Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

7. Mai 2020

1.

Grammatik:

Sei $e = c|d$ $f(g(c,(\cdot)))$, $g(d,f((\cdot)))$, $g(f((\cdot)),c)$, $h(f((\cdot)),e)$,

$h(f(e),(\cdot))$, $h(f(d),(\cdot))$, $h(f((\cdot)),d)$, $f(h((\cdot),c))$, $g((\cdot),f(e))$, $g(e,f((\cdot)))$.

2.

a)

$h(f(d),d) \to g(d,f(d)) \to h(f(d),d) \to \dots$

b)

$g(f(c),c) \to g(c,c)$

$g(f(c),c) \to f(h(c,c))$

c)

Für eine endlosschleife muss eine Kombination aus Regeln wiederholt werden, da es nur endlich viele Regeln gibt.

Eigenschaft 1:

Man kann sehen, dass in keiner der Regeln f auf der linken Seite öfter steht, als auf der Rechten.

Eigenschaft 2:

Insbesondere Regel (9) ist die einzige Regel, die ein f entfernt.

Für eine endlosschleife muss also gelten:

$\#$ f linke Seite $= \#$ f rechte Seite.

Wenn auf der linken Seite mehr f sind, als auf der Rechten, muss Regel (9) angewandt worden sein. Dies kann aber aufgrund von Eigenschaft 1 nicht Teil einer Schleife sein. Hierbei wird "Schleife" als unendlicher zyklus von regelanwendungen gesehen, vor diesem endlichen Zyklus ist es möglich, dass (9) vorkommt.

Eigenschaft 3:

Eine Regel in einem Zyklus muss nach 4 schritten wiederholt werden, da es nur 4 verschiedene Regeln in einem Zyklus geben kann (Regel 9 fällt raus, vgl oben)

(Dies bedeutet nicht, dass der Term auf den die Regel angewandt wird gleich ist)

Wir betrachten alle Vereinbaren Kombinationen von 2 zyklus-Regeln:

$(13) \circ (10) : f(g(c,y)) \to g(d,f(y))$

$(13) \circ (11) : g(d,f(y)) \to g(y,f(d))$

mit Substitution/Kontext erhält man außerdem:

$(13) \circ (12) : g(f(f(x)), c) \to f(g(x, f(c)))$

$(11) \circ (13) : h(f(d), y) \to h(f(y), d)$

Eine Dreierkette ohne Substitution/Kontext existiert nicht.

mit Substitution/Kontext gibt es:

$(13) \circ (11) \circ (13) : h(f(d), y) \to g(d, f(y))$

$(10) \circ (13) \circ (12) : g(f(f(c)), c) \to h(f(d), c)$

$(11) \circ (13) \circ (11) : g(d, f(d)) \to h(f(d), d)$

Die viererketten mit Substitution/Kontext:

$(11) \circ (13) \circ (11) \circ (13) : h(f(d), d) \to h(f(d), d)$

$(13) \circ (11) \circ (13) \circ (11) : g(d, f(d)) \to g(d, f(d))$

Die einzigen viererketten sind solche, die eine schleife ohne freie Variable beschreiben.

Es gibt also keine möglichkeit aus dieser auszubrechen. (wenn z.B. $f(c)$ in einer dieser loops wäre, könnte man ausbrechen)

Aufgrund von Kontextabgeschlossenheit, gibt es also keine Kette, die (c) erfüllt, selbst wenn man diese formeln in einen größeren Kontext $C(\cdot)$ einsetzt.

$g(f(g(c, d)), c) \overset{10, C=g((\cdot),c), \sigma=[d/y]}{\to} g(h(f(d), d), c) \to \ldots$ wie bei a)

$g(f(g(c, d)), c) \overset{12, \sigma=[g(c,d)/x]}{\to} f(h(g(c, d), c)) \not\to$

1 Präsenzübung

TES:

Terme:

Menge von Funktionssymbolen. Σ-Signatur

für jedes Funktionssymbol eine Stetigkeit $ar\Sigma \to \mathbb{N}$ (wir haben $0 \in \mathbb{N}$ definiert)

Notation für $f \in \Sigma$ mit $ar(f) = n : f/n \in \Sigma$

$t ::= x | f(t_1, \ldots, t_n), f/n \in \Sigma, x \in V$

z.B.: $\Sigma = \{\cdot/2, c/0\}$, wäre $c \cdot c$ oder $c \cdot c \cdot c$

Kontexte:

$C(\cdot) ::= (\cdot) | f(t_1, \ldots, (\cdot), t_n)$

Bsp.: $C(\cdot) = c + (\cdot)$ und wenn $t = c \cdot c$, dann wäre $C(t) = c + t = c + c \cdot c$

Substitution

$\sigma : V \to T_\Sigma(V)$

Termersetzungssysteme: $\to_0 \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$

Einschrittrelation: $\to$ ist der Kontextabgeschlossen und stabile Abschluss von $\to_0$

stabile $s \to t \implies s\sigma \to t\sigma$, Kontextabgeschlossen $s \to t \implies C(s) \to C(t)$

$\{(C(s\sigma), C(t\sigma)) | s \to t, C = \ Kontext, \sigma \ substitution\}$

$t \in T_\Sigma(V)$ heißt normal, wenn man t nicht mehr reduzieren kann $\nrightarrow$ s heißt Normalform von t, wenn $t \to^* s$ und $s \nrightarrow$

$t \in T_\Sigma(V)$ schwach normalisierend, wenn es eine NF gibt.

$t \in T_\Sigma(V)$ stark Normalisierend (SN), wenn jede Ableitung in einer NF endet.

$\to_0$ heißt (stark/schwach) normalisierend, wenn jeder term t (stark/schwach) normalisierend ist.

$A \cdot C \overset{1)\sigma=[c/x]}{\to} B \cdot (C \cdot C) \overset{3)\sigma=[c/x,c/y]}{\to} A \cdot (D \cdot C) \overset{1)\sigma=[DC/x]}{\to} B \cdot (C \cdot D \cdot C) \overset{3)\sigma=[C/x,DC/y]}{\to} A \cdot (D \cdot C) \to loop$

alternativ $A \cdot (D \cdot C) \overset{1)C(\cdot)=(\cdot),\sigma=[DC/x]}{\to} B \cdot (C \cdot (D \cdot C)) \overset{2)C(\cdot)=B\cdot(\cdot),\sigma=[C/x]}{\to} B \cdot (B \cdot (C \cdot C)) \to loop$ wie vorher

oder wenn man regel 4 anwendet $B \cdot (B \cdot (C \cdot C)) \overset{4)\sigma=[c\cdot C/x]}{\to} D \cdot C \cdot C \nrightarrow$

Übung 2:

1. man kann nicht alle Terme bilden $((x_1 \Delta x_2)\Delta x_3)\Delta x_4$ lässt sich mit nur 3 variablen nicht bilden. Also eingeschränkte Ausdrucksmöglichkeit.

verhält sich wie begrenzter Speicher.

2.

$C(\cdot) = (\cdot)|t\Delta(\cdot)|(\cdot)\Delta t$

3.

$t = x_1\Delta(c\Delta x_2) \overset{6)\sigma=[c/x_2,x_2/x_3]}{\to} (x_1\Delta c)\Delta x_2 \overset{5)C(\cdot)=(\cdot)\Delta x_2}{\to} x_1\Delta c \overset{5)}{\to} x_1 \nrightarrow$

$t = x_1\Delta(c\Delta x_2) \overset{7)C=x_1\Delta(\cdot),\sigma[x_1/x_2]}{\to} x_1\Delta x_2 \nrightarrow$