Scharnewski Niklas 07.05.2020

Studon: em89inym Blatt: 2

Übung: Gruppe 7 (Mi: 12-14 Uhr)

Freigegebene Aufgaben: A4, A5, A6

18/21 * 30=25.5

A4 $a_1 := 1 \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

a) IA ($n=1$): $a_1 = 1 \in (0,4)$ ✓

I.V. (n): Es gilt $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

IS ($n \to n+1$): z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$

$$a_{n+1} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{a_n}_{\in(0,4)}}_{\in(0,2)} + \underbrace{\sqrt{\underbrace{a_n}_{\in(0,4)}}}_{\in(0,2)}}_{\in(0,4)} \leftarrow \text{I.V.}$$

$\Rightarrow a_{n+1} \in (0,4)$ $\square$

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = \sqrt{a_n} - \frac{1}{2} a_n \geq 0$

, da $\sqrt{a_n} \geq \frac{1}{2} a_n$, $\forall a_n \in (0,4)$

$\Rightarrow (a_n)$ ist monoton steigend

c) Da (a_n) monoton steigend ist und nach oben beschränkt ist, ist (a_n) konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ existiert

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \quad \Big| \lim_{n\to\infty}$$

$$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{2} a = 0$$

$\Leftrightarrow a - \frac{1}{4} a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow 4a - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a(4-a) = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = 4$

Da (a_n) monoton wächst $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

Scanned by TapScanner

A5 a) $\alpha^2+4\beta>0$ $\quad a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$

(*) $x^2=\alpha x+\beta$ $\quad a_n=\dfrac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

Annahme: $x_1 \neq x_2$

muss man das tatsächlich annehmen, oder ist das implizit gegebe

IA: $(n=0)$ $\quad a_0=\dfrac{x_1^0-x_2^0}{x_1-x_2}=\dfrac{1-1}{x_1-x_2}=\dfrac{0}{x_1-x_2}=0=a_0$ ✓

$(n=1)$ $\quad a_1=\dfrac{x_1^1-x_2^1}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1-x_2}=1=a_1$ ✓ ✓

IV: (n) Es gilt $a_n=\dfrac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}\ \forall n\in\mathbb{N}$ ✓

$(n-1)$ Es gilt $a_{n-1}=\dfrac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2}\ \forall n\in\mathbb{N}_0$ ✓

IS: $(n-1\to n)$ z.z. $a_n=\dfrac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}$ gilt nach IV

$(n\to n+1)$ z.z. $a_{n+1}=\dfrac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}\overset{IV}{=}\alpha\cdot\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}+\beta\cdot\frac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2}=$$ ✓

$$=\frac{\alpha\cdot(x_1^n-x_2^n)+\beta(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})}{x_1-x_2}=\frac{\alpha x_1^n-\alpha x_2^n+\beta x_1^{n-1}-\beta x_2^{n-1}}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{\alpha x_1\cdot x_1^{n-1}+\beta x_1^{n-1}-\alpha x_2\cdot x_2^{n-1}-\beta x_2^{n-1}}{x_1-x_2}=$$ ✓

$$=\frac{(\alpha x_1+\beta)x_1^{n-1}-(\alpha x_2+\beta)x_2^{n-1}}{x_1-x_2}\overset{(*)}{=}\frac{x_1^2\cdot x_1^{n-1}-x_2^2\cdot x_2^{n-1}}{x_1-x_2}$$ ✓

$$=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}=a_{n+1}$$

$\square$

b) $x^2=\alpha x+\beta \iff -x^2+\alpha x+\beta \Rightarrow x_{1/2}=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{-2}$

Diskriminante $D=\alpha^2+4\beta$

i) für $D<0$ hat $x_{1/2}$ (Mitternachtsformel) komplexe Lsg. ✓

ii) für $D=0$ hat $x_{1/2}$ nur eine Lsg $\Rightarrow$ Gleichung a) macht keinen Sinn ✓

Scanned by TapScanner

A6 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^2 = 2\cdot2\cdot2 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} =$ ← erweitern + binomische Formel

$\overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9}} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{n\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n^2}}\right)} =$

$= \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-(n^6+n^2+1)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} =$

$\overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{n^2\left(-1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n\cdot 2} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2]{n^4+n^3} - \sqrt[2]{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt[2]{n^4+n^3}+\sqrt[2]{n^4-n^3}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot n^2\cdot\left(\sqrt[2]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[2]{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2}{2\cdot2} = \frac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = -1$

Du sollst die Formelglieder a_n mit der Formel aus

A5 c) i) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ Fibonacci-Folge

ii) $a_n+1 = 4a_n + 7a_n-1$

$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=23,\ a_4=120,\ a_5=661, \dots$

iii) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-1,\ a_4=0,\ a_5=1,\ a_6=0 \dots$

$a_{n+1} = -a_{n-1}$ ⇒ reelle Folgenglieder