# Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

15. Juni 2020

$$\bar{x} \sim Geo^0(p)$$

$$X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}')$$

1.

$$X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}')$$

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

Wie kann man aus $(\Omega', \mathscr{A}')$ zu einem W-Modell (mit einem P) ergänzen.

$$A' \in \mathscr{A}' : P^X(A') = P(X^{-1}(A')) = P(X \in A')$$

Also man mapped die A' wieder zurück auf die dazugehörigen A im Urbild (bem.: $X \in A' = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}$)

$(\Omega', \mathcal{A}', P^x)$ ist das Bildmodell von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unter abbildung X.

2.

Unter welchen Vorraussetzungen ist eine Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-.Verteilung sinnvoll:

Viele Messwerte und kleine Wahrscheinlichkeiten

Sei $S_n$ eine Folge von binom. Zufallsvariablen mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p_n << 1$ und $\mathbb{E}(S_n) = n \cdot p_n \to \lambda > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} np_n$ (weil man $\lambda = np_n$ setzen möchte) für $n \to \infty$, dann folgt

$P(S_n = k) = B(n, p_n, k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P_\lambda(k)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k\,(1-p)^{n-k} && (1)\\
\text{subst: } p = \frac{\lambda}{n} \implies &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} && (2)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} && (3)\\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} && (4)\\
&= \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}. && (5)
\end{aligned}$$

Man kann hieran sehen, dass wenn n sehr groß ist, oder p sehr klein (weil p als $\frac{\lambda}{n}$ dargestellt wird) ist.

3. Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes:

Wenn man sehr viele kleine **unabhängige** Zufallseffekte $n \to \infty$ und kleine Wahrscheinlichkeiten hat $p << 1$ dann kann eine Verteilung als eine Normalverteilung modelliert werden, solange keine einzelne Variable einen dominanten einfluss auf die Varianz besitzt.

Beweis: n i.i.d Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$: Erwartungswert $\mu$ und std $\sigma$.

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ Der Erwartungswert ist $n\mu$ und Var $n\sigma^2$. Standardisieren:

$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass $Z_n$ für $n \to \infty$ zur standardnormalverteilung punktweise konvergiert $\mathcal{N}(0,1)$

z.B.: Sein Bino(n,p) mit großem n und kleinem p, dann gilt:

$F^{S_n}(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$ mit a dem Erwartungswert $\mathbb{E}(S_n) = np$ und $\sigma = \sqrt{np(p-1)}$ weil man n mal das geometrischen Mittel der Wahrscheinlichkeiten hat (geo weil das verhältnisse darstellt)

4.

Negative Bino $nb^+(r,p,k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ oder $nb^0(r,p,k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$ (also gleich bis auf substitution).

Namensbegründung: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{(k+r-1)_k}{k!}$

$(k+r-1)_k = (r+k-1)(k+r-2)\ldots(r+k-k) = [-(-r-k+1)][-(-r-k+2)]\ldots[-(-r)] = (-1)^k(-r)^k$

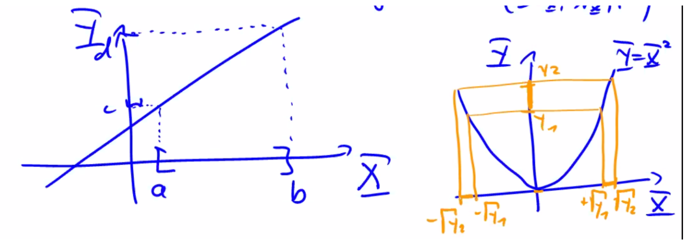
also:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{(k+r-1)_k}{k!} = \underbrace{|\binom{-r}{k}|}_{negativeBinomial} = \frac{(r)_k}{k!}$$

Kurzes wort zu zufallsvariablen

$X$ gegeben und $Y = g(X)$ allgemeiner Fall.

$$P^Y(Y \leq y) = \underbrace{P^Y(g(x) \leq y)}_{falls\ g\ bijektiv} = P(X \leq g^{-1}(y))$$




Also falls g nicht bijektiv ist, dann muss man halt stückweise vorgehen (und aufpassen)

Mit affinlinearen abbildungen von ZV $Y = a + bX$

$$F^Y(y) = F^X(\frac{y-a}{b})$$

daraus folgt unmittelbar (durc ableiten)

$$f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X(\frac{y-a}{b})$$