Bearbeitete Aufgaben A7, A8, A9

10/10*30=30

# A7

### a)

### (i)

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \\
& \frac{5-1+\frac{1}{n}\cdot(-1)}{n^2} \leq a_n = \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \frac{5+1+\frac{1}{n}\cdot 1}{n^2} \\
\lim_{n\to\infty} & \frac{5-1+\frac{1}{n}\cdot(-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{n^2} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} & \frac{5+1+\frac{1}{n}\cdot 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} = 0
\end{aligned}$$

Durch Einschachtelungskriterium folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

### (ii)

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \\
& \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot(-1)-2\cdot 1}{6+(-1)-1} \leq b_n = \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\sin(2n)-2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)} \leq \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot 1-2\cdot(-1)}{6+(-1)-1} \\
\lim_{n\to\infty} & \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot(-1)-2\cdot 1}{6+(-1)-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-7}{4} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} & \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{5\cdot 1-2\cdot(-1)}{6+(-1)-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\cdot\frac{7}{4} = 0
\end{aligned}$$

Durch Einschachtelungskriterium folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

### b)

### (i)

$$\begin{aligned}
M &= \{0, +\infty\} \\
\limsup_n a_n &= +\infty \\
\liminf_n a_n &= 0
\end{aligned}$$

**(ii)**

$$M = \{-1, 1\}$$
$$\limsup_n a_n = 1$$
$$\liminf_n a_n = -1$$

**(iii)**

$$M = \{+\infty\}$$
$$\limsup_n a_n = +\infty$$
$$\liminf_n a_n = +\infty$$

**(iv)**

| $q$ | $-\infty < q < -1$ | $q = -1$ | $-1 < q < 1$ | $q = 1$ | $1 < q < +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | $\{-\infty, +\infty\}$ | $\{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{+\infty\}$ |
| $\limsup_n$ | $+\infty$ | 1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\liminf_n$ | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |

# A8

**a)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{k}+1} = 1$$

Da die Folge $a_k$ gegen 1 konvergiert und somit keine Nullfolge ist, kann nach dem Divergenzkriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$ nur divergieren.

**b)**

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$$

Wurzelkriterium, 2. Version: $\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}\right|} = \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} = \sqrt{\frac{k-1}{3k^2+2k}} = \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{3k^2+2k}}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{3+\frac{2}{k}}} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0$$

Da $\sqrt[k]{|a_k|}$ gegen 0 konvergiert und $0 < 1$, ist die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{k-1}{3k^2+2k} \right)^{\frac{k}{2}}$ nach dem Wurzelkriterium 2. Version absolut konvergent.

**c)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$$

Wurzelkriterium 2. Version:

$$0 \leq \sqrt[k]{\left| \frac{\sin k}{k^k} \right|} = \sqrt[k]{\frac{|\sin k|}{|k^k|}} = \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{\sqrt[k]{|\sin k|}}{k} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0$$

Da $\sqrt[k]{\left|\frac{\sin k}{k^k}\right|}$ nach dem Einschachtelungskriterium gegen 0 konvergiert und $0 < 1$, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$ nach dem Wurzelkriterium 2. Version absolut konvergent.

**d)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1})(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2-k+1}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}$$

Quotientenkriterium 1. Version:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{3}{2^{k+1} \cdot (\sqrt{k+3} + \sqrt{k})}}{\frac{3}{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}} \right| = \left| \frac{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}{2^{k+1} \cdot (\sqrt{k+3} + \sqrt{k})} \right| = \left| \frac{2^k \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1})}{2^k \cdot 2 \cdot (\sqrt{k+3} + \sqrt{k})} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1}}{2 \cdot (\sqrt{k+3} + \sqrt{k})} \leq \frac{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}{2 \cdot (\sqrt{k+2} + \sqrt{k})} = \frac{1}{2}$$

Da $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < \frac{1}{2} < 1$ gilt, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k}$ nach dem Quotientenkriterium 1. Version absolut konvergent.

# A9

### a)

### (i)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} \qquad a_k = \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \frac{4k}{3k^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$$

Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4}$ ist divergent, da zu dieser Reihe die Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante ist.

### (ii)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}} = \frac{3}{4}$$

Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{4k^2+3}{3k^2-4}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\frac{3}{4}$ konvergiert und $\frac{3}{4} \neq 0$, ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$ nach dem Divergenzkriterium divergent.

### (iii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} \geq 0$$

Da die Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist, ist diese Reihe ebenfalls divergent.

### b)

**(i)** Satz aus der Vorlesung: Jede beschränkte Folge hat (mindestens) einen Häufungspunkt.
(1.) $a_n = \sin n$ ist beschränkt ($\sin x \in [-1, 1]$ ) und muss somit minedestens eien Häufungspunkt haben.

(2.) $b_n = \sin n^2$ ist beschränkt ($\sin x \in [-1, 1]$ ) und muss somit minedestens eien Häufungspunkt haben.
(3.) $c_n = \frac{\sin n}{n}$ ist beschränkt ($\sin x \in [-1, 1] \rightsquigarrow \frac{-1}{1} = -1 \leq c_n = \frac{\sin n}{n} \leq 1 = \frac{1}{1}$ ) und muss somit minedestens eien Häufungspunkt haben.

**(ii)** Der Häufungspunkt für $c_n = \frac{\sin n}{n}$ ist 0. Für diese Folge ist das am einfachsten, da die anderen beiden Folgen mehr Häufungspunkte haben.