Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen: Fr, 15.05., 12:00 per Mail an die Tutoren

PRÄSENZAUFGABEN

Übung 1 Termersetzung

Es sei $\Sigma = \{A, B, C, D, \cdot\}$ eine Signatur mit vier Konstanten A, B, C und D sowie einem binären Funktionssymbol $\cdot$, welches wir als Infix-Operator verwenden (d.h., wir schreiben $s \cdot t$ anstelle von $\cdot(s, t)$). Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$A \cdot x \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{1}$$
$$C \cdot (D \cdot x) \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{2}$$
$$B \cdot (x \cdot y) \to_0 A \cdot (D \cdot x) \tag{3}$$
$$B \cdot (B \cdot x) \to_0 D \cdot x \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass dieses System nicht stark normalisierend ist, indem Sie einen Σ-Term t sowie eine unendliche Derivation $t \to t_1 \to t_2 \to t_3 \dots$ angeben.

Übung 2 Terme im Kontext

Sei Σ eine Signatur bestehend aus dem *binären* Funktionssymbol $\triangle$ und der Konstante c und $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ die Menge der Variablen. Wir betrachten das Termersetzungssystem

$$x_1 \triangle c \to_0 c \tag{5}$$
$$x_1 \triangle (x_2 \triangle x_3) \to_0 (x_1 \triangle x_2) \triangle x_3 \tag{6}$$
$$c \triangle x_1 \to_0 x_1 \tag{7}$$

1. Beachten Sie, dass V nur einen endlichen Vorrat von Variablen bildet. Welchen Einfluss hat diese Einschränkung auf das System?

2. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.

3. Sei $t = x_1 \triangle (c \triangle x_2)$. Wie viele Normalformen besitzt dieser Term? Welche sind dies?

4. Geben Sie einen Kontext an, für den t lediglich eine einzige Normalform besitzt.

5. Wir erweitern das System um die Regel

$$(x_1 \triangle x_2) \triangle c \to_0 x_1 \triangle (x_2 \triangle c). \tag{8}$$

   Besitzt das entstandene System eine Normaliserungseigenschaft? Begründen Sie informell Ihre Aussage.

Übung 3 Strikte Ordnungen

Sei $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R ist *irreflexiv* genau dann wenn für alle x gilt: $\neg xRx$; R ist eine *strikte Ordnung* wenn R irreflexiv und transitiv ist; R ist *asymmetrisch* genau dann wenn für alle x, y gilt: $xRy \Rightarrow \neg yRx$.

1. Zeigen Sie, dass eine strikte Ordnung asymmetrisch ist.
2. Zeigen Sie, dass eine transitive asymmetrische Relation eine strikte Ordnung ist.

Hausaufgaben

Übung 4 Termersetzung II (10 Punkte)

Sei Σ eine Signatur bestehend aus zwei Konstanten c und d, einem unären Funktionssymbol f und zwei binären Funktionssymbolen g und h. Gegeben sei das folgende Termersetzungssystem:

$$f(c) \to_0 c \tag{9}$$
$$f(g(c, y)) \to_0 h(f(d), y) \tag{10}$$
$$g(d, f(y)) \to_0 h(f(y), d) \tag{11}$$
$$g(f(x), c) \to_0 f(h(x, c)) \tag{12}$$
$$h(f(x), y) \to_0 g(x, f(y)) \tag{13}$$

1. Geben Sie die Grammatik für Σ-Kontexte an.
2. Geben Sie jeweils einen Term an, der
   (a) *keine* Normalform besitzt,
   (b) keine unendliche Ableitung, jedoch *zwei oder mehr* Normalformen besitzt,
   (c) sowohl eine unendliche Ableitung als auch mindestens eine Normalform besitzt,

   Notieren Sie jeweils die Ableitungen in Baumform bis zur Normalform oder bis zu einem Punkt, an dem offensichtlich ist, dass die Ableitung unendlich weit fortgeführt werden kann, *sowie* den jeweilig verwendeten Kontext (falls von $(\cdot)$ abweichend).