Sitzung 20

# Kenngrößen (3)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 6. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

# Fragen

## Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Bedeutung und die Definitionen der wichtigsten Kenngrößen von Verteilungen.
2. Sie können die Definitionen auf beliebige Verteilungen anwenden.
3. Sie kennen den Unterschied zwischen Momenten und Zentralen Momenten.
4. Sie wissen, was die momenterzeugende Funktion ist.
5. Sie kennen den Zusammenhang zwischen st. Unabhängigkeit und Kovarianz und können beides analysieren.
6. Sie können die mehrdimensionale Normalverteilung und deren besonderen Eigenschaften. Sie können normalverteilte Zufallsvektoren transformieren.

**Anmerkung**

Kleines Beispiel für Kenngrößen

https://www.studon.fau.de/pg743302_2897784.html

**Definition 7.17 (Varianz und Streuung)**

Ist $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ eine reellwertige ZV mit endlichem Erwartungswert, dann heißen

$$\operatorname{Var} X := \operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2 = \operatorname{E} X^2 - (\operatorname{E} X)^2 \tag{1}$$

und

$$\operatorname{Str} X := \sqrt{\operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2} = \sqrt{\operatorname{Var} X} \tag{2}$$

die **Varianz** und die **Streuung** von $X$.

# Selbststudium

## Fragen

1. Wie verhält sich die Varianz bei Transformationen?

## Satz 7.18

*Es sei $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X+a) = \operatorname{Str} X. \tag{3}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{4}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\operatorname{E}(X-a)^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X - a)^2, \textit{ speziell } \operatorname{E} X^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X)^2. \tag{5}$$

## Satz 7.18

*Es sei $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X+a) = \operatorname{Str} X. \tag{3}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{4}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\operatorname{E}(X-a)^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X - a)^2, \ \textit{speziell} \ \operatorname{E} X^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X)^2. \tag{5}$$

## Satz 7.18

*Es sei $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X + a) = \operatorname{Str} X. \tag{3}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{4}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\mathrm{E}\,(X - a)^2 = \operatorname{Var} X + (\mathrm{E}\, X - a)^2\,, \text{ \textit{speziell} } \mathrm{E}\, X^2 = \operatorname{Var} X + (\mathrm{E}\, X)^2\,. \tag{5}$$

### Anmerkung

Wie könnte eine zweidimensionale Stichprobe aussehen?

https://www.studon.fau.de/pg743303_2897784.html

### Definition 7.21

Für die ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$ und $\mathrm{E}\,Y^2 < \infty$ heißt

$$\mathrm{Kov}(X, Y) := \mathrm{E}\,XY - \mathrm{E}\,X\,\mathrm{E}\,Y = E\left[(X - EX)\,(Y - EY)\right] \tag{6}$$

die **Kovarianz von $X$ und $Y$**. Die normierte Kovarianz

$$\mathrm{korr}(X, Y) := \frac{\mathrm{Kov}(X, Y)}{\mathrm{Str}\,X\,\mathrm{Str}\,Y} \tag{7}$$

heißt **Korrelationskoeffizient von $X$ und $Y$**, falls $\mathrm{Str}\,X \neq 0$ und $\mathrm{Str}\,Y \neq 0$. Anderenfalls sei $\mathrm{korr}(X, Y) = 0$.

## Anmerkung

Wie könnte eine zweidimensionale Stichprobe aussehen?

`https://www.studon.fau.de/pg743303_2897784.html`

## Definition 7.21

Für die ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{E}\,X^2 < \infty$ und $\mathrm{E}\,Y^2 < \infty$ heißt

$$\operatorname{Kov}(X, Y) := \mathrm{E}\,XY - \mathrm{E}\,X\,\mathrm{E}\,Y = E\,[(X - EX)\,(Y - EY)] \tag{6}$$

die **Kovarianz von $X$ und $Y$**. Die normierte Kovarianz

$$\operatorname{korr}(X, Y) := \frac{\operatorname{Kov}(X, Y)}{\operatorname{Str} X \operatorname{Str} Y} \tag{7}$$

heißt **Korrelationskoeffizient von $X$ und $Y$**, falls $\operatorname{Str} X \neq 0$ und $\operatorname{Str} Y \neq 0$. Anderenfalls sei $\operatorname{korr}(X, Y) = 0$.

## Definition 7.23

$X$ sei eine Zufallsvariable und $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt der Erwartungswert der $k$-ten Potenz von $X$

$$m_k := \mathrm{E}\left(X^k\right) \tag{8}$$

**Moment der Ordnung** $k$ **von** $X$ oder kürzer $k$-tes Moment von $X$ (sofern der Erwartungswert existiert).
Der Erwartungswert der $k$-ten Potenz des Absolutbetrages $|X|$ von $X$

$$M_k := \mathrm{E}\left(|X|^k\right) \tag{9}$$

heißt ***k*-tes absolutes Moment von** $X$.

## Darstellung

Ist $X$ eine reelle ZV mit der Dichte $f^X$ und Verteilungsfunktion $F^X$, dann folgt aus der Definition des Erwartungswertes

$$m_k^X = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mathrm{d}F^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

## Definition 7.23

$X$ sei eine Zufallsvariable und $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt der Erwartungswert der $k$-ten Potenz von $X$

$$m_k := \mathrm{E}\left(X^k\right) \tag{8}$$

**Moment der Ordnung** $k$ **von** $X$ oder kürzer $k$-tes Moment von $X$ (sofern der Erwartungswert existiert).
Der Erwartungswert der $k$-ten Potenz des Absolutbetrages $|X|$ von $X$

$$M_k := \mathrm{E}\left(|X|^k\right) \tag{9}$$

heißt $k$**-tes absolutes Moment von** $X$.

## Darstellung

Ist $X$ eine reelle ZV mit der Dichte $f^X$ und Verteilungsfunktion $F^X$, dann folgt aus der Definition des Erwartungswertes

$$m_k^X = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mathrm{d}F^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^X(x)\, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

### Definition 7.24

$X$ sei eine Zufallsvariable mit $\mu = \mathrm{E}\, X$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\mu_k := \mathrm{E}\left((X - \mu)^k\right) \tag{11}$$

**zentrales Moment der Ordnung** $k$ **von** $X$ und

$$\bar{\mu}_k := \mathrm{E}\left(|X - \mu|^k\right) \tag{12}$$

heißt $k$**-tes absolutes zentrales Moment von** $X$.

### Bemerkung

Das dritte zentrale Moment heißt **Schiefe**, das normierte vierte zentrale Moment $\frac{\mu_4(X)}{\sigma^2}$ heißt **Wölbung**.

### Definition 7.25 (Momenterzeugende Funktion)

Sei $X$ eine ZV mit stetiger R-Dichte $f(x)$ , dann ist die **momenterzeugende Funktion** durch

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \dots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + tm_1^X + \frac{t^2}{2!}m_2^X + \dots \end{aligned}$$

gegeben, wobei $m_i^X$ das $i$-te Moment von $X$ ist.
Der Ausdruck $M_X(-t)$ ist die zweiseitige Laplacetransformation des durch $X$ festgelegten Wahrscheinlichkeitsmaßes.

**Satz 7.26 (Eigenschaften von $M_X$)**

*Die momenterzeugende Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = \mathrm{E}\,X$, $M_X''(0) = \mathrm{E}\,X^2$.
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}$, $\quad a > 0, b \in \mathbb{R}$.
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, *falls* $X, Y$ *stoch.unabh.*
4. $M_{X_n}(t) \to M_X(t) \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{V} X$ *für* $n \to \infty$.
5. $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

**Satz 7.26 (Eigenschaften von $M_X$)**

*Die momenterzeugende Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = \mathrm{E}\,X$, $M_X''(0) = \mathrm{E}\,X^2$.
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}, \;\; a > 0, b \in \mathbb{R}$.
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, falls $X, Y$ stoch.unabh.
4. $M_{X_n}(t) \to M_X(t) \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{V} X$ für $n \to \infty$.
5. $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

**Satz 7.26 (Eigenschaften von $M_X$)**

*Die momenterzeugende Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = \mathrm{E}\,X$, $M_X''(0) = \mathrm{E}\,X^2$.
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$.
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, *falls* $X, Y$ *stoch.unabh.*
4. $M_{X_n}(t) \to M_X(t) \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{V} X$ *für* $n \to \infty$.
5. $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

## Satz 7.26 (Eigenschaften von $M_X$)

*Die momenterzeugende Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = \mathrm{E}\, X$, $M_X''(0) = \mathrm{E}\, X^2$.
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$.
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, *falls* $X, Y$ *stoch.unabh.*
4. $M_{X_n}(t) \to M_X(t) \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{V} X$ *für* $n \to \infty$.
5. $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

**Satz 7.26 (Eigenschaften von $M_X$)**

*Die momenterzeugende Funktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = \operatorname{E} X$, $M_X''(0) = \operatorname{E} X^2$.
2. $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}, \;\; a > 0, b \in \mathbb{R}$.
3. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, *falls* $X, Y$ *stoch.unabh.*
4. $M_{X_n}(t) \to M_X(t) \;\Leftrightarrow\; X_n \xrightarrow{V} X$ *für* $n \to \infty$.
5. $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

## Standardnormalverteilung im $\mathbb{R}^n$

Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ standard-normalverteilt, dann besitzt $X$ die Produkt-R-Dichte

$$f^X(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{13}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

## Anmerkung

Die mehrdimensionale Normalverteilung im Bild

`https://www.studon.fau.de/pg636998_2897784.html`

## Lineare Transformation

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}x$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\det A \neq 0$. $X$ sei eine standardnormalverteilte ZV, die mittels $g$ in die ZV $Y$ transformiert wird:

$$Y = g(X) = \mathbf{a} + \mathbf{A}X. \tag{14}$$

## Anmerkung

Die affin-lineare Abbildung zum Spielen

https://www.studon.fau.de/pg743307_2897784.html

https://www.studon.fau.de/pg636998_2897784.html

## Eigenschaften

Es gilt:

1. $EY_i = a_i$.
2. Für die Kovarianz gilt mit $EX_i^2 = 1$ und $EX_k X_l = 0$, $(k \neq l)$ Folgendes:

$$\mathrm{Kov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{E}(Y_i - \mathrm{E}Y_i)(Y_j - \mathrm{E}Y_j)$$

## Lineare Transformation

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\det A \neq 0$. $X$ sei eine standardnormalverteilte ZV, die mittels $g$ in die ZV $Y$ transformiert wird:

$$Y = g(X) = \mathbf{a} + \mathbf{A}X. \tag{14}$$

## Anmerkung

Die affin-lineare Abbildung zum Spielen

`https://www.studon.fau.de/pg743307_2897784.html`

`https://www.studon.fau.de/pg636998_2897784.html`

## Eigenschaften

Es gilt:

1. $EY_i = a_i$.
2. Für die Kovarianz gilt mit $EX_i^2 = 1$ und $EX_k X_l = 0$, $(k \neq l)$ Folgendes:

$$\operatorname{Kov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{E}(Y_i - \operatorname{E} Y_i)(Y_j - \operatorname{E} Y_j)$$

### Lineare Transformation

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det A \neq 0$. $X$ sei eine standardnormalverteilte ZV, die mittels $g$ in die ZV $Y$ transformiert wird:

$$Y = g(X) = \mathbf{a} + \mathbf{A}X. \tag{14}$$

### Anmerkung

Die affin-lineare Abbildung zum Spielen

https://www.studon.fau.de/pg743307_2897784.html

https://www.studon.fau.de/pg636998_2897784.html

### Eigenschaften

Es gilt:

1. $EY_i = a_i$.
2. Für die Kovarianz gilt mit $EX_i^2 = 1$ und $EX_kX_l = 0$, $(k \neq l)$ Folgendes:

$$\mathrm{Kov}\,(Y_i, Y_j) = \mathrm{E}\,(Y_i - \mathrm{E}\,Y_i)\,(Y_j - \mathrm{E}\,Y_j)$$

## Lineare Transformation

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\det A \neq 0$. $X$ sei eine standardnormalverteilte ZV, die mittels $g$ in die ZV $Y$ transformiert wird:

$$Y = g(X) = \mathbf{a} + \mathbf{A}X. \tag{14}$$

## Anmerkung

Die affin-lineare Abbildung zum Spielen

https://www.studon.fau.de/pg743307_2897784.html

https://www.studon.fau.de/pg636998_2897784.html

## Eigenschaften

Es gilt:

1. $EY_i = a_i$.
2. Für die Kovarianz gilt mit $EX_i^2 = 1$ und $EX_k X_l = 0$, $(k \neq l)$ Folgendes:

$$\operatorname{Kov}(Y_i, Y_j) = \operatorname{E}(Y_i - \operatorname{E} Y_i)(Y_j - \operatorname{E} Y_j)$$

## Notation

Mit $k_{ij} := \text{Kov}\,(Y_i, Y_j)$ und $k_{ii} := \text{Var}\,Y_i$ gilt

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

## Dichte für $Y = \mathbf{a} + \mathbf{A}X$

$$f^Y(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T\left(A^{-1}\right)^T\left(A^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})} \tag{16}$$

bzw.

$$f^Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T\left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

## Notation

Mit $k_{ij} := \mathrm{Kov}\,(Y_i, Y_j)$ und $k_{ii} := \mathrm{Var}\, Y_i$ gilt

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

## Dichte für $Y = \mathbf{a} + \mathbf{A}X$

$$f^Y(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(A^{-1}\right)^T \left(A^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})} \tag{16}$$

bzw.

$$f^Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

**Definition 7.18 ($n$-dimensionale Normalverteilung)**

Das W-Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, definiert mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit durch die R-Dichte

$$f^Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

heißt **n-dimensionale Normalverteilung** und wird mit $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ bezeichnet.
**a** bezeichnet den **Erwartungsvektor** und **K** die Kovarianzmatrix. Die $n$-dimensionale Standardnormalverteilung wird mit $\mathcal{N}(0, I_n)$ bezeichnet, wobei $I_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist.

### Definition 7.18 ($n$-dimensionale Normalverteilung)

Das W-Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, definiert mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit durch die R-Dichte

$$f^Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

heißt **n-dimensionale Normalverteilung** und wird mit $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ bezeichnet. $\mathbf{a}$ bezeichnet den **Erwartungsvektor** und $\mathbf{K}$ die Kovarianzmatrix. Die $n$-dimensionale Standardnormalverteilung wird mit $\mathcal{N}(0, I_n)$ bezeichnet, wobei $I_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist.

## Definition 7.18 ($n$-dimensionale Normalverteilung)

Das W-Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, definiert mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit durch die R-Dichte

$$f^Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{K}|}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a})^T \left(K^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{a})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

heißt **n-dimensionale Normalverteilung** und wird mit $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ bezeichnet. **a** bezeichnet den **Erwartungsvektor** und **K** die Kovarianzmatrix. Die $n$-dimensionale Standardnormalverteilung wird mit $\mathcal{N}(0, I_n)$ bezeichnet, wobei $I_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist.

### Definition 7.19 (Zufällige Summen)

Es sei $Y$ eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von $Y$. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

### Satz 7.20

*Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\mathrm{E}\, Y < \infty$ und $\mathrm{E}\, X_i < \infty$,*

$$\mathrm{E}\, S = \mathrm{E}\, Y \cdot \mathrm{E}\, X_1, \tag{19}$$

$$\mathrm{Var}\, S = \mathrm{E}\, Y \cdot \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, Y \cdot (\mathrm{E}\, X_1)^2. \tag{20}$$

**Definition 7.19 (Zufällige Summen)**

Es sei $Y$ eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von $Y$. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

**Satz 7.20**

*Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\mathrm{E}\,Y < \infty$ und $\mathrm{E}\,X_i < \infty$,*

$$\mathrm{E}\,S = \mathrm{E}\,Y \cdot \mathrm{E}\,X_1, \tag{19}$$

$$\operatorname{Var} S = \mathrm{E}\,Y \cdot \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} Y \cdot (\mathrm{E}\,X_1)^2 . \tag{20}$$

## Bedingte Verteilung $P(X \in B|Y = y)$

Die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B|Y = y) = \frac{P[(X \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}. \tag{21}$$

## Definition 7.21

Der Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X|Y=y)=\int xP^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|y)$$

der bedingten Verteilung von $X$ unter $Y$ bzw. die Zufallsvariable $\mathrm{E}(X|Y)$

$$\omega\longmapsto\int xP^{X|Y}(\mathrm{d}\,x|Y(\omega))$$

heißen der ***bedingte Erwartungswert*** von $X$ unter der Bedingung $Y$.

## Definition 7.22

Sind $S : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \Omega''$ diskrete Zufallsvariablen und existiert der Erwartungswert $\mathrm{E}\, S$, dann heißt

$$\mathrm{E}\,(S|Y = n) := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P\,(S = k|Y = n) \tag{22}$$

der **bedingte Erwartungswert von** $S$ **unter** $Y = n$. Es gilt die Formel vom **iterierten Erwartungswert**

$$\mathrm{E}\, S = \sum_{n \in \Omega''} P(Y = n)\, \mathrm{E}\,(S|Y = n)\,. \tag{23}$$

# Selbststudium

## Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 6.6-6.7
- Skript Kapitel 7.1- 7.5

## Fragen

1. Welche Eigenschaften besitzt die Kovarianz? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kovarianz und der stochastischen Unabhängigkeit?
2. Sei $X$ ein $n$-dimensionaler standardnormalverteilter Zufallsvektor und $Y = AX + \mathbf{b}$ ergebe sich aus $X$ mit einer linear-affinen Transformation mit $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Wie ist $Y$ verteilt?
3. $Y$ sei ein beliebig normalverteilter Zufallsvektor, $Y \sim \mathcal{N}(a, K)$. Was können Sie über die Kovarianzen und die stochastische Unabhängigkeit zwischen den Randverteilungen aussagen?
4. Lässt sich jeder normalverteilter Zufallsvektor $Z$ auf einen geeigneten standardnormalverteilten Zufallsvektor $X$ transformieren?

# Ihre Fragen

## ... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

| | | |
|---|---|---|
| Wigand Rathmann | 09131/85-67129 | Mi 11-12 Uhr |
| Marius Yamakou | 09131/85-67127 | Di 14-15 Uhr |

**Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure**
**Wann:** dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:**
`https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und
`https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)