Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van Anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 7

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

18, 19, 20,

14,5/20*30=21.5

Mathe Übung 7

A18 Differenzieren mit Rechenregeln

a) $f(x) = x^2 + x + \underset{}{\overset{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}} + 1 + \frac{1}{\underset{}{\overset{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\overset{x^{-1}}{x}} + \frac{1}{\overset{x^{-2}}{x^2}}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{2x})^4$ $\qquad \sqrt{2x} = \sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 4(x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot \left(2x + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\right) = 4(x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$

c) $f(x) = x e^{x^2} \ln(2+3x)$ $\qquad$ 3x Produktregel: $f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

$f'(x) = e^{x^2} \ln(2+3x) + 2e^{x^2} x \ln(2+3x) + \frac{3}{2+3x} e^{x^2} x = e^{x^2}\left(\ln(2+3x) + 2x \ln(2+3x) + \frac{3x}{2+3x}\right)$

d) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$ $\qquad \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{2\cos 2x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2}{x^2+1} \cdot \sin 2x}{(\ln(x^2+1))^2}$

f) $f(x) = x^\alpha$ $\qquad$ ~~$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$~~

warum? wir haben das nur für a als Ganze zahl gezeigt

g) $f(x) = x^{-x^2} = e^{-x^2 \cdot \ln x}$

$f'(x) = e^{-x^2 \cdot \ln x} \cdot \left(-2x \ln x + \frac{1}{x} \cdot (-x^2)\right) = e^{-x^2 \ln x} \cdot (-2x \ln x - x)$

h) $f(x) = \ln(x + \ln(2 \ln x))$ $\qquad f(x) = \ln(x)$ $\qquad g(x) = x + \ln(2 \ln x)$

$f'(x) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\ln x} \cdot \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x + \ln(2\ln x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{x \ln x}\right)$

A19 (Ableitung von cos, tan, arctan)

$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

a) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} = 0 - \sin x = -\sin x$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

I) $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

II) $\tan' x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

c) I) arctan' gesucht $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\operatorname{arctan}' y = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

II) $\tan''(x) = 2\tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$

$\tan'''(x) = 4\tan^2(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) + 8\tan^3(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$

A20 Ableitung, Differenzenquotient, Stetigkeit

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad \alpha \in (0,\infty)$

a) $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot x^\alpha$

b) $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \overset{\lim_{h\to 0}}{=} \frac{h^\alpha \cdot \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^\alpha \cdot \sin\frac{1}{h^2}}{h} \overset{\lim_{h\to 0}}{=} \frac{h^\alpha \cdot \sin\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\alpha-3} \cdot \sin\frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-3}$$

$\alpha - 3$ muss ≥ 0 sein, da 0 mit neg. Exponent nicht funktioniert (0 unter Bruchstrich nicht möglich)

Wenn $\alpha \in [3,\infty)$ existiert $f'(0)$, ansonsten nicht

Im Falle der Existenz:

$\alpha = 3 \quad f'(0) = 1$

$\alpha = (3,\infty) \quad f'(0) = 0$

c) $\lim_{x\to x_*} f(x) = f(x_*)$ $\quad x_* = 0$

$f(x_*) = \{0, 1\}$

$$\lim_{x\to 0} 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot x^3 \overset{\lim_{x\to 0}}{=} \underbrace{3x^2 \sin\frac{1}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{-2\cos\frac{1}{x^2}}_{\text{ostilliert hin und her}} \Rightarrow \text{Grenzwert existiert nicht}$$

für $\alpha = 3$ ist $f'(0)$ an 0 nicht stetig.

$$\lim_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot x^\alpha = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\left(\alpha \sin\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot x\right) = 0$$

für $\alpha > 3$ ist der Limes $0 = f'(0)$, also ist $f'(x)$ an der Stelle 0 mit $\alpha > 3$ stetig

d) $$f''(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot \alpha x^{\alpha-1} + \left(-\sin\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2}{x^3}\right) \cdot -2x^{\alpha-3} + -2(\alpha-3)x^{\alpha-4} \cdot \cos\frac{1}{x^2}$$