Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Vuctovic Almir

StudOn-Kennung: la82cyxy

Blatt-Nummer: 6

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17, ______

19/20*30=28.5

/15 1a82cyxy, Amir Vucedbic

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

b)
$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot 4 + \underbrace{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{1}{k^2} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}} =$$

duplikation?

$$= \left(5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 5 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (aus Vorlesung)}$$

$$0 = 5 + 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 5 + 4\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 1 + \frac{4\pi^2}{6}$$

man braucht um konvergenz zu zeigen ni

A: Da er kann mit endlich viel Farbe $\left(1 + \frac{4\pi^2}{6}\right)$ angestrichen werden

c) $V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{k^3}$ konvergiert auch

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ konvergent für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \cdot 5 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{\tilde{k}=2}^{\infty} \frac{1}{\tilde{k}} =$$

$$= 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{divergent}$$

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{konvergent da } \tfrac{1}{2} > 0,\ \alpha = \tfrac{1}{2}$$

A: Mit $W_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ kann man einen massiven Turm konstruieren, der unendlich viel Farbe aber endlich viel Beton benötigt

1a82cyxy, Almir Vucedolic

A 16 a) I) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$

Bolzano: neg. Wert, pos. Wert, Stetigkeit => mind. 1 Nullstelle

verknüpft mit Monotonie → genau 1 Nullstelle

Stetigkeit: $\sin x$ stetig, $\cos x$ stetig, x^3 stetig => $f(x)$ stetig

Werte: $f(0) = 0 + \sin(0) - \cos(0) = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{8} + 1 - 0 > 0$

Monotonie: 1) x^3 ist streng monoton wachsend, $\sin x$ ist im Intervall monoton wachsend, $\cos x$ ist monoton fallend, wird jedoch abgezogen =>

$-\cos x$ ist monoton wachsend

=> $f(x)$ ist monoton wachsend

2) $f'(x) = 3x^2 + \underbrace{\cos x}_{>0} + \underbrace{\sin x}_{\geq 0} > 0$

im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$

=> f monoton wachsend

=> $f(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle

II $f(x) = e^{-x} \cdot \cos \pi x - \frac{1}{2}$ auf $(0, \frac{1}{2})$

$f(x)$ stetig, da e^{-x} stetig, $\cos x$ stetig

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ => mind. 1 Nullstelle

1a82cyxy, Amir Vuredbic

Monotonie: e^{-x} monoton fallend, $\cos \pi x$ auf $(0, \frac{1}{2})$ monoton fallend

=> $f(x)$ monoton fallend

=> genau 1 Nullstelle auf $(0, \frac{1}{2})$

b) $a < b$ $\quad f: [a, b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(a) = b$ $\quad f(b) = a$

Fixpunkt muss auf $g(x) = x$ liegen

$f(a)$ und $f(b)$ sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden $g(x)$

=> ein Wert liegt oberhalb der andere oberhalb

=> aufgrund von Stetigkeit muss $g(x)$ geschnitten werden

c) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum/Minimum an

$f: D_f \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$ auf $D_f := \{11, 17\} \cup ([-5, 5] \setminus (-1, 1))$

f stetig, da Verkettung stetiger Funktionen e^{-x^2} und $\sin x$

Kompakte Menge: abgeschlossen und beschränkt

-> da kein $\pm\infty$ in der Menge vorkommt

=> f ist stetig, D ist kompakt => Minimum/Maximum existieren

1a82cyxy, Amir Vucedolic

1417

I) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin x}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\right)^{-1}=2$

II $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\ldots\cdot\sin nx}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2}\cdots\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{n}=n!$

III) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 6x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}\right)^{-1}=$

$=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

IV $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{-x}\right)^{-1}=$

$=\left(2+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{-x}\right)^{-1}=\left(2-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{\frac{x}{2}}}_{0}\right)^{-1}=\frac{1}{2}$

V $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\cdot\sin x\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\pi\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)=$

$=\cos\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\pi\cdot\cos x\right)=\cos\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos x\,\pi\right)=\cos(\pi)=-1$