Alexander Mattick

qi69dube



Aufgabe 20

a) $A, B$ sind stochastisch unabhängig. also $P(A\cap B) = P(A)P(B) = P(A|B)P(B)$

$\Leftrightarrow P(B) = P(B|A)$

zZ: $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$

$P(A^c\cap B) = P(A^c|B)P(B) \overset{①}{\Longleftrightarrow} P(A^c \cap B) = (1-P(A|B))P(B)$

$\overset{②}{\Leftrightarrow} P(A^c\cap B) = (1-P(A))P(B) \Leftrightarrow P(A^c\cap B) = P(A^c)P(B)$

① bed. Wahrscheinlichkeit ist auch ein W-Maß ② stoch. unabh. $P(A|B)=P(A)$

b) mit 3 Variablen

$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ ist bekannt

① $P(B), P(A), P(C)$ ist auch paarweise unabhängig.

$P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B|C)P(C) = P(A)P(B\cap C) \Rightarrow P(B)P(C) = P(B\cap C)$

(analog für alle anderen Kombinationen)

② $(A\cup B)$ und $C$ sind stoch. unabhängig:

$\underline{P((A\cup B)\cap C))} = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C)+P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$

$= \cancel{P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A)P(B)P(C) = P(C)(}$

$\overset{①}{=} P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(C)\,(P(A) + P(B)+P(A)P(B))$

$= \underline{P(C)\cdot P(A\cup B)}$ also stoch. unabhängig.

Daraus folgt unmittelbar $P(A^c\cap B^c\cap C) = P((A\cup B)^c \cap C) = P(\overbrace{(A\cup B)^c}^{D^c})P(C)$

ist nach a) lin. unabhängig (substituiere $(A\cup B) = D$). Somit gilt stochastische Unabhängigkeit.

2 1) $F =$ "Falsche Dosierung"

Heilung, wenn kein Fehler vorliegt:

$P(A|F^c) = 80\%$

Nebenwirkung, wenn kein Fehler vorliegt:

$P(B|F^c) = 30\%$

Wenn es einen Fehler $P(F) = 1\%$ gab, gilt

$P(A|F) = 20\%$ $P(B|F) = 20\%$

Gesucht ist $P(A|B)$ $P(A|B^c)$ wenn A und B unabhängig sind.

Aus der Unabhängigkeit folgt $P(A|B) = P(A|B^c) = P(A)$ (vgl. Aufgabe 1))

$P(A \cap F) = P(A|F)\,P(F) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}002$

$P(A \cap F^c) = P(A|F^c)\,P(F^c) = 0{,}8 \cdot 0{,}99 = 0{,}792$

$P(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Totale Wahrscheinlichkeit}}}{P(A \cap F)} + P(A \cap F^c) = 0{,}002 + 0{,}792 = \underline{\underline{0{,}794}} = P(A|B) = P(A|B^c)$