Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

7. Mai 2020

1 Präsenzaufgabe 9

drei unterscheidbare würfel Ω in geeigneter weise angeben:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 = \{(x,y,z)|1 \leq x,y,z \leq 6 \land x,y,z \in \mathbb{N}\}$

$A = \{(x,y,z) \in \Omega | x = y = z\} = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\} \implies |A| = 6$

$B = \{(x,y,z) \in \Omega | x+y+z \leq 3 = \{(1,1,1)\} \implies |B| = 1$ $C = \{(x,y,z) \in \Omega | (x < 6 \land y < 6) \land (z < 6 \land x < 6) \land (y < 6 \land z < 6)\}$

2 Präsenzaufgabe 10

a) Der k-te würfel ergibt 3 $A_k = \{(x_1, x_2, 3, \ldots, x_n)|\forall n(x_n \in \Omega)\}$

$A_k = \{1,\ldots,6\}^{k-1} \times \{3\} \times \{1,2,\ldots,6\}^{n-k} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n | w_k = 3, w_i \in (1,\ldots,6), i \neq k\}$

b) Der k-te würfel ist die erste 3:

$B_k = \{1,2,4,5,6\}^{k-1} \times \{3\} \times \{1,\ldots,6\}^{n-k}\{\omega = (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)|\omega_1,\omega_2 \in [1,2,4,5,6], \omega_3 = 3, \omega_i \in \Omega, i > 3\}$

c) der k-te und k+1-te würfel sind die ersten beiden dreien.

$C_k = \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)|\omega_i \in \{1,2,4,5,6\} \forall i \in \{1,2,\ldots,k-1\}, \omega_k = \omega_{k+1} = 3, \omega_j \in \Omega, \forall j > k+1\}$

d) genau eine drei $D = \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)|\exists! i \in \{1,\ldots,n\} : \omega_i = 3\}$

e) mindestens eine drei $E = \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)|\exists i \in \{1,\ldots,n\} : \omega_i = 3\}$

f) Es wird keine drei geworfen:

$F = \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)|\forall i \in \{1,\ldots,n\} : \omega_i \neq 3\} = CE = \{1,2,4,5,6\}^n$

Man kann $B_k = A_k \cap (\bigcap_{i=1}^{k-1} CA)$ der große schnitt elimiert alle 3-en an stellen die nicht gleich k sind (maskiert diese aus)

$C_k = (A_k \cap A_{k+1}) \cap (\bigcap_{i=1}^{k-1} CA)$

$D_k = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap (\bigcap_{i=1, i\neq k} CA_i))$ $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$F = C \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} CA_i$

3 Präsenzaufgabe 11

WICHTIG

Beispiel

$X = \{A, B\}, X \subseteq X, \{A\} \subset X, \mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, X\}$

3 Vorraussetzungen für σ Algebra:

Jede algebra muss $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sein

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$
- σ-additivität: $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- $(A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, folgt aus 2 und 3)

a) Ω beliebig $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra, da das komplement $\emptyset^C = \Omega$, die ganze und die nullmenge existieren. (die union trivialerweise auch).

b)

$\mathcal{A} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$

Für $|\Omega| = 2$ gilt $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ ist σ-Algebra.

Für $|\Omega| \geq 3$ gilt $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}\}$ aber es fehlt $\omega_2 \cup \omega_3, \omega_2 \cup \omega_1, \dots$ also im allgemeinen keine σ-Algebra

c)

$\mathcal{P}(\Omega)$

Ist eine σ-Algebra, da $\emptyset$ und Ω und alle verbindungen darin sind.

Dies ist die größte σ-Algebra (die kleinstmögliche ist die a))

d)

ist keine σ-Algebra.

Da $a, b \in \mathbb{R}$ und somit $\mathbb{R} \notin \mathcal{A}$.

Abgeschlossene Räume machen in der Mathemtik gerne Probleme (in z.B. Topologischen/Metrischen Räume). Deshalb wählen wir bei σ-Borel-Algebras die offenen Mengen.

e)

Ω beliebig $A \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^C\}$ ist eine σ-Algebra ($A \cap A^C = \emptyset$, $A^C \cup A = \Omega$)

f)

$\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist keine σ-Algebra: $\{3\} \cup \{2\} \notin \mathcal{A}$