Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

13. Juli 2020

Seien X,Y ZV mit Dichte $f^{(X,Y)}$

$f^X(x) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x,y)dy$

Von vorteil: wenn supp $f^{(X,Y)}$ y-projezierbar ist, dann gilt.

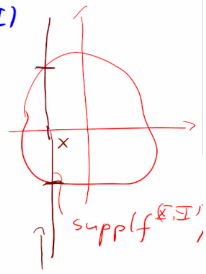
$f^X(x) = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} f^{(X,Y)}(x,y)dy$

Habe eine kurze Frage: Wenn ich eine gemeinsamme Dichte habe, kann ich die Einzeldichten heraus zeihen. Jedoch weiß ich nicht wie man dann auf die Integrationsgrenzen kommt.

X, Y seien ZV mit der Dichte $f^{(X,Y)}$

$f^{X}(x) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x,y)dy$

- Von Vorteil ist, wenn $supp(f^{(X,Y)})$ y-projizierbar ist, dann gilt
$f^{X}(x) = \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f^{(X,Y)}(x,y)dy$



1. $T_N : \Omega_T = \{1,2,3,4\}$ $\mathcal{A} = P(\Omega_T)$

$T_N \sim L(4)$

$P(T_n = t) = \frac{1}{4}$

$Z = \sum_{i=1}^{T_N} X_i$

somit ist $(t_n, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3,6,5,4,6)$

$\sum_{i=1}^{3} x_i = 6+5+4 = 15$ (das letze wäre das X_4 was nicht mehr drin ist)

der Erwartungswert ist der EW der Zufälligen summe

Definition 7.30 (Zufällige Summen)

Es sei Y eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$. $X_1, X_2, \dots$ seien reellwertige ZV, identisch verteilt und stochastisch unabhängig, auch von Y. Dann heißt die ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

mit zufälliger oberer Grenze eine **zufällige Summe**.

Satz 7.31

Für die zufällige Summe $S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ gilt, falls $\mathrm{E}\,Y < \infty$ und $\mathrm{E}\,X_i < \infty$,

$$\mathrm{E}\,S = \mathrm{E}\,Y \cdot \mathrm{E}\,X_1, \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}\,S = \mathrm{E}\,Y \cdot \mathrm{Var}\,X_1 + \mathrm{Var}\,Y \cdot (\mathrm{E}\,X_1)^2 . \tag{2}$$

$EZ = ET_N EX = \frac{1+4}{2} \cdot \frac{1+6}{2} = \frac{5+7}{4}$

$VarZ = ET_N \cdot \underbrace{VarX_1}_{identisch\ verteilt} + Var(T_N) \cdot (EX_1)^2 = \frac{5}{2}(\frac{6^2-1}{12}) + \frac{4^2-1}{12}(\frac{7}{2})^2 = \frac{1085}{48}.$

$$P((X \in B) \cap (Y = y)) = P(X \in B | Y = y) P(Y = y)$$

$$Var(X) = b, Var(\frac{1}{b}X - a) = Var(\frac{1}{b}X) = \frac{1}{b}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{b}}X, Var(X) = b \implies Var(T) = 1$$

standardisierung.

Definition 7.34

(a) Y_n **konvergiert fast sicher** gegen Y, kurz $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$ wenn

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}\right) = 1,$$

d.h., wenn höchstens innerhalb einer Ausnahmemenge $N \in \mathcal{A}$ mit $P(N) = 0$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)$ nicht existiert oder $\neq Y(\omega)$ ist.

(b) Y_n **konvergiert stochastisch** gegen Y, kurz $Y \xrightarrow{\text{st}} Y$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - Y| \geqslant \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

d.h. für festes $\epsilon > 0$ und für jedes n darf es eine Ausnahmemenge M_n geben, auf der $|Y_n - Y| \geqslant \epsilon$ gilt, aber mit $P(M_n) \to 0$ für große n.

konvergiert fast sicher heist, dass der Limes der Reihe gegen eins geht. (Die wahrscheinlichkeit der Ausnahmemenge geht gegen null)

konvergiert stochastisch, dann wird die Differenz zweier Verteilungen Null. (Die wahrscheinlichkeit der Ausnahmemenge wird für ein groß genuges n beliebig klein)

Definition 7.34

(c) Y_n **konvergiert im r-ten Mittel** gegen Y, kurz $\left(Y_n \xrightarrow{(r)} Y\right)$, mit $1 \leqslant r < \infty$, wenn

$$\mathrm{E}|Y_n - Y|^r \to 0.$$

Für $r = 1$ sagt man **konvergiert im Mittel**, für $r = 2$ **im quadratischen Mittel**.

(d) Y_n **konvergiert nach Verteilung** gegen Y, kurz $Y_n \xrightarrow{\text{V}} Y$, wenn

$$F^{Y_n}(x) \to F^Y(x) \text{ für alle } x \text{ mit „} F^Y \text{ stetig im Punkt } x\text{“}.$$

sprich die Mittel konvergieren bzw die Verteilungsfunktion konvergiert für alle stetigen punkte.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$EZ = E(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}(EX - \mu) = 0$$

$$EZ = E(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}(EX - \mu) = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X) = 1$$