Karataev, Phillip
vi93jida
Blatt: 06
Gruppe: 7
Aufgaben: alle

19/20 *30 = 28.5

A15) a.) Höhe des Turms $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Meter

-> Harmonische Reihe geht gegen ∞ => Turm wird unendlich hoch

b.) Farbe pro Würfel: $6 \cdot \frac{1}{k^2}$

die unterseite muss nie angestriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{k^2} = \lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} 6 \cdot \frac{1}{k^2} \right) \overset{\text{Rechenregeln Grenzwerte Folgen}}{=} 6 \cdot \underbrace{\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergiert}}$$

-> siehe Angabe

=> Der Turm kann mit endlich viel Farbe angestrichen werden.

c.) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^3 = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}}_{\text{konvergiert}}$
-> siehe Angabe

=> Der Turm kann mit endlich viel Beton gebaut werden.

d.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Gleichung für Farbe:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

-> divergent, Harmonische Reihe

Gleichung für Material:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.5}}$

-> konvergent, siehe Angabe

A16) a.)
(i) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x \qquad (0, \frac{\pi}{2})$

Zur Stetigkeit von x^3: $(g(x) = x^3)$

Sei $x_* \in \mathbb{R}$ beliebig

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^3$

$= (\lim_{n\to\infty} x_n)^3 = x_*^3 = g(x_*)$

Verknüpfung stetiger Funktionen, $\sin x$ / $\cos x$ sind stetig und x^3 auch, siehe links.

$f(0) = 0^3 + \sin 0 - \cos 0$
$= \underline{-1}$

$f(\pi/2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= 4.88$

Aus Nullstellensatz von Bolzano folgt: mindestens eine Nullstelle

$f'(x) = x^{3'} + \sin' x - \cos' x$ | Rechenregeln differenzieren (Addition) Definition Potenz / sin' / cos'

$= \underset{>0 \text{ in } (0,\frac{\pi}{2})}{3x^2} + \underset{>0 \text{ in } (0,\frac{\pi}{2})}{\cos x} + \underset{>0 \text{ in } (0,\frac{\pi}{2})}{\sin x}$

=> Die Ableitung ist an allen Punken in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv
-> monoton steigend
streng

-> Genau eine Nullstelle

(ii) $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\text{stetig}} \underbrace{\cos(\pi x)}_{\text{stetig}} - \frac{1}{2}$ ⇒ Verknüpfung stetiger Funktionen → stetig

$f(0) = e^0 \cos(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
} Nullstellensatz von Balzano → mindestens eine Nullstelle

$f'(x) = (e^{-x} \cdot \cos(\pi x))'$

$= \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \underbrace{\cos(\pi x)}_{\cos(x) \text{ in } (0,\frac{\pi}{2}) > 0} \underbrace{- e^{-x}}_{<0} \underbrace{\sin(\pi x)}_{\sin(x) \text{ in } (0,\frac{\pi}{2}) > 0} \pi$

Konstante Faktoren können bei der Monotonie-Betrachtung vernachlässigt werden, da sie den Graph nur verschieben

$\underbrace{\quad}_{<0} + \underbrace{\quad}_{<0}$ ⇒ Für alle Punkte in $(0, \frac{1}{2})$ streng monoton fallend

→ Genau eine Nullstelle

b.) $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$ Hilfsfunktion: $g(x) = f(x) - x$

(I) $g(a) = f(a) - a \geq 0$
(II) $g(b) = f(b) - b \leq 0$

Nach dem Zwischenwertsatz von Balzano folgt, dass es mind. ein c gibt, für dass $g(c) = 0$ gilt.
⇒ $f(c) = c$ bzw. $f(c) - c = 0$

c.) D_f ist abgeschlossen: $\overline{D}_f = \{11.17\} \cup [-5, -1] \cup [1, 5]$
D_f ist offensichtlich beschränkt ⇒ D_f ist kompakt

$\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{stetig}} \underbrace{\sin(x)}_{\text{stetig}}$ ⇒ Die Funktion ist stetig

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum/Minimum an.

A17)

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$ ✓

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot n \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right)$ ✓

* $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ ✓

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{5x}{6x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ ✓

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1 - \cos\frac{x}{2} + \sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{-\frac{1}{2} \underbrace{\frac{(\cos\frac{x}{2} - 1)}{x \cdot \frac{1}{2}}}_{\to 0} + 2 \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}} =$ ✓

$= \frac{1}{2}$ ✓

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \sin x \cos x\right) = \cos\left(\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \pi \cdot \cos x\right)\right) =$ ✓

$= \cos(1 \cdot \pi \cdot 1) = -1$ ✓

* $= n! \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} = n! \cdot \lim\limits_{x_1\to 0} \frac{\sin x_1}{x_1} \cdot \lim\limits_{x_2\to 0} \frac{\sin x_2}{x_2} \cdot \lim\limits_{x_3\to 0} \frac{\sin x_3}{x_3} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n}{x_n}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\quad x_n := nx$

Karataev, Phillip