# Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 7

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A18, A19, A20, ____

19.5/20*30=29

$\boxed{A18}$

a) $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ ✓

b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{2x})^4$

$f'(x) = 4(x^2 + \sqrt{2x}) \cdot (2x + \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x}} \cdot 2) = 4(x^2 + \sqrt{2x})(2x + \frac{1}{\sqrt{2x}})$ ✓

c) $f(x) = xe^{x^2} \ln(2+3x) = x[(e^{(x^2)}) \cdot \ln(2+3x]$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) + x \cdot [e^{x^2} \cdot \ln(2+3x)]' =$

$= e^{x^2} \cdot \ln(2+3x) + x[(2xe^{x^2} \ln(2+3x) + (e^{x^2} \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3)]$ ✓

d) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$ ✓

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{\ln(x^2+1) \cdot \cos 2x \cdot 2 - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot \sin 2x}{\ln^2(x^2+1)}$ ✓✓✗

f) $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$

$f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a$ ✓✓✗

g) $f(x) = x^{-x^2} = e^{-x^2 \ln x}$

$f'(x) = (-2x \ln x - x) x^{-x^2}$ ✓✓✗

h) $f(x) = \ln(x + \ln(2\ln x))$

$f'(x) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot (1 + \frac{1}{2\ln x} \cdot \frac{2}{x}) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot (1 + \frac{1}{x \ln x})$ ✓✓✗

A 19

a) z.z $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos x + \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cosh - 1}{h}}_{\to 0} - \sin(x)\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \xrightarrow{h \to 0} -\sin x$$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \tan' x = ?$

$$\tan' x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

i) $\tan' x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

ii) siehe oben : $\tan'(x) = \tan^2(x) + 1$

c) i) $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ $\quad ,(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

ii) $\tan'' x = [\tan x \cdot \tan x]' = 2(\tan x \cdot (1+\tan^2 x))$

$$\tan''' x = 2[\tan x(1+\tan^2 x)]' = (1+\tan^2 x)^2 + \tan x \cdot \tan'' x$$

$$= 2(1+\tan^2 x)^2 + \tan x \cdot (2 \cdot \tan(x)(1+\tan^2 x))$$

$\boxed{A20}$ $f := [0,\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^2} & ,\ x > 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} \quad \text{für } \alpha \in (0,\infty)$$

a) $f'(x)$, für $x > 0$: Produktregel mit Kettenregel:

$$\alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^\alpha \cdot \frac{d}{dx}[\sin\frac{1}{x^2}] =$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^\alpha \cdot \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(-2)}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha-3} \cos\frac{1}{x^2} \cdot (-2) & ,\ x > 0 \\ ? & ,\ x = 0 \end{cases}$$

b) $f'(0)$ mittels Differenzenquotient:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^\alpha \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^2}$$

$\Rightarrow$ Einschachteln: $-1 \leq \sin(\frac{1}{h^2}) \leq 1$

$$-|h^{\alpha-1}| \leq |h^{\alpha-1}| \sin(\frac{1}{h^2}) \leq |h^{\alpha-1}|$$

$\lim_{h \to 0}$ geht für $-|h^{\alpha-1}|$ und $|h^{\alpha-1}|$ für $\alpha \in (1,\infty)$ gegen $0 = f(0)$

$\Rightarrow f'(0) = 0$, für $\alpha \in (1,\infty)$ (existiert für $\alpha \in (1,\infty)$)

c) Untersuchen:

$$f'(x) \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha-3} \cdot (-2) \cdot \cos\frac{1}{x^2} & ,\ x > 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} \quad \text{stetig?}$$

1. $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2}$ stetig? Folgenkriterium Stetigkeit:

Sei $a_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Zeige $f'(a_n)$ konvergiert nach $f'(0)$:

$$|g'(a_n)| = |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1} \cdot \sin(\frac{1}{(a_n)^2})| = |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}| \cdot |\sin(\frac{1}{(a_n)^2})| \leq |\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}|$$

da $|\sin(\frac{1}{(a_n)^2})| \leq 1$

$$|\alpha \cdot a_n^{\alpha-1}| \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot 0^{\alpha-1} = 0 \ (\text{da } \alpha - 1 > 0)$$
$$= f'(0)$$

$\Rightarrow$ stetig

2. $h'(x) = (-2) x^{\alpha-3} \cdot \cos\frac{1}{x^2}$ stetig? Verwende $a_n$ weiter:

$$|h'(a_n)| = |(-2) a_n^{\alpha-3} \cdot \cos\frac{1}{(a_n)^2}| = |(-2) a_n^{\alpha-3}| \cdot |\cos\frac{1}{(a_n)^2}| \leq |(-2) a_n^{\alpha-3}|$$

$|\cos\frac{1}{(a_n)^2}| \leq 1$

$$|(-2) a_n^{\alpha-3}| \xrightarrow{n\to\infty} |(-2) \cdot 0^{\alpha-3}| = 0, \text{ für } \alpha \in (3,\infty)$$
$$= f'(0)$$

$\Rightarrow$ für $\alpha \in (3,\infty)$ ist $f'(0)$ stetig, da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt!

d) $f''(x)$ für $x>0$:

$$\alpha\cdot(\alpha-1)x^{\alpha-2}\cdot\sin\frac{1}{x^2}+\alpha x^{\alpha-1}\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{(-2)}{x^3}+\alpha x^{\alpha-1}\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{(-2)}{x^3}+x^\alpha\cdot\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{(-2)}{x^3}\right)^2$$

$$+x^\alpha\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{6}{x^4}=$$

$$=\sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha\cdot(\alpha-1)x^{\alpha-2}+x^\alpha(-1)\cdot\frac{4}{x^6}\right)+\cos\frac{1}{x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cdot\frac{(-2)}{x^3}+\alpha x^{\alpha-1}\cdot\frac{(-2)}{x^3}+x^\alpha\cdot\frac{6}{x^4}\right)=$$

$$=\sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha\cdot(\alpha-1)x^{\alpha-2}-4\cancel{\alpha}x^{\alpha-6}\right)+\cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{\alpha-1}\left(\frac{-4\alpha}{x^3}+\frac{6x}{x^4}\right)=$$

$$=\sin\frac{1}{x^2}\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-4x^{\alpha-6}\right)+\cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{\alpha-4}(-4\alpha+6)$$