Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Do, Van Anh

StudOn-Kennung: hi97zaba

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

4, 5, 6,

19/21 * 30=27

Mathe Übung 2 SS2020

Aufgabe 4

a) Induktionsanfang $(n=1)$: $\quad a_1 = 1 \in (0,4)$ ✓

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Es gelte $a_n \in (0,4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (IV)

z.z ist: $a_{n+1} \in (0,4)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$ $\qquad a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{2} a_n \in (0,2) \wedge \sqrt{a_n} \in (0,2) \Rightarrow$

$\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

b) z.z $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \qquad \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq 1$, da $\sqrt{a_n} \leq 2$

$\Rightarrow$ Folge ist monoton wachsend

c) Folge ist nach a) nach oben (und unten) beschränkt und nach b) monoton wachsend

$\Rightarrow$ Folge konvergiert gegen ihr Supremum

Grenzwert $= a$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}\right)$$

$$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2} a = \sqrt{a}$$

$a_n \in (0,4) \Rightarrow a = 4$, $a \neq 0$, da monoton wachsend $\Rightarrow$ größerer Wert

Aufgabe 5

a) Induktionsanfang $(n=0)$:

Man braucht nicht nur a_0 sondern auch a_1,weil man später auch zwei mal die Ind

$a_0: \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = 0$ ✓

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Es gelte die Induktionsvoraussetzung $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ ✓

z.Z ist: $a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1} \cdot x_1^2 - x_2^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1} \cdot (\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1} \cdot (\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2}$ ✓ $=$

$\frac{x_1^{n-1} \cdot \alpha x_1 + x_1^{n-1} \beta - x^{n-1} \alpha x_2 + x^{n-1} \cdot \beta}{x_1 - x_2}$ ✓ $= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$

$\alpha a_n + \beta a_{n-1} = \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$ ✓

b) $x^2 = \alpha x + \beta \qquad 0 = -x^2 + \alpha x + \beta$

$$x_{1/2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\cdot(-1)\cdot\beta}}{-2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{-2}$$

I) ja, Folgenglieder wären in $\mathbb{C}$, da unter der Wurzel (Diskriminante) eine negative Zahl stehen wird.

II) nein, unter der Wurzel würde 0 stehen und $x_{1/2}$ wäre demnach: $\frac{-\alpha}{-2} = \frac{\alpha}{2}$
Allerdings würde im Nenner 0 stehen $\Rightarrow$ nicht möglich

c) I) $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4\cdot 1}}{-2} \qquad x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

II) $x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+28}}{-2} \qquad x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{-2} = \frac{4+\sqrt{44}}{2} = \frac{4+2\sqrt{11}}{2} = 2+\sqrt{11}$

$x_2 = 2 - \sqrt{11}$

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2\sqrt{11}}$$

III) $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{-2} \qquad x_1 = -i \qquad x_2 = i$

$$a_n = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-2i}$$

Fall i gerade / ungerade:

Gerade: $\frac{-1-(-1)}{-2i} = 0$

ungerade: $\frac{i^n - (-i)^n}{2i} \Rightarrow$ für $n = 1, 5, 9 \dots \quad \frac{i-(-i)}{2i} = 1$
für $n = 3, 7, 11 \dots \quad \frac{-i-i}{2i} = -1$

Aufgabe 6

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n}{n(3n^2+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3+\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^3}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{5}{n}+2\right)}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{0+2}{0+1}\right)^3 = 8$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \overset{\lim_{n\to\infty}}{\downarrow} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2-9n}} = \overset{\lim_{n\to\infty}}{\downarrow} \frac{n\left(-8+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{2-\frac{9}{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{9}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

d) $$\lim_{n\to\infty} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - n^6 - n^2 - 1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(-1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{-1-0}{1+\sqrt{1}} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

man braucht den limes ganz am ende nicht mehr, weil all

e) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \overset{\lim_{n\to\infty}}{\downarrow} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right) n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)} = \frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-n^2(n+2)}{n^2+2n+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2} =$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty}}{\downarrow} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} -1\cdot\frac{1}{1} = -1$$