Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van Anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

7, 8, 9,

9/10*30 = 27

Mathe C2 Übung 3
SS2020

Aufgabe 7:

a) I) $a_n = \dfrac{5 + (-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

$$\frac{5-1 \quad -\frac{1}{n}}{n^2} \leq a_n \leq \frac{5 + 1 + \frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{1}{n}}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

II) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$$\frac{-5-2}{6-1-1} \cdot \frac{n}{n^2+1} \leq b_n \leq \frac{5+2}{6-1-1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

$$-\frac{7}{4} \cdot \frac{n}{n^2+1} \leq b_n \leq \frac{7}{4} \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

(Einschub: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$)

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{7}{4} \frac{n}{n^2+1} = -\frac{7}{4} \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{7}{4} \cdot \frac{n}{n^2+1} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) I) $a_n = ((-1)^n + 1)n$

$M = \{0, +\infty\}$ $\lim_n \inf a_n = 0$ $\lim_n \sup a_n = +\infty$

II) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

$M = \{-1, 1\}$ $\lim_n \inf a_n = -1$ $\lim_n \sup a_n = 1$

III) $a_n = \begin{cases} -n, & \text{falls } n \leq 17 \\ n, & \text{falls } n > 17 \end{cases}$ $M = \{+\infty\} = \lim_n \inf = \lim_n \sup$

IV) $a_n = q^n$

$q < -1$ $M = \{-\infty, +\infty\}$ $\lim_n \inf = -\infty$ $\lim_n \sup = +\infty$

$-1 < q < 0$ $M = \{0\}$ $\lim_n \inf = \lim_n \sup = 0$

$q = -1$ $M = \{-1, 1\}$ $\lim_n \inf = -1$ $\lim_n \sup = 1$

$q = 0$ $\lim_n \inf = \lim_n \sup = 0$ $M = \{0\}$

$0 < q < 1$ $M = \{0\}$ $\lim_n \inf = 0 = \lim_n \sup$

$q = 1$ $M = \{1\}$ $\lim_n \inf = \lim_n \sup = 1$

$q \geq 1$ $M = \{+\infty\}$ $\lim_n \inf = \lim_n \sup = +\infty$

Aufgabe 8

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$ $\quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{2}{k}}_{0}} = 1$ ✓

a_k keine Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe divergent ✓

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$

hier genauer aufschreiben (z.b. mit sqrt(k/2k) absch

Wurzelkrit.:

$$\left(\sqrt[k]{\underbrace{\left|\frac{k-1}{3k^2+2k}\right|}_{>0,\ \text{da}\ k\geq 2}}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} \leq \frac{1}{4} \quad (k=2) \leq 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent ✓

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{k} < \frac{1}{k} \leq 1$$

bei $k=0$ ist $k=1$, da $0^0=1$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent ✓

herleitung mind. 1 schritt

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

Quotientenkrit.:

$$\left|\frac{3}{2^{k+1}(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} \cdot \frac{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{3}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{k}\left(\overbrace{\sqrt{1+\frac{2}{k}}}^{1}+\overbrace{\sqrt{1-\frac{1}{k}}}^{1}\right)}{\sqrt{k}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{k}}}_{1}\right)}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1 \text{ ✓}$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent

Aufgabe 9

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\qquad \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{4k^2} \quad \forall k \geq 2$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{4k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ ist Minorante $\Rightarrow$ Reihe divergent

II) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\qquad \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2}{3k^2} = \frac{4}{3}$

a_n keine Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe divergent

III) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ Minorante $\Rightarrow$ Reihe divergent

b) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HP

1) $\sin(n) \in [-1, 1] \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow$ hat HP ($a_n = \sin(n)$)

2) b_n $(\sin^2)$ $\in [-1, 1] \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n$ hat HP

3) $\lim_{n\to\infty} (c_n) = \frac{\overbrace{\sin(n)}^{\text{beschränkt}}}{n} = 0 \quad \Rightarrow c_n$ hat einen HP

II) 3) HP bei c_n $\quad M = \{0\}$