Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

16. Juli 2020

ZV X und Y sind unabhängige, gleichverteilte ZV aus $\mathcal{U}(a,b)$

also ist

$$f^Y(y) = \frac{1}{b-a}1_{(a,b)}$$

$$f^X(x) = \frac{1}{b-a}1_{(a,b)}$$

Dazu die Faltung $Z = X + Y$ wobei $z = x + y \in (a, 2b)$:

$$f^{(X+Y)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^Y(y) f^X(z-y) dy$$

$$f^{(X+Y)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a}1_{(a,b)}(y)\frac{1}{b-a}1_{(a,b)}(z-y)dy$$

$$f^{(X+Y)}(z) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)}(y)1_{(a,b)}(z-y)dy$$

Die letzte Indikatorfunktion liefert $1_{(a,b)}(z-y) \iff z-y \in (a,b) \iff y \in (z-b, z-a) \iff 1_{(z-b,z-a)}(y)$ (weil $z - y = x \in (a,b) \iff y = z - x$, grenzen drehen sich um, weil ich das element der Menge minus nehme).

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)}(y)1_{(z-b,z-a)}(y)dy \iff \frac{1}{(b-a)^2}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)\cap(z-b,z-a)}(y)dy$$

bzw $a < y < b \wedge z - b < y < z - a$

daraus folgt, dass y mindestens $max(a, z-b)$ groß sein muss und höchstens $min(b, z-a)$.

Der erste Randfall liefert $a < z - b \implies a + b < z$ für das untere Intervall, $z - a < b \implies z < a + b$ für das obere.

Explizit muss noch der fall von $a + b = z$ betrachtet werden.

Da sowohl f^X als auch f^Y stetig in (a+b) sind, muss auch deren Produkt stetig sein.

Somit können wir $a + b$ zu einem der Fälle hinzunehmen. (hier dem ersten)

Es gilt $y \in (a, z-a)$ weil y mindestens a sein muss:

daraus folgt $z \leq a + b \wedge y < z - a \implies z \leq a + b \wedge a < z - a \implies z \in (2a, a+b]$

Dieser Teilintegral:

$$\int_a^{z-a} \frac{1}{(b-a)^2}dy = \frac{z-a}{(b-a)^2} - \frac{a}{(b-a)^2} = \frac{z-2a}{(b-a)^2}$$

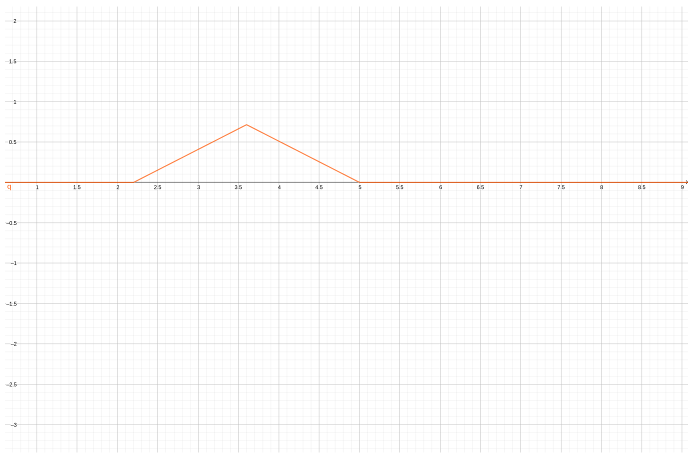
Wenn $z \in (a+b, 2b)$ dann $y \in (z-b, b)$ da y höchstens b werden kann.

(herleitung analog)

$$\int_{z-b}^{b} \frac{1}{(b-a)^2} dy = \frac{b}{(b-a)^2} - \frac{z-b}{(b-a)^2}$$

somit erhalten wir insgesamt:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z-2a}{(b-a)^2} & z \in (2a, a+b] \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2} & z \in (a+b, 2b) \\ 0 & sonst \end{cases}$$



1

Der Träger ist $t_1^2 + t_2^2 \leq 1$ dies ist ein Kreis, somit kann die Verteilungsfunktion nicht stochastisch unabhängig sein.

Umformung nach t_1^2 liefert $t_1^2 \leq 1 - t_2^2$, da $t_1 \in \mathbb{R}$

$$f^X(t_2) = \int_{-\sqrt{1-t_2^2}}^{\sqrt{1-t_2^2}} f(t_1, t_2) dt_1$$

$$f^X(t_2) = \int_{-\sqrt{1-t_2^2}}^{\sqrt{1-t_2^2}} \frac{1}{\pi} dt_1$$

$$f^X(t_2) = [\frac{1}{\pi} t_1]_{-\sqrt{1-t_2^2}}^{\sqrt{1-t_2^2}}$$

$$f^X(t_2) = \frac{1}{\pi}(\sqrt{1-t_2^2}) - (-\frac{1}{\pi}(\sqrt{1-t_2^2}))$$

$$f^X(t_2) = \frac{2}{\pi}(\sqrt{1-t_2^2})$$

analog für y

$$f^Y(t_1) = \int_{-\sqrt{1-t_1^2}}^{\sqrt{1-t_1^2}} f(t_1, t_2) dt_2$$

$$f^Y(t_1) = \int_{-\sqrt{1-t_1^2}}^{\sqrt{1-t_1^2}} \frac{1}{\pi} dt_2$$

$$f^Y(t_1) = \frac{1}{\pi}(\sqrt{1-t_1^2}) - (-\frac{1}{\pi}(\sqrt{1-t_1^2}))$$

$$f^Y(t_1) = \frac{2}{\pi}(\sqrt{1-t_1^2})$$

bei beiden gilt $t_{1/2} \in [0,1]$

Das produkt von $f^X(0)f^Y(0) = \frac{4}{\pi^2} \neq f^{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{\pi}$