Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Schmitt, Niklas

StudOn-Kennung: ra72hyru

Blatt-Nummer: 03

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9, ____

8/10*30=24

Niklas Schmitt – ra72hyru

A7) a)

i) $a_n = \frac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

$$\frac{5-1-\frac{1}{n}}{n^2} \le \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \le \frac{5+1+\frac{1}{n}}{n^2}$$

$\cancel{\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3} = 0$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ii)

$$\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot(-1)-2\cdot 1}{6+1-(-1)} \le \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \le \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot 1-2\cdot(-1)}{6+(-1)-(+1)}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{-7}{8} = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{7}{4} = 0$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} b_n \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b)

i) $a_n = ((-1)^n+1)n \Rightarrow M=\{0,+\infty\}$; $\liminf_n a_n = 0$; $\limsup_n a_n = +\infty$

ii) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow M=\{-1,0,1\}$; $\liminf_n a_n = -1$; $\limsup_n a_n = 1$

iii) $a_n = \begin{cases} -n, & \text{falls } n\le 17 \\ n, & \text{falls } n>17 \end{cases} \Rightarrow M=\{+\infty\}$; $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = +\infty$

iv) $a_n = q^n$, $q\in\mathbb{R}$

$q>1 \Rightarrow M=\{+\infty\}$; $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = +\infty$

$q=1 \Rightarrow M=\{1\}$; $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = 1$

Niklas Schmitt - ra72hyra

iv) $-1<q<1 \Rightarrow M=\{0\}$; $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = 0$

$q=-1 \Rightarrow M=\{-1;1\}$; $\liminf_n a_n = -1$; $\limsup_n a_n = 1$

$q<-1 \Rightarrow M=\{-\infty;+\infty\}$; $\liminf_n a_n = -\infty$; $\limsup_n a_n = +\infty$

A8)

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$ $\qquad a_k \xrightarrow{(k\to\infty)} 1 \neq 0 \Rightarrow$ keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe divergent

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)}^k$

$\cancel{\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k}}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\sqrt{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}}$

$= \sqrt{\frac{k(1-\frac{1}{k})}{k^2(3+\frac{2}{k})}} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0 = \limsup_n < 1$

$\Rightarrow$ konvergent

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{\sqrt[k]{k^k}} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{1}{k} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0 = \limsup_n < 1 \Rightarrow$ konvergent

~~d)~~

$\rightarrow$

Niklas Schmitt - mat2hyra

3.BF

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2-(k-1)}{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{1}\ 3}{2^k\cdot(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

da brauchst du noch einen schritt um das zu zeigen (z.B. absch

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2\cdot\sqrt[k]{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \limsup_n$

$\Rightarrow$ konvergent

A9) a)

i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ $\qquad \rightarrow \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k}$

$\frac{4}{3k}$ ist divergente Minorante $\rightarrow$ geg. Reihe ist divergent

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ $\qquad \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(4+\frac{3}{k^2})}{k^2(3-\frac{4}{k^2})} = \frac{4}{3} \neq 0$ $\Rightarrow$ Divergenz-kriterium $\Rightarrow$ divergent

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ $\qquad \frac{1}{k}$ ist divergente Minorante $\Rightarrow$ geg. Reihe ist divergent

b) i) Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

1) beschränkt $(-1,1) \rightarrow$ hat HP

2) beschränkt $(-1,1) \rightarrow$ hat HP

3) beschränkt $(-1,1) \rightarrow$ hat HP

ii) 3.: HP = 0

sin maximal 1

$\Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$