Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van Anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 5

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

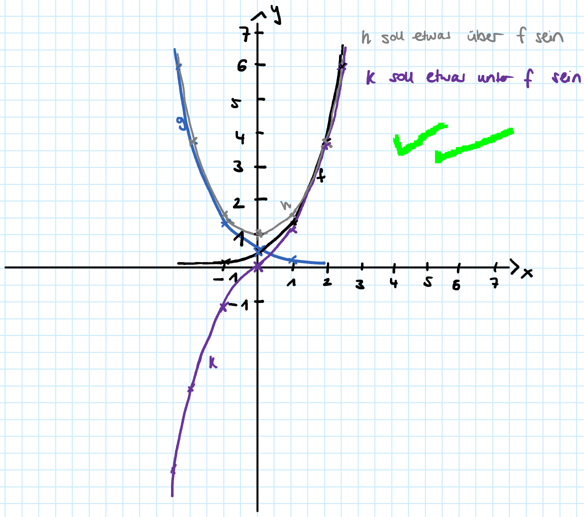
13, 14, ___, ___

14/14*30

A13

a) $\exp(x) = e^x$

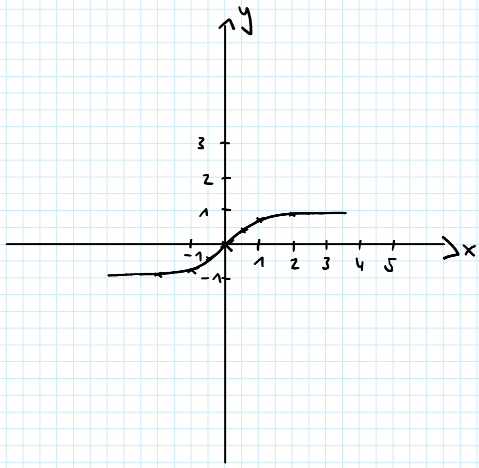
$f(x) = \frac{1}{2} e^x \qquad g(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \qquad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad k(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



b) $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - \overbrace{e^{-2x}}^{0})}{\cancel{e^x}(1 + \underbrace{e^{-2x}}_{0})} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{e^x}(\overbrace{e^{2x}}^{0} - 1)}{\cancel{e^x}(\underbrace{e^{2x}}_{0} + 1)} = \frac{-1}{1} = -1$$



c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

d) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ alles ungerade kürzt sich raus

$$\cosh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot 2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

alles gerade fällt raus

$$\sinh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right) \cdot 2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

e)

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{}{(2k)!} \cdot (-1)^k \cdot y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} \cdot y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (i)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot y^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i}{2k+1} \cdot y^{2k+1} = i \cdot \sinh(y)$$

Notiz: $(-1)^k \cdot i^{2k+1}$ ist immer i, da $-1 \cdot (-i)$ oder $1 \cdot i$

f) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y \cdot i$

g) Sin einer komplexen Zahl a ist $\sin(x+iy)$ für $x,y \in \mathbb{R}$ $Re(a) = x$ $Im(a) = y$

$\sin x \cosh y + \cos x \sinh y \cdot i$

Bei $x = 0$:

$\sin(0+iy) = \sinh y \cdot i = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot i$ => unbeschränkt (sinh Graph aus a))

Es reicht ein mal unbeschränkt zu zeigen

Bei $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \cosh y$ => unbeschränkt (siehe Graph)

A14

a) $\sqrt{1-x^2}$ darf nicht 0 werden

=> $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$\partial\mathbb{D} = \{-1, 1\}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to -1} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Stetigkeit x_*: $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$ Nur $x_* = 0$ interessant, da für $x < 0$ offensichtlich stetig (konstant 0), für $x > 0$ verkettete e-Funktion (verkettete stetige Funktion sind auch stetig)

$x_* = 0$

$f(x_*) = 0$

$\lim_{x \nearrow 0} = 0 = f(x_*)$ ✓

$\lim_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{"1-\infty"} = 0 = f(x_*)$

f ist an Stelle $x_* = 0$ stetig also für ganz $\mathbb{R}$ stetig

II) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Nur $x_* = 0$ interessant, da $e^{1+x-\frac{1}{x}}$ verkettete e-Funktion ist ... (siehe oben)

$\lim_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{"1-\infty"} = 0 = f(x_*)$

$\lim_{x \nearrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{"1+\infty"} = \infty \neq f(x_*)$

=> g nicht stetig

c) I) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = \sqrt{0+0+1} - 0 = 1$

II) $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x+1} - x \overset{\lim_{x\to\infty}}{=} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{1}{2}$$

($\lim_{x\to\infty}$ und $-x$ eingesetzt)

III) $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{(-x)^2-x+1} + x = \lim_{x \to \infty} x + \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2-x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \lim_{x \to \infty} x = \lim_{x \to \infty} \frac{x(x-1+\overbrace{\tfrac{1}{x}}^{0})}{x\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}}_{0}}} \overset{\lim_{x\to\infty}}{+} x = \lim_{x \to \infty} x-1 + \lim_{x \to \infty} x = "\infty+\infty" = \infty$$

IV) $\lim_{x \to +\infty} x\,|\sin \pi x|$

Teilfolgen:

$\lim_{n \to \infty} n\,|\sin \pi n| = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{m \to \infty} m\,|\sin \pi m| = \infty$ mit $m \in \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, ...\}$

=> Grenzwert existiert nicht

V) $\lim_{x \to 0} x|\sin \pi x| = 0 \cdot 0 = 0$

VI) $\lim_{x \to 0} \cos(x) \cdot \cos^2\left(\frac{2}{x}\right)$

Teilfolgen: alle Folgen mit $x = \frac{4}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) \cdot \cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

alle Folgen mit $x = \frac{2}{n\pi}$ $\Rightarrow \cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 1$ $\quad n \in 1, 3, 5 \dots \quad \cos(n\pi) = 1$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) \cdot \cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 1$

$\Rightarrow$ Grenzwert existiert nicht