Übungsblatt 5

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 2

21. April 2020

1 Syntax und operationale Semantik

1.0.1 Binäre Relation

Teilmenge des Kreuzprodukts zweier (ungleicher) Mengen $R \subseteq X \times Y$ oder infix xRy, wie $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \forall k \in \mathbb{N}(m = n + k)\}$.

- reflexiv $\forall x(xRx)$
- symmetrisch $\forall x, y(xRy \implies yRx)$
- transitiv $\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \implies xRz)$
- Präordnung, wenn R reflexiv und transitiv (eine ordnung braucht auch antisymmetrie)
- Äquivalenzrelation, wenn R eine Präordnung und symmetrisch ist.

Gleichheit ist die einzige Äquivalenz und totale Ordnung

Gleichheit mod k ist eine Äq (reflexiv, man kann immer als vielfaches 0 wählen, symmetrisch und transitiv)

$\mathbb{Z}/_{\equiv k} = \{[n]_{\equiv k} | n \in mathbbZ\} = \mathbb{Z}_k$ mit $|\mathbb{Z}_k| = k$ und $[n]_{\equiv k} = \{m | n \equiv_k m\}$

Beliebte Relationen

= (weil das aber merkwürdig ist für z.B. equivalenz von Relationen) gibt es auch $id = \Delta = \{(x,x) | x \in X\}$ kleinste Äquivalenztrelation auf X. (jede Äq muss reflexiv sein, also Δ beinhalten)

Zu $R \subseteq Y \times Z$ und $S \subseteq X \times Y$ kann die komposition:

$R \circ S = \{(x,z) | \exists y(xSy \wedge yRz)\}$ Achtung applikativer Syntax, also rechts zuerst (S dann R).

Die funktionskomposition kann darauf reduziert werden: $f : X \to Y = Grf = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ (nur halt apllikativ: also graph links als input).

Die n-fache Verkettung wird als R^n bezeichnet, wobei $R^0 = id$.

Umkehrrelation oder Inverse einer Relation ist wohldefiniert:

$R^- = \{(y,x) | xRy\} \subseteq Y \times X$.

$\leq^- = \geq$, $\leq \circ \leq = \leq$,

$< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} < \circ <= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | n + 2 \leq m\}$ das plus zwei entsteht dadurch,dass bei jedem $<$ mindestens 1 unterschied sein muss.

Bei $< \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist jedoch $< \circ <=<$, da zwischen jede Rationale zahl immer eine weiter passt $\forall x, y(x \leq y \implies$

$\exists z(x < z < y))$.

Def. Sei $P \subseteq \{refl, symm, trans\}$.

Der **P-abschluss** von $R \subseteq X \times X$ ist die kleineste Relation von S mit $R \subseteq S$ und S hat die Eigenschaft P.

Eindeutigkeit, weil geordnete Menge von Relationen. Existenz z.B. $P = \{trans\} : S = \bigcap\{Q \subseteq X \times X | R \subseteq Q, Qtransitiv\}$. Also: man wählt alle Relationen die R beinhalten und die Eigenschaft haben und nimmt dann den Durchschnitt. Der Durchschnitt hat auch immer die Eigenschaft, weil sie nur über $\forall$ definiert sind (und keine disjunktionen auf der rechten seite der implikation verwenden, und FOL sind).

Daraus folgt:

- R ist reflexiv $\iff id \subseteq R$
- R ist symm $\iff R^- \subseteq R \iff R^- = R$
- R ist tranisitiv $\iff R \circ R \cup R$

daraus folgt: Explizit berechenbare Eigenschaften:

Reflexiver abschluss von R: man muss alle selbstrelationen hinzufügen, also $R \cup \Delta$.

Symmetrischer Abschluss: $R \cup R^-$ weil $(R \cup R^-)^- = R^- \cup R^{-^-} = R^- \cup R$.

Transitiver Abschluss: man braucht nicht nur $R \circ R$ sondern auch die weiteren $R \circ R \circ R$, also $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \{(x, y) | \exists n \geq 1((x, y) \in R^n)\}$, das heißt, $xR^+y \iff \exists n, x_0, \ldots, x_{n+1}(x = x_0Rx_yR \ldots Rx_nRx_{n+1} = y)$.

Dies nennt man R^+ ähnlich wie bei regulären ausdrücken: es muss mindestens einmal die Relation angewandt werden! (genau genommen sind Reg. Ausdrücke und Relationen isomorph). Transitiv-Reflexiver Abschluss (erzeugte Präordnung). $R^+ \cup \Delta = R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$