Sitzung 24

Markow-Ketten

Sitzung *Mathematik für Ingenieure C4: INF* vom 24. Juli 2020

Wigand Rathmann

Lehrstuhl für Angewandte Analysis
Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nünrberg (FAU)

Fragen

Wo ist der Fehler?

400 Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (ungefähr), dass mehr als 220 Münzen die gleiche Seite zeigen.

A 0,025 — 30 %

B 0,050 — 5 %

C 0,159 — 65 %

Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{\mathrm{Str}\, S_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mathrm{E}\, X_1}{\sqrt{n}\, \mathrm{Str}\, X_1} \xrightarrow{V} Y$$

$X_1 \sim L(2),\ \Omega_x = \{0,1\}$

oder $X_1 \sim B(\frac{1}{2}),\ \mathrm{E}X = \frac{1}{2}$

$\mathrm{Var}\, X_1 = \frac{1}{4},\ \mathrm{St.}\, X_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{400} X_i - 400 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{400} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{S_{400} - 200}{10}$$

$$1 - \Phi\left(\frac{220-200}{10}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 =$$

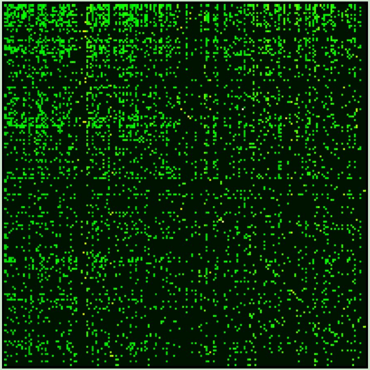
Ziel dieses Themas

1. Sie wissen was ein stochastischer Prozess ist.
2. Sie können einfache Markow-Prozesse modellieren.
3. Sie können Markow-Prozesse beschreiben und analysieren.
4. Sie können Gleichgewichtsverteilungen bestimmen.

FIXPUNKT

Beispiel 8.1 (Google-Page-Rank)

Die **Google-Matrix** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des **Page-Rank-Algorithmus** entsteht.

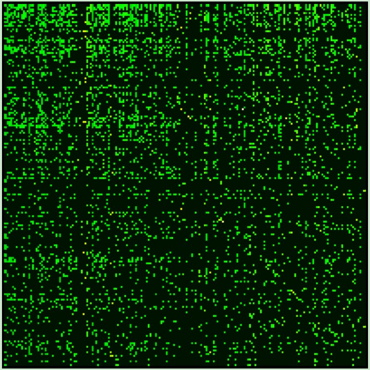


Zur Berechnung der **Page-Ranks** ist man insbesondere an der Existenz und Vielfachheit von **Linkseigenvektoren** der Matrix interessiert. **Warum ?**

Quelle: Wikipdeia 2018

Beispiel 8.1 (Google-Page-Rank)

Die **Google-Matrix** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des **Page-Rank-Algorithmus** entsteht.

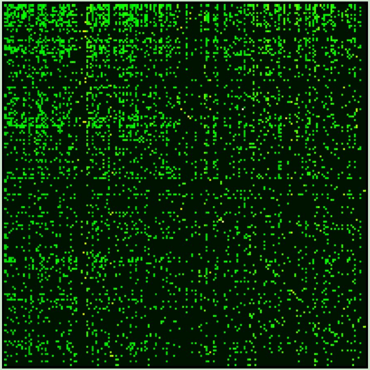


Zur Berechnung der **Page-Ranks** ist man insbesondere an der Existenz und Vielfachheit von **Linkseigenvektoren** der Matrix interessiert. **Warum ?**

Quelle: Wikipdeia 2018

Beispiel 8.1 (Google-Page-Rank)

Die **Google-Matrix** ist eine quadratische Matrix, die bei der Konstruktion des **Page-Rank-Algorithmus** entsteht.



Zur Berechnung der **Page-Ranks** ist man insbesondere an der Existenz und Vielfachheit von **Linkseigenvektoren** der Matrix interessiert. **Warum ?**

Quelle: Wikipdeia 2018

Definition 8.2 (Stochastischer Prozess)

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Bildbereich Ω' (Zustandsraum, Zustandsmenge), ein Zeitbereich T (oft $T \subset \mathbb{R}$) und zu jedem $t \in T$ eine ZV $X_t : \Omega \to \Omega'$, die den Zustand zum Zeitpunkt t angibt. Dann heißt $(X_t) := (X_t, t \in T)$ ein **stochastischer Prozess**.

Satz 8.3 (Satz von Ionescu-Tulcea)

Zu einer Folge von Ergebnismengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots,$ einer Dichte f_1, und einer Folge von Übergangsdichten $f_2^1, f_3^2, \ldots$ gibt es ein W-Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \text{über} \qquad \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

so dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$, die durch endlich viele Beobachtungen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bestimmt sind, in dem entsprechenden n-stufigen Koppelungsmodell berechnet werden können.

Definition 8.2 (Stochastischer Prozess)

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Bildbereich Ω' (Zustandsraum, Zustandsmenge), ein Zeitbereich T (oft $T \subset \mathbb{R}$) und zu jedem $t \in T$ eine ZV $X_t : \Omega \to \Omega'$, die den Zustand zum Zeitpunkt t angibt. Dann heißt $(X_t) := (X_t, t \in T)$ ein **stochastischer Prozess**.

Satz 8.3 (Satz von Ionescu-Tulcea)

Zu einer Folge von Ergebnismengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots,$ einer Dichte f_1, und einer Folge von Übergangsdichten $f_2^1, f_3^2, \ldots$ gibt es ein W-Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \textit{über} \qquad \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

so dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$, die durch endlich viele Beobachtungen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bestimmt sind, in dem entsprechenden n-stufigen Koppelungsmodell berechnet werden können.

Definition 8.2 (Stochastischer Prozess)

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Bildbereich Ω' (Zustandsraum, Zustandsmenge), ein Zeitbereich T (oft $T \subset \mathbb{R}$) und zu jedem $t \in T$ eine ZV $X_t : \Omega \to \Omega'$, die den Zustand zum Zeitpunkt t angibt. Dann heißt $(X_t) := (X_t, t \in T)$ ein **stochastischer Prozess**.

Satz 8.3 (Satz von Ionescu-Tulcea)

Zu einer Folge von Ergebnismengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, einer Dichte f_1, und einer Folge von Übergangsdichten $f_2^1, f_3^2, \ldots$ gibt es ein W-Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \text{über} \qquad \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

so dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$, die durch endlich viele Beobachtungen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bestimmt sind, in dem entsprechenden n-stufigen Koppelungsmodell berechnet werden können.

Definition 8.2 (Stochastischer Prozess)

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Bildbereich Ω' (Zustandsraum, Zustandsmenge), ein Zeitbereich T (oft $T \subset \mathbb{R}$) und zu jedem $t \in T$ eine ZV $X_t : \Omega \to \Omega'$, die den Zustand zum Zeitpunkt t angibt. Dann heißt $(X_t) := (X_t, t \in T)$ ein **stochastischer Prozess**.

Satz 8.3 (Satz von Ionescu-Tulcea)

Zu einer Folge von Ergebnismengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, einer Dichte f_1, und einer Folge von Übergangsdichten $f_2^1, f_3^2, \ldots$ gibt es ein W-Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \textit{über} \qquad \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

so dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$, die durch endlich viele Beobachtungen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bestimmt sind, in dem entsprechenden n-stufigen Koppelungsmodell berechnet werden können.

Definition 8.2 (Stochastischer Prozess)

Gegeben sei ein W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ein Bildbereich Ω' (Zustandsraum, Zustandsmenge), ein Zeitbereich T (oft $T \subset \mathbb{R}$) und zu jedem $t \in T$ eine ZV $X_t : \Omega \to \Omega'$, die den Zustand zum Zeitpunkt t angibt. Dann heißt $(X_t) := (X_t, t \in T)$ ein **stochastischer Prozess**.

Satz 8.3 (Satz von Ionescu-Tulcea)

Zu einer Folge von Ergebnismengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, einer Dichte f_1, und einer Folge von Übergangsdichten $f_2^1, f_3^2, \ldots$ gibt es ein W-Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \qquad \textit{über} \qquad \Omega = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

so dass die Wahrscheinlichkeiten für alle Ereignisse aus $\mathcal{A}$, die durch endlich viele Beobachtungen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bestimmt sind, in dem entsprechenden n-stufigen Koppelungsmodell berechnet werden können.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij}), (i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i; j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i; j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $(i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

Definition 8.4 (Markow-Kette, Zustände $i \in I$)

Eine **Markow-Kette** ist ein stochastischer Prozess.
Die Folge der Beobachtungen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ in einem unendlich-stufigen Versuch mit Markow-Koppelung und abzählbarer Zustandsmenge I.
Die ZV $X_n : \Omega \to I$ beschreiben also den Zustand eines Systems zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definition 8.5 (Homogene Markowkette)

Eine Markow-Kette (X_n) heißt **homogen**, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$f_n^{n-1}(i;j) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für alle Zeitpunkte gleich sind.
In diesem Fall wird

$$p_{ij} := f_n^{n-1}(i;j)$$

gesetzt. $\mathbf{P} := (p_{ij}), (i, j \in I)$ heißt **Übergangsmatrix**.

ich komme aus der Zeile

für die berechnung transponiert man diese und berech

Selbststudium

Quellen

- Kopien Buch: Hübner, G. Stochastik. Vieweg. Kapitel 7
- Skript Kapitel 8

Fragen

zeilensumme 1 und positive eint

1. Was ist eine stochastische Matrix?
2. Was bedeutet Gleichgewichtsverteilung einer homogenen Markow-Kette und unter welchen Voraussetzungen existiert eines? Konvergiert jede Startverteilung in dieses Gleichgewicht?
   Wo sehen Sie einen Bezug zur Page-Rank-Matrix?
3. Geben Sie je ein Beispiel für eine Markow-Kette an, die
   - eine Gleichgewichtsverteilung besitzt, aber nicht jeder Ausgangszustand dagegen konvergiert,
   - jede Startverteilung gegen den Gleichgewichtsverteilung konvergiert.
4. Stellen Sie die Wiederholungsaufgabe 77 von Übungsblatt 11 als Markow-Kette dar.

Ihre Fragen

... stellen, Fragen haben keine Pause.

- in den Online-Sitzungen (Vorlesungen, Übungen),
- per Mail an wigand.rathmann@fau.de oder marius.yamakou@fau.de,
- im Forum `https://www.studon.fau.de/frm2897793.html`,
  Die Fragen, die bis Donnerstag gestellt wurden, werden am Freitag in der Online-Runde diskutiert.
- per Telefon (zu den Sprechzeiten sind wir auch im Büro)

Wigand Rathmann	09131/85-67129	Mi 11-12 Uhr
Marius Yamakou	09131/85-67127	Di 14-15 Uhr

Sprechstunde zur Mathematik für Ingenieure
Wann: dienstags 09:00 - 16:30 Uhr und donnerstags 09:00-17:00 Uhr, **Wo:** `https://webconf.vc.dfn.de/ssim/` (Adobe Connect) und `https://fau.zoom.us/j/91308761442` (Zoom)