Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Brolich, Nina

StudOn-Kennung: eq13yjit

Blatt-Nummer: 1

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3,

24/24 * 33=33

INGMATH C2: BLATT 1

A1: Supremum, Infimum, Maximum, Minimum

Nina Brolich

14/14

Man sollte

	inf(M)	sup(M)	min(M)	max(M)
a) $M=[\sqrt{3},\sqrt{5})$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	ex. nicht
b) $M=\{\frac{1}{x+1} \mid \frac{1}{2}\le x\le 3\}$	$\frac{1}{4}$ für $x=3$	$\frac{2}{3}$ für $x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ für $x=3$	$\frac{2}{3}$ für $x=\frac{1}{2}$
c) $M=\{\frac{1}{1+n} \mid n\in\mathbb{N}\}$	0	$\frac{1}{2}$ für $n=1$	ex. nicht	$\frac{1}{2}$ für $n=1$
d) $M=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x+3>0\}$	$-\infty$	$+\infty$	ex. nicht	ex. nicht
e) $M=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{R}, p\le q\}$	0	1	ex. nicht	1
f) $M=\{n-\frac{1}{3n} \mid n\in\mathbb{N}\}$	$\frac{2}{3}$ $n=1$	∞	$\frac{2}{3}$	ex. nicht
g) $M=\{n+\frac{1}{3m} \mid n,m\in\mathbb{N}\}$	1	$+\infty$	ex. nicht	ex. nicht

A2: Abschätzen

$n\in\mathbb{N} \quad \wedge \quad 2n\le m\le 3n$

i) $\frac{3n+4m}{5n^2+10} \le \frac{3n+4\cdot 3n}{5n^2+10} = \frac{15n}{5n^2+10} = \frac{3n}{n^2+2}$

ii) $\frac{5n-m}{2n} \le \frac{5n-2n}{2n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$

iii) $\frac{n}{n+m} \le \frac{n}{n+2n} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

iv) $\frac{n+m}{\frac{1}{2}-n} \le \frac{n+3n}{\frac{1}{2}-n} = \frac{4n}{\frac{1}{2}-n}$

→ v) $\frac{5n-m+3\cdot 2^m}{3n^2-m+3} \le \frac{5n-3n+3\cdot 2^{3n}}{3n^2-3n+3}$

→ vi) $m+n+\underbrace{\sin(n)-\sin(17n^2)}_{\text{beide } \in[-1,1], \text{ also max } 1-(-1)=2}+2^m+2^{-m} \le$

$\le 3n+n+\sin(3n)-\sin(17\cdot(3n)^2)+2^{3n}+2^{-3n} =$

$= 4n+2+2^{3n}+2^{-3n}$

A3: Monotonie von Folgen, Konvergenz von Folgen mit Epsilon-Technik

10/10

a) $a_{n+1}-a_n = \frac{2n+2}{n+1+3}-\frac{2n}{n+3} = \frac{2n+2}{n+4}-\frac{2n}{n+3} = \frac{(2n+2)(n+3)-2n\cdot(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$

$= \frac{2n^2+6n+2n+6-2n^2-8n}{(n+4)(n+3)} = \frac{6}{(n+4)(n+3)} > 0$ wachsend monoton ~~steigend~~

~~für $n\in[1,3]$ <0, sonst >0, also weder monoton wachsend noch fallend~~

sorry!

$b_{n+1}-b_n = \frac{n+1}{2^{2n+1}} - \frac{n}{2^{2n}} = \frac{(n+1)\cdot 2^{2n} - n\cdot 2^{2n+2}}{2^{2n+2}\cdot 2^{2n}} = \frac{n\cdot 2^{2n}+2^{2n}-n\cdot 2^{2n+2}}{2^{4n+2}} =$

$= \frac{n\cdot 2^{2n}+2^{2n}-n\cdot(2^{2n}\cdot 2^2)}{2^{4n+2}} = \frac{(n+1)\cdot 2^{2n}-4n\cdot 2^{2n}}{\underbrace{2^{4n+2}}_{>0}} < 0$ (da $n+1<4n$) → monoton fallend

im letzten schritt mit 2^(2n) kürzen und zähler (n+1-4n=-3n+1) zusam

Nina Brolich

b) a_n konvergiert gegen 2

b_n konvergiert gegen 0

c)

a_n: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

$\hookrightarrow \forall n \geq n_0: \; |a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2\cdot(n+3)}{n+3}\right| =$

$= \left|\frac{2n-2n-6}{n+3}\right| = \left|\underbrace{\frac{-6}{n+3}}_{\text{immer positiv}}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \varepsilon$

$\frac{6}{n+3} \leq \varepsilon \iff \frac{6}{\varepsilon} \leq n+3 \iff n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3$

$\hookrightarrow \; n_0 \geq \underbrace{\frac{6}{\varepsilon} - 3}$ darf nicht 0 sein

$\Rightarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 = \lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} = \frac{6}{\lceil\frac{6}{\varepsilon}\rceil + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}+3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}} = \varepsilon$

b_n: $\forall n \geq n_0: \; |b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n} - 0\right| = \left|\frac{n}{4^n}\right| = \frac{n}{4^n} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \; \frac{n_0}{4^{n_0}} \overset{!}{\leq} \varepsilon \qquad\qquad n_0 \leq 2^{n_0}$

$\Rightarrow \; \frac{n_0}{4^{n_0}} \leq 2^{n_0} \cdot \frac{1}{4^{n_0}} \leq \varepsilon$

$2^{n_0} \cdot \frac{1}{2^{2n_0}} = 2^{(n_0 - 2n_0)} = 2^{-n_0} \leq \varepsilon$

$-n_0 \leq \mathrm{ld}(\varepsilon)$

$n_0 \leq -\mathrm{ld}(\varepsilon) = \mathrm{ld}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$\Rightarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $n_0 = \lceil \mathrm{ld}(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n} - 0\right| = \frac{n}{4^n} \leq \frac{n_0}{4^{n_0}}$

$\leq 2^{-n_0} = \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2^{\mathrm{ld}(\frac{1}{\varepsilon})}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$