Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMath C2

Name, Vorname: Frank, Jonathan

Studon-Kennung: yk34alis

Blatt-Nr: 01

Übungsgruppen-NR: 7

21/24 * 33 = 29

Die folgenden Abgaben gebe ich zur Korrektur frei: A1, A2, A3

A1

a) $\inf(M) = \sqrt{3}$, $\sup(M) = \sqrt{5}$, $\max(M)$ = existiert nicht $\min(M) = \sqrt{3}$

b) $\inf(M) = 1/4$, $\sup(M) = 2/3$, $\max(M) = 2/3$, $\min(M) = 1/4$

c) $\inf(M) = 0$, $\sup(M) = 1/2$, $\max(M) = 1/2$, $\min(M)$ = existiert nicht

d) $\inf(M) = 2$, $\sup(M) = +\infty$, $\max(M)$ = existiert nicht, $\min(M) = 2$ -\infty bzw. exist

e) $\inf(M) = 0$, $\sup(M) = 1$, $\max(M) = 1$, $\min(M)$ = existiert nicht

f) $\inf(M) = 2/3$, $\sup(M) = +\infty$, $\max(M)$ = existiert nicht, $\min(M) = 2/3$

g) $\inf(M) = 1$, $\sup(M) = +\infty$, $\max(M)$ = existiert nicht, $\min(M)$ = existiert nicht

A2

i) $\frac{3n+4m}{5n^2+10} \leq \frac{3n+4\cdot(3n)}{5n^2+10} \overset{=}{\cancel{\leq}} \frac{15n}{5n^2+10} \overset{=}{\cancel{\leq}} \frac{3n}{n^2+2}$

ii) $\frac{5n-m}{2n} \leq \frac{5n-2n}{2n} \overset{=}{\cancel{\leq}} \frac{3n}{2n} \overset{=}{\cancel{\leq}} \frac{3}{2}$

iii) $\frac{n}{n+m} \leq \frac{n}{n+2n} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

iv) $\frac{n+m}{1/2-n} \leq \frac{n+3n}{1/2-n} = \frac{4n}{1/2-n}$

v) $\frac{5n-m+3\cdot 2^m}{3n^3-m+3} \leq \frac{5n-2n+3\cdot 2^{3n}}{3n^3-3n+3} = \frac{3n+3\cdot 2^{3n}}{3(n^3-n+3)} = \frac{n+2^{3n}}{n^3-n+3}$

vi) $m+n+\underbrace{\sin(m)}_{\text{höchstens } 1} \underbrace{-\sin(17m^2)}_{\text{höchstens } 1} + 2^m + 2^{-m} \leq 3n+n+1+1+2^{3n}+2^{-2n}$

$\hookrightarrow 4n+2+2^{3n}+2^{-2n}$

A3

a) $a_{n+1} - a_n > 0$

i) $\hookrightarrow \frac{2n+\cancel{4}2}{n+1+3} - \frac{2n}{n+3} = \frac{(2n+\cancel{4}2)\cdot(n+3)}{(n+4)\cdot(n+3)} - \frac{2n\cdot(n+4)}{(n+3)\cdot(n+4)}$ ✓

$$= \frac{2n^2+\cancel{7}8n+\cancel{8}6-(2n^2+8n)}{n^2+7n+12}$$

$$= \frac{6}{n^2+7n+12} > 0$$ ✓

$\hookrightarrow$ Bruch kann nicht negativ werden, Folge i) steigt monoton

ii) $\hookrightarrow \frac{n+1}{4^{n+1}} - \frac{n}{4^n} = \frac{n\cdot 4^n}{4^{n+1}\cdot 4^n} - \frac{n\cdot 4^{n+1}}{4^{n+1}\cdot 4^n}$

$$= \frac{n4^n - n4^{n+1}}{4^{n+1}\cdot 4^n}$$

ff

$$= \frac{4^n(n-n\cdot 4)}{4^n(4^{n+1})} = \frac{-3n}{4^{n+1}} < 0$$ ✓

$\hookrightarrow$ Bruch immer negativ, Folge ii) fällt monoton

b) i) $\rightarrow \frac{2n}{n+3} = a_n$, $a_{1000} = \frac{2000}{1003} = 1{,}994 \approx 2$

Vermutung: $\lim_{n\to\infty} = 2$ ✓

ii) $\frac{n}{4^n} = a_n$, $a_5 = \frac{5}{4^5} = \frac{5}{1024} \approx 0$

Vermutung $\lim_{n\to\infty} = 0$ ✓

c) i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \rceil$.

Dann gilt $\forall n \geq n_0$: $|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+3)}{n+3}\right|$

$$= \left|\frac{2n-2n+6}{n+3}\right|$$

$$= \left|\frac{6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \dots = \varepsilon$$

1. Hier dreht sich die (

$\hookrightarrow \frac{6}{n+3} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 6 \leq \varepsilon\cdot(n+3) \Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon} \leq n+3$

$\Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon} - 3 \geq \varepsilon$

$\hookrightarrow \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} = \frac{6}{\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \rceil + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}+0} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$ ✓

ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 := \cancel{\lceil \log_2(2^n) \rceil} \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$

Dann gilt $\forall n \geq n_0: |a_n - a| = |\frac{n}{4^n} - 0| = \frac{n}{2^{2n}} \leq \ldots = \varepsilon$

↳ einfaches auflösen nicht möglich, anwenden von Tipp in der Aufgabenstellung: ($n_0 \leq 2^{n_0}$)

$$\frac{n}{2^{2n}} \leq \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{2^n(1)}{2^n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n} \leq \ldots = \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq 2^n \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq n \cdot \log_2(2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq n$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{1}{2^{\log_2(\frac{1}{\varepsilon})}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$