Sitzung 4

Wahrscheinlichkeitsräume

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 4. Mai 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Wahrscheinlichkeitsräume

Ziel dieses Themas

1. Was ist ein Zufallsexperiment? ✓
2. Wie können Ausgänge/Ereignisse/Merkmale von Zufallsexperimente modelliert werden? Ergebnismenge Ω, $\mathcal{A}$
3. Wie können Fragestellungen mathematische modelliert werden? X
4. Was bedeutet „Wahrscheinlichkeitsmaß“?
5. Welche mathematische Struktur ermöglicht das Arbeiten mit Ereignissen?

Was lernen Sie?

1. Sie können die Begriffe: Ergebnismenge, Elementarereignis, Maßraum, $\sigma-$-Algebra, Zufallsvariable definieren.
2. Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
3. Sie kennen dei Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Rechenregeln.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeitsräume

Ziel dieses Themas

1. Was ist ein Zufallsexperiment?
2. Wie können Ausgänge/Ereignisse/Merkmale von Zufallsexperimente modelliert werden?
3. Wie können Fragestellungen mathematische modelliert werden?
4. Was bedeutet „Wahrscheinlichkeitsmaß“?
5. Welche mathematische Struktur ermöglicht das Arbeiten mit Ereignissen?

Was lernen Sie?

1. Sie können die Begriffe: Ergebnismenge, Elementarereignis, Maßraum, $\sigma-$-Algebra, Zufallsvariable definieren.
2. Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
3. Sie kennen dei Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Rechenregeln.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Ziele der letzten Woche

Lernziele

1. Sie kennen die Unterschiede der Begriffe Ergebnismenge bzw. Ereignismenge, Ereignissystem, Ereignis und Elementarereignis.
2. Sie kennen die Eigenschaften einer σ-Algebra.
3. Sie kennen die Definition eines ~~Maßraumes~~. Messraumes
4. Sie kennen die Definition der Zufallsvariable.

Modellierung

1. **Aspekt** Die möglichen Ereignisse.
2. **Aspekt** Die möglichen Fragestellungen.
3. **Aspekt** Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Bausteine

1. Baustein Ergebnismenge	2. Baustein Ereignis-System $\mathcal{A}$	3. Baustein Wahrscheinlichkeit P

Modellierung

1. **Aspekt** Die möglichen Ereignisse.
2. **Aspekt** Die möglichen Fragestellungen.
3. **Aspekt** Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Bausteine

1. Baustein Ergebnismenge	2. Baustein Ereignis-System $\mathcal{A}$	3. Baustein Wahrscheinlichkeit P

Modellierung

1. **Aspekt** Die möglichen Ereignisse.
2. **Aspekt** Die möglichen Fragestellungen.
3. **Aspekt** Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Bausteine

1. Baustein Ergebnismenge	2. Baustein Ereignis-System $\mathcal{A}$	3. Baustein Wahrscheinlichkeit P

$\Omega = \{1,2,3\}$ $\Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$

Definition 3.23. Ist X eine Abbildung $\Omega \to \Omega'$ und $A' \subset \Omega'$, dann wird definiert:

$$\{X \in A'\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\} \ .$$

Eine Teilmenge $A \in \Omega$ der Form $A := \{X \in A'\}$ heißt **durch** X **beschreibbar**.

$A' = \{2,4\}$, $A' = \{5\}$, $A' = \{6\}$

$X : \Omega \to \Omega'$, $\omega \longmapsto 2\omega$

- $\{X \in \{2,4\}\} = \{1,2\} \subset \Omega$, denn $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$
- $\{X \in \{6\}\} = \{3\} \subset \Omega$, denn $2 \cdot 3 = 6$
- $\{X \in \{5\}\} = \emptyset$, $\nexists \omega \in \Omega : 2 \cdot \omega = 5$

Beantwortung der weiterführende Fragen

1. In Definition 3.16 wurde die σ-Algebra $\mathcal{A}$ eingeführt. Gilt für beliebige $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ die Aussage $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$?
2. $\mathbb{B}$ bezeichnet die σ-Borel-Algebra über $\mathbb{R}$, die aus den halboffenen Intervallen $(a, b] \subset \mathbb{R}$ erzeugt wird.
   Gilt $(a, b) \in \mathbb{B}$?
3. Beschreiben Sie das Zufallsexperiment „Summe aus drei Würfen mit einem Würfeln“ durch eine Zufallsvariable. Gerne können Sie allgemein einen Würfel mit n Seiten betrachten. Die Seiten sind von $1, \ldots, n$ durchnummeriert.

2. $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

$$(a,b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, \underbrace{b - \tfrac{1}{n}}])$$

$$\lim_{n \to \infty} b - \frac{1}{n} = b,$$

$$b - \frac{1}{n} < b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^3$, $\Omega' = \{3, \ldots, 3n\}$

$X(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_3)$ $\quad Y(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

Wichtige Begriffe

Notiz

Ergebnismenge	Ω	Alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperimen
Ergebnis	$\omega \in \Omega$	ein möglicher Ausgang des Zufallsexperiments
Ereignis	$A \subset \Omega$	Menge möglicher Ergebnisse
Elementarereignis	$\{\omega\} \subset \Omega$	Menge eines Ausgangs
Ereignissystem	$\mathcal{A}$	Abgeschlossenes Mengensystem über Ω

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**

Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren. (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird. (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}\,, \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}\,, \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}\,.$$

~~Maßraum~~ ! Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \dots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \; \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \; \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \; \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \; \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \; \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \; \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.** Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\},\ \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\},\ \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Ma~~ßraum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~ Messraum.**

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.**
Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}\,, \quad \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}\,, \quad \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}\,.$$

~~Maßraum~~ | Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Ma~~ßraum.**

Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}, \; \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}, \; \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}.$$

~~Maßraum~~ Messraum

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **~~Maß~~raum.** Mess

Bemerkung

1. ZV werden meist mit X, Y, Z, U, V, W, Ereignisse mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.
2. ZV werden benutzt, um eine in $\omega \in \Omega$ enthaltene Information auszuwählen oder zu komprimieren.
   (Ggf. durch Koordinaten- oder Parametertransformation).
3. Gelegentlich wird die Identität als ZV benutzt, damit die Bezeichnung einfacher und einheitlicher wird.
   (Bsp. Antwortzeiten: $Z(\omega) = \omega$, $\{Z \leqslant 10\}$).
4. Mittels Definition von $\mathcal{A}(X)$ wird die Abgeschlossenheit geprüft:

$$\Omega = \{X \in \Omega'\}\,,\ \{X \in A'\}^c = \{X \in A'^c\}\,,\ \left\{X \in \bigcup A'_i\right\} = \bigcup \{X \in A'_i\}\,.$$

Ziele dieser Woche

Lernziele

- Sie kennen das empirische Gesetz der großen Zahlen.
- Sie kennen die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die können die Rechenregeln anwenden.
- Sie können den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten erklären.

Dunstig

Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2013 raucht ein Viertel der deutschen Bevölkerung (Personen, die älter als 15 Jahre sind). Es wird nur zwischen weiblichen Personen und männlichen Personen unterschieden. Von den weiblichen Personen rauchen 20% und von den männlichen Personen sind 30% Raucher.

1. Geben Sie die Verteilung für männliche Personen und weibliche Personen der deutschen Bevölkerung (Personen älter als 15 Jahre) an.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (älter als 15 Jahre) die raucht auch männlich ist?

M, W $\qquad$ R, NR

$(\omega_1, \omega_2), \omega_1 \in \{M, W\}, \omega_2 \in \{R, NR\}$

$P(NR) = \frac{3}{4}, P(R) = \frac{1}{4}$

? $P(M) = ?$ $\qquad$ $P(W) = ?$; $P(M \mid R) = ?$

Häufigkeiten

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment n-mal mit den Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ unter gleichen Bedingungen wiederholt, dann „konvergieren" die relativen Häufigkeiten

$$h_n(A) := \frac{1}{n} \cdot (\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \in A)$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert.

Annahmen (für eine heile Welt)

- Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse sind bekannt.
- Jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eines genau definierten Zufallsexperiments besitzt eine Wahrscheinlichkeit.
- Zunächst betrachten wir nur Modelle, bei denen die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind.

Häufigkeiten

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment n-mal mit den Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ unter gleichen Bedingungen wiederholt, dann „konvergieren" die relativen Häufigkeiten

$$h_n(A) := \frac{1}{n} \cdot (\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \in A)$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert.

Annahmen (für eine heile Welt)

- Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse sind bekannt.
- Jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eines genau definierten Zufallsexperiments besitzt eine Wahrscheinlichkeit.
- Zunächst betrachten wir nur Modelle, bei denen die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind.

Häufigkeiten

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment n-mal mit den Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ unter gleichen Bedingungen wiederholt, dann „konvergieren" die relativen Häufigkeiten

$$h_n(A) := \frac{1}{n} \cdot (\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \in A)$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert.

Annahmen (für eine heile Welt)

- Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse sind bekannt.
- Jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eines genau definierten Zufallsexperiments besitzt eine Wahrscheinlichkeit.
- Zunächst betrachten wir nur Modelle, bei denen die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind.

Häufigkeiten

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wird ein Zufallsexperiment n-mal mit den Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ unter gleichen Bedingungen wiederholt, dann „konvergieren" die relativen Häufigkeiten

$$h_n(A) := \frac{1}{n} \cdot (\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \in A)$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert.

Annahmen (für eine heile Welt)

- Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse sind bekannt.
- Jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eines genau definierten Zufallsexperiments besitzt eine Wahrscheinlichkeit.
- Zunächst betrachten wir nur Modelle, bei denen die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind.

Beobachtungen

Eigenschaften relativer Häufigkeiten

Es sein $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$

- $h_n(A + B) = h_n(A) + h_n(B)$.
- $0 \leqslant h_n(A) \leqslant 1$,
- $h_n(\emptyset) = 0$,
- $h_n(\Omega) = 1$

Beobachtungen

Eigenschaften relativer Häufigkeiten

Es sein $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$

- $h_n(A + B) = h_n(A) + h_n(B)$.
- $0 \leqslant h_n(A) \leqslant 1$,
- $h_n(\emptyset) = 0$,
- $h_n(\Omega) = 1$

Beobachtungen

Eigenschaften relativer Häufigkeiten

Es sein $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$

- $h_n(A + B) = h_n(A) + h_n(B)$.
- $0 \leqslant h_n(A) \leqslant 1$,
- $h_n(\emptyset) = 0$,
- $h_n(\Omega) = 1$

Beobachtungen

Eigenschaften relativer Häufigkeiten

Es sein $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$

- $h_n(A + B) = h_n(A) + h_n(B)$.
- $0 \leqslant h_n(A) \leqslant 1$,
- $h_n(\emptyset) = 0$,
- $h_n(\Omega) = 1$

$A = \{2,4\}$, $B = \{5\}$, $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \{2,4,5\}$, $A + B = \{2,4,5\}$

$A \cap B = \emptyset$

$A = \{2,4\}$, $B' = \{4,5\}$

$h_n(A \cup B) \leq h_n(A) + h_n(B')$

Definition 3.32

Ein **Maß auf** $\mathcal{A}$ **(bzw. über** $(\Omega, \mathcal{A})$**)** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit

(1) $\mu(A) \geqslant 0$,

(2') $\mu(\emptyset) = 0$,

(3') $\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$.

Definition 3.32

Ein **Maß auf $\mathcal{A}$ (bzw. über $(\Omega, \mathcal{A})$)** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit

(1) $\mu(A) \geqslant 0$,

(2') $\mu(\emptyset) = 0$,

(3') $\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$.

Definition 3.32

Ein **Maß auf $\mathcal{A}$ (bzw. über $(\Omega, \mathcal{A})$)** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit

(1) $\mu(A) \geqslant 0$,

(2') $\mu(\emptyset) = 0$,

(3') $\mu(A_1 + A_2 + \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$.

$$\int_a^b 1\,dx$$

$\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega 1\,d\Omega$$

(2) $$\int_a^a 1\,d\tau = 0$$

(3) $$\int_a^b 1\,d\tau = \int_a^c 1\,d\tau + \int_c^b 1\,d\tau$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Einpunktverteilung

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Einpunktverteilung

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Einpunktverteilung

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 3.27

Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ist, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(A) \geqslant 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$, (Nichtnegativität)
2. $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
3. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität).

Einpunktverteilung

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Bernoulli

Es gibt nur zwei (Ausgänge).

Definition 3.28

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{0, 1\}$ als W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und als W-Maß $P(1) = p$ und $P(0) = 1 - p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ festgelegt. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Bernoulli-Modell**, das W-Maß P **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p oder **Bernoulli(p)-Verteilung**, kurz $B(p)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Bernoulli

Es gibt nur zwei (Ausgänge).

Definition 3.28

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{0, 1\}$ als W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und als W-Maß $P(1) = p$ und $P(0) = 1 - p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ festgelegt. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Bernoulli-Modell**, das W-Maß P **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p oder **Bernoulli(p)-Verteilung**, kurz $B(p)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Bernoulli

Es gibt nur zwei (Ausgänge).

Definition 3.28

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{0, 1\}$ als W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und als W-Maß $P(1) = p$ und $P(0) = 1 - p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ festgelegt. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Bernoulli-Modell**, das W-Maß P **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p oder **Bernoulli(p)-Verteilung**, kurz $B(p)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Bernoulli

Es gibt nur zwei (Ausgänge).

Definition 3.28

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{0, 1\}$ als W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und als W-Maß $P(1) = p$ und $P(0) = 1 - p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ festgelegt. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Bernoulli-Modell**, das W-Maß P **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p oder **Bernoulli(p)-Verteilung**, kurz $B(p)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Bernoulli

Es gibt nur zwei (Ausgänge).

Definition 3.28

Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{0, 1\}$ als W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und als W-Maß $P(1) = p$ und $P(0) = 1 - p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ festgelegt. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt **Bernoulli-Modell**, das W-Maß P **Bernoulli-Verteilung mit Parameter** p oder **Bernoulli(p)-Verteilung**, kurz $B(p)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Laplace

Alles ist gleichwahrscheinlich (und diskret).

Definition 3.30

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heißt **Laplace-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ gewählt. Das W-Maß P auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ergibt sich aus

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N) = \frac{1}{N}.$$

Das W-Maß P heißt auch **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung (über Ω)**, kurz $L(\Omega)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Laplace

Alles ist gleichwahrscheinlich (und diskret).

Definition 3.30

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heißt **Laplace-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ gewählt. Das W-Maß P auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ergibt sich aus

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N) = \frac{1}{N}.$$

Das W-Maß P heißt auch **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung (über Ω)**, kurz $L(\Omega)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Laplace

Alles ist gleichwahrscheinlich (und diskret).

Definition 3.30

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heißt **Laplace-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ gewählt. Das W-Maß P auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ergibt sich aus

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N) = \frac{1}{N}.$$

Das W-Maß P heißt auch **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung (über Ω)**, kurz $L(\Omega)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Laplace

Alles ist gleichwahrscheinlich (und diskret).

Definition 3.30

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heißt **Laplace-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ gewählt. Das W-Maß P auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ergibt sich aus

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N) = \frac{1}{N}.$$

Das W-Maß P heißt auch **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung (über Ω)**, kurz $L(\Omega)$.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsmaße

Laplace

Alles ist gleichwahrscheinlich (und diskret).

Definition 3.30

Ein Zufallsexperiment mit endlich vielen und gleichwertigen Ausgängen heißt **Laplace-Experiment**. Als Ergebnismenge wird $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ gewählt. Das W-Maß P auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ergibt sich aus

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N) = \frac{1}{N}.$$

Das W-Maß P heißt auch **Laplace-Verteilung** oder **diskrete Gleichverteilung (über Ω)**, kurz $L(\Omega)$.

Wahrscheinlichkeiten durch Abmessen

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \ .$$

Urnen

Einschub: Urnenmodelle

Aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln werden k Kugeln entnommen. Dabei lassen sich verschiedenen Betrachtungsweisen unterscheiden:

ohne Wiederholungen	$\widehat{=}$	ohne Zurücklegen
mit Wiederholungen	$\widehat{=}$	mit Zurücklegen
ohne Anordnung	$\widehat{=}$	ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Anordnung	$\widehat{=}$	mit Beachtung der Reihenfolge

Satz 3.31

Die Anzahl der möglichen k-Kombinationen von n Objekten (paarweise verschieden) ergibt sich aus folgender Tabelle:

Kombinationen	*ohne Wiederholung* $(k \leqslant n)$	*mit Wiederholung*
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\bar{V}_{n,k} = n^k$
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\bar{K}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Einpunktverteilung

Definition 3.32

Es sei Ω eine Ergebnismenge, $\mathcal{A}$ ein Ereignissystem über Ω und $a \in \Omega$ ein (festes) ausgewähltes Ergebnis. Dann heißt das W-Maß P, definiert durch

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die **Einpunktverteilung** im Punkt a, kurz $P = \epsilon_a$.

Einpunktverteilung

Definition 3.32

Es sei Ω eine Ergebnismenge, $\mathcal{A}$ ein Ereignissystem über Ω und $a \in \Omega$ ein (festes) ausgewähltes Ergebnis. Dann heißt das W-Maß P, definiert durch

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die **Einpunktverteilung** im Punkt a, kurz $P = \epsilon_a$.

Einpunktverteilung

Definition 3.32

Es sei Ω eine Ergebnismenge, $\mathcal{A}$ ein Ereignissystem über Ω und $a \in \Omega$ ein (festes) ausgewähltes Ergebnis. Dann heißt das W-Maß P, definiert durch

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die **Einpunktverteilung** im Punkt a, kurz $P = \epsilon_a$.

Rechenregeln

(1)	$P(A) \geqslant 0$	Nichtnegativität
(1′)	$P(A) \leqslant 1$	
(2)	$P(\Omega) = 1$	Normiertheit
(2′)	$P(\emptyset) = 0$	Nulltreue
(3)	$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$	Additivität
(3_n)	$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$	endliche Additivität
(3′)	$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$	$\sigma -$ Additivität

Weitere Rechenregeln

$$(4) \qquad P(A^c) = 1 - P(A)$$

$P(\Omega \setminus A)$

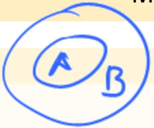
$A \setminus B$

$$(5) \qquad P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$(6) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(7) \qquad P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$ Subadditivität

$$(8) \qquad A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$$ Monotonie



Weitere Rechenregeln

$$(9) \qquad A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$ Stetigkeit von unten

$$(10) \qquad A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$ Stetigkeit von oben

Weitere Rechenregeln

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(5) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(7) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ Subadditivität

(8) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ Monotonie

Weitere Rechenregeln

(9) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von unten

(10) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$ Stetigkeit von oben

Dunstig

Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2013 raucht ein Viertel der deutschen Bevölkerung (Personen, die älter als 15 Jahre sind). Es wird nur zwischen weiblichen Personen und männlichen Personen unterschieden. Von den weiblichen Personen rauchen 20% und von den männlichen Personen sind 30% Raucher.

1. Geben Sie die Verteilung für männliche Personen und weibliche Personen der deutschen Bevölkerung (Personen älter als 15 Jahre) an.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (älter als 15 Jahre) die raucht auch männlich ist?

$$P(R) = \frac{1}{4} \overset{(4)}{\Longrightarrow} P(NR) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(R|W) = \frac{1}{5} \Longrightarrow P(NR|W) = \frac{4}{5}$$

$$P(R|M) = \frac{3}{10} \Longrightarrow P(NR|M) = \frac{7}{10}$$

$$P(M|R) = ?$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.33

Es seien A, B Ereignisse in Ω und $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.33

Es seien A, B Ereignisse in Ω und $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Noch mehr Bedingtes

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei $(B_i, i \in I)$ eine abzählbare Zerlegung von Ω und seien $P(B_i)$ und $P(A|B_i)$ für alle $i \in I$ bekannt, dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \underline{P(B_i) P(A|B_i)} \, .$$

$$P(R) = P(R|W) \cdot \overset{?}{P(W)} + P(R|M) \cdot \underline{\overset{?}{P(M)}}$$

$$= P(R|W) P(W) + P(R|M) \cdot (1 - P(W))$$

$$\Rightarrow \quad P(W) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(M) = \frac{1}{2}$$

$$P(M|R) = ? \quad \longleftrightarrow \quad P(R|M)$$

Formel von Bayes

Sei $(B_i, i \in I)$ eine abzählbare Zerlegung von Ω, dann gilt

$$P(B_k|A) = \frac{\overbrace{P(B_k)P(A|B_k)}^{= P(A \cap B_k)}}{\underbrace{\sum_{i \in I} P(B_i)\, P(A|B_i)}_{\text{totalen Wah. } P(A)}}\,.$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) .$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\ .$$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastisch Unabhängigkeit

Oft tritt der Fall ein, dass ein Ereignis A **nicht** vom Eintreten eines anderen Ereignisses B abhängt. Dann gilt:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dieser Fall heißt **stochastisch unabhängig**. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definition 3.34

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** bzgl. P, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\ .$$

Selbststudium

Quellen

- Skript Kapitel Abschnitt 3.7 bis 3.9 (`https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html`)
- Kopien Buch:Hübner, G. Stochastik. Vieweg. ab Kapitel 2.7 bis 2.9

Weiterführende Fragen

1. Finden Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsraum, in dem die Forderung
$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
benötigt wird.
2. Schreiben Sie anhand eines Beispieles einen Wahrscheinlichkeitsraum für die Einpunktverteilung auf.
3. Machen Sie sich die Rechenregeln 1-8 für Wahrscheinlichkeitsmaße anhand eines Würfels deutlich.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr