Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

25. Juni 2020

$$\tau, \sigma ::= a|b|\tau \to \sigma|\tau \times \sigma$$

$\times e_1 \ \dfrac{\Gamma \vdash t : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash fst\ t : \tau}$
$\times e_2 \ \dfrac{\Gamma \vdash t : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash snd\ t : \sigma}$
$\times i \ \dfrac{\Gamma \vdash t : \tau \qquad \Gamma \vdash s : \sigma}{\Gamma \vdash \{t, s\} : \tau \times \sigma}$
(zum vergleich) $\wedge$-Regeln.
$\wedge e_1 \ \dfrac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}$
$\wedge e_2 \ \dfrac{\tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}$
$\wedge i \ \dfrac{\Gamma \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \theta}$
Regeln:

$fst\{t, s\} \to t$

$snd\{t, s\} \to s$

Beweis " $\Longleftarrow$ ":

Also es wird angenommen, dass $\bar{\Phi}$ inhabited, d.h. wir haben t und Beweis für $\vdash t : \bar{\Phi}$

Wir streichen den Term und ersetzen alle $\times$ durch $\wedge$.

" $\Longrightarrow$ " Es gelte $\vdash \Phi$ (also im logischen gültig).

Lösung: Induktion über Herleitung. (F.U. über die zuletzt angewandte Lösung)

Zu geg. Menge an Annahmen.: $\Gamma = \{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ konstruiere Typkonext ($\bar{\Gamma} = \{x_0 : \bar{\phi}_0, \dots, x_n : \bar{\phi}_n\}$)

Die Fälle $\to_i, \to_e, (Ax)$ bleiben gleich (vgl. Vorlesung)

letzte Regel war $(\wedge - I)$ d.g. letzter Schritt war
$\wedge i \ \dfrac{\Gamma \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma \wedge \theta}$ also aus Vorraussetzungen haben wir im Kontext $\bar{\Gamma} \vdash x_i : \sigma, \bar{\Gamma} \vdash x_j : \theta$ durch Anwendung von $(\times i)$ gilt $\{x_i, x_j\} : \bar{\sigma} \times \bar{\theta}$

$(\wedge e_1)$ per I.V. gibt es im Kontext ein $\Gamma \vdash \{x_1, x_2\} : \phi \times \psi$

Darauf kann man jetzt $(\times e_1)$ anwenden, und erhält $x_1 : \phi$.

Ebenso mit $(\wedge E_2)$ analog.

Beweis: Es reicht einen Term anzugeben, der diesen Typ hat

$\lambda xy.\{\{y, fst\ x\}, snd\ x\}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : p \times q, y : r \vdash y : r} \qquad \dfrac{}{x : p \times q, y : r \vdash fst\ x : p}}{x : p \times q, y : r \vdash \{y, fst\ x\} : (r \times p)} \qquad \dfrac{}{x : p \times q, y : r \vdash snd\ x : q}}{x : p \times q, y : r \vdash \{\{y, fst\ x\}, snd\ x\} : (r \times p) \times q}}{x : p \times q \vdash \lambda y.\{\{y, fst\ x\}, snd\ x\} : r \to (r \times p) \times q}}{\vdash \lambda xy.\{\{y, fst\ x\}, snd\ x\} : p \times q \to r \to (r \times p) \times q}
$$