Sitzung 10

Gekoppelte Modelle

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 25. Mai 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Fragen

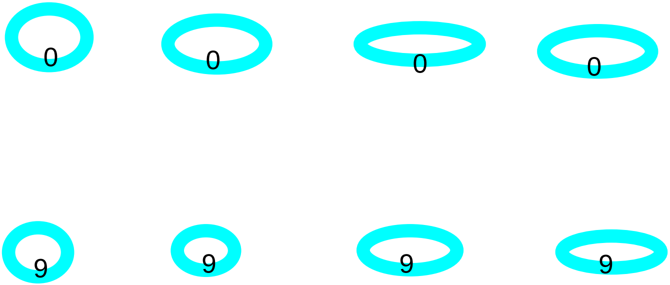
Gekoppelte Modelle

Ziel dieses Themas

1. Sie können gekoppelte Modelle beschreiben. unabh. kopplung
2. Sie kennen die Begriffe Übergangsdichte, Produktdichte und Markov-Koppelung. yes
3. Sie kennen die Unterschiede zwischen einer beliebigen, einer Markov- und einer unabhängigen Koppelung
4. Sie vertiefen Urnenmodelle.

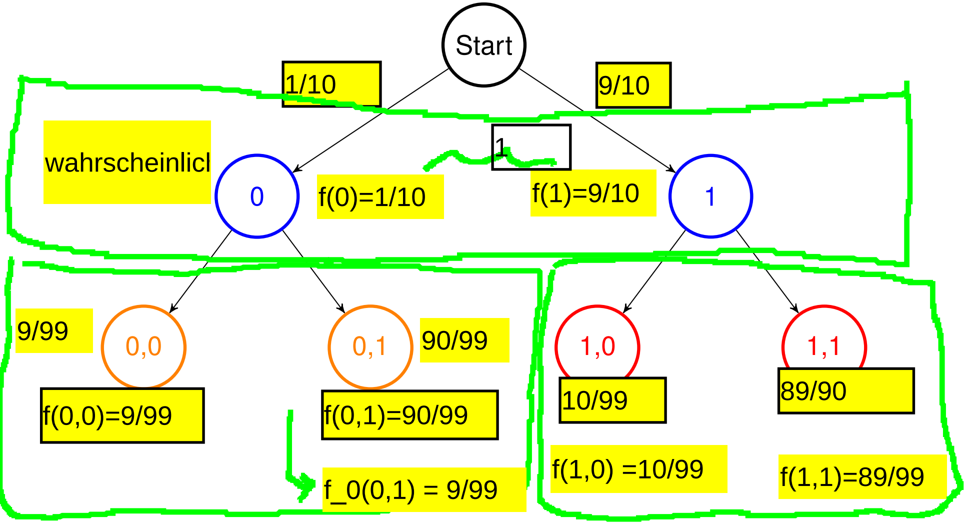
Aufgabe 19

Bei einer Lotterie werde eine vierstellige Losnummer auf die folgende Weise ermittelt: In einer Trommel befinden sich 40 mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 4 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 4 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer.



Qualitätskontrolle

Zur Kontrolle von 100 Werkstücken werden zwei zufällig entnommen und als **defekt** (0) oder **intakt** (1) eingestuft. 10 von 100 Werstücken sind defekt.



Mehrstufiger Versuch

Wird bei n-Merkmalen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit $\omega_i \in \Omega_i$ die Wahrscheinlichkeit der Merkmale stufenweise in Abhängigkeit von den vorangehenden Ergebnissen bewertet,

$$\begin{array}{ll} \omega_1 \mapsto f_1(\omega_1) & \text{eine Z-Dichte} \\ \omega_2 \mapsto f_2^1(\omega_1; \omega_2) & \text{eine von } \omega_1 \text{ abhängige Z-Dichte} \\ \omega_3 \mapsto f_3^2(\omega_1, \omega_2; \omega_3) & \text{eine von } (\omega_1, \omega_2) \text{ abhängige Z-Dichte} \\ \quad\vdots & \end{array}$$

dann wird der Gesamtversuch bewertet durch die Z-Dichte

$$(\omega_1, \ldots \omega_n) \mapsto f(\omega_1, \ldots, \omega_n) := f_1(\omega_1) f_2^1(\omega_1, \omega_2) \cdots f_n^{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}; \omega_n)\,. \quad (1)$$

Dass f eine Z-Dichte ist, folgt aus

also die wahrsch. innerhalb einer Dichte, mal

$$f_i^{i-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \omega i) \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\omega_i \in \Omega_i} f_i^{i-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \omega i) = 1. \quad (2)$$

Definition 5.1

1. Die Z-Dichten $f_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \omega_i)$ heißen **Übergangszähldichten** von $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1}$ nach Ω_i. Die jeweils vorausgehenden Beobachtungen $(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})$ heißen **Vorgeschichte zur Stufe** i. prior
2. Die durch (1) definierte Gesamtdichte f wird als **Koppelung** von $f_1, f_2^1, \dots, f_n^{n-1}$ bezeichnet. Schreibweise:

$$f = f_1 \otimes f_2^1 \otimes \cdots \otimes f_n^{n-1}. \tag{3}$$

jeweils von der vo

Bemerkung

Zu jeder **ÜZ-Dichte** f_i^{i-1} gehört ein von $(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})$ abhängiges W-Maß P_i^{i-1}. Es heißt **Übergangs-W-Maß**.
Das W-Maß zur Gesamt-Z-Dichte wird mit

$$P = P_1 \otimes P_2^1 \otimes \cdots \otimes P_n^{n-1}$$

bezeichnet.

Würfelspiele

Wenn ein/e Mitspieler/in noch keine Figur im Spielfeld hat, darf die/der betreffende drei Mal würfeln.
Welche Eigenschaften hat dieses Modell?

Omega = {1,..,6}x{1,..,6}x{1,..,6}3 StufenP(w_i)=1/6f_1(w_i) = 1/6f^1_2(w^1;

Definition 5.2 (Unabhängige Koppelung, Produktdichte)

Hängen bei einem mehrstufigen Versuch die ÜZ-Dichten oder ÜR-Dichten $f_2^1, \ldots, f_n^{n-1}$ nicht von den jeweiligen Vorgeschichten ab, so spricht man von **unabhängiger Koppelung**. Die Übergangsdichten sind dann einfache Z- bzw. R-Dichten $f_2, \ldots, f_n$. Die Dichte f des Gesamtversuchs ist dann das Produkt der Einzeldichten, also

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2) \cdots f_n(\omega_n). \tag{4}$$

f wird als **Produktdichte** bezeichnet.

2-Stufiges Experiment: x_1 \in [a,b], x_2\in[c,d]unabhängig gekoppelt. wie

Aufgabe: Der kleine Tobias

Der kleine Tobias nimmt zwei Schnuller auf einen Spaziergang mit. Bei Beginn des Spaziergangs hat er in der linken und der rechten Anoraktasche je einen, und er schreit nicht. Nach jeder ungeraden Spaziergangsminute greift er zufällig in eine der beiden Taschen und steckt, falls vorhanden, einen Schnuller in seinen Mund; falls keiner vorhanden ist, beginnt er zu schreien und er schreit weiter bis zum Ende des Spaziergangs. Nach jeder geraden Spaziergangsminute steckt er den Schnuller aus dem Mund, falls dort vorhanden, zufällig in eine der beiden Taschen zurück.

nur vom letzte zustand abh.

Definition 5.7 (Markow-Koppelung)

Hängen bei einem mehrstufigen Versuch die ÜZ- oder ÜR-Dichten nicht von der vollen Vorgeschichte ab, sondern nur vom letzten beobachteten Wert, so wird von einer **Markow-Koppelung** gesprochen. Die Folge der Beobachtungen heißt dann **Markow-Prozess**, im diskreten Fall auch **Markow-Kette**.

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 4
- Skript Kapitel 5
  (https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html)

Selbststudium

Weiterführende Fragen

1. Begründen Sie, dass die gemeinsame Dichte, die sich aus den Übergangsdichten zusammensetzt, ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
2. Wie ist der Begriff **absteigendes Produkt** erklärt und auf den Binomialkoeffizienten anwenden? Wie lässt sich damit der Binomialkoeffizient verallgemeinern?
3. Wiederholen Sie die Begriffe Variation und Kombination.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)