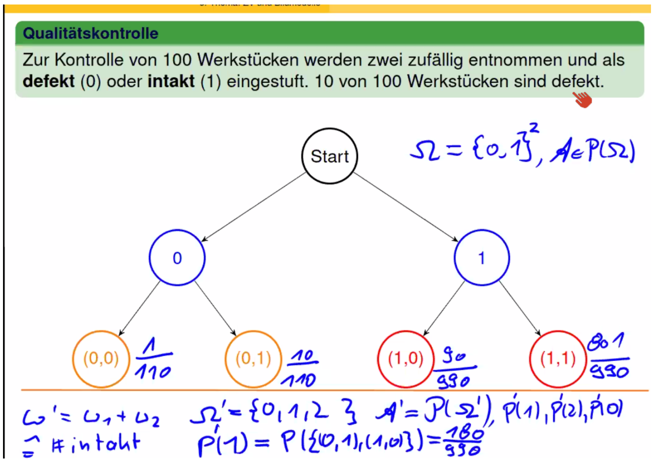
Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

5. Juni 2020

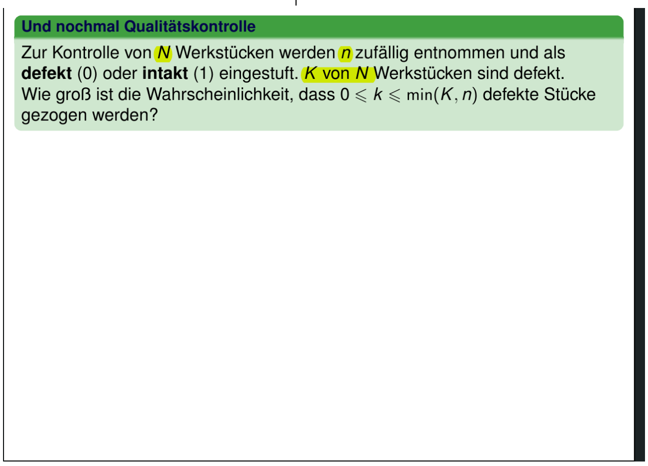


$\omega' = \omega_1 + \omega_2$ $\Omega' = \{0, 1, 2\}$ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $P'(1), P'(2), P'(0)$

Das ist eine davon ableitbare Wahrscheinlichkeitsverteilung, wo nur die Anzahl, aber nicht die Reihenfolge wichtig sind.

\# intakte $P(1) = P(\{(0,1),(1,0)\}) = P(\{(0,1)\}) + P(\{(1,0)\}) = \frac{10}{110} + \frac{90}{990} = \frac{180}{990}$

$\Omega = \{0,1\}^3, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $P(\omega_i) = p_i$	$\Omega' = \{0,1,2\}, \mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$	$X : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2 = \omega'$



N Objekte, davon sind K markiert, weiterhin n ziehungen.

W-Modell für Fertigungsprotokoll $\Omega = \{0,1\}^n$

$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{(K)_{\Sigma\omega_i}(N-K)_{n-\Sigma\omega_i}}{(N)_n}$

man hat also $\binom{K}{k}$ möglichkeiten die K markierten zu ziehen.

Weiterhin hat man aber $\binom{N-K}{n-k}$ nicht markierte objekte zu ziehen.

Das ist im verhältnis dazu, wie viele objekte man überhaupt in n schritten ziehen kann.

$$h(N,K,n;k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

dies ist die hypergeometrische Verteilung. (sprich was ist die wahrscheinlichkeit aus N elementen mit K Zieln in n zügen k treffer zu bekommen)

$B_k = \{\text{Es werden k stücke gezogen}\} : B_k = \{Z_n = k\}$

Z-Dichte:

$$f(k) = P'(\{k\}) = P(\{Z_n = k\}) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

1.

Bildmodell unter Zufallsvariable X definiert/konstruiert

Ein Bildmodell wird definiert durch das Maß der darunterliegenden messbaren menge:

Wenn X die zufallsvariable ist, die von Ω in das Ereignis A' abbildet (es beschreibt)

$$\{X \in A'\} = \{\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \in A'\}$$

Dann definiert X^{-1} die Urbildfunktion, die wieder zurück auf das Urbild abbildet:

Die Wahrscheinlichkeit eines durch X beschriebenen Ereignisses, kann somit auf die Wahrscheinlichkeit der darunterliegenden Ereignisse gemapped werden:

$$A' \to P^X(A') := P(x^{-1}(A')) = P(X \in A') = P(\{\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \in A'\}) = \sum_{\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \in A'} P(\omega_i)$$

2.

Unter welchen Vorraussetzungen ist eine Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-.Verteilung sinnvoll:

Viele Messwerte und kleine Wahrscheinlichkeiten

Sei S_n eine Folge von binom. Zufallsvariablen mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und p_n und $\mathbb{E}(S_n) = n \cdot p_n \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$P(S_n = k) = B(n, p_n, k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P_\lambda(k)$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k\,(1-p)^{n-k} \tag{1}$$

$$\text{subst: } p = \frac{\lambda}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \tag{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \tag{3}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \tag{4}$$

$$= \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}. \tag{5}$$

Man kann hieran sehen, dass wenn n sehr groß ist, oder p sehr klein (weil p als $\frac{\lambda}{n}$ dargestellt wird) ist.

3. Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes:

Wenn man sehr viele kleiner unabhängiger Zufallseffekte $n \to \infty$ und kleine Wahrscheinlichkeiten hat $p << 1$ dann kann eine Verteilung als eine Normalverteilung modelliert werden, solange keine einzelne Variable einen dominanten einfluss auf die Varianz besitzt.

Beweis: n i.i.d Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$: Erwartungswert μ und std σ.

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ Der Erwartungswert ist $n\mu$ und Var $n\sigma^2$. Standardisieren:

$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass Z_n für $n \to \infty$ zur standardnormalverteilung punktweise konvergiert $\mathcal{N}(0,1)$