

Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

3. Juli 2020

$$Y = g(X)$$

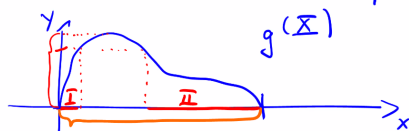
(vgl. Hausaufgabe "Wurfweite")

- Transformation von ZF, Bildmodelle

$$\underline{Y} = g(\underline{X})$$

ges: $F^{\underline{Y}}, f^{\underline{Y}}$

$$x \in \text{supp}(g) \\ y \in g(\text{supp}(g))$$

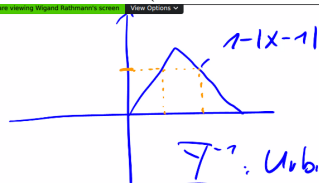


$$P^{\underline{Y}}(\underline{Y} \leq y) = F(y) = \int_{-\infty}^y f^{\underline{Y}}(\tau) d\tau = \int_{\text{supp}(g)} f^{\underline{Y}}(x) dx$$

passend zur Skizze

also Verteilungsfunktion berechnen (weils oft einfacher ist) und dann die Dichte durch Ableiten bekommen.

$$\underline{Y} = 1 - |\underline{X}| - 1$$



\underline{Y}^{-1} : Urbild/funk

- Was ist das Urbild A von $(-\infty, y]$?

- Dieses Urbild A ist Element von $\mathcal{A}^{\underline{X}}, A \in \mathcal{A}^{\underline{X}}$

$$\text{d.h. } \int_A f^{\underline{X}}(x) dx = F^{\underline{Y}}(y)$$

Spricht man schaut sich die Flächen an, die zu Werten $y \leq Y$ korrespondieren.

Diese entsprechen dann dem Wert von $F^Y(y)$ und kann zu $f^Y(y)$ abgeleitet werden.

X sei eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), P^X$ mit

$$P(X=k) = \frac{1}{k!} e^{-1} \quad k=0,1,2,\dots$$

Wie lautet der Erwartungswert $E X$?

A $\frac{1}{e}$

B 1

C e

$$\begin{aligned} \underline{X} &\sim \pi(1); \quad E \underline{X} = 1. \\ E \underline{X} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(\underline{X}=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k!} e^{-1} \\ &= e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^{-1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)_{x=1}}_e \\ &= 1 \end{aligned}$$

Poisson verteilung $X \sim \pi(1) \implies EX = 1$

Gegeben seien die Zufallsvariablen $X \sim L(n)$ und $Y \sim B(n, p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Welche Schlüsse lassen sich daraus ziehen?

A $f^{X+Y} = f^X \cdot f^Y$ ☒ Diese Aussage nicht möglich, da nichts zu st. u. bekannt 50 %

B $E(X) = \frac{n+1}{2}$ ☒ $\bar{X} L(n), E(\bar{X}) = \frac{n+1}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k$ 44.44 %

C $E(X) = np$ ☒ $E(\bar{Y}) = n \cdot p$ 16.67 %

D $f^{X+Y} = f^X * f^Y$ ☒ Faltung ist für st. u. ZV definiert, siehe A. D braucht auch wieder stoch. unabh. von X, Y 55.56 %

E $E(X+Y) = \frac{n}{2} (n+1)p$ ☒ $\frac{n+1}{2} \cdot (n \cdot p) = E \bar{X} \cdot E \bar{Y}$ 22.22 %

F $E(X+Y) = \frac{n+1}{2} + np$ ☒ 44.44 %

Name	Erwartung	Var
$x \sim \pi(\lambda)$	λ	λ
$x \sim R(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$x \sim Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$x \sim \Gamma_{\alpha, \mu}$	$\frac{\mu}{\alpha}$	$\frac{\mu}{\alpha^2}$
$x \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
$x \sim Nb^0(r, p)$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
$x \sim Nb^+(r, p)$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
$x \sim B(n, p)$	np	$np(1-p)$
$x \sim B(p)$	p	$p(1-p)$

Wie wird der Erwartungswert einer ZV Y berechnet, wenn Y eine Funktion anderer YV ist.

Soll heißen $Y = g(X)$

$EY = \int_{\mathbb{R}} g(x) f^X(x) dx$ (sprich, wir nehmen statt den Wert x , den wert von g der auf y mapped)

$EY = \sum_{x \in \Omega^X} g(x) f^X(x) dx$ (also genau das gleiche).

Wir rechnen also auf das Urbild zurück

$$EX := \sum_{k \in \Omega'} k P(X = k) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) f(\omega)$$

wobei $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ also auf von ω auf k mapped.

analog bei mehreren stochastisch unabhängigen ZV

Erwartungswert ist monoton $X \leq Y \implies EX \leq EY$ falls EX, EY existieren

c)

linearität

$$E(aX + b) = aEX + b$$

Wenn EX und EY existieren, additiv (auch wenn **nicht** stochastisch unabhängig!!!!!!)

$$E(X + Y) = EX + EY$$

bei stochastischer unabhängigkeit gilt

$$EXY = EX \cdot EY$$

wenn EX_i existieren für alle i gilt

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n EX_i$$

Varianz und Streuung

$$VarX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$