Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMath C2

Name, Vorname: Frank, Jonathan

StudOn-Kennung: yk34alis

Blatt-Nr: 7

Gruppen-Nr: 7

folgende Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei: A18, A19, A20

18.5/20*30=27.5

A19 a)

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(h)-\cos(x)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h}$$
$$= \cos(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h}$$
$$= \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 = \underline{\underline{-\sin(x)}}$$

b) $$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos x)^2}$$

nutzen von: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(\cos x)^2}}} \quad i)$$

$$\frac{(\cos(x))^2\left(1+\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}\right)}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \underline{\underline{1+(\tan(x))^2}} \quad ii)$$

c) i) $$\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$

ii) $$\tan''(x) = (\tan'(x))' = (1+(\tan x)^2)' = 2\cdot(\tan x)\cdot(1+(\tan x)^2)$$
$$= \underline{\underline{2\tan x + 2(\tan x)^3}}$$

iii) $$\tan'''(x) = (\tan''(x))' = (2\tan x + (2\tan x)^3)'$$
$$= 2\cdot(1+(\tan x)^2) + 3\cdot 2\cdot(\tan x)^2\cdot 2\cdot(1+(\tan x)^2)$$
$$= 2\cdot(1+\tan^2 x + 3\tan^2 x\cdot(1+\tan^2 x))$$
$$= 2\cdot(1+\tan^2 x + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x)$$

$$= 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$$

A18 a) $f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-3/2}\right)}_{\frac{1}{2\sqrt{x^3}}} - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x^3}$

→ Ergebnisse sind unterstrichen!

b) $f'(x) = 4(x^2+\sqrt{2x})^3 \cdot (2x + \underbrace{\tfrac{1}{2}(2x)^{-1/2}}_{\frac{1}{2\sqrt{2x}}} \cdot 2)$

c) Vorherige Betrachtung: term 1: $x \cdot e^{x^2}$

$(\text{term}1)'$: $1\cdot e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

term 2: $\ln(2+3x)$

$(\text{term}2)'$: $\frac{1}{2+3x}\cdot 3$

Zusammen: $(\text{term}1)' \cdot \text{term}2 + \text{term}1 \cdot (\text{term}2)'$

$$f'(x) = (e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}) \cdot \ln(2+3x) + (x\cdot e^{x^2}) \cdot \left(\frac{1}{2+3x}\cdot 3\right)$$

d) aus P24: $\arccos' x = \frac{1}{-\sin(\arccos(\sqrt{x}))}$

Gumgewandelt: $\arccos'(\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e) $f'(x) = \frac{2\cos(2x)\cdot \ln(x^2+1) - \sin(2x)\cdot \frac{2x}{x^2+1}}{(\ln(x^2+1))^2}$

f) Da a wie angegeben Konstante $\in \mathbb{R}$: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

ihr habt das nur für a aus Z bewiesen. Hier

g) Angabe: $e^{-x^2 \cdot \ln x}$

$f'(x) = e^{-x^2\cdot \ln x} \cdot (-2x \cdot \ln x + (-x^2)\cdot \frac{1}{x})$

$= x^{-x^2} \cdot (-2x\cdot \ln x - x)$

h) Schrittweise betrachten: $(2\ln x)' = \frac{2}{x}$

$(\ln(2\ln x))' = \frac{1}{2\cdot \ln x}\cdot\frac{2}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\ln x}\cdot \frac{2}{x}\right)$$

A20 a) $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)$

$(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{h^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{h^2} - \cancel{0^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{0^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{h^2}}_{\text{divergiert!}}$$

=> Fallunterscheidung : 1. Fall : $\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h^0 \cdot \sin\frac{1}{h^2} = 0^0 \cdot \text{divergent} = 1 \cdot \text{divergent}$

-> f' kann nicht existieren

2. Fall : $\alpha - 1 < 0$ ~~x , x < 0~~

$= \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}$ => Wenn Exponent negativ entsteht ein Ausdruck der Art: $\frac{1}{h^x}$

-> Wenn h hier ->0 geht, dann existiert f' also erst recht nicht

3. Fall : $\alpha - 1 > 0$, in diesem Fall kann die 0 stehen bleiben.

$\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} = 0^{\alpha-1} = 0$, $0 \cdot \text{divergent} = \underline{\underline{0}}$

=> f' existiert, mit $f'(0) = 0$

c) Beweis der Stetigkeit an Punkt x : Durch Vergleich der beiden Limes-werte von rechter/linker Näherung. Hier: $x=0$ ist Randpunkt für f', Näherung von links nicht möglich. Von Rechts:

$$\lim_{x\searrow 0} f'(0) = \underbrace{\underbrace{\alpha \cdot \underbrace{x^{\alpha-1}}_{0}}_{0} \cdot \sin\frac{1}{x^2}}_{0} + x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(-2\,\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{x^{\alpha}}{x^3} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2) = x^{\alpha-3} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2)$$

$$= 0 \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2) = \underline{\underline{0}}$$

Anmerkung: $\lim_{x\searrow 0}$ aus Übersichtlichkeit eingespart!

-> Stetigkeit bewiesen

d) $f''(x) = \left(\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)\right)'$

Zerteilen: term 1: $\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2}$

(term 1)': $\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + \alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)$

term 2: $x^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-2 \frac{1}{x^3}\right)$

term 2.1: $x^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x^2}$

$(\text{term } 2.1)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \left(-\sin \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)$

term 2.2 $= \left(-2 \frac{1}{x^3}\right) = -2x^{-3}$

$(\text{term } 2.2)' = 6x^{-4}$

$(\text{term } 2)' = (\text{term } 2.1)' \cdot \text{term } 2.2 + \text{term } 2.1 \cdot (\text{term } 2.2)'$

$= \left(\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \left(-\sin \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)\right) \cdot \left(-2x^{-3}\right) + \left(x^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x^2} \cdot 6x^{-4}\right)$

$f''(x) = (\text{term } 1)' + (\text{term } 2)'$

$\Rightarrow \left(\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot \sin \frac{1}{x^2} + \alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-2x^{-3}\right)\right) +$

$\left(\left(\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \left(-\sin \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-2 \cdot x^{-3}\right)\right) \cdot \left(-2x^{-3}\right) + \left(x^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x^2} \cdot 6x^{-4}\right)\right)$