Karataev, Phillip
vi93jida
Blatt: 02
Gruppe: 7
Aufgaben: alle

20/21*30=28.5

A4) a.) Vollständige Induktion $a_n \in (0,4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

I.A. $n=1$ $\quad a_1 = 1 \in (0,4)$

I.S. $n \to n+1$

Es gelte $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

zu zeigen: $a_{n+1} \in (0,4)$

Beweis:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$$

I.V. $\left.\begin{array}{l} a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \in (0,2) \\ a_n \in (0,4) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

$\Rightarrow a_{n+1} \in (0,4)$

b.) $$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = \sqrt{a_n} - \frac{1}{2} a_n = \frac{a_n - \frac{1}{4} a_n^2}{(\sqrt{a_n} + \frac{1}{2} a_n)}$$

$\sqrt{a_n} + \frac{1}{2} a_n > 0 \ \forall a_n \in (0,4)$

$a_n - \frac{1}{4} a_n^2 > 0 \ \forall a_n \in (0,4)$

$-\left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2 + 1 > 0 \ \forall a_n \in (0,4)$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \ \forall a_n \in (0,4)$

$\Rightarrow$ Folge wächst monoton

c.) Nach Satz (aus der Vorlesung) konvergiert jede monoton steigende, nach oben beschränkte Folge gegen ihr Supremum.

$\Rightarrow a_n$ konvergiert

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \quad \Big| \lim_{n \to \infty}$

$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} = 0 \\ \sqrt{a} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$ (Supremum)

$\Rightarrow \sup(a) = 4$, da die Folge monoton wächst $\Rightarrow$ Grenzwert von a_n ist $a = 4$

A5) a.) I.A. $n=0$ $\quad a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = \frac{0-0}{x_1 - x_2} = 0 \equiv a_0$ passt

$n=1$ $\quad a_1 = \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} \equiv 1 \equiv a_1$ passt ✓

ist wegen $x_1 \neq x_2$ definiert, da: $x^2 - \alpha x - \beta = 0$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}_{>0}$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$

I.S. $n \to n+1$ ✓

Es gelte die Induktionsvoraussetzungen für ein $n \in \mathbb{N}$ sowie für $n-1$ ✓

zu zeigen: Die Gleichung gilt für $n+1$, also:

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{\text{I.V.}}{=} \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$$ ✓

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \left(x_1^{n-1} (\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1} (\alpha x_2 + \beta) \right)$$

$$\overset{(x^2 = \alpha x + \beta)}{=} \frac{1}{x_1 - x_2} \left(x_1^{n-1} x_1^2 - x_2^{n-1} x_2^2 \right)$$ ✓

$$= \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$ ✓ $\square$

b.) $x^2 = \alpha x + \beta$

$\Leftrightarrow x^2 - \alpha x - \beta = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \beta$

(i) $\alpha^2 + 4\beta < 0$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

weil $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ und $x_1 \neq x_2$ $\quad (x_1 = \bar{x}_2)$

(ii) $\alpha^2 + 4\beta = 0$ gilt nicht

weil $x_1 = x_2$ $\quad a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ nicht definiert

c.)

(i) $x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 0.5)^2 = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad a_n = \frac{(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})^n - (-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})^n}{\sqrt{5}}$

(ii) $x^2 - 4x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 11$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{11} + 2 \\ x_2 = -\sqrt{11} + 2 \end{cases}$ $\quad a_n = \frac{(\sqrt{11} + 2)^n - (-\sqrt{11} + 2)^n}{2\sqrt{11}}$

(iii) $x^2 - (-1) = 0$

$x^2 = -1$

$\Leftrightarrow x = \pm i$ $\quad a_n = \frac{i^n - (-i)^n}{2i}$

Fehlt: Ist das aus R oder C ?

A6)

a.) $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 - n}{n(3n^2 + 2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1(3 + \frac{2}{n^2})} = \frac{\lim_{n \to \infty} (2 - \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \to \infty} (3 + \frac{2}{n^2})} = \frac{2}{3}$

b.) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{5 + 2n}{1 + n}\right)^3 = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{5}{n} + 2}{\frac{1}{n} + 1}\right)^3 = \left(\frac{\lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} + 2}{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + 1}\right)^3 = 2^3 = 8$

c.) $\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{2n^2 + n + 1} - \sqrt{2n^2 + 9n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + n + 1 - 2n^2 - 9n}{\sqrt{2n^2 + n + 1} + \sqrt{2n^2 + 9n}} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{-8n + 1}{n\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{2 + \frac{9}{n}}} = \frac{\lim_{n \to \infty} (-8 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{9}{n}}\right)} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

d.) $\lim_{n \to \infty} d_n = n^3 - \sqrt{n^6 + n^2 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^6 - n^6 - n^2 - 1}{n^3 + \sqrt{n^6 + n^2 + 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{-n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{n^3(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}})} = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + \frac{1}{n^2})}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}}\right) = 0$

e.) $\lim_{n \to \infty} e_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} - \sqrt[4]{n^4 - n^3}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{\sqrt[4]{n^4 + n^3} + \sqrt[4]{n^4 - n^3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n^3 - n^4 + n^3}{(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + \sqrt[4]{n^4 - n^3})(\sqrt{n^4 + n^3} + \sqrt{n^4 - n^3})} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3}{n(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n}})\, n^2 (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n}})(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

f.) $\lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3 + n^2 - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{-n^2}{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})} = \frac{-1}{1} = -1$

Phillip Karathev