Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

29. Juni 2020

Faltung zweier Normalverteilungen:

$$X \sim N(a, \sigma^2), Y \sim N(b, \tau^2)$$

$X + Y = N(a + b, \sigma^2 + \tau^2)$

Alternative Notation (mit var stat std)

$$X \sim N(a, \sigma), Y \sim N(b, \tau)$$

$$X + Y = N(a + b, \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})$$

1 Zufallsvariable

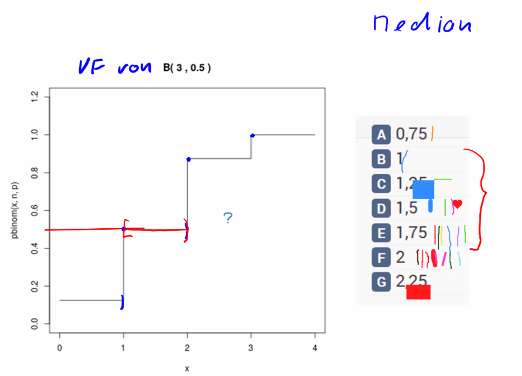
X gehört zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ X ist eine Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ mit

$$\{X \in A'\} \in \mathcal{A} \forall A' \in \mathcal{A}' = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A'\}$$

Frage die gestellt wird $X \sim ?$ Verteilung $\leftrightarrow$ korrespondierende Dichte P.

Oft wird auch die Identität als ZV verwendet $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$

P^Y "Brücke" um aus dem konzept Bildmaß die Notation $Y \sim \ldots$ besser zu verstehen.

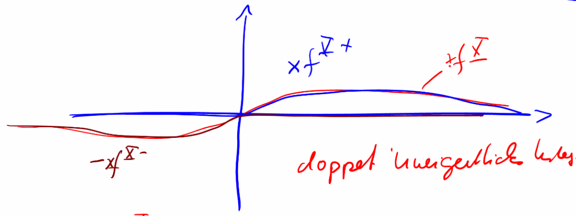


Median: Links und rechts höchstens 50% W.Masse liegt:

→ Median eindeutig

$\underline{X}$ kont. verteilt mit $\mathbb{R}$-Dichte

$$E\underline{X} = \int_{\mathbb{R}} \boxed{x \cdot f^{\underline{X}}(x)}\, dx$$



doppelt uneigentliches Integral

bzw: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot f^{\underline{X}}(k) \rightarrow$ wie kann Konvergenz überprüft werden

Satz 7.9 (Darstellungen des Erwartungswertes)

Die folgenden Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass die Summen in den Gleichungen existieren. Die Existenz einer der beiden Seiten, zieht die Existenz der anderen Seite nach sich.

1. *$X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ sei eine diskrete ZV, Ω, Ω' sind abzählbar und f eine Z-Dichte von P. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\, X := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P(X = k) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) f(\omega). \tag{5}$$

2. *$X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ sei eine diskrete ZV, $g : \Omega' \to \Omega'' \subset \mathbb{R}$, Ω', Ω'' abzählbar. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\, g(X) := \sum_{m \in \Omega''} m \cdot P(g(X) = m) = \sum_{k \in \Omega'} g(k) \cdot P(X = k). \tag{6}$$

3. *$X : \Omega \to \Omega'_1$, $Y : \Omega \to \Omega'_2$ sind diskrete ZV, $h : \Omega'_1 \times \Omega'_2 \to \Omega'' \subset \mathbb{R}$ eine Abbildung, $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega''$ sind abzählbar. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\, h(X, Y) := \sum_{m \in \Omega''} m \cdot P(h(X, Y) = m) = \sum_{k \in \Omega'_1} \sum_{l \in \Omega'_2} h(k, l) \cdot P(X = k, Y = l). \tag{7}$$

z.B. $h(\underline{X}, \underline{Y}) = \lambda$

Satz 7.10 (Eigenschaften des Erwartungswertes)

$X, Y, X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige ZV.

(a) *Gilt $P(X = a) = 1$, d.h. ist X („fast sicher") konstant, dann besitzt X die Einpunktverteilung ϵ_a, und es ist $\mathrm{E}\, X = a$.*

(b) *Der Erwartungswert ist **monoton**.*

$$X \leqslant Y \Rightarrow \mathrm{E}\, X \leqslant \mathrm{E}\, Y, \text{ falls } \mathrm{E}\, X, \mathrm{E}\, Y \text{ exisitieren.}$$

Speziell gilt:

$$a \leqslant X \leqslant b \Rightarrow a \leqslant \mathrm{E}\, X \leqslant b.$$

(c) *Der Erwartungswert ist **linear***

$$\mathrm{E}\,(aX + b) = a \cdot \mathrm{E}\, X + b. \tag{8}$$

(d1) *Existieren $\mathrm{E}\, X$ und $\mathrm{E}\, Y$ und ist $\mathrm{E}\, X + \mathrm{E}\, Y$ definiert (also nicht $\infty + (-\infty)$ oder $(-\infty) + \infty$), dann existiert auch $E\,(X + Y)$*

$$\mathrm{E}\,(X + Y) = \mathrm{E}\, X + EY. \tag{9}$$

Satz 7.10(Eigenschaften des Erwartungswertes)

(d2) Existieren $\mathrm{E}\, X_i$ und $\mathrm{E}\, X_i \neq \pm\infty$ für alle i, dann gilt

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\, X_i. \tag{10}$$

(e) X, Y seien **stochastisch unabhängig**, $\mathrm{E}\, X$ und EY existieren und sind **endlich**. Dann existiert $\mathrm{E}\, XY := E(XY)$ und es gilt

$$\mathrm{E}\, XY = \mathrm{E}\, X \cdot EY. \tag{11}$$

Daraus folgt die Varianz

$$var(x) = E(X - Ex)^2 = EX^2 - (EX)^2$$