Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

6. August 2020

$$L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f^{X_i}(x_i,\mu,\sigma^2)$$

hier

$$L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n\prod_{i=1}^{n}\exp(\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2)$$

jetzt log-likelyhodd

$$\ln(L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2))=\frac{-n}{2}ln(2\pi)-\frac{-n}{2}ln(\sigma^2)+\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2$$

maximieren:

ableiten

$$\implies \frac{\partial}{\partial\mu}\ln(L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2))=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln(L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2))=-\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\implies \mu_{ML}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\implies \sigma_{ML}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_{ML})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

Hess($\ln(L(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2))$)

$$\begin{bmatrix} -n/\sigma^2 & -\frac{1}{\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2 & \end{bmatrix}$$

b) Schätzer für σ^2 Erwartungstreu machen.

$$\sigma_{ML}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2$$

$$\implies E(\sigma_{ML})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i^2)-E(\bar{x}^2)$$

wir wissen im allgemeinen

$$E(x_i^2)=Var(x_i)+(E(x_i))^2$$

daraus folgt auch

$$E(\bar{x}_i^2) = Var(\bar{x}) + (E(\bar{x}))^2 = \frac{1}{n^2} nVar(x_1) + \mu^2$$

aus $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - E(\bar{x}^2)$ und einsetzen folgt

$$E(\sigma_{ML}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\implies E(S^2) = \frac{n}{n-1}E(\sigma_{ML})$$

$$\implies E(S^2) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

a) Gesucht ist ein $\epsilon > 0$ mit

$$P(-\infty < \mu \leq \bar{x} + \epsilon) = 1 - \alpha$$

Punktschätzer für μ

$$T_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$x_1, \ldots, x_n$ sind $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$P(-\infty \leq \mu \leq \bar{x} + \epsilon) = P(\mu \leq \bar{x} + \epsilon) = P(\bar{x} - \mu \geq -\epsilon) = P(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \geq -\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/n}})$$

$$= P(Z \geq -\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/n}}) = 1 - P(Z < -\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/n}})$$

mit Standardisierter ZV $Z \sim N(0, 1)$

$$1 - P(Z < -\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma^2/n}}) = 1 - P(Z < -\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma})$$

$$= 1 - \Phi(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}) = 1 - \alpha$$

das $1 - \alpha$-Quantil $Z_{(1-\alpha)} = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$

$\implies \epsilon = Z_{(1-\alpha)}/\sqrt{n}$

$KI_\mu = (-\infty, X + \epsilon] = (-\infty, X + Z_{(1-\alpha)}/\sqrt{n}]$

$KI_\mu = (-\infty, \bar{x} + z_{0.95}\sigma/\sqrt{n}] = (-\infty, 2.648 + 1.644 \cdot 2/\sqrt{11}] = (-\infty, 3.640]$

zweiseitig

$$KI = [\bar{x} - z_{(1-\alpha/2)} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{(1-\alpha/2)} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$$

$$KI = [\bar{x} - z_{(0.975)} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{(0.975)} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$$

$$KI = [\bar{x} - z_{(0.975)} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{(0.975)} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$$

$$KI = [2.644 - 1.9600 \cdot 2/\sqrt{11}, 2.644 + 1.9600 \cdot 2/\sqrt{11}]$$

$$KI0[1.4663, 3.830]$$