Deckblatt für die Abgabe der Übungsaufgaben
IngMathC1

Name, Vorname: Rück, Julia

StudOn-Kennung: cy06leco

Blatt-Nummer: 03

Übungsgruppen-Nr: 07

Die folgenden Aufgaben gebe ich zur Korrektur frei:

A7, A8, ____, ____

8/10*20=16

A 7

(i) $a_n = \dfrac{5+(-1)^n + \frac{1}{n}\sin n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\overbrace{(-1)^n}^{\in[-1,1]} + \frac{1}{n}\overbrace{\sin n}^{\in[-1,1]}}{n^2}$$

$$\frac{5+1+\frac{1}{n}\cdot 1}{n^2} \leq \frac{5+(-1)^n+\frac{1}{n}\sin n}{n^2} \leq \frac{5+-1+\frac{1}{n}\cdot(-1)}{n^2}$$

$$\frac{6+\frac{1}{n}}{n^2} \leq a_n \leq \frac{4-\frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\cdot(\underbrace{6}_{\to 6}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}) \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\cdot(\underbrace{4}_{\to 4}-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})$$

$\hookrightarrow \lim a_n = 0$

ii) $$\lim \frac{n}{n^2+1} \cdot \lim \frac{\overbrace{5\sin(\overbrace{2n}^{\in[-1,1]})}^{\in[-5,5]} - \overbrace{2\sin(\overbrace{3n}^{\in[-1,1]})}^{\in[2,-2]}}{6+\underbrace{\cos(4n)}_{\in[-1,1]}-\underbrace{\cos(5n)}_{\in[-1,1]}}$$

$$\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{-5+2}{6+1+1} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{\overbrace{5-2}^{3}}{\underbrace{6-1-1}_{4}}$$

$$\frac{-3n}{8n^2+8} = \frac{-3}{8n+\frac{8}{n}} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\cdot\frac{-3}{8+\frac{8}{n^2}}}_{\to 0} \leq a_n \leq \frac{3n}{4n^2+4} = \frac{3}{4n+\frac{4}{n}} = \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{3}{4+\frac{4}{n^2}}}_{\to 0}$$

$\hookrightarrow \lim a_n = 0$

b) i) $M = \{ 0, +\infty \}$

für ungerades n: $\liminf = 0$
für gerades n: $\limsup = +\infty$

ii) $M = \{ 1, -1 \}$

$\limsup = 1$
$\liminf = -1$

iii) $M = \{[-17, 0], [18, +\infty)\}$

$$a_n = \begin{cases} -n & \text{falls } n \leq 17 : \quad \liminf = -17 \\ n & \text{falls } n > 17 : \quad \limsup = +\infty \end{cases}$$

iv) $M = \{ +\infty, 0, 1, -\infty \}$

$q > 1$: $\liminf = a_1$, $\limsup = +\infty$
$q = 1$:
$0 < q < 1$ $\limsup a_1$, $\liminf = 0$
$q = 0$
$-1 < q < 0$: $\liminf = a_1$, $\limsup = a_2$
$q = -1$
$q < -1$ $\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$

A8)

a) $\lim \frac{k}{2+k} = \lim \frac{k}{k(\frac{2}{k}+1)} = \lim \frac{1}{\underbrace{\frac{2}{k}}_{\to 0}+1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$

↳ die Reihe ist divergent

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt[2]{\underbrace{\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k}_{\hat{=}\, a_k}}$, da $\sqrt{a} = a$

$\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k-1}{3k^2+2k}\right)^k\right|} = \frac{k-1}{3k^2+2k} \leq \frac{2-1}{3\cdot 2^2+2\cdot 2} = \underbrace{\frac{1}{16}}_{\hat{=}\, q<1} \quad \forall k \geq 2$

(→ weil a_k immer >0 ist, werden die Betragsstriche weggelassen)

↳ die Reihe ist konvergent

c) $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{\sin k}{k^2}} = \frac{\overbrace{\sqrt[k]{\sin k}}^{\leq 1}}{\underbrace{\sqrt[k]{k^k}}_{\infty}} \leq \frac{1}{k} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hat{=}\, q} < 1 \quad \forall k \geq 2$

$\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \;\forall k$ → die Reihe ist divergent

$\sqrt[k]{a_k} \leq q \;\forall k$ und $q<1$ → die Reihe ist konvergent

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}}{2^k}$

$\sum \frac{k+2-(k-1)}{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})} = \sum \frac{\cancel{1}\; 3}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}$

grenzen müssen da bleiben!

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{2^{k+1}(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})}}{\frac{1}{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}} = \frac{1}{2^{k+1}(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} \cdot \frac{2^k(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{1}$

genauer begründen!

$= \frac{2^k \cdot (\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{2^{k+1}(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \cdot \frac{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-1})}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k})} < 1$

↳ die Reihe ist konvergent