PDF!!!!!!

Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC1

Name, Vorname: Rück, Julia

StudOn-Kennung: cy06leco

Blatt-Nummer: 02

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ______

17/21 *30=24

cy06leco
Julia Rück

A4) $a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \quad a_n \in (0,4)$

I.A $(n=1)$: $a_1 = 1 \in (0,4)$ ✓

I.S. $(n \mapsto n+1)$: Es gelte $a_n \in [0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ($\hat{=}$ I.V)

z.z: $a_{n+1} \in [-1,1]$

$$a_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2} a_n}_{\in(0,2)} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\in(0,2)} \Rightarrow \in (0,4)$$

b) $a_{n+1} - a_n > 0$, bei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} - a_n = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2} a_n}_{\in(-2,0)} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\in(0,2)}}$$

$\rightarrow \in (0,4) \geq 0$

$\hookrightarrow a_n$ ist monoton wachsend

c) Weil (a_n) ein Supremum besitzt und monoton wächst, existiert ein Grenzwert.

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a} = \underbrace{\frac{1}{2} a_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}a} + \underbrace{\sqrt{a_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{a}} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2} a = \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{4} a^2 = a \qquad (a_1 = 0)$$

$\hookrightarrow$ ungültig, weil $a_n \in (0,4)$

$$\frac{1}{4} a^2 - a = 0$$

$$a\left(\frac{1}{4} a - 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{4} a = 1$$

$$\underline{\underline{a = 4}}$$

(45)

cyoGlero
Julia P.

I.A: $(n=0)$

$$a_0 = \frac{x^0 - x^0}{x_1 - x_2} = \frac{0}{x_1 - x_2} = 0 \checkmark \; ; \; \frac{x_1^1 - x_2^1}{x_1 - x_2} = 1 \checkmark \checkmark$$

I.S. $(n \mapsto n+1)$ Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad (\hat{=} \text{ I.V.}) \checkmark$$

Es muss auch für a_(n-1) gelten

z.z.:

$$a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

dazu:

$$a_{n+1} = \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \checkmark$$

$$= \frac{1 \cdot x_1^{n-1}}{x_1 - x_2} \underbrace{(\alpha x_1 + \beta)}_{x_1^2} - \underbrace{(\alpha x_2 + \beta)}_{x_2^2} \frac{x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \checkmark \; \square \checkmark$$

Zwischenschritte!

b) (i) ja, dann sind x_1 und x_2 komplex ✓

(ii) nein, denn dann ist $x_1 = x_2$ und dann würde man durch Null teilen. ✓

c) (i) $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)}{\sqrt{5}}$$

Wenn, dann (1/2)^n

(ii) $\alpha = 4$, $\beta = 7$

$$x^2 = 4x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{11}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{11}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{(2 + \sqrt{11})^n - (2 - \sqrt{11})^n}{2\sqrt{11}} \checkmark$$

iii) $\alpha = 0$, $\beta = -1$

$x^2 = 0 \cdot x - 1$

$x^2 = -1$

$x_{1/2} = \pm i$

?

$i^n - (-i)^n \qquad i^n(1 - (-1)^n) \qquad \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$

A6 a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim \dfrac{\cancel{n^3}(\underbrace{2}_{\to 2} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0})}{\cancel{n^3}(\underbrace{3}_{\to 3} + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0})} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5+2n)^3}{(1+n)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5+2n)(5+2n)^2}{(1+n)(1+n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5+2n)(25+20n+4n^2)}{(1+n)(1+2n+n^2)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{125+100n+20n^2+50n+40n^2+8n^3}{1+2n+n^2+n+2n^2+n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{125+150n+60n^2+8n^3}{1+3n+3n^2+n^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}(\overbrace{\frac{125}{n}+\frac{150}{n^2}+\frac{60}{n}}^{\to 0}+8)}{\cancel{n^3}(\underbrace{\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n}}_{\to 0}+1)} = \underline{\underline{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1-(\cancel{2n^2}+9n)}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overbrace{-8n+1}^{\cancel{n}(-8+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0})}}{\cancel{n}(\underbrace{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\to\sqrt{2}} + \underbrace{\sqrt{2+\frac{9}{n}}}_{\to\sqrt{2}})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

-2sqrt(2)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6-(n^6+n^2+1)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\overbrace{(1+\frac{1}{n^2})}^{\to 1}}{\underbrace{(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}})}_{\to 2}} = 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3})(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3})}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4(1+\frac{1}{n})}+\sqrt[4]{n^4(1-\frac{1}{n})}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overbrace{(n^4+n^3)-(n^4-n^3)}^{2\cancel{n^3}}}{\cancel{n}((\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1})^{\frac{1}{4}}+(\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{\to 1})^{\frac{1}{4}})\cdot \cancel{n^2}(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{\to 1})}$

$= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+2} - \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2} = \dfrac{n^2}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = -\dfrac{1}{1+\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}} = -1$