Sitzung 16

Bildmodelle und Zufallsvariablen (4)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 22. Juni 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Fragen

Bildmodelle und Zufallsvariablen

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Nutzen des Begriffs Zufallsvariable.
2. Sie lernen verschiedenen Verteilungen kennen und wissen, welche Situationen diese Verteilungen angewendet werden können. z.B.: Chi^2
3. Sie können erklären, wie die Verteilungen in den Bildmodellen entstehen.
4. Sie kennen die Möglichkeiten, die Binomialverteilung zu approximieren.
5. Sie können mit den Begriffen gemeinsame Verteilung und Randverteilung arbeiten und den Zusammenhang zur stochastischen Unabhängigkeit herstellen.
6. Sie wissen, wie Summen von Zufallsvariablen gebildet werden und können die entstehenden Verteilungen mit Hilfe der Faltung berechnen.

X, Y = g(X), Y=a+bXF_Y(y) =

Gekoppelte Modelle und zurück

Gemeinsame Verteilung eines n-stufigen Modells ist allgemeine gegeben als:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2^1(x_1; x_2) f_3^2(x_1, x_2; x_3) \cdots f_n^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; x_n).$$

Einzeldichten

Wie können nun die Dichten f_i der einzelnen, dazu betrachteten ZV X_i berechnet werden?

Definition 6.2

Die Übergangsdichten

$$f_i^{i-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}; y_i) = P(Y_i = y_1 | Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

heißen **bedingte Dichten.** Die zugehörigen Übergangs-W-Maße heißen **bedingte Verteilungen**. Es wird auch $f^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ bzw. $P^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ geschrieben.

Definition 6.2

Die Übergangsdichten

$$f_i^{i-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}; y_i) = P(Y_i = y_1 | Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

heißen **bedingte Dichten.** Die zugehörigen Übergangs-W-Maße heißen **bedingte Verteilungen**. Es wird auch $f^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ bzw. $P^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ geschrieben.

Definition 6.2

Die Übergangsdichten

$$f_i^{i-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}; y_i) = P(Y_i = y_1 | Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

heißen **bedingte Dichten.** Die zugehörigen Übergangs-W-Maße heißen **bedingte Verteilungen**. Es wird auch $f^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ bzw. $P^{Y_i|(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}$ geschrieben.

Selbststudium

Fragen

1. Wie können aus einer gegebenen gemeinsamen Dichte $f^{(Y_1,\ldots,Y_n)}$ rekursiv die Übergangsdichten

$$f_i^{i-1}(y_1,\ldots,y_{i-1};y_i) \quad (i=1,\ldots,n)$$

berechnet werden.

f^(Y_1,...,Y_n) = prod^n_{i=1} f^(i-1)_i(y_1,...y_i-1,y_i)f^(Y_i)(y_i) = \int...\i

Nochmal Erinnerung

- Berechnung der gemeinsamen Dichte aus den Übergangsdichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2^1(x_1; x_2) f_3^2(x_1, x_2; x_3) \cdots f_n^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n).$$

- **bedingte Dichten**

$$f_i^{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}; y_i) = P(Y_i = y_1 | Y_1 = y_1, \dots, Y_{i-1} = y_{i-1})$$

und f^(Y_i) (y_i)= \int...\int\int...\int f(y_1,...,y_n) dy_1 dy_i-1 dy_i+1...dy__n

Satz 6.3

Jede gemeinsame Verteilung $P^{(Y_1,\dots,Y_n)}$ mit R-Dichte $f^{(Y_1,\dots,Y_n)}$ lässt sich als Koppelungsmodell mit der R-Dichte

$$f^{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1,\dots,y_n) = f_1(y_1) f_2^1(y_1;y_2)\cdots f_n^{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1};y_n)$$

darstellen. Dazu werden die Randdichten

$$f^{(Y_1,\dots,Y_{n-1})}, f^{(Y_1,\dots,Y_{n-2})}, \dots, f^{(Y_1,Y_2)}, f^{(Y_1)} = f_1$$

durch Integration über $y_n, y_{n-1}, \dots, y_2$ berechnet und es ergibt sich daraus

$$f_i^{i-1}(y_1,\dots,y_n) = \frac{f^{(Y_1,\dots,Y_i)}(y_1,\dots,y_i)}{f^{(Y_1,\dots,Y_{i-1})}(y_1,\dots,y_{i-1})}. \tag{1}$$

Satz 6.3

Jede gemeinsame Verteilung $P^{(Y_1,\ldots,Y_n)}$ mit R-Dichte $f^{(Y_1,\ldots,Y_n)}$ lässt sich als Koppelungsmodell mit der R-Dichte

$$f^{(Y_1,\ldots,Y_n)}(y_1,\ldots,y_n) = f_1(y_1) f_2^1(y_1;y_2)\cdots f_n^{n-1}(y_1,\ldots,y_{n-1};y_n)$$

darstellen. Dazu werden die Randdichten

$$f^{(Y_1,\ldots,Y_{n-1})}, f^{(Y_1,\ldots,Y_{n-2})},\ldots, f^{(Y_1,Y_2)}, f^{(Y_1)} = f_1$$

durch Integration über $y_n, y_{n-1},\ldots,y_2$ berechnet und es ergibt sich daraus

$$f_i^{i-1}(y_1,\ldots,y_n) = \frac{f^{(Y_1,\ldots,Y_i)}(y_1,\ldots,y_i)}{f^{(Y_1,\ldots,Y_{i-1})}(y_1,\ldots,y_{i-1})}. \tag{1}$$

Selbststudium

Fragen

2. Gegeben sei die gemeinsame Dichte $f^{(Z_1,Z_2)}$ zweier stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen Z_1 und Z_2. Was können Sie daraus über den Träger $\operatorname{supp}\left(f^{(Z_1,Z_2)}\right)$ von $f^{(Z_1,Z_2)}$ schließen.
   Hinweis: $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}}$.

support ist ein rechteck

Definition 6.4

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ heißen **stochastisch unabhängig** wenn für die gemeinsame Verteilung die Produktformel

$$P^{Y_1,\ldots,Y_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P^{Y_1}(A_1) \cdots P^{Y_n}(A_n) \tag{2}$$

für beliebige Ereignisse $A_i \in \Omega_i$ gilt.

Folgerung 6.5

Besitzen die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ R-Dichten, dann ist die stochastische Unabhängigkeit äquivalent dazu, dass die gemeinsame Verteilung eine Produktdichte besitzt.

Definition 6.4

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ heißen **stochastisch unabhängig** wenn für die gemeinsame Verteilung die Produktformel

$$P^{Y_1,\ldots,Y_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = P^{Y_1}(A_1) \cdots P^{Y_n}(A_n) \tag{2}$$

für beliebige Ereignisse $A_i \in \Omega_i$ gilt.

Folgerung 6.5

Besitzen die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i : \Omega \to \Omega_i$ R-Dichten, dann ist die stochastische Unabhängigkeit äquivalent dazu, dass die gemeinsame Verteilung eine Produktdichte besitzt.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:**
`https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und
`https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)