<u>Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2</u>

Name, Vorname: Brolich, Nina
StudOn-Kennung: eq13yjit
Blatt-Nummer: 3
Übungsgruppen-Nr.: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:
A7, A8, A9

9/10 *30 = 27

ING MATH C2: BLATT 3

A7: Konvergenz von Folgen, Häufigspunkte von Folgen

Nina Brolich

a)

i) $$a_n = \frac{5 + (-1)^n + \frac{1}{n} \cdot \overbrace{\sin n}^{\in[-1,1]}}{n^2}$$

$$\frac{5 + \underbrace{(-1)^n}_{\in\{-1,1\}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}{n^2} \le a_n \le \frac{5 + \underbrace{(-1)^n}_{\in\{-1,1\}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}{n^2}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad\qquad \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(da $\frac{6}{n^2}$ oder $\frac{4}{n^2}$)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $$b_n = \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{\overbrace{5 \cdot \sin(2n)}^{\in[-5,5]} - \overbrace{2 \sin(3n)}^{\in[-2,2]}}{6 + \underbrace{\cos(4n)}_{\in[-1,1]} - \underbrace{\cos(5n)}_{\in[-1,1]}}$$

$$\frac{-5-2}{6-1-1} \cdot \overbrace{\frac{n}{n(n+\frac{1}{n})}}^{\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0} \le b_n \le \frac{5+2}{6-1-1} \cdot \overbrace{\frac{n}{n(n+\frac{1}{n})}}^{\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$$0 \le b_n \le 0$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

b)

	Menge der Häufigspunkte	Limes Superior	Limes Inferior
$a_n = ((-1)^n + 1)n$	$M = \{0, \infty\}$	∞	0
$a_n = \sin(\frac{\pi n}{2}) + \cos(\frac{\pi n}{2})$	$M = \{-1, \quad, 1\}$	$+1$	-1
→ $a_n = \begin{cases} -n & \text{falls } n \le 17 \\ n & \text{falls } n > 17 \end{cases}$	$M = \{+\infty\}$	$+\infty$	$+\infty$
$a_n = q^n$ falls $-1 < q < 1$	$M = \{0\}$	0	0
→ falls $q > 1$	$M = \{\infty\}$	∞	∞
falls $q < -1$	$M = \{-\infty, \infty\}$	∞	$-\infty$
falls $q = 1$	$M = \{1\}$	1	1
falls $q = -1$	$M = \{-1, 1\}$	1	-1

A8: Konvergenz von Reihen

Beweis

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$

$\frac{k}{2+k}$ konvergiert gegen 1, weshalb die Reihe divergent ist (Divergenzkriterium)

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$

→ Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|^{\frac{1}{k}} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)} =$$

$$= \sqrt{\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k(1-\frac{1}{k})}{k^2(3+\frac{2}{k})}}_{\to 0}\right)} = \sqrt{0} = 0 < 1$$

→ Reihe konvergiert

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^k}$ => Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{\sqrt[k]{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{k}$$

$$|\sin k| \in [0, 1]$$

$$\to \quad 0 \le \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{k} \le \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$$

→ Reihe konvergiert

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k}$ → Quotientenkriterium

$$\frac{(\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1})(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = \frac{k+2-k+1}{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = a_k$$

$$\to \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{2^k\cdot 2\cdot(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} \cdot \frac{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}{2\cdot(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} = \frac{k\left(\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}}+\sqrt{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}\right)}{2k\left(\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{3}{k^2}}+\sqrt{\frac{1}{k}}\right)}$$

$$\rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \text{"}\frac{1\cdot(0+0)}{2\cdot(0+0)}\text{"} = 0 < 1$$

$\rightarrow$ Reihe konvergiert

A9: Konvergenz von Reihen, Häufungspunkte von Folgen

a) i)

$$a_k = \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$$

(da Nenner größer und Zähler kleiner)

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

$\rightarrow$ Minorantenkriterium $\rightarrow$ Reihe divergiert

ii)

$$a_k = \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{k^2(4+\frac{3}{k^2})}{k^2(3-\frac{4}{k^2})} = \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}}$$

$\lim_{k\to\infty}(a_k) = \frac{4}{3} \neq 0$ $\rightarrow$ Divergenzkriterium

$\rightarrow$ Reihe divergiert

iii)

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \sqrt{k} \leq k$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$$

divergiert

$\rightarrow$ Minorantenkriterium: Reihe divergiert

b) Jede beschränkte komplexe (reelle) Folge hat mind. einen HP in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$).

i) (1) $\sin n \in [-1,1]$ $\rightarrow$ beschränkt

$\rightarrow$ mind. 1 HP

(2) $\sin(n^2) \in [-1,1]$ $\rightarrow$ beschränkt

$\rightarrow$ mind. 1 HP

(3) $\sin n \in [-1,1]$ $\rightarrow$ $\frac{\sin n}{n} \in [-1,1]$

$\rightarrow$ beschränkt $\rightarrow$ mind 1 HP

ii) ~~(3)~~ (3) HP: 0