Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van Anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 6

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

15, 16, 17, ____

19/20 *30 = 28.5

Skizze

$$5\cdot\frac{1}{1^2} + 5\cdot\frac{1}{2^2} + 5\cdot\frac{1}{3^2}$$
$$-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$$

etc.

A15 Türme bauen und anstreichen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

b) $O = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot 4 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 5\cdot\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \left(5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) - \sum_{\tilde{k}=2}^{\infty}\frac{1}{\tilde{k}^2} = 5\cdot\cancel{\frac{1}{1^2}} + 4\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (aus Vorlesung) $\qquad O = 5 + 4\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 5 + 4\cdot\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 1 + \frac{4\pi^2}{6}$

sum 1/k^2 = pi^2/6

nur wenn k=1, bei k=2 muss man zuerst den index wie

A: Ja, er kann mit endlich viel Farbe $\left(1 + \frac{4\pi^2}{6}\right)$ angestrichen werden.

es reicht konvergenz zu zeigen, man mus

c) $V = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ← Majorante, also muss auch V konvergieren und endlich viel Beton ausreichen

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha}}$ konvergent für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$O = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2\cdot 5 - \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{\tilde{k}=2}^{\infty}\frac{1}{\tilde{k}} = 1 + \underbrace{4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{divergent, auch mit } +1 \text{ divergent}}$

$V = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}}}$ => konvergent, da $\alpha = \frac{1}{2} > 0$

Mit $W_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ kann man einen massiven Turm konstruieren, der unendlich viel Farbe, aber endlich viel Beton benötigt.

A16 Eigenschaften stetiger Funktionen

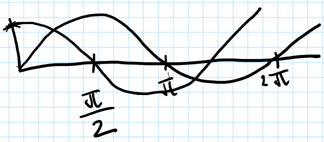
a) I) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$

Bolzano: neg. Wert, pos. Wert, Stetigkeit => mind. 1 Nullstelle

verknüpft mit Monotonie (höchstens 1 Nullstelle) => genau 1 Nullstelle

Stetigkeit: $\sin x$ stetig, $\cos x$ stetig, x^3 stetig → Funktion verketteter Funktionen auch stetig

Skizze



Werte: $f(0) = 0 + \sin(0) - \cos(0) = -1$ → neg. Wert

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8} + 1 - 0 > 0$ → pos. Wert

=> + stetig, also mind. 1 Nullstelle

Monotonie: 1) x^3 ist monoton wachsend, $\sin x$ ist im Intervall monoton wachsend, $\cos x$ ist monoton fallend, wird jedoch abgezogen => Wert, der abgezogen wird, wird immer kleiner bzw. $-\cos x$ auch monoton wachsend → ganze Funktion monoton wachsend

2) $f'(x) = \underbrace{3x^2}_{>0} + \underbrace{\cos x}_{>0} + \underbrace{\sin x}_{>0} > 0$

im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

=> f monoton wachsend

=> $f(x)$ auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ genau eine Nullstelle

II) $f(x) = e^{-x}\cdot\cos\pi x - \frac{1}{2}$ auf $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$f(x)$ stetig, da e^{-x} stetig, $\cos\pi x$ stetig → Verkettung stetiger Funktionen

$f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

=> mind. 1 Nullstelle

Monotonie: $\underbrace{e^{-x}}_{>0}$ monoton fallend, $\underbrace{\cos \pi x}_{>0}$ auf $(0, \frac{1}{2})$ monoton fallend, $-\frac{1}{2}$ verschiebt nur

also Multiplikation auch monoton fallend

$\Rightarrow f(x)$ monoton fallend

$\Rightarrow$ genau 1 Nullstelle auf $(0, \frac{1}{2})$

b) $a < b \quad f: [a,b] \to \mathbb{R} \quad f(a) = b \quad f(b) = a$

Fixpunkt muss auf $g(x) = x$ liegen

$f(a)$ und $f(b)$ sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden $g(x) \Rightarrow$ ein Wert liegt oberhalb, der andere unterhalb von $g(x)$, also muss $g(x)$ aufgrund der Stetigkeit geschnitten werden. (Zwischenwertsatz von Bolzano: jeder Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird mindestens einmal angenommen, $g(x)$ liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\Rightarrow$ also wird $g(x)$ mindestens ein Mal geschnitten)

c) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum / Minimum an

$f: D_f \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$ auf $D_f := \{11, 17\} \cup ([-5,5] \setminus (-1,1))$

f stetig, da Verkettung stetiger Funktionen e^{-x^2} und $\sin x$

Kompakte Menge: abgeschlossen und beschränkt $\longrightarrow$ da kein $\pm\infty$ in der Menge vorkommt

$\downarrow$

D ist $\{11,17\} \cup [-5,-1] \cup [1,5]$

$\Rightarrow f$ ist stetig, D ist kompakt $\Rightarrow$ Minimum / Maximum existieren

A17 Grenzwerte

I) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\sin x}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2$

II) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{x}}_{3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{\sin nx}{x}}_{n} = n!$

III) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\sin 6x} = 5 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{x}\right)^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

IV) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1 - \cos \frac{x}{2} + \sin 2x} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} + \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{-x}\right)^{-1} = \left(2 + \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{-x}\right)^{-1} = \left(2 + -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{\frac{x}{2}}}_{0}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$

V) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \cdot \sin x \cos x\right) = \lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\pi \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x\right) = \cos\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \pi \cdot \cos x\right) = \cos\left(\lim\limits_{x \to 0} \cos x \, \pi\right) = \cos(\pi) = -1$