Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

23. Juli 2020

X$\sim EXP(1)$ und $Y \sim EXP(2)$ verteilt.

$EX = \frac{1}{1}$ und $EY = \frac{1}{2}$ (logisch λ ist die Erwartete Zahl Ereignisse pro Zeitintervall.)

Die kovarianz ist definiert als $E((X-EX)(Y-EY))$ außerdem ist der Erwartungswert linear.

$U = 2X + 3Y$ und $V = 3X - Y$

Die Varianz der Exponentialverteilung ist bekannt: $Var(EXP(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}$. Außerdem ist die Varianz additiv, wenn die zugrundeliegenden ZV st.u:

$$Var(U) = Var(2X+3Y) \overset{X,Y\_st.u}{=} Var(2X) + Var(3Y) = 4Var(X) + 9Var(Y) = 4\frac{1}{1} + \frac{9}{2^2} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

ähnlich V

$$Var(V) = Var(3X) + Var(-1Y) = 9Var(X) + Var(Y) = 9 \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

Die Kovarianz ist definiert als

$$Kov(U,V) = EUV - EU \cdot EV$$

Die Erwartungswerte sind linear

$$EU = E(2X+3Y) = 2EX + 3EY = \frac{2}{1} + 3\frac{1}{2}$$

$$EV = E(3X - Y) = 3EX - EY = \frac{3}{1} - \frac{1}{2}$$

$$EUV = E((2X+3Y)(3X-Y)) = E(6X^2 + 7XY - 3Y^2) \overset{additivitaet}{=} 6EX^2 + \underbrace{7EXEY}_{X,Y,st.u} - 3EY^2$$

Wir benötigen also

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^X(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 1e^{-1x}dx = [-x^2e^{-1x}]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-1x}dx = [-x^2e^{-1x}]_0^\infty - ([2xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-1x}dx)$$

$$\underbrace{[-x^2e^{-1x}]_0^\infty}_{=0} - (\underbrace{[2xe^{-x}]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty 2e^{-1x}dx}_{[-2e^{-x}]_0^\infty = -2}) = 2$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f^Y(y)dy = \int_0^\infty y^2 2e^{-2y}dy =$$

$$2([\frac{1}{-2}y^2e^{-2y}]_0^\infty + \int_0^\infty ye^{-2y}dy = 2([\frac{1}{-2}y^2e^{-2y}]_0^\infty + (\frac{1}{-2}ye^{-2y}]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2y}dy)) =$$

$$2(\underbrace{[\frac{1}{-2}y^2e^{-2y}]_0^\infty}_{0}+\underbrace{(\frac{1}{-2}ye^{-2y}]_0^\infty}_{0}+\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2y}dy}_{[-\frac{1}{4}e^{-2y}]_0^\infty=\frac{1}{4}})) = \frac{1}{2}$$

Somit ist

$$EUV = 6\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot \frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} = 14$$

somit ist die Kovarianz:

$$Kov(U,V) = EUV - EUEV = 14 - \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2} = 14 - \frac{35}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$$

Die Korrelation ist die Normierte Kovarianz

$$Korr(U,V) = \frac{Kov(U,V)}{std(U)std(V)} = \frac{Kov(U,V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{5.25}{\sqrt{\frac{37}{4}\frac{25}{4}}} \approx 0.6904\ldots$$

Die Quantile entstehen durch den Wert der jeweiligen FV

$$F(y) = (1-e^{-2y})1_{y\geq 0} \stackrel{!}{=}$$

$$F(x-) \leq u \leq F(x)$$

die Verteilungsfunktion ist hier stetig, somit ist $F(x-) = F(x) = u$

das 5% quantil ist also $u_{5\%}$

$F(y) = 0.05 \iff (1-e^{-2y})1_{y\geq 0} = 0.05 \iff 1-e^{-2y} = 0.05 \iff e^{-2y} = 0.95 \iff y = \frac{ln(0.95)}{-2} \approx 0.02564\ldots$

$u_{75\%}$

$F(y) = 0.75 \iff (1-e^{-2y})1_{y\geq 0} = 0.75 \iff 1-e^{-2y} = 0.75 \iff e^{-2y} = 0.25 \iff y = \frac{ln(0.25)}{-2} \approx 0.69314\ldots$