Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
Ing Math C2

Name, Vorname: Frank, Jonathan

StudOn-Kennung: yk34alis

Blatt-Nr: 4

5/10 *30 = 15

Übungsgruppen-Nr: 7

die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei: A10, A11, A12

A12 a) i) $\exp(3ix) = \exp(ix)^3$

$\hookrightarrow \overset{\cos}{\cancel{\exp}}(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^2 \cdot (\cos x + i\sin x)$

$\Leftrightarrow \cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x)\cdot(\cos x + i\sin x)$

$\Leftrightarrow \cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$

Aufspalten in I -> Realteil, II -> Imaginärteil

I) $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

II) $\sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

->I): $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\cos x$

$= \cos^3 x - 3\cdot(\cos x - \cos^3 x)$

$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = \underline{\underline{4\cos^3 x - 3\cos x}}$

->II): $\sin(3x) = 3\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\sin x - \sin^3 x$

$= 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x = \underline{\underline{3\sin x - 4\sin^3 x}}$

ii) $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$

$= (2\sin(x)\cos(x))\cdot\cos(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cdot\sin(x)$

$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$

$= 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) + (1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x)$

$= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - \sin^3(x) - \sin^3(x)$

$= \underline{\underline{3\sin(x) - 4\sin^3(x)}}$

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$

$$= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - (2\sin(x)\cos(x))\sin(x)$$

$$= \cos^3(x) - \cos(x)\sin^2(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$$

$$= \cos^3(x) - \cos(x)(1-\cos^2(x)) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)$$

$$= \cos^3(x) - \cos(x) + \cos^3(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$$

$$= \underline{\underline{4\cos^3(x) - 3\cos(x)}}$$

b) i) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$ mit $x = \pi/3$ eingesetzt:

$\Leftrightarrow \sin(3\cdot\frac{\pi}{3}) = 3\sin(\pi/3) - 4\sin(\pi/3)^3$

$= \sin(\pi) = 3\sin(\pi/3) - 4\sin(\pi/3)^3$

darf vorausgesetzt werden ?

$\Rightarrow 0 = 3\sin(\pi/3) - 4\sin(\pi/3)^3 \quad | : \sin(\pi/3)$, möglich wg $\neq 0$ Voraussetzung!

$\Leftrightarrow 0 = 3 - 4\sin(\pi/3)^2$

$\Leftrightarrow 3 = 4\sin(\pi/3)^2$

$\Leftrightarrow 3/4 = \sin(\pi/3)^2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\sin(\pi/3) = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\cos(\pi/3)$: $\quad \sin(\pi/3)^2 = 1 - \cos(\pi/3)^2$

$-\sin(\pi/3)^2 + 1 = \cos(\pi/3)^2$

$\Rightarrow \cos(\pi/3) = \sqrt{-\sin(\pi/3)^2+1}$ ~~$= -\sin(\pi/3)+1$~~

$= \sqrt{-(\sqrt{3/4})^2+1} = \sqrt{-3/4+1} = \sqrt{1/4} = \underline{\underline{1/2}}$

ii) Formel eingesetzt: $\cos(\pi/6 \cdot 2) = 1 - 2\sin^2(\pi/6)$

$\cos(\pi/3) = 1 - 2\sin^2(\pi/6)$

$\Rightarrow 2\sin^2(\pi/6) = 1 - \cos(\pi/3)$

$= \sin^2(\pi/6) = 1/2 \cdot (1-\cos(\pi/3)) = 1/2 \cdot (1 - 1/2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

$\Rightarrow \sin(\pi/6) = \sqrt{1/4} = \underline{\underline{1/2}}$

$\cos(\pi/6) = \sqrt{1-\sin(\pi/6)^2} = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{1-1/4} = \underline{\underline{\sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

iii) $\cos(\pi/12 \cdot 2) = 1 - 2\sin^2(\pi/12)$

$\cos(\pi/6) = 1 - 2\sin^2(\pi/12)$

gleiches Prozedere, spring: $\quad \sin^2(\pi/12) = 1/2 \cdot (1-\cos(\pi/6))$

$\sin(\pi/12) = \sqrt{1/2 \cdot (1-\cos(\pi/6))} = \sqrt{1/2 \cdot (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \sqrt{1/2 - \frac{\sqrt{3}}{4}}$

$$\Rightarrow \sin(\pi/12) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{1-\sin(\pi/12)^2} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

A11 a) i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k} \cdot x^k$, $\limsup_k \sqrt[k]{\frac{|5|^k}{|k|}} = \frac{5}{\sqrt[k]{k}} = 5$, $\Rightarrow$ Radius $R = \frac{1}{5}$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\sqrt{k+1}\right)^{2k} - \left(\sqrt{k-\sqrt{k}}\right)^{2k} \right) \cdot x^k = \sum \left(k+1-k-\sqrt{k}\right)^k \cdot x^k = (1-\sqrt{k}) \cdot x^k$

wie kommst du hier hin?

$\limsup_k \sqrt[k]{(1-\sqrt{k})^k} = 1-\sqrt{k} = -\infty \Rightarrow R = 0$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} (k!+2)\, x^k$, $\limsup_k \underbrace{\sqrt[k]{k!}}_{\infty} + \underbrace{\sqrt[k]{2}}_{0}$

$\infty + 0 \Rightarrow \infty$, $R = 0$

iv) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} x^{4k} \Rightarrow \sum_{\tilde{k}=0}^{\infty} a_{\tilde{k}} \cdot x^{\tilde{k}}$ mit $\tilde{k} = 4k$
$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4}\tilde{k}$

Fallunterscheidung $a_{\tilde{k}}$ $\begin{cases} 0, & \text{für } \tilde{k} \text{ nicht durch 4 teilbar} \\ \sqrt[\tilde{k}]{\frac{2^{\frac{\tilde{k}}{4}}}{(\frac{\tilde{k}}{4})^2}}, & \text{für } \tilde{k} \text{ durch 4 teilbar} \end{cases}$

4^2 = 16

$$\hookrightarrow \frac{\sqrt[\tilde{k}]{(2^{1/4})^{\tilde{k}}}}{\sqrt[\tilde{k}]{\frac{1}{8} \cdot k^2}} = \frac{2^{1/4}}{\sqrt[\tilde{k}]{1/8} \cdot \sqrt[\tilde{k}]{k^2}} \rightarrow \text{Zähler < Nenner, geht gegen 0}$$

$\hookrightarrow$ Radius $R = \infty$

gehen beide nach 1

b) Substitution: $y^k = \left(\frac{1}{x+3}\right)^k$

$\hookrightarrow S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt[k]{3k} + \frac{4}{\sqrt[k]{k!}} + 1\right)^k \cdot y^k$

$\limsup_k$: $\sqrt[k]{\left(\sqrt[k]{3k} + \frac{4}{\sqrt[k]{k!}} + 1\right)^k} = \underbrace{\sqrt[k]{3k}}_{1} + \underbrace{\frac{4}{\sqrt[k]{k!}}}_{0} + \underbrace{1}_{1} = 2$, $R_y = \frac{1}{2}$

$\cancel{\text{Radius } y = \frac{1}{\text{Radius } x + 3}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{x+3}$ $\quad | \cdot (x+3)$

$\frac{1}{2} \cdot (x+3) = 1 \quad | \cdot 2$

$x+3 = 2$

$x = -1$

y<R_y ==> |1/x+3| < R_yauflös

gesuchte offene Menge:
$\cancel{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$

A10 a) i) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ $\rightarrow a_k := kq^k$, $b_k := q^k$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} kq^k \cdot q^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} k \cdot q^{n-k+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} k \cdot q^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{k=0}^{n} k$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}$, $\Rightarrow$ $k+1 = \tilde{k}+2$, $\tilde{k} = k+1-2 = k-1$

$\hookrightarrow \tilde{k}: \sum_{\tilde{k}=-1}^{n-1} \frac{1}{\tilde{k}+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}$ $\rightsquigarrow$ Was bleibt übrig: $\frac{1}{(-1)+2} - \frac{1}{n+2}$

$\hookrightarrow 1 - \underbrace{\frac{1}{n+2}}$

0, da $n \to \infty$ abgeschätzt,

Grenzwert also $\underline{\underline{= \frac{1}{1} = 1}}$