Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC2

Name, Vorname: _Sadeghi, Sara_

StudOn-Kennung: _ky40jemy_

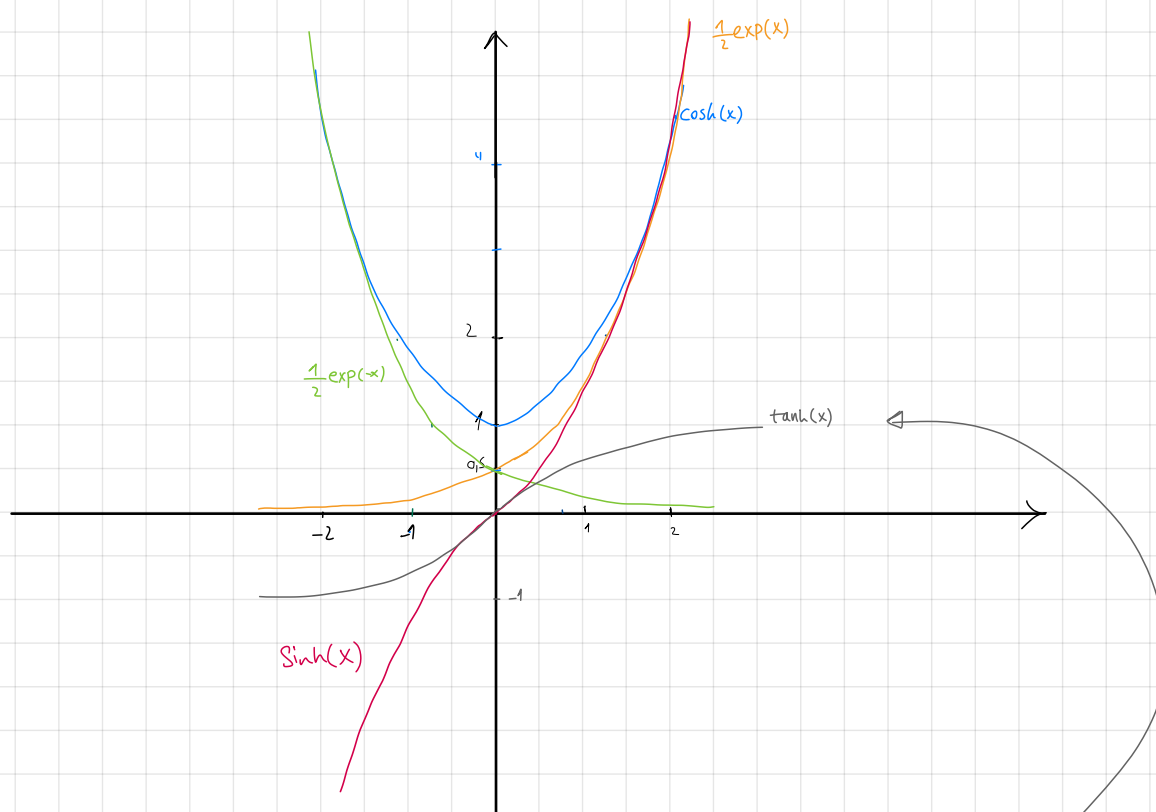Blatt-Nummer: _05_

Übungsgruppen-Nr: _07_

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

_A13_, _A14_,_____, _____

a)

Graph showing: $\frac{1}{2}\exp(x)$ (orange), $\cosh(x)$ (blue), $\frac{1}{2}\exp(-x)$ (green), $\tanh(x)$ (gray), $\sinh(x)$ (red).

b)
$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}}{\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = 1$$

$x \to +\infty$
$e^{2x} \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$x \to -\infty$
$e^{-2x} \to 0$

c)
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

d)
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^k\right)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad da \quad \frac{1 + (-1)^k}{2} = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade.} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - (-1)^k\right)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e)
$$\cos(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(iy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} i^2 y^2 \cdot (iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot(-i)^k \cdot y^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cosh(y)$$

$$\sin(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(-i)^k y^{2k} iy = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sinh(x)$$

f)
$$\sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

g)
$$\sin(x + iy) = \sin(0)\cosh(y) + i(\cos 0)\sinh(y) = i\sinh(y) \Rightarrow \text{nicht beschränkt}$$
$x := 0$

$\underbrace{}_{\text{unbeschränkt}}$
$\in (-\infty, +\infty)$

$$|\sin(z)|^2 = \sin^2(\operatorname{Re} z) + \underbrace{\sinh^2(\operatorname{Im} z)}_{\text{nicht beschränkt}}$$

A14

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \\ \sqrt{1-x^2} > 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow D_f = (-1,1)$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \overset{\to 2}{\lim\limits_{x \to -1^+} 1-x} + \overset{\to +\infty}{\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2 \cdot +\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)} = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & x > 0 \quad \overset{\text{stetig}}{} \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \overset{\text{stetig}}{}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x > 0} f(x) = \lim\limits_{x > 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = 0$ $\quad\left(-\dfrac{1}{x} \xrightarrow{x > 0} -\infty, \ e^y \text{ für } y \to 1-\infty \text{ gegen } 0 \text{ geht}\right)$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim 0$

$\to$ wir haben gezeigt, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Da $f(0) = 0 \Rightarrow f$ an der Stelle $x_* = 0$ stetig $\Rightarrow$ überall stetig

$g(x) = \begin{cases} e^{1+x-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} e^{1+x-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \searrow 0} e^1 e^x e^{-\frac{1}{x}} = e \cdot \lim\limits_{x \searrow 0} e^x e^{-\frac{1}{x}} = e \cdot \underset{\to 1}{\lim\limits_{x \searrow 0} e^x} \cdot \underset{\to 0}{\lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}} = 0$

$\left[\text{Da } \lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \searrow 0} -\frac{1}{x}} = e^{-\overset{\to\infty}{\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0\right]$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = e \cdot \underset{\to 1}{\lim\limits_{x \nearrow 0} e^x} \cdot \underset{\to \infty}{\lim\limits_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}}} = e \cdot \infty = \infty$ $\quad \left[\text{Da } e^{\lim\limits_{x \nearrow 0} -\frac{1}{x}} = e^{-\overset{\to -\infty}{\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty\right]$

$f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) \Rightarrow$ unstetig

c) i) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \sqrt{0^2 + 0 + 1} - 0 = 1 \qquad (x_* = 0)$

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\left(1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} + 1\right)} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim\limits_{y \to \infty} \sqrt{y^2 - y + 1} + y = \lim\limits_{y \to \infty} y + \overset{\text{stärker}}{\lim\limits_{y \to \infty} \sqrt{y^2 - y + 1}} = \infty + \infty = \infty$

$x := -y$

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot |\sin \pi x| = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \overset{\to 0 \text{ oder } 1}{\lim\limits_{x \to +\infty} |\sin \pi x|}$

für die Folge $x_n := n$ ist $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_* = +\infty$ und $f(x_n) = \underset{= 0}{|\sin \pi n|} = 0$

und für die Folge $x_n := n + 1$ ist auch wieder $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_* = +\infty$ aber $f(x) = \underset{=1}{|\sin \pi n + \frac{\pi}{2}|} = 1$

$\Rightarrow$ verschiedene Grenzwerte für $g(x) \Rightarrow$ Funktionsgrenzwert nicht existiert.

v) $\lim\limits_{x\to 0} x \left| \sin \pi x \right| = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left| \sin \pi x \right| = 0 \cdot 0 = 0$ ✓

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x \; \cos^2 \dfrac{2}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}_{=1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 \dfrac{2}{x} \nearrow^{\;0 \text{ oder } 1}$

1. $f(x) = \cos^2 \dfrac{2}{x} \Rightarrow x_n := \dfrac{1}{\pi n}$ ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_* = 0$ und $f(x_n) = \cos^2(2\pi n) = 1$ ✓

2. $f(x) = \cos^2 \dfrac{2}{x} \Rightarrow x_n := \dfrac{2}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$ ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_* = 0$ und $f(x_n) = \cos^2\left(\pi n + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ ✓

Verschiedene Grenzwerte für $g(x) = \cos x \, \cos^2 \dfrac{2}{x} \Rightarrow$ Grenzwert nicht existiert.