Formulario Metodi Probabilistici

Mattia Robuschi Caprara

Contents

1 Concetti Base

1.1 Permutazioni

$P_n = n!$

1.2 Disposizioni

$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

1.3 Disposizioni con ripetizione

$D^{(R)}_{n,k} = n^k$

1.4 Combinazioni

$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

2 Funzioni Essenziali

2.1 Funzione Gaussiana Standard

$\eta = 0, \sigma^2 = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

Valori noti:
$g(1) = g(-1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0,6$
$g(2) = g(-2) = \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0,136$

Area:
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = 1$

2.2 Funzione Gaussiana Generica

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\eta)^2}{2\sigma^2}}$ dove $\eta \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$

Area:
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

2.3 Funzione Q (primitiva della gaussiana standard)

$Q(x) = \int_{-x}^{+\infty} g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{-t^2}{2}}$

Valori noti:

$Q(-\infty) = 1$	$Q(0) = 0.5$	$Q(+1) = 0.16$
$Q(-2) = 0.98$		$Q(+2) = 0.02$
$Q(-1) = 0.84$		$Q(+\infty) = 0$

2.4 Funzione G (primitiva della gaussiana standard)

$G(x) = \int_{-\infty}^{+x} g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+x} e^{-\frac{-t^2}{2}}$

2.5 Funzione Gradino Unitario

$u(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \geq 0 \\ 0 \text{ se } t < 0 \end{cases}$

2.6 Funzione Impulso Rettangolare

$\Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } |t| \leq 0 \\ 0 \text{ se } |t| > 0 \end{cases}$

2.7 Funzione Impulsiva di Dirac

$\delta(t)$

Proprietà campionatrice della delta:
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x_0 - x)\, dx = f(x_0)\ \forall f(x)$ continua in x_0

Caso Specifico

$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0) \text{ se } x_0 \in (a, b) \\ 0 \text{ se } x_0 \notin (a, b) \end{cases}$

Caso Particolare
Se $f(x) = 1$ abbiamo che:
$\int_a^b 1 \cdot \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} 1 \text{ se } ab < 0 \\ 0 \text{ se } ab > 0 \end{cases}$

3 Fondamenti di Insiemistica

3.1 Leggi di DeMorgan

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

3.2 Proprietà Distributiva Dell'Intersezione Rispetto All'Unione

$$\begin{array}{c} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ \| \\ A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C \end{array}$$

3.3 Trasformare le Operazioni fra Insiemi

$$\begin{array}{llll} 1) & \cup \to \cap & 2) & \cup \to \cap \\ & \cap \to \cup & & \cap \to \cup \\ & A \to \overline{A} & & \phi \to \Omega \\ & & & \Omega \to \phi \end{array}$$

4 Introduzione alla Probabilità

4.1 3 Assiomi findamentali di Kolmogotov

1. $P\left(\Omega\right) = 1$
2. $P(A) \geq 0\ \ \forall A$
3. $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)\ \ se\ \ A_1 \cdot A_2 = \phi$ (Sono disgiunti)

4.2 Frequenza di Presentazione

$f(A) = \frac{n_A}{n}$

4.3 Definizione di Probabilità

$P(A) = \lim_{n\to+\infty} f(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n_A}{n}$

4.4 Definizione Classica di Probabilità

$P(A) = \frac{k_A}{k} = \frac{\text{Casi Favorevoli}}{\text{Casi Possibili}}$

4.5 Calcolare Probabilità su Spazio Campione Discreto

Nel caso generico, abbiamo n oggetti divisi in $\begin{cases} n_1 \text{ di tipo } 1 \\ n_1 \text{ di tipo } 2 \\ \vdots \\ n_r \text{ di tipo } r \end{cases}$

Decidiamo di estrarne k e ad ogni estrazione abbiamo $\begin{cases} k \text{ oggetti estratti, } k_1 \text{ di tipo } 1 \\ k \text{ oggetti estratti, } k_2 \text{ di tipo } 2 \\ \vdots \\ k \text{ oggetti estratti, } k_r \text{ di tipo } r \end{cases}$

Quindi $P(A) = \dfrac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_r}{k_r}}{\binom{n}{k}}$

4.6 Calcolare Probabilità su Spazio Campione Continuo

Per calcolare la probabilità di un evento in uno spazio campione continuo utilizziamo gli integrali, ad esempio, se $A = \{x \in \mathbb{R} | x_1 < x < x_2\}$ possiamo calcolare $P(A) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$

4.7 Probabilità Condizionata

$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$

4.8 Eventi Indipendenti

Se A e B sono eventi indipendendi dove $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$ allora
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilità condizionata con eventi indipendenti
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$

4.9 Chain Rule

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1|A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots \cdot A_n) \cdot P(A_2|A_3 \cdot \cdots \cdot A_n) \cdot \cdots \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n)$

Che può anche essere scritta come:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) \cdot \cdots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$

4.10 Teorema di Bayes

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$
$\Downarrow$
$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

4.11 Teorema della Probabilità Totale

$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(C|A_i) \cdot P(A_i)$

4.12 Prove Ripetute(Formula di Bernoulli)

n prove k successi

$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (q)^{n-k}$

5 Variabili Aleatorie

5.1 CDF: Cumulative Distribution Function

$F_X(x) = \{X \leq x\}$

5.2 PDF: Probability Density Function

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

5.3 Variabili Aleatorie Discrete

P_i è la probabilità di un determinato evento

CDF

$F_X(x) = \sum_i P_i \cdot u(x - x_i)$

PDF

$f_X(x) = \sum_i P_i \cdot \delta(x - x_i)$

5.4 Variabili Aleatorie Continue

Caratterizzate da una CDF continua, ad esempio: $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

5.5 Funzione Indicatrice (Variabile Aleatoria di Bernoulli)

Una variabile aleatoria di Bernoulli si indica con $X \in \mathcal{B}er(P)$

$I = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in \overline{A} \\ 1 & \text{se } a \in A \end{cases} \quad \Bigg| \quad [P(A) = P]$

Grazie alla V.A. di Bernoulli possiamo definire una CDF $[F_I(i)]$ che ci fa capire se un evento si è verificato oppure no.

5.6 Proprietà Funzioni a 2 Variabili

Se $z(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} h(x, y) dx$ posso scrivere che:

$\frac{dz(y)}{dy} = h(\beta(y), y) \cdot \frac{d\beta(y)}{dy} - h(\alpha(y), y) \cdot \frac{d\alpha(y)}{dy} + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{dh(x,y)}{dy} dx$

5.7 Teorema Fondamentale

2 V.A X e Y con $Y = g(X)$

$f_Y(y) = \sum_{x_i} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Big|_{x_i = g^{-1}(y)}$

1. Calcolare $g'(x)$
2. Calcolare $g^{-1}(y)$ ovvero la funzione infersa a $g(x)$ che si ottiene ricavando la x in funzione di y

5.8 Problema Inverso alla Trasformazione di Variabili Aleatorie

Da una V.A X vogliamo ottenere una V.A uniforme $U \in \mathcal{U}[0,1]$, quindi:

1. tramite operazioni matematiche ottengo $g(x)$ dalla $f_X(x)$ che generalmente viene data come uniforme
2. utilizzo il teo. fond. per ottenere $f_U(u) = \sum_{x_i} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Big|_{x_i=g^{-1}(u)}$

Ora, vogliamo trovare un'altra $g(x)$ data $f_Y(y)$:
sappiamo che in questo caso $g(x) = F_Y^{-1}(U)$ dove U non è altro che la $g(x)$ ottenuta dalla V.A X nel passaggio precedente.

5.9 Valor Medio

Caso V.A Discreta
$\eta_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X(x_i)$

Caso V.A Continua
$\eta_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$

5.10 Varianza

Caso V.A Discreta
$\sigma_x^2 = E\{(X - \eta_x)^2\} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - \eta_x)^2$

Caso V.A Continua
$\sigma_x^2 = E\{(X - \eta_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x)^2 \cdot f_X(x)\, dx$

5.11 Teorema Dell'Aspettazione

Serve per calcolare la varianza di una V.A $Y = g(X)$ data la V.A X:

Caso V.A Discreta
$\eta_y = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot P\{X = x_i\}$

Caso V.A Continua
$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

5.12 Scarto

$L_x = X - \eta_x$
$E\{X - \eta_x\} = 0$

5.13 Momenti Ordinari

$m_X(k) = E\left\{(X)^k\right\}$

Momenti Ordinari Noti
$m_X(0) = 1$
Valor Medio: $m_X(1) = \eta_x$
Valore Quadratico Medio: $m_X(2) = E\left\{(X)^2\right\}$

5.14 Momenti Centrali

$\mu_X(k) = E\left\{(X - \eta_x)^k\right\}$

Momenti Centrali Noti
$\mu_X(1) = E\{(X - \eta_x)\} = 0$
Varianza: $\mu_X(2) = \sigma_x^2$

5.15 Da Momenti Ordinari a Centrali

$\mu_X(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot m_X(i) \cdot \eta_x^{k-i}$

5.16 Da Momenti Centrali a Ordinari

$m_X(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \mu_X(i) \cdot \eta_x^{k-i}$

5.17 Relazioni Importanti fra Momenti

- $\sigma_x^2 = E\left\{(X)^2\right\} - \eta_x^2 = E\left\{(X)^2\right\} - \left[E\left\{(X)\right\}\right]^2$
- $E\Big\{X^2\Big\} = \sigma_x^2 + \eta_x^2$
- $E\Big\{X \cdot (X-1)\Big\} = \sigma_x^2 + \eta_x^2 - \eta_x$
- $\sigma_x^2 = E\Big\{X \cdot (X-1)\Big\} + \eta_x - \eta_x^2$

5.18 Disuguaglianza di Chebychev

$P\Big\{|X - \eta_x| > \varepsilon\Big\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon}$

5.19 Funzione Caratteristica

$\Psi(\nu) = E\Big\{e^{j\nu X}\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\nu x} \cdot f_X(x)\, dx$
Sarà più utile per i vettori aleatori

5.20 MGF: Funzione Generatrice di Momenti

$\Phi(s) = E\Big\{e^{sX}\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$
$\Phi(s)\Big|_{s=j\nu} = \Psi(\nu) \to m_X(k)$
$\Downarrow$
$m_X(k) = (-j)^k \cdot \frac{d^k \Psi(\nu)}{d\nu^k}\Big|_{\nu=0}$

5.21 Moda

Caso V.A Dsicrete
La moda non è nient'altro che il valore più probabile.

Caso V.A Continue
La moda è il valore massimo della distribuzione, quindi basta solo calcolare i massimi e i minimi della PDF

5.22 Mediana

$\int_{-\infty}^{x_M} f_X(x)\, dx = \int_{x_M}^{+\infty} f_X(x)\, dx$

Dove $x_M = x_m$ indica la moda

Caso V.A Discrete
Calcolare la mediana di una V.A. discreta può essere un pò più impegnativo, per farlo bisogna distinguere due casi ben precisi.

Nel caso in cui l'ordinata di valore $0,5$ si trovi "nel mezzo"("nel salto") che avviene fra un valore e l'altro della CDF della V.A. discreta, allora basterà guardare l'ascissa corrispondente e quella sarà la nostra mediana

Nel caso in cui, invece, l'ordinata di valore $0,5$ si trovi in una parte in cui il grafico è costante, la mediana non può essere assegnata ad un solo valore della V.A., quindi la si assegna alla media dei due valori, ad esempio: $\frac{x_1+x_2}{2}$

Caso V.A Continue
Per calcolare la mediana in una V.A. continua mi basta guardare l'ascissa(x) corrispondente all'ordinata(y) di valore $0,5$.

5.23 CDF Condizionata

$P\left(\{X \leq x\}|C\right) = F_X(x|C) \cdot \frac{P\left(\{X \leq x\} \cdot C\right)}{P(C)}$

Proprietà:

- $P\left(\{x_1 < X \leq x_2\}\middle|C\right) = F_X(x_2|C) - F_X(x_1|C)$
- $F_X(x|C) = F_X(x^+|C)$
- $F_X(x^+|C) - F_X(x^-|C) = P\left(\{X = x\}\middle|C\right)$

5.24 PDF Condizionata

$f_X(x|C) = \frac{dF_X(x|C)}{dx}$

Proprietà:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x|C)\,dx = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = P\left(\{x_1 < X \leq x_2\}\middle|C\right) = F_X(x_2|C) - F_X(x_1|C)$

5.25 Doppio Condizionamento

Caso discreto
$P(M|N) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(M|A_i \cdot N) \cdot P(A_i|N)$ con $A_i, i \geq 1$ partizione

Caso continuo
$P(M|N) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(M|X = x, N) \cdot f_X(x|N)dx$

5.26 Teorema della Probabilità Totale Condizionata

CDF
$F_X(x) = F_X(x|C_1) \cdot P(C_1) + F_X(x|C_2) \cdot P(C_2) + \cdots + F_X(x|C_n) \cdot P(C_n)$

PDF
$f_X(x) = f_X(x|C_1) \cdot P(C_1) + f_X(x|C_2) \cdot P(C_2) + \cdots + f_X(x|C_n) \cdot P(C_n)$

5.27 Valor Medio Condizionato

$E\{X|C\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x|C)\,dx$

5.28 Variabili Aleatorie Uniformi

Una variabile aleatoria uniforme è definiata come: $X \in \mathcal{U}[a, b]$

CDF

$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ se } x > b \end{cases}$

PDF

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$

Valor Medio
$\eta_x = \frac{b+a}{2}$

Valore Quadratico Medio
$E\left\{X^2\right\} \frac{a^2+b^2+ab}{3}$

Varianza
$\sigma_x^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$

5.29 Variabili Aleatorie Esponenziali

Una variabile aleatoria esponenziale è definiata come: $X \in \varepsilon\left(\eta\right)$

CDF
$F_X(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\eta}}\right) \cdot u(x)$

PDF
$f_X(x) = \frac{1}{\eta} \cdot e^{-\frac{x}{\eta}} \cdot u(x)$

Valor Medio
$\eta_x = \eta$

Valore Quadratico Medio
$E\left\{X^2\right\} = 2\eta^2$

Varianza
$\sigma_x^2 = \eta^2$

Deviazione Standard
$\sigma_x = \eta_x = \eta$

5.30 Variabile Aleatoria Gaussiana Standrad

Una variabile aleatoria gaussiana standrad ha $\eta = 0$ e $\sigma^2 = 1$, quindi viene indicata come: $X \in \mathcal{N}(0,1)$

CDF
$F_X(x) = G\left(x\right) = 1 - Q\left(x\right)$

PDF
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Valor Medio
$\eta_x = 0$

Momenti Ordinari di Ordine Dispari
$m_X(k+1) = E\left\{X^{k+1}\right\} = 0$

Valore Quadratico Medio
$m_X(2) = 1$

Momenti Ordinari di Ordine Pari
$m_X(4) = 3$
$\vdots$
$m_X(k) = E\left\{X^k\right\} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (k-1)$

5.31 Variabili Aleatorie Gaussiane Generiche

Una variabile aleatoria gaussiana generica è definita come: $X \in \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$

CDF
$F_X(x) = G\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$

PDF
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$

Valor Medio
$\eta_x = \eta$

Valore Quadratico Medio
$m_X(2) = E\left\{X^2\right\} = \sigma^2 + \eta^2$

Varianza
$\sigma_x^2 = \sigma^2$

Moda
$x_m = \eta$

5.32 Variabili Aleatorie Binomiali

Una variabile aleatoria binomiale è definita come: $X \in \mathcal{B}(n, p)$

PMF
$P_k = P_n(k) = P\left\{X = k\right\} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (\underbrace{1-p}_{q})^{n-k}$

CDF

PDF
$f_X(x) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) \cdot \delta(x-k)$

Valor Medio
$\eta_x = n \cdot p$

Valore Quadratico Medio
$m_X(2) = E\left\{X_i^2\right\} = n \cdot p$

Varianza
$\sigma_x^2 = n \cdot p \cdot q$

Moda
$x_m = \begin{cases} [(n+1) \cdot p] & \text{se } (n+1) \cdot p \text{ non è intero} \\ (n+1) \cdot p \text{ e } (n+1) \cdot p - 1 & \text{se } (n+1) \cdot p \text{ è intero} \end{cases}$

5.33 Distribuzione Geometrica

Una variabile aleatorie con distribuzione geometrica non è altro che un caso particolare delle v.a binomiali

PMF
$P_k = P_n(k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}$

Valor Medio
$\eta_x = \frac{1}{p}$

Varianza
$\sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$

5.34 Variabili Aleatorie di Poisson

Una variabile aleatoria di Poisson è definita come: $X \in \mathcal{P}(\Lambda)$

PMF
$P_x(k) = P\{X = k\} = \frac{\Lambda^k}{k!} \cdot e^{-\Lambda}$

Valor Medio
$\eta_x = \Lambda$

Valore Quadratico Medio
$m_X(2) = E\left\{X^2\right\} = \Lambda^2 + \Lambda$

Varianza
$\sigma_x^2 = \Lambda$

Moda

- Se $\left.\begin{array}{c}\Lambda > 1 \\ \Lambda \text{ non intero}\end{array}\right\} \Rightarrow x_m = \Lambda$
- Se $\left.\begin{array}{c}\Lambda > 1 \\ \Lambda \text{ intero}\end{array}\right\} \Rightarrow x_m = \Lambda$ e $x_m = \Lambda - 1$
- Se $\Lambda < 1 \Rightarrow x_m = 0$

6 Vettori Aleatori

6.1 CDF congiunta

$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$

Proprietà

- $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$
- $F_{XY}(x_2, y) = F_{XY}(x_1, y)$ con $x_2 \geq x_1$
  $F_{XY}(x, y_2) = F_{XY}(x, y_1)$ con $y_2 \geq y_1$
- Marginali:
  $F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$ $F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x)$