Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Sadeghi, Sara

StudOn-Kennung: ky40jemy

Blatt-Nummer: 05

Übungsgruppen-Nr: 07

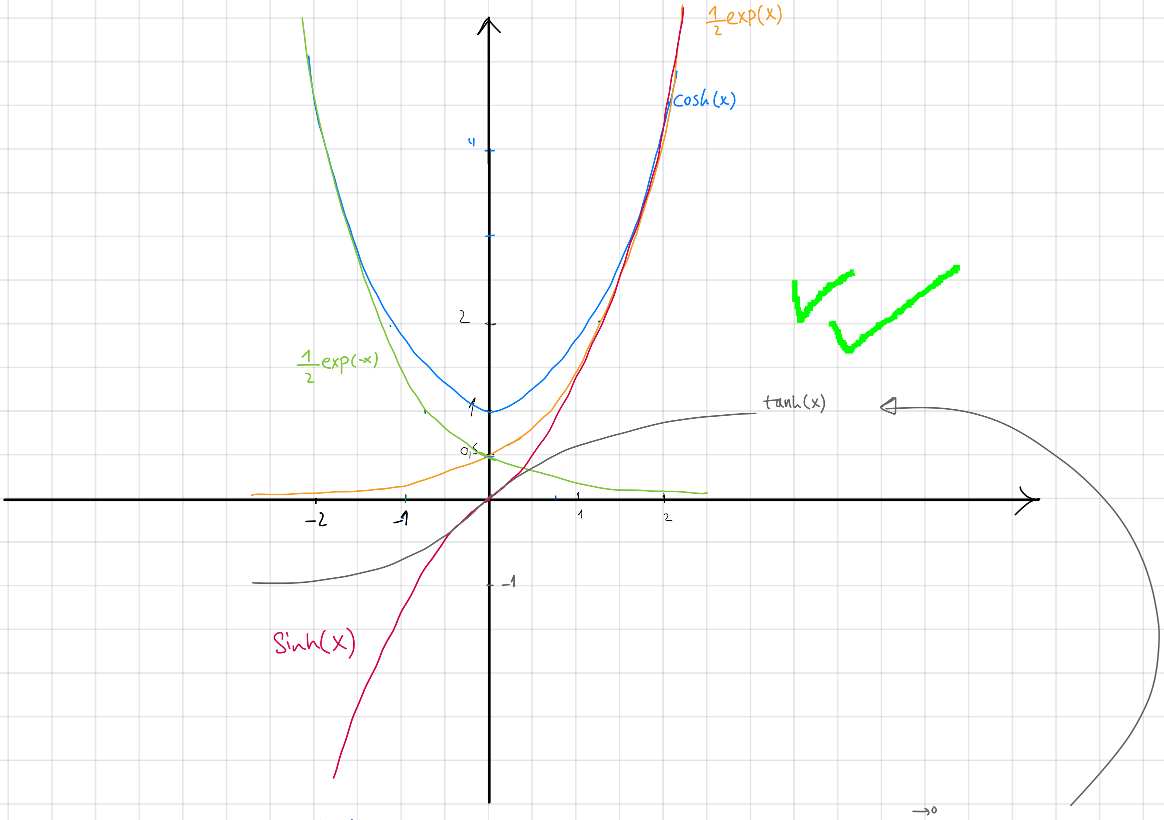
Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A13, A14, ______, ______

13/14 * 30 = 27.5

A13

a)



b) $$\lim_{x\to+\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}}{\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ e^{2x}\to+\infty}}\frac{\cancel{e^{2x}}\left(1-\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ e^{-2x}\to 0}}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{-1}{1} = -1$$

c) $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{e^{2x}}+2+\cancel{e^{-2x}}-\cancel{e^{2x}}+2-\cancel{e^{-2x}}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

d) $$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+(-1)^k\right)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ \text{da}\ \frac{1+(-1)^k}{2} = \begin{cases}1 & \text{für } k \text{ gerade}\\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade}\end{cases}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-(-1)^k\right)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e) $$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underbrace{i^2}_{-1}y^2\cdot(iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot(-1)^k\cdot y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(-1)^k y^{2k}\, iy = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sinh(x)$$

2k

f) $$\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$$

g) $$\sin(x+iy)\big|_{x:=0} = \overset{0}{\cancel{\sin(0)}}\cosh(y)+i(\cos 0)\sinh(y) = \underbrace{i\sinh(y)}_{\substack{\text{unbeschränkt}\\ \in(-\infty,+\infty)}} \Rightarrow \text{unbeschränkt}$$

A14

a) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \begin{array}{l}\sqrt{1-x^2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \\ \sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1\end{array} \Big\} \Rightarrow D_f = (-1,1)$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to -1^+} 1-x}_{\to 2} + \underbrace{\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\to +\infty} = 2 \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(1-x)}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = 0$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$ Stetig, Stetig $\Rightarrow \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0$ $\left(-\frac{1}{x} \xrightarrow{x\searrow 0} -\infty,\ e^y \text{ für } y \to 1-\infty \text{ gegen 0 geht}\right)$

$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim 0$

→ wir haben gezeigt, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Da $f(0)=0 \Rightarrow f$ an der Stelle $x_*=0$ stetig ⇒ überall stetig

$g(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} e^1 e^x e^{-\frac{1}{x}} = e \cdot \lim_{x\searrow 0} e^x e^{-\frac{1}{x}} = e \cdot \underbrace{\lim_{x\searrow 0} e^x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 0} = 0$

$\left[\text{Da } \lim_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\searrow 0} -\frac{1}{x}} = e^{-\overbrace{\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x}}^{\to\infty}} \Rightarrow \lim_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0\right]$

$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = e \cdot \underbrace{\lim_{x\nearrow 0} e^x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}}}_{\to\infty} = e\cdot\infty = \infty$ $\left[\text{Da } e^{\lim_{x\nearrow 0} -\frac{1}{x}} = e^{-\overbrace{\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}}^{\to -\infty}} \Rightarrow \lim_{x\nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty\right]$

$f(0)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\nearrow 0} f(x) \neq \lim_{x\searrow 0} f(x) \Rightarrow$ unstetig

c) i) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = \sqrt{0^2+0+1} - 0 = 1$ $(x_*=0)$

ii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

iii) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{y\to\infty} \sqrt{y^2-y+1} + y = \lim_{y\to\infty} y + \lim_{y\to\infty} \sqrt{y^2-y+1} = \infty + \infty = \infty$ Stärker

$x := -y$

iv) $\lim_{x\to +\infty} x\,|\sin \pi x| = \overbrace{\lim_{x\to +\infty} x}^{\to +\infty} \cdot \lim_{x\to +\infty} |\sin \pi x|$ → 0 oder 1

für die Folge $x_n := n$ ist $x_n \xrightarrow{n\to +\infty} x_* = +\infty$ und $f(x_n) = \overbrace{|\sin \pi n|}^{=0} = 0$

und für die Folge $x_n := n+1$ ist auch wieder $x_n \xrightarrow{n\to +\infty} x_* = +\infty$ aber $f(x) = \overbrace{\left|\sin \pi n + \frac{\pi}{2}\right|}^{=1} = 1$

⇒ verschiedene Grenzwerte für $g(x)$ ⇒ Funktionsgrenzwert nicht existiert.

v) $\lim_{x\to 0} x\,|\sin \pi x| = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} |\sin \pi x| = 0 \cdot 0 = 0$

vi) $\lim_{x\to 0} \cos x \cos^2 \frac{2}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \cos^2 \frac{2}{x}$ 0 oder 1

1. $f(x) = \cos^2 \frac{2}{x} \Rightarrow x_n := \frac{1}{\pi n}$ ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_* = 0$ und $f(x_n) = \cos^2(2\pi n) = 1$

2. $f(x) = \cos^2 \frac{2}{x} \Rightarrow x_n := \frac{2}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_* = 0$ und $f(x_n) = \cos^2(\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0$

Verschiedene Grenzwerte für $g(x) = \cos x \cos^2 \frac{2}{x} \Rightarrow$ Grenzwert nicht existiert