Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Pöhl, Celine

StudOn-Kennung: ul14yguf

Blatt-Nummer: 1

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3,

33Psuper, eine der besten abgaben bis jetzt

Celine Pohl

A1

	inf(M)	sup(M)	min(M)	max(M)
a)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	existiert nicht
b)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
c)	0	$\frac{1}{2}$	existiert nicht	$\frac{1}{2}$
d)	$-\infty$	$+\infty$	existiert nicht	existiert nicht
e)	0	1	existiert nicht	1
f)	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	existiert nicht
g)	1	$+\infty$	existiert nicht	existiert nicht

A2 $2n \le m \le 3n$

Kein m

i) $\frac{3n+4m}{5n^2+10} \le \frac{3n+12n}{5n^2+10} = \frac{15n}{5n^2+10}$

ii) $\frac{5n-m}{2n} \le \frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{3}{2}$

iii) $\frac{n}{n+m} \le \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

iv) $\frac{n+m}{\frac{1}{2}-n} \le \frac{4n}{\frac{1}{2}-n}$

v) $\frac{5n-m+3\cdot 2^m}{3n^3-m+3} \le \frac{2n+3\cdot 2^{3n}}{3n^3-2n+3}$

vi) $m+n+\sin(m)-\sin(17m^2)+2^m+2^{-m} \le$

$4n+\underbrace{\sin(3n)-\sin(17\cdot 9n^2)}_{\text{Maximal } 2}+2^{3n}+2^{-3n} \le 4n+2^{3n}+2^{-3n}+2$

Celine Pöhl

4.3 i) $a_n = \frac{2n}{n+3}$ ii) $b_n = \frac{n}{4^n} = \frac{n}{2^{2n}}$

a) Monotonie

i) $a_{n+1} - a_n =$ ~~$\frac{2\cdot((n+1))}{n+1+3} = \frac{2n+2}{n+4} = (1)(n+2)$~~

$$\frac{2n+2}{n+4} - \frac{2n}{n+3} = \frac{(2n+2)\cdot(n+3) - 2n\cdot(n+4)}{(n+4)\cdot(n+3)} = \frac{2n^2+6n+2n+6-2n^2-8n}{(n+4)\cdot(n+3} =$$

$$\frac{6}{(n+4)\cdot(n+3)} \geq 0 \rightarrow \text{monoton wachsend}$$

benutz lieber einen doppelbruch als das.

ii) $b_{n+1} : b_n =$

$$\frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n} = \frac{(n+1)\cdot 4^n}{n\cdot 4^{n+1}} = \frac{[illegible]}{n\cdot 4^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot 4^n}{n\cdot 4\cdot 4^n} = \frac{n+1}{4n} < 1$$

schöner: 1/4 * (1+1/n) <= 1/4 *2 = 1/2<=1

→ Nenner immer größer als Zähler

→ monoton fallend

b) Wert a / b schätzen

i) $a_n = \frac{2n}{n+3}$ Zähler ungefähr 2× Nenner → $a = 2$

ii) $b_n = \frac{n}{4^n} = \frac{n}{2^{2n}}$ Nenner wird sehr viel größer → $b = 0$

c) ε-Kriterium

i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \ldots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n-2n-6}{n+3}\right| =$

$$\left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \ldots = \varepsilon$$

umformen:

$$\frac{6}{n+3} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon} \leq n+3 \;|-3 \Leftrightarrow n \geq \frac{6}{\varepsilon} - 3 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \right\rceil$$

Celine Pöhl

Komplett:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \lceil \frac{6}{\varepsilon} - 3 \rceil$ → bei $\varepsilon = 2$ kann 0 rauskommen daher eine größere verwenden, z.B $n_0 = \lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil$ ✓

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{n_0+3} = \frac{6}{\lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil + 3} \leq \frac{6}{\frac{6}{\varepsilon}} = \varepsilon$$ ✓

ii)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \ldots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n}\right| \leq \ldots = \varepsilon$

Umformen:

$\frac{n}{4^n} \leq \varepsilon$

Umformen:

$$\frac{n}{4^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2}^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon \rightarrow n_0 = \lceil \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon \rceil$$

$n \leq 2^n$

Komplett:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \lceil \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon \rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n}\right| \leq \frac{n_0}{4^{n_0}} = \frac{\lceil \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon \rceil}{4^{\lceil \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon \rceil}}$$

A3

Céline Pohl

c) (ii)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \dots$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n}\right| \leq \dots = \varepsilon$

umformen:

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{2^{n_0}}{2^{2n_0}} = 2^{n-2n_0} = \frac{1}{2^{n_0}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 2^{n_0} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 \leq \lceil ld\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\rceil$$ ✓

komplett:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben

Setze $n_0 = \lceil ld\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\rceil$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b_n - b| = \left|\frac{n}{4^n}\right| \leq \frac{n_0}{4^{n_0}} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2^{\lceil ld(\frac{1}{\varepsilon})\rceil}} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$ ✓