Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC~~1~~ 2

Name, Vorname: Vasily Gamal

StudOn-Kennung: og65ekyh

Blatt-Nummer: 03

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, A9, ______

10/10*30=30

(5.1)

(A7)

a) (i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin(n)}{n^2} \geq \dfrac{5-1-\frac{1}{n}}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-\frac{1}{n}}{n^2} = \dfrac{\lim(4-\frac{1}{n})}{\lim(n^2)} = \dfrac{4}{+\infty} = 0$

$a_n \leq \dfrac{5+1+\frac{1}{n}}{n^2} \qquad \lim\left(\dfrac{6+\frac{1}{n}}{n^2}\right) = \dfrac{6}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim a_n \leq 0 \quad \Rightarrow \underline{\lim a_n = 0}$

(ii) $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \underbrace{\dfrac{5\sin(2n) - 2\sin(3n)}{6+\cos(4n)-\cos(5n)}}$

$\lim \dfrac{n}{n^2+1} = \lim \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$

Etwas begrenzten, da cos u. sin in $[-1, 1]$

$\left(\dfrac{-5-2}{6-2} = \dfrac{-7}{4} \leq \text{Wert} \leq \dfrac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow \underline{\lim b_n = 0}$

Vasily Grumit

b)

(i) $M_{HP} = \{0, +\infty\}$, $\limsup = +\infty$, $\liminf = 0$.

(ii) $M_{HP} = \{-1, 1\}$, $\limsup = 1$, $\liminf = -1$.

(iii) $M_{HP} = \{r\}$, $\limsup = \liminf = r$.

(iv) Falls ($q > 1$):

$M_{HP} = \{+\infty\}$, $\limsup = \liminf = +\infty$.

Falls ($q = 1$):

$M_{HP} = \{1\}$, $\limsup = \liminf = 1$.

Falls ($-1 < q < 1$):

$M_{HP} = \{0\}$, $\limsup = \liminf = 0$.

Falls ($q = -1$):

$M_{HP} = \{1, -1\}$, $\limsup = 1$, $\liminf = -1$.

Falls ($q < -1$):

$M_{HP} = \{-\infty, +\infty\}$, $\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$.

A8

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k}$, $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2+k} = \frac{1}{\frac{2}{k}+1} = 1$

$\Rightarrow$ keine Nullfolge somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2+k} = +\infty$.

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}$, Wurzelkriterium.

$\limsup \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)\right|^{\frac{k}{2}}}$, da $k \geq 2$, $k-1 \geq 1$, Betragstriche können weg

$= \limsup \sqrt[k]{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}}} = \limsup \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{3k^2+2k}}$

$= \limsup \frac{\sqrt{k}\sqrt{1-\frac{1}{k}}}{k\sqrt{3+\frac{2}{k}}} = \limsup \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k}}}{\sqrt{k}\sqrt{3+\frac{2}{k}}}$

$= \frac{\limsup \sqrt{1-\frac{1}{k}}}{\limsup \sqrt{k} \cdot \limsup \sqrt{3+\frac{2}{k}}} = \frac{1}{+\infty \cdot 3} = 0$

Somit ist die Reihe absolut konvergent.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$, Wurzelkr. $\left(\frac{1}{0^0} = \frac{1}{1} = 1\right.$

$\limsup \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^k}\right|} = \limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \limsup \frac{1}{k} = 0$

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ ist absolut konvergent $\Rightarrow$

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k^k}$ ist absolut konvergent.

(A8)

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)-(k-1)}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$ (ach wie viel zeit mir der Nenner gekostet hat)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$$

<u>Quotientenkriterium:</u>

$$\lim \left| \frac{3\cdot\left(2^{k}\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}\right)\right)}{3\cdot\left(2^{k+1}\left(\sqrt{k+3}+\sqrt{k}\right)\right)} \right|$$

immer positiv wegen aller $k \geq 1$

$$= \lim \left| \frac{3\cdot 2^k\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}\right)}{6\cdot 2^k\left(\sqrt{k+3}+\sqrt{k-1}\right)} \right| = \lim \frac{3}{6} \cdot \lim \frac{\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1}\right)}{\left(\sqrt{k+3}+\sqrt{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim \frac{\cancel{\sqrt{k}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)}{\cancel{\sqrt{k}}\left(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+1\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}{\left(\sqrt{1}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Das Quotientenkriterium ist erfüllt

=> die Reihe ist ~~divergent~~, konvergent

Vasily Jewuf

(19)

a) (i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2-4} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+3}{3k^2} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{3k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k}$

$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k} = \frac{4}{3} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ ← Harmonische Reihe, ist divergent. (Minorante)

$\Rightarrow$ Reihe ist divergent.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^2+3}{3k^2-4}$

Die Folge $\frac{4k^2+3}{3k^2-4} = \frac{k^2(4+\frac{3}{k^2})}{k^2(3-\frac{4}{k^2})}$

$\lim_{k \to \infty} \frac{4+\frac{3}{k^2}}{3-\frac{4}{k^2}} = \frac{4}{3}$ ist keine Null~~reihe~~ folge

$\Rightarrow$ Die Reihe ist divergent

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ← Harmonische Reihe, ist divergent. (Minorante

$\Rightarrow$ Reihe ist divergent

Vasily [illegible]

b) (i)

(1.) $a_n = \sin n$ ist beschränkt und jede beschränkte Folge in R hat mindestens einen Häufungspunkt

(2.) $b_n = \sin(n^2)$ ist beschränkt und jede b. Folge in R hat mindestens einen HP.

(3.) $c_n = \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$

Beschränkte Folge multipliziert mit einer Nullfolge, hat ist eine Nullfolge.

⇒ Konvergente Folge hat nur Grenzwert als HP, also ein HP aber nicht mehrere.

(ii) 3 für die 3., also $\frac{1}{n} \cdot \sin(n)$

⇒ Nullfolge ⇒ Grenzwert = HP = 0.

Vorlage

Gemacht