Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Masih Zoharian Esfahani

StudOn-Kennung: 22295222

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A1, A2, A3, ______

18.5/21 * 30=26

Masih Zoharian Esfahani $\boxed{1}$

8 Mathe

A4/a/ IA $\Rightarrow$ $n=1$: $a_n := 1 \in (0,4)$ ~~für ein $n\in\mathbb{N}$ (I.V)~~ ist klar

IS $\Rightarrow$ $(n \to n+1)$: Es gelte $a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (I.V)

z.z. $a_{n+1} \in (0,4)$

Bereich von a_{n+1}? wenn $a_n \in (0,4)$

$a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$\Rightarrow a_{n+1} = f(a_n) = f(x) = \frac{1}{2} x + \sqrt{x}$ mit DB $(0,4)$

für $x=0 \Rightarrow f(0) := 0$

für $x=4 \Rightarrow f(4) := 4$

$\Rightarrow a_{n+1} = f(a_n) < f(4) = 4$

also $a_{n+1} \in (0,4) \subseteq (0,4)$

$a_{n+1} = f(a_n) > f(0) = 0$

A4/b/ $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = -\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$$= \underbrace{\underbrace{\sqrt{a_n}}_{(0,2)} \underbrace{\underbrace{\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{a_n}}_{(0,2)}\right)}_{(-1,0)} + 1}_{(0,1)}}_{(0,2)} \geq 0$$

Masih Zaharian Esfahani [redacted] $\boxed{2}$

A4/c/

$$a = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{a_n} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{a_n} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow a_n \in \{0, 4\}$$

Die Folge stratet bei 0 und ist monoton wachsend

nur 4 kommt in Frage.

$$a = 4$$

A6/a ⇒

$$a_n = \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)} = \frac{2n^3 - n}{3n^3 + 2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(2 - \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^3}(1 + \frac{2}{n^2})} = 2 \quad \frac{2}{3}$$

✓

A6/b/ $\left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = b_n$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(2+\frac{5}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}\right)^3 = 8$$

✓✓✓

Masih Zharian Esfahani $\boxed{3}$ Mathe 9

A6/c/ $c_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2+9n}\right)\left(\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}\right)}{\left(\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{9}{n}}\right)} = \frac{-8}{2\sqrt{2}}$$

A6/d/ $d_n = n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} \Rightarrow$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n^3\left[1-\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right] \cdot \frac{\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]}{\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]}}$$

$$\cancel{= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left[1-\left(1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}\right)\right]}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1}\right)\left(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{\left(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-1}{n^3\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]}$$

$$= \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{-n^2-1}{n^2\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{-n^2-1}{n^2\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right]} = 0 \times -1 = 0$$

Masih Zaharian Esfahani $\boxed{4}$

A6/e/ $\quad e_n = \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2]{n^4+n^3} - \sqrt[2]{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} \cdot \frac{\sqrt[2]{n^4+n^3}+\sqrt[2]{n^4-n^3}}{\sqrt[2]{n^4+n^3}+\sqrt[2]{n^4-n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{\left[n\left(\sqrt[4]{1+\cancel{\tfrac{1}{n}}}+\sqrt[4]{1-\cancel{\tfrac{1}{n}}}\right)\cdot n^2\left(\sqrt{1+\cancel{\tfrac{1}{n}}}+\sqrt{1-\cancel{\tfrac{1}{n}}}\right)\right]} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2} \checkmark$$

A6/f/ $\quad f_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = -1 \checkmark$$

$\frac{10}{Wertung}$

Mesih Zoharian Esfahani $\boxed{5}$

A5/ a/ Induktionsanfang $(n=0)$:

du musst auch a_1 annehmen, weil du in der I.V. auch a_(n-1) brauchst

$$a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = 0$$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Es gelte die I.V.

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

z.z. ist:

$$a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2 - x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$$

$$\alpha a_n + \beta a_{n-1} = \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$$

A5/b/ $x^2 = \alpha x + \beta \qquad 0 = -x^2 + \alpha x + \beta$

$$x_{1/2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \beta}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{-2}$$

I/ Ja, Folgenglieder wären in $\mathbb{C}$ ⇒ weil unter der Wurzel negative Zahl stehen

I/ nein / unter der Wurzel würde 0 stehen

$x_{1,2} = \frac{\alpha}{2}$ ⇒ in Nenner 0 ⇒ unmöglich

Masih Zoharian Esfahani $\boxed{6}$

A5 / C / I / $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1}}{-2}$

$x_1 = \frac{+1 + \sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ ✓

II / $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 28}}{-2}$ $\quad x_1 = 2 + \sqrt{11}$

$x_2 = 2 - \sqrt{11}$

$a_n = \frac{(2 + \sqrt{11})^n - (2 - \sqrt{11})^n}{2 - \sqrt{11}}$ ✓

III / $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4}}{-2}$ $\quad x_1 = -i \quad x_2 = i$

$a_n = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-2i}$ ✓

$i \Rightarrow$ gerade $\Rightarrow \frac{-1 - (-1)}{-2i} = 0$

$i \Rightarrow$ ungerade $\Rightarrow \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \Rightarrow$ wenn $n = 1, 5, 9, \ldots \Rightarrow \frac{i - (-i)}{2i} = 1$

wenn $n = 3, 7, 11 \Rightarrow \frac{-i - i}{2i} = -1$ ✓