Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

26. Mai 2020

1 Hausaufgabe 28

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \lor x > b \\ \frac{4}{(b-a)^2}x - \frac{4a}{(b-a)^2} & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-4}{(b-a)^2}x + \frac{4b}{(b-a)^2} & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

Integral von $-\infty$ bis ∞ muss eins sein.

$$\int f(x)dx = \int \begin{cases} 0 & x < a \lor x > b \\ \frac{4}{(b-a)^2}x - \frac{4a}{(b-a)^2} & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-4}{(b-a)^2}x + \frac{4b}{(b-a)^2} & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases} dx = \begin{cases} 0 & x < a \lor x > b \\ \frac{2}{(b-a)^2}x^2 - \frac{4ax}{(b-a)^2} & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-2}{(b-a)^2}x^2 + \frac{4bx}{(b-a)^2} & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

Relevant für den integral ist nur der nicht-null Bereich: zuerst der zweite Fall

$$(\lim_{x \to \frac{a+b}{2}} \frac{2x^2}{(b-a)^2} - \frac{4ax}{(b-a)^2}) - (\frac{2a^2}{(b-a)^2} - \frac{4a^2}{(b-a)^2})$$

$$(\lim_{x \to \frac{a+b}{2}} \frac{2x^2}{(b-a)^2} - \frac{4ax}{(b-a)^2}) + \frac{2a^2}{(b-a)^2}$$

$$(\frac{2(\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} - \frac{4a(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}) + \frac{2a^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-3a)}{(b-a)^2} + \frac{2a^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-3a) + 2a^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-3a) + 2a^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a-b)^2}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}$$

Jetzt der dritte Fall:

Hier jetzt zuerst zusammenfassen $\frac{-2}{(b-a)^2}x^2 + \frac{4bx}{(b-a)^2} = \frac{2x(2b-x)}{(b-a)^2}$

$$\frac{2b(2b-b)}{(b-a)^2} - \frac{2\frac{a+b}{2}(2b-\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}$$

$$\frac{2b(b)-(a+b)(2b-\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}$$

$$\frac{2b^2-(2ba-\frac{a+b}{2}a+2b^2-\frac{a+b}{2}b)}{(b-a)^2}$$

$$\frac{2b^2-2ba+\frac{a+b}{2}a-2b^2+\frac{a+b}{2}b}{(b-a)^2}$$

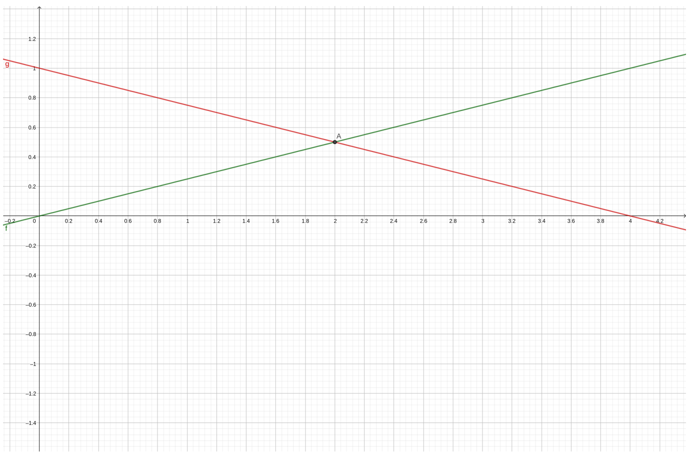
$$\frac{-2ba+\frac{a+b}{2}a+\frac{a+b}{2}b}{(b-a)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a-b)^2}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}$$

Die Summe von Fall 2 und 3 ist also:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Somit ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion



TODO: ZEICHNEN!

b) Wir haben jetzt das Integral, also kann einfach $F(0.25a+0.75b)-F(0.75a+0.25b)$

Da $a<b$ ist, kann man $0.25a+0.75b>0.25a+0.75a>a$ und $0.75a+0.25b>0.75a+0.25a>a$ schließen. (Nie Fall 1)

Weiterhin gilt $0.75a+0.25b=\frac{1}{4}(3a+b)<\frac{a+b}{2} \iff (3a+b)<\frac{4(a+b)}{2} \iff (3a+b)<2a+2b \iff a+b<2b \iff a<b$ ist immer Wahr (nach definition). Also landen wir in Fall 2.

Weiterhin gilt $0.25a+0.75b=\frac{1}{4}(a+3b)>\frac{a+b}{2} \iff (a+3b)>2(a+b) \iff a+b>2a \iff b>a$ (per definition wahr) Also hier Fall 3:

Wir nutzen die Symmetrie von f um $\frac{a+b}{2}$ aus.

Dies gilt, da zwischen a und b bis genau $\frac{a+b}{2}$ gestiegen wird, und dann mit der gleichen (negativen) Steigung wieder fällt. Außerdem gilt, dass die funktion in $\frac{a+b}{2}$ für beide Fälle den gleichen Wert besitzt.

Somit lässt sich vereinfachen:

$[\lim\limits_{x\to\frac{a+b}{2}} F_2(x) - F_2(0.75a+0.25b)] + [F_3(0.25a+0.75b) - F_3(\frac{a+b}{2})]$
Dies liefert:

$[\frac{2}{(b-a)^2}(\frac{a+b}{2})^2 - \frac{4a(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2} - (\frac{2}{(b-a)^2}(0.75a+0.25b)^2 - \frac{4a(0.75a+0.25b)}{(b-a)^2})] + [\frac{-2}{(b-a)^2}(0.25a+0.75b)^2 + \frac{4b(0.25a+0.75b)}{(b-a)^2} - (\frac{-2}{(b-a)^2}(\frac{a+b}{2})^2 + \frac{4b(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2})]$

Zusammenfassen:

$[\frac{2}{(b-a)^2}(\frac{a+b}{2})^2 - \frac{4a(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2} - \frac{2}{(b-a)^2}(0.75a+0.25b)^2 + \frac{4a(0.75a+0.25b)}{(b-a)^2}] + [\frac{-2}{(b-a)^2}(0.25a+0.75b)^2 + \frac{4b(0.25a+0.75b)}{(b-a)^2} - \frac{-2}{(b-a)^2}(\frac{a+b}{2})^2 - \frac{4b(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}]$

$[\frac{4}{(b-a)^2}(\frac{a+b}{2})^2 - \frac{4(a+b)(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2} - \frac{2}{(b-a)^2}(0.75a+0.25b)^2 + \frac{4a(0.75a+0.25b)}{(b-a)^2}] + [\frac{-2}{(b-a)^2}(0.25a+0.75b)^2 + \frac{4b(0.25a+0.75b)}{(b-a)^2}]$

$$\frac{4(\frac{a+b}{2})^2 - 4(a+b)(\frac{a+b}{2}) - 2(0.75a+0.25b)^2 + 4a(0.75a+0.25b) - 2(0.25a+0.75b)^2 + 4b(0.25a+0.75b)}{(b-a)^2}$$

$$\frac{4(\frac{a+b}{2})(\frac{a+b}{2} - (a+b)) - 2(0.75a+0.25b)^2 + 3a^2 + 1ba - 2(0.25a+0.75b)^2 + (1ba+3b^2)}{(b-a)^2}$$

$$\frac{4(\frac{a+b}{2})(\frac{a+b}{2} - (a+b)) + 3a^2 + 2ba - 1.25a^2 - 1.5ab - 1.25b^2 + 3b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{-(a+b)^2 + 3a^2 + 2ba - 1.25a^2 - 1.5ab - 1.25b^2 + 3b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{-(a^2+2ab+b^2) + 3a^2 + 2ba - 1.25a^2 - 1.5ab - 1.25b^2 + 3b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{-a^2 - 2ab - b^2 + 3a^2 + 2ba - 1.25a^2 - 1.5ab - 1.25b^2 + 3b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{2a^2 - 1.25a^2 - 1.5ab - 1.25b^2 + 2b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{0.75a^2 - 1.5ab + 0.75b^2}{(b-a)^2}$$

$$\frac{0.75(a^2 - 2ab + b^2)}{(b-a)^2}$$

$$\frac{0.75(b-a)^2}{(b-a)^2} = 0.75$$

Im fall von $a = 0$ und $b = 4$

$$\frac{2*2^2}{4^2} - \frac{2*1^2}{4^2} + \frac{-2*3^2}{4^2} + \frac{4*4*3}{4^2} - (\frac{-2*2^2}{4^2} + \frac{4*2*2}{4^2})$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{9}{8} + 3 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{4}$$

2 Hausaufgabe 29

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \ln(1+\sin x) & 0 < x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 1 & x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ Das der $\lim\limits_{x\to\infty} = 1$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$ ist offensichtlich.

Zuerst die Funktion ableiten: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\cos x}{1+\sin x} & 0 < x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & x > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ Der zweite Fall $f_2(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \overset{!}{=} 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{1}{2} \in (0, \frac{3}{4}\pi]$ also ist $F(x)$ nicht monoton steigend, also keine Verteilungsfunktion.

b) $F(x) = (1 - exp(-x))1_{[0,\infty)}(x)$ Man muss nur $x \geq 0$ betrachten, da sonst $1_{[0,\infty)}(x) = 0$ ist. In diesem Fall spielt $1_{[0,\infty)}(x)$ keine Rolle beim Wert.

$f(x) = exp(-x)$ für $x \geq 0$

$f(x) \neq 0$ für alle x, also ist die funktion isoton.

Im limes wird $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1-exp(-x))1_{[0,\infty)}(x) = 1$, bzw null für $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-exp(-x))1_{[0,\infty)}(x) = 0$ Wegen der $1_{[0,\infty)}(x)$ funktion.

Für positive/negative Werte ist $F(x)$ stetig, also insbesondere rechtsseitig stetig.

Nur in Null könnte F nicht stetig sein. Es gilt jedoch:

$\lim x \to 0^- F(x) = (1 - exp(-x))1_{[0,\infty)}(x) = 0$ Wegen sprungfunktion.

und $\lim x \to 0^+ F(x) = (1 - exp(-x))1_{[0,\infty)}(x) = 0$ Wegen $\lim x \to 0^+ (1 - exp(-x)) = 0$.

Somit ist F stetig.

F ist also eine Verteilungsfunktion.