Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Bodky, Daniel

StudOn-Kennung: as37alyj

Blatt-Nummer: 6

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17,

15/20*30 = 22,5

A15

a) Die Höhe des Turms wird durch die Summe der Kantenlängen errechnet, also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\rightarrow$ harmonische Reihe divergiert ggn. $+\infty$

$\rightarrow$ der Turm wird unendlich hoch.

b) Wenn alle Teile (auch nicht sichtbare) angestrichen werden, gilt: $6 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 6 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$

$\rightarrow 6 \cdot \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \rightarrow 6 \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 6 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \pi^2$

Die oberseite eines Blockes wird du

$\rightarrow$ Man braucht endlich viel Farbe, nämlich für $[\pi^2 \cdot \text{Kantenlänge}^2]^2$ an Fläche

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ auf Konvergenz prüfen:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k^3}{(k+1)^3}\right| = \frac{k^3}{k^3 + 2k^2 + 4k + 1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^3}} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{1} = 1$$

~~$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ ist divergent~~

nein vgl hinweise oder P11-b.Es gilt hier immer |a_n+1/a_n| echt

$\rightarrow$ Der Turm kann nicht aus endlich viel Beton gebaut werden.

d) Die Seitenlänge kann als s_k definiert werden,

$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} (s_k)^3$

$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, $(s_k)^3 = \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow s_k = \sqrt[3]{\frac{1}{k^2}}$,

die benötigte Farbe lässt sich mittels $6 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}$ berechnen.

A16 a)

i) $f(x) := x^3 + \sin x - \cos x$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$

1) $f(0) = 0 + 0 - 1 = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + 1 - 0 = 1 + (\frac{\pi}{2})^3 > 0$

$\rightarrow$ nach Nullstellensatz v. Bolzano hat $f(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ ≥ 1 Nullstelle.

2) Monotonie durch Ableiten: $f'(x) = \underbrace{\underset{>0}{3x^2} + \underset{>0}{\cos x} + \underset{>0}{\sin x}}_{\text{auf } (0, \frac{\pi}{2})} > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2}$

ii) $f(x) := e^{-x} \cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ auf $(0, \frac{1}{2})$

1) $f(0) = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow$ nach NSS v. Bolzano hat $f(x) \geq 1$ NS in $(0, \frac{1}{2})$

2) Monotonie: $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(\pi x) - \frac{1}{2}$: e^{-x} streng monoton fallend.

$\cos \pi x$ streng monoton fallend in $(0, \frac{1}{2})$

$\rightarrow$ $f(x)$ fällt streng monoton.

$\Rightarrow$ Aufgrund von Nullstellensatz und Monotonieverhalten haben beide Funktionen genau eine Nullstelle

b) $a < b$, $f: [a, b]$ stetig, $f(a) = b$, $f(b) = a$

Hilfsfunktion: $g(x) = f(x) - x$ (weil $g(x)$ Nullstelle haben muss)

$\rightarrow$ $f(x)$ stetig, "$-x$" stetig

$g(x)$ ist also stetig, Beweis der Nullstelle:

$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$

$g(b) = f(b) - b = a - b < 0$

$\rightarrow$ es gibt eine Nullstelle für $g(x)$ in $[a, b]$

$\rightarrow$ $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow$ es existiert ein x_* für $f(x_*) = x_*$

A17 i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 2 \lim\limits_{x \to 0} 1 = 2$ ✓ ✓

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin nx}{x}$ ✓

$= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ ✓

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}} = \frac{5}{6}$ ✓ ✓

v) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \sin x \cos x\right) = \lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\pi \cdot \frac{\sin x}{x} \cos x\right) = \cos(\pi \cdot 1 \cdot 1) = \cos \pi$ ✓ ✓