Scharnewski Niklas 15.05.2020

Studon: em89inym Blatt: 3

Übung: Gruppe 7 (Mi 12-14 Uhr)

Freigegebene Aufgaben: A7, A8, A9

7/10 *30=21

A7 a)

i) $a_n = \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$ Einschachtelung

$$\frac{5-1+\frac{1}{n}\cdot(-1)}{n^2} \leq \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \frac{5+1+\frac{1}{n}\cdot 1}{n^2}$$

$$\frac{4-\frac{1}{n}}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

($\frac{1}{n} \to 0$, $n^2 \to \infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ii) $b_n = \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$ Einschachtelung

$$\frac{n}{n^2+n} \cdot \frac{5\cdot(-1)-2\cdot 1}{6+1-(-1)} \leq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \leq \frac{n}{n^2} \cdot \frac{5\cdot 1-2\cdot(-1)}{6-1-(-1)}$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{-7}{8} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \frac{1}{n} \cdot \frac{7}{4} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

($n+1 \to \infty$, $n \to \infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) für $n \in \mathbb{N}$

		lim sup	lim inf
i)	$M = \{0, +\infty\}$	∞	0
ii)	$M = \{1, -1\}$	1	-1
iii)	$M = \{+\infty\}$	∞	∞
iv) $-1 < q < 1$	$M\{0\}$	0	0
$q > 1$	$M\{\infty\}$	∞	∞
$q = -1$	$M\{-1, 1\}$	1	-1
$q < 1$	$M\{-\infty\}$	$-\infty$	$-\infty$
$q = 1$	$M\{1\}$	1	1

Scanned by TapScanner

A8 a) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{2+k}}_{\to 1}$ → keine Nullfolge → die Reihe ist divergent

mehr begründung

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} =$

$= \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{k}{3k^2+2k}\right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\sqrt{3k+2}}_{>1}}}_{<1} < q < 1$

konvergent oder divergent?

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} =$

$= \frac{\sqrt[k]{|\sin(k)|}}{\sqrt[k]{k^k}} \leq \frac{1}{k^{\frac{k}{k}}} = \frac{1}{k} \quad (\forall k \geq 2) = q < 1$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2-k+1}{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{3}{2^{k+1} \cdot (\sqrt{k+3}+\sqrt{k})}}{\frac{3}{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}} = \frac{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{2^{k+1} \cdot (\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} =$

$= \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}{2\cdot\sqrt{k+3}+2\sqrt{k}} \leq \frac{\sqrt{k+3}+\sqrt{k}}{2(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} = \frac{1}{2} = q < 1$

A9 a) i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\quad \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k}$ harmon Reihe → Divergiert

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} \Rightarrow$ Divergiert (Minoranten Kriterium)

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\quad \frac{4k^2+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k^2}{3k^2} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ Keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ → Divergiert (Divergenz Kriterium)

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ harmonische Reihe → Divergiert

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ → Divergiert (Minoranten Kriterium)

b) i) 1+2. Sowohl $\sin(n)$ als auch $\sin(n^2)$ haben keinen HP, da für einen HP es eine Teilfolge mit grenzwert geben müsste. Da es aber kein $\tilde{n} = k \cdot 2\pi + n \ \forall k \in \mathbb{N}\ n \in \mathbb{N}$ gibt hat für $n \in \mathbb{N}$ der Sinus nur einzigartige Werte

3. $\frac{\sin n}{n}$ hat einen HP durch Einschachtelung ii) HP von 3. ist 0

Scanned by TapScanner