Thema: Abstiegsverfahren

Gegeben: Quadratisches Funktional.

$$Q(\vec{x}) = x^T Ax + 2b^T x + c$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

$b \in \mathbb{R}^n$

gesucht.: minimalstelle

Methode gradient descent:

$$x_{i+1} = x_i - t_i \cdot \nabla f(x_i)$$

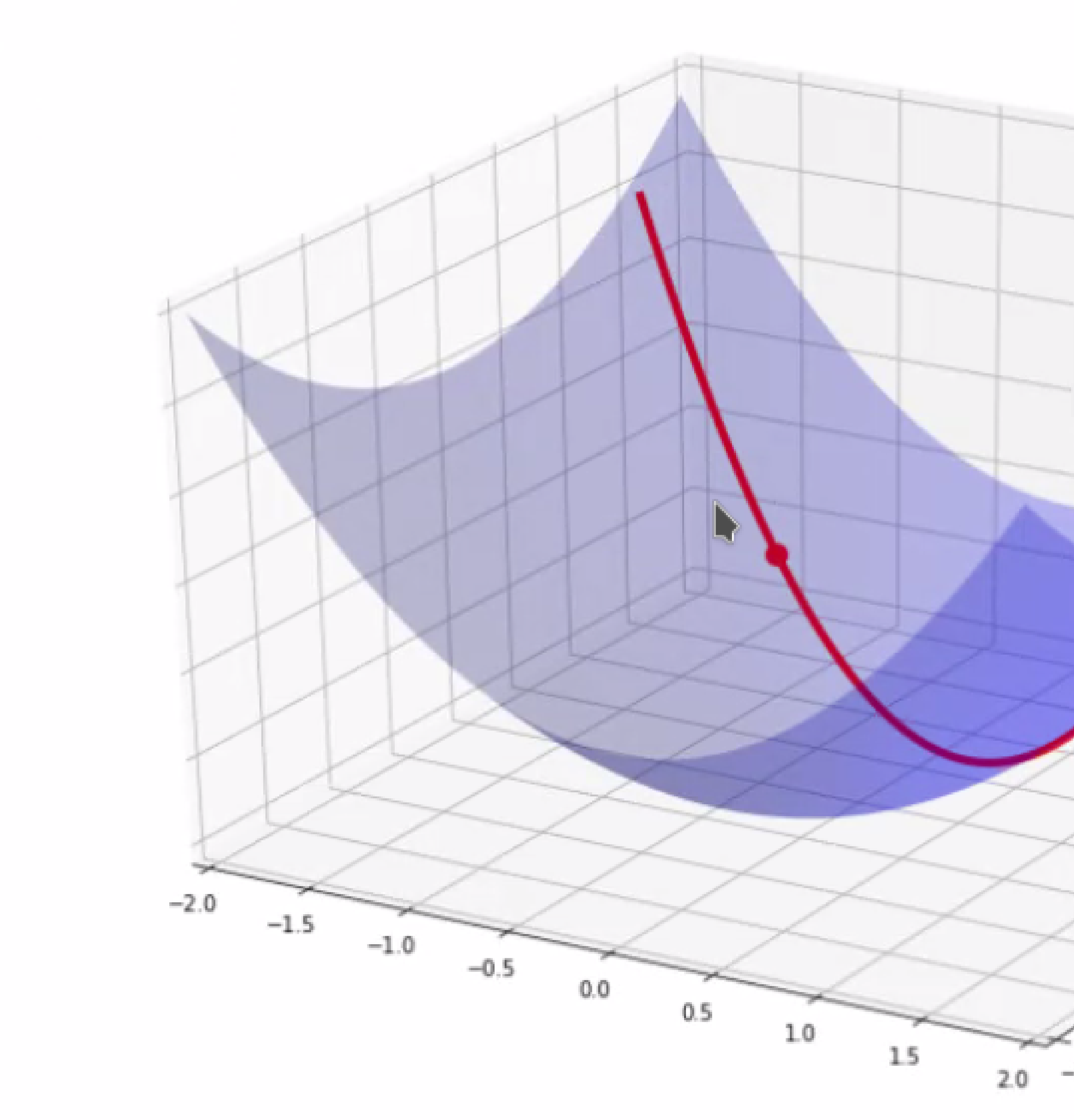
optimale schrittweite τ, sodass $x_1 = x_0 + \tau \cdot s_0$

suche τ, sodass $Q(x_1)$ minimal wird.

wir haben also ein eindimensionales optimierungsproblem in τ.

$$q(\tau) = Q(x_0 + \tau \cdot s_0)$$

wir wissen, dass $q(\tau)$ eine 1-d parabel entlang des gradienten auf der quadratischen Funktion ist



$$q(\tau) d/d\tau = d/d\tau Q(x_0 + \tau \cdot s_0)$$

Kettenregel

$$q(\tau) d/d\tau = dQ/dx\ Q(x_0 + \tau \cdot s_0) \cdot d/d\tau\ (x_0 +_0)$$

$$(\nabla Q(x_0 +_0))^T \cdot s_0$$

$$< \nabla Q(x_0 +_0)), s_0 >$$

der Gradient steht senkrecht auf der Suchrichtung: der Erste komponent ist präzise das, was wir optimieren wollen!

$$\nabla Q(x) = 2Ax + 2b$$

also folgt für τ

$$< 2(A(x_0 + \tau s_0) + b), s_0 >$$

$$< 2(Ax_0 + A\tau s_0 + b), s_0 >$$

$$2((Ax_0)^T s_0 + \tau(As_0)^T s_0 + b^T s_0) = 0$$

$$\iff \tau(As_0)^T s_0 = -((Ax_0)^T s_0 + b^T s_0)$$

$$\iff \tau = -\frac{< Ax_0 + b, s_0 >}{< As_0, s_0 >}$$

Für Tau betrachten wir also das verhältniss vom inneren produkt der suchrichtung zur 1. ableitung des momentanen punktes und der Suchrichtung und 2. ableitung.

gradientenverfahren: Suchrichtung ist Gradient.

A konjugation:

bisher: gehen vom gradienten im schnellsten weg zur nächsten niveaulinie. $< s_1, s_0 >= 0$ für den nächsten wert.

A konjugation ändert das krit. auf $< s_1, As_0 >= 0$

für uns hier $s_1^T(-4, -8)^T = 0 \implies s_1 = (2, -1)^T$

f)

1. Schritt gleich gradientenverfahren:

$x_1 = x_0 + \tau_0 s_0 = (-1, 1)^T$

2. Schritt

wir gehen in richtung des konj. Gradienten. (also hier das zuvor berechnete s_1)

$\tau_1 = \frac{<Ax_1+b,s_1>}{>As_1,s_1>} = 1/7$

$y_2 = (-5/7, 6/7)^T$

WIR SIND AM NULLPUNKT (weil wir exakt rechnen und quadratisch sind)

Reading zu CG:

“conjugate gradients without the agonizing pain”