Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC1

Name, Vorname: Gauert, Vanity

StudOn-Kennung: oz65akyh

Blatt-Nummer: 05

Übungsgruppen-Nr: 07

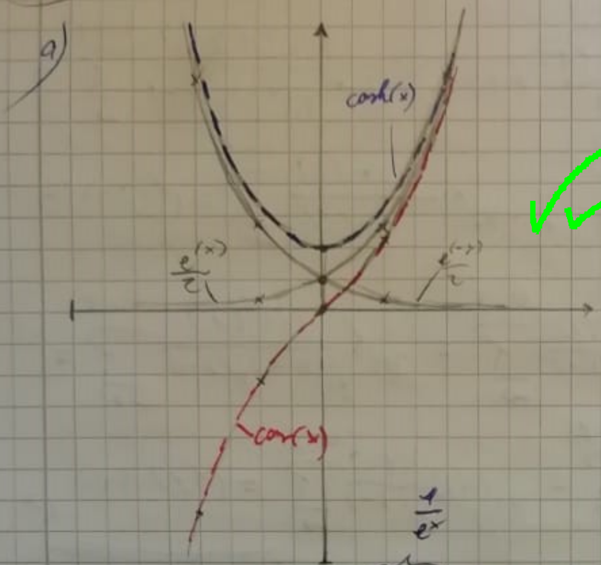
Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A13, A14, ____, ____

13.5/14*30=28.5

A13

a)



b) $$\lim_{x\to\infty} \cancel{\exp}\ \frac{e^x - \overbrace{e^{-x}}^{\frac{1}{e^x}}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{(e^x)^2}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{1}{(e^x)^2}\right)} = \frac{1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\frac{1}{e^{-x}}} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^{-x}}\left(\frac{1}{(e^{-x})^2} - 1\right)}{\cancel{e^{-x}}\left(\frac{1}{(e^{-x})^2} + 1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-2x}} - 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-2x}} + 1}$$

$$= \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Zeichnung fehlt

c) $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{2^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2(\exp(x-x)) + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

d)

$$\cosh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(x^k + (-x)^k\right)}{2}$$

für gerade $k \Rightarrow 2x^k$

und für ungerade $\Rightarrow x^k - x^k = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(2x^{2k})}{2}$

immer gerade

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (x^{2k})$$

$$\sinh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k}{2} - \frac{\sum \frac{1}{k!}(-x)^k}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(x^k - (-x)^k\right)}{2}$$

für ungerade $k \Rightarrow x^k - (-x)^k = x^k + x^k = 2x^k$

und für gerade $k \Rightarrow x^k - x^k = 0$

Sei $\tilde{k}$ eine die Folge ungerader Zahlen: $\tilde{k} = \cancel{0}, 1, 3, 5, \ldots$

$$\sinh(x) \Leftrightarrow \sum_{\underbrace{\tilde{k}=0}_{\tilde{k}_1}}^{\infty} \frac{1}{\tilde{k}!} (x^{\tilde{k}}) \leftarrow (\tilde{k} \text{ immer ungerade!})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{(2k+1)!}$$

e)

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} i^{2k} y^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^k}{(2k)!} y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} y^{2k} = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i^{2k} \cdot i)}{(2k+1)!} \cdot y^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^k \cdot i}{(2k+1)!} \cdot y^{2k+1} = i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot y^{2k+1} = \cancel{i \cosh}(y$$

$$i \cdot \sinh(y)$$

f) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$

$= \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)i$

g) Nein, ~~da~~ $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht beschränkt.

Da $\cos(x) \wedge \sin(x)$ nie für das gleiche x gleichzeitig 0 sind, wird beim reellen Teil immer etwas ~~..~~ oder beim komplexen Teil etwas Beschränktes mit etwas unbeschränktem multipliziert.

Sei $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \wedge \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

für $y \to \pm\infty \Rightarrow \cosh(y) \to \pm\infty$

$$\lim_{y\to\infty} \sin(x)\cos(y) = 1 \cdot \pm\infty$$

Sonderfall $x = \frac{3}{4}\pi$

$\sin \frac{3}{4}\pi \cosh(y) + \cos\frac{3}{4}\pi \sinh(y) i$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(y) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(y)$

Für $y \to +\infty$ geht $\sin(\frac{3}{4}\pi + iy)$ evtl. gegen 0, aber für $y \to -\infty$ geht $\sin(\frac{3}{4}\pi + iy)$ gegen $+\infty$.

Also selbst wenn $\sin(x) = -\cos(x)$ ist, ist $\sin(x+iy)$ unbeschränkt.

(11) Definitionsbereich $f(x) := \underline{(-1, 1)}$

a) $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{(1-x)\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x) \to 2}{(1-x) \to 0}}} = \frac{1}{+\infty} = \underline{0}$

$\wedge \lim_{x \to -1} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\frac{(1+x) \to 0}{(1-x) \to 2}}}_{\to 0}} = \underline{+\infty}$

b) (i) $f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$e^{\tilde{x}}$ ist nach Vorlesung stetig $\wedge$ $(1 + x - \frac{1}{x})$ ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auch stetig, so wie $f(x) = 0$.

Nun ist zu zeigen $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$.

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \underline{0} \wedge f(0) = 0$

$\lim_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} e^1 \cdot \underbrace{e^x}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to e^{\infty} \to \infty}} = e \cdot 1 \cdot 0 = \underline{0}$

$\Rightarrow$ f ist stetig ✓.

(ii) $g(0) = 0 = \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} g(x)$, wie in letzter Aufgabe.

$\lim_{x \nearrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim_{x \nearrow 0} e^1 \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e \cdot 1 \cdot \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

$= e \cdot \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{e^{(-1)\frac{1}{x}}} = e \cdot \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \underline{+\infty}$

$\Rightarrow$ g ist nicht stetig

(A3)

c) (i) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-x+1} - \lim\limits_{x\to 0} x$

$= \left(\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}} - 0 = 1^{\frac{1}{2}} - 0 = \underline{1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}^2+x+1-\cancel{x}^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

(iv) <u>Existiert nicht</u>, da sei die Folge $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}$

dann ist für $x_n = \frac{1}{2}\cdot z$, $z\in\mathbb{N}$

$|\sin(\pi x)| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot 1 = +\infty$.

Und für $x = z$, $z\in\mathbb{N}$ $|\sin(\pi x)| = 0$ — von mir

$\Rightarrow \infty \cdot 0$ kann nicht bestimmt werden :)

(v) $\lim\limits_{x\to 0} x|\sin\pi x| :=$ ~~$\lim\limits_{x\to 0} x|\sin\pi x| = \lim\limits_{x\to 0} \pi x^2 \frac{\sin\pi x}{\pi x}$~~ $= \underline{0}$

$\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0}|\sin\pi x| = 0\cdot 0 = \underline{0}$

(vi) <u>Existiert nicht:</u> $\left[\text{Folge: } x_n = \dfrac{4}{z_n\pi} \text{ und } z_0 = 1,\ z_{n+1} = z_n + 1\right]$

, also: $\frac{4}{\pi}, \frac{4}{2\pi}, \frac{4}{3\pi}, \ldots \to 0$

Für ungerade z_n ist $\cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

und für gerade z_n ist $\cos^2\left(\frac{2}{x}\right) = 1$,

während $\cos(x) \to 0$.