Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 02

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ____

15/21 *30=21

Laura Fiegel - iz09unik Aufgabenblatt 2

A4) $a_1 = 1$ $a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

a) z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $a_1 = 1 \in (0,4)$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt: $(n \to n+1)$

$$a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \in (0,2)$$
$$\Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4) \Rightarrow a_{n+1} \in (0,4) \blacksquare$$

b) z.z. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$:

$$\frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} a_n^2 + a_n}{a_n^2} = \frac{\frac{1}{2} a_n + 1}{1} = \underbrace{\frac{1}{2} a_n}_{\in (0,2)} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_n + 1 > 1$$

c) Nach dem Satz der Konvergenz monotoner beschränkter Folgen ist die Folge gegen ihr Supremum konvergent, Beschränktheit zeigt sich aus a), Monotonie aus b).

Anwendung von $\lim_{n \to \infty}$ auf der Rekursionsgleichung, nach Regeln aus VL und P5:

$$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} a = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{4} a^2 = a$$

(für $a \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} a = 1 \Leftrightarrow a_1 = 4$$

$a \in \{0, 4\}$, da die Folge bei $a_1 = 1$ startet und monoton steigt kann 0 ausgeschlossen werden:

$a = 4$

A5) a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha^2 + 4\beta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (*)$$

Induktionsanfang: a_0, a_1:

a_0: $a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{0}{x_1 - x_2} = 0$ ✓

$a_1 =$ $a_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1$ ✓ ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Formel (*) für a_n und a_{n-1}

Induktionsschritt: a_{n+1} : z.z. $a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{I.V.}{=} \alpha\left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right) + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^n + \beta x_1^{n-1} - (\alpha x_2^n + \beta x_2^{n-1})}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} \overset{(\text{quad. Gl.})}{=}$$

$$= \frac{x_1^{n-1} x_1^2 - x_2^{n-1} x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \blacksquare$$

b) (i) nein, weil die quadratische Gleichung $x^2 = \alpha x + \beta$ dann keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat. Es sei denn x_1, x_2 sind $\in \mathbb{C}$, dann stimmt die Aussage. (nach Mitternachtsformel $x_{1/2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$)

War es für den Beweis

(ii) nein, da die quad. Gl. nur eine Lösung $(\frac{\alpha}{2})$ hat und a_n somit immer 0 ist

Das Problem ist eher : Durch null teilen

c) (i) $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$(a_n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$ (siehe (*) aus P16/C1)

(ii) $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$$(a_n) = \frac{\left(\frac{4+2\sqrt{11}}{2}\right)^n - \left(\frac{4-2\sqrt{11}}{2}\right)^n}{\left(\frac{4+2\sqrt{11}}{2}\right) - \left(\frac{4-2\sqrt{11}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{4\sqrt{11}}{2}}\left[\left(\frac{4+2\sqrt{11}}{2}\right)^n - \left(\frac{4-2\sqrt{11}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{11}}\left[(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n\right]$$

(iii) $x_{1/2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm\frac{2i}{2} = \pm i$

$$(a_n) = \frac{i^n - (-i)^n}{i-(-i)} = \frac{i^n - (-i)^n}{2i}$$

ist a_n in R?

NOTATION limes benu

A6) a) $$a_n = \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)} = \frac{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{\overbrace{2 - \underbrace{\tfrac{1}{n^3}}_{\to 0}}^{\to 2}}{\underbrace{3+\underbrace{\tfrac{2}{n^2}}_{\to 0}}_{\to 3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$$

b) $$b_n = \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \frac{(5+2n)^3}{(1+n)^3} = \frac{(25+20n+4n^2)(5+2n)}{(1+2n+n^2)(1+n)} =$$

$$= \frac{125+100n+10n^2+50n+40n^2+8n^3}{1+2n+n^2+n+2n^2+n^3} =$$

$$= \frac{125+150n+50n^2+8n^3}{1+3n+3n^2+n^3} = \frac{n^3\left(\frac{125}{n^3}+\frac{150}{n^2}+\frac{50}{n}+8\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n}+1\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\overbrace{\tfrac{125}{n^3}}^{\to 0}+\overbrace{\tfrac{150}{n^2}}^{\to 0}+\overbrace{\tfrac{50}{n}}^{\to 0}+\overbrace{8}^{\to 8}}^{\to 8}}{\underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{n^3}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{3}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{1}_{\to 1}}_{\to 1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{1} = 8$$

c) $$c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \sqrt{2n^2+n+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2+9n}\right)\left(\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}\right)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} =$$

$$= \frac{2n^2+n+1 - 2n^2 - 9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{2+\frac{9}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n}}}$$

$$= \frac{-8+0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

d) $d_n = n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \frac{(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1})(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1})}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} =$

$$= \frac{n^6-n^6-n^2+1}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = \frac{n^2\left(-1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n \overset{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{=} \frac{-1-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}} = 0 \cdot \frac{-1-0}{1+\sqrt{1+0+0}} = 0$$

e) $e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \frac{(\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3})(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3})}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} =$

$$= \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{n^{\cancel{4}}\left(\sqrt{\cancel{n^2}+\frac{\cancel{n}}{n}}-\sqrt{\cancel{n^2}-\frac{\cancel{n}}{n}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}} = \boxed{\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{1+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2+n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

f) $f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n(1+\frac{2}{n})} - \frac{n^2}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{n}{(1+\frac{2}{n})} - \frac{n}{(1+\frac{1}{n})} =$

$$= n\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \boxed{\lim_{n\to\infty} n}\,(1-1) =$$

$= 0$

Wenn dann wäre das typ 0*inftyBei solchen F