Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Pöhl, Celine

StudOn-Kennung: ul14yguf

Blatt-Nummer: 7

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A18, A19, A20, ____

18/20*30 = 27

Ing Math C2 – Blatt 7

A18

a) $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}$ ✓

b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{2x})^4$

$f'(x) = 4 \cdot (x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot (2x + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2) =$

$4 \cdot (x^2 + \sqrt{2x})^3 \cdot (2x + \frac{1}{\sqrt{2x}})$ ✓

c) $f(x) = (x \cdot e^{x^2}) \cdot \ln(2+3x)$

$f'(x) = (x \cdot e^{x^2}) \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3 + \ln(2+3x) \cdot (e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x) =$

$\frac{3 \cdot x \cdot e^{x^2}}{2+3x} + \ln(2+3x) \cdot e^{x^2}(1+2x^2)$ ✓

d) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$ $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$ ✓

e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(x^2+1)}$

$f'(x) = \frac{\ln(x^2+1) \cdot \cos 2x \cdot 2 - \sin 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x}{(\ln(x^2+1))^2}$ ✓ ✓+

$= \frac{2 \cdot \cos 2x \cdot \ln(x^2+1) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot \sin 2x}{(\ln(x^2+1))^2}$

f) $f(x) = x^\alpha$

~~$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$~~

das habt ihr bis jetzt nur für a als ganze Zahl gezeigt, nicht für die Reellen

g) $f(x) = x^{-x^2} = \frac{1}{x^{x^2}} = e^{\ln(x) \cdot (-x^2)}$

$f'(x) = e^{\ln(x) \cdot (-x^2)} \cdot (\ln(x) \cdot (-2x) + \frac{1}{x} \cdot (-x^2)) =$

$\frac{-2x \cdot \ln x - x}{x^{x^2}}$ ✓ ✓+

h) $f(x) = \ln(x + \ln(2\ln x))$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{\ln}(x + \ln(2\ln x))} \cdot (1 + \frac{1}{2 \cdot \ln x} \cdot \frac{2}{x}) =$

$\frac{1 + \frac{1}{x \cdot \ln x}}{\cancel{\ln}(x + \ln(2\ln x))}$ ✓

BRUNNEN

A19

a) $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{\cos(x+h)\cdot\cos(x)}{h}$

$= \frac{\cos x\cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h}$

$= \frac{\cos x\cdot(\cosh -1)}{h} - \sin x\cdot\frac{\sinh}{h}$

ZZ: $\lim_{h\to 0}\frac{\cosh -1}{h} = 0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} = 1$ ✓

$\left(\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| = \frac{1}{|h|}\cdot\left|\left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \dots\right) - h\right| \leq |h|^2\cdot\left(1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^6}{6!} + \dots\right) \leq |h|^2 e^{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0 \right)$

$\rightarrow \frac{d}{dx}\cos x = 0\cdot\cos x - 1\cdot\sin x = -\sin x$ ✓

b)

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \tan' x = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ ✓

i) $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ✓

ii) $\tan' x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + (\tan x)^2$ ✓

c)

i) $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$f = \tan \quad f^{-1} = \arctan$

$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan(\arctan y))^2}$ ✓ $= \frac{1}{1+y^2}$ ✓

ii) $\tan''(x) = (\underset{0}{\underset{\Downarrow}{1}} + \underbrace{(\tan^2 x}_{1+\tan}))' = 2\tan x + 2\tan^3 x$ ✓ ✓

$\tan'''(x) = 2\cdot(1+\tan^2 x) + (2\cdot(\tan x)^3)' =$

$2 + 2\tan^2 x + 3\cdot 2\cdot(\tan x)^2\cdot(1+\tan^2 x) =$

$2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$ ✓ ✓

A20

a) $f(x) = x^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{x^2} \qquad x > 0$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} + x^{\alpha} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-2) \cdot x^{-3} =$

$x^{\alpha-3} \cdot \left(\alpha \cdot \sin\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-0}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{h^2}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \underbrace{h^{\alpha-1}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}_{\text{lim ex. nicht aber } \in [-1,1]}$

für $\alpha = 1$ $\to 1$ $\to$ Dann existiert Grenzwert nicht

für $\alpha > 1$ $\to 0$ $\to$ "0 · "fester Wert"" $= 0$, d.h. $\lim\limits_{h\to 0} h^{\alpha-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$ für $\alpha \neq 1$

für $\alpha < 1$ $\to$ existiert nicht

c) $f'(0)$ existiert für $\alpha > 1$

Stetigkeit an Stelle x_0 bedeutet, dass $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existiert und gleich $f'(x_0)$ ist

$x_0 = 0 \quad f'(x_0) = f'(0) = 0 \ (\text{für } \alpha \neq 1)$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^{\alpha-3}}_{\text{für } \alpha>3 \to 0} \cdot \left(\alpha \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x^2} \cdot x^2}_{0} - \underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\in[-2,2]}\right)$

$\to$ für $\alpha > 3$ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$

$\to$ sonst ex. nicht

d) $f''(x) = \left(x^{\alpha-3} \cdot \left(\alpha \cdot \sin\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' =$

$(\alpha-3) \cdot x^{\alpha-4} \cdot \left(\alpha \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) +$

$x^{\alpha-3} \cdot \left(\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot 2x + \alpha \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{2}{x^3}\right) \cdot x^2 - \right.$

$\left. 2 \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) =$

$= (\alpha-3) \cdot x^{\alpha-4} \cdot \left(x^2 \alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$+ x^{\alpha-3} \cdot \left(2x\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\alpha \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} - \frac{4\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}\right.$

BRUNNEN