Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

10. Mai 2020

1 Hausaufgabe 12

a) $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}$

b)

$A = \{\omega = (x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$

$B = \{\omega = (x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$

$C = \{\omega = (x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} > 0.5\}$

2 Hausaufgabe 13

$A \cap B = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \cap \{(0, 0), (0, 1)\} = \{(0, 1)\} \notin \mathcal{E}$

Also ist $\mathcal{E}$ keine σ-Algebra.

Eine option wäre natürlich $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (dies ist trivialerweise immer eine σ-Algebra).

Es geht allerdings auch kleiner:

Wir fügen successive fehlende Elemente hinzu: zuerst also $\{(0, 1)\}$

$\mathcal{E}' = \{\emptyset, \Omega, A, B, \{(0, 1)\}\}$

Jetzt benötigen wir noch die Negation von $C_\Omega\{(0, 1)\} = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$:

$\mathcal{E}'' = \{\emptyset, \Omega, A, B, \{(0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}\}$

Die Vereinigung von $B \cup \{0, 1\} = B, B \cup \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} = \Omega$.

Die Vereinigung von $A \cup \{0, 1\} = \Omega$, $A \cup \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} = \Omega$.

Die Vereinigungen mit $\emptyset$ und Ω sind trivialerweise die Menge selbst, bzw Ω.

Die Schnitte sind $A \cap \{0, 1\} = \{(0, 1)\} \in \mathcal{E}'$, $A \cap \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

und von $B \cap \{0, 1\} = \{0, 1\} \in \mathcal{E}'$ $B \cap \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\} = \{0, 0\}$

Aufnahme von $\{(1, 0), (1, 1)\}$ und $\{(0, 0)\}$:

$$\mathcal{E}''' = \{\emptyset, \Omega, A, B, \{(0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0)\}\}$$

$A \cap \{(1, 0), (1, 1)\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ $B \cap \{(1, 0), (1, 1)\} = \emptyset$

$A \cap \{(0, 0)\} = \emptyset$ $B \cap \{(0, 0)\} = \{(0, 0)\} \in \mathcal{E}'''$

Vereinigungen $A \cup \{(1,0),(1,1)\} = A$ und $B \cup \{(1,0),(1,1)\} = \emptyset$

Vereinigungen $A \cup \{(0,0)\} = \Omega$ und $B \cup \{(0,0)\} = B$

Komplemente $\overline{\{(0,0)\}} = A \in \mathcal{E}$ und $\overline{\{(1,0),(1,1)\}} = B$

Also ist $\mathcal{E}'''$ eine (minimale) abgeschlossene σ-Mengenalgebra. (im vergleich zu $\mathcal{P}(\Omega)$ fehlt z.B. $\{(1,1)\}$)