Sitzung 6

Von Dichten und Verteilungsfunktionen

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 11. Mai 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)

https://www.studon.fau.de/vote/IOJK

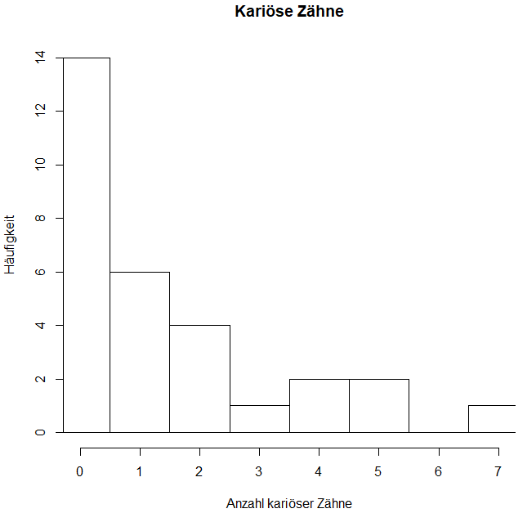
Fragen

Wahrscheinlichkeitsmaße

Ziel dieses Themas

1. Sie kennen die Begriffe Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion?
2. Sie wissen, warum es Zähldichten und stetige Dichten benötigt werden.
3. Sie können Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsdichten und Verteilungsfunktionen berechnen.
4. Sie kennen den Zusammenhang zwischen den Begriffen Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion
5. Sie kennen Beispiele für verschiedene Verteilungen

Zähne


Kariöse Zähne
Häufigkeit
0
2
4
6
8
10
12
14
0
1
2
3
4
5
6
7
Anzahl kariöser Zähne

Satz 4.1

Ω sei eine abzählbare Ergebnismenge und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. *Ist P ein W-Maß über $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f(\omega) = P(\{\omega\})$ für $\omega \in \Omega$, dann gilt:*

$$f(\omega) \geqslant 0 \quad (\omega \in \Omega), \qquad \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1 \tag{1}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega), \quad (A \in \mathcal{A}). \tag{2}$$

2. *Jede Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1) und (2) definiert ein W-Maß P auf $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft*

$$P(\{\omega\}) = f(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

*Die Abbildung f heißt **Zähldichte** oder **Z-Dichte** von P. Die Zuordnung zwischen P und f ist eineindeutig.*

Definition 4.2 (Binomial-Verteilung)

Gegeben sind $p, q \geqslant 0$ aus $\mathbb{R}$ mit $p + q = 1$ und $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$. Die Dichte

$$f(k) = b(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

über Ω heißt **Binomial-Z-Dichte**.
Das zugehörige W-Maß heißt **Binomial-Verteilung** und wird mit $B(n, p)$ bezeichnet.

Definition 4.6 (Empirische Verteilung)

Für einen Datensatz $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit Werten in $\Omega \subset \mathbb{R}$ heißt die relative Häufigkeit

$$A \mapsto h_n(A) := \frac{1}{n} \cdot (\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \in A)$$

empirische Verteilung von x.
Sie besitzt die Zähldichte

$$\hat{f}_n^X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i\}}(x)\,,\; x \in \Omega.$$

Definition 4.8

Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geqslant 0 \ (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1 \tag{3}$$

heißt **Riemann-Dichte** über $\mathbb{R}$ oder auch **stetige Dichte**.
Jede R-Dichte definiert eindeutig ein W-Maß p über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft

$$P\left((a,b]\right) = P\left([a,b]\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{4}$$

mit $(a \leqslant b)$ und $P\left(\{\omega\}\right) = 0$.

Satz 4.9 (Fortsetzungssatz)

Ist P auf einem geeigneten Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ festgelegt und auf $\mathcal{E}$ nicht-negativ, σ-additiv und normiert, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von P auf $\mathcal{A}$.

Empirische Verteilungsfunktion

Zur empirischen Verteilung eines Datensatzes $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gehört die **empirische Verteilungsfunktion**

$$\hat{F}_n^{\mathbf{x}}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Definition 4.16 (Verteilungsfunktion)

Ist P ein beliebiges W-Maß über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann heißt die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := P\left((-\infty, x]\right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

die **Verteilungsfunktion von P**. Es gilt

$$P\left((a, b]\right) = F(b) - F(a), \;\; a, b \in \mathbb{R},\; a \leqslant b. \tag{7}$$

Berechnung von Verteilungsfunktionen

Für ein W-Maß über $\mathbb{R}$ mit der Riemann-Dichte f gilt mit dieser Definition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{und} \quad P\left((a, b]\right) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Folgerung 4.18

Ist F die VF eines W-Maßes P über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, dann gilt:

1. F ist isoton, d. h. monoton nicht fallend.
2. F ist „normiert", d. h. F besitzt die Grenzwerte
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$
3. F ist rechtsseitig stetig.
4. F besitzt linksseitige Grenzwerte
$$F(x-) = \lim_{h \to 0^+} F(x - h) = P\left((-\infty, x)\right).$$
5. Für Einpunktmengen $\{x\}$ gilt:
$$P\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-).$$

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 3
- Skript Kapitel 4 (`https://www.studon.fau.de/file2897817_download.html`)

Weiterführende Fragen

1. Stellen Sie sich eine Liste der bis jetzt erwähnten Verteilungen zusammen. Führen dazu die Dichtefunktion, Verteilungsfunktion und mögliche Beispiele auf.
   Teilen Sie ihre Informationen im Wiki
   `https://www.studon.fau.de/wikiwpage_38248_3058524.html`
2. Zeigen Sie, dass für die geometrischen Verteilung die Aussage

   $$P(\mathbb{N}) = 1$$

   gilt.
3. Was bedeutet der Begriff **gemischte Verteilung**?

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr