Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Wurm, Jens

StudOn- Kennung: qy28qise

Blatt- Nummer: 02

Übungsgruppe- Nr. 7

Die Folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei: Alle

EINE PDF datei abgeben

17.5/21 * 30=24

A4) a) IA $(n=1)$, $a_1 = 1 \in (0,4)$ $\Rightarrow$ a_1 ist wahr

IS. $(n \to n+1)$: Es gilt die IV. $A(n)$

$a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, z.z: $\in (0,4)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$a_n \in (0,4) \to \frac{1}{2} a \in (0,2) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \to \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

$\Rightarrow a_{n+1} \in (0,4)$ $\square$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} \geq 1$

$\sqrt{a_n} \in (0,2)$, $a_n \in (0,4)$ $\quad \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} \in (0.5, 1.5)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{untere grenze}} \geq 1$ $\quad \Rightarrow$ monoton wachsend

c) aus Vorlesung: „$\underbrace{\text{monoton wachsend}}_{b}$ und $\underbrace{\text{nach oben beschränkt}}_{a}$" $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent und

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n)$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ Existiert

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$\downarrow (n\to\infty) \quad \downarrow (n\to\infty)$

$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$0 \underset{(a\neq 0)}{=} -\frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$\Rightarrow a_1 = 0$ $(a\neq 0)$, $a_2 = 4$ $(4-0)$ $\quad a \in (0,4)$

da $a_1 = 1$ und monoton wachsend $a = 4$ $(4-0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ $(4-0)$

A5) a)

A5) 1. A(n=1): $a_2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$

$$a_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 + \beta - \alpha x_2 - \beta}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 - \alpha x_2}{x_1 - x_2} = \alpha$$

Also: A(1) ist wahr

Du brauchst a(1) und a(0) weil du auch a_(n-1) und a_(n) später einsetzen musst. A

1.S: $(n \to n+1)$: Es gilt die I.V. A(n)

Also: $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

z.z.: $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{I.V.}{=} \left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right)\alpha + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right)$$

$$= \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2}$$

$(x^2 = \alpha x + \beta)$

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2 - x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \quad \square$$

b) Die Aussage gilt, wenn $x_1 \neq x_2$, da ansonsten der Nenner null wäre, was ungültig ist.

(i) $\alpha^2 + 4\beta < 0$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Fall $\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow x^2 = \alpha x + \beta \Rightarrow x_1 \neq x_2$
2. Fall $\alpha = 0 \Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow x^2 = \beta \Rightarrow x_1 \neq x_2$

$x \in \mathbb{C}$, was in der Angabe nicht verboten wird.

$\Rightarrow$ Aussage aus a) gilt für $\alpha^2 + 4\beta < 0$

(ii) $\alpha^2 + 4\beta = 0$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Fall $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$, dadurch wäre der Nenner 0

$\Rightarrow$ Aussage aus a) gilt nicht für $\alpha^2 + 4\beta = 0$

A5) c) (i)

A5) $\alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$ ✓

(ii) $\alpha = 4, \beta = 7 \Rightarrow x^2 = 4x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$

$x_1 = 2 - \sqrt{11} \quad x_2 = 2 + \sqrt{11}$

$$a_n = \frac{(2-\sqrt{11})^n - (2+\sqrt{11})^n}{2-\sqrt{11} - (2+\sqrt{11})} = \frac{(2-\sqrt{11})^n - (2+\sqrt{11})^2}{-2\sqrt{11}}$$ ✓

(iii) $\alpha = 0, \beta = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \pm\frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{4i^2}}{2} = \pm i \qquad x_1 = -i \quad x_2 = i$

$$a_n = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-i - i} = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-2i}$$ ✓

$n=1: \frac{-i-i}{-2i} = 1 \qquad n=2: \frac{-1+1}{-2i} = 0$

$n=3: \frac{i+i}{-2i} = -1 \qquad n=4: \frac{1-1}{-2i} = 0$

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \bmod 4 = 1 \\ 0, & n \bmod 4 = 2 \\ -1, & n \bmod 4 = 3 \\ 0, & n \bmod 4 = 0 \end{cases}$$ ✓

A6) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{5}{n})^3}{(1+\frac{1}{n})^3} = 2^3 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{1}{n}}{\underbrace{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\lim n\to\infty = \sqrt{2}}+\underbrace{\sqrt{2+\frac{9}{n}}}_{\lim n\to\infty = \sqrt{2}}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1})(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1})}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^3(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}_{=\sqrt{1}})}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = 0 \cdot \frac{1-0}{2} = 0$

der schritt passt nicht, insgesamt: Zwische

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{=1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{=1}} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = \infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-(n^2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\underbrace{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}_{=0 \text{ wenn } n\to\infty}} = \frac{-1}{1} = -1$

Anmerkunken: Bei A6) d) muss es nach dem letzten limes „(1/n)*((1-(1/n))/1)“ heißen, nicht „(1/n)*((1-(1/n))/2)“, danach anschließend auch „0*((1-0)/1)“, nicht „0*((1-0)/2)“.

Wenn 2 Lösungen da sind, muss ich die schlechtere Werten, deswegen kann ich dir auf die 6d) nic

Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Wurm, Jens

Du hattest deine Lösung (wieder) 2 mal drin!

StudOn- Kennung: qy28qise

Blatt- Nummer: 02

Übungsgruppe- Nr. 7

Die Folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei: Alle

A4) a) IA $(n=1)$, $a_1 = 1 \in (0,4)$ => a_1 ist wahr

IS. $(n \to n+1)$: Es gilt die IV. $A(n)$

$a_n \in (0,4)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, z.z: $\in (0,4)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$a_n \in (0,4) \to \frac{1}{2} a \in (0,2) \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (0,2) \to \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

$\Rightarrow a_{n+1} \in (0,4)$ $\square$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} \geq 1$

$\sqrt{a_n} \in (0,2)$, $a_n \in (0,4)$ $\frac{\sqrt{a_n}}{a_n} \in (0.5, 1.5)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{untere grenze}} \geq 1$ => monoton wachsend

c) aus Vorlesung: „$\underbrace{\text{monoton wachsend}}_{b}$ und $\underbrace{\text{nach oben beschränkt}}_{a}$" => (a_n) ist konvergent und

$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$ => $\lim_{n \to \infty} a_n =: a$ Existiert

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$\downarrow (n \to \infty)$ $\downarrow (n \to \infty)$

$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$\underset{(a \neq 0)}{0 =} -\frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$\Rightarrow \underset{(a \neq 0)}{a_1 = 0}$ $\underset{(4-0)}{a_2 = 4}$ $a \in (0,4)$

da $a_1 = 1$ und monoton wachsend $a = 4$ $(4-0)$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 4$ $(4-0)$

A5) a)

A5) I.A $(n=1)$: $a_2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$

$$a_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 + \beta - \alpha x_2 - \beta}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 - \alpha x_2}{x_1 - x_2} = \alpha$$

Also: $A(1)$ ist wahr

I.S: $(n \to n+1)$: Es gilt die I.V. $A(n)$

Also: $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

z.z.: $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} \overset{\text{I.V.}}{=} \left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right)\alpha + \beta\left(\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}\right)$$

$$= \frac{\alpha x_1^n - \alpha x_2^n + \beta x_1^{n-1} - \beta x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1}(\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2}$$

$(x^2 = \alpha x + \beta)$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2 - x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} \quad \square$$

b) Die Aussage gild, wenn $x_1 \neq x_2$, da ansonsten der Nenner null wäre, was ungültig ist.

(i) $\alpha^2 + 4\beta < 0$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Fall $\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow x^2 = \alpha x + \beta \Rightarrow x_1 \neq x_2$
2. Fall $\alpha = 0 \Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow x^2 = \beta \Rightarrow x_1 \neq x_2$

$x \in \mathbb{C}$, was in der Angabe nicht verboten wird.

$\Rightarrow$ Aussage aus a) gild für $\alpha^2 + 4\beta < 0$

(ii) $\alpha^2 + 4\beta = 0$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Fall $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$, dadurch wäre der Nenner 0

$\Rightarrow$ Aussage aus a) gild nicht für $\alpha^2 + 4\beta = 0$

A5) c) (i)

A5) $\alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(ii) $\alpha = 4, \beta = 7 \Rightarrow x^2 = 4x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$

$x_1 = 2 - \sqrt{11} \quad x_2 = 2 + \sqrt{11}$

$$a_n = \frac{(2-\sqrt{11})^n - (2+\sqrt{11})^n}{2-\sqrt{11} - (2+\sqrt{11})} = \frac{(2-\sqrt{11})^n - (2+\sqrt{11})^2}{-2\sqrt{11}}$$

(iii) $\alpha = 0, \beta = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm \frac{\sqrt{4i^2}}{2} = \pm i \quad x_1 = -i \quad x_2 = i$$

$$a_n = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-i - i} = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-2i}$$

$n = 1: \frac{-i - i}{-2i} = 1 \qquad n = 2: \frac{-1+1}{-2i} = 0$

$n = 3: \frac{i + i}{-2i} = -1 \qquad n = 4: \frac{1 - 1}{-2i} = 0$

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \bmod 4 = 1 \\ 0, & n \bmod 4 = 2 \\ -1, & n \bmod 4 = 3 \\ 0, & n \bmod 4 = 0 \end{cases}$$

A6/ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{5}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = 2^3 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n+1}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2+9n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{1}{n}}{\underbrace{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\lim n\to\infty = \sqrt{2}}+\underbrace{\sqrt{2+\frac{9}{n}}}_{\lim n\to\infty = \sqrt{2}}} = \frac{-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(n^3-\sqrt{n^6+n^2+1}\right)\left(n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}\right)}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}_{=\sqrt{1}}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = 0 \cdot \frac{1-0}{2} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+n^3}-\sqrt[4]{n^4-n^3}}{\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{=1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{=1}} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = \infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-(n^2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\underbrace{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}_{=0 \text{ wenn } n\to\infty}} = \frac{-1}{1} = -1$