Sitzung 18

Kenngrößen (1)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 29. Juni 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Fragen

Bildmodelle und Zufallsvariablen

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Nutzen des Begriffs Zufallsvariable.
2. Sie lernen verschiedenen Verteilungen kennen und wissen, welche Situationen diese Verteilungen angewendet werden können.
3. Sie können erklären, wie die Verteilungen in den Bildmodellen entstehen.
4. Sie kennen die Möglichkeiten, die Binomialverteilung zu approximieren.
5. Sie können mit den Begriffen gemeinsame Verteilung und Randverteilung arbeiten und den Zusammenhang zur stochastischen Unabhängigkeit herstellen.
6. Sie wissen, wie Summen von Zufallsvariablen gebildet werden und können die entstehenden Verteilungen mit Hilfe der Faltung berechnen.

Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Bedeutung und die Definitionen der wichtigsten Kenngrößen von Verteilungen.
2. Sie können die Definitionen auf beliebige Verteilungen anwenden.
3. Sie kennen den Unterschied zwischen Momenten und Zentralen Momenten.
4. Sie wissen was die Momenterzeugende Funktion ist.
5. Sie kennen den Zusammenhang zwischen st. Unabhängigkeit und Kovarianz und können beides analysisieren.
6. Sie können die mehrdimensionale Normalverteilung und deren besonderen Eigenschaften. Sie können normalverteilte Zufallsvektoren transformieren.

Einstieg

Normalapproximation der Binomial-Verteilung

Am Ende dieser Woche können Sie die Frage beanworten, warum für die Approximation

Definition 7.1 (Median)

Ein **Median** von X (oder P^X) ist jeder Wert $m \in \mathbb{R}$, an dem die Verteilungsfunktion F^X den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht oder überschreitet, d.h. für den gilt

$$F^X(m-) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F^X(m). \tag{1}$$

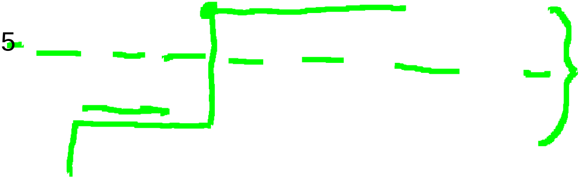
Definition 7.1 (Median)

Ein **Median** von X (oder P^X) ist jeder Wert $m \in \mathbb{R}$, an dem die Verteilungsfunktion F^X den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht oder überschreitet, d.h. für den gilt

$$F^X(m-) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F^X(m). \tag{1}$$

bei gemischten funktionen kann der linke grenzwert echt kleiner a

0.5



jeder wert hirzwis

Definition 7.2 (Quantil)

Ein Wert $u_\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, heißt α-**Quantil** von P^X, wenn für die VF F^X gilt

$$F^X(u_\alpha-) \leqslant \alpha \leqslant F^X(u_\alpha).$$

Es wird auch vom $p\%$-Quantil gesprochen. Üblich ist die Schreibweise

$$u_\alpha \text{ oder } u_{p\%}.$$

Definition 7.2 (Quantil)

Ein Wert $u_\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, heißt α-**Quantil** von P^X, wenn für die VF F^X gilt

$$F^X(u_\alpha-) \leqslant \alpha \leqslant F^X(u_\alpha).$$

Es wird auch vom $p\%$-Quantil gesprochen. Üblich ist die Schreibweise

$$u_\alpha \text{ oder } u_{p\%}.$$

Definition 7.5 (Erwartungswert)

$X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ sei eine diskrete ZV mit $X \geqslant 0$ oder Ω' endlich. Dann heißt

$$\operatorname{E} X := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \in \Omega'} k \cdot f^X(k) \tag{2}$$

der **Erwartungswert** von X (oder P^X).

mittelwert der ZV gewichtet nach der Wahrscheinlichkeit P dieses Wertes de

Definition 7.5 (Erwartungswert)

$X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ sei eine diskrete ZV mit $X \geqslant 0$ oder Ω' endlich. Dann heißt

$$\mathrm{E}\, X := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \in \Omega'} k \cdot f^X(k) \tag{2}$$

der **Erwartungswert** von X (oder P^X).

bzw int_R x*f(x) dx

Definition 7.7 (Positiv-/Negativteil)

1. Der **Positivteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^+ = max(0, a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a \leqslant 0, \\ a \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

   Der **Negativteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^- = (-a)^+ = max(0, -a) = \begin{cases} |a| \text{ für } a \leqslant 0, \\ 0 \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Entsprechend werden f^+ und f^- für die reellwertige Abbildung f definiert:

$$f^+(y) = (f(y))^+$$

$$f^-(y) = (f(y))^-$$

   Für eine ZV $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ ist der Positivteil X^+ und der Negativteil X^- erklärt. Es gilt

$$X = X^+ - X^-.$$

Definition 7.7 (Positiv-/Negativteil)

1. Der **Positivteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^+ = max(0, a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a \leqslant 0, \\ a \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

   Der **Negativteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^- = (-a)^+ = max(0, -a) = \begin{cases} |a| \text{ für } a \leqslant 0, \\ 0 \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Entsprechend werden f^+ und f^- für die reellwertige Abbildung f definiert:

$$f^+(y) = (f(y))^+$$

$$f^-(y) = (f(y))^-$$

   Für eine ZV $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ ist der Positivteil X^+ und der Negativteil X^- erklärt. Es gilt

$$X = X^+ - X^-.$$

Definition 7.7 (Positiv-/Negativteil)

1. Der **Positivteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^+ = max(0, a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a \leqslant 0, \\ a \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

   Der **Negativteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^- = (-a)^+ = max(0, -a) = \begin{cases} |a| \text{ für } a \leqslant 0, \\ 0 \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Entsprechend werden f^+ und f^- für die reellwertige Abbildung f definiert:

$$f^+(y) = (f(y))^+$$
$$f^-(y) = (f(y))^-$$

   Für eine ZV $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ ist der Positivteil X^+ und der Negativteil X^- erklärt. Es gilt

$$X = X^+ - X^-.$$

Definition 7.7 (Positiv-/Negativteil)

1. Der **Positivteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^+ = max(0, a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a \leqslant 0, \\ a \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

   Der **Negativteil** einer reellen Zahl a ist

$$a^- = (-a)^+ = max(0, -a) = \begin{cases} |a| \text{ für } a \leqslant 0, \\ 0 \text{ für } a \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Entsprechend werden f^+ und f^- für die reellwertige Abbildung f definiert:

$$f^+(y) = (f(y))^+$$
$$f^-(y) = (f(y))^-$$

f(y) = f^+(y) -f^-(y)

   Für eine ZV $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ ist der Positivteil X^+ und der Negativteil X^- erklärt. Es gilt

$$X = X^+ - X^-.$$

Definition 7.8 (Erwartungswert diskret)

Es sei $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ eine diskrete ZV mit Träger $T \subset \Omega'$ und $f^X(k)$ $(k \in T)$ eine Z-Dichte. Dann heißt

$$\mathrm{E}\,X := \sum_{k \in T} kP(X = k) = \sum_{k \in T} kf^X(k) \tag{3}$$

der **Erwartungswert von** X (oder von P^X), falls die positive oder die negative Teilsumme (oder beide) endlich ist, d.h. falls

$$\mathrm{E}\,X^+ := \sum_{k \in T, k>0} kf^X(k) < \infty \quad \text{oder} \quad \mathrm{E}\,X^- := \sum_{k \in T, k<0} |k| f^X(k) < \infty. \tag{4}$$

Anmerkungen

- $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X^+ - \mathrm{E}\,X^-$ ist unabhängig von der Summationsreihenfolge.
- Sind $\mathrm{E}\,X^+ < \infty$ und $\mathrm{E}\,X^- < \infty$, so heißt X „integrierbar".

Definition 7.8 (Erwartungswert diskret)

Es sei $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ eine diskrete ZV mit Träger $T \subset \Omega'$ und $f^X(k)$ $(k \in T)$ eine Z-Dichte. Dann heißt

$$\mathrm{E}\,X := \sum_{k \in T} kP(X = k) = \sum_{k \in T} kf^X(k) \tag{3}$$

der **Erwartungswert von** X (oder von P^X), falls die positive oder die negative Teilsumme (oder beide) endlich ist, d.h. falls

$$\mathrm{E}\,X^+ := \sum_{k \in T, k>0} kf^X(k) < \infty \quad \text{oder} \quad \mathrm{E}\,X^- := \sum_{k \in T, k<0} |k| f^X(k) < \infty. \tag{4}$$

Anmerkungen

- $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,X^+ - \mathrm{E}\,X^-$ ist unabhängig von der Summationsreihenfolge.
- Sind $\mathrm{E}\,X^+ < \infty$ und $\mathrm{E}\,X^- < \infty$, so heißt X „integrierbar“.

Definition 7.8 (Erwartungswert diskret)

Es sei $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ eine diskrete ZV mit Träger $T \subset \Omega'$ und $f^X(k)$ $(k \in T)$ eine Z-Dichte. Dann heißt

$$\mathrm{E}\, X := \sum_{k \in T} kP(X = k) = \sum_{k \in T} kf^X(k) \tag{3}$$

der **Erwartungswert von** X (oder von P^X), falls die positive oder die negative Teilsumme (oder beide) endlich ist, d.h. falls

$$\mathrm{E}\, X^+ := \sum_{k \in T, k>0} kf^X(k) < \infty \quad \text{oder} \quad \mathrm{E}\, X^- := \sum_{k \in T, k<0} |k| f^X(k) < \infty. \tag{4}$$

Anmerkungen alle sind >0, somit ist die funktion ABSOLUT konvergent

- $\mathrm{E}\, X = \mathrm{E}\, X^+ - \mathrm{E}\, X^-$ ist unabhängig von der Summationsreihenfolge.
- Sind $\mathrm{E}\, X^+ < \infty$ und $\mathrm{E}\, X^- < \infty$, so heißt X „integrierbar“.

Definition 7.8 (Erwartungswert diskret)

Es sei $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ eine diskrete ZV mit Träger $T \subset \Omega'$ und $f^X(k)$ $(k \in T)$ eine Z-Dichte. Dann heißt

$$\operatorname{E} X := \sum_{k \in T} kP(X = k) = \sum_{k \in T} kf^X(k) \tag{3}$$

der **Erwartungswert von** X (oder von P^X), falls die positive oder die negative Teilsumme (oder beide) endlich ist, d.h. falls

$$\operatorname{E} X^+ := \sum_{k \in T, k>0} kf^X(k) < \infty \quad \text{oder} \quad \operatorname{E} X^- := \sum_{k \in T, k<0} |k| f^X(k) < \infty. \tag{4}$$

Anmerkungen

- $\operatorname{E} X = \operatorname{E} X^+ - \operatorname{E} X^-$ ist unabhängig von der Summationsreihenfolge.
- Sind $\operatorname{E} X^+ < \infty$ und $\operatorname{E} X^- < \infty$, so heißt X „integrierbar“.

Definition 7.8 (Erwartungswert diskret)

Es sei $X : \Omega \to \Omega' \in \mathbb{R}$ eine diskrete ZV mit Träger $T \subset \Omega'$ und $f^X(k)$ $(k \in T)$ eine Z-Dichte. Dann heißt

$$\mathrm{E}\, X := \sum_{k \in T} kP(X = k) = \sum_{k \in T} kf^X(k) \tag{3}$$

der **Erwartungswert von** X (oder von P^X), falls die positive oder die negative Teilsumme (oder beide) endlich ist, d.h. falls

$$\mathrm{E}\, X^+ := \sum_{k \in T, k>0} kf^X(k) < \infty \quad \text{oder} \quad \mathrm{E}\, X^- := \sum_{k \in T, k<0} |k| f^X(k) < \infty. \tag{4}$$

Anmerkungen

- $\mathrm{E}\, X = \mathrm{E}\, X^+ - \mathrm{E}\, X^-$ ist unabhängig von der Summationsreihenfolge.
- Sind $\mathrm{E}\, X^+ < \infty$ und $\mathrm{E}\, X^- < \infty$, so heißt X „integrierbar“.

Folgerung 7.9

Ist $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ eine reellwertige ZV. Dann gilt für $|X| = X^+ + X^-$:

$$\operatorname{E}|X| = \operatorname{E} X^+ + \operatorname{E} X^-, \tag{5}$$

$$\operatorname{E} X \text{ existiert} \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{E} X| \leqslant E|X|, \tag{6}$$

$$X \text{ ist integrierbar} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{E}|X| < \infty. \tag{7}$$

Definition 7.17 (Varianz und Streuung)

Ist $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ eine reellwertige ZV mit endlichem Erwartungswert, dann heißen

$$\operatorname{Var} X := \operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2 = \operatorname{E} X^2 - (\operatorname{E} X)^2 \tag{8}$$

und

$$\operatorname{Str} X := \sqrt{\operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2} = \sqrt{\operatorname{Var} X} \tag{9}$$

die **Varianz** und die **Streuung** von X.

Satz 7.18

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X+a) = \operatorname{Str} X. \tag{10}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{11}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\operatorname{E}(X-a)^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X - a)^2\,,\ \textit{speziell}\ \operatorname{E} X^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X)^2\,. \tag{12}$$

Satz 7.18

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X+a) = \operatorname{Str} X. \tag{10}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{11}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\operatorname{E}(X-a)^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X - a)^2, \ \textit{speziell} \ \operatorname{E} X^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X)^2. \tag{12}$$

Satz 7.18

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) *Eine Verschiebung hat keinen Einfluss auf die Varianz und die Streuung:*

$$\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(X+a) = \operatorname{Str} X. \tag{10}$$

(b) *Ein Faktor verändert die Varianz quadratisch, die Streuung proportional (mit dem Betrag des Faktors):*

$$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X, \quad \operatorname{Str}(aX) = |a| \operatorname{Str} X \tag{11}$$

(c) *Nützlich ist auch die folgende Formel*

$$\operatorname{E}(X-a)^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X - a)^2, \ \textit{speziell} \ \operatorname{E} X^2 = \operatorname{Var} X + (\operatorname{E} X)^2. \tag{12}$$

Satz 7.18 (Fortsetzung)

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(d) Konstante Zufallsvariablen besitzen die Streuung 0:

$$\operatorname{Str} X = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Var} X = 0 \Leftrightarrow P(X = EX) = 1.$$

(e) Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen gilt „Varianz einer Summe = Summe der Varianzen“, d.h.

$$X, Y \text{ seien stoch.unabh.} \Longrightarrow \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y. \tag{13}$$

Satz 7.18 (Fortsetzung)

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(d) Konstante Zufallsvariablen besitzen die Streuung 0:

$$\operatorname{Str} X = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Var} X = 0 \Leftrightarrow P(X = EX) = 1.$$

(e) Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen gilt „Varianz einer Summe = Summe der Varianzen“, d.h.

$$X, Y \text{ seien stoch.unabh.} \Longrightarrow \operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y. \tag{13}$$

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 6.1-6.5 (ohne Maß-Integral)
- Skript Kapitel 7.1- 7.5

Fragen

1. Sammeln Sie die Erwartungswerten und Varianzen wichtiger Verteilungen.
2. Wie wird der Erwartungswert einer ZV Y berechnet, wenn Y einer Funktion anderer YV ist?
3. Wie verhält sich die Varianz bei Transformationen?

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)