Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

25. Mai 2020

1 α-Äquivalenz und β-Reduktion

1.0.1

a) Wahr, umbenennungen dürfen keine neuen Variablen einfangen und zwei variablen dürfen nicht überlappen.

$\sigma = [y/f, f/x, z/y, x/z]$ alle substitutionen passieren zur gleichen Zeit.

b) bei gefangenen Variablen, darf der Name bei einsetzen nicht zu Einfang weiterer Variablen führen:

$\sigma = [x/x, y/y]$

$(\lambda xy(\lambda x.xx)yx) = (\lambda xy((\lambda x.xx)yx\sigma'))$ wobei $\sigma' = \sigma$ ist.

$= (\lambda xy(((\lambda x.xx)\sigma')(y\sigma')(x\sigma'))) = (\lambda xy(((\lambda x.xx)\sigma')(y)(x))) = \lambda xy((\lambda y.(xx\sigma''))(y)(x)) = \lambda xy((\lambda y.((x\sigma'')(x\sigma''))(y)(x)) =$

$\lambda xy((\lambda y.yy)(y)(x))$ wobei $\sigma'' = [x \mapsto y]$

c) geht nicht, das x im zweiten lambda Term wird vom y eingefangen.

1.0.2

a) nein, anwendung von außen nach innen:

$(\lambda fgh.fhg)(vv) \to_\beta \lambda gh.(vv)hg$

b) ist richtig. Es ist zu beachten, dass man hier das vom λ gebundene äußere x umbennenen muss, da dieses sonst in den inneren Termen gefangen wird.

c) ist richtig, da das y zu u umbennant wurde. Es ist außerdem zu beachten, dass das $(\lambda u.\dots)uv$ geklammert ist, und somit das äußere u nicht einfängt.

1.0.3

a) $(\lambda fxy.f(fy)(xx))(\lambda uv.u) \overset{\text{umbennenung von}\lambda x\dots}{\to_\beta} (\lambda zy.(xx)((xx)y))(\lambda uv.u) \to_\beta \lambda y.(xx)((xx)y)$.

$\beta-$Reduktion ersetzt nur gebundene Variablen, also ist hier ende.

b)

$$(\lambda fxg.g((\lambda y.fyx)(gx)))(\lambda xz.gx)(gz)(\lambda x.x) \to_\beta$$

$$\lambda xg_0.g_0(\lambda y.\lambda x_0 z.gx_0 yx(g_0 x))(gz)(\lambda x.x) \to_\beta$$

$$\lambda g_0.g_0(\lambda y.\lambda x_0 z.gx_0 y(gz)(g_0(gz)))(\lambda x.x) \to_\beta$$

$$(\lambda x.x)(\lambda y.\lambda x_0 z.gx_0 y(gz)((\lambda x.x)(gz))) \to_\beta$$

$$(\lambda y.\lambda x_0 z.gx_0 y(gz)((\lambda x.x)(gz))) \to_\beta$$

$$\lambda y.\lambda x_0 z.gx_0 y(gz)(gz) \to_\beta$$

$$\lambda x_0 z.gx_0(gz)(gz) \to_\beta$$

$$\lambda z.g(gz)(gz) \to_\beta$$

$$g(gz)$$

2 Church-Kodierung

2.1

Beweis durch Umformung:

$$case\ s\ t(inl\ u) \to_\delta$$

$$(\lambda fgs.sfg)\ s\ t(inl\ u) \to_\beta$$

$$(\lambda gs_0.s_0 sg)\ t(inl\ u) \to_\beta$$

$$(\lambda s_0.s_0 st)\ (inl\ u) \to_\beta$$

$$((inl\ u)st)\ \to_\delta$$

$$((\lambda fg.fu)st)\ \to_\beta$$

$$(\lambda g.su)t\ \to_\beta$$

$$su$$

Ähnlich für

$$case\ s\ t(inr\ u) \to_\delta$$

$$(\lambda fgs.sfg)\ s\ t(inr\ u) \to_\beta$$

$$(\lambda gs_0.s_0 sg)\ t(inr\ u) \to_\beta$$

$$(\lambda s_0.s_0 st)\ (inr\ u) \to_\beta$$

$$((inr\ u)st)\ \rightarrow_\delta$$

$$((\lambda fg.gu)st)\ \rightarrow_\beta$$

$$((\lambda g.gu)t)\ \rightarrow_\beta$$

$$tu$$

2.2

$case\ inl\ inr\ t \rightarrow_\delta$

$$(\lambda fgs.sfg)\ inl\ inr\ t \rightarrow_\beta$$

$$(\lambda gs_0.s_0(inl)g)\ inr\ t \rightarrow_\beta$$

$$(\lambda s_0.s_0(inl)(inr))\ t \rightarrow_\beta$$

$$t(inl)(inr)$$

von hier aus beide varianten von t substitutieren.

$$t = inl\ a$$

$$(inl\ a)(inl)(inr) \rightarrow_\delta (\lambda fg.fa)(inl)(inr) \rightarrow_\beta (\lambda g.(inl)a)(inr) \rightarrow_\beta inl\ a = t$$

$$t = inr\ b$$

$$(inr\ b)(inl)(inr) \rightarrow_\delta (\lambda fg.gb)(inl)(inr) \rightarrow_\beta (\lambda g.gb)(inr) \rightarrow_\beta inr\ b = t$$

Gegenbeispiel

$$t = \lambda fg.a$$

$$t(inl)(inr) \rightarrow_\delta (\lambda fg.a)(inl)(inr) \rightarrow_\beta \lambda g.a(inr) \rightarrow_\beta a \neq \lambda fg.a$$

3 η-Reduktion

$s = \lceil 0 \rceil$ und $t = \lceil 1 \rceil$ unterscheiden.

wobei nach präsenzübung 3 gilt:

$\lceil 0 \rceil = \lambda fa.a$ und $\lceil 1 \rceil = \lambda fa.fa$

$u_1 = \lambda xyz.y\ u_2 = \lambda xy.x$

$\lambda fa.au_1u_2xy \rightarrow_\beta \lambda a.au_2xy \rightarrow_\beta u_2xy \rightarrow_\delta (\lambda xy.x)xy \rightarrow_\beta (\lambda y.x)y \rightarrow_\beta x.$

$$\lambda fa.fau_1u_2xy \to_\beta \lambda a.u_1au_2xy \to_\beta u_1u_2xy \to_\delta (\lambda xyz.z)u_2xy \to_\beta (\lambda yz.z)xy \to_\beta (\lambda yz.z)xy \to_\beta \lambda z.zy \to_\beta y.$$