Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 8

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

21, 22, 23, _____

14.5/22*30=19.5

A21 Regel von de l'Hospital

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3+8x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{3x^2+16x} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2)}{3x+16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3+8x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+8} = 1\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sqrt{x^3}}{x} = \lim_{x\to 0} -2\sqrt{x} = 0$

d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\ln x = \infty\cdot\infty = \infty$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(6x)-1}{x^3+2x^2} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(6x)\cdot 6}{3x^2+4x} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-36\cos(6x)}{6x+4} = -9$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)\cos(2x)}{e^{x^2}-1} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin(x)\cdot\cos(2x) - 2\sin(2x)\cdot\cos(x))}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(2x)+2\sin(2x)\cdot\cos(x)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{2e^{x^2}} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{2e^{x^2}} + \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{e^{x^2}} = 2\frac{1}{2}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\ln(\ln(e^{\beta x}+e^{-\beta x}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\ln(\ln(e^{\beta x}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\ln(\beta x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{1+\alpha x} = 1$

das geht nicht, weil die funktion nicht st

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6\sqrt{x}+5+\frac{4}{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}+e^{-2x}+\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}}{\frac{3}{2\sqrt{x}}-2e^{-2x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$

(wird allerdings $\frac{0}{0}$)

Nach weiterem Ausführen würden die Brüche und die e-Funktion weiterhin stehen bleiben, Man hat immer wieder einen Grenzwert des Typs $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{6\sqrt{x}+5+\frac{4}{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}+e^{-2x}+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6\sqrt{x}+5}{3\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x}\text{ ausklammern}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{5}{\sqrt{x}}}{3} = 2$

besser zuerst ausklammern

A22 globale Extrema

a) $f: [-\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

$f'(x) = -\sin x - (2\cos x\cdot(-\sin x)) = -\sin x + 2\cos x\sin x$

$0 = -\sin x + 2\cos x\sin x$

$\sin x = 2\cos x\sin x$

$\Rightarrow 2\cos x = 1 \quad \vee \quad \sin x = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ $\quad x_3 = 0$

$x_2 = -\frac{\pi}{3}$ $\quad x_4 = \pi$

$M \subseteq [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi] \to$ potenzielle Extremstellen

$f(-\frac{\pi}{2}) = 0-0 = 0$ $\quad f(0) = 1-1 = 0$ $\quad f(\pi) = -1-1 = -2$

$f(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

globales Minimum: -2 $\quad$ globales Maximum: $\frac{1}{4}$

Minimumstelle: π $\quad$ Maximalstellen: $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

b) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

$0 = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow x = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{Hos}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad f(1) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$

globales Maximum: $\frac{1}{e}$ $\quad$ globales Minimum existiert nicht

Maximalstelle: e $\quad$ inf $= -\infty$

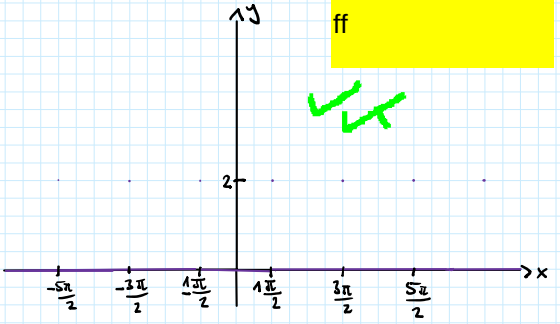
A23 (punktweise / gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Funktionen)

$f_n(x) := (2 \sin x)^n$ $\quad f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

a) Grenzfunktion : Menge $B := \{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots\}$

$$f(x) \in \begin{cases} 0 & \text{für alle } \mathbb{R} \setminus B \\ 2 & \text{für alle } x \in B \end{cases}$$

konvergent auf $[0, \pi]$



ff

b) M_1 nicht gleichmäßig

M_2 leichmäßig

M_3 gleichmäßig

M_4 gleichmäßig