Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Vucetovic, Almir

StudOn-Kennung: la82cyxy

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9,

9.5/10 *30=28.5

/A7 a) (i) $a_n = \dfrac{5 + (-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

la82cyxy, Almir Vucetovic

(i)

$(-1)^n$ ist entweder 1 oder -1

Wertebereich vom Sinus liegt zwischen -1 und 1

$$\frac{3}{n^2} < a_n < \frac{7}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(ii) (ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\overbrace{\tfrac{1}{n}}^{\Rightarrow 0}}{1+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \neq \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) (i) $HP_1 = 0 = \lim \inf$

$HP_2 = +\infty = \lim \sup$

1a82cyxy, Almir Vucetovic

(ii) $HP_1 = -1 \Rightarrow \liminf$

$HP_2 = 1 \Rightarrow \limsup$

(iii) $\limsup = +\infty$

(iv) $a_{n_1} = (-1)^n$

$HP_1 = -1 = \liminf$; $HP_2 = 1 = \limsup$

$a_{n_2} = (1)^n$

$HP_1 = 1 = \limsup = \liminf$

$a_{n_3} := -1 < q < 1$

$HP_1 = 0 = \limsup = \liminf$

$a_{n_4} := q < (-1)$

wenn n gerade $HP = +\infty = \limsup$

wenn n ungerade $H = -\infty = \liminf$

$a_{n_5} := q > 1$

$HP = +\infty = \limsup$

/A 8

a) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{k}{2+k} = 1 \Rightarrow$ keine Nullfolge ✓

$\Rightarrow$ Divergenzkriterium: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$ ist divergent ✓

b) $\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$ la82cyxy, Almir Vucetovic

Wurzelkriterium:

$$\left(\sqrt[k]{\underbrace{\frac{k-1}{3k^2+2k}}_{>0,\ \text{da}\ k\geq 2}}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} \leq \frac{1}{4} \ (k\geq 2) \leq 1$$

mehr umformungsschritte!

$\Rightarrow$ Reihe konvergent

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$

Wurzelk: $\sqrt[k]{\frac{\sin(k)}{k^k}} = \frac{\sqrt[k]{|\sin(k)|}}{k} \leq \frac{1}{k} \leq 1$

bei $k=0$ ist $k=1$, da $0^0 = 1$?

für uns zumindest :)

$\Rightarrow$ Reihe konvergent

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{3}{2^{k+1}(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} \cdot \frac{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{3} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k}\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}_{=1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{k}}}_{=1}\right)}{\sqrt{k}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{k}}}_{=1}\right)}$$

$k \Rightarrow \infty$ $\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow$ Reihe konvergent

1a82cyxy, Almir Vucetovic

/A9

a) (i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\qquad \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{4k^2} \quad \forall\, k \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{4k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$\frac{1}{k}$ ist Minorante $\Rightarrow$ Reihe divergent

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\qquad \lim_{k \to \infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{k \to \infty} \frac{4k^2}{3k^2} = \frac{4}{3}$

Folge ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe divergent

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ Minorante $\Rightarrow$ Reihe divergent

b) (i) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HP

1) $\sin(n) \in [-1, 1] \ \forall_n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow \sin(n)$ hat HP

2) $b_n (\sin^2) \in [-1, 1] \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n$ hat HP

3) $\lim_{n \to \infty} (c_n) = \frac{\sin(n) \to \text{beschränkt}}{n} \Rightarrow c_n$ hat HP

(ii) 3) hat HP bei $M = \{0\}$