Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Sadeghi, Sara

StudOn-Kennung: ky40jemy

Blatt-Nummer: 01

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3, ____

23.5/24*33 = 32

Sara Sadeghi

A1)

	inf	sup	min	max
a	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	existiert nicht
b	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
c	0	$\frac{1}{2}$	existiert nicht	$\frac{1}{2}$
d	$-\infty$	$+\infty$	existiert nicht	existiert nicht
e	0	1	existiert nicht	1
f	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	existiert nicht
g	1	$+\infty$	existiert nicht	existiert nicht

A2) $* \; 2n \leq m$ $\qquad * \; m \leq 3n$

i) $\frac{3n+4m}{5n^2+10} \overset{*}{\leq} \frac{3n+12n}{5n^2+10} = \frac{15n}{5n^2+10} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n}{5n^2+10}\right) = \frac{15}{5n} = \frac{3}{n} \Rightarrow \frac{3n+4m}{5n^2+10} \leq \frac{3}{n}$

ii) $\frac{5n-m}{2n} \overset{*}{\leq} \frac{5n-2n}{2n} = \frac{3n}{2n} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5n-m}{2n} \leq \frac{3}{2}$

iii) $\frac{n}{n+m} \overset{*}{\leq} \frac{n}{n+2n} = \frac{n}{3n} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{n}{n+m} \leq \frac{1}{3}$

iv) $\frac{n+m}{\underbrace{\frac{1}{2}-n}_{<0 \text{ negativ}}} \overset{*}{\leq} \frac{n+2n}{\frac{1}{2}-n} = \frac{3n}{\frac{1}{2}-n} = \frac{3n}{\frac{1-2n}{2}} = \frac{6n}{1-2n} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n}{1-2n}\right) = -3 \Rightarrow \frac{n+m}{\frac{1}{2}-n} \leq -3$

v) $\frac{5n-m+3\cdot 2^m}{3n^3-m+3} \overset{*}{\leq} \frac{5n-3n+3\cdot 2^{3n}}{3n^3-3n+3} = \frac{2n+3\cdot 2^{3n}}{3n^3-3n+3}$

vi) $m+n+\underbrace{\sin(m)}_{max=1} - \underbrace{\sin(17m^2)}_{min=-1} + 2^m + 2^{-m} \overset{*}{\leq} 3n+n+1-(-1)+2^{3n}+2^{-3n} = 4n+2^{3n}+2+\frac{1}{2^{3n}}$

Sara Sadeghi

A3)

a) i) $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{2n}{n+3} = \frac{\overbrace{2(n+1)(n+3)}^{n^2+4n+3} - 2n(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{\cancel{2n^2}+8n+6-\cancel{2n^2}-\cancel{8n}}{(n+4)(n+3)} = \frac{6}{(n+4)(n+3)} \overset{(1\leq n)}{>} 0 \Rightarrow$ monoton wachsend.

ii) $b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{4^{(n+1)}} - \frac{n}{4^n} = \frac{n+1-4n}{4\cdot 4^n} = \frac{\overset{\text{negativ}}{-3n+1}}{\underset{\text{positiv}}{4\cdot 4^n}} \overset{1\leq n}{\Rightarrow} \frac{-3n+1}{4\cdot 4^n} < 0 \Rightarrow$ monoton fallend.

b) i) $a_n = \frac{2n}{n+3} \Rightarrow \frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \frac{10}{8}, \dots \longrightarrow 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+3}\right) = 2$

ii) $b_n = \frac{n}{4^n} \Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{2}{16}, \frac{3}{64}, \dots \rightarrow 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4^n}\right) = 0$

c) i) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \epsilon,$

Sei ϵ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \dots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n-2n-6}{n+3}\right| = \left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{|-6|}{|n+3|} = \frac{6}{n+3} \leq \dots = \epsilon$

$\frac{6}{n+3} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq \frac{n+3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{\epsilon} \leq n+3 \Leftrightarrow n \geq \frac{6}{\epsilon} - 3 \Rightarrow n_0 \geq \frac{6}{\epsilon} - 3 \Leftrightarrow n_0 := \lceil \frac{6}{\epsilon} - 3 \rceil$

vorsicht: bei e=3 wird deir

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \lceil \frac{6}{\epsilon} - 3 \rceil$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} = \frac{6}{\lceil \frac{6}{\epsilon} - 3 \rceil + 3} = \frac{6}{\lceil \frac{6}{\epsilon} \rceil} \leq \frac{6}{\frac{6}{\epsilon}} = \epsilon$ □

ii) Vermutung: gegen 0 konvergiert.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \dots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n} - 0\right| = \frac{n}{4^n} \leq \dots = \epsilon$ *

$\frac{n}{4^n} \leq \epsilon \overset{n \leq 2^n}{\Longleftarrow} \frac{2^n}{4^n} \leq \epsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \epsilon \overset{ld}{\Leftrightarrow} ld\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq ld\,\epsilon \Leftrightarrow n\, \overset{-1}{\cancel{ld\, 2^{-1}}} \leq ld\,\epsilon \Leftrightarrow n \geq -ld\,\epsilon$

$n_0 := \lceil -ld\,\epsilon \rceil$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \lceil -ld\,\epsilon \rceil$

$2^{\log_2 \epsilon} = \epsilon^{\log_2 2}$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n} - 0\right| = \frac{n}{4^n} \leq \frac{n_0}{4^{n_0}} \overset{(n_0 \leq 2^{n_0})}{\leq} \frac{2^{n_0}}{4^{n_0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil -ld\,\epsilon \rceil} = 2^{-\lceil -ld\,\epsilon \rceil} = \epsilon^{\overset{1}{\cancel{ld\,2}}} = \epsilon$ □

Wenn man 2^n/4^n = 2^n/2^2n = 1/2^nvereinf