

Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben  
IngMathC2

Name, Vorname: Pöhl, Celine

StudOn-Kennung: ul14yguf

Blatt-Nummer: 3

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A 7, A 8, A 9, \_\_\_\_\_

## A7

Grenzwert berechnen

a) (i)  $a_n = \frac{5 + (-1)^n + \frac{1}{n} \sin n}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sin n \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2}$$

$$= \frac{5 + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2} = 0$$

(ii)  $b_n = \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \frac{5 \sin(2n) - 2 \sin(3n)}{6 + \cos(4n) - \cos(5n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{n^2 + 1}}_0 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{-5;5}{5 \sin(2n)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{-2;2}{2 \sin(3n)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{-1;1}{\cos(4n)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{-1;1}{\cos(5n)}}$$

→ beschränkt zwischen  $-\frac{7}{8}$  und  $\frac{7}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

b) (i)  $a_n = ((-1)^n + 1) n$

$$HP = \{0; +\infty\}$$

$$\limsup a_n = +\infty$$

$$\liminf a_n = 0$$

(ii)  $a_n = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{0, 1, 0, -1} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}_{1, 0, -1, 0}$

$$HP = \{1; -1\}$$

$$\limsup a_n = 1$$

$$\liminf a_n = -1$$



$$(iii) a_n = \begin{cases} -n & \text{falls } n \leq 17 \\ n & \text{falls } n > 17 \end{cases}$$

Pöhl, Celine

$$HP = \{ +\infty \}$$

$$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$$

$$(iv) a_n = q^n \quad q \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\text{für } q > 1 \quad HP = \{ +\infty \}$$

$$\liminf a_n / \limsup a_n = +\infty$$

$$\text{für } q < -1 \quad HP = \{ -\infty; +\infty \}$$

$$\limsup a_n = +\infty$$

$$\liminf a_n = -\infty$$

$$\text{für } -1 < q < 1 \quad HP = \{ 0 \}$$

$$\limsup a_n / \liminf a_n = 0$$

$$\text{für } q = -1 \quad HP = \{ -1; 1 \}$$

$$\limsup a_n = 1$$

$$\liminf a_n = -1$$

$$\text{für } q = 1 \quad HP = \{ 1 \}$$

$$\limsup a_n / \liminf a_n = 1$$



## A8 Konvergenz untersuchen

Celine  
Pohl

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$$

Divergenzkriterium

$$\frac{k}{2+k} = \frac{k}{k(\frac{2}{k}+1)} = \frac{1}{\frac{2}{k}+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

geht nicht gegen 0, also ist Reihe divergent

$$b) \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{k-1}{3k^2+2k} \right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^k$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}^k \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \sqrt{\frac{k \cdot (1 - \frac{1}{k})}{k^2 \cdot (3 + \frac{2}{k})}} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{k}}{3 + \frac{2}{k}}}_{\rightarrow \frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$\limsup < 1 \rightarrow$  Konvergiert

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{\sin k}{k^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{\sin k}}{k} = 0$$

$\limsup_{k \rightarrow \infty} < 1 \rightarrow$  Konvergent



$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k}$$

Online  
Pöhl

Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k}}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})}{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{Konvergent}$$



a)

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergiert

→ Minorantenkriterium → Reihe divergiert

$$(ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{k^2(4+\frac{3}{k^2})}{k^2(3-\frac{4}{k^2})} = \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = \frac{4}{3} \neq 0 \rightarrow \text{Divergenzkriterium}$$

→ Reihe divergiert

$$(iii) a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \sqrt{k} \leq k$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$$

↑  
divergiert

→ Minorantenkriterium: Reihe divergiert

b) Jede beschränkte Komplexe (reelle) Folge hat mind. einen HP in  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

i) ①  $\sin n \in [-1, 1] \rightarrow$  beschränkt  
 $\hookrightarrow$  mind. 1 HP

②  $\sin(n^2) \in [-1, 1] \rightarrow$  beschränkt  
 $\hookrightarrow$  mind. 1 HP

③  $\sin n \in [-1, 1] \rightarrow \frac{\sin n}{n} \in [-1, 1]$   
 $\rightarrow$  beschränkt  $\rightarrow$  mind. 1 HP

ii) ③ HP: 0