# Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
# IngMathC2

Name, Vorname: Schleifer, Max

StudOn-Kennung: an66iboj

Blatt-Nummer: 6

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

15, 16, 17, (alle)

16/20*30 = 24

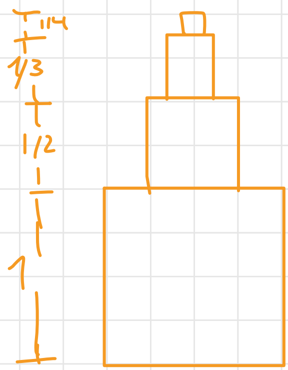
# A15

Kantenlänge Würfel $W_k$: $\frac{1}{k}$, Würfel mittig aufeinander gesetzt.

a) Höhe eines Turms mit n Elementen: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ Harmonische Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

↪ Der Turm wird unendlich hoch




b)

Bei jedem Element muss $\left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot 5 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \; [m^2]$ Fläche angestrichen werden

konv. Reihe

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{5}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} =$$

5*(pi^2)/6

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2}} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 5 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{5}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right] = 5 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

es reicht zu sagen: beide konvergent wegen hinwe

$$= 5 + 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 5 + 4 \cdot \left(\frac{\pi^2}{6}\right) \to \text{endlich}$$

c) $V_{W_k} = \left(\frac{1}{k}\right)^3 = \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ ✓ $k \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \rightarrow$ endlich ✓

$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \overset{!}{=} \text{endlich}}$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \overset{!}{=} \infty}$

d) $V_{Würfel} = A_{Seite} \cdot L_{Kante} = (L_{Kante})^3$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

1/sqrt(k) <= x<= 1/(k^(2/3))dafür gil

$L_{Kante} = x$

Es geht mit z.B. 1/sqrt(k)

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \overset{!}{=} \infty \rightarrow x^2 \overset{!}{\geq} \frac{1}{k} \Longleftrightarrow \boxed{x \geq \frac{1}{\sqrt{k}}}$ ✓

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^3 \overset{!}{=}$ endlich $\quad x^3 \overset{!}{\leq} \frac{1}{k^2} \Longleftrightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}}$

nicht für alle x.Für 1/(k^a) mit a>1 konvergiert, mit k<=1 divergiert.Also muss mar

$\rightarrow$ Ist nicht möglich. Man müsste ein x so finden, dass

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ gegen unendlich divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^3$ konvergiert.

Zumindest mit Abschätzung über Harmonische Reihe (divergent) und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ geht das nicht. Wenn es das gäbe, müssten die Würfel aber auf jeden Fall immer kleiner werden, da auf jeden Fall $x_k^2 \geq x_k^3$

Kantenlänge

# A16

a) (i) $f(x) = \underbrace{\underbrace{x^3}_{\text{stetig}} + \underbrace{\sin x}_{\text{stetig}} - \underbrace{\cos x}_{\text{stetig}}}_{\text{stetig}}$ $\qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(0) = -1 < 0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 4{,}88 > 0$$

$\rightarrow$ da $f(x)$ stetig ist und im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ negative und positive Funktionswerte hat, muss sie mind. 1 Nullstelle haben.

$$f'(x) = 3x^2 + \cos(x) + \sin(x)$$

$\cos(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\sin(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)$ ist auf $(0, \frac{\pi}{2})$ stets größer 0, somit ist

$f(x)$ in diesem Bereich streng monoton wachsend und kreuzt

die x-Achse nur einmal $\rightarrow$ genau eine Nullstelle

(ii) $f(x) = e^{-x}\cos(\pi x) - \frac{1}{2} \quad x \in (0, \frac{1}{2})$

$f(0) = \cos(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

Da $e^x$ stetig für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\cos x$ stetig für alle

$x \in \mathbb{R}$ ist auch $f(x)$ stetig in $(0, \frac{1}{2})$ und kreuzt

somit in $(0, \frac{1}{2})$ mind. einmal die X-Achse.

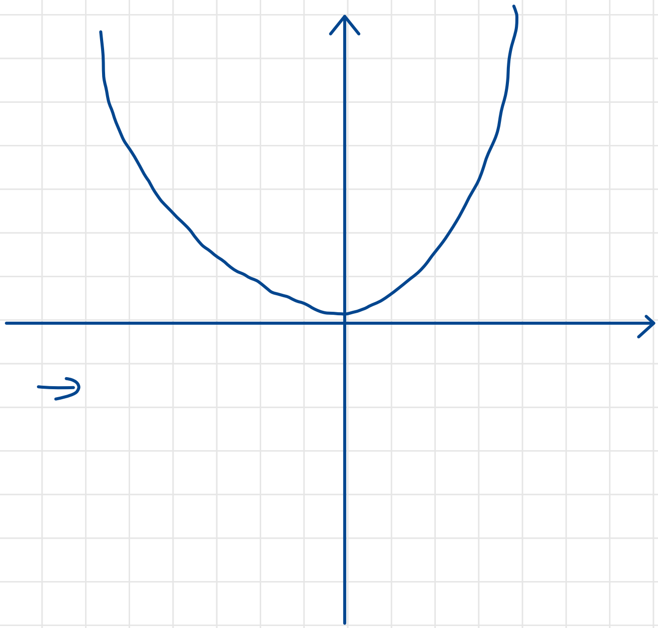
$$f'(x) = -e^{-x}\cos(\pi x) - e^{-x}\sin(\pi x)\cdot\pi =$$

$$= \underbrace{-e^{-x}}_{\substack{e^{-x} \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}}}\Big(\underbrace{\cos(\pi x)}_{\substack{\cos x \geq 0 \\ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})}} + \underbrace{\pi\sin(\pi x)}_{\substack{\pi \cdot \sin x \geq 0 \\ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})}}\Big) < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ Somit hat $f(x)$ genau eine Nullstelle in $(0, \frac{1}{2})$

b) $a < b$ $\quad f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = b$ und $f(b) = a$

ZZ.: Es gibt ein $x_* \in (a, b)$ mit $f(x_*) = x_*$



$\Rightarrow$

$$f(x) = x^2 \to f(x_*) = x_*^2 \xrightarrow{x_* \to 0} f(0) = 0$$

$a \overset{!}{\leq} 0$

$b \overset{!}{\geq} 0$

c) $f(x) = e^{-x^2} \sin(x) \quad D_f = \{11, 17\} \cup ([-5,5] \setminus (-1,1))$

$e^{-x^2}$ ist stetig, $\sin(x)$ ist stetig. Somit ist auch $f(x)$ stetig.

$D_f$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt.
($-1$ und $1$ sind Teil von $D_f$)

Satz: Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen Maximum/Minimum an

A17 mit $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right)^{-1} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ ✓

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdots \frac{\sin nx}{x}\right] =$ im nenner hast du

$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\tilde{x}_1 = 2x \xrightarrow{\tilde{x}_1 \to 0} 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{3x = \tilde{x}_2} \cdots \frac{\sin nx}{nx}\right] \cdot \frac{1}{\cancel{n!}}$ $n!$

$$= \frac{1}{n!}$$

(iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)x}{\sin(6x)x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{x}\left(\frac{\sin 6x}{x}\right)^{-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} 5 \cdot \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{5x := \tilde{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\Big(\underbrace{\frac{\sin 6x}{6x}}_{6x := \tilde{z}}\Big)^{-1} =$$

$$\underset{\tilde{x}\to 0}{\overset{x\to 0}{\Rightarrow}} \frac{\sin\tilde{x}}{\tilde{x}} = 1 \qquad \underset{\tilde{z}\to 0}{\overset{x\to 0}{\Rightarrow}} \frac{\sin\tilde{z}}{\tilde{z}} = 1$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^{-1} = \frac{5}{6}$$

(iv) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin 2x}{x}\Big)^{-1} = \lim_{x\to 0}\left(-\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x}\right)+\frac{\sin 2x}{x}\right)^{-1}$$

$$\tilde{x} := \frac{x}{2} \qquad \tilde{z} := 2x$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\left(\frac{\cos\tilde{x}-1}{2\tilde{x}}\right)+2\frac{\sin\tilde{z}}{\tilde{z}}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\lim_{\substack{\tilde{x}\to 0\\ x\to 0}} \frac{\cos\tilde{x}-1}{\tilde{x}} + 2\lim_{\substack{\tilde{z}\to 0\\ x\to 0}} \frac{\sin\tilde{z}}{\tilde{z}}\right)^{-1} =$$

$$= (0+2\cdot 1)^{-1} = \frac{1}{2}$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right)$

1*cos(0) = 1

$$\frac{\pi}{x}\sin x\cos x = \pi\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\cos x\right) = \pi x\left(\frac{\sin x}{x}\,\frac{\cos x}{x}\right) =$$

$$= \frac{\pi x}{\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}\;\frac{\sin x}{x}\;\frac{\cos x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x} = \pi\cdot\frac{x}{\frac{\cos x-1}{\cos x}}\;\frac{\sin x}{x}\;\frac{\cos x-1}{x} =$$

$$= \pi\cdot\frac{x\cdot\cos x}{\cos x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x} = \pi\cdot\cos x\cdot\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)^{-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) =$$

das ist wahrscheinlich die

$$= \cos\left(\pi\cdot\lim_{x\to 0}\cos x\,\cancel{\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)^{-1}}\,\frac{\sin x}{x}\,\cancel{\frac{\cos x-1}{x}}\right) =$$

$$= \cos(\pi\cdot 1\cdot 1) = \cos\pi = -1$$