Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Maier Thomas

StudOn-Kennung: za98cojo

Blatt-Nummer: 5

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A13, A14, ____, ____

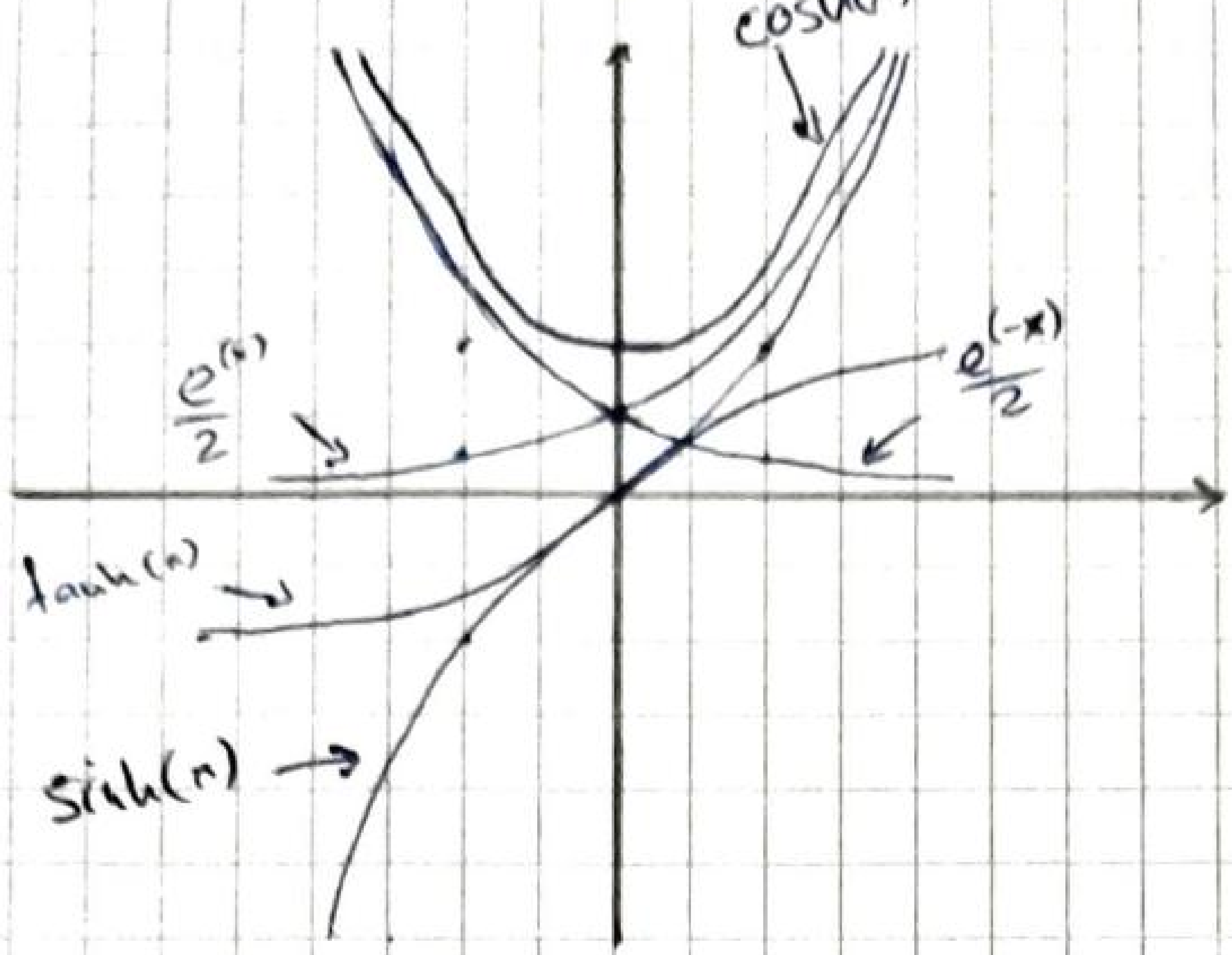
13,5/14 * 30 = 28.5

Mathe C2 - 5. Übung

Thomas Maier

A1(3)

a)



Achsen beschriften

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-\frac{1}{(e^x)^2})}{e^x(1+\frac{1}{(e^x)^2})} = \frac{1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = \underline{\underline{1}}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(\frac{1}{(e^{-x})^2}-1)}{e^{-x}(\frac{1}{(e^{-x})^2}+1)} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-2x}}-1}{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-2x}}+1} = \frac{0-1}{0+1} = \underline{\underline{-1}}$

c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{2^2} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{2^2}$

$= \frac{e^{2x} + 2(\exp(x-x)) + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$

$= \frac{e^{2x}}{4} \cdot \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} \cdot \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$

d) $\cosh(x) = \frac{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k}{2} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}(x^k + (-x)^k)}{2}$

für gerade $k \Rightarrow 2x^k$, ungerade $\Rightarrow x^k - x^k = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(2x^{2k})}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(x^{2k})}}$

$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{k!}x^k}{2} - \sum\frac{\frac{1}{k!}(-x)^k}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x^k - (-x)^k)}{2}$

ungerade $k \Rightarrow 2x^k$, gerade $k \Rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x^k)^{k\,\text{ungerade}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x(2k+1)!}}$

e) $\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}i^{2k}y^{2k}$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k}{(2k)!}y^{2k} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}y^{2k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{2k}}} = \cosh(y)$

$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(i^{2k}i)}{(2k+1)!}\cdot y^{2k+1}$

$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k\cdot i}{(2k+1)!}\cdot y^{2k+1} = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\cdot y^{2k+1} = \underline{\underline{i\,\sinh(y)}}$

f) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$

$= \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)i$

g) Nein, $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht beschränkt

↳ $\cos(x)$ & $\sin(x)$ sind nie gleichzeitig 0 für denselben x-Wert. Beim reelen/komplexen-Teil wird ein beschränkter Teil mit einem unbeschränkten multipliziert.

A 14)

a) $\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist für die x-Stellen $(-1,1] \in \mathbb{R}$ definiert.

↳ bei $x > 1$ / $x < -1$ würde die Wurzel negativ werden ↯

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x) \to 2}{(1-x) \to 0}}} = \frac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x) \to 0}{(1-x) \to 2}}} = \underline{\underline{+\infty}}$$

b) (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

↳ $\lim_{x \to 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{1 \to e} \cdot e^{x \to 1} \cdot e^{\frac{1}{x} \to \infty} = e \cdot 1 \cdot 0 = \underline{0}$

↳ e^x ist stetig, $(1+x-\frac{1}{x})$ ist stetig für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\left(\lim_{x \nearrow 0} = \underline{\underline{0}}\right)$

$\Rightarrow$ **f ist stetig**

(ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

↳ $\lim_{x \nearrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim_{x \nearrow 0} e^{1} \cdot e^{x} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e \cdot 1 \cdot \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

$= e \cdot \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{e^{(-1)\frac{1}{x}}} = e \cdot \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{+\infty}}$

$\Rightarrow$ **g ist nicht stetig** $\left(\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x)\right)$

c) (i) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2-x-1} - \lim_{x \to 0} x$

$= \left(\lim_{x \to 0} x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}} - 0 = 1^{\frac{1}{2}} - 0 = \underline{\underline{1}}$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(iv) Existiert nicht, Beispiel: $\left(x_0 = \frac{1}{2};\ x_{n+1} = \frac{1}{2} + x_n\right)$

$|\sin(\pi x)| = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} x \cdot 1 = \underline{\underline{+\infty}}$ / $|\sin(\pi x)| = 0 \Rightarrow \underline{\underline{0}}$ ↯

(v) $\lim_{x \to 0} x|\sin \pi x| = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} |\sin \pi x| = 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

(vi) Existiert nicht, Beispiel: $\left(a_n = \frac{4}{x_n \pi} \to 0;\ x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 1\right)$

gerade x_n, $\cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 1$ / $\cos(x) \Rightarrow 0$

ungerade x_n, $\cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

Scanned by TapScanner