Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben IngMathC2

Name, Vorname: Bodky, Daniel

StudOn-Kennung: as37alyj

Blatt-Nummer: 5

Übungsgruppen-Nr: 7

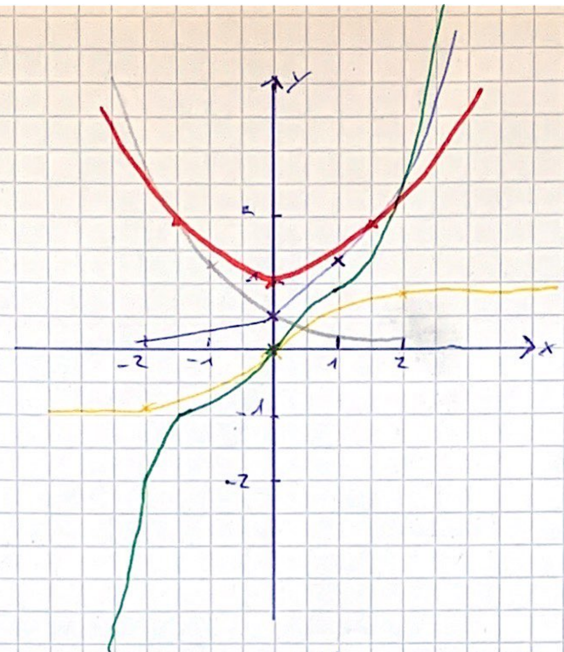
Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A13, A14, ____, ____

13/14 *30=27,5

A 13

a)



$= \frac{1}{2} \exp(x)$

$= \sinh(x)$

$= \cosh(x)$

$= \frac{1}{2} \exp(-x)$

$= \tanh(x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x \cdot (1 - e^{-2x})}{e^x \cdot (1 + e^{-2x})}$

$= \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x \cdot (1 - e^{-2x})}{e^x \cdot (1 + e^{-2x})}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{e^{-2x}} - 1\right)}{e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{e^{-2x}} + 1\right)} = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$

komische Umformung, aber oka

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)^2$

$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$

d) $\cosh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2}$ $\to$ für ungerade k's ist Zähler $= 0$

$\to \cosh(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}}}$

$\sinh(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k}{2}$ $\to$ für gerade k's ist Zähler $= 0$

$\to \sinh(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)!} x^{(1+2k)} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)!} x^{(1+2k)}}}$

e)

$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (-y^2)^k$$

-> $(-1)^k$ und $(-y^2)^k$ haben immer gleiches Vorzeichen -> $\cos(iy)$ immer posi

-> $\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} y^{2k} = \cosh(y)$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (-y^2)^{k+\frac{1}{2}}$$

i rausziehen liefert:i^(2k+1) = i^2

-> $(-1)^k$ und $(-y^2)^{k+\frac{1}{2}}$ haben immer gleiches Vorzeichen

-> $\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} y^{2k+1} = i\sinh(y)$

f) $\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$

g) $\sin(x+iy)$, $x=0$, y beliebig:

$\sin(x+iy) = \sin 0 \cosh y + \cos 0 \sinh y = \sinh y$

-> $\sin(x+iy) = \sinh(y)$ für $x=0$, y beliebig

$$\lim_{y\to+\infty} \sinh y = \lim_{y\to+\infty} \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{2} \xrightarrow{y\to+\infty} \frac{+\infty - 0}{2} = +\infty$$

$$\lim_{y\to-\infty} \sinh y = \lim_{y\to-\infty} \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{2} \xrightarrow{y\to-\infty} \frac{0-(+\infty)}{2} = -\infty$$

Eins reicht schon: sobald man keine obere schranke hat, kann die funktion nicht beschränk

A14

a) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x \in (-1, 1)$

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \pm \frac{"\sqrt{2}"}{0} \quad \to \lim_{x\to -1} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

b) i) $f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

-> Für $x \neq 0$ stetig, da Verkettung stetiger Funktionen

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{1+x+\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

-> die einseitigen Grenzwerte am Punkt $f(0) = 0$ stimmen überein, $f(x)$ ist also stetig.

ii) $g(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

-> Für $x \neq 0$ stetig, s. b)i)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{1+x-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

-> die einseitigen Grenzwerte am Punkt $g(x)$ stimmen nicht überein, $g(x)$ ist also nicht stetig.

c) i) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} - x = 1$

ii) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x\to\infty} x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \infty \cdot 0 = 0$

iii) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{x\to -\infty} x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = -\infty \cdot 0 = 0$

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} x|\sin \pi x|$

sei $x_n := 2n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(x_n) = 2n \overbrace{|\sin 2\pi n|}^{0} \xrightarrow{x_n \to \infty} 0$

sei $\tilde{x}_n := 2n + \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = (2n + \frac{1}{2}) \cdot \underbrace{\left|\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right|}_{1}$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{\tilde{x}_n \to \infty} +\infty$

$\Rightarrow$ Der obige Funktionsgrenzwert existiert nicht.

v) $\lim\limits_{x \to 0} x|\sin \pi x| = 0$

~~immer gl. Vorzeichen sonst immer pos.~~

vi) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x \cos^2 \frac{2}{x}$ $\cancel{= \lim\limits_{x\to 0} \cos x \cos \frac{2}{x} \cos \frac{2}{x} = 1 \cdot \infty = \infty}$

sei $x_n := \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{x_n \to \infty} 0 \Rightarrow f(x_n) = \cos \frac{1}{\pi n} \cos^2 2\pi n \xrightarrow{x_n \to \infty} 1$

sei $\tilde{x}_n := \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\tilde{x}_n \to \infty} 0 \Rightarrow f(\tilde{x}_n) = \cos\left(\frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \cdot \cos^2\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{\tilde{x}_n \to \infty} 0$

$\Rightarrow$ Der obige Grenzwert existiert nicht.