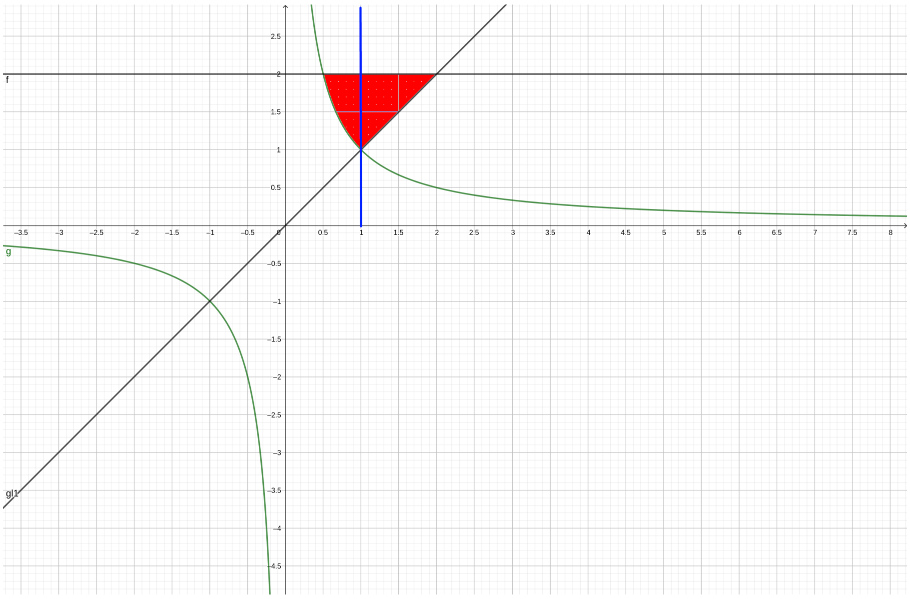
Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

30. Mai 2020


ii)

$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0.5 \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{x_1} \leq x_2 \leq 2\}$

$G_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x_1 \leq 1.5, x_1 \leq x_2 \leq 2\}$

$G_1 \cup G_2 = G.$

b)

zuerst: Rechteck auf ellipse, funktion t(x,y) (nach Vorlesung)

Sei $H = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1\}$ das Rechteck mit projektion auf G durch

$$t(x,y) = (ya * sin(x), yb * cos(x))$$

Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} ya * cos(x) & -yb * sin(x) \\ a * \sin(x) & b * \cos(x) \end{bmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante ist also

$$Jt(x,y) = ya * cos(x) * b * \cos(x) + yb * sin(x) * a * \sin(x)$$

$$|Jt(x,y)| = yab * \cos^2(x) + yba * \sin^2(x) = yab(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = yab$$

Nach transformationssatz:

$$\int_G f(x,y)d(x,y) = \int_M f(x) * |Jt(x,y)| d(x,y)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1 - \frac{(ya*sin(x))^2}{a^2} - \frac{(yb*cos(x))^2}{b^2}} yab\ dydx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1 - \frac{y^2a^2*sin(x)^2}{a^2} - \frac{y^2b^2*cos^2(x)}{b^2}} yab\ dydx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1 - y^2*\sin^2(x) - y^2*\cos^2(x)} yab\ dydx$$

Vergleiche oben:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1-y^2} yab\ dydx$$

$$\int_0^{2\pi} abc \int_0^1 \sqrt{1-y^2} y\ dydx$$

substitution $1 - y^2 = u \implies du = -2y\ dy$

$$\int_0^{2\pi} (\frac{abc}{2}\int_{1-0^2}^{1-1^2} \sqrt{u}\ du)dx$$

$$\frac{abc}{2}\int_0^{2\pi}(-\int_1^0 \sqrt{u}\ du)dx$$

$$\frac{-abc}{2}\int_0^{2\pi}([\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_1^0)dx$$

$$\frac{-abc}{2}\int_0^{2\pi}(0 - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}})dx$$

$$\frac{abc}{2}[\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}x]_0^{2\pi}$$

$$\frac{abc}{2}[\frac{2}{3}x]_0^{2\pi}$$

$$\frac{abc}{2}(\frac{2}{3}(2\pi) - 0)$$

$$\frac{abc}{2}\frac{2}{3}(2\pi)$$

$$\frac{2abc}{3}\pi$$

Zusatzaufgabe:

Zuerst umformen von f:

$$f_{X,Y}(x,y) = (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2))1_\Omega(x,y)$$

Man kann am argument der exponentialfunktion sehen, dass sich eine Transformation in polarkoordinaten anbietet:

Nach Übung

$$\int_H f(k\cos(\theta), k\sin(\theta))k\ d\theta\ dk$$

Es wurde k statt wie in der Übung r verwendet, da die funktion $f_{X,Y}(x,y)$ schon einen parameter r für den Radius der Scheibe beinhält.

Ereignis A war (nach Musterlösung):

$A = \{\omega \in \Omega | \sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2} < 1\}$ mit $\Theta : A \to G,\ \Theta(k,\theta) = (k\cos(\theta), k\sin(\theta))$

die Jacobi-matrix ist:

$J\Theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -k\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & k\cos(\theta) \end{bmatrix}$

Dies liefert $|J\Theta| = k$ (determinante wie oben berechnet).

Die funktion Θ muss nicht nur auf A angewandt werden, sondern auf den gesamten Ergebnisraum

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2} \leq r\}$$

dies liefert

$$\Omega' = \{(k,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq k \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Wobei das Ereignis $A \subset \Omega$ zu

$$A' = \{(k,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq k < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

wird.

Wir integrieren also über:

$$\int_A f_{X,Y}(x,y)dA = \int_{A'} f_{X,Y}(k\cos(\theta), k\sin(\theta))k\ dA'$$

$$\int_{A'} (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}((k\cos(\theta))^2 + (k\sin(\theta))^2)) 1_{\Omega'}(k\cos(\theta), k\sin(\theta))k\ dA'$$

Wir machen eine Fallunterscheidung über $1_{\Omega'}(k\cos(\theta), k\sin(\theta))$ null oder eins.

da bekannt ist, dass $r > 1$, ist die Indikatorfunktion immer eins, weshalb der fall Indikator =0 nie auftritt.

$$\int_{A'} (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}((k\cos(\theta))^2 + (k\sin(\theta))^2))k \cdot 1\ dA'$$

$$\int_{A'} (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(k^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)))k\ dA'$$

$$\int_{A'} (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(k^2))k\ dA'$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(k^2))k\ d\theta\ dk$$

$$\int_0^1 2\pi(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(k^2))k \;\; dk$$

$$2\pi(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \exp(-\frac{1}{2}(k^2))k \;\; dk$$

substitution mit $u=\frac{k^2}{2} \implies du=-kdk$

$$2\pi(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{-\frac{1}{2}} -\exp(u)\; du$$

$$2\pi(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}[\exp(u)]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$2\pi(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}[1-\exp(-\frac{1}{2})]=P(A)$$

Für B kann auch eine projektion auf polarkoordinaten angewandt werden.

Die Form von Ω' ändert sich damit nicht.

B in polarkoordinaten:

$$B'=\{(k,\theta)\in\mathbb{R}^2|0\le k\le r, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$$

Das $\frac{\pi}{2}$ entsteht, weil B das Ereignis der Pfeile im ersten Quadranten ist (was von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ reicht)

$$\int_B f_{X,Y}(x,y)dB=\int_{B'} f_{X,Y}(k\cos(\theta),k\sin(\theta))k \; dB'$$

$$\int_0^r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}((k\cos(\theta))^2+(k\sin(\theta))^2))1_{\Omega'}(k\cos(\theta),k\sin(\theta))k \; d\theta dr$$

Auch hier muss technisch gesehen zwischen $1_{\Omega'}(k\cos(\theta),k\sin(\theta))=0$ und $1_{\Omega'}(k\cos(\theta),k\sin(\theta))=1$ unterschieden werden. Da aber für den ersten Fall das integral sowieso null ist kann man diesen Teil des integrals vernachlässigen: $\int 0dx=0$

$$\int_0^r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}k^2)k \; d\theta dr$$

$$\int_0^r\frac{\pi}{2}(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}k^2)k \; dr$$

$$(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2}\int_0^r\exp(-\frac{1}{2}k^2)k \; dr$$

substitution mit $u=\frac{k^2}{2} \implies du=-kdk$

$$(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{4}\int_0^{-\frac{r^2}{2}} -\exp(u)\; du$$

$$(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{4}[\exp(u)]_{-\frac{r^2}{2}}^{0}$$

$$(1-e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}\frac{1}{4}[1-\exp(-\frac{r^2}{2})]=\frac{1}{4}=P(B)$$