15/21 * 30 = 21

$\boxed{A4a)}$ $a_n \in (0,4)$

IA $a_1 = 1$ $\quad 1 \in (0,4)$ ✓

IV wenn $a_n \in (0,4)$ dann ist $a_{n+1} \in (0,4)$

IS $\frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} = a_{n+1}$

$a_n \in (0,4)$ $\quad a_n \in (0,4)$

$\downarrow \quad\quad \downarrow$

$\frac{1}{2}a_n \in (0,2)$ $\quad \sqrt{a_n} \in (0,2)$

$\frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} \in (0+0, 2+2) \Leftrightarrow (0,4)$

a_{n+1} ist wegen IV $\in (0,4)$. Beide Seiten sind aus dem selben Bereich $\square$

b) $a_{n+1} - a_n$ soll > 0 um monoton steigend zu sein

$\frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} - a_n \Leftrightarrow \sqrt{a_n} - \frac{1}{2}a_n$

im Werte bereich $(0,4)$ für a_n ist $\sqrt{a_n} \geq \frac{1}{2}a_n$ dadurch ist $\sqrt{a_n} - \frac{1}{2}a_n$ immer positiv. Das heißt die Folge ist Monoton wachsend.

c) Da die Folge monoton steigt und eine obere Schranke hat ist die Folge konvergent

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n} \quad \Big| \lim_{n \to \infty}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a \quad \frac{1}{2}a \quad \sqrt{a}$

$a = \frac{1}{2}a + \sqrt{a} \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 = a$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 - a = 0 \Leftrightarrow 0 = a(\frac{1}{4}a - 1)$

$a = 0 \quad 1 = \frac{1}{4}a \Leftrightarrow 4 = a$ Mögliche Grenzwerte $\{0, 4\}$

da $a_1 = 1 > 0$ ist und die Folge Monoton wächst muss der Grenzwert $\underline{\underline{4}}$ sein

A5 a) IA:

$n=0 \quad a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{1-1}{x_1-x_2} = \frac{0}{x_1-x_2} = \underline{\underline{0}}$

$n=1 \quad a_1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = \underline{\underline{1}}$

IV: $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$

Das reicht nicht:man braucht auch m

IS $n \to n+1$

$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{IV}{=} \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$

$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$

$\frac{\alpha x_1 \cdot x_1^{n-1} - \alpha x_2 \cdot x_2^{n-1} + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{(\alpha x_1 + \beta) x_1^{n-1} - (\alpha x_2 + \beta) x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$

Einsetzen von x^2 für $\alpha x + \beta$

$= \frac{(x_1^2) x_1^{n-1} - (x_2^2) x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \quad \square$

b)

i) wenn $a^2 + 4\beta < 0$ Gilt die Aussage null wen die x werte Element aus $\mathbb{C}$ sein können

ii die Aussage stimmt und $x_1 = x_2$

Was passiert, wenn man x_1 =x_2 in d

c) i) $a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_4 = 3 \quad a_5 = 5 \; \ldots$

ii) $a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 25 \quad a_4 = 128 \; \ldots$

"Berechnen sie die Formelglie

iii) $a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 1 \; \ldots$

A6

a) $a_n = \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-n}{3n^3+2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^3}(2-\frac{n}{n^2})}{\cancel{n^3}(3+\frac{2}{n^2})}\right) = \frac{2-0}{3+0} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) $b_n = \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\cancel{n}(\frac{5}{n}+2)}{\cancel{n}(\frac{1}{n}+1)}\right)^3\right) = \left(\frac{0+2}{0+1}\right)^3 = \underline{\underline{8}}$

c) $c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^3+9n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^3+9n}\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2+9n})(\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n})}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2n^2}+n+1-(\cancel{2n^2}+9n)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-8n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(-8+\frac{1}{n})}{n(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n}})}\right) = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}$

d) $d_n = n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1})(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1})}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^6}-(\cancel{n^6}+n^2+1)}{n^3+\sqrt{n^6+n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}(-1-\frac{n}{n^2})}{n^3(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}})}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-1-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n^6}}\right) = 0\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{1}} = \underline{\underline{0}}$

e) $e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})}{\cancel{n}(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n^2+n})^2-(\sqrt{n^2-n})^2}{(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+2\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}\right) = \frac{2}{(1+1)(1+1)} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

f) $f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{n^2}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}-2n^2}{(n+2)(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+3n+2}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(-1)}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}\right) = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$