Übung 7

Alexander Mattick Kennung: qi69dube

Kapitel 1

2. Juli 2020

ZV X und Y sind unabhängige, gleichverteilte ZV aus $\mathcal{U}(a, b)$
also ist

$$f^Y(y) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}$$

$$f^X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}$$

Dazu die Faltung $Z = X + Y$ wobei $z = x + y \in (a, 2b)$:

$$f^{(X+Y)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^Y(y) f^X(z-y) dy$$

$$f^{(X+Y)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(y) \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(z-y) dy$$

$$f^{(X+Y)}(z) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)}(y) 1_{(a,b)}(z-y) dy$$

Die letzte Indikatorfunktion liefert $1_{(a,b)}(z-y) \iff z - y \in (a, b) \iff y \in (z-b, z-a) \iff 1_{(z-b,z-a)}(y)$ (weil $z - y = x \in (a, b) \iff y = z - x$, grenzen drehen sich um, weil ich das element der Menge minus nehme).

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)}(y) 1_{(z-b,z-a)}(y) dy \iff \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(a,b)\cap(z-b,z-a)}(y) dy$$

Wenn $z \in (a, a + b)$ dann gilt $y \in (a, z - a)$ weil y mindestens a sein muss. Dieser Teilintegral:

$$\int_a^{z-a} \frac{1}{(b-a)^2} dy = \frac{z-a}{(b-a)^2} - \frac{a}{(b-a)^2} = \frac{z-2a}{(b-a)^2}$$

Wenn $z \in (a + b, 2b)$ dann $y \in (z - b, b)$ da y höchstens b werden kann.

$$\int_{z-b}^{b} \frac{1}{(b-a)^2} dy = \frac{b}{(b-a)^2} - \frac{z-b}{(b-a)^2}$$

somit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{cases} \frac{b}{(b-a)^2} - \frac{z-b}{(b-a)^2} & z \in (a+b, 2b) \\ \frac{z-2a}{(b-a)^2} & y \in (a, z-a) \end{cases}$$