Vorlesung 4

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

29. Juni 2020

$$f^Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(y_1-\mu_1)}{2\sigma_1^2} - \frac{(y_2-\mu_2)}{2\sigma_2^2}}$$

ist eine 2d Normalverteilung.

gemeinsame Dichte ist gegeben

s.t.u Y_1, Y_2

ja, in zwei unabhängige Dichten aufteilen(multiplikation geht)

Randdichten

$$f^{Y_1}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(y_1-\mu_1)}{2\sigma_1^2} - \frac{(y_2-\mu_2)}{2\sigma_2^2}} dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(y_1-\mu_1)}{2\sigma_1^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y_2-\mu_2)}{2\sigma_2^2}} dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(y_1-\mu_1)}{2\sigma_1^2}}$$

weil links eine Normalverteilung über $\mathbb{R}$ integriert wird.

Stochastisch unabhängige $Y_1 \dots Y_n$ impliziert:

kommutativität der Zufallsvariablen.

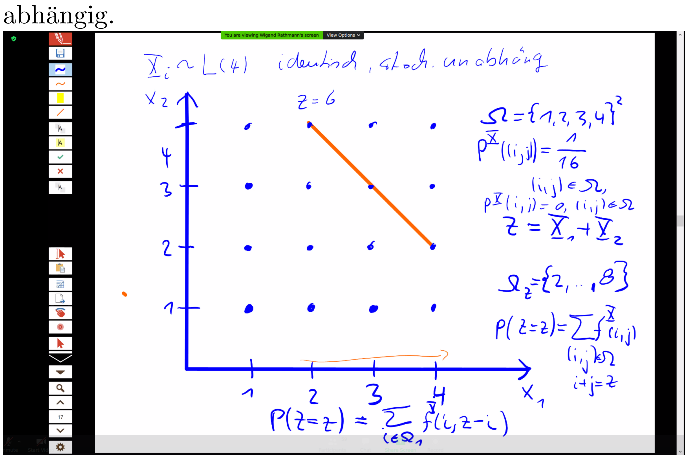
Teilmengen sind stochastisch unabhängig.

disjunkte Gruppen sind stochastisch unabhängig (Y_1, Y_3) und (Y_4, Y_5)

messbear Funktionen von stoch.unabhängigen ZV z.B. $g(Z_1) = Y_1 + 2Y_3^2$ und $h(Z_2) = Y_4 \cdot e^{Y_5}$

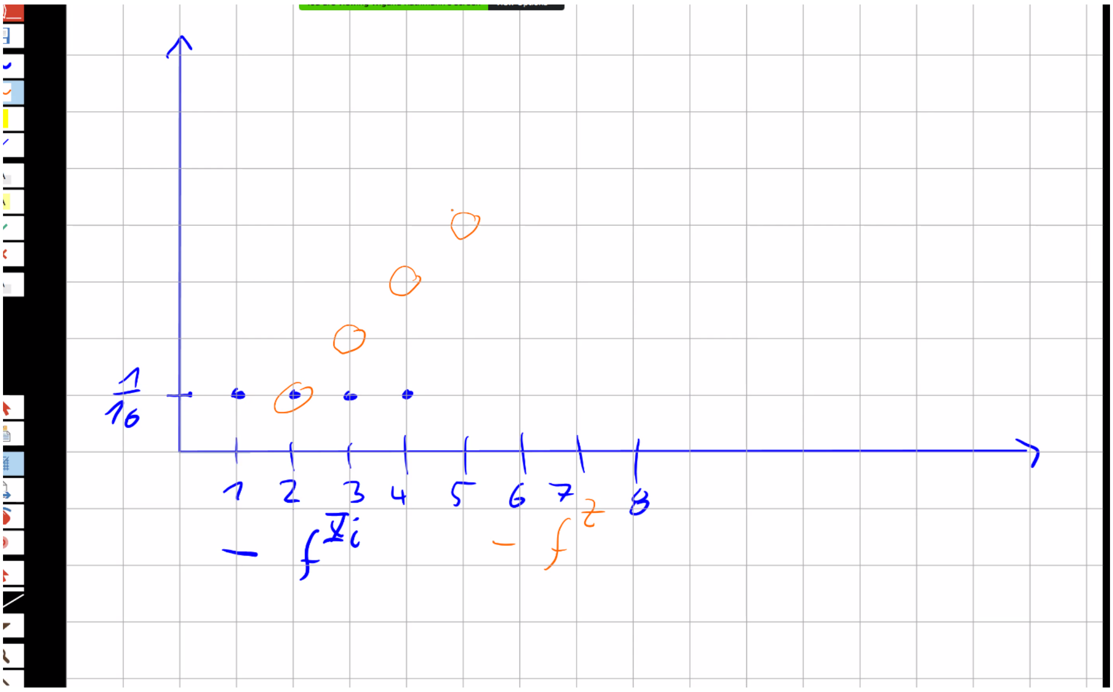
jede konstante ZV ist von anderen ZV stoch.unabhängig.

sind $Y_1 \dots Y_{n-1}$ unabhängig und sind $(Y_1 \dots Y_{n-1}), Y_n$ stoch. unabh., dann auch $Y_1 \dots Y_n$ stochastisch unabhängig.

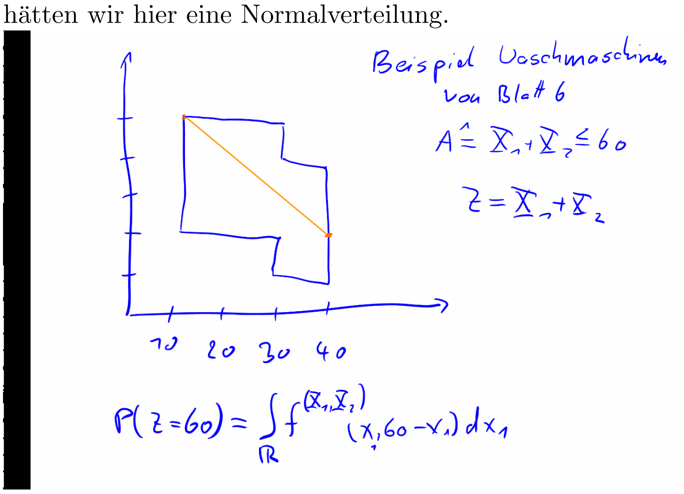


sprich, weil z=i+j, können wir, wenn wir z wählen für jedes i ein zugehöriges j finden. dieses muss $j = z - 1$

$$P(Z = z) = \sum_{i \in \Omega_1} f(i, z - i)$$



man kann hier schon den Zentralen Grenzwertsatz sehen: Wenn wir unendlich viele iid variablen addiert hätten, hätten wir hier eine Normalverteilung.



Beispiele:

N-fach wiederholte Bernoulli-Experimente liefern die Binomialverteilung:

$$B(n, p) = B(p) * \ldots B(p)$$

Die Poisson-Verteilung ist über faltung abgeschlossen:

$$\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Die Geometrische verteilung liefert durch faltung die negative binomialverteilung (wahrscheinlichkeit k-hits zu erhalten ist summe einen hit zu erhalten k-mal)

$$Nb^+(k,p) = \underbrace{Geo^+(p) * \cdots * Geo^+(p)}_{k\ mal}$$

Die Faltung zweier beliebiger Normalverteilter ZV ist wieder Normalverteilt (abschluss unter faltung)

$$\mathcal{N}(a,\sigma^2) + \mathcal{N}(b,\tau^2) = \mathcal{N}(a+b,\sigma^2+\tau^2)$$

Bei Faltung von zwei Gamma-Verteilungen mit gleichem Parameter α ergibt

$$\Gamma_{\alpha,\mu} * \Gamma_{\alpha,\tau} = \Gamma_{\alpha,\mu+\tau}$$

Daraus folgen sonderfälle

$$Exp(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1}$$

$${}^2_1 = \Gamma_{0.5,0.5}$$

Daraus folgt

$$Exp_n(\alpha) = \underbrace{\Gamma_{\alpha,1} * \cdots * \Gamma_{\alpha,1}}_{n}$$

$${}^n_1 = \underbrace{\Gamma_{0.5,0.5} * \cdots * \Gamma_{0.5,0.5}}_{n}$$