Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Riegel, Laura

StudOn-Kennung: iz09urik

Blatt-Nummer: 6

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17, ______

13/20*30 = 19.5

A15 a) Die Höhe wird durch Summe der Kantenlängen beschrieben

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$: harmonische Reihe, divergiert gegen unendlich!

$\Rightarrow$ der Turm wird unendlich hoch!

b) Annahme: alle nicht sichtbaren Teile werden auch angestrichen:

$$6 \cdot (\tfrac{1}{1})^2 + 6 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + 6 \cdot (\tfrac{1}{3})^2 + \dots + 6 \cdot (\tfrac{1}{n})^2$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \Rightarrow 6 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 6 \frac{\pi^2}{6} = \pi^2$$

nicht sichtbare flächen werden auch nicht

- Ja endlich viel Farbe reicht aus, nämlich ~~[illegible]~~ die Menge, die man für π^2 (Maßeinheit der Kantenlänge)^2 Fläche braucht!

c) Volumen Würfel: seitenlänge hoch 3

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ auf Konvergenz überprüfen:

Quotientenkriterium: $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k^3}{(k+1)^3}\right| = \left|\frac{k^3}{k^3+2k^2+4k+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k^3}}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{1+0+0+0} = 1$$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \Rightarrow$ divergent

beim quotientenkriterium kann man aus =1 nur folgern, wenn

$\Rightarrow$ Es ist nicht möglich aus endlich viel Beton den Turm zu bauen

d) Die Seitenlänge muss so definiert werden, dass $\sum_{k=1}^{n} (s_k)^3$, wobei s_k die ~~[illegible]~~ Seitenlängen beschreibt

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, $(s_k)^3 = \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow s_k = \sqrt[3]{\frac{1}{k^2}}$,

die Farbe würde sich dann durch $6 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}$ berechnen.

das konvergiert auch:1/(k^4/3)expon

$\boxed{A16}$ a) i) $f(x) := x^3 + \sin x - \cos x$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$

1. $f(0) = 0 + 0 - 1 = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + 1 - 0 = 1 + (\frac{\pi}{2})^3 > 1$

$\Rightarrow$ nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat $f(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ mind. 1 Nullstelle

2. Monotonie: (durch Ableiten) $f'(x) = \underbrace{3x^2}_{>0} + \underbrace{\cos(x)}_{>0,} + \underbrace{\sin(x)}_{>0,} > 0$, auf $(0, \frac{\pi}{2})$

auf $(0, \frac{\pi}{2})$

ii) $f(x) := e^{-x} \cos(\pi x) - \frac{1}{2}$ auf $(0, \frac{1}{2})$

1. $f(0) = e^0 \cos(\pi \cdot 0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ nach Bolzano NSS mind 1 Nst

2. Monotonie: $f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\text{streng monoton fallend}} \cdot \cos(\pi x) - \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ Periode $\hat{=} 2$, fällt streng monoton bis 1 (also auch bis $\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ streng monoton fallend

beide Funktionen haben nach dem Nullstellensatz und durch ihr Monotonieverhalten genau eine Nullstelle

b) $a < b$, $f: [a, b]$ stetig, $f(a) = b$ $f(b) = a$

Hilfsfunktion $g(x) = f(x) - x$ (Funktion muss Nullstelle haben)

$\hookrightarrow$ stetig $\hookrightarrow$ stetig

$g(x)$ ist stetig, zeige $g(x)$ hat eine Nst:

$\Rightarrow g(a) = f(a) - a = b - a > 0$

$g(b) = f(b) - b = a - b < 0$

$\Rightarrow$ es gibt eine Nullstelle: $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein x_* für

$f(x_*) = x_*$

c)

$\boxed{A17}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} 1 = 2$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \ldots \sin nx}{x^n} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{x} \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{x} =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x}} = \frac{5}{6}$

iv)

v) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \sin x \cos x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi \overbrace{\frac{\sin}{x}}^{\to 1} \underbrace{\cos x}_{\to \cos(0) = 1}\right) = \cos(\pi) = -1$