Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Bodky, Daniel

StudOn-Kennung: as37alyj

Blatt-Nummer: 7

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A18, A19, A20,

18,5/20*30=27.5

A 18

a) $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

b) $f(x) = \left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^4$

$f'(x) = 4 \cdot \left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} \cdot 2\right) = 4 \cdot \left(x^2 + \sqrt{2x}\right)^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$

c) $f(x) = xe^{x^2} \ln(2+3x) = x \cdot \left[\left(e^{(x^2)}\right) \cdot \ln(2+3x)\right]$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) + x \cdot \left[e^{x^2} \cdot \ln(2+3x)\right]'$ schreib d/dx

$= e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) + x \cdot \left[\left(2x e^{x^2} \ln(2+3x)\right) + \left(e^{x^2} \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3\right)\right]$

d) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x}\right)$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{\ln(x^2+1) \cdot \cos 2x \cdot 2 - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot \sin 2x}{\ln^2(x^2+1)}$

f) $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$

$f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a$

g) $f(x) = x^{-x^2} = e^{-x^2 \ln x}$

$f'(x) = \left(-2x \ln x - x\right) x^{-x^2}$

h) $f(x) = \ln\left(x + \ln(2 \ln x)\right)$

$f'(x) = \frac{1}{x + \ln(2 \ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln x} \cdot \frac{2}{x}\right)$

$= \frac{1}{x + \ln(2 \ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{x \ln x}\right)$

A19

a) z.z: $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \cos(x)\cdot \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0} - \sin(x)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \xrightarrow{h\to 0} -\sin(x)$$

b) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\tan'(x) = ?$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

i) $\tan'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1 = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$

ii) s.o.: $\tan'(x) = \tan^2(x)+1$

c) i) $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x'(f)}$

$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

ii) $\tan''(x) = [\tan(x)\cdot\tan(x)]' = 2(\tan(x)(1+\tan^2(x)))$

$\tan'''(x) = [\tan(x)(1+\tan^2(x))]' = (1+\tan^2(x))^2 + \tan(x)\cdot\tan'(x)$

$= (1+\tan^2(x))^2 + \tan(x)\cdot(2\cdot\tan(x)(1+\tan^2(x)))$

A20 $f: = [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

für $\alpha \in (0, \infty)$

a) $f'(x)$, für $x > 0$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^\alpha \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \quad \text{für } x > 0$$

b) $f'(0)$ mittels Differenzenquotient:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^\alpha \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^2}$$

$\Rightarrow -1 \leq h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^2} \leq 1$, $-|h^{\alpha-1}| \leq |h^{\alpha-1}| \sin\frac{1}{h^2} \leq |h^{\alpha-1}|$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}$ geht für $-|h^{\alpha-1}|$ und $|h^{\alpha-1}|$ für $\alpha \in (1, \infty)$ gegen $0 = f(0)$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ für $\alpha \in (1, \infty)$

c) $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2}$ stetig? Folgenkriterium für Stetigkeit:

Sei a_n eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Zeige $f'(a_n)$ konvergiert nach $f'(0)$:

$|g'(a_n)| = |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{(a_n)^2}| = |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}| \cdot |\sin\frac{1}{(a_n)^2}| \leq |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}|$

$|\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}| \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot 0^{\alpha-1} = 0 \to g'(x)$ ist stetig für $\alpha \in (1, \infty)$

$h'(x) = x^\alpha \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} = (-2)\, x^{\alpha-3} \cos\frac{1}{x^2}$

$|h'(a_n)| = |(-2)\, a_n^{\alpha-3} \cos\frac{1}{(a_n)^2}| = |(-2)\, a_n^{\alpha-3}| \cdot |\cos\frac{1}{(a_n)^2}| \leq |(-2)\, a_n^{\alpha-3}|$

$|(-2)\, a_n^{\alpha-3}| \xrightarrow{n\to\infty} |(-2) \cdot 0^{\alpha-3}| = 0 \to h'(x)$ ist stetig für $\alpha \in (3, \infty)$

$\Rightarrow f'(x)$ ist stetig, da aus stetigen Funktione $g'(x)$, $h'(x)$ zusammengesetzt.

d) $f''(x)$ für $x > 0$:

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + \alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(-2)}{x^3}$$

$$+ \alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(-2)}{x^3} + x^{\alpha} \cdot \left(-\sin\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{(-2)}{x^3}\right)^2$$

$$+ x^{\alpha} \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{6}{x^4}$$

$$= \sin\frac{1}{x^2} \cdot \left(\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} + x^{\alpha} \cdot (-1) \cdot \frac{4}{x^6}\right)$$

$$+ \cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(\alpha x^{\alpha-1} \cdot \frac{(-2)}{x^3} + \alpha x^{\alpha-1}\,\frac{(-2)}{x^3} + x^{\alpha} \cdot \frac{6}{x^4}\right)$$

$$= \sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha \cdot (\alpha-1)\,x^{\alpha-2} - 4x^{\alpha-6}\right) + \cos\frac{1}{x^2} \cdot x^{\alpha-1}\left(\frac{-4\alpha}{x^3} + \frac{6x}{x^{\alpha}}\right)$$

$$= \sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha \cdot (\alpha-1)\,x^{\alpha-2} - 4x^{\alpha-6}\right) + \cos\frac{1}{x^2} \cdot x^{\alpha-4}\left(-4\alpha + 6\right)$$