

# Simulation de toupies.

## Compléments mathématiques et physiques.

Jean-Cédric Chappelier

version 1.2 (12 mars 2020)

© EPFL 2020

### Résumé

Le projet de cette année s'intéresse à la simulation numérique de toupies.

Le présent document ne constitue que le *complément* mathématique de la donnée du projet. Pour plus de détails sur la donnée précise, le cadre du projet lui-même, etc., voir la page Web du projet sur le site du cours, qui vous expliquera en détails, semaine après semaine, quoi faire précisément. **Ne prenez donc pas « peur » à la vue de ce document** ci. Il n'est là que pour vous expliquer tous les calculs, que nous avons justement déjà faits pour vous ! Il n'a pas pour but d'être lu linéairement de bout en bout, mais de s'y référer lorsque nécessaire (mentionné dans les sujets hebdomadaires ou pour les étudiant(e)s intéressé(e)s d'approfondir tel ou tel aspect physico-mathématique de la donnée).

---

### Révisions

- |     |       |  |
|-----|-------|--|
| 1.1 | 27.02 | ajout de l'annexe D (inversion de matrice 3x3) |
| 1.2 | 12.03 | [mineure] correction d'un $t$ en $T_0$ page 15 |
-

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cadre du projet</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Notations et rappels de mécanique</b>	<b>3</b>
2.1	Repères	3
2.2	Vitesse de rotation	5
2.3	Grandeurs physiques	6
<b>3</b>	<b>Matrice d'inertie</b>	<b>7</b>
3.1	Cas général	7
3.2	Transfert de la matrice d'inertie	7
3.3	Exemples (donnés en $G$ )	8
3.4	Calcul de la matrice d'inertie pour un solide de révolution	9
<b>4</b>	<b>Toupies</b>	<b>10</b>
4.1	Cadre général	10
4.2	Vers des cas spécifiques	11
4.3	Pourquoi si compliqué ?	13
4.4	Pour résumer	13
4.5	Invariants	13
<b>5</b>	<b>Intégration numérique</b>	<b>14</b>
5.1	Idée générale : méthode d'Euler	15
5.2	Intégrateur d'Euler-Cromer	16
5.3	Intégrateur de Newmark	16
5.4	Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4	17
<b>6</b>	<b>Détails de toupies spécifiques</b>	<b>18</b>
6.1	Gyroscope simple	18
6.2	Toupie chinoise roulante	19
6.3	Toupie quelconque roulante	21
6.4	Retour sur le gyroscope simple	22
6.5	Toupie conique glissante	23
<b>7</b>	<b>Compléments</b>	<b>24</b>
7.1	Mouvement de Poinsot	24
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Notion de degré de liberté</b>	<b>26</b>
<b>C</b>	<b>Compléments sur l'intégration numérique</b>	<b>27</b>
<b>D</b>	<b>Inversion d'une matrice 3x3</b>	<b>30</b>

## 1 Cadre du projet

Dans le cadre de ce projet, une toupie est un solide de révolution d'axe  $\vec{a}$  (voir figure 1) caractérisé par (voir la suite de ce document pour les détails) :

1. sa masse  $m$ ,
2. ses angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ ,
3. la position de son centre de masse  $G$ ,
4. sa vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ ,
5. la vitesse linéaire  $\vec{v}$  de son centre de masse (on notera de même sans indice toutes les autres grandeurs physiques se rapportant à  $G$ . On indicera par contre par le point concerné les grandeurs physiques ne se rapportant pas à  $G$ ),
6. ses coefficients d'inertie  $I_1$  et  $I_3$ ,
7. une équation d'évolution (équation du mouvement).

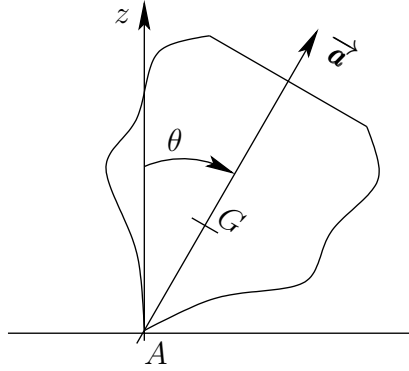


FIGURE 1 – Une toupie.

Nous faisons de plus les hypothèses suivantes :

1. la toupie reste en permanence en contact avec le sol, supposé plan ;
2. la surface de contact entre la toupie et le sol est réduite un seul point, noté  $A$  ;
3. les seuls frottements subis par la toupie s'appliquent au point de contact (pas de frottement dans l'air, sur l'axe, ...).

## 2 Notations et rappels de mécanique

### 2.1 Repères

Soit  $\mathcal{R}_O = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le repère galiléen de référence. La notation générale d'un point  $P$  (ou d'un vecteur  $\vec{P}$ ) dans ce repère sera :  $\check{P} = (P_x, P_y, P_z)$ . On a donc  $\check{O} = (0, 0, 0)$ .

On considérera également  $\mathcal{R}_G = (G, \vec{u}, \vec{b}, \vec{a})$ , un repère d'inertie du solide (avec  $\vec{u}, \vec{b}, \vec{a}$  unitaires ;  $\vec{a}$  étant l'axe principal de la toupie ; voir figures 1 et 2). La notation générale d'un point  $P$  (ou d'un vecteur  $\vec{P}$ ) dans ce repère sera :  $\dot{P} = (P_1, P_2, P_3)$ . On a donc  $\dot{G} = (0, 0, 0)$ .

À noter qu'ici  $\vec{u}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas uniques *a priori*, mais définis à une rotation autour de  $\vec{a}$  près (en raison de la symétrie de révolution de la toupie). On fera donc un choix initial pour ceux-ci (lié en fait à la visualisation graphique).

Les angles d'Euler, correspondant aux trois degrés de liberté<sup>1</sup> angulaire du système, sont définis comme (voir figure 2) :

- l'angle de nutation  $\theta$ , rotation de l'axe  $\vec{a}$  autour de  $\vec{u}$  ; c'est donc l'angle entre  $\vec{k}$  et  $\vec{a}$  ;

---

1. Voir si nécessaire l'annexe A pour la notion de « degré de liberté ».

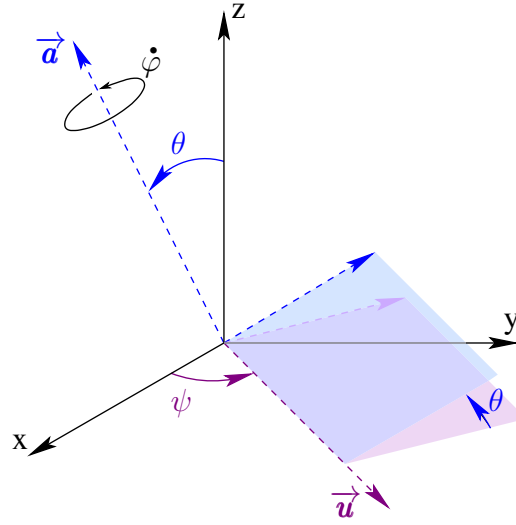


FIGURE 2 – Angles d'Euler.

- l'angle de précession  $\psi$ , rotation de l'axe  $\vec{a}$  autour de la verticale (de  $\mathcal{R}_O$ ); c'est donc l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\vec{u}$  ;
- l'angle de rotation propre  $\varphi$  de la toupie autour de son axe  $\vec{a}$ . Nous n'incluons *pas* la rotation propre  $\varphi$  de la toupie dans la rotation du repère  $\mathcal{R}_G$  (cf. matrice  $\mathbf{S}$  ci-dessous).

$\psi$  et  $\varphi$  sont définis à  $2\pi$  près, par exemple entre 0 et  $2\pi$  (ou, au choix, entre  $-\pi$  et  $\pi$ ).  $\theta$  est défini à un multiple de  $\pi$  près, typiquement entre 0 et  $\pi$  ; mais pour éviter la discontinuité sur  $\psi$  ( $\theta \rightarrow 2\pi - \theta \implies \psi \rightarrow \psi + \pi$ ), on choisira ici aussi une périodicité de  $2\pi$ , l'ambiguïté résultante sur  $\theta$  n'étant pas un souci pour notre simulation.

Par ailleurs,  $\psi$  n'est pas défini si  $\theta = 0$  (puisque'il joue alors le même rôle que  $\varphi$ ) et on prendra alors dans ce cas la valeur correspondante la plus appropriée (soit 0, soit l'ancienne valeur de sorte à préserver la continuité). Dans tous les cas  $\ddot{\psi} = \dot{\psi} = 0$  si  $\theta = 0$ .

La matrice de passage de  $\mathcal{R}_G$  à  $\mathcal{R}_O$  est donnée par :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c.-à-d.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\psi) \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(Rappel :  $\mathbf{S}$  est orthogonale :  $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$ .)

Pour les changements de repères, on aura donc :

- pour les vecteurs :  $\overset{\circ}{\vec{P}} = \mathbf{S} \overset{\circ}{\vec{P}}$ ,
- et pour les points :  $\overset{\circ}{P} = \mathbf{S} (\overset{\circ}{P} - \overset{\circ}{G})$ .

Par exemple :  $\vec{k} = \sin(\theta) \vec{b} + \cos(\theta) \vec{a}$  et  $\vec{u} = \cos(\psi) \vec{i} + \sin(\psi) \vec{j}$ .

## 2.2 Vitesse de rotation

La rotation instantanée du solide est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{a} \\ &= \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{b} + (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\varphi}) \vec{a} \\ &= (\dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\psi) \sin(\theta)) \vec{i} + (\dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \cos(\psi) \sin(\theta)) \vec{j} \\ &\quad + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\theta)) \vec{k} \end{aligned}$$

c.-à-d. concrètement :

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin(\theta), \quad \omega_3 = (\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\varphi}). \quad (1)$$

À noter que le vecteur  $\vec{\omega}_e$  de rotation du repère  $\mathcal{R}_G$  vaut donc  $\vec{\omega}_e = \vec{\omega} - \dot{\varphi} \vec{a}$ .

Par ailleurs, on a aussi :

$$\overset{\circ}{(\omega_1)} = \ddot{\theta} \quad \overset{\circ}{(\omega_2)} = \ddot{\psi} \sin(\theta) + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta) \quad \overset{\circ}{(\omega_3)} = \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta),$$

que l'on notera plus simplement  $\dot{\omega}_1$ ,  $\dot{\omega}_2$  et  $\dot{\omega}_3$  ; mais il y a lieu de remarquer que ce *ne* sont *pas* les coordonnées du vecteur  $\dot{\vec{\omega}}$ . En effet :

$$\left( \dot{\vec{\omega}} \right)_1 = \dot{\omega}_1 + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin(\theta), \quad \left( \dot{\vec{\omega}} \right)_2 = \dot{\omega}_2 - \dot{\varphi} \dot{\theta}, \quad \left( \dot{\vec{\omega}} \right)_3 = \dot{\omega}_3,$$

puisque :

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} - \dot{\varphi} \vec{a} \wedge \vec{\omega},$$

en notant  $\vec{\omega}$  le vecteur dont les coordonnées sont les  $\dot{\omega}_i$  données plus haut.

(Il est important de comprendre que la dérivée d'un vecteur, p.ex.  $\dot{\vec{\omega}}$ , n'est, dans le cas général, pas égale au vecteur des dérivées des composantes, p.ex.  $\dot{\vec{\omega}}$ .)

En inversant les formules précédentes, on obtient :

si  $\theta \neq 0$  :

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega}_1, \quad \ddot{\psi} = \frac{\dot{\omega}_2 - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega}_3 + \frac{\dot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\omega}_2 \cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (2)$$

Si  $\theta = 0$ , on aura simplement :

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega}_1, \quad \ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega}_3.$$

## 2.3 Grandeurs physiques

**Moment cinétique :**

— en  $G$  :

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega},$$

où  $\vec{\omega}$  est la vitesse de rotation instantanée en  $G$  et  $\mathbf{I}$  sa matrice d'inertie (en  $G$ ).

Attention ! On note  $\mathbf{I}$  ici de façon générique pour le tenseur d'inertie, mais son expression dépend du repère ! Pour plus de détails sur les matrices d'inertie, voir la section 3, page 7.

— en un point  $P$  du solide :

$$\vec{L}_P = m \vec{PG} \wedge \vec{v}_P + \mathbf{I}_P \vec{\omega} = m \vec{PG} \wedge \vec{v} + \mathbf{I} \vec{\omega}$$

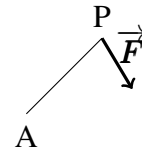
Cas particulier si  $\vec{v}_P = 0$  :  $\vec{L}_P = \mathbf{I}_P \vec{\omega}$ .

**Vitesse des points du solide :** pour deux points  $A$  et  $P$  du solide,  $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$ .

**Moment en  $A$  d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant en  $P$  :**

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AP} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}} + \vec{AG} \wedge \vec{F},$$

(pour  $B$  un autre point quelconque).



**Énergie cinétique :**

$$E_c = \frac{1}{2} \left( mv^2 + \vec{\omega} \cdot \vec{L} \right)$$

À partir des données d'un point  $P$  du solide :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left( mv_P^2 + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_P + m \vec{v}_P \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{PG}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( mv_P^2 + \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_P \vec{\omega} \right) + m \vec{v}_P \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{PG}) \end{aligned}$$

Si  $\vec{v}_P = \vec{0}$ ,  $E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_P \vec{\omega}$ .

**Énergie totale :** Pour un solide soumis à son seul poids (plus exactement, où seul le poids travaille) :

$$E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_A - m \vec{g} \cdot \vec{OG}$$

où  $A$  est un point du solide tel que  $\vec{v}_A = \vec{0}$ .

### 3 Matrice d'inertie

#### 3.1 Cas général

Pour un solide de révolution autour de l'axe  $\vec{a}$ , l'inertie, dans un repère orthonormé de troisième direction  $\vec{a}$ , est donnée par

$$\mathring{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

avec  $I_3 = \int_S (x^2 + y^2) dm$  et  $I_1 = \frac{1}{2} I_3 + \int_S z^2 dm$ ;  $dm$  représentant l'élément différentiel de masse, typiquement  $dm = \rho dV$  pour un solide homogène de masse volumique  $\rho$ .

#### 3.2 Transfert de la matrice d'inertie

Changement de repère (rotation) :

$$\mathring{\mathbf{I}} = \mathbf{S} \check{\mathbf{I}} \mathbf{S}^T \quad \check{\mathbf{I}} = \mathbf{S}^T \mathring{\mathbf{I}} \mathbf{S}$$

Translation (th. de Huygens-Steiner) :

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I} + m \Delta = \mathbf{I} + m \begin{pmatrix} y_{PG}^2 + z_{PG}^2 & -x_{PG} y_{PG} & -x_{PG} z_{PG} \\ -x_{PG} y_{PG} & x_{PG}^2 + z_{PG}^2 & -y_{PG} z_{PG} \\ -x_{PG} z_{PG} & -y_{PG} z_{PG} & x_{PG}^2 + y_{PG}^2 \end{pmatrix}$$

avec  $x_{PG} = (\vec{PG})_x = G_x - P_x$  (et similaires).  $\Delta$  est en fait définie par :

$$\Delta = \vec{PG} \cdot \vec{PG} \mathbf{1}_3 - \vec{PG} \vec{PG}^T$$

et vérifie la propriété (pour tout vecteur  $\vec{x}$ ) :

$$\Delta \vec{x} = -\vec{PG} \wedge (\vec{PG} \wedge \vec{x})$$

Cas particulier : si  $P$  est sur l'axe de symétrie (c.-à-d.  $\overrightarrow{PG} = d\vec{a}$ ), alors le repère d'inertie en  $G$  est aussi un repère d'inertie en  $P$  et nous avons

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I} + m \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 + md^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + md^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

### 3.3 Exemples (donnés en $G$ )

**Sphère** homogène de rayon  $R$  :

$$I_1 = I_3 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}mR^2$$

(et  $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ ).

**Cylindre** homogène plein (vertical, de longueur  $L$  et de rayon  $R$ )

$$I_1 = m \left( \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2 \right) \quad I_3 = \frac{m}{2}R^2$$

(et  $m = \pi\rho R^2L$ ).

Cas particulier  $R = 0$  : **barre** verticale de longueur  $L$

$$I_1 = \frac{m}{12}L^2 \quad I_3 = 0$$

Cas particulier  $L = 0$  : **disque**

$$I_1 = \frac{m}{4}R^2 \quad I_3 = \frac{m}{2}R^2$$

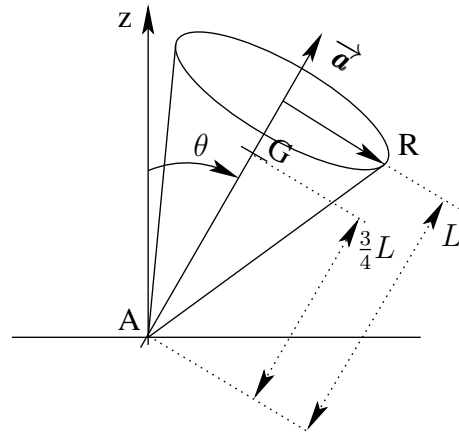
**Cône** (de révolution) homogène de hauteur  $L$  et rayon maximal  $R$  :

$$I_1 = \frac{3m}{20} \left( R^2 + \frac{1}{4}L^2 \right) \quad I_3 = \frac{3m}{10}R^2$$

avec  $m = \frac{1}{3}\pi\rho R^2L$ . (Rappel :  $A_3 = -\frac{3}{4}L$ .)

Remarque :

$$I_{A1} = m \left( \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{5}L^2 \right)$$





**Sphère homogène de rayon  $R$  tronquée de  $h$  ( $0 \leq h < 2R$ ) :**

$$m = \pi \rho \left( \frac{4}{3} R^3 - h^2 \left( R - \frac{1}{3} h \right) \right)$$

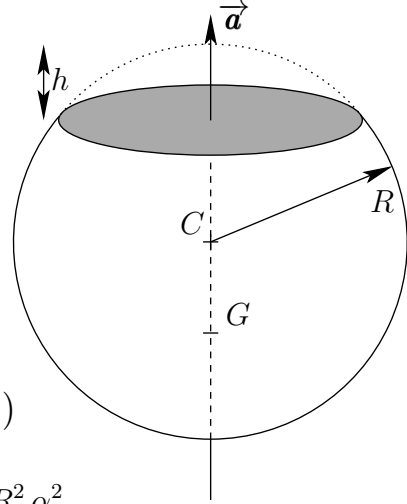
$$\overrightarrow{GC} = \frac{3}{4} \frac{h^2}{R+h} \vec{a} = R \alpha \vec{a}$$

$$\alpha = \frac{3h^2}{4R(R+h)}$$

$$I_3 = \frac{\pi}{30} \rho (2R-h)^3 (2R^2 + 3hR + 3h^2)$$

$$\int_S z^2 dm = \frac{\pi}{15} \rho (2R-h)^2 (R^3 + hR^2 - 3h^2R + 3h^3)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} I_3 + \int_S z^2 dm - m \|\overrightarrow{CG}\|^2 = \frac{1}{2} I_3 + \int_S z^2 dm - m R^2 \alpha^2$$



### 3.4 Calcul de la matrice d'inertie pour un solide de révolution

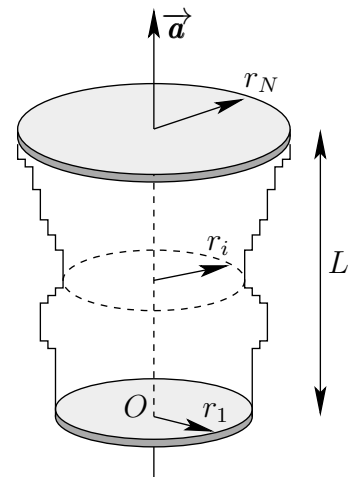
On s'intéresse ici à une toupie (homogène de masse volumique  $\rho$ ) de hauteur  $L$  définie par son profil révolution : ensemble de distances  $r_i$  à l'axe, pour  $i$  de 1 à  $N$  (correspondant aux altitudes  $z_i = \frac{2i-1}{2} \frac{L}{N}$ ), voir figure ci-contre.

Sa masse est alors donnée par :

$$m \simeq \pi \rho \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2$$

Centre de masse  $G$  :

$$d = -O_3 = \|\overrightarrow{OG}\| \simeq \frac{\sum_{i=1}^N \left( \frac{2i-1}{2} \frac{L}{N} \right) r_i^2}{\sum_{i=1}^N r_i^2}$$



Approximation par tranches d'un solide de révolution.

Inertie :

$$I_3 \simeq \frac{\pi}{2} \rho \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N r_i^4$$

$$I_1 \simeq \frac{1}{2} I_3 + \pi \rho \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{2i-1}{2} \frac{L}{N} \right)^2 r_i^2 - m d^2$$

## 4 Toupies

### 4.1 Cadre général

Équations du mouvement :

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F} \quad (3)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\mathcal{M}} \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{L}}_A = \vec{\mathcal{M}}_A - m \vec{v}_A \wedge \vec{v} \quad (4)$$

avec  $\vec{F}$  la résultante des forces externes et  $\vec{\mathcal{M}}$  leur moment.

Remarque : attention, dans le cas général  $\dot{\vec{L}}$  ne vaut pas  $\mathbf{I} \dot{\vec{\omega}}$ , ni même  $\mathbf{I} \dot{\vec{\omega}}$ , mais :

$$\dot{\vec{L}} = \dot{(\mathbf{I} \vec{\omega})} = \mathbf{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{I} \vec{\omega}),$$

et pour un point  $A$  du solide :

$$\dot{\vec{L}}_A = \dot{(\mathbf{I}_A \vec{\omega})} + \mathbf{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{I}_A \vec{\omega}).$$

Dans le cas le plus général les équations (4) sont trop abstraites pour être calculées, même numériquement. Dans notre cas, on commence déjà par simplifier en passant de 6 à 5 degrés de liberté en supposant ici que la toupie reste en permanence en contact avec un plan. Ce qui donne la condition  $v_{Az} = 0$ , ainsi que pour sa dérivée ; ce qui conduit à une contrainte sur la composante verticale des forces (par exemple  $F_z = 0$  si le centre de gravité garde la même altitude par rapport au plan de contact) et l'équation (3) s'intègre alors dans le plan du mouvement.

Dans le cas général (toupie symétrique tout de même), on cherche à résoudre les équations (4) ci-dessus en  $G$  dans  $\mathcal{R}_G$  :

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{I_1} \left( \mathcal{M}_1 + (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \right) - \omega_2 \dot{\varphi} \quad (6)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{I_1} \left( \mathcal{M}_2 - (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \right) + \omega_1 \dot{\varphi} \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{I_3} \mathcal{M}_3 \quad (8)$$

que l'on combine avec les équations (2) page 6 (et (3), y compris remarques ci-dessus sur la composante verticale). Mais attention ici les composantes de  $\vec{\dot{\mathcal{M}}} = \sum_i \vec{GA_i} \wedge \vec{F_i} = \sum_i \vec{A_i} \wedge \vec{F_i}$  changent avec la rotation (et translation) du repère propre (à la fois  $\vec{F_i}$  et  $A_i$  :  $\vec{F_i} = \mathbf{S} \vec{F_i}$  et  $\vec{A_i} = \mathbf{S} (\vec{A_i} - \vec{G})$ ) !

De plus, dans de nombreux cas les forces ne sont pas toutes connues (typiquement les forces de frottement). On a alors intérêt à changer le point de calcul et utiliser un point  $A$  du solide tel que le moment des forces en ce point soit simple.

À noter que l'équation

$$\vec{\dot{L}_A} = \vec{\mathcal{M}_A} - m \vec{v_A} \wedge \vec{v}$$

ne nous est utile que si  $\vec{v_A}$  est connue (typiquement nulle).

## 4.2 Vers des cas spécifiques

On ajoute donc en général des hypothèses supplémentaires. Nous allons l'illustrer ici en introduisant dans l'ordre :

1. la toupie roule sans glisser (en son point de contact *ponctuel*) ;
2. l'axe de symétrie passe par le point de contact ;
3. il n'y a pas d'autres forces que le poids (et la réaction du support, frottements inclus).

**En  $A$  roulant sans glisser, c.-à-d.  $\vec{v_A} = \vec{0}$ , on a :**

$$\overbrace{\vec{I_A}}^{\dot{\vec{I_A}}} \vec{\omega} + \vec{I_A} \vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega_e} \wedge (\vec{I_A} \vec{\omega}) = \vec{\mathcal{M}_A},$$

soit :

$$\vec{\omega} = \vec{I_A}^{-1} \left( \vec{\mathcal{M}_A} - \vec{\omega_e} \wedge (\vec{I_A} \vec{\omega}) - \overbrace{\vec{I_A}}^{\dot{\vec{I_A}}} \vec{\omega} \right), \quad (9)$$

ce qui est avantageux si  $\vec{\mathcal{M}_A}$  est simple (c.-à-d.  $A$  bien choisi, en particulier pour les forces de frottement) et que  $\overbrace{\vec{I_A}}^{\dot{\vec{I_A}}}$  est calculable (soit en utilisant le théorème de Huygens-Steiner, soit que l'approximation  $\overbrace{\vec{I_A}}^{\dot{\vec{I_A}}} \simeq \vec{0}$  est raisonnable).

Attention ici à ne pas oublier que  $\vec{\mathcal{M}_A}$  et  $\vec{I_A}$  sont des fonctions des angles d'Euler, et que donc le système ci-dessus n'est pas un système du premier ordre en  $\vec{\omega}$ , mais bien un système du second ordre dans les angles d'Euler !

Dans le cas général, on peut expliciter le système précédent à l'aide de (1) et (2), page 5, quoique le calcul de  $\mathbf{I}_A$  (et  $\dot{\mathbf{I}}_A$ ) puisse être fastidieux (dans le cas général). Noter en particulier ici que  $\mathcal{R}_G$  (et encore moins  $\mathcal{R}_O$  !) n'est pas forcément un repère d'inertie en  $A$ , c.-à-d.  $\mathbf{I}_A$  n'est pas diagonale dans le cas général.

Concrètement par contre (c.-à-d. dans votre programme), on effectuera le calcul le système précédent par étapes :

1. calculer  $\vec{\omega}$  (équation 1, page 5),  $\vec{\mathcal{M}}_A$ ,  $\mathbf{I}_A$  et  $\dot{\mathbf{I}}_A$  ;
2. utiliser (9) pour calculer  $\dot{\vec{\omega}}$  ;
3. puis utiliser (2), page 6, pour calculer  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{\varphi}$ .
4. Si nécessaire (plus de 3 degrés de liberté, translation de  $\mathcal{R}_G$ ),  $\vec{v} = \vec{GA} \wedge \vec{\omega}$  permet de trouver  $\ddot{G}$  (par intégration).

Ceci permet alors, moyennant un intégrateur numérique d'équations différentielles du second ordre (voir section 5), de calculer l'évolution de toute toupie tournant sans glisser.

Si **de plus**  $\vec{a}$  **passse par**  $A$  (et que la distance  $d = \|\vec{GA}\|$  reste constante), on peut aller plus loin. On a en effet alors même repère d'inertie en  $A$  et en  $G$ .  $\mathbf{I}_A$  est donc diagonale, et  $I_{A1} = I_{A2} = I_1 + m d^2$ ,  $I_{A3} = I_3$ . De plus  $\dot{\mathbf{I}}_A = \mathbf{0}$ . Dans ce cas, on a alors :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{A1}} \left( \mathcal{M}_{A1} + \dot{\psi} \sin(\theta) \left( (I_{A1} - I_3) \dot{\psi} \cos(\theta) - I_3 \dot{\varphi} \right) \right) \quad (10)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{A1} \sin(\theta)} \left( \mathcal{M}_{A2} + \dot{\theta} \left( (I_3 - I_{A1}) \dot{\psi} \cos(\theta) + I_3 \dot{\varphi} \right) \right) - \dot{\psi} \dot{\theta} \cotan(\theta) \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I_3} \mathcal{M}_{A3} + \frac{\dot{\psi} \dot{\theta}}{\sin(\theta)} - \frac{\mathcal{M}_{A2} + \dot{\theta} \left( (I_3 - I_{A1}) \dot{\psi} \cos(\theta) + I_3 \dot{\varphi} \right)}{I_{A1}} \cotan(\theta) \quad (12)$$

Si **de plus** la toupie n'est **soumise qu'à son seul poids** (plus la réaction du sol), alors  $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AG} \wedge (-m g \vec{k}) = -m g d \vec{a} \wedge \vec{k} = m g d \sin(\theta) \vec{u}$ , et :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{A1}} \left( m g d \sin(\theta) + \dot{\psi} \sin(\theta) \left( (I_{A1} - I_3) \dot{\psi} \cos(\theta) - I_3 \dot{\varphi} \right) \right) \quad (13)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\dot{\theta}}{I_{A1} \sin(\theta)} \left( (I_3 - 2I_{A1}) \dot{\psi} \cos(\theta) + I_3 \dot{\varphi} \right) \quad (14)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{I_{A1} \sin(\theta)} \left( [I_{A1} - (I_3 - I_{A1}) \cos^2(\theta)] \dot{\psi} - I_3 \dot{\varphi} \cos(\theta) \right) \quad (15)$$

avec  $I_{A1} = I_1 + m d^2$ .

### 4.3 Pourquoi si compliqué ?

Pourquoi ne pas intégrer directement en  $\vec{\omega}$  les équations d'Euler (6–8) ou (9) ?

Le problème est que les moments ne sont pas indépendants des angles d'Euler. Pour un intégrateur d'ordre 1 tel que l'intégrateur d'Euler (encore lui ! Voir section 5.2), cela ne poserait pas de problème (puisque tout est exprimé en fonction de l'état à  $t - 1$ ), mais pour des intégrateurs d'ordre supérieur (tel que Runge-Kutta, voir section 5.4), cela n'est pas correct : les estimations des moments aux points d'interpolation intermédiaires devraient être calculés...

...d'où finalement la nécessité d'exprimer correctement les équations complètes sur les vrais degrés de liberté du système.

### 4.4 Pour résumer

Pour résumer, le cas général est trop compliqué (sauf si toutes les forces sont vraiment connues, auquel cas on utilise les équations (6–8), combinées avec (2) et (3).

On fait donc des hypothèses, typiquement :

1. sur les forces de frottement (non exposé ici) ;
2. sur le point de contact :
  - (a) vitesse nulle (pas de glissement) ;
  - (b) symétrie (axe passant par le point de contact) ;
3. sur la forme géométrique (sphère), ce qui permet de simplifier les calculs.

Dans ce projet nous nous limiterons aux cas suivants, que nous allons ensuite détailler (section 6) :

- le gyroscope simple fixé à son extrémité, équations 13–15, page 12, et section 6.1 page 18 ;
- au cas général d'une toupie roulant sans glisser, cadre 4.2 page 12 ;
- et de façon optionnelle, à une troisième formulation du gyroscope simple fixé à son extrémité.<sup>2</sup>

En option, on pourra aussi s'intéresser à la toupie chinoise (ou Tippe-Top) roulante (sans glisser), décrite en section 6.2, page 19.

### 4.5 Invariants

Il sera utile de vérifier le bon déroulement du programme en surveillant l'évolution des grandeurs suivantes qui sont normalement invariantes :

---

2. La seconde formulation du gyroscope simple étant le cas général d'une toupie roulant sans glisser !

- l'énergie totale  $E_{\text{tot}}$ ,
- (lorsque l'axe de symétrie passe par le point de contact, c.-à-d.  $\overrightarrow{AG}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{a}$ ) la projection  $L_{A3}$  du moment cinétique sur  $\overrightarrow{a}$ ,
- (lorsque les forces ayant un moment non nul en  $A$  sont colinéaires à  $\overrightarrow{k}$ , ce qui est typiquement le cas du poids) la projection  $L_{Az}$  du moment cinétique sur  $\overrightarrow{k}$ .

On a de plus la propriété que  $\overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{\omega}$  et  $\overrightarrow{L}$  sont coplanaires (à vérifier numériquement, c.-à-d. calculer  $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{L})$ ).

## 5 Intégration numérique

La résolution mathématique exacte d'une équation telle que (4) page 10 est impossible dans la plupart des cas réels non triviaux. En fait, peu d'équations différentielles possèdent une solution calculable analytiquement. Pour les résoudre, il faut alors passer par l'analyse numérique, c.-à-d. le calcul approché, numérique, d'une solution particulière à l'équation différentielle pour des conditions initiales données. On parle d'« *intégration numérique* ». C'est un sujet délicat dont nous ne présentons ici que quelques solutions possibles, assez simples.<sup>3</sup>

Pour une équation différentielle du second ordre écrite sous la forme générale :

$$\ddot{\vec{P}} = f(t, \vec{P}, \dot{\vec{P}})$$

où  $\vec{P}$  est un vecteur de dimension  $q$  (les « degrés de liberté » en Physique, cf annexe B) et  $f$  est une fonction vectorielle de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^q$  (qui en Physique représente typiquement les équations du mouvement), le schéma général est le suivant :

$$\left. \begin{array}{c} t \\ \Delta t \\ \vec{P}(t) \\ \dot{\vec{P}}(t) \\ f \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\text{Intégrateur}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}(t + \Delta t) \\ \dot{\vec{P}}(t + \Delta t) \end{array} \right.$$

c.-à-d. que l'on fait appel à un module, l'« intégrateur », qui à partir de l'état courant et de l'équation d'évolution  $f$  calcule le nouvel état, un temps  $\Delta t$  plus tard.

**Note :** dans le cas particulier de notre projet, les forces en jeu ne varient pas en fonction du temps et nous avons donc une version simplifiée du cas général précédent :

$$\ddot{\vec{P}} = f(\vec{P}, \dot{\vec{P}})$$

3. Pour ceux que cela intéresse, l'annexe C, page 27, présente quelques compléments, non nécessaires à ce projet.

Je garderai cependant la dépendance à  $t$  dans la suite de cette section afin d'avoir une description très générale, bien que dans le cas particulier de cette année cette dépendance au temps puisse être ignorée.

Il existe de nombreux moyens d'intégrer numériquement une équation différentielle telle que celle présentée plus haut. Le moyen le plus simple, dont nous allons nous servir ici pour illustrer les principes, est la méthode dite « d'Euler ». Dans ce projet, vous implémenterez dans un premier temps l'intégrateur d'Euler-Cromer (section 5.2, page 16), et ensuite un autre intégrateur parmi ceux présentés plus loin. Mais commençons par le plus simple...

## 5.1 Idée générale : méthode d'Euler

Imaginons que nous connaissions des conditions initiales, c.-à-d. les valeurs  $\vec{P}(T_0)$  et  $\dot{\vec{P}}(T_0)$  de  $\vec{P}$  et  $\dot{\vec{P}}$  au temps  $T_0$ . On peut alors utiliser un développement limité au premier ordre pour trouver la valeur de  $\vec{P}$  au temps  $T_0 + \Delta t$  :

$$\vec{P}(T_0 + \Delta t) \simeq \vec{P}(T_0) + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}(T_0)$$

Par le même raisonnement, on peut écrire pour la dérivée :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}}(T_0 + \Delta t) &\simeq \dot{\vec{P}}(T_0) + \Delta t \cdot \ddot{\vec{P}}(T_0) \\ &= \dot{\vec{P}}(T_0) + \Delta t \cdot f(T_0, \vec{P}(T_0), \dot{\vec{P}}(T_0)) \end{aligned}$$

On peut alors, ainsi de suite, en répétant les approximations précédentes de proche en proche, déterminer de cette manière la valeur de  $\vec{P}$  et  $\dot{\vec{P}}$  pour tout temps  $t$  de la forme  $T_0 + n\Delta t$ .

Cette méthode utilise un « *pas de temps* »  $\Delta t$  qu'il faut choisir suffisamment petit pour que l'approximation faite dans le développement limité soit « raisonnable ». Ceci peut faire l'objet de nombreuses études qui seront le sujet de votre cours d'analyse numérique. Dans notre cas, un choix arbitraire fixe (donné le moment voulu dans la donnée hebdomadaire) sera suffisant.

Pour ceux que ça intéresse, les aspects (avancés) concernant la conservation de l'énergie des systèmes physiques ainsi simulés sont présentés en annexe C.

Nous présentons maintenant trois méthodes différentes, de la plus simple à la plus compliquée, pour résoudre numériquement les équations différentielles du second ordre qui nous intéressent dans ce projet.

Nous présenterons également les versions pour équations différentielles du premier ordre,  $\dot{\vec{P}} = f(t, \vec{P})$ .

En cas de doute sur les notations, reportez-vous à l'annexe A, page 25.

## 5.2 Intégrateur d'Euler-Cromer

### 5.2.1 Équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre

Dans la méthode d'Euler-Cromer, on calcule  $\vec{P}^{(n)}$  et  $\dot{\vec{P}}^{(n)}$  comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}^{(n)} &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)}, \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \\ \vec{P}^{(n)} &= \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}^{(n)}\end{aligned}$$

À noter la différence avec la méthode d'Euler classique présentée plus haut, laquelle utilise l'*ancienne* version  $\dot{\vec{P}}^{(n-1)}$  de la vitesse dans la seconde équation.

La méthode d'Euler-Cromer est meilleure que la méthode d'Euler classique car elle garantit la conservation de l'énergie (on parle d'« *intégrateur symplectique* », cf section C pour ceux que cela intéresse).

### 5.2.2 Équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre

Pour les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, on utilise simplement la formule suivante :

$$\vec{P}^{(n)} = \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)})$$

## 5.3 Intégrateur de Newmark

(Pour équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre uniquement)

Les intégrateurs précédents utilisent un calcul *direct* des nouvelles valeurs  $\vec{P}^{(n)}$  et  $\dot{\vec{P}}^{(n)}$  à partir des anciennes. Ce n'est pas le cas de la méthode d'intégration de Newmark qui fait une *boucle* de calcul itérative pour trouver ces valeurs.<sup>4</sup>

4. On parle de méthode « *implicite* » : elle n'utilise pas une formule explicite pour calculer les nouvelles valeurs, mais un algorithme itératif ; cf section C, page 27, pour plus de détails.



Elle nécessite pour cela l'emploi de variables supplémentaires afin de mémoriser les calculs *intermédiaires* :  $q$ ,  $r$  et  $s$ . Elle utilise aussi un paramètre  $\varepsilon$  pour contrôler la convergence de sa propre boucle de calcul.

Comme pour les méthodes précédentes, nous décrivons ici les pas de calculs pour passer de l'étape  $n - 1$  à l'étape  $n$  de l'intégration (on ne parle donc pas ici de la boucle en  $n$  elle-même ;  $n$  en tant que tel est *fixe* ici). En particulier, toutes les grandeurs en «  $(n-1)$  » sont donc constantes pour les calculs présentés ici.

Initialisation :

$$\begin{aligned} & \dot{\vec{P}}^{(n)} \leftarrow \dot{\vec{P}}^{(n-1)} \\ & \vec{P}^{(n)} \leftarrow \vec{P}^{(n-1)} \\ & s \leftarrow f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)}, \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Répéter les quatre calculs suivants<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} & q \leftarrow \vec{P}^{(n)} \\ & r \leftarrow f(T_n, \vec{P}^{(n)}, \dot{\vec{P}}^{(n)}) \\ & \dot{\vec{P}}^{(n)} \leftarrow \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2}(r + s) \\ & \vec{P}^{(n)} \leftarrow \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{3}(\frac{1}{2}r + s) \end{aligned}$$

tant que  $\|\vec{P}^{(n)} - q\| \geq \varepsilon$

## 5.4 Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4

### 5.4.1 Équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre

La méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 nécessite huit variables intermédiaires :  $k_1, k_2, k_3, k_4, k'_1, k'_2, k'_3$  et  $k'_4$ .

On calcule  $\vec{P}^{(n)}$  et  $\dot{\vec{P}}^{(n)}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(n)} &= \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \dot{\vec{P}}^{(n)} &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6}(k'_1 + 2k'_2 + 2k'_3 + k'_4) \end{aligned}$$

avec :

$$k_1 = \dot{\vec{P}}^{(n-1)}$$

---

5. J'insiste : ce n'est pas une boucle en  $n$  ici !

$$\begin{aligned}
k'_1 &= f(T_{n-1}, \quad \vec{P}^{(n-1)}, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \\
k_2 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1 \\
k'_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1) \\
k_3 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2 \\
k'_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2) \\
k_4 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3 \\
k'_4 &= f(T_{\textcolor{red}{n}}, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t k_3, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3)
\end{aligned}$$

Note :  $T_n = T_{n-1} + \Delta t$ .

#### 5.4.2 Équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre

$$\vec{P}^{(n)} = \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)}) \\
k_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1) \\
k_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2) \\
k_4 &= f(T_{\textcolor{red}{n}}, \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t k_3)
\end{aligned}$$

## 6 Détails de toupies spécifiques

### 6.1 Gyroscope simple

On s'intéresse ici à une toupie (homogène de révolution) telle que l'axe de symétrie passe toujours par le point de contact, soit qu'il soit fixé (e.g. au bout d'une tige), soit que la forme de la toupie l'impose (e.g. un cône tournant sur sa pointe sans tomber). Dans ce dernier cas, on suppose de plus que la toupie accroche sans glisser (c.-à-d.  $\vec{v}_A = \vec{0}$ ).

Dans ces cas, les équations se simplifient en remarquant que le problème n'est plus qu'à trois degrés de liberté (au lieu de 6 (toupie libre et sauteuse) ou 5 (toupie libre mais restant en contact avec le plan), et l'on arrive aux équations (13–15), page 12.

Concrètement, une telle toupie est donc représentée par le vecteur d'état  $\vec{P}$  de dimension 3,  $\vec{P} = (\psi, \theta, \varphi)$ , et l'équation différentielle du second ordre  $\ddot{\vec{P}} = f(\vec{P}, \dot{\vec{P}})$ , avec  $f$  donnée par les équations (13–15), page 12.

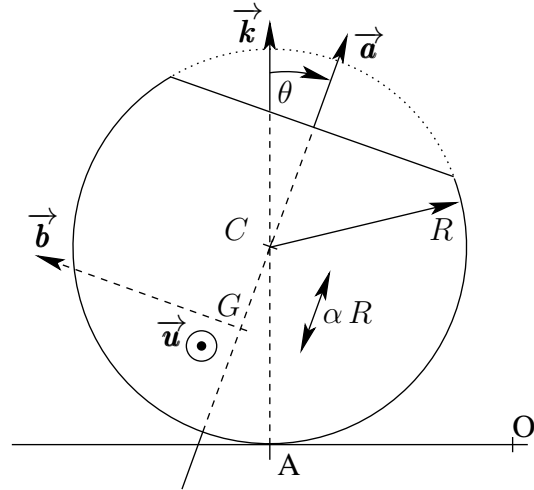
On pourra par exemple considérer une toupie de forme conique, de masse volumique  $\rho = 0.1 \text{ kg dm}^{-3}$ , de hauteur  $L = 1.5 \text{ dm}$ , de rayon à la base  $R = 0.5 \text{ dm}$ , partant d'une position initiale inclinée de  $\pi/6$  par rapport à la verticale (c.-à-d.  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\psi = \varphi = 0$ ), avec une vitesse angulaire propre de 60 radians par seconde ( $\simeq 9.5$  tours par seconde, c.-à-d.  $\dot{\varphi} = 60$ ,  $\dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$ ).

## 6.2 Toupie chinoise roulante

Une toupie chinoise (ou « tippe top ») correspond à une sphère tronquée<sup>6</sup> de sorte que son centre gravité ne se situe pas au centre de la sphère, mais est décalé vers le bas (cf fig. ci-contre. Voir aussi le livre [1] page 359).

De plus, le point de contact  $A$  n'est, dans le cas général, pas situé sur l'axe de symétrie et se déplace sans cesse dans  $\mathcal{R}_G$ . On supposera par contre que la toupie se déplace dans glisser, c.-à-d.  $\vec{v}_A = \vec{0}$ , tout en restant dans le plan de contact. Cette toupie possède donc trois degrés de liberté (6, au départ, moins 3, en raison de  $\vec{v}_A = \vec{0}$ ). On gardera cependant ici les trois angles d'Euler comme paramètres et introduirons les deux autres paramètres (non indépendants, donc) de translation :  $C_x$  et  $C_y$ .

Les aspects géométriques de la toupie chinoise (sphère tronquée) sont donnés en section 3.3, page 9.



Le cas de la toupie chinoise roulante a été traité dans de nombreux articles dont celui cité

6. ou, de façon équivalente, une sphère de densité non homogène. Pour la géométrie de votre simulation, vous considérerez la sphère complète (c.-à-d. le point de contact pourra se positionner sur la partie imaginairement tronquée).

en bibliographie [2] et qui conduit aux équations suivantes pour les trois angles :

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin(\theta)}{I_1 + mR^2 ((\alpha - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta))} \cdot \left[ \dot{\psi}^2 (-mR^2(\alpha - \cos(\theta))(1 - \alpha \cos(\theta)) + I_1 \cos(\theta)) + f_1(\theta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \dot{\psi} (mR^2(\alpha \cos(\theta) - 1) - I_3) - mR^2 \dot{\theta}^2 \alpha - mR\alpha g \right] \quad (16)$$

$$\ddot{\psi} = f_2(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \quad (17)$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) - \cos(\theta) f_2(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) - f_1(\theta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \dot{\theta} \sin(\theta) \left( \frac{mR^2 [I_3 (\alpha - \cos(\theta)) + I_1 \cos(\theta)]}{f_3(\theta)} \right) \quad (18)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(\theta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\theta) \\ f_2(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) &= \frac{\dot{\theta}}{\sin(\theta)} f_1(\theta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}) \left( \frac{I_3 [I_3 + mR^2 (1 - \alpha \cos(\theta))]}{f_3(\theta)} \right) \\ &\quad - 2 \dot{\psi} \dot{\theta} \cotan(\theta) \\ f_3(\theta) &= I_1 I_3 + mR^2 I_1 \sin^2(\theta) + mR^2 I_3 (\alpha - \cos(\theta))^2 \end{aligned}$$

Pour les deux autres variables (déplacement de  $C$ ), nous avons de plus  $\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$ , puisque  $\vec{v}_A = \vec{0}$ ,<sup>7</sup> c.-à-d.  $\vec{v}_C = R \vec{\omega} \wedge \vec{k}$ .

Concrètement, une telle toupie est donc représentée par :

- le vecteur d'état  $\vec{P}$  de dimension 5,  $\vec{P} = (\psi, \theta, \varphi, P_4, P_5)$ , où  $P_4$  et  $P_5$  sont des variables intermédiaires vérifiant

$$P_4 = \int_0^t C_x(u) du, \quad \text{et} \quad P_5 = \int_0^t C_y(u) du, \quad \text{c.-à-d.} \quad C_x = \dot{P}_4, \quad \text{et} \quad C_y = \dot{P}_5,$$

- et l'équation différentielle du second ordre  $\ddot{\vec{P}} = f(\vec{P}, \dot{\vec{P}})$ , avec  $f$  donnée, pour ses trois premières composantes par les équations (16–18) précédentes, et pour ses deux dernières composantes par

$$R \vec{\omega} \wedge \vec{k} = R \left( \dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \cos(\psi) \sin(\theta) \right) \vec{i} - R \left( \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\psi) \sin(\theta) \right) \vec{j},$$

c.-à-d.

$$\ddot{P}_4 = R \left( \dot{\theta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \cos(\psi) \sin(\theta) \right),$$

et

$$\ddot{P}_5 = -R \left( \dot{\theta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\psi) \sin(\theta) \right).$$

7. Ceci permettrait d'ailleurs aussi de calculer les forces de frottement si nécessaire, en dérivant et annulant la dérivée. Mais ceci n'est pas demandé dans ce projet.

Un intégrateur d'équations différentielles du second ordre nous permettra donc de trouver les nouvelles valeurs des angles et la nouvelle position de  $C$ , ce qui donnera ensuite la nouvelle position de  $G$  ( $\vec{GC} = R\alpha \vec{a}$ ) et/ou la nouvelle position de  $A$  ( $\vec{AC} = R \vec{k}$ ), au choix en fonction de vos méthodes de visualisation graphique.

## 6.3 Toupie quelconque roulante

On s'intéresse ici au cas le plus général (sous les hypothèses données dans l'introduction).

### 6.3.1 Méthodologie générale

La méthode pour calculer le mouvement de telles toupies est celle donnée dans le cadre page 12 :

1. Calculer le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  (équation 1, page 5), et le moment  $\vec{\mathcal{M}}_A$  de toutes les forces hors point de contact via

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_i \vec{AP_i} \wedge \vec{F_i}$$

Si on se limite<sup>8</sup> au cas le plus simple du seul poids, on aura :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = m g d \sin(\theta) \vec{u}$$

2. utiliser le théorème de Huygens-Steiner, page 7, pour le calcul de  $I_A$  ;
3. pour le calcul de  $\overset{\circ}{I}_A$  :
  - (a) soit un calcul analytique explicite est possible (via le théorème de Huygens-Steiner),
  - (b) soit on peut se permettre de faire l'approximation  $\overset{\circ}{I}_A \simeq 0$
  - (c) soit on fait un calcul numérique approché par différence entre l'ancienne et la nouvelle valeur de  $I_A$  (calculée au point ci-dessus) ;

dans le cadre de ce projet, afin de simplifier l'implémentation informatique même si ce n'est pas physiquement justifié, nous ferons l'hypothèse  $\overset{\circ}{I}_A = 0$  ;
4. utiliser (9), page 11, pour calculer  $\vec{\omega}$  ;
5. puis utiliser (2), page 6, pour calculer  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{\phi}$ .

---

8. et c'est tout à fait licite dans le cadre de ce projet

6. Si nécessaire (plus de 3 degrés de liberté, translation de  $\mathcal{R}_G$ ), utiliser  $\vec{v} = \vec{GA} \wedge \vec{\omega}$  pour trouver  $\vec{G}$  par intégration comme fait dans la section précédente, en introduisant ici les *trois* grandeurs supplémentaire (mais non indépendantes) :

$$P_4 = \int_0^t G_x(t) dt, \quad P_5 = \int_0^t G_y(t) dt, \quad \text{et} \quad P_6 = \int_0^t G_z(t) dt,$$

$$\text{c.-à-d.} \quad \dot{P}_4 = G_x, \quad \dot{P}_5 = G_y, \quad \text{et} \quad \dot{P}_6 = G_z.$$

7. Si nécessaire, calculer le nouvel  $A$  à partir de  $G$  par des considération géométriques ou des équations propres à la toupie.

Une méthode générale (trop ambitieuse pour notre projet) consiste à trouver celui des points du profil de révolution (c.-à-d. le bord) qui dans le plan  $(\vec{a}, \vec{k})$  a la coordonnée  $z$  (c.-à-d. sa projection sur  $\vec{k}$ ) la plus petite (idéalement nulle).

### 6.3.2 Cas concrets

Comme cas concret de ce cas général on pourra considérer les deux exemples précédents (cône et toupie chinoise), mais recodés dans ce cadre plus général, et comparer les évolutions (erreurs d'arrondi, erreurs liée à l'approximation  $\widehat{\mathbf{I}}_A \simeq \mathbf{0}$  dans le cas de la toupie chinoise).

On pourrait aussi considérer la forme d'un œuf. La rotation rapide fait que l'œuf cuit dur (solide) se dresse sur sa pointe. Ce serait joli d'avoir le tracé du point de contact, sur la table et sur l'œuf.

Un quatrième cas concret serait celui de toupies anagyres (voir [1] page 360) : il faut s'imaginer un ellipsoïde, coupé de façon dissymétrique. Un mouvement de tangage est alors transformé en rotation autour d'un axe vertical, toujours dans le même sens.

## 6.4 Retour sur le gyroscope simple

Nous avons vu (section 6.1) que l'on peut traiter globalement le gyroscope simple. Mais les physiciens sont capables d'aller plus loin en cherchant trois « intégrales du mouvement », c.-à-d. trois expressions restant constantes.

Dans ce cas précis, en plus de l'énergie totale  $E$  qui est toujours une intégrale du mouvement, nous avons comme constantes :  $L_{Az} = \vec{L}_A \cdot \vec{k}$  et  $L_{A3} = \vec{L}_A \cdot \vec{a} = I_3 \omega_3$  (et donc  $\omega_3 = \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\varphi}$  est aussi une constante).

Ces constantes nous permettent alors d'écrire :

$$\dot{\psi} = H(\theta) \quad (19)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - \cos(\theta) H(\theta) \quad (20)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E - V(\theta)}{I_1 + m d^2} \quad (21)$$

où  $d$  est la distance entre  $G$  et  $A$  :  $d = \|\overrightarrow{AG}\|$ ,

$$H(\theta) = \frac{L_{Az} - I_3 \omega_3 \cos(\theta)}{(I_1 + m d^2) \sin^2(\theta)}$$

$$2E = (I_1 + m d^2) \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2 + 2 m g d \cos(\theta) = \text{constante}$$

$$V(\theta) = I_3 \omega_3^2 + 2 m g d \cos(\theta) + (I_1 + m d^2) H(\theta)^2$$

#### Concrètement :

1. A partir de la donnée de la vitesse de rotation initiale  $\vec{\omega}(0)$ , calculer les constantes  $E$ ,  $\omega_3$  (trivial), et  $L_{Az}$ .
2. Résoudre les équations différentielles du premier ordre ci-dessus, en prenant comme troisième équation

$$\dot{\theta}^{(n)} = \text{sgn}(\dot{\theta}^{(n-1)}) \sqrt{\frac{2E - V(\theta)}{I_1 + m d^2}}$$

3. Traiter le cas limite  $V(\theta) > 2E$  : changer le signe de  $\dot{\theta}^{(n)}$  et ajouter  $\dot{\theta}^{(n)} \Delta T$  à  $\theta^{(n)}$  tant que  $V(\theta^{(n)}) > 2E$ .

Il faudra pour cela (cas 3) développer un intégrateur spécifique.

## 6.5 Toupie conique glissante

On pourrait aussi, en option, s'intéresser au glissement de la toupie conique.

On doit alors imposer des hypothèses sur les frottements ou sur la géométrie du point de contact, par exemple que la friction est colinéaire à  $\vec{v}_A$ , que  $\vec{F}_r$  est orthogonale au plan, etc.

Voir aussi le livre [1], section 5.42, pages 355 et suivantes.

## 7 Compléments

### 7.1 Mouvement de Poinso

Il serait joli d'avoir la trace de l'herpolhodie ( $\mathring{A}$  si j'ai bien compris) et la polhodie ( $\mathring{\check{A}}$  si j'ai bien compris).

Voir livre [1] page 190 (figure 3.8).

### Références

- [1] Jean-Philippe Ansermet (2018), *Mécanique*, PPUR (2<sup>e</sup> éd.).
- [2] S. T. Glad & D. Petersson & S. Rauch-Wojciechowski (2007), *Phase Space of Rolling Solutions of the Tippe Top*, Symetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications, **3**, 41–54, 2007.



## A Notations

On note par des lettres simples les grandeurs scalaires (p.ex.  $x$ ) et en **gras** surligné d'une flèche les grandeurs vectorielles (p.ex.  $\vec{x}$ ).

Par convention, on note  $x$  la norme du vecteur  $\vec{x}$  (p.ex.  $v = \|\vec{v}\|$ ) et les composantes sont notées par un indice (et sont des scalaires) :  $x_1$  est ainsi la première composante du vecteur  $\vec{x}$ .

La dérivée temporelle de  $x$  est notée  $\dot{x}$  et celle de  $\vec{x}$ ,  $\dot{\vec{x}}$ . Notez bien que la dérivée d'un vecteur, p.ex.  $\dot{\vec{x}}$ , n'est, dans le cas général, pas égale au vecteur des dérivées des composantes, en particulier si le repère tourne.  $\dot{x}_1$  représente la dérivée de la (première) composante, et la (première) composante de la dérivée du vecteur sera notée  $(\dot{\vec{x}})_1$ .

On note par ailleurs  $\{\vec{x}\}_1$  le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que  $\vec{x}$ , c.-à-d. :

$$\{\vec{x}\}_1 = \frac{1}{x} \vec{x}$$

La notation «  $\leftarrow$  » est une notation algorithmique signifiant « mise à jour », « devient ». Par exemple pour dire que la grandeur  $x$  augmente d'une valeur  $a$ , on note :  $x \leftarrow x + a$ .

Dans les sections concernant les intégrateurs, on note  $T_n = T_0 + n\Delta t$  et  $\vec{P}^{(n)}$  le vecteur  $\vec{P}(T_n)$ .

Résumé de quelques notations fréquentes :

- $\vec{x}$  : position ;
- angles d'Euler :  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ ,
- $\vec{v}$  : vitesse du centre de masse ;
- $\vec{v}_A$  : vitesse en un point  $A$  ;
- $\omega$  : vitesse angulaire (autours de l'axe  $\{\vec{\omega}\}_1$ ) ;
- $\vec{P}$  : vecteur des degrés de liberté du système ;
- $m$  : masse ;
- $L$  : longueur (générique) ;  $h$  : hauteur ;
- $R, r$  : rayon ;
- $I$  : moment d'inertie ;
- coefficients d'inertie :  $I_1$  et  $I_3$ ,
- $\vec{a}$  : axe principal de symétrie (solide de révolution) ;
- $\Delta t$  : « pas de temps » (« *timestep* » en anglais) pour l'intégration numérique ;

## B Notion de degré de liberté

En Physique, le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre de déplacements *indépendants* qu'il peut effectuer :

- pour un point matériel libre de se déplacer dans tout l'espace, on compte 3 degrés de liberté, car il peut aller dans chacune des directions indépendamment ;
- le centre de masse d'une boule qui reste sur un billard (c.-à-d. qu'on ne considère pas ici les rotations de la boule sur elle-même, et on suppose qu'elle ne saute pas) ne possède que deux degrés de liberté, car la boule est astreinte à se déplacer dans un plan ; la boule elle-même a cinq degrés de liberté (on ajoute 3 degrés de liberté de rotation), voire 6 si on autorise la boule à sauter ;
- un wagonnet de « grand-huit » ne possède qu'un seul degré de liberté car il est obligé de suivre les rails et ne peut aller qu'« en avant » ou « en arrière », même si en réalité il se déplace dans un espace à 3 dimensions.

Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond ainsi au nombre de variables *indépendantes* qu'il faut pour décrire l'état de ce système. L'état d'un système à un seul degré de liberté peut se représenter à l'aide d'une seule variable réelle. Par exemple, pour décrire la position d'un wagonnet de « grand-huit », il suffit d'une seule variable, qui serait par exemple, la distance parcourue (suivant les rails) depuis la station de départ (abscisse curviligne).

Une telle variable n'est pas forcément une distance, il peut également s'agir d'un angle ou de tout autre moyen permettant de représenter de manière univoque toutes les positions que peut prendre l'objet étudié.

Au premier abord, on peut penser que l'on a inutilement compliqué la chose et perdu de l'information concernant la position « réelle » de l'objet dans l'espace. On n'a cependant rien perdu comme information vu qu'on peut toujours facilement reconstruire la position dans l'espace à partir des degrés de liberté et d'une position de référence ; mais on a par contre gagné en simplicité puisque nous n'avons plus besoin de manipuler tous les vecteurs de toutes les composantes dans les équations du mouvement, mais uniquement ceux qui sont nécessaires, *a priori* en nombre plus réduit. Le gain ne paraît pas important dans le cas d'un simple pendule, mais il l'est plus dans le cas de systèmes composés complexes ayant plusieurs degrés de liberté mais nettement moins que de composantes.

## C Compléments sur l'intégration numérique

### C.1 Généralités

Cette section est totalement hors programme et certainement difficile pour des 1<sup>re</sup> années<sup>9</sup>. Je l'ai néanmoins ajoutée pour information pour ceux que le sujet intéresse et qui aimeraient en savoir un peu plus.

Les intégrateurs numériques sont par essence inexacts et calculent des valeurs approchées des solutions. Ils sont en cela caractérisés de trois façons :

- l'ordre de l'intégrateur, qui caractérise l'évolution (en fonction du temps de calcul) de l'erreur entre la solution calculée fournie et la solution exacte ;  
*à ne pas confondre avec l'ordre de l'équation différentielle intégrée !*
- l'aspect symplectique ou non de l'intégrateur, qui caractérise grosso-modo « les frottements numériques », c.-à-d. la perte d'énergie subie par le système simulé par rapport au vrai système en raison des approximations de calcul ;  
vous verrez plus tard en Physique que l'énergie d'un système est liée à ce que l'on appelle « l'hamiltonien » du système ; un intégrateur symplectique garde invariant l'hamiltonien du système simulé ;
- l'aspect « explicite » ou « implicite » : un intégrateur est « explicite » lorsque les calculs du pas suivant se font directement et il est « implicite » lorsque le calcul de chaque pas d'intégration est lui-même indirect, par approximations, et non pas exact, introduisant donc un deuxième niveau d'approximation dans le calcul.

Avant de détailler l'aspect symplectique des intégrateurs du premier ordre, donnons un résumé synthétique des résultats connus :

- l'intégrateur d'Euler « classique » est un intégrateur explicite du premier ordre non symplectique ;
- l'intégrateur d'Euler-Cromer est également du premier ordre ; il est symplectique et explicite pour les hamiltoniens séparables ;
- une version d'Euler-Cromer existe pour les hamiltoniens non séparables, mais est implicite ;
- les méthodes de Runge-Kutta sont non symplectiques, explicites pour les hamiltoniens séparables et existent en version implicite (non symplectique) pour les hamiltoniens non séparables ;
- la méthode de Newmark est symplectique mais implicite.

---

9. On y parle notamment d'hamiltonien, de hessien, et autres joyusetés que vous découvrirez plus tard dans votre scolarité.

## C.2 De l'aspect symplectique des intégrateurs « eulériens »

Soit une particule de masse  $m$  dans un potentiel  $V = V(\vec{x})$  ne dépendant que de la position ; l'accélération subie est  $\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} V$ , où  $\vec{\nabla} V$  est le gradient de  $V$ .<sup>10</sup>

Considérons alors le schéma d'évolution suivant :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{v}_n - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \vec{\nabla} V_n, \quad \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n - \frac{\Delta t}{m} \vec{\nabla} V_n$$

où  $\alpha$  est une constante qui vaut soit 0 (intégrateur d'Euler « classique »), soit 1/2 (développement de Taylor négligeant les dérivées de l'accélération), soit 1 (intégrateur d'Euler-Cromer).

### C.2.1 Approche « à la main » sur l'énergie

Considérons alors l'évolution de l'énergie au second ordre :

$$E_{n+1} = E_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \vec{v}_n^T \nabla^2 V \vec{v}_n + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} (\vec{\nabla} V_n)^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

où  $\nabla^2 V$  est le hessien du potentiel  $V$ .

On voit bien que si  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  l'énergie ne fait qu'*augmenter*. Pour  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  l'intégrateur ne peut pas être symplectique (et donc ni Euler, ni « Taylor » ne sont symplectiques).

Illustrons cela de façon concrète sur l'oscillateur harmonique à une dimension. On a  $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ , et on connaît la solution analytique  $x = x_0 \cos(\omega t)$  et  $v = -x_0 \omega \sin(\omega t)$  où  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

La variation d'énergie entre deux pas de calcul de l'intégrateur devient :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\Delta t^2}{2} \left( k v^2 + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} k^2 x^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \frac{x_0 k^2}{m} (\sin^2(\omega t) + (1 - 2\alpha) \cos^2(\omega t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

En intégrant sur une période entière de l'oscillation, on trouve  $\Delta E \propto \pi(2 - 2\alpha)$ , ce qui nous amène à conclure qu'il faut  $\alpha = 1$  pour que l'énergie de l'oscillateur harmonique soit stable en moyenne.

<sup>10</sup>. Toute la suite peut en fait s'appliquer à un hamiltonien séparable  $H(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$ . Ici  $\vec{p} = m \vec{v}$  et  $\vec{q} = \vec{x}$ .

### C.2.2 Preuve formelle de symplecticité

La définition d'un intégrateur symplectique est l'orthogonalité du déplacement dans l'espace des phases par rapport au gradient de l'hamiltonien, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\left( \frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left( \frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J$$

avec  $\vec{z} = (\vec{v}, \vec{x})$  (point de l'espace des phases),  $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_3 \\ -\mathbf{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$ , où  $\mathbf{1}_3$  est la matrice identité de dimension 3, et  $\left( \frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)$  la matrice jacobienne de  $\vec{z}_{n+1}$  (en tant que fonction de  $\vec{z}_n$ ).

Pour les schémas d'évolution considérés ici, on a :

$$\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & -\frac{\Delta t}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \\ \Delta t \mathbf{1}_3 & \mathbf{1}_3 - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\left( \frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left( \frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J + (1 - \alpha) \frac{\Delta t^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & \nabla^2 \mathbf{V} \\ -\nabla^2 \mathbf{V} & 0 \end{pmatrix} .$$

Le schéma proposé n'est donc symplectique que pour  $\alpha = 1$  (c.-à-d. Euler-Cromer).

### C.2.3 Euler-Cromer pour les hamiltoniens non séparables

En fait, l'intégrateur d'Euler-Cromer se généralise aux hamiltoniens non séparables, tout en restant symplectique. La généralisation est :

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n - \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{q}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) , \quad \vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n + \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{p}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) .$$

Le problème avec cet intégrateur est que la première équation est *implicite* et nécessite alors souvent, en elle-même, une résolution numérique approchée (type « point fixe ») en  $\vec{p}_{n+1}$ .

## D Inversion d'une matrice 3x3

L'inverse d'une matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1} & M_{0,2}M_{2,1} - M_{0,1}M_{2,2} & M_{0,1}M_{1,2} - M_{0,2}M_{1,1} \\ M_{1,2}M_{2,0} - M_{1,0}M_{2,2} & M_{0,0}M_{2,2} - M_{0,2}M_{2,0} & M_{0,2}M_{1,0} - M_{0,0}M_{1,2} \\ M_{1,0}M_{2,1} - M_{1,1}M_{2,0} & M_{0,1}M_{2,0} - M_{0,0}M_{2,1} & M_{0,0}M_{1,1} - M_{0,1}M_{1,0} \end{pmatrix},$$

où le déterminant  $\det \mathbf{M}$  se calcule comme

$$M_{0,0} (M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1}) - M_{0,1} (M_{1,0}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,0}) + M_{0,2} (M_{1,0}M_{2,1} - M_{1,1}M_{2,0}).$$