# Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

14. Juli 2020

a)

da alle Störungen unabhängig sind, erhält man eine unabhängige Kopplung

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)\mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)\mathcal{N}(a_3, \sigma_3^2)\mathcal{N}(a_4, \sigma_4^2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}exp(-\frac{(y_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}exp(-\frac{(y_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2}}exp(-\frac{(y_3-a_3)^2}{2\sigma_3^2})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_4^2}}exp(-\frac{(y_4-a_4)^2}{2\sigma_4^2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2^4\pi^4\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2\sigma_4^2}}exp(-\frac{(y_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}-\frac{(y_3-a_3)^2}{2\sigma_3^2}-\frac{(y_4-a_4)^2}{2\sigma_4^2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2^4\pi^4\cdot 2^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 4^2}}exp(-\frac{(y_1-1)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(y_2-1)^2}{2\cdot 1^2}-\frac{(y_3-2)^2}{2\cdot 3^2}-\frac{(y_4-3)^2}{2\cdot 2^2})$$

b)

Wir wollen den Satz über multivariate Normalverteilungen anwenden, dazu brauchen wir Standardnormalverteilungen.

Wir Transformieren die $Y = N(a_i, \sigma_i^2)$ zu $a_i + \sigma_i \cdot X$, wobe $X \sim N(0,1)$

Daraus folgt

$$Z_1 = 10 + 3Y_1 + Y_3 + 2Y_4 = 10 + 3(a_1 + \sigma_1 X_1) + (a_3 + \sigma_3 X_3) + 2(a_4 + \sigma_4 X_4)$$

$$Z_2 = 20 - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4 = 20 - 2(a_2 + \sigma_2 X_2) + 5(a_3 + \sigma_3 X_3) + 3(a_4 + \sigma_4 X_4)$$

$$Z_3 = 5 - 4Y_2 + 5Y_3 - Y_4 = 5 - 4(a_2 + \sigma_2 X_2) + 5(a_3 + \sigma_3 X_3) - (a_4 + \sigma_4 X_4)$$

Werte Einsetzen und ausklammern

$$Z_1 = 10 + 3(1 + 2X_1) + (2 + 3X_3) + 2(3 + 2X_4) = 21 + 6X_1 + 3X_3 + 4X_4$$

$$Z_2 = 20 - 2(1 + 1X_2) + 5(2 + 3X_3) + 3(3 + 2X_4) = 37 - 2X_2 + 15x_3 + 6x_4$$

$$Z_3 = 5 - 4(1 + 1X_2) + 5(2 + 3X_3) - (3 + 2X_4) = 8 - 4X_2 + 15X_3 - 2X_4$$

Das kann jetzt in eine A-Matrix und einen durchschnittsvektor a aufgeteilt werden

$$a = (21, 37, 8)^T$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 15 & 6 \\ 0 & -4 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

Daraus lässt sich jetzt die Kovarianzmatrix K gewinnen

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 15 & 6 \\ 0 & -4 & 15 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 15 & 15 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 69 & 37 \\ 69 & 265 & 221 \\ 37 & 221 & 245 \end{bmatrix}$$

Daraus muss noch die Determinante bestimmt werden somit erhalten wir die Verteilung.

Das hier funktioniert nicht 100% wegen $y \in \mathbb{R}^4$ und $K \in \mathbb{R}^3$!!