Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Schleifer, Max

StudOn-Kennung: an66iboj

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

7, 8, 9, (alk)

9/10*30=27

A7

a) (i) $a_n = \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin(n)}{n^2}$

$$\frac{5+1+\frac{1}{n}}{n^2} \geq a_n \geq \frac{5-1-\frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} \geq a_n \geq \frac{4-\frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty}}{\Leftrightarrow} 0 \geq \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(ii) $b_n = \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}$

$$\frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\cdot 1 - 2\cdot(-1)}{6+(-1)-(1)} \geq b_n \geq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{5\cdot(-1)-2\cdot(1)}{6+1-(-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{7}{4} \geq b_n \geq \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{-7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+\frac{1}{n})}\cdot\frac{7}{4} \geq b_n \geq \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+\frac{1}{n})}\cdot -\frac{7}{8}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\lim_{n\to\infty}} 0 \geq \lim_{n\to\infty} b_n \geq 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) (i) $a_n = ((-1)^n + 1)n$

$$M_{HP} = \{0, +\infty\}$$

$$\liminf_n a_n = 0$$

$$\limsup_n a_n = +\infty$$

(ii) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

$$M_{HP} = \{-1, 1\}$$

$$\liminf_n a_n = -1$$

$$\limsup_n a_n = 1$$

(iii)
$$a_n = \begin{cases} -n & \text{, falls } n \leq 17 \\ n & \text{, falls } n > 17 \end{cases}$$

$M_{HP} = \{+\infty\}$

$\limsup_n a_n = +\infty = \liminf_n a_n$

(iv) $a_n = q^n$ $\quad q \in \mathbb{R}$ beliebig

$$M_{HP} = \begin{cases} \{0\} \text{ für } 1 > q \geq 0 & \Rightarrow \limsup_n a_n = \liminf_n a_n = 0 \\ \{+\infty\} \text{ für } q > 1 & \Rightarrow \limsup_n a_n = \liminf_n a_n = +\infty \\ \{1\} \text{ für } q = 1 & \Rightarrow \limsup_n a_n = \liminf_n a_n = 1 \\ \{-\infty, +\infty\} \text{ für } q < 1 & \Rightarrow \limsup_n a_n = +\infty, \ \liminf_n a_n = -\infty \end{cases}$$

A8

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k\left(\frac{2}{k}+1\right)}$

$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k\left(\frac{2}{k}+1\right)} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\frac{2}{k}+1} = 1$ ✓ ← Divergenzkriterium

↳ Reihe ist divergent, ✓ da $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\frac{2}{k}+1} \neq 0$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k\left(1-\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(3+\frac{2}{k}\right)}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\cancel{\lim \rightsquigarrow 0 \quad \infty}\right)$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{k}}^{\,\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \sqrt{\frac{k\left(1-\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(3+2/k\right)}}$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 0 < 1 \Rightarrow$ Reihe ist absolut konvergent

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin k}{k^k}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|} = \frac{\overbrace{\sqrt[k]{|\sin k|}}^{\in[0,1]}}{k}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow$ Reihe abs. konvergent

d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \overset{k=4}{\sum_{k=1}^{\infty}} \frac{\sqrt{k-1}}{2^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \left[0 + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sqrt{k-1}}{2^k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \left[0 + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^{k+3}}}\right]$$

du kannst eine addition nic

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \frac{\sqrt{k+2}}{2^{k+3}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \frac{\sqrt{k+2}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2^k}\right)$$

warum ist das hi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k-1}}{2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{2^k}$$

$$\hookrightarrow \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{\sqrt{k+3}}{2^{k+1}}}{\frac{\sqrt{k+2}}{2^k}} = \frac{2^k \sqrt{k+3}}{2\cdot 2^k \sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k+3}}{2\sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k(1+3/k)}}{2\sqrt{k(1+2/k)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+3/k}}{2\sqrt{1+2/k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k =: \frac{2\sqrt{k-1}}{2^k}$$

$$\hookrightarrow \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{\frac{2\sqrt{k}}{2^{k+1}}}{\frac{2\sqrt{k-1}}{2^k}} = \frac{2\sqrt{k}\,2^k}{2\cdot 2\sqrt{k-1}\,2^k} = \frac{2\sqrt{k}}{2\cdot 2\sqrt{k-1}} = \frac{1}{2\cdot 2\sqrt{1-\frac{1}{k}}}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$\to \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} \overset{k\to\infty}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 < 1$$

→ Die Reihe ist absolut konvergent.

A9

a) (i)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cancel{k}\left(4+\frac{3}{k}\right)}{\cancel{k}\left(3k-\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+\frac{3}{k}}{3k-4/k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

mit Divergenzkriterium
⇒ keine Aussage treffbar

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k =: \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$$

$$a_k = \frac{4k+3}{3k^2-4} = \frac{4+\frac{3}{k}}{3k-4/k} \geq \frac{4}{3k-\frac{4}{k}} \geq \frac{4}{3k} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{+1}$$

divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow$ die harmonische Reihe ist eine Minorante von a_k. Somit ist a_k auch divergent.

(ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Divergenzkriterium:

$$b_k = \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{k^2\left(4+\frac{3}{k^2}\right)}{k^2\left(3-\frac{4}{k^2}\right)} = \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4}{3}$$

$\lim_{k\to\infty} b_k = \frac{4}{3} \neq 0$, somit ist die Reihe divergent

(iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} =: \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonische Reihe) divergent ist, ist nach dem Minoranten-Kriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent

b) (i)

1. $a_n = \sin n$ hat keinen HP, da n für $n \in \mathbb{N}$ niemals π oder ein ganzzahliges Vielfaches davon erreichen wird.

2. $b_n = \sin(n^2)$ wie bei 1. n^2 wird für $n \in \mathbb{N}$ niemals π oder ein ganzzahliges Vielfaches davon erreichen.

3. $c_n = \frac{\sin n}{n}$ hat min. einen HP, da $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$

(ii) Folge $c_n = \frac{\sin n}{n}$ hat genau 1 HP $M_{HP} = \{0\}$