15/20 *30 = 22.5

A15

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty$

b) ~~Volumen~~ Oberfläche $6 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$ pro Würfel

Nein: du musst die Fläche, die vom

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{k^2} \longrightarrow \cancel{12}$

$\longrightarrow$ Konvergent $\Rightarrow$ Es reicht endlich viel Farbe

der grenzwert hiervon wäre pi^2, der ist aber gar nicht gefragt, konvergenz nach P11-b reicht.Generell grenz

c) Volumen $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$ pro Würfel

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \longrightarrow$ Konvergent $\Rightarrow$ Es reicht endlich viel Beton

d) Ziel Oberfläche muss ~~konvergent~~ divergent sein und Volumen konvergent

Vorschlag Kantenlänge für $W_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

ff

Oberfläche: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \frac{1}{k} \longrightarrow$ divergent

Volumen: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}^3} \longrightarrow$ konvergent

A16

a) i) Mindestens 1 Nullstelle:

stetig: $x^3 + \sin(x) - \cos(x)$ Verknüpfung stetiger Funktionen $f(x)$ ist stetig

x^3: stetig, $\sin(x)$: stetig, $\cos(x)$: stetig

1 positiver Wert:

$f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^3 + \sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})$

positiv $+ 1 - 0 > 0$

1 negativer Wert:

$f(0) = 0^3 + \sin(0) - \cos(0)$

$0 \quad 1 \quad 0 \quad - \quad 1 \quad = -1 < 0$

Genau 1 Nullstelle: streng monoton steigen

$f(x) = x^3 + \sin(x) - \cos(x)$ keine einzelne Funktion überschreitet den 0 Punkt $\Rightarrow$ monoton steigend

x^3: Monoton steigend, $\sin(x)$: monoton steigend, $\cos(x)$: monoton fallend

ii) Mindestens 1 Nullstelle

Stetig:

$e^{-x}\cos(\pi x)-\frac{1}{2}$ Verknüpfung stetiger Funktionen $\Rightarrow f(x)$ ist stetig

positiver Wert:

$f(0) = e^{-0}\cos(0) - \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

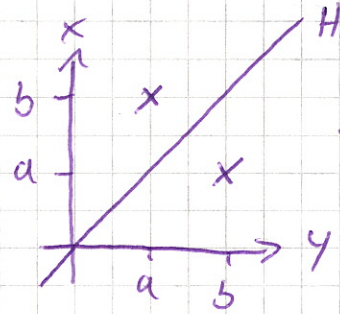
negativer Wert:

$f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{1}{2}\pi) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$

Genau eine Nullstelle: ~~mo~~ streng monoton fallend

$f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\text{fallend}}\underbrace{\cos(\cancel{1}x\pi)}_{\text{fallen}} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ streng monoton fallend

b)



Hilfsfunktion $g(x) = x$

Da die Punkte $f(a)$ und $f(b)$ einmal überhalb von $g(x)$ und einmal unterhalb von $g(x)$ liegen und $f[a,b]$ stetig ist muss die Funktion $g(x)$ mindestens 1 mal geschnitten werden.

c) D_f ist beschränkt und abgeschlossen

$f(x)$ ist stetig

$f(x)$ ist beschränkt da $\sin(x)$ beschränkt ist und e^{-x^2} die obere Schranke 1 und die untere schranke 0 hat

Nach dem Satz Stetige Funktionen auf kompakten mengen (Skript) hat die Funktion einen min ~~(x~~ und max Punkt.

A17

i) $\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x} = 2\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 2\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2(1)^{-1} = \underline{\underline{2}}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = 0$

ii) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin 2x\cdots\sin nx}{x\cdot x\cdots x}\cdot\frac{n!}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$

$= n!\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\cdots\underbrace{\frac{\sin nx}{nx}}_{\to 1}$

$= n!(1) = \underline{\underline{n!}}$

iii) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}\cdot\frac{5x}{5x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{\sin 6x} = 1\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x}{5x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{6x}{6x}\right)^{-1}$

$= 1\cdot1^{-1}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{6\cancel{x}}{5\cancel{x}}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$

iv) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}+\sin 2x}{x}\right)^{-1} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x}\right)^{-1} + \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{-1}\cdot\frac{2}{2}$

$\to 0$

$2^{-1}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x}\right)^{-1}\cdot\frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\frac{x}{4}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0} 0\cdot\frac{x}{1}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$\boxed{\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)}$

v) $\lim_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{\cancel{x}}\sin x\cos x\right) = 1 + \lim_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi}{x}\sin x\cos x\right) - 1\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2x}\sin 2x\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2x}\sin 2x\right)^2}$

$= 1 + \lim\left(\frac{\pi}{2x}\sin 2x\right)^2\cdot 0$

$= 1 + \pi^2\lim\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 0$

$= 1 + \pi^2\cdot1^2\cdot0 = \underline{\underline{\cancel{1}}}\ -1$

wo geht das hin?Un