Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Altmann, Johannes

StudOn-Kennung: geb7qude

Blatt-Nummer: 06

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A15, A16, A17, ________

17/20 *30= 25.5

A 15)

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

b) $0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot 4 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} =$

$\left(5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 5 \cdot \frac{1}{1^2} + 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Beweis?

$\Rightarrow \boxed{0 = 5 + 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = 5 + 4 \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 1 + \frac{4 \cdot \pi^2}{6}$

A: Ja die benötigte Farbe ist endlich

c) $V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$ Auch V konvergiert und endlich viel Beton wird benötigt

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ konvergent für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \cdot 5 - \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = 5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$

$= \underbrace{1 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{\text{Divergent}}$

$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2}}} \Rightarrow$ konvergent $(\alpha = \frac{1}{2} > 0)$

$W_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow$ Ein Turm, der endlich viel Beton aber unendlich viel Farbe benötigt, ist konstruierbar

A16)

a) I) $f(x) = x^3 + \sin x - \cos x$

Bozano: neg. Wert, pos. Wert, stetigkeit $\Rightarrow$ mind. 1 Nullstelle

$\Rightarrow$ Monotonie: Höchstens eine Nullstelle

$\Rightarrow$ Genau 1 Nullstelle

Stetigkeit:

$\sin x$ stetig, $\cos x$ stetig, x^3 stetig

$\Rightarrow$ Verkettete Funktion $f(x)$ stetig

Werte:

$f(0) = 0 + \sin(0) - \cos(0) = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{8} + 1 - 0 > 0$

$\Rightarrow$ mind. eine Nullstelle

Monotonie: 1) x^3 monoton wachsend

$\sin x$ im Intervall wachsend

$-\cos x$ " " "

$\Rightarrow f(x)$ ist monoton wachsend

2) $f'(x) = \underbrace{3 \cdot x^2}_{>0} + \underbrace{\cos x}_{>0} + \underbrace{\sin x}_{>0} > 0$

$\Rightarrow f$ monoton wachsend

$\Rightarrow f(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle

II) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos \pi \cdot x - \frac{1}{2}$ in $(0, \frac{1}{2})$

$f(x)$ stetig, da e^{-x} stetig, $\cos \pi \cdot x$ stetig

$\Rightarrow f(x)$ stetig

$f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ mind. 1 Nullstelle

$f(\frac{1}{2}) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Monotonie: $\underbrace{e^{-x}}_{>0}$ fallend, $\cos \pi \cdot x$ in $(0, \frac{1}{2})$ fallend

$\Rightarrow f(x)$ monoton fallend

$\Rightarrow$ genau 1 Nullstelle

b) $a < b \quad f: [a, b] \to \mathbb{R} \quad f(a) = b \quad f(b) = a$

Fixpunkt auf $g(x) = x$

$f(a)$ und $f(b)$ symmetrisch zur Winkelhalbierenden $g(x) \Rightarrow$ ein Wert Oberhalb, anderer unterhalb von $g(x)$. Aus der Stetigkeit: g(x) muss geschnitten werde

c) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum/Minimum an

$f: D_f \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$ auf $D_f = \{11, 17\} \cup ([-5,5] \setminus (-1,1))$

f durch Verkettung von e^{-x^2} (stetig) und $\sin x$ (stetig), stetig

Kompakte Menge: abgeschlossen und beschränkt

$\Rightarrow f$ ist stetig, D ist kompakt $\Rightarrow$ Minimum, Maximum existiert

A 17)

I) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = \left(\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 2$ ✓ ✓

II $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \dots \sin nx}{x^n} = \lim\limits_{n\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\sin nx}{x}}_{n} \overset{!}{=} n$ ✓ ✓

Extra umformungsschritt

n!

III $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\sin 6x} = 5 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x}\right)^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ✓ ✓

IV $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1 - \cos\frac{x}{2} + \sin 2x} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} + \frac{\cos\frac{x}{2} - 1}{-x}\right)^{-1} = \left(2 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2} - 1}{-x}\right)^{-1} =$ ✓

$\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2} - 1}{\frac{x}{2}}}_{0}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$ ✓

V $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{x} \cdot \sin x \cdot \cos x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x\right) = \cos\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \pi \cdot \cos x\right)$ ✓

$= \cos\left(\lim\limits_{x\to 0} \cos x \, \pi\right) = \cos(\pi) = \cancel{1}\ -1$ ✓