Sitzung 8

Integration im $\mathbb{R}^2$

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 18. Mai 2020

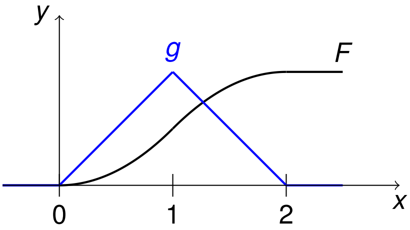
Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Nachtrag

Funktion g, F

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - |1 - x|, & 0 \leqslant x < 2, \\ 0, & 2 \leqslant x, \end{cases} \quad F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & 2 \leqslant x. \end{cases}$$



Fragen

Integration im $\mathbb{R}^2$

Ziel dieses Themas

1. Die Begriffe Parameterintegral und Integralfunktion sind bekannt und die Eigenschaften können angewendet werden.
2. Sie kennen die Idee, Riemannsummen auf den R^2 zu übertragen?
3. Sie kennen die Begriffe Projizierbarkeit und Standardmenge.
4. Sie können Integrale über projizierbare Mengen auswerten.
5. Sie kennen den Transformationssatz und können ihn anwenden.

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion $f(t,x)$ von zwei Variablen mit dem Definitionsbereich

$$[a,b] \times I = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in [a,b] \ , \ x \in I\}$$

Definition 4.1

Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$F(x) = \underbrace{\int_a^b f(t,x) \, \mathrm{d}\, t}_{\text{Parameterintegral}}$$

heißt eine **Integralfunktion** und das Integral ein **Parameterintegral**.

Beispiel 4.2

$$F(x) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{t} \, \mathrm{d}\, t$$

für $x \in \mathbb{R}$

Beispiel 4.3

Gesucht ist eine Parabel p mit Scheitel im Ursprung, für die die integrierte quadratische Abweichung von $q(x) = x^4$ im Intervall $[-1, 1]$ minimal wird.

Beispiel 4.2

$$F(x) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{t}\, \mathrm{d}\, t$$

für $x \in \mathbb{R}$

Beispiel 4.3

Gesucht ist eine Parabel p mit Scheitel im Ursprung, für die die integrierte quadratische Abweichung von $q(x) = x^4$ im Intervall $[-1, 1]$ minimal wird.

Beispiel 4.4

Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}\, t$$

für $x \in (0, \infty)$.

variable Grenzen

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein gegebenes Intervall,
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ und $\psi : I \to \mathbb{R}$ seien auf I stetig differenzierbare Funktionen,
und f sei eine gegebene reellwertige Funktion, die auf der Menge

$$M := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times I \ : \ t \in [\varphi(x), \psi(x)] \text{ oder } t \in [\psi(x), \varphi(x)]\}$$

stetig. $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x) \,\mathrm{d}\, t$$

ist dann ebenfalls eine Integralfunktion.

Wichtig, wir dürfen kein "I

Also wir haben eine variable obere/untere Grenze.Wir ign

Satz 4.5

$f : [a,b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine gegebene Funktion, und $F : I \to \mathbb{R}$ bezeichne die zugehörige Integralfunktion. Dann gilt:

1. *Ist f auf $[a,b] \times I$ stetig, so ist F auf I stetig.*
2. *Ist f auf $[a,b] \times I$ stetig, existiert auf $[a,b] \times I$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und ist diese dort stetig, so ist F auf I differenzierbar und es gilt:*

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}\,t$$

3. ***Satz von Fubini***

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y.$$

Satz 4.5

$f : [a,b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine gegebene Funktion, und $F : I \to \mathbb{R}$ bezeichne die zugehörige Integralfunktion. Dann gilt:

1. *Ist f auf $[a,b] \times I$ stetig, so ist F auf I stetig.*
2. *Ist f auf $[a,b] \times I$ stetig, existiert auf $[a,b] \times I$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und ist diese dort stetig, so ist F auf I differenzierbar und es gilt:*

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \,\mathrm{d}\, t$$

3. ***Satz von Fubini***

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y.$$

Satz 4.5

$f : [a, b] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine gegebene Funktion, und $F : I \to \mathbb{R}$ bezeichne die zugehörige Integralfunktion. Dann gilt:

1. *Ist f auf $[a, b] \times I$ stetig, so ist F auf I stetig.*
2. *Ist f auf $[a, b] \times I$ stetig, existiert auf $[a, b] \times I$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ und ist diese dort stetig, so ist F auf I differenzierbar und es gilt:*

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \, \mathrm{d}\, t$$

also auch wiede

3. ***Satz von Fubini***

Maßtheorie

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y.$$

Eigenschaften

Satz 4.6 (Leibniz-Regel)

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein gegebenes Intervall,
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ und $\psi : I \to \mathbb{R}$ seien auf I stetig differenzierbare Funktionen,
und f sei eine gegebene reellwertige Funktion, die auf der Menge

$$M := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times I \ : \ t \in [\varphi(x), \psi(x)] \text{ oder } t \in [\psi(x), \varphi(x)]\}$$

stetig ist und dort eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ besitzt.
Dann ist die Integralfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x) \, \mathrm{d}\, t$$

differenzierbar auf I und es gilt

man schaut sich die Ränder an und die Steigu

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \, \mathrm{d}\, t + \psi'(x) \cdot f(\psi(x), x) - \varphi'(x) \cdot f(\varphi(x), x)$$

Idee Integration im $\mathbb{R}^2$

Integrieren über ein Rechteck

Betrachten Rechteck I

$$I := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$f : I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.

Integral über f auf der Menge I entspricht einem Volumen.

1. Bilde Zerlegung Z_1 von $[a, b]$ mit Feinheit $|Z_1|$.
2. Bilde Zerlegung Z_2 von $[c, d]$ mit Feinheit $|Z_2|$.
3. Wähle $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und ein $\bar{y}_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und bilde die die Riemann'sche Summe

$$S_{Z_1, Z_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Idee Integration im $\mathbb{R}^2$

Integrieren über ein Rechteck

Betrachten Rechteck I

$$I := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$f : I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.
Integral über f auf der Menge I entspricht einem Volumen.

1. Bilde Zerlegung Z_1 von $[a, b]$ mit Feinheit $|Z_1|$.
2. Bilde Zerlegung Z_2 von $[c, d]$ mit Feinheit $|Z_2|$.
3. Wähle $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und ein $\bar{y}_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und bilde die die Riemann'sche Summe

$$S_{Z_1,Z_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Idee Integration im $\mathbb{R}^2$

Integrieren über ein Rechteck

Betrachten Rechteck I

$$I := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$f : I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.
Integral über f auf der Menge I entspricht einem Volumen.

1. Bilde Zerlegung Z_1 von $[a,b]$ mit Feinheit $|Z_1|$.
2. Bilde Zerlegung Z_2 von $[c,d]$ mit Feinheit $|Z_2|$.
3. Wähle $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und ein $\bar{y}_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und bilde die die Riemann'sche Summe

$$S_{Z_1,Z_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Idee Integration im $\mathbb{R}^2$

Integrieren über ein Rechteck

Betrachten Rechteck I

$$I := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$f : I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt.
Integral über f auf der Menge I entspricht einem Volumen.

1. Bilde Zerlegung Z_1 von $[a,b]$ mit Feinheit $|Z_1|$.
2. Bilde Zerlegung Z_2 von $[c,d]$ mit Feinheit $|Z_2|$.

grenzwert der Fläche app

3. Wähle $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und ein $\bar{y}_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und bilde die die Riemann'sche Summe

$$S_{Z_1,Z_2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Definition 4.7 (Maß)

Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und ist die Funktion $f(x, y) \equiv 1$ integrierbar auf G, so heißt G **messbar**. Der Wert des Integrals

$$\mu(G) = \int_G d(x, y)$$

heißt der zweidimensionale **Inhalt** oder das **Maß** von G.

Definition 4.8 (y-Projizierbarkeit)

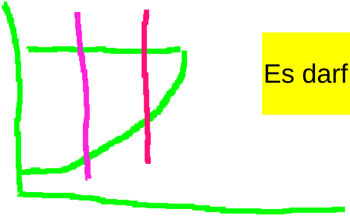
G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **y-projizierbar**, wenn es auf einem Intervall $[a, b]$ der x-Achse stetige Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\bar{y}(x)$ mit

$$\underline{y}(x) \leq \bar{y}(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

so gibt, dass gilt

$$G = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in [a, b],\ \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x) \right\}.$$

Quelle: Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 2. 4. Aufl., 2003



Es darf keine löcher zwischen den grer

Definition 4.8 (y-Projizierbarkeit)

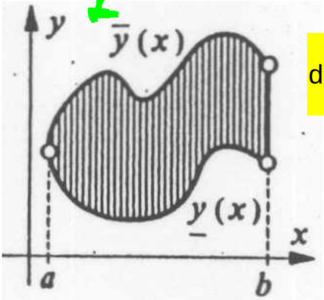
G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **y-projizierbar**, wenn es auf einem Intervall $[a, b]$ der x-Achse stetige Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\bar{y}(x)$ mit

$$\underline{y}(x) \leq \bar{y}(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

so gibt, dass gilt

man muss y außerhalb des bereiches Wählen

$$G = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in [a, b],\ \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x) \right\}.$$



die funktion hier ist unabh

Quelle: Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 2. 4. Aufl., 2003

Definition 4.9 (x-Projizierbarkeit)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **x-projizierbar**, wenn es auf einem Intervall $[c, d]$ der y-Achse stetige Funktionen $\underline{x}(y)$ und $\bar{x}(y)$ mit

$$\underline{x}(y) \leq \bar{x}(y) \qquad \forall\, y \in [c, d]$$

so gibt, dass gilt

$$G = \left\{ (x, y) \,\middle|\, y \in [c, d],\ \underline{x}(y) \leq x \leq \bar{x}(y) \right\}.$$

Quelle: Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 2. 4. Aufl., 2003

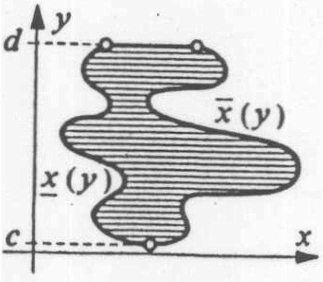
Definition 4.9 (x-Projizierbarkeit)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **x-projizierbar**, wenn es auf einem Intervall $[c, d]$ der y-Achse stetige Funktionen $\underline{x}(y)$ und $\bar{x}(y)$ mit

$$\underline{x}(y) \leq \bar{x}(y) \qquad \forall\, y \in [c, d]$$

so gibt, dass gilt

$$G = \left\{(x, y) \,\middle|\, y \in [c, d],\ \underline{x}(y) \leq x \leq \bar{x}(y)\right\}.$$



Quelle: Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 2. 4. Aufl., 2003

https://www.studon.fau.de/vote/JI98

Definition 4.10 (projizierbar)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **projizierbar**, falls G y-projizierbar oder x-projizierbar ist.

Definition 4.11 (Standardmenge)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **Standardmenge** im $\mathbb{R}^2$, falls G sowohl y-projizierbar als auch x-projizierbar ist.

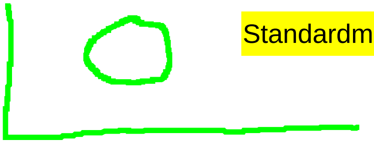
Definition 4.10 (projizierbar)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **projizierbar**, falls G y-projizierbar oder x-projizierbar ist.

Definition 4.11 (Standardmenge)

G sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. G heißt **Standardmenge** im $\mathbb{R}^2$, falls G sowohl y-projizierbar als auch x-projizierbar ist.

Nur x-projezierbar



Standardmenge

Satz 4.12

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei eine projizierbare Menge, und $f : G \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion.
***Dann** existiert das Integral $\int_G f(x,y)\, d(x,y)$, und es gilt,*

1. *falls G y-**projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left[\int_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x;$$

2. *falls G x-**projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int_{\underline{x}(y)}^{\bar{x}(y)} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

Satz 4.12

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei eine projizierbare Menge, und $f : G \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. ***Dann*** *existiert das Integral $\int\limits_G f(x,y)\, d(x,y)$, und es gilt,*

1. *falls G y**-projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x;$$

2. *falls G x**-projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\underline{x}(y)}^{\bar{x}(y)} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

Satz 4.12

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei eine projizierbare Menge, und $f : G \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. ***Dann*** *existiert das Integral $\int\limits_G f(x,y)\, d(x,y)$, und es gilt,*

1. *falls G y**-projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x;$$

2. *falls G x**-projizierbar** ist:*

$$\int_G f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\underline{x}(y)}^{\bar{x}(y)} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

Beispiel 4.13

1. Bestimmung des Flächeninhaltes und des Schwerpunktes des Dreiecks

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, b],\, 0 \leqslant y \leqslant b - \frac{b}{a}x\right\}.$$

2. Berechne $\int_G \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\,(x, y)$ für

$$G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 2],\, x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}.$$

3. Berechne Volumen I, das durch das Paraboloid $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ und die (x, y)-Ebene begrenzt wird. G ist der Einheitskreis in der (x, y)-Ebene.

Beispiel 4.13

1. Bestimmung des Flächeninhaltes und des Schwerpunktes des Dreiecks

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, b],\, 0 \leqslant y \leqslant b - \frac{b}{a}x\right\}.$$

2. Berechne $\int_G \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\,(x, y)$ für

$$G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 2],\, x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}.$$

3. Berechne Volumen I, das durch das Paraboloid $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ und die (x, y)-Ebene begrenzt wird. G ist der Einheitskreis in der (x, y)-Ebene.

Beispiel 4.13

1. Bestimmung des Flächeninhaltes und des Schwerpunktes des Dreiecks

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, b],\, 0 \leqslant y \leqslant b - \frac{b}{a}x\right\}.$$

2. Berechne $\int_G \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\,(x, y)$ für

$$G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 2],\, x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}.$$

3. Berechne Volumen I, das durch das Paraboloid $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ und die (x, y)-Ebene begrenzt wird. G ist der Einheitskreis in der (x, y)-Ebene.

Satz 4.14 (Transformationssatz)

Jedem $(u_0, v_0) \in H$ wird genau ein $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in G$ zugeordnet. Für die Jacobi'sche Funktionalmatrix

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{,u}(u,v) & x_{,v}(u,v) \\ y_{,u}(u,v) & y_{,v}(u,v) \end{pmatrix}$$

gelte $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ *für alle $(u,v) \in H$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_H f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| \, d(u,v).}$$

Satz 4.14 (Transformationssatz)

Jedem $(u_0, v_0) \in H$ wird genau ein $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in G$ zugeordnet. Für die Jacobi'sche Funktionalmatrix

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{,u}(u,v) & x_{,v}(u,v) \\ y_{,u}(u,v) & y_{,v}(u,v) \end{pmatrix}$$

gelte $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ *für alle* $(u,v) \in H$. *Dann gilt*

$$\boxed{\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_H f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| \, d(u,v).}$$

Satz 4.14 (Transformationssatz)

Jedem $(u_0, v_0) \in H$ *wird genau ein* $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in G$ *zugeordnet. Für die Jacobi'sche Funktionalmatrix*

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{,u}(u,v) & x_{,v}(u,v) \\ y_{,u}(u,v) & y_{,v}(u,v) \end{pmatrix}$$

gelte $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ *für alle* $(u,v) \in H$. *Dann gilt*

$$\boxed{\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_H f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| \, d(u,v).}$$

Satz 4.14 (Transformationssatz)

Jedem $(u_0, v_0) \in H$ *wird genau ein* $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \in G$ *zugeordnet. Für die Jacobi'sche Funktionalmatrix*

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{,u}(u,v) & x_{,v}(u,v) \\ y_{,u}(u,v) & y_{,v}(u,v) \end{pmatrix}$$

gelte $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ *für alle* $(u,v) \in H$. *Dann gilt*

$$\boxed{\int_G f(x,y)\, d(x,y) = \int_H f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \right| \, d(u,v).}$$

Selbststudium

Quellen

- Skript Anhang B (https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html)

Selbststudium

Weiterführende Fragen

1. Gegeben die sei die Menge

$$M := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leqslant x_1 \leqslant b, c \leqslant x_2 \leqslant \frac{d-c}{b-a}(x_1 - a) + c \right\}.$$

   Integrieren Sie die Funktion $f(x, y) = x + y$ über M.

2. Wiederholen Sie die Berechnung von Determinanten und den Begriff Funktionaldeterminante.

3. Mit welcher Abbildung die Menge

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$$

   auf Menge

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$$

   mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ abgebildet werden.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:**
`https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und
`https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)