pi x - \frac{1}{2}$

$f'(x) = -e^{-x}\cos\pi x - e^{-x}\pi\sin\pi x < 0$ auf $(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ smf

$f(0) = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

↳ f ist stetig und monoton fallend, hat somit laut Nullstellensatz von Bolzano genau eine Nullstelle im Intervall $(0, \frac{1}{2})$

b) $f(a) = b$; $f(b) = a$

$f(x_*) = x_*$

↳ $f\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{b-a}{2}$

c) D_f ist verpackt, da der Bereich abgeschlossen und beschränkt ist.
Und weil eine stetige Funktion auf kompakter Menge ein Maximum bzw. Minimum an nimmt, hat die Bildmenge $f(D_f) = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$ auch ein Max. bzw. Min.

A17

i) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim \frac{2}{\cos x} = 2 \cdot \lim \frac{1}{\cos x} = 2$
↑ L'Hospital

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} = \lim_{x\to 0} \left(\cancel{1} \cdot \frac{\overset{\to 2}{\sin 2x}}{x} \cdot \frac{\overset{3}{\sin 3x}}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\overset{\to n}{\sin nx}}{x} \right) = \cancel{\infty}$

n geht nicht gegen un

cos(a*0) = cos(0) = 1

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} \underset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{6\cos 6x} = \frac{5}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{5}{\cancel{\cos 5x}}}{\underset{6}{\cancel{\cos 6x}}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2} + \sin 2x} \xrightarrow{\text{Kehrbruch}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2} + \sin 2x}{x} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x}{1} = 2$

↳ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2} + \sin 2x} = \frac{1}{2}$

v) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x \cos x\right) = \cos\left(\pi \cdot \lim\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x\right)\right) = \cos(\pi \cdot (1 \cdot 1)) = \cos(\pi)$