Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: Vuckovic Almir

StudOn-Kennung: la82cyxy

Blatt-Nummer: 2

Übungsgruppen-Nr: 7

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A4, A5, A6, ____

19/21 *30=27

Alenić Vucesović, la82ayxy

(A4

a) IA: $(n=1)$ $\quad a_1 = 1 \in (0,4)$ ✓

IS: $(n \to n+1)$: Es gilt $a_n \in (0,4)\ \forall n \in \mathbb{N}$ (IV)

z.z.: $a_{n+1} \in (0,4)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}$

$a_n \in (0,4) \Rightarrow \frac{1}{4} a_n \in (0,2) \wedge \sqrt{a_n} \in (0,2) \Rightarrow$

$\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n} \in (0,4)$

b) z.z.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\quad \frac{\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq 1$, da $\sqrt{a_n} \leq 2$

$\Rightarrow$ Folge ist monoton wachsend

c) Folge ist nach a) nach oben (und unten) beschränkt und nach b) monoton wachsend

$\Rightarrow$ Folge konvergiert gegen ihr Supremum

Grenzwert $= a$

$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} a_n + \sqrt{a_n}\right)$

$a = \frac{1}{2} a + \sqrt{a}$

$a_n \in (0,4) \Rightarrow a = 4$, $a \neq 0$, da monoton wachsend

$\Rightarrow$ größerer Wert

HA5 Alicia Wuesowiz, la 82ayxy

a) IA: $(n=0)$

$$a_0 = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1 - x_2} = 0 \quad \checkmark$$

Du brauchst auch immer a_(n-1), deshalb musst du das auch in der IV a

IS: $(n \to n+1)$: Es gelte die IV $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

z.z. gilt

$$a_{n+1} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1} \cdot x^2 - x^{n-1} \cdot x_2^2}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{x_1^{n-1}(\alpha x_1 + \beta) - x_2^{n-1} \cdot (\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n-1} \cdot \alpha x_1 + x_1^{n-1}\beta - x_2^{n-1}\alpha x_2 + x_1^{n-1} \cdot \beta}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$$

$$\alpha a_n + \beta a_{n-1} = \alpha \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} + \beta \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{\alpha(x_1^n - x_2^n) + \beta(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$$

b) $x^2 = \alpha x + \beta \qquad 0 = -x^2 + \alpha x + \beta$

$$x_{1/2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(-1)\beta}}{-2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{-2}$$

I ja, Folgenglieder wären in $\mathbb{C}$, da unter der Wurzel eine negative Zahl stehen würde

II nein, unter der Wurzel würde 0 stehen und $x_{1/2}$ wäre demnach $\frac{-0}{-2} = \frac{\pm}{2}$. Allerdings würde im Nenner stehen $\Rightarrow$ nicht definiert

c) I) $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1}}{-2}$ $\quad x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

II $x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+28}}{-2}$ $\quad x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{-2} = 2+\sqrt{11}$

$x_2 = 2-\sqrt{11}$

$a_n = \frac{(2+\sqrt{11})^n - (2-\sqrt{11})^n}{2-\sqrt{11}}$

III $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{-2}$ $\quad x_1 = -i \quad x_2 = i$

$a_n = \frac{(-i)^n - (i)^n}{-2i}$

Fall i gerade / ungerade:

Gerade: $\frac{-1-(1)}{-2i} = 0$

ungerade: $\frac{i^n - (-i)^n}{2i} =$ für $n = 1, 5, 9 \ldots$ $\frac{i-(-i)}{2i} = 1$

für $n = 3, 7, 11 \ldots$ $\frac{-i-i}{2i} = -1$

Almir Vucetović, la 8Layxy

1A6

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n}{n(3n^2+4)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+2n}{1+n}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{5}{n}+2\right)}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}\right)^3 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+9n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1-2n^2-9n}{\sqrt{2n^2+n+1}+\sqrt{2n^2-9n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{9}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 - \sqrt{n^6+n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-n^6-n^2-1}{n^3+\sqrt{n^6+n^2+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(-1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{-1-0}{1+\sqrt{1}} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4+n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+\sqrt[4]{n^4-n^3}\right)\left(\sqrt{n^4+n^3}+\sqrt{n^4-n^3}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right) n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)} = \frac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)-n^2(n+2)}{n^2+2n+n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-n^3-2n^2}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+3n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} -1 \cdot \frac{1}{1} = -1$

Alicia Vucetović, 1a 8Layxy