Sitzung 17

Bildmodelle und Zufallsvariablen (5)

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 26. Juni 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

Fragen

Ziel dieses Themas

1. Sie erkennen den Nutzen des Begriffs Zufallsvariable.
2. Sie lernen verschiedenen Verteilungen kennen und wissen, welche Situationen diese Verteilungen angewendet werden können.
3. Sie können erklären, wie die Verteilungen in den Bildmodellen entstehen.
4. Sie kennen die Möglichkeiten, die Binomialverteilung zu approximieren.
5. Sie können mit den Begriffen gemeinsame Verteilung und Randverteilung arbeiten und den Zusammenhang zur stochastischen Unabhängigkeit herstellen.
6. Sie wissen, wie Summen von Zufallsvariablen gebildet werden und können die entstehenden Verteilungen mit Hilfe der Faltung berechnen.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \dots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \dots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \ldots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.30

Sind die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch stochastisch unabhängig:

1. *Umstellungen von $Y_1, \dots, Y_n$, z.B. Y_3, Y_1, Y_5, Y_4, Y_2,*
2. *Teilmengen von $Y_1, \dots, Y_n$, z.B. Y_1, Y_3, Y_4,*
3. *disjunkte Gruppen von stoch. unabh. ZV, z.B. $Z_1 = (Y_1, Y_3)$, $Z_2 = (Y_4, Y_5)$,*
4. *messbare Funktionen von stoch.unabh. ZV, z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$, $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$.*

Außerdem gilt:

1. *Jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabh.*
2. *Sind $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ stoch.unabh. und sind $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$, Y_n stoch.unabh., dann sind auch $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig.*

Folgerung 6.31

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind stoch.unabh. genau dann, wenn die ZV $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$ stoch.unabh. sind.

Satz 6.32

(a) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ und gemeinsamer Z-Dichte $f^{(X,Y)}(x, y)$, dann besitzt $X + Y$ die Z-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{(X,Y)}(x, z - x), \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

(b) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und gemeinsamer R-Dichte $f^{(X,Y)}(x, y)$, dann besitzt $X + Y$ die R-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x, z - x)\, \mathrm{d}\, x, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Definition 6.33

Die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X und Y heißt **Faltung** der Einzelverteilungen und ist definiert als:

$$P^X * P^Y := P^{X+Y} \text{ und } f^X * f^Y := f^{X+Y}. \tag{3}$$

Satz 6.32

(a) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ und gemeinsamer $\mathbb{Z}$-Dichte $f^{(X,Y)}(x,y)$, dann besitzt $X+Y$ die $\mathbb{Z}$-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{(X,Y)}(x, z-x), \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

(b) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und gemeinsamer $\mathbb{R}$-Dichte $f^{(X,Y)}(x,y)$, dann besitzt $X+Y$ die $\mathbb{R}$-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x, z-x)\,\mathrm{d}\,x, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Definition 6.33

Die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X und Y heißt **Faltung** der Einzelverteilungen und ist definiert als:

$$P^X * P^Y := P^{X+Y} \text{ und } f^X * f^Y := f^{X+Y}. \tag{3}$$

Satz 6.32

(a) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ und gemeinsamer Z-Dichte $f^{(X,Y)}(x,y)$, dann besitzt $X+Y$ die Z-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{(X,Y)}(x, z-x), \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

(b) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und gemeinsamer R-Dichte $f^{(X,Y)}(x,y)$, dann besitzt $X+Y$ die R-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x, z-x) \,\mathrm{d}\, x, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Definition 6.33

Die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X und Y heißt **Faltung** der Einzelverteilungen und ist definiert als:

$$P^X * P^Y := P^{X+Y} \text{ und } f^X * f^Y := f^{X+Y}. \tag{3}$$

Satz 6.32

(a) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ und gemeinsamer Z-Dichte $f^{(X,Y)}(x, y)$, dann besitzt $X + Y$ die Z-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{(X,Y)}(x, z - x), \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

(b) *X und Y seien zwei ZV über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und gemeinsamer R-Dichte $f^{(X,Y)}(x, y)$, dann besitzt $X + Y$ die R-Dichte*

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{(X,Y)}(x, z - x) \,\mathrm{d}\, x, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Definition 6.33

Die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X und Y heißt **Faltung** der Einzelverteilungen und ist definiert als:

$$P^X * P^Y := P^{X+Y} \text{ und } f^X * f^Y := f^{X+Y}. \tag{3}$$

Folgerung 6.34

Für nicht-negative und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f^X und f^Y wird die Faltung nach folgender Formel berechnet:

(a) für Z-Dichten

$$f^{X+Y}(z) = \left(f^X * f^Y\right)(z) = \sum_{x=0}^{z} f^X(x) f^Y(z-x), \quad z \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

(b) für R-Dichten

$$f^{X+Y}(z) = \left(f^X * f^Y\right)(z) = \int_0^z f^X(x) f^Y(z-x) \, \mathrm{d}\, x, \quad z \geqslant 0. \tag{5}$$

Folgerung 6.34

Für nicht-negative und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f^X und f^Y wird die Faltung nach folgender Formel berechnet:

(a) für Z-Dichten

$$f^{X+Y}(z) = \left(f^X * f^Y\right)(z) = \sum_{x=0}^{z} f^X(x) f^Y(z-x), \quad z \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

(b) für R-Dichten

$$f^{X+Y}(z) = \left(f^X * f^Y\right)(z) = \int_0^z f^X(x) f^Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x, \quad z \geqslant 0. \tag{5}$$

Faltung von Binomialverteilungen

Die Binomialverteilung entspricht der Summenverteilung von n stoch. unabh. Bernoulli(p)-Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$. $B(n,p)$ ist die n-fache Faltung von $B(p)$-Verteilungen, d.h.:

$$B(n,p) = \underbrace{B(p) * \cdots * B(p)}_{n \text{ Faktoren}}. \tag{6}$$

Damit gilt

$$B(n+m,p) = B(n,p) * B(m,p). \tag{7}$$

Faltung von Poisson-Verteilungen

Wie aus Satz **??** bekannt ist, lässt sich die Poisson-Verteilung durch $B(n,p)$ mit $n \cdot p_n \to \lambda$ approximieren. Die Faltungsformel lautet

$$\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{8}$$

Faltung von Binomialverteilungen

Die Binomialverteilung entspricht der Summenverteilung von n stoch. unabh. Bernoulli(p)-Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$. $B(n,p)$ ist die n-fache Faltung von $B(p)$-Verteilungen, d.h.:

$$B(n,p) = \underbrace{B(p) * \cdots * B(p)}_{n \text{ Faktoren}}. \tag{6}$$

Damit gilt

$$B(n+m,p) = B(n,p) * B(m,p). \tag{7}$$

Faltung von Poisson-Verteilungen

Wie aus Satz **??** bekannt ist, lässt sich die Poisson-Verteilung durch $B(n,p)$ mit $n \cdot p_n \to \lambda$ approximieren. Die Faltungsformel lautet

$$\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{8}$$

Faltung von Binomialverteilungen

Die Binomialverteilung entspricht der Summenverteilung von n stoch. unabh. Bernoulli(p)-Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$. $B(n,p)$ ist die n-fache Faltung von $B(p)$-Verteilungen, d.h.:

$$B(n,p) = \underbrace{B(p) * \cdots * B(p)}_{n \text{ Faktoren}}. \tag{6}$$

Damit gilt

$$B(n+m,p) = B(n,p) * B(m,p). \tag{7}$$

Faltung von Poisson-Verteilungen

Wie aus Satz **??** bekannt ist, lässt sich die Poisson-Verteilung durch $B(n,p)$ mit $n \cdot p_n \to \lambda$ approximieren. Die Faltungsformel lautet

$$\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{8}$$

Faltung von geometrischen Verteilungen

Betrachten wir eine Folge von stoch.unabh. Bernoulli(p)-Versuchen, so sind die jeweiligen Zwischenwartezeiten auf den nächsten Erfolg (Anzahl der Bernoulli(p)-Versuche, die notwendig sind, um den nächsten Erfolg zu erzielen) auch wieder stoch. unabh. und $\mathrm{Geo}^+(p)$-verteilt. Die Verteilung für die Wartezeit auf den r-ten Erfolg ergibt sich durch r-fache Faltung der $\mathrm{Geo}^+(p)$-Verteilung. Diese liefert die negative Binomialverteilung

$$\mathrm{Nb}^+(r,p) = \underbrace{\mathrm{Geo}^+(p) * \mathrm{Geo}^+(p) * \cdots * \mathrm{Geo}^+(p)}_{r \text{ Faktoren}} \tag{9}$$

und somit auch

$$\mathrm{Nb}^+(r_1 + r_2, p) = \mathrm{Nb}^+(r_1, p) * \mathrm{Nb}^+(r_2, p). \tag{10}$$

Faltung von geometrischen Verteilungen

Betrachten wir eine Folge von stoch.unabh. Bernoulli(p)-Versuchen, so sind die jeweiligen Zwischenwartezeiten auf den nächsten Erfolg (Anzahl der Bernoulli(p)-Versuche, die notwendig sind, um den nächsten Erfolg zu erzielen) auch wieder stoch. unabh. und $\mathrm{Geo}^+(p)$-verteilt. Die Verteilung für die Wartezeit auf den r-ten Erfolg ergibt sich durch r-fache Faltung der $\mathrm{Geo}^+(p)$-Verteilung. Diese liefert die negative Binomialverteilung

$$\mathrm{Nb}^+(r,p) = \underbrace{\mathrm{Geo}^+(p) * \mathrm{Geo}^+(p) * \cdots * \mathrm{Geo}^+(p)}_{r \text{ Faktoren}} \tag{9}$$

und somit auch

$$\mathrm{Nb}^+(r_1 + r_2, p) = \mathrm{Nb}^+(r_1, p) * \mathrm{Nb}^+(r_2, p). \tag{10}$$

Faltung der Normalverteilung

Die Faltung zweier beliebiger Normalverteilungen ergibt wieder eine Normalverteilung

$$\mathcal{N}\left(a,\sigma^2\right) * \mathcal{N}\left(b,\tau^2\right) = \mathcal{N}\left(a+b,\sigma^2+\tau^2\right). \tag{11}$$

Es addieren sich die Mittelwerte a,b und die Quadrate der Streuungen σ,τ (siehe (**??**)). Dies ist der Grund für die Notation $\mathcal{N}\left(a,\sigma^2\right)$.

Faltung der Normalverteilung

Die Faltung zweier beliebiger Normalverteilungen ergibt wieder eine Normalverteilung

$$\mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right) * \mathcal{N}\left(b, \tau^2\right) = \mathcal{N}\left(a+b, \sigma^2+\tau^2\right). \tag{11}$$

Es addieren sich die Mittelwerte a,b und die Quadrate der Streuungen σ,τ (siehe (**??**)). Dies ist der Grund für die Notation $\mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right)$.

Faltung von Gamma-Verteilungen

Die Faltung von zwei Gamma-Verteilungen mit gleichem Parameter α ergibt

$$\Gamma_{\alpha,\mu} * \Gamma_{\alpha,\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu+\nu}. \tag{12}$$

Bemerkung

Es gelten die folgenden Spezialfälle:

$$\mathrm{Exp}(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1} \tag{13}$$

$$\chi_1^2 = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Folgerung 6.35

Es gilt mit der obigen Bemerkung:

$$\Gamma_{\alpha,n} = \underbrace{\mathrm{Exp}(\alpha) * \mathrm{Exp}(\alpha) * \cdots * \mathrm{Exp}(\alpha)}_{n \text{ Faktoren}} \tag{15}$$

$$\chi_n^2 := \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = \underbrace{\chi_1^2 * \chi_1^2 * \cdots * \chi_1^2}_{n \text{ Faktoren}} \tag{16}$$

Faltung von Gamma-Verteilungen

Die Faltung von zwei Gamma-Verteilungen mit gleichem Parameter α ergibt

$$\Gamma_{\alpha,\mu} * \Gamma_{\alpha,\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu+\nu}. \tag{12}$$

Bemerkung

Es gelten die folgenden Spezialfälle:

$$\mathrm{Exp}(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1} \tag{13}$$

$$\chi_1^2 = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Folgerung 6.35

Es gilt mit der obigen Bemerkung:

$$\Gamma_{\alpha,n} = \underbrace{\mathrm{Exp}(\alpha) * \mathrm{Exp}(\alpha) * \cdots * \mathrm{Exp}(\alpha)}_{n \text{ Faktoren}} \tag{15}$$

$$\chi_n^2 := \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = \underbrace{\chi_1^2 * \chi_1^2 * \cdots * \chi_1^2}_{n \text{ Faktoren}} \tag{16}$$

Faltung von Gamma-Verteilungen

Die Faltung von zwei Gamma-Verteilungen mit gleichem Parameter α ergibt

$$\Gamma_{\alpha,\mu} * \Gamma_{\alpha,\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu+\nu}. \tag{12}$$

Bemerkung

Es gelten die folgenden Spezialfälle:

$$\text{Exp}(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1} \tag{13}$$

$$\chi_1^2 = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Folgerung 6.35

Es gilt mit der obigen Bemerkung:

$$\Gamma_{\alpha,n} = \underbrace{\text{Exp}(\alpha) * \text{Exp}(\alpha) * \cdots * \text{Exp}(\alpha)}_{n \text{ Faktoren}} \tag{15}$$

$$\chi_n^2 := \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = \underbrace{\chi_1^2 * \chi_1^2 * \cdots * \chi_1^2}_{n \text{ Faktoren}} \tag{16}$$

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 5.11
- Skript Kapitel 6.7

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)