FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Direkte Verfahren für Lineare Gleichungssysteme (Teil 3)

- Direkte Verfahren, d.h. solche, die in endlich vielen Schritten das exakte Ergebnis liefern (exakte Rechnung vorausgesetzt) basieren auf der Faktorisierung von $\boldsymbol{A}$
  - $A = A_1 A_2$ dann ist $Ax = b$ äquivalent zu
    $A_1 y = b$ und $A_2 x = y$
- LR-Zerlegung
- Pivotsuche
- Vorwärts/Rückwärts-Substitution für Dreiecksmatrizen: $O(n^2)$
- Gegen die Intuition, sollte man keine inversen Matrizen berechnen/verwenden, selbst wenn man mehrere Gleichungssysteme mit der gleichen Matrix lösen muss.
- Die Cramer'sche Regel ist nicht geeignet um Gleichungssysteme numerisch zu lösen.

Programm für heute

- Spezialfälle
  - Bandmatrizen
  - sym. pos. def. Matrizen
- Erweiterungen
  - Elimination mit orthogonalen Matrizen
  - Householder-Reflektionen
  - Givens-Rotationen
  - Lösung von low-rank-modifizierten LGS

- Bandmatrizen:
  - Beschränke die Elimination auf die Elemente, die innerhalb des Bandes und unterhalb der Diagonalen liegen
  - Aufwand bei Bandbreite einer Matrix der Ordnung n und Bandbreite $m<n$ ist $O(m^2n)$
- Wichtiger Spezialfall: Tridiagonale Matrizen
- Speichersparende Datenstruktur entscheidend!

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

- Tridiagonale Matrizen

- Struktur der LR-Zerlegung:

$$
\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & c_2 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_n \end{bmatrix}
$$

- Lösbar mit $\mathrm{O}(n)$ Operationen
  (genauer: je n-1 Div., Add. und Mult.)

$$
r_1 = b_1, l_1 = a_1 / r_1, r_2 = b_2 - l_1 * c_1, \ldots, l_{n-1} = a_{n-1} / r_{n-1}, r_n = b_n - l_{n-1} * c_{n-1}
$$

LR für nicht-voll-besetzte Matrizen (3)

- Allgemeine dünn besetzte Matrizen: Fill-In
- Vorhandene Nullen in der Matrix werden durch die Elimination zerstört.
- Dies treibt die Zahl der Operationen und den Speicherbedarf nach oben
- Es wurden viele Algorithmen entwickelt, die den Fill-In durch eine geeignete Permutation der Matrix minimieren sollen: sog. **sparse matrix solver**.
- Lösungen für Spezialfälle:
  - *Nested Dissection, Minimum Degree*, …
- Wenn solche Algorithmen für Parallelrechner entwickelt werden sollen, dann ist dies weiterhin ein heisses Forschungsthema

- Ist A **symmetrisch**, d.h. $A = A^T$ und **positiv definit**, dann kann man A faktorisieren in

$$A = L \cdot D \cdot L^T$$

dabei ist L das L der LR-Zerlegung D der Diagonal-anteil von R.

- wg positiv definit: D hat in der Diagonale nur positive Elemente, Alternative:

$$A = L \cdot D \cdot L^T = L \cdot D^{1/2} \cdot D^{1/2} \cdot L^T = \widetilde{L} \cdot \widetilde{L}^T$$

- Im Algorithmus kann man ausnützen, dass die beiden Dreiecksfaktoren gleich sind, man braucht nur einen der beiden explizit berechnen und spart so grob die Hälfte der Operationen.

- Für die Cholesky-Zerlegung ist keine Pivotsuche nötig.
- Der Algorithmus ist auch ohne Pivotsuche stabil.
  - Es können keine 0-Pivots auftreten.
- André-Louis Cholesky, 1875 – 1918 (Geodät)

- Vorteile im Vergleich mit LR:
  - keine Pivotsuche notwendig,
  - Aufwand etwa halb so groß wie bei LR.
- Aber: funktioniert nur für symmetrisch positiv definite (SPD) Matrizen !

- Faktorisierungsmethode: $A = A_1 A_2$: $A_1\, y = b$ und $A_2\, x = y$
- LR-Zerlegung (mittels Gauss-Elimination /-scherung)
- Pivotisierung
- Aufwand : allgemein / Band / tridiagonal
- Cholesky-Verfahren

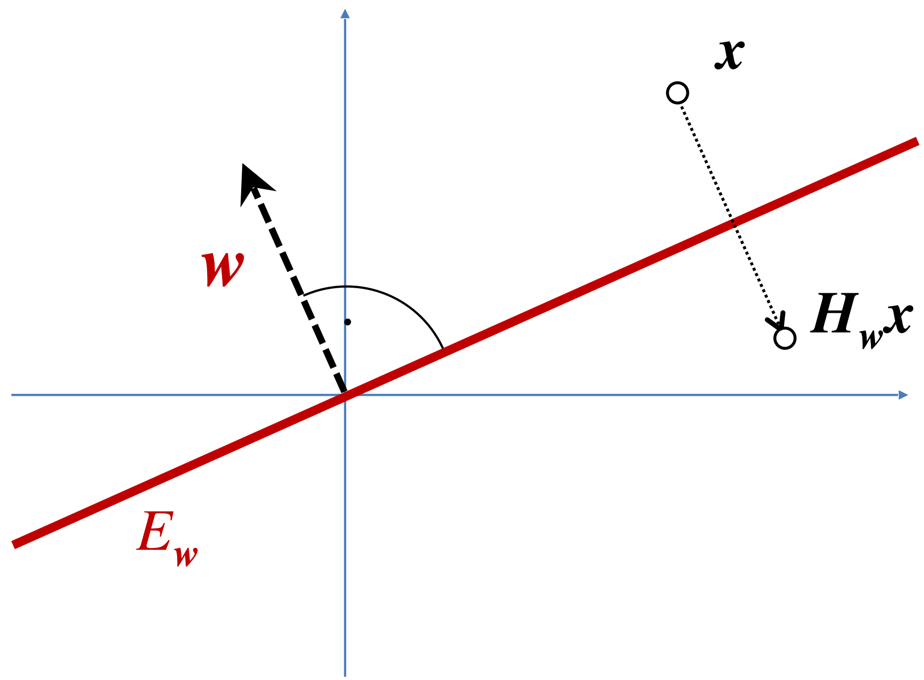
- Motivation:
  Durch Gauss-Scherungen kann ein gut konditioniertes Gl.-system in ein schlecht konditioniertes transformiert werden.
- Dies muss durch die (Spalten-) Pivotsuche verhindert werden … was in kritischen Fällen nur bedingt funktioniert (siehe Spezialvorlesung „Algorithms of Num. Lin Alg.“)

- Verwendet man Rotationen oder Spiegelungen zur Elimination anstelle der Gauss-Scherungen hat man
  - Bessere numerische Eigenschaften (da die Spiegelungen und Rotationen „längentreu“ und „winkeltreu“ sind)
  - Orthogonale Matrizen ($Q^TQ=Id$)
    $\rightarrow$ QR-Zerlegung

- Householder-Spiegelungen

Spiegelung an einer Geraden ($\mathbb{R}^2$), Ebene, ($\mathbb{R}^3$), Hyper-Ebene ($\mathbb{R}^n$) :

Eine Hyper-Ebene wird durch einen senkrechten Vektor w beschrieben:



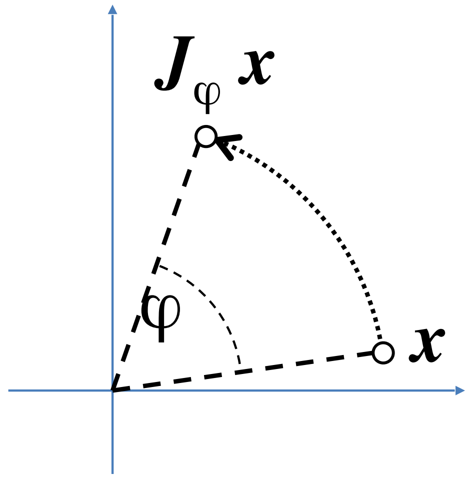
$$E_{\boldsymbol{w}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{w} = 0\}$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \frac{2 \cdot \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{w}} = Id - \frac{2}{\boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}^T$$

- Givens-Rotationen (Jacobi-Rotationen)
- Rotation in $\mathbb{R}^2$:

$$J_\varphi : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



- Rotationen in $\mathbb{R}^3$: Rotation um eine Achse.
  Givens-/Jacobi-Rotationen sind Rotationen um eine Koordinatenachse

$$J_{21}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{13}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad J_{32}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- Givens-Rotationen (Jacobi-Rotationen)
- Allgemein im $\mathbb{R}^n$: nur Rotation zweier Koordinaten

$$J_{ij}(\varphi) = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\varphi &&&& -\sin\varphi &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \sin\varphi &&&& \cos\varphi &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&& j &&&& i &&&& \end{array} &
\end{array}$$

Ansätze:

1. mit einer Householder-Spiegelungen in einer Spalte Nullen einfügen (außer Diagonalelement)

   → nach n-1 Schritten erhält man die Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$

2. Mit einer Givens-Rotationen ein Element (unterhalb der Diagonalen) zu Null machen

   → nach $n(n$-1)/2 Schritten erhält man die Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$

- Inverse : $J_{ij}(\varphi)^{-1} = J_{ij}(-\varphi) = J_{ij}(\varphi)^T$;
  $H_w^{\ -1} = H_w = H_w^{\ T}$
- Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen benötigen keine Pivotsuche (die Vertauschung ist als Spezialfall enthalten)
  - ★ deshalb auch leichter parallelisierbar
- Spiegelungen und Rotationen erhalten (in der 2-Norm) die Kondition des Ausgangssystems (siehe später)
- Aufwand (arithmetische Op.) im Vergleich zu LR :
  etwa 2x (Householder-Spiegelungen) bzw. 4x (Givens-Rotationen)
  - Bei Givensrotationen gibt es eine Variante, die nur gleich teuer wie Householder ist.
  - Dazu muss man zusätzliche Skalierungen einführen: rationale Givensrotationen, siehe unten.

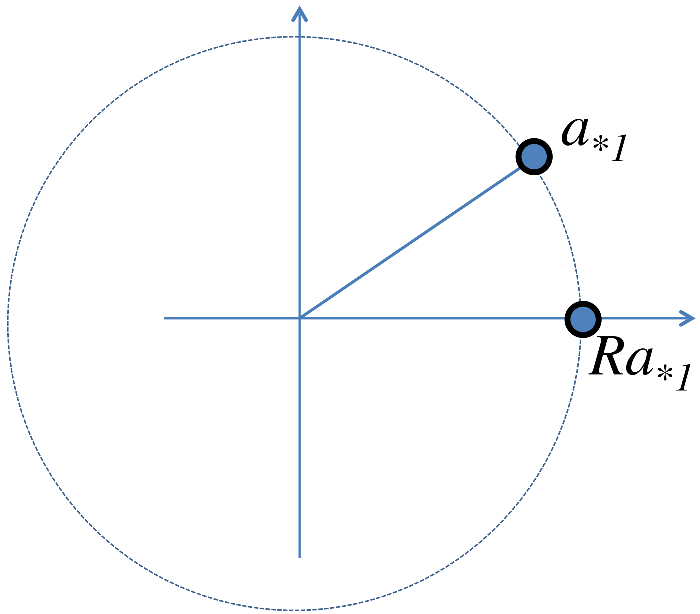
- 2x2-Fall: Gesucht eine Rotationsmatrix so dass

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$ wobei $c = \cos(\varphi), s = \sin(\varphi)$

d.h. Der Vektor $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ muss auf ein Vielfaches des Einheitsvektors abgebildet (gedreht) werden.

1. Fall:

$a_{11} > 0$



$$c = \cos(\varphi) = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

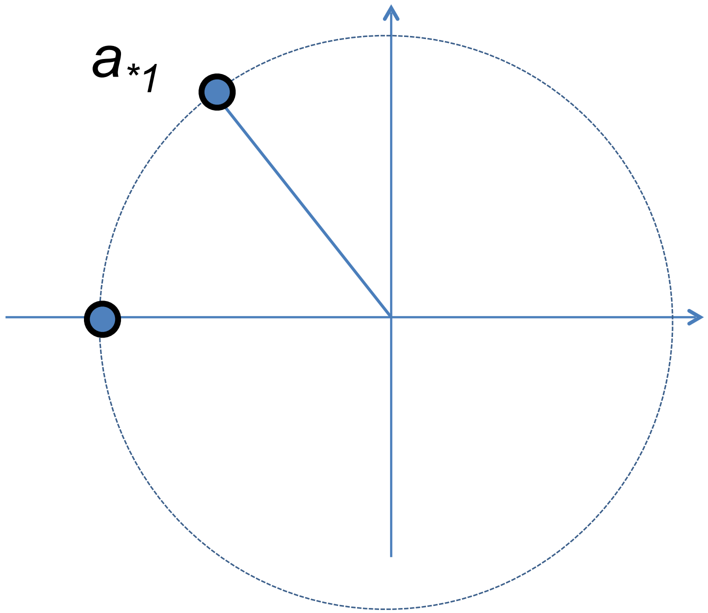
$$s = \sin(\varphi) = \frac{-a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

- 2x2-Fall: Gesucht eine Rotationsmatrix so dass

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$ wobei $c = \cos(\varphi), s = \sin(\varphi)$

d.h. Der Vektor $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ muss auf ein Vielfaches des Einheitsvektors abgebildet (gedreht) werden.

2. Fall:
$a_{11} < 0$



$$c = \cos(\varphi) = \frac{-a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$s = \sin(\varphi) = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

- Allgemeiner Fall:

$$J_{ij}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & j & & i & & \end{array} \end{array}$$

$$c = \cos(\varphi) = \frac{\sigma \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}, \quad s = \sin(\varphi) = \frac{-\sigma \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}, \quad \text{wobei} \quad \sigma = sign(a_{jj})$$

- A eine $m \times n$ - Matrix:

```
for j=1..nstar    # nstar wie unten definiert
    for i=j+1..m
       # bestimme c und s in J_i,j wie oben beschrieben
       A = J_i,j A # aber nicht als Matrixmultiplikation
       # dann ist das Element a_i,j = 0
```

- Reihenfolge so, dass einmal geschaffene 0-en nicht wieder zerstört werden.
  - $R = J_{m,n^*} \ldots . J_{2,1}\, A$ (hierbei ist $n^* = \min\{m\text{-}1,n\}$)
  - $A = J_{2,1}{}^T \ldots . J_{m,n^*}{}^T R = Q \cdot R$
  - Das Produkt aller Rotationen $\boldsymbol{J_{i,j}{}^T}$ ist eine orthogonale $m \times m$-Matrix.
  - In den meisten Anwendungen muss dieses Produkt nicht explizit mit berechnet werden.

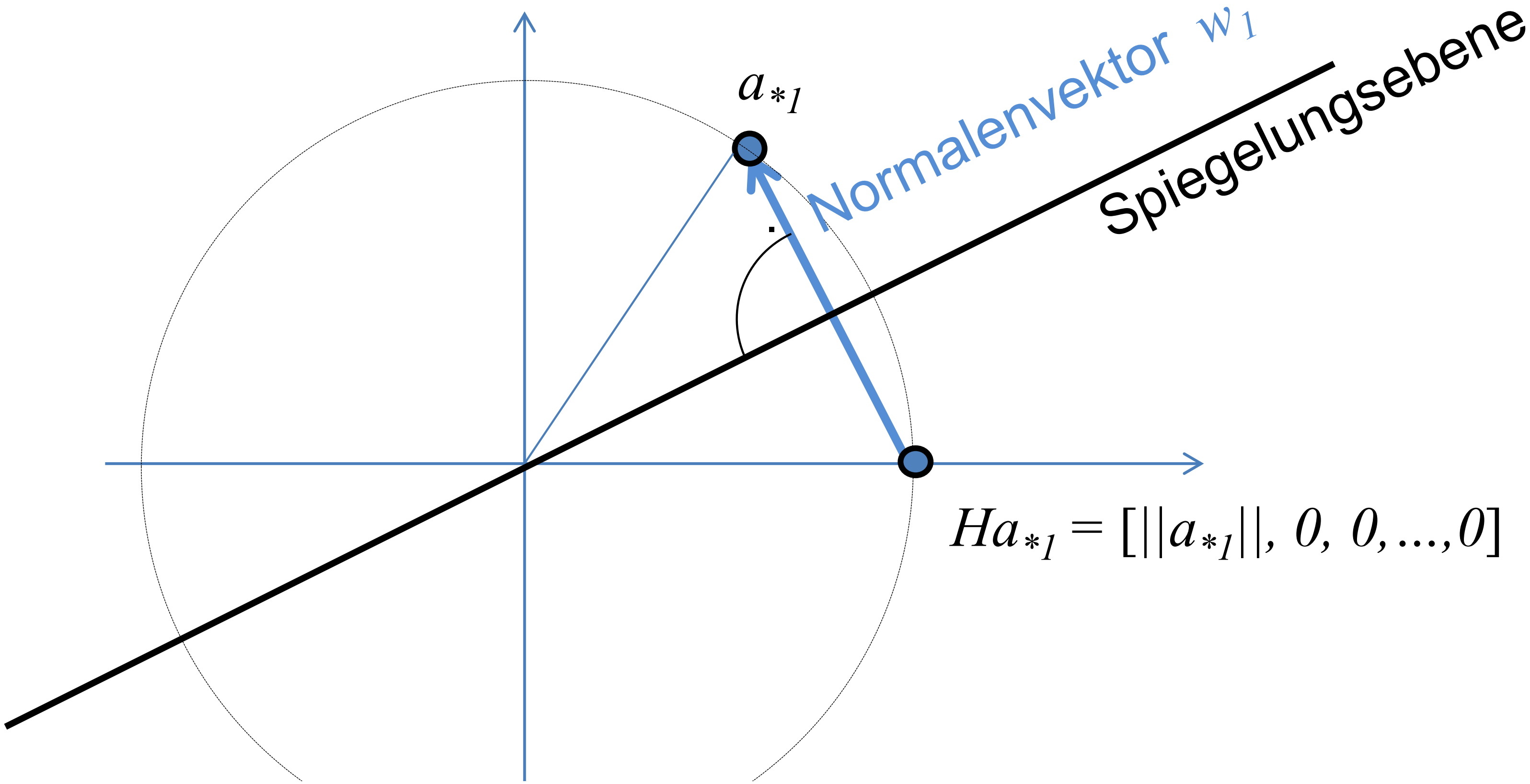
QR mit Givens-Rotationen (2)

- Für die Lösung eines Gleichungssystems:
  Rechte Seite mit den Rotationen mit-transformieren.
- Aufwand: ca. 4× so hoch wie bei LR-Zerlegung.
- Verbesserung: rationale Givens-Rotationen
  - Rotationen werden durch eine Skalierung so modifiziert, dass die Diagonalelemente alle gleich 1 sind. Alle so erfolgten Skalierungen werden separat auf multipliziert: In dieser Variante kann man ca. die Hälfte des Rechenaufwandes sparen.
- Für die numerische Stabilität ist keine Pivotsuche nötig,
- QR ist stabiler und besser konditioniert als LR
  $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, $\kappa_2(Q) = 1$,
- Häufig für $m>n$ angewandt, also für überbestimmte Gleichungssysteme.
  - siehe später: Ausgleichsrechnung.

- Eine QR-Zerlegung kann man auch mit Householder-Spiegelungen) anstelle von (Givens-) Rotationen erzeugen
- Dazu müssen $n\text{-}1$ Householder-Spiegelungen

$$\boldsymbol{H}_j = \boldsymbol{Id} - \frac{2}{\boldsymbol{w}_j \circ \boldsymbol{w}_j} \cdot \boldsymbol{w}_j \cdot \boldsymbol{w}_j^T \qquad \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \frac{2 \cdot \boldsymbol{w}_j \circ \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{w}_j \circ \boldsymbol{w}_j} \cdot \boldsymbol{w}_j$$

- konstruiert werden, die in der j-ten Spalte die erforderlichen Nullen erzeugen
- Man kann hier mit einer einzigen Transformation gleich die ganze Spalte eliminieren, indem man den Vektor $\boldsymbol{w}_j$ „geeignet“ wählt



Householder Spiegelung mit $\boldsymbol{w}_1 = [a_{11} - \|\boldsymbol{a}_{*1}\|, a_{21}, \ldots, a_{n1}]^T$

bildet die erste Spalte $\boldsymbol{a}_{*1}$ auf $[\|\boldsymbol{a}_{*1}\|, 0, \ldots, 0]^T$ ab.

QR mit Householder-Spiegelungen (3)

- Vorgehen wie bei LR-Zerlegung:
- 1. Householder-Spiegelung:

$$H_1 A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- 2. Householder-Spiegelung:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & & * \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- (n-1)-te Householder-Spiegelung:

$$H_{n-1}\cdots H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

- Man setzt dann $R = H_{n-1}\cdots H_2 H_1 A$ und

$$Q = (H_{n-1}\cdots H_2 H_1)^{-1} = H_1 H_2 \cdots H_{n-2} H_{n-1}$$

… und alles passt!

- Aufwand $O(n^3)$ (etwa doppelt so hoch wie bei LR)

Alston Scott Householder

Born: 5 May 1904 in Rockford, Illinois, USA

Died: 4 July 1993 in Malibu, California, USA

Director of the Oak-Ridge National Laboratory, 1948-1969

... Householder transformations are now routinely taught in courses throughout the world, as is the systematic use of norms in linear algebra, which he pioneered ...

- Die oben beschriebenen Verfahren kann man auch für nicht quadratische Matrizen durchführen

- Ergebnis falls $m < n$, $(m=3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3m} \end{bmatrix}$$

- $Q = J_{2,1}{}^T \cdot J_{3,1}{}^T \cdot J_{3,2}{}^T$ bzw. $Q = H_1 \cdot H_2$

- Ergebnis falls $m > n$, $(n=3)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{23} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J}_{2,1}{}^{T} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{J}_{n,1}{}^{T} \cdot \boldsymbol{J}_{3,2}{}^{T} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{J}_{n,2}{}^{T} \cdot \boldsymbol{J}_{4,3}{}^{T} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{J}_{n,3}{}^{T}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{H}_3$$

- in diesem Fall sind die Spalten $q_{n+1}, \ldots, q_m$ ohne Bedeutung (und werden meist weg gelassen)

- Problem: Gegeben linear unabhängige Vektoren
  $$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$$
- Finde *orthonormale* Vektoren $u_1, u_2, \ldots, u_k$ so dass
  - $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1\},$
  - $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\},$
  - $\ldots$
  - $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$
- Standard Verfahren (LinAlg): Gram-Schmidt-Verfahren

$$u_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}; \quad \tilde{u}_2 = b_2 - (b_2 \circ u_1) \cdot u_1, \, u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}; \quad \ldots$$

- Das Gram-Schmidt-Verfahren ist numerisch instabil
  - (das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren ist besser)

- Noch besser ist: QR-Zerlegung von

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \vdots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & & r_{2k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{kk} \end{bmatrix}$$

- Dann: $\boldsymbol{b}_1 = r_{11}\boldsymbol{q}_1,$

$$\boldsymbol{b}_2 = r_{12}\boldsymbol{q}_1 + r_{22}\boldsymbol{q}_2,$$

$$\ldots..$$

$$\boldsymbol{b}_k = r_{1k}\boldsymbol{q}_1 + r_{2k}\boldsymbol{q}_2 + \ldots + r_{kk}\boldsymbol{q}_k,$$

q's haben per definition einheitslänge, mit kombinationsfaktoren aus R (wie gram schmidt)

- Dies zeigt: Die (ersten k)-Spalten $\boldsymbol{Q}$ sind die gesuchten orthonormalen Vektoren

- Wie kann man ausnützen, dass zwei Gleichungssysteme „ähnliche“ Koeffizientenmatrizen haben?

Ähnliche matritzen

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \hat{A}\hat{x} &= \hat{b} \end{aligned}$$

- Problem: ohne weiteres Wissen muss die Zerlegung (LR oder QR) mit $\mathrm{O}(n^3)$ Aufwand neu durchgeführt werden.
  - Möglichkeit 1: Eliminationsvorgang im Detail analysieren und prüfen, ob und welche Teile sich wieder verwenden lassen. Problemspezifische Betrachtung der änderungen
  - … abhängig vom konkreten Problem und vom Geschick des Algorithmenentwicklers)
  - Für spezielle „Störungen“ nutzen spezieller Formeln: Hier als Beispiel die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel für Rang-1-Modifikationen. Häufige "störungsklassen" haben bereits verfahren

- Ist A nicht singulär, u und v Vektoren, so dass $v^T A^{-1} u \neq -1$, dann gilt:

jeder vektor aus u wird mit dem n_ten komponentent von v multipliziert und dann k

Wenn z.B. v ein Einheitsvektor ist,

$$(A + uv^T) \quad \text{ist nicht singulär}$$

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^T A^{-1}}{(1 + v^T A^{-1} u)}$$

deshalb v^Ta^-1u != 0, sonst null

(Sherman-Morrison-Woodbury-Formel)

- $A+uv^T$ ist eine Rang-1-Modifikation der Matrix A . Spezialfälle davon sind:
  - Modifikation eines einzelnen Elements von A
  - Modifikation einer einzelnen Spalte von A
  - Modifikation einer einzelnen Zeile von A
- Das Herleiten der Formel ist eine nette Übungsaufgabe.
- Die numerische Stabilität hängt von den Daten ab, muss also in jedem Einzelfall sicher gestellt werden.

Die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel darf man nicht naiv anwenden:

Die Inverse von A wird natürlich **nicht** explizit berechnet, sondern nur ihre LR-Zerlegung $A=LR$ (die wir ja schon kennen, weil wir ja annehmen dass $Ax=b$ schon gelöst wurde):

$$(A+uv^T)x = b$$

$$x = (A+uv^T)^{-1}b = A^{-1}b - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}b}{1+v^T A^{-1}u}$$

Also:

$Ap = b$ durch einmal Vorwärts-Rückwärtssubstitution 2*O(n^2)

$Aq = u$ durch noch einmal Vorwärts-Rückwärtssubstitution

und dann ergibt sich die Lösung $x = p - \dfrac{qv^T p}{1+v^T q}$

Man muss den algorithmus nicht auswendig kennen, aber anwenden können (also mit dem 2 maligen lösen)

- Lineare Gleichungssysteme kann man direkt oder iterativ lösen
- Direkte Verfahren liefern nach endlich vielen Schritten das exakte Ergebnis (theoretisch, wenn Arithmetik exakt),
- sie basieren auf der Faktorisierung von A
  - $A = A_1 A_2$ dann ist $Ax = b$ äquivalent zu $A_1 y = b$ und $A_2 x = y$
- LR-Zerlegung (mit Gauss-Scherung): Teilprobleme lösen durch Vorwärts-/ Rückwärts-Substitution
  - nur Pivotsuche garantiert (in den meisten Fällen) Stabilität
- QR-Zerlegung (mit Givens-Rot. oder Householder Sp.)
- Aufwand: LR- und QR-Zerlegung : $O(n^3)$
  Lösung der Teilprobleme $O(n^2)$
- Spezialvorlesungen aus der Mathematik, oder im WS ANLA: „Algorithmen der numerischen Linearen Algebra“

Ende von VL 4