LU-factorization. Метод Холецького

Для LU розкладу ми обрали метод Холецького, який представляє матрицю A, як добуток нижньої трикутної матриці L і верхньої трикутної, де елементи діагоналі – 1.

Цей метод є простим і особливо зручним для програмування, адже покроково рахує стовпчики L і рядочки U, роблячи алгоритм простим для реалізації, а також економним за пам'яттю, адже окрім двох (L, U) матриць створювати якісь проміжні непотрібно.

Отже, розглянемо алгоритм відразу на прикладі.

Нехай задано матрицю A, і підберемо такі L (нижня трикутна матриця), U (верхня трикутна матриця), що A дорівнює їхньому добутку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Нехай наші L і U:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u_1}$$

Оскільки, A = LU, то перемноживши L на перший стовпчик U, ми отримаємо перший стовпчик A. Звідси можемо знайти елементи першого стовпчика L:

$$L\underline{u_1} = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} l_{11} = 1 \\ l_{21} = 2 \\ l_{31} = 3 \\ l_{41} = 4 \end{matrix}$$

Перемноживши тепер відомий перший рядочок L і матрицю U, отримуємо перший рядочок A. Звідси ж отримуємо коефіцієнти першого рядочку матриці U:

$$\underline{l_1} \cdot U = (1\ 0\ 0\ 0) \cdot U = (1\ \ u_{12}\ \ u_{13}\ \ u_{14}) =$$

$$= (1\ 2\ 4\ 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_{12} &= 2 \\ u_{13} &= 4 \\ u_{14} &= 1 \end{aligned}$$

Підставивши знайдені числа в L і U отримуємо матриці:

$$L = \begin{array}{c} l_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & l_{22} & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ u_2 \end{array}$$

Аналогічним чином знаходимо другий стовпчик L:

$$L\underline{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 + l_{22} \\ 6 + l_{32} \\ 8 + l_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_{22} &= -1 \\ l_{32} &= -5 \\ l_{42} &= -7 \end{aligned}$$

і другий рядочок U:

$$\underline{l_2} \cdot U = (2\ -1\ 0\ 0) \cdot U = (2\ \ 2+1\ \ 8-u_{23}\ \ 2-u_{24})$$

$$= (2\ 3\ 2\ 2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_{23} &= 6 \\ u_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$L = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-5&l_{33}&0\\4&-7&l_{43}&l_{44}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ =\underline{l_2} \\ \\ \\ \end{array} \qquad U = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&6&0\\0&0&1&u_{34}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ \qquad\quad\ \ \underline{u_3}\end{array}$$

Продовжуючи процедуру таким чином, ми знаходимо усі коефіцієнти матриць L та U:

$$L\cdot\underline{u_3} = L\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8-6\\12-30+l_{33}\\16-42+l_{43}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$l_{33} = 18$$

$$l_{43} = 27$$

$$L = \begin{array}{r} \\ \\ \underline{l_3}= \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-5&18&0\\4&-7&27&l_{44}\end{pmatrix} \qquad U = \begin{array}{c} \qquad\qquad\quad\ \underline{u_4}\\ \begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&6&0\\0&0&1&-1/9\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$l_3 \times U = (3\ \ -5\ \ 18\ \ 0)\cdot U = (3\ \ 1\ \ 0\ \ 1) =$$

$$= (3\quad 6-5\quad 12-30+18\quad 3+18\cdot u_{34})$$

$$\Downarrow$$

$$u_{34} = -\frac{1}{9}$$

$$L \cdot \underline{u_4} = L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3-2 \\ 4-3+l_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$l_{44} = -1$$

Отримуємо розклад L, U:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 18 & 0 \\ 4 & -7 & 27 & -1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$