Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 5

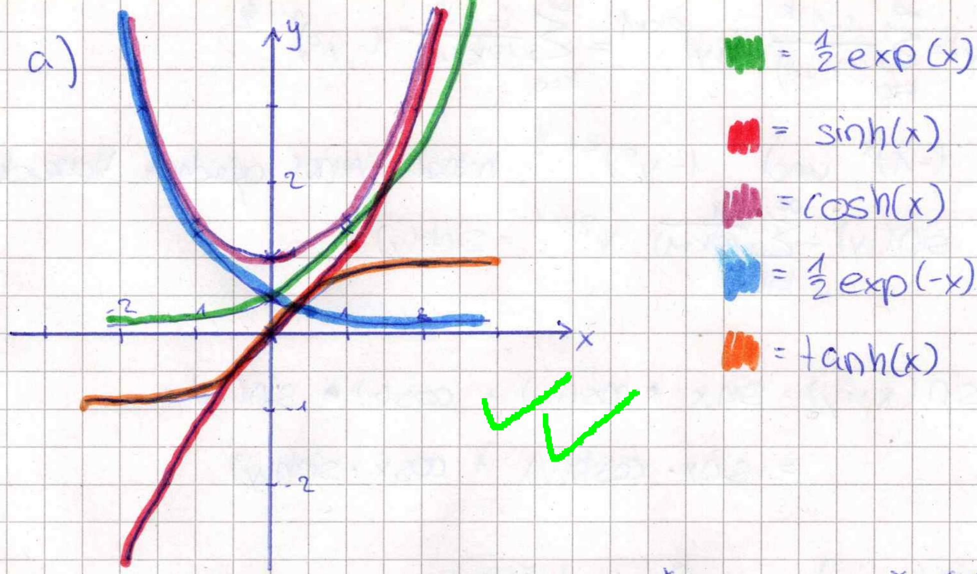
Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A13, A14, ______, ______

12/14 *30=25

413 a)



b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\cdot(1-e^{-2x})}{e^x\cdot(1-e^{-2x})} =$

$= \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}\left(\frac{1}{e^{-2x}}-1\right)}{e^{-2x}\left(\frac{1}{e^{-2x}}+1\right)} =$

$= \frac{-1}{1} = -\underline{\underline{1}}$

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)^2 =$

$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$

d) $\cosh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k}{2}$ → für ungerade k's ist Zähler = 0

→ $\cosh(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}}}$

$\sinh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k}{2}$ → für gerade k's ist Zähler = 0

→ $\sinh(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)!}x^{(1+2k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)!}x^{(1+2k)}$

e) $\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(-y^2)^k$

→ $(-1)^k$ und $(-y^2)^k$ haben immer gleiches Vorzeichen → cos(iy) immer positiv

→ $\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}y^{2k} = \cosh(y)$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (-y^2)^{k+\frac{1}{2}}$$ → i^(2k+1) = i*(-1)^k

$\Rightarrow$ $(-1)^k$ und $(-y^2)^{k+\frac{1}{2}}$ haben immer gleiches Vorzeichen

$$\Rightarrow \sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} y^{2k+1} = i\sinh(y)$$

f) $\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cos(iy) + \cos(x) \cdot \sin(iy) =$

$$= \sin x \cdot \cosh(y) + i \cos x \cdot \sinh(y)$$

g) $\sin(x+iy)$, $x=0$, y beliebig:

$$\sin(x+iy) = \sin 0 \cosh y + \cos(0) \cdot \sinh y = \sinh(y)$$

$\Rightarrow \sin(x+iy) = \sinh(y)$ für $x=0$, y beliebig

$$\lim_{y\to+\infty} \sinh y = \lim_{y\to+\infty} \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} \xrightarrow{y\to+\infty} \frac{+\infty-0}{2} = +\infty$$

Ein Beweis reicht für unbeschränkt

$$\lim_{y\to-\infty} \sinh y = \lim_{y\to-\infty} \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} \xrightarrow{y\to-\infty} \frac{-\infty-0}{2} = -\infty$$

$\boxed{A\ 14}$ a) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \pm \text{"}\frac{\sqrt{2}}{0}\text{"} \Rightarrow \lim_{x\to-1} f(x) \text{ existiert nicht!}$$

b) i)

$$f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & , x>0 \\ 0 & , x\leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ für $x \neq 0$ stetig, da Verkettung stetiger Funktionen

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{1+x+\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ die einseitigen Grenzwerte am Punkt $f(0)=0$ stimmen überein, $f(x)$ ist stetig.

ii) $g(x)=\begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ für $\cancel{x}=0$ stetig, siehe b)i)

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0$

$\Rightarrow$ die einseitigen Grenzwerte am Punkt $g(0)=0$ stimmen nicht überein $\Rightarrow$ $g(x)$ ist <u>nicht</u> stetig

c) i) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = +\infty \cdot 0 = 0$

iii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = -\infty \cdot 0 = 0$

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} x|\sin \pi x|$

sei $x_n := 2n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(x_n) = 2n\overbrace{|\sin 2\pi n|}^{0} \xrightarrow{x_n\to\infty} 0$

sei $\tilde{x}_n := 2n+\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = (2n+\frac{1}{2})\underbrace{|\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})|}_{1}$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{\tilde{x}_n\to\infty} +\infty$

$\Rightarrow$ Der obige Funktionsgrenzwert existiert nicht!

v) $\lim\limits_{x\to 0} x|\sin \pi x| = 0$

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)\cos^2(\frac{2}{x})$

sei $x_n := \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{x_n\to\infty} 0 \Rightarrow f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{\pi n}\right)\cos^2(2\pi n)$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{x_n\to\infty} 1$

sei $\tilde{x}_n := \frac{1}{\pi n+\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\tilde{x}_n\to\infty} 0 \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = \cos\left(\frac{1}{\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)\cos^2(2\pi n+\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{\tilde{x}_n\to\infty} 0 \Rightarrow$ Der obige Grenzwert existiert nicht!