# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 2. Übung

4.05. - 7.05.2020
Sommersemester 2020

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Marius Yamakou
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

---

### Präsenzaufgabe 9:

Es werden drei unterscheidbare Würfel geworfen, deren sechs Seiten jeweils mittels „Augen“ durchnummeriert werden.

a) Geben Sie die Ergebnismenge $\Omega$ in geeigneter Weise an.

b) Beschreiben Sie die folgenden drei Ereignisse als Teilmenge von $\Omega$:

$A$: Alle drei Würfel zeigen dieselbe Augenzahl.

$B$: Die Summe der Augenzahlen ist kleiner oder gleich drei.

$C$: Der Median der Augenzahlen ist echt kleiner als sechs.

---

### Präsenzaufgabe 10:

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine geeigneten Ergebnismenge $\Omega$ zur Beschreibung des Zufallsexperiments *„n-maliges Werfen eines unverfälschten Würfels“*. Beschreiben Sie diejenigen Teilmengen in $\Omega$, die verbal durch die folgenden Aussagen beschrieben werden:

a) $A_k$: *„Der k-te Wurf ergibt 3.“* $(1 \leqslant k \leqslant n)$

b) $B_k$: *„Der k-te Wurf ergibt die erste 3.“* $(1 \leqslant k \leqslant n)$

c) $C_k$: *„Der k-te und der $(k+1)$-teWurf ergeben die ersten beiden 3“* $(1 \leqslant k \leqslant n)$

d) $D$: *„Es wird genau eine 3 geworfen.“*

e) $E$: *„Es wird mindestens eine 3 geworfen.“*

f) $F$: *„Es wird keine 3 geworfen.“*

Welche der Ereignisse $B_k, C_k, D, E, F$ lassen sich durch die $A_k$ ausdrücken? Gegebenenfalls wie?

## Präsenzaufgabe 11:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra sind oder nicht:

a) $\Omega$ beliebig, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

b) $\Omega$ beliebig, $\mathcal{A} = \{\{\omega\} \ : \ \omega \in \Omega\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$

c) $\Omega$ beliebig, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

d) $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\}$

e) $\Omega$ beliebig, $A \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$

f) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$

---

## Hausaufgabe 12: (4 Punkte)

Ein Bogenschütze schießt und trifft auf eine Zielscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r$ (in Metern) mit $r > 1$. Von Interesse ist der Auftreffpunkt des Pfeils.

a) Geben Sie die Ergebnismenge $\Omega$ in geeigneter Weise an.

b) Beschreiben Sie die folgenden drei Ereignisse als Teilmenge von $\Omega$:
   - $A$: Der Auftreffpunkt hat weniger als einen Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.
   - $B$: Der Auftreffpunkt liegt im rechten oberen Viertel der Scheibe.
   - $C$: Der Auftreffpunkt hat mehr als 0.5 Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.

---

## Hausaufgabe 13: (7 Punkte)

Es sei $\Omega = \{0, 1\}^2$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega, A, B\}$$

mit

$$A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad \text{und} \quad B = \{(0, 0), (0, 1)\}$$

nicht abgeschlossen ist (also keine $\sigma$-Algebra darstellt).
Welches abgeschlossene Mengensystem $\mathcal{A}$ wird von $\mathcal{E}$ erzeugt?
Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$?

## Zusatzaufgabe 14: (keine Punkte)

Auf einem binären Kanal sollen Binärwörter der Länge 4 übertragen werden. Überlegen Sie, ob die nachfolgenden Mengen $\Omega_i$, geeignete Ergebnismengen zur Beantwortung der Frage, ob ein zufällig ausgewähltes Binärwort $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_4)$ korrekt übertragen wurde, darstellen.

a) $\Omega_1 = \{$„$\omega$ korrekt übertragen“, „$\omega$ nicht korrekt übertragen“$\}$

b) $$\Omega_2 = \Big\{ \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ korrekt übertragen“}}_{=:K_i}, \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ nicht korrekt übertragen“}}_{=:N_i} \,|\, i = 1, \dots, 4 \Big\}$$

c) $\Omega_3 = \{(U_1, U_2, U_3, U_4) \,| U_i \in \{K_i, N_i\}, i = 1, 2, 3, 4\}$

d) $\Omega_4 = \left\{(s, e) \in \{0,1\}^4 \times \{0,1\}^4\right\}$, wobei $s$ bzw. $e$ das gesendete bzw. das empfangene Binärwort bezeichnen.

Eine Menge $\Omega$ ist genau dann als Ergebnismenge geeignet, wenn sie alle Versuchsausgänge beschreibt und die Elemente disjunkt sind. Werden die Ergebnisse $\omega$ als Elementarereignisse $\{\omega\}$ aufgefasst, so sollten diese unvereinbar, also disjunkt sein.

---

## Zusatzaufgabe 15: (keine Punkte)

Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{D} = \{A \subset \mathbb{N} \,|\, A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ keine $\sigma$-Algebra ist.

---

## Zusatzaufgabe 16: (keine Punkte)

Gegeben ist ein Datensatz der Form

$$z = ((x_i, y_i), (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n))$$

.

a) Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem für die Modellfunktion $\phi(x) = ax + b$. Lösen Sie die Normalengleichung $A^\top A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^\top y$ und geben Sie $a$ und $b$ in Abhängigkeit von $x_i$ und $y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ an.

b) Zeigen Sie, dass
$$a = \frac{s_{xy}}{s_{\mathbf{x}}{}^2} \qquad \text{und} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$
gilt.

**Abgabe der Hausaufgaben am 14.05.2020 bis 12 Uhr**