Orale Analisi 1

▼ Solo Enunciato

▼ 1.3 Funzione Monotona

Definizione 1.3 La funzione f è *monotona debolmente crescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \implies f(a_1) \leq f(a_2)$, è *strettamente crescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \implies f(a_1) < f(a_2)$. Analogamente, f è *debolmente [[strettamente]] decrescente* se $\forall\, a_1, a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \implies f(a_1) \geq f(a_2)$ $[[f(a_1) > f(a_2)]]$.

La funzione f si dice *strettamente monotona* se è strettamente crescente o decrescente.
Le funzioni costanti sono le uniche funzioni sia debolmente crescenti che debolmente crescenti.

▼ 1.7 Funzioni Simmetriche

Definizione 1.7 Sia $A \subset \mathbb{R}$ *simmetrico*, i.e. $\forall\, x \in A,\ -x \in A$. In tal caso, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se $\forall\, x \in A, f(-x) = f(x)$, si dice *dispari* se $\forall\, x \in A, f(-x) = -f(x)$.

▼ 2.12 Assioma di Dedekind (o di Completezza)

Definizione 2.12 Se A, B sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq b \tag{2.1}$$

allora

$$\exists\, c \in \mathbb{R} :\ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq c \leq b\,.$$

Un tale c si dice elemento separatore di A e B.

▼ 2.20 Estremo Superiore ed Estremo Inferiore

Sia X un insieme dotato di un ordinamento totale. La nozione di estremo superiore generalizza il concetto di massimo di un insieme.

Definizione 2.20 Se $A \subset X$ è un insieme non vuoto e limitato superiormente [[inferiormente]], si dice che un numero L [[l]] in X è *estremo superiore [[inferiore]]* di A se è il più piccolo dei maggioranti [[il più grande dei minoranti]] di A. In tal caso si scrive $L = \sup A$ [[$l = \inf A$]].

Essendo $\sup A = \min \mathcal{M}_A$ e $\inf A = \max m_A$, l'estremo superiore [[inferiore]] se esiste è unico. Inoltre:

Proposizione 2.21 *Se A ha massimo [[minimo]], allora questo è anche l'estremo superiore [[inferiore]].*

▼ 2.32 Estremi di Funzioni

Mediante la nozione di immagine e controimmagine, si introduce la seguente

Definizione 2.32 Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale; allora

1. si dice che la funzione f è *limitata superiormente [[o inferiormente, o limitata]]* se la sua immagine $f(A)$ è un insieme limitato superiormente [[o inferiormente, o limitato]];
2. si dice che un numero reale ξ è *il massimo [[o minimo, o estremo superiore, o estremo inferiore]] di* f se ξ è il massimo [[o minimo, o estremo superiore, o estremo inferiore]] dell'immagine $f(A)$ di f, e in tal caso si scrive $\xi = \max f$ [[oppure $\min f$, $\sup f$, $\inf f$]];
3. se f non è limitata superiormente [[o inferiormente]] si scrive $\sup f = +\infty$ [[oppure $\inf f = -\infty$]];
4. se f ha massimo [[o minimo]], un elemento $x_0 \in A$ si dice *punto di massimo [[o minimo]]* per f se $f(x_0) = \max f$ [[se $f(x_0) = \min f$]].

Osservazione 2.33 I punti di massimo o di minimo possono non essere unici.

▼ 2.67 Permutazioni

Definizione 2.67 Dati n oggetti distinti, disposti in fila in un certo ordine, ogni altro modo di metterli in fila si chiama *permutazione* della collocazione ordinata di partenza. Se indichiamo con P_n il numero di permutazioni di n oggetti, allora risulta $P_1 = 1$. Inoltre, presi $n+1$ oggetti da mettere in fila, possiamo scegliere (in $n+1$ modi diversi) il primo oggetto e poi, per ognuno di questi casi, sistemare gli altri n oggetti in P_n modi. Quindi $P_{n+1} = (n+1)\,P_n$ da cui segue che

$$P_n = n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^+ .$$

▼ 2.68 Disposizioni

Definizione 2.68 Le *disposizioni di n oggetti presi a k per volta*, dove $1 \le k \le n$, sono i modi distinti in cui possiamo mettere in fila k oggetti scelti tra un gruppo di n. Il loro numero si denota con $D_{n,k}$ ed è dato da

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) .$$

Infatti, possiamo mettere in fila gli n oggetti (in P_n modi diversi) e scartare gli ultimi $n-k$. Inoltre, ad ogni disposizione dei primi k oggetti ottenuta corrispondono P_{n-k} modi diversi di disporre gli ultimi $n-k$, per cui

$$n! = P_n = D_{n,k} \cdot P_{n-k} = D_{n-k} \cdot (n-k)!$$

▼ 2.70 Combinazioni

Definizione 2.70 Le *combinazioni di n oggetti presi a k per volta*, dove $1 \le k \le n$, sono i modi distinti in cui possiamo scegliere (senza badare all'ordine) k oggetti tra un gruppo di n. Il loro numero si denota con $C_{n,k}$ ed è dato da

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} .$$

Infatti, presa una combinazione di k oggetti tra n, facendo permutare gli oggetti in P_k modi si ottengono le corrispondenti disposizioni, per cui $C_{n,k} \cdot P_k = D_{n,k}$, da cui segue la formula. Si noti che $C_{n,k} \in \mathbb{N}^+$.

▼ 2.77 Binomio di Newton

Osservazione 2.71 Le combinazioni si denotano anche usando i *coefficienti binomiali*, che studieremo in seguito, definiti per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$ da

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = 0 \\ C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se} \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad k > n \text{ oppure } k < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Proposizione 2.77 (Formula del binomio di Newton). *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,. \tag{2.7}$$

▼ 3.10 Intorno

Definizione 3.10 Intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto $]H, K[$ che contiene x_0. Invece, intorno di $x_0 = +\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]M, +\infty[$, mentre intorno di $x_0 = -\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]-\infty, N[$, dove $M, N \in \mathbb{R}$. Infine, denotiamo con il simbolo $\mathcal{I}_{x_0}$ l'insieme (o famiglia) degli intorni di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

▼ 3.12, 3.15 Limite di Successioni

Definizione 3.12 Una successione $\{a_n\}_n$ *ha limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, e scriviamo $\lim_n a_n = l$, o anche $a_n \to l$, che si legge "a_n tende ad l", se risulta:

$$\forall\, V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n},\ a_n \in V\ .$$

Una successione si dice *infinitesima* se ha limite $l = 0$, si dice *convergente* se ha limite $l \in \mathbb{R}$, si dice che *diverge positivamente [[negativamente]]* se ha limite $l = +\infty$ $[[l = -\infty]]$.

Esplicitando la nozione di intorno, otteniamo le seguenti definizioni equivalenti di limite.

Proposizione 3.15 *Una successione $\{a_n\}_n$ diverge positivamente, $a_n \to +\infty$, se e solo se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n > M\ . \tag{3.1}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ diverge negativamente, $a_n \to -\infty$, se e solo se

$$\forall\, N \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n < N\ . \tag{3.2}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ converge ad un limite l reale, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, se e solo se

$$\forall\, H, K \in \mathbb{R}\ :\ H < l < K\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ H < a_n < K \tag{3.3}$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |a_n - l| < \varepsilon\ . \tag{3.4}$$

▼ 3.68 Continuità di Funzioni Mediante Successioni

Introduciamo una definizione di *continuità* per funzioni che fa uso del limite di successioni.

Definizione 3.68 Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $\overline{x} \in A$. Diciamo che f è *continua* in $\overline{x}$ se per *ogni* successione di punti di A che converge a $\overline{x}$, la successione dei punti ottenuti dai corrispondenti valori di f converge al valore di f in $\overline{x}$, i.e.

$$\forall \{x_n\}_n \subset A\,, \quad [x_n \to \overline{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})]\ . \tag{3.6}$$

Dato un insieme $B \subset A$, la funzione f si dice continua su B se è continua in ogni punto $\overline{x} \in B$, e si dice continua se è continua su tutto $A = \operatorname{dom} f$.

▼ 4.1 Serie, Somma e Convergenza

Le serie numeriche formalizzano il concetto di somma di infiniti termini.

Definizione 4.1 Data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali (definita per $n \geq n_0$) si dice serie associata ad $\{a_n\}_n$, o serie di termine generale a_n, la successione $\{S_n\}_n$ delle *somme parziali n-esime*

$$S_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i\ .$$

Gli elementi a_i si chiamano termini della serie. Se esiste il limite di $\{S_n\}_n$, il valore S di tale limite è detto *somma della serie* e viene indicato con il simbolo $S = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Diremo che la serie *converge* se la sua somma è finita, mentre diremo che la serie *diverge positivamente [[negativamente]]* se la sua somma è $+\infty$ $[[-\infty]]$; diremo infine che la serie è *indeterminata* se la successione $\{S_n\}_n$ non ha limite.

In seguito useremo la notazione $\sum_n a_n$ per indicare la serie di termine generale a_n. Date poi due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, diremo che hanno lo stesso carattere se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti o entrambe indeterminate. Si noti che il carattere di una serie non dipende dalla scelta del punto iniziale n_0, mentre la somma dipende ovviamente da tale scelta nel caso di serie convergenti.

▼ 5.1 Continuità di Funzioni Mediante Intorni (e in forma esplicita)

Diamo ora la definizione topologica di continuità, che risulterà essere equivalente alla precedente:

Definizione 5.1 Una funzione reale $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *continua* in un punto $\overline{x} \in A$ se

$$\forall V \in \mathcal{I}_{f(\overline{x})}\,,\ \exists U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\ :\ \forall x \in U \cap A\,,\ f(x) \in V\ . \tag{5.2}$$

Ricordiamo ora dalla proposizione 3.11 che se $x_0 \in \mathbb{R}$, tra gli intorni di x_0 ci sono gli intervalli aperti centrati in x_0, definiti da $I_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, e che per ogni $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(x_0) \subset V$. Dalla (5.2) otteniamo quindi che *una funzione* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua in un punto* $\overline{x} \in A$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in A\,,\ |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon\ . \tag{5.3}$$

▼ 5.7 Punti di Accumulazione

Definizione 5.7 Un punto $\overline{x}$ è di *accumulazione* per A se

$$\forall U \in \mathcal{I}_{\overline{x}}\,, \quad (U \cap A) \setminus \{\overline{x}\} \neq \emptyset\,.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di A si denota con il simbolo $\operatorname{acc} A$.

Quindi ovviamente $\operatorname{acc} A \subset \overline{A}$. Inoltre, ogni punto $\overline{x} \in \overline{A} \setminus \operatorname{acc} A$ appartiene necessariamente ad A e verifica la seguente proprietà:

$$\exists U_0 \in \mathcal{I}_{\overline{x}} : \quad (U \cap A) = \{\overline{x}\}\,, \tag{5.4}$$

viene pertanto detto *punto isolato* di A.

▼ 5.11 Limite di Funzione

Sia allora $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita su $A \subset \mathbb{R}$. D'ora in poi, parlando di limite per $x \to \overline{x}$, con $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, supporremo sempre che $\overline{x}$ *sia un punto di accumulazione per il dominio* A. Sia inoltre $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 5.11 Diciamo che f tende ad l per x che tende a $\overline{x}$, e scriviamo $f(x) \to l$ per $x \to \overline{x}$, se risulta:

$$\forall V \in \mathcal{I}_l\,,\ \exists U \in \mathcal{I}_{\overline{x}} \ :\ \forall x \in (U \cap A) \setminus \{\overline{x}\}\,,\ f(x) \in V\,. \tag{5.5}$$

Esplicitando quindi la nozione di intorno, otteniamo le seguenti definizioni equivalenti di limite di una funzione per $x \to \overline{x}$, distinguendo se $\overline{x}$ ed il limite l sono reali o $\pm\infty$.

1. $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$
2. $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $f(x) > M$
3. $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e $l = -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $0 < |x - \overline{x}| < \delta$, allora $f(x) < M$
4. $\overline{x} = +\infty$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$
5. $\overline{x} = +\infty$ e $l = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $f(x) > M$
6. $\overline{x} = +\infty$ e $l = -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x > N$, allora $f(x) < M$
7. $\overline{x} = -\infty$ e $l \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$
8. $\overline{x} = -\infty$ e $l = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $f(x) > M$
9. $\overline{x} = -\infty$ e $l = -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x < N$, allora $f(x) < M$.

Come per le successioni, se $f(x) \to l$ per $x \to \overline{x}$ diremo poi che f diverge positivamente, diverge negativamente, converge, è infinitesima per $x \to \overline{x}$ se risulta $l = +\infty$, $l = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$, o $l = 0$, rispettivamente.

▼ 5.48 Continuità Dell'inversa

Deduciamo allora la continuità dell'inversa di funzioni continue e invertibili definite su intervalli.

Proposizione 5.48 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Allora anche la sua inversa è continua.*

▼ 6.1 Funzione differenziabile

Definizione 6.1 La funzione f si dice *differenziabile in* x_0 se esiste un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha\, h + o(h)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in A$. Il numero α si chiama *differenziale di* f *in* x_0 e si denota con il simbolo $df(x_0)$.

Ricordiamo che $g(h) = o(h)$ se g è un infinitesimo di ordine superiore ad h, i.e. se $g(h)/h \to 0$ per $h \to 0$.

▼ 6.4 Rapporto Incrementale, Derivata, Funzione Derivabile

Definizione 6.4 Chiamiamo *rapporto incrementale di* f *in* x_0 la funzione

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definita su $A \setminus \{x_0\}$. Chiamiamo poi *derivata di* f *in* x_0 il limite per $x \to x_0$ del rapporto incrementale di f in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} R_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se questo esiste, finito o infinito che sia. Tale limite si indica con uno dei simboli

$$f'(x_0)\ , \qquad \frac{df}{dx}(x_0)\ , \qquad Df(x_0)\ .$$

Diremo poi che f è *derivabile in* x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita, e diremo che f è derivabile nel sottoinsieme B di A se f è derivabile in ogni punto di B. Infine, diremo che f è derivabile se lo è in ogni punto del suo dominio A.

▼ 6.74 Formula di Taylor con il Resto di Peano

Teorema 6.74 *Sia* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in]a,b[$. *Supponiamo che la funzione* f *sia derivabile* n *volte nel punto* x_0, *ed* $n-1$ *volte nel resto dell'intervallo* $]a,b[$. *Posto*

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x-x_0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ , \end{aligned}$$

risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0\ . \tag{6.7}$$

▼ 7.1 Primitiva

Definizione 7.1 Se f è una funzione definita su un insieme A, si dice che una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f su A se F è derivabile su A e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Se $f(x)$ ha una primitiva $F(x)$, allora anche $F(x) + c$ è primitiva, per ogni $c \in \mathbb{R}$. Infatti l'operatore di derivata è lineare e $Dc = 0$. Ad esempio, le funzioni $F(x) = -\cos x + c$ sono tutte primitive di $f(x) = \operatorname{sen} x$ su $\mathbb{R}$ e ci aspettiamo che *ogni* primitiva di $\operatorname{sen} x$ sia di quella forma. Questo in generale è falso.

▼ 7.9 Integrazione per Parti

Teorema 7.9 *Se $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(I)$ allora*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I.

▼ 7.11 Integrazione per Sostituzione

Nell'osservazione 7.8 abbiamo visto che se $\varphi(x) = 1 + x^2$ la funzione $2x/(1 + x^2)$ ha come primitiva la funzione $\log(1 + x^2)$. Infatti abbiamo scritto $2x/(1 + x^2) = \varphi'(x)/\varphi(x)$ con $\varphi(x) = 1 + x^2$. La formula di integrazione per sostituzione parte da un'estensione di questo esempio, i.e. dalla formula della derivata di una composizione di funzioni.

Teorema 7.11 *Siano I e J due intervalli di numeri reali, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to I$ una funzione di classe C^1. Allora indicando con $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f su I risulta*

$$\int (f \circ \varphi)(x)\,\varphi'(x)\,dx = (F \circ \varphi)(x) + c\,, \qquad x \in J\,.$$

ma sappiamo che $\int f(t)\ dt = F(t) + c$ se $t \in I$, dunque riscriviamo la *formula di integrazione per sostituzione* come:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\ dt \qquad \text{con} \quad t = \varphi(x) \tag{7.1}$$

dove abbiamo sottinteso gli intervalli di variazione $t \in I$ e $x \in J$.

▼ Enunciato e Dimostrazione

▼ 1.16 Disuguaglianze Triangolari

Proposizione 1.16 *Se $A, B \in \mathbb{R}$, allora*

(*I*) $|A + B| \leq |A| + |B|$

(*II*) $\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$.

DIMOSTRAZIONE: Scrivendo la proprietà 6) per A e per B, e sommando membro a membro, si ottiene $-(|A| + |B|) \leq A + B \leq (|A| + |B|)$. Applicando quindi la 7), con $a = A + B$ e $b = |A| + |B|$, si ottiene la (I). Per provare la (II), dalla prima diseguaglianza triangolare abbiamo

$$|A| = |(A - B) + B| \leq |A - B| + |B|$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo membro,

$$|A| - |B| \leq |A - B|\ .$$

Prendendo poi B al posto di A ed A al posto di B, otteniamo in modo analogo che

$$|B| - |A| \leq |B - A|$$

da cui, essendo $|B - A| = |A - B|$ per la 5), e moltiplicando ambo i membri per -1,

$$-|A - B| \leq |A| - |B| \ .$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$-|A - B| \leq |A| - |B| \leq |A - B| \ ,$$

il che è equivalente a $\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$, per la proprietà 7) del valore assoluto applicata questa volta con $a = |A| - |B|$ e $b = |A - B|$. $\square$

▼ 2.22 Teorema Dell'esistenza Dell'estremo Superiore

L'assioma di Dedekind implica l'esistenza dell'estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.22 *Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore.*

DIMOSTRAZIONE: Posto $B = \mathcal{M}_A$, gli insiemi A e B sono entrambi non vuoti, in quanto A è limitato superiormente. Inoltre vale (2.1), dal momento che

$$\forall\, a \in A, \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq M \,.$$

Sia $L \in \mathbb{R}$ un elemento separatore di A e B. Abbiamo

$$\forall\, a \in A, \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq L \leq M \,.$$

La prima disequaglianza ci dice che L è un maggiorante di A mentre la seconda che L è il più piccolo tra i maggioranti di A, dunque $L = \sup A$. In particolare, l'elemento separatore di A e $\mathcal{M}_A$ è unico. $\square$

Se $A \subset \mathbb{R}$ non è vuoto, la scrittura $\sup A = +\infty$ [[$\inf A = -\infty$]] significa che A non è limitato superiormente [[inferiormente]]. Quindi:

$$\sup A = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, a \in A \,:\, a > M \,, \quad \inf A = -\infty \iff \forall\, m \in \mathbb{R}, \exists\, a \in A \,:\, a < m \ .$$

Le proprietà dell'estremo inferiore sono legate a quelle dell'estremo superiore.

▼ 2.48 Teorema Dell'esistenza di Radici Complesse

Teorema 2.48 *Per ciascun valore di $n \in \mathbb{N}^+$ ogni numero complesso z diverso da zero ha esattamente n radici n-esime distinte. Inoltre, in forma trigonometrica, se $z = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, le radici n-esime di z sono i numeri complessi $w_k = R(\cos\phi_k + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_k)$ di modulo $R = \rho^{1/n}$ e argomento*

$$\phi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $w = R(\cos\phi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$. Se $w^n = z$, allora $R^n = |w|^n = |w^n| = |z| = \rho$, quindi $R = \rho^{1/n}$. Inoltre dalla formula della potenza n-esima $w^n = R^n(\cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi))$ per cui, essendo $R^n = \rho$, si ha

$$w^n = z \iff R^n(\cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi)) = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \iff \cos(n\phi) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\phi) = \cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria, ne segue che l'argomento ϕ deve essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \mathrm{sen}(n\phi) = \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

che è risolto da $\phi_k = \theta/n + k \cdot 2\pi/n$ per ogni valore di $k \in \mathbb{Z}$. Dalla periodicità delle funzioni seno e coseno concludiamo che i valori di k per i quali si ottengono distinti numeri complessi $\cos\phi_k + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_k$ sono esattamente n, dati ad esempio da $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. □

▼ 2.59 Principio di Induzione

Teorema 2.59 *Sia $S \subset \mathbb{N}$ un insieme che verifica:*

1) $0 \in S$

2) per ogni $n \in S$, anche $n+1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $S \neq \mathbb{N}$, allora l'insieme di numeri naturali $A := \mathbb{N} \setminus S$ è non vuoto. Per il principio del minimo intero A ha minimo: $\exists\, m = \min A$. Dalla 1) sappiamo che $0 \notin A$, quindi $m \in \mathbb{N}^+$ e scriviamo $m = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Poiché $n \notin A$, in quanto $n < m = \min A$, allora $n \in S$. Ma allora, per la 2) si ottiene che $m = n + 1 \in S$. Ma questo è un assurdo, in quanto $m \in A$ e per definizione $A \cap S = \emptyset$. □

▼ 3.32 Teorema Dell'esistenza del Limite di Successioni Monotone

Abbiamo visto che una successione può non avere limite. Questa patologia non accade per le successioni monotone.

Teorema 3.32 *Ogni successione monotona ha limite. Inoltre, se $\{a_n\}_n$ è crescente, il suo limite è uguale all'estremo superiore $\sup_n a_n$. Se invece è decrescente, il suo limite è uguale all'estremo inferiore $\inf_n a_n$.*

DIMOSTRAZIONE: Facciamo prima il caso di successioni crescenti. Sia $l = \sup_n a_n$. Se $l \in \mathbb{R}$, allora abbiamo che $a_n \leq l$ per ogni n, mentre per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo che esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > l - \varepsilon$. Quindi, essendo $\{a_n\}_n$ crescente, per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $a_n \geq a_{\overline{n}}$. In definitiva, abbiamo ottenuto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $l - \varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$ e dunque $|a_n - l| < \varepsilon$. La tesi segue dalla caratterizzazione (3.4). Se invece $\sup a_n = +\infty$, i.e. la successione non è limitata superiormente, allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Dalla monotonia si ottiene analogamente la (3.1).

Il caso $\{a_n\}_n$ decrescente si dimostra osservando che posto $b_n = -a_n$, allora $\{b_n\}_n$ è crescente, e che $\sup_n b_n = -\inf_n a_n$. Basta quindi ricordare la caratterizzazione del limite $\pm\infty$ (con $N = -M$) e osservare invece che $|a_n - l| = |b_n - (-l)|$ nel caso $l \in \mathbb{R}$. □

▼ 3.38, 3.40 Teorema del Confronto e Teorema dei Carabinieri

Il *teorema del confronto* afferma:

Teorema 3.38 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n \leq b_n$; allora*

1. $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$
2. $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.

DIMOSTRAZIONE: Proviamo solo la prima. Fissato $M \in \mathbb{R}$, dalla (3.1) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}_1$ risulta $a_n > M$. Ma esiste $\overline{n}_2$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq \overline{n}_2$, dunque $b_n \geq a_n > M$ per ogni $n \geq \overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 3.39 Posto $a_n = (-1)^n - n$ e $b_n = 1 - n$, dalla definizione di limite abbiamo che $b_n \to -\infty$, mentre $a_n \leq b_n$ per ogni n, dunque $a_n \to -\infty$.

Per successioni convergenti, si utilizza il cosiddetto *teorema dei carabinieri.*

Teorema 3.40 *Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ tre successioni e $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che:*

1. *definitivamente $b_n \leq a_n \leq c_n$*
2. $b_n \to l$
3. $c_n \to l$.

Allora anche $\{a_n\}_n$ ha limite e $a_n \to l$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo $l \in \mathbb{R}$, altrimenti la tesi segue (in ipotesi più generali) dal teorema di confronto 3.38. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla (3.4) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}_1$ risulta $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ ed esiste $\overline{n}_2$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}_2$ risulta $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Inoltre esiste $\overline{n}_3$ tale che $b_n \leq a_n \leq c_n$ per ogni $n \geq \overline{n}_3$. Posto $\overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3\}$, abbiamo che $l - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < l + \varepsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$, dunque $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$, come volevamo dimostrare. □

▼ 4.21 Criterio della Radice per Serie

Confrontando con le serie geometriche, si dimostra facilmente il *criterio della radice n-esima*:

Teorema 4.21 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi tale che $(a_n)^{1/n} \to L$, con $0 \leq L \leq +\infty$. Allora si ha*

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty \,, \qquad L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty \,.$$

DIMOSTRAZIONE: Se $0 \leq L < 1$, posto $q = (L+1)/2$ abbiamo $L < q < 1$. Dalla definizione di limite $(a_n)^{1/n} \to L$ deduciamo che definitivamente $(a_n)^{1/n} < q$, i.e. $0 \leq a_n \leq q^n$. Poiché la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge, essendo $0 < q < 1$, per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_n a_n$. Se invece $L > 1$, dal limite $(a_n)^{1/n} \to L$ questa volta deduciamo che definitivamente $(a_n)^{1/n} > 1$, da cui $a_n \geq 1$. Allora la serie $\sum_n a_n$ diverge positivamente perché il suo termine generale non è infinitesimo. □

▼ 4.26 Criterio di Leibniz per Serie

Vale il seguente *criterio di Leibniz*:

Teorema 4.26 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi, debolmente decrescente e infinitesima; allora la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ risulta convergente.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che, dette S_n le somme parziali, si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2})$$

e per ipotesi $(a_{n+1} - a_{n+2}) \geq 0$, quindi otteniamo che $S_{n+2} \leq S_n$ se n è pari e $S_{n+2} \geq S_n$ se n è dispari. In altri termini la sottosuccessione $\{S_{2n}\}_n$ dei termini di posto pari è debolmente decrescente mentre la sottosuccessione $\{S_{2n+1}\}_n$ dei termini di posto dispari è debolmente crescente. Essendo poi $S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$, allora $\{S_{2n}\}_n$ è limitata inferiormente e $\{S_{2n+1}\}_n$ è limitata superiormente. Allora entrambe convergono a due numeri reali, detti S_p e S_d, rispettivamente. Poiché infine $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$, dove $a_{2n+1} \to 0$ (essendo estratta di una successione infinitesima), allora passando al limite otteniamo che $S_d = S_p$. Se dunque le sottosuccessioni $\{S_{2n}\}_n$ e $\{S_{2n+1}\}_n$ convergono allo stesso limite, allora anche la successione $\{S_n\}_n$ converge, come volevamo dimostrare. □

▼ 5.40 Teorema Dell'esistenza degli Zeri

Chiamiamo *zero di una funzione* f una soluzione $z \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = 0$.

Teorema 5.40 *Sia f una funzione reale continua su un intervallo $[a, b]$ e tale che $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Allora esiste un punto $z \in [a, b]$ tale che $f(z) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $f(a) \cdot f(b) = 0$ l'asserto è ovviamente vero. Se invece $f(a) \cdot f(b) < 0$, senza perdere generalità possiamo supporre $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo allora $A_- := \{x \in [a, b] \, : \, f(x) < 0\}$. Poiché $a \in A_-$ e $b \in \mathbb{R}$ è maggiorante di A_-, l'insieme $A_- \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente. Allora per il teorema 2.22 di esistenza dell'estremo superiore $\exists\, z = \sup A_- \in \mathbb{R}$. Ovviamente $a \leq z \leq b$, quindi f è continua in $x_0 = z$. Mostriamo ora che $f(z) = 0$. Se fosse $f(z) < 0$, allora $z < b$ e per la permanenza del segno, proposizione 5.39, esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $z < x < z + \delta$ e $x \in [a, b]$ risulta $f(x) < 0$, dunque ci sarebbero punti di A_- a destra di z, il che è assurdo perché z è maggiorante di A_-. Analogamente, se fosse $f(z) > 0$, allora $z > a$ e per la permanenza del segno, proposizione 5.39, esisterebbe $\delta > 0$ tale che se $z - \delta < x < z$ e $x \in [a, b]$ risulta $f(x) > 0$, dunque ci sarebbero maggioranti di A_- a sinistra di z, il che è ancora assurdo perché z è il più piccolo dei maggioranti di A_-. □

▼ 5.44 Teorema dei Valori Intermedi

Ricordiamo la definizione 2.14 di intervallo di reali. Un'importante proprietà delle funzioni continue è la conservazione della connessione: l'immagine di un intervallo è sempre un intervallo.

Teorema 5.44 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua ed $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo di estremi $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

DIMOSTRAZIONE: Posto $J = f(I)$, dobbiamo provare che se $\alpha, \beta \in J$, con $\alpha < \beta$, allora per ogni $k \in]\alpha, \beta[$ anche $k \in J$. Per definizione di immagine, esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) = \alpha$ ed $f(b) = \beta$. Supponiamo senza ledere di generalità che $a < b$. Infatti nell'altro caso basta considerare la funzione $-f$. Poiché I è un intervallo, allora $[a, b] \subset I$ e dunque la funzione restrizione $g = f_{|[a,b]}$ è continua. Allora essendo $g(a) \leq k \leq g(b)$, per il corollario precedente esiste $z \in [a, b]$ tale che $g(z) = k$, dunque $z \in I$ e $f(z) = k$, per cui $k \in J = f(I)$. Posti poi $L = \sup_I f$ e $l = \inf I_f$, con $l < L$ (altrimenti la funzione f è costante), allora comunque scelgo $k \in]l, L[$, esistono $\alpha, \beta \in J$ tali che $\alpha < k < \beta$, dunque $k \in J$, volevamo dimostrare. □

▼ 5.50 Teorema di Weierstrass

Una funzione continua può non essere limitata: si consideri ad esempio la funzione tan. Inoltre, anche se è limitata, non è detto abbia massimo o minimo, come succede ad esempio per la funzione arctan. Vediamo ora che se f è continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, allora ha massimo e minimo.

Teorema 5.50 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, allora f ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE: Mostriamo che f ha massimo. Posto $M = \sup f$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ poniamo $y_n = n$ se $M = +\infty$ e $y_n = M - 1/n$ se $M \in \mathbb{R}$. Per definizione di estremo superiore, esiste un punto

$x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > y_n$. In ogni caso $\{y_n\}_n$ e $\{x_n\}_n$ definiscono due successioni di numeri reali tali che $y_n \to M$ mentre $y_n < f(x_n) \le M$, dunque anche $f(x_n) \to M$. Inoltre $\{x_n\}_n$ è una successione di punti di $[a, b]$, che è un insieme limitato. Allora grazie al teorema 3.124 di Bolzano-Weiertsrass, esiste una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ che converge ad un numero reale $\overline{x}$. Poiché $a \le x_n \le b$ per ogni n, allora anche $\overline{x} \in [a, b]$. Ma f è continua in $[a, b]$, dunque abbiamo che $f(x_{k_n}) \to f(\overline{x})$. Essendo $\{f(x_{k_n})\}_n$ una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}_n$, che ha limite M, deve anch'essa avere limite M e dunque $M = f(\overline{x})$. Ma questo significa che $M \in \mathbb{R}$ è anche il massimo di f e che $\overline{x}$ è un punto di massimo. Per mostrare che f ha minimo, basta considerare $-f$. In particolare otteniamo che f è limitata. □

▼ 6.5 Differenziabile Equivalente a Derivabile

Vediamo ora che la derivabilità è equivalente alla differenziabilità.

Teorema 6.5 *Una funzione f è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0. In tal caso inoltre $f'(x_0) = df(x_0) \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $x \neq x_0$ ed $x \in A$, posto $x = x_0 + h$ scriviamo

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quindi se f è derivabile in x_0 risulta che per $h \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \quad &\iff \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \to 0 \\ &\iff \quad f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h) \end{aligned}$$

e dunque f è differenziabile in x_0 con $df(x_0) = f'(x_0)$. Viceversa, se f è differenziabile in x_0 esiste $\alpha = df(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h = o(h) \iff \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h}{h} \to 0 \iff \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to \alpha \in \mathbb{R}$$

e dunque f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = \alpha$, come volevamo dimostrare. □

▼ 6.22 Operazioni con le Derivate

Teorema 6.22 *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili in un punto x_0, allora si ha:*

1. *la funzione somma $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
2. *per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ la funzione prodotto $c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$*
3. *la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$*

4. se $g(x_0) \neq 0$, la funzione reciproco $1/g$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

5. se $g(x_0) \neq 0$, la funzione quoziente f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \,.$$

Dimostrazione: Abbiamo già dimostrato la 1 e la 2, partendo dalle formule

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\,, \qquad g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in A$. Se ora moltiplichiamo membro a membro abbiamo

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) = \big(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\big) \cdot \big(g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)\big) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + \big(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\big)h + o(h)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\big(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\big) \cdot o(h) = o(h)$ e che $\big(f'(x_0)h + o(h)\big) \cdot \big(g'(x_0)h + o(h)\big) = f'(x_0)g'(x_0)h^2 + o(h^2) = o(h)$. Dalla formula sopra segue la 3.

Per la proprietà 4, usiamo invece la definizione di derivata. Osserviamo infatti che se g è derivabile è anche continua in x_0, ma allora per la permanenza del segno esiste un intorno $U_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$ tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in U_0 \cap A$. Scriviamo allora per $x \neq x_0$ e $x \in U_0 \cap A$

$$\frac{(1/g)(x) - (1/g)(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \,.$$

Il primo fattore a secondo membro converge a $-g'(x_0)$, mentre il secondo converge al reciproco di $[g(x_0)]^2$, che è diverso da zero, da cui segue la 4. Infine, scrivendo il quoziente f/g come il prodotto $f \cdot (1/g)$, la proprietà 5 segue applicando la 3 e la 4. Infatti abbiamo

$$(f/g)'(x_0) = (f \cdot 1/g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot (1/g)(x_0) + f(x_0) \cdot (1/g)'(x_0)$$

e quindi si ottiene facilmente la formula per la derivata del quoziente, esplicitando $(1/g)'(x_0)$. □

▼ 6.30 Teorema della Derivata Dell’inversa

Partiamo con un esempio. Sappiamo che la funzione $f(x) = x^3$ è continua e strettamente monotona su $\mathbb{R}$, quindi invertibile con inversa continua. Ci chiediamo se la funzione inversa $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ è anch'essa derivabile. Confrontando i grafici di x^3 e di $x^{1/3}$, osserviamo che se $y_0 = f(x_0)$, la tangente il grafico di $x^{1/3}$ nel punto $(y_0, f^{-1}(y_0))$ si ottiene per riflessione rispetto alla bisettrice $y = x$ della tangente il grafico di x^3 nel punto $(x_0, f(x_0))$. Quindi se in tale punto risulta $f'(x_0) = m \neq 0$, e dunque la retta tangente è obliqua ed ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, nel punto corrispondente $(y_0, f^{-1}(y_0))$ la tangente il grafico di $x^{1/3}$ avrà coefficiente angolare $1/m$ ed equazione $y = f^{-1}(y_0) + m^{-1}(x - y_0)$. Quindi questo accade se $f'(x_0) \neq 0$, i.e. per $x_0 \neq 0$. Infatti $Dx^3 = 3x^2$ si annulla solo in $x_0 = 0$. Nel punto $(0, 0)$ la retta tangente il grafico di x^3 è orizzontale, di equazione $y = 0$, e abbiamo già visto che la retta tangente il grafico di $x^{1/3}$ nel punto corrispondente $(0, 0)$ è verticale ed ha equazione $y = 0$. Questo significa che la funzione inversa $x^{1/3}$ è derivabile in ogni punto $y_0 \neq 0$, con derivata data dal reciproco $1/f'(x_0)$ della derivata $f'(x_0)$, mentre $x^{1/3}$ non è derivabile in $y_0 = 0$. Infatti, vale il seguente:

Teorema 6.30 *Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Sia $x_0 \in]a, b[$ tale che f risulti derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

DIMOSTRAZIONE: Posto $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$, usando il teorema di cambio di variabile, poiché per la stretta monotonia e la continuità di f in x_0 risulta $y \to y_0 \iff x \to x_0$, allora

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

per il teorema sul limite del reciproco, come volevamo dimostrare. □

▼ 6.42 Teorema di Fermat

La dimostrazione del prossimo risultato fa parte della dimostrazione del teorema 6.46 di Rolle.

Teorema 6.42 *Sia x_0 un punto di minimo o di massimo locale interno per una funzione f che risulti derivabile in x_0. Allora $f'(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Sostituendo f con $-f$ possiamo restringerci al caso in cui x_0 è di minimo locale interno per f. Allora da (6.4) deduciamo che la funzione rapporto incrementale $R_{x_0}(x)$ non è positiva prima di x_0 e non è negativa dopo x_0, i.e.

$$\forall\, x \in U \cap \operatorname{dom} f\,, \qquad \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ x > x_0 \Rightarrow & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,. \end{cases}$$

Dalla permanenza del segno, passando al limite per $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$ otteniamo che $f'_-(x_0) \leq 0$ e $f'_+(x_0) \geq 0$. Dalla derivabilità di f in x_0, essendo $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, concludiamo che $f'(x_0) = 0$. □

▼ 6.46 Teorema di Rolle

Se una funzione è sufficientemente regolare ed assume lo stesso valore agli estremi di un intervallo, allora c'è almeno un punto z all'interno dell'intervallo tale che $f'(z) = 0$, quindi la retta tangente il grafico in $(z, f(z))$ è orizzontale.

Teorema 6.46 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

1) *f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;*

2) *f è derivabile almeno nell'intervallo aperto $]a, b[$;*

3) *$f(a) = f(b)$.*

Allora esiste almeno un punto $z \in]a, b[$ tale che $f'(z) = 0$.

Dimostrazione: Per il teorema 5.50 di Weiertsrass, dall'ipotesi 1) deduciamo che f ha massimo e minimo. Denotiamo $M = \max f_{[a,b]}$ e $m = \max f_{[a,b]}$. Se $m = M$ allora f è costante e dunque ha derivata nulla su tutto $[a, b]$. Se invece $m < M$, allora almeno un punto di massimo o di minimo di f deve essere all'interno dell'intervallo $]a, b[$, altrimenti non varrebbe l'ipotesi 3). Se dunque $z \in]a, b[$ è tale che $f(z) = m$ o $f(z) = M$, allora $x_0 = z$ è un punto di massimo o di minimo locale interno di f. Ma dall'ipotesi 2) otteniamo che f è derivabile in z. Allora per il teorema 6.42 di Fermat (che dovete conoscere) concludiamo che $f'(z) = 0$. □

▼ 6.48 Teorema di Lagrange

Nel prossimo risultato si rimuove l'ipotesi 3) dal teorema di Rolle e si deduce l'esistenza di un punto z in cui la funzione ha derivata uguale al coefficiente angolare m della retta r secante il grafico nei punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Questo significa che troviamo un punto $(z, f(z))$ in cui la retta tangente il grafico di f è parallela alla secante r. Per la vastità delle sue conseguenze, il *teorema di Lagrange* è forse il risultato più importante dell'Analisi Matematica per funzioni di una variabile reale.

Teorema 6.48 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $z \in]a, b[$ tale che*

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Dimostrazione: Consideriamo la funzione affine

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

il cui grafico è la retta secante r passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - r(x)$. Si vede immediatamente che la funzione h verifica le ipotesi del teorema 6.46 di Rolle, in quanto $h(a) = f(a) - r(a) = 0$ e $h(b) = f(b) - r(b) = 0$, mentre le ipotesi 1) e 2) valgono separatamente sia per $f(x)$ che per $r(x)$. Allora esiste un punto $z \in]a, b[$ in cui $h'(z) = 0$. Ma $h'(x) = f'(x) - r'(x)$ per ogni $x \in]a, b[$, dove

$$r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =: m .$$

Allora $h'(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = r'(z) = m$, come volevamo dimostrare. □

Il teorema di Lagrange si chiama anche teorema del *valor medio*. Infatti, moltiplicando ambo i membri per $(b - a) \neq 0$ troviamo l'esistenza di un punto $z \in]a, b[$, detto valor medio di f su $[a, b]$, tale che

$$f(b) - f(a) = f'(z) \cdot (b - a) .$$

▼ 6.49, 6.51 Conseguenze del Teorema di Lagrange

I seguenti risultati esprimono proprietà di *funzioni derivabili su un intervallo I*. Otteniamo subito un importante "viceversa parziale" del fatto che ogni funzione costante abbia derivata nulla.

Proposizione 6.49 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e derivabile all'interno dell'intervallo I. Se $f'(x) = 0$ per ogni punto x interno ad I, allora f è costante su I.*

DIMOSTRAZIONE: Fissati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, poiché $[x_1, x_2] \subset I$ allora la restrizione $f_{|[x_1,x_2]}$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange. Dunque esiste $z \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z) \cdot (x_2 - x_1) . \tag{6.5}$$

Essendo $f'(z) = 0$, in quanto z è interno ad I, allora dalla (6.5) deduciamo che $f(x_1) = f(x_2)$, come volevamo dimostrare. □

Proposizione 6.51 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e derivabile all'interno dell'intervallo I. Abbiamo:*

1. *se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è strettamente crescente su I*
2. *se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è debolmente crescente su I*
3. *se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è strettamente decrescente su I*
4. *se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \operatorname{int} I$, allora f è debolmente decrescente su I.*

DIMOSTRAZIONE: Mostriamo solo la prima proprietà, le altre essendo di analoga verifica. Come nella proposizione precedente, fissati $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, esiste $z \in]x_1, x_2[$ per il quale vale la (6.5). Questa volta $f'(z) > 0$ per cui, essendo $(x_2 - x_1) > 0$, deduciamo che $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e dunque che $f(x_1) < f(x_2)$, come volevamo dimostrare. □

▼ 7.41 Teorema della Media Integrale

Definizione 7.39 Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$, chiamiamo *media integrale* di f su $[a, b]$ il numero $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Osservazione 7.40 Se $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ è una funzione a gradini come nell'esempio 7.26, essendo $(b-a) = n$ allora la media integrale è uguale alla media aritmetica $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Se invece f è non negativa, allora la media integrale è uguale all'altezza h di un rettangolo di base lunga $(b-a)$ e la cui area è uguale all'area del sottografico di f.

Teorema 7.41 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile. Allora*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f .$$

Se in particolare f è anche continua su $[a, b]$, allora esiste $z \in [a, b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

DIMOSTRAZIONE: Posti $l = \inf_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ e $L = \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$, allora $l \leq f(x) \leq L$ per ogni $x \in [a,b]$ e dunque, per il teorema 7.35 di confronto, e per linearità,

$$l \cdot (b-a) = \int_a^b l\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b L\,dx = L \cdot (b-a)$$

e dunque la prima diseguaglianza segue dividendo per la quantità positiva $(b-a) > 0$. Se in particolare $f \in C^0([a,b])$, per il teorema 5.44 dei valori intermedi sappiamo che l'immagine di f è uguale all'intervallo chiuso $[l, L]$. Detta $h \in \mathbb{R}$ la media integrale, poiché sappiamo che $h \in [l, L]$, allora $h = f(z)$ per qualche $z \in [a,b]$, come volevamo dimostrare. □

▼ 7.51 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Grazie a questo risultato fondamentale, mediante la teoria dell'integrazione si risolve il problema di esistenza delle primitive.

Teorema 7.51 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e $F : I \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di punto iniziale $a \in I$, cf. definizione 7.44. Allora F è una primitiva di f su I, i.e. F è derivabile su I e $F'(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in I$.*

DIMOSTRAZIONE: Fissato $x_0 \in I$, per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$, dalla formula (7.9), con $x_1 = x$, deduciamo che la funzione rapporto incrementale di F centrata in x_0 e calcolata in x verifica l'uguaglianza

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

quindi coincide con la media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x. Poiché f è continua in tale intervallo, essendo continua su tutto l'intervallo I, allora per la forma generale del teorema della media integrale, cf. la parte 5 della proposizione 7.43, esiste un punto $z(x)$ compreso tra x_0 ed x tale che

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(z(x))\,.$$

Poiché $|z(x) - x_0| \leq |x - x_0|$, allora per il teorema di confronto sui limiti deduciamo che $z(x) \to x_0$ se $x \to x_0$. Usando ancora la continuità di f in x_0, otteniamo che $f(z(x)) \to f(x_0)$ se $x \to x_0$. In definitiva abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \lim_{x \to x_0} f(z(x)) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

e dunque esiste $F'(x_0) = f(x_0)$, come volevamo dimostrare. □

▼ 7.53 Teorema di Torricelli

Come prima conseguenza, deduciamo che il calcolo degli integrali di funzioni continue si riconduce al problema del calcolo di primitive.

Teorema 7.53 *Sia f una funzione continua su I e sia $G : I \to \mathbb{R}$ una qualsiasi primitiva di f su I. Allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha) =: [G(x)]_{\alpha}^{\beta}\,.$$

DIMOSTRAZIONE: Detta F la funzione integrale definita in 7.44, per il teorema 7.51 anche F è una primitiva di f su I. Ma allora dalla proposizione 7.3 sappiamo che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Quindi per ogni $\alpha, \beta \in I$ otteniamo che

$$G(\beta) - G(\alpha) = \big(F(\beta) + c\big) - \big(F(\alpha) + c\big) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\,,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà (7.9) con $x_1 = \beta$ e $x_0 = \alpha$. □

▼ 8.13 Criterio Dell'integrale per Serie

C'è un forte legame tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie. Basti pensare che la somma parziale $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ di una serie è uguale all'integrale nell'intervallo di estremi 0 ed $n+1$ della funzione *a gradini* che vale a_i all'interno dell'intervallo $]i, i+1[$, per ogni $i = 0, \ldots, n$. Quindi, se esiste, la somma della serie ci restituisce l'integrale generalizzato della corrispondente funzione a gradini sulla semiretta dei reali positivi. Il *criterio dell'integrale* esprime più in generale la relazione tra convergenza di serie e di integrali generalizzati.

Teorema 8.13 *Sia $f : [n_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione non negativa e debolmente decrescente, e sia $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq n_0$. Allora la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $[n_0, +\infty[$. Inoltre vale la stima*

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\,, \qquad a_n = f(n)\,. \tag{8.1}$$

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo prima che f è integrabile su $[n_0, N]$ per ogni $N > n_0$ naturale, essendo monotona e limitata. Inoltre, sia la serie che l'integrale convergono oppure divergono positivamente,

essendo f non negativa. Dalla decrescenza di f abbiamo poi che $a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n$ per ogni $x \in [n, n+1]$ e per ogni $n \geq n_0$ intero. Integrando su $[n, n+1]$ otteniamo quindi

$$a_{n+1} \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq a_n \qquad \forall\, n \geq n_0$$

da cui, sommando sugli interi tra n_0 ed N, per l'additività dell' integrale otteniamo

$$\sum_{n=n_0+1}^{N+1} a_n = \sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{N} a_n \qquad \forall\, N > n_0\,,$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo sostituito n con $n+1$ nell' indice di sommatoria. Ora, se la successione delle somme parziali converge, dalla diseguaglianza di destra deduciamo la convergenza dell'integrale generalizzato. Per il viceversa, si usa la diseguaglianza di sinistra. Passando infine al limite per $N \to \infty$ si ottiene la (8.1). □