Riassunto Geometria e Algebra Lineare

INDICE

A. Teoria

1. Vettori linearmente dipendenti
2. Vettori linearmente indipendenti
3. Disuguaglianza di Cauchy-Scwartz
4. Teorema di Binet
5. Teorema degli Orlati
6. Teorema di struttura
7. Teorema di Rouché-Capelli per i sistemi lineari *
8. Lemma di Steinitz *
9. Teorema di completamento a base
10. Teorema\Formula di Grassman *
11. Teorema della dimensione *
12. Iniettività e suriettività di un'applicazione lineare
13. Criterio di Sylvester
14. Teorema spettrale * Lemma e osservazione nei suoi appunti

B. Pratica

1. Calcolare prodotto vettoriale velocemente
2. Verificare se dei vettori sono dei generatori
3. Verificare che dei vettori siano linearmente indipendenti
4. Moltiplicazione fra 2 matrici
5. Calcolare determinante matrice
6. Calcolare rango matrice
7. Risolvere un sistema lineare
8. Calcolare la matrice inversa
9. Ricavare una base di uno spazio vettoriale
10. Calcolare le equazioni cartesiane di uno spazio vettoriale
11. Base e dimensione della somma di due spazi vettoriali
12. Base e dimensione dell'intersezione di due spazi vettoriali
13. Calcolare la matrice associata
14. Calcolare equazione applicazione lineare da matrice associata
15. Composizione di applicazioni lineari
16. Calcolare autovalori
17. Calcolare autovettori (+ autospazi)
18. Calcolare l'immagine
19. Calcolare il nucleo
20. Diagonalizzare una matrice
21. Calcolare matrice del cambio di base
22. Calcolare matrice associata dopo un cambio di base
23. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt
24. Calcolare complemento ortogonale
25. Retta da forma cartesiana a forma parametrica
26. Retta da forma parametrica a forma cartesiana
27. Trovare equazione del vettore direzione di una retta in forma cartesiana
28. Scrivere equazione retta passante per un punto
29. Scrivere equazione retta parallela ad un piano
30. Scrivere equazione retta perpendicolare ad un piano
31. Scrivere equazione piano incidente a retta
32. Scrivere equazione piano che contiene una retta (retta parallela interna al piano)
33. Calcolare matrice associata di una forma bilineare

C. Nozioni utili

Teoria

Vettori linearmente dipendenti

I vettori $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tale che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ \ldots \ + \alpha_n v_n = 0$$

Vettori linearmente indipendenti

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ \ldots \ + \alpha_n v_n = 0$ ha una e una sola soluzione (Rouché-Capelli)

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ \ldots \ + \alpha_n v_n = 0$ se e solo se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n = 0$

Disuguaglianza di Cauchy-Scwartz

Teorema di Binet

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Teorema degli orlati

Teorema di struttura

Teorema di Rouché-Capelli per i sistemi lineari

Un sistema lineare è compatibile (ha soluzioni) se e solo se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta $\{rg(A \,|\, x) = rg(A)\}$

Nel caso il sistema sia compatibile, il numero di soluzioni di esso ci è dato da $\{\infty^{n-rg(A)}\}$ dove n è il numero di incognite del sistema

Lemma di Steinitz
Teorema di completamento a base

Teorema\Formula di Grassman

$dim(U+W)+dim(U\cap W)=dim(U)+dim(W)$

Teorema della dimensione
Sia $T:V\to W$

$dim(V)=dim(Ker(T))+dim(Im(T))$

Iniettività e suriettività di un'applicazione lineare
Sia $T:V\to W$

- T è iniettiva se e solamente se $dim(Im(T))=dim(V)$
- T è iniettiva se e solamente se $dim(Ker(T))=0$
- T è suriettiva se e solamente se $dim(Im(T))=dim(W)$
- T è biunivoca se e solamente se T è sia iniettiva che suriettiva

---

Conseguenze

- Se T è iniettiva, allora $dim(V)\leq dim(W)$
- Se T è suriettiva, allora $dim(V)\geq dim(W)$
- Se T è biunivoca, allora $dim(V)=dim(W)$

Criterio di Sylvester

Aiuta a capire se una matrice rappresenta un prodotto scalare.

Teorema spettrale

Pratica

Calcolare prodotto vettoriale velocemente

Vogliamo calcolare il prodotto vettoriale fra il vettore v e il vettore w
$v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$

Chiamiamo $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ i tre versori degli assi coordinati

Metto in una matrice i vettori v, w e quello composto dai versori:
$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$
Calcoliamo il determinante di questa matrice ed otteniamo i valori di $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ che corrisponderanno al risultato del prodotto vettoriale

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Compongo la matrice $A = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calcolo il determinante tramite lo sviluppo di Laplace per la seconda riga
$$det(A) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot det \begin{pmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= 0 + 2 \cdot (\hat{i} - \hat{k}) - 1 \cdot (2\hat{i} - \hat{j})$$
$$= 2\hat{i} - 2\hat{k} - 2\hat{i} + 1\hat{j} \ = 0\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k}$$

Quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\hat{i} \\ 1\hat{j} \\ -2\hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Verificare se dei vettori sono dei generatori

Innanzitutto va spiegato cosa vuol dire insieme di generatori.
Un insieme di generatori è un insieme di vettori (**non necessariamente linearmente indipendenti**) che permette di ricostruire, tramite combinazioni lineari, tutti i vettori di una spazio.

Per verificare ciò devo:
1. Creare una matrice A (matrice incompleta) composta dai vettori che devo esaminare ed una sistema lineare $(A \mid b)$ (matrice completa) (tutte le b uguali a 1)
2. Calcolare il rango delle due matrici
3. Se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa, allora i vettori generano lo spazio vettoriale, altrimenti no

Nota(esempi): 5 vettori non possono generare $\mathbb{R}^4$, 3 vettori non possono generare $\mathbb{R}^2$ e così via

Verificare che dei vettori siano linearmente indipendenti

Link utile esempi con polinomi e matrici

1. Dispongo i vettori in una matrice tramite una combinazione lineare (Es: $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$)
2. Riduco a scala tale matrice
3. Se il rango della matrice è uguale al numero di vettori allora sono tutti linearmente indipendenti, altrimenti ad esempio, se il rango è 3 solo i primi 3 sono linearmente indipendenti

Esempio:
Verificare che i seguenti 4 vettori siano linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dispongo i vettori in una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ riduco a scala e ottengo: } \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} rg(A) = 3$$

Di conseguenza v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti fra di loro.
Mentre invece v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti poiché, dopo la riduzione a scala, hanno i pivot (evidenziati in rosso) non nulli.

!!!Importante: $n + 1$vettori di $\mathbb{K}^n$ NON possono essere linearmente indipendenti

Moltiplicazione fra 2 matrici

Si esegue utilizzando la tecnica della moltiplicazione di righe per colonne

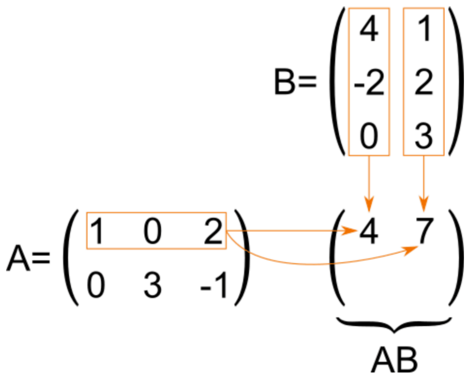
Esempio:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{bmatrix}$$

Foto comprensibile:



Calcolare determinante matrice

Metodo 1: Riduzione a scala

1. Riduco a scala la matrice
2. Moltiplico i pivot fra di loro
3. Il risultato della moltiplicazione è il determinante della matrice

Metodo 2: Sviluppo di Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Denotiamo con A_{ij} la matrice che si ottiene eliminando la riga i e la colonna j della matrice A e con $det(A_{ij})$ il suo determinante.

Fissato un qualsiasi elemento $a_{ij} \in A$, chiamato **complemento algebrico** (o colatore) di a_{ij} il numero: $(-1)^{i+j} \cdot det(A_{ij})$

1. Sviluppo per righe:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

2. Sviluppo per colonne

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

Metodo 3: Sarrus (solo per matrici 3x3)

Calcolare rango matrice

Metodo 1: Riduzione a scala

1. Riduco a scala la matrice
2. Il numero di righe non nulle (linearmente indipendenti) alla fine della riduzione corrisponde al rango della matrice

---

Metodo 2: Teorema degli Orlati (di Kronecker)

1. Si individua una sottomatrice quadrata di ordine 2 con determinante diverso da zero. Se tale sottomatrice non esiste allora il rango di A è 1.
2. Si orla la sottomatrice di ordine 2 per formarne una di ordine 3, e si calcola il determinante di quest'ultima. (**Orlare**: aggiungere altre righe e colonne della matrice originaria A alla sottomatrice che abbiamo "generato" in precedenza)
3. Se il determinante di ciascuna sottomatrice orlata è zero, allora il rango di A è 2. Fine.
4. Se si trova una matrice orlata di ordine 3 con determinante diverso da zero la si orla considerando le eventuali sottomatrici di ordine 4.
5. Se il determinante di tutte le sottomatrici orlate di ordine 4 è zero, allora il rango di A è 3. Fine!
6. Se si trova una matrice orlata di ordine 4 con determinante non nullo la si continua ad orlare considerando le eventuali sottomatrici di ordine 5.
7. Si reitera il processo fino a quando non è più possibile orlare.

Metodo 3: Criterio dei minori

1. 1) Consideriamo il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne di A, ossia $j_1 = min(m, n)$.
   Estraiamo tutte le sottomatrici quadrate di A di ordine 1.

2. Se c'è almeno una sottomatrice quadrata di ordine j_1 con determinante diverso da zero, allora $rg(A) = j_1$.
3. Se tutte le sottomatrici di ordine j_1 estratte da A hanno determinante nullo, il rango della matrice è minore di j_1.
4. Sia $j_2 = j_1 - 1$, e consideriamo le sottomatrici quadrate di A di ordine j_2.
5. Se ce n'è almeno una con determinante diverso da zero, allora $rg(A) = j_2$.
6. Se tutte hanno determinante uguale a zero, il rango di A è minore di j_2.
7. Reiteriamo il procedimento diminuendo l'ordine delle sottomatrici di 1 ad ogni passo.
   Non appena ne troviamo una con determinante non nullo ci fermiamo e concludiamo che il rango di A è uguale all'ordine della sottomatrice quadrata con determinante diverso da zero.

Risolvere un sistema lineare

Calcolare la matrice inversa

1. Calcolare il determinate della matrice A, se è diverso da zero è invertibile, altrimenti no.
2. Calcolo i vari complementi algebrici (a_{ij}) della matrice.
3. Creo/compongo una matrice composta dai vari complementi algebrici.
4. Faccio la trasposta della matrice composta dai complementi algebrici ed ottengo quella che viene chiamata **matrice aggiunta di A.**
5. Infine, per ottenere la matrice inversa, divido ogni elemento della matrice aggiunta per il determinate della matrice A.

Ricavare una base di uno spazio vettoriale

Innanzitutto va spiegato cosa vuol dire base di uno spazio vettoriale.
Una base di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori **linearmente indipendenti** che permette di ricostruire, tramite combinazioni lineari, tutti i vettori di una spazio.

Caso 1: Calcolare una base avendo già le equazioni cartesiane

1. Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale:
   $dim(V) = dim(spazio\ di\ origine(es.\ \mathbb{R}^3)) - numero\ di\ equazioni\ cartesiane$
2. La dimensione mi dirà quante incognite libere dovrò avere
3. Impostare un sistema con le equazioni cartesiane e le incognite libere
4. Trovare i valori delle incognite che saranno i valori dei vettori della base

Esempio:
$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - 2z = 0\right\}$ Spazio vettoriale definito da una sola equazione (sottospazio di $\mathbb{R}^3$)

$$dim(V) = dim(\mathbb{R}^3) - (numero\ equazioni\ cartesiane)$$
$$= 3 - 1 = 2 \ \rightarrow dim(V) = 2 \Rightarrow 2\ incognite\ libere \Rightarrow base\ composta\ da\ 2\ vettori$$

Metto a sistema l'equazione che definisce lo spazio vettoriale con le incognite libere

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1y + 2z \\ y = 1y + 0z \\ z = 0y + 1z \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso 2: Calcolare una base data una combinazione lineare di uno spazio vettoriale

1. Mettere i vettori della combinazione lineare in una matrice
2. Ridurre a scala la matrice
3. Tutti i vettori linearmente indipendenti compongono la base

Esempio:

$$V = \alpha \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Compongo la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{riduco a scala} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad rg(A) = 2 \Rightarrow dim(V) = 2$$

Quindi la base di V sarà $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcolare le equazioni cartesiane di uno spazio vettoriale

1. Calcolo il numero delle equazioni dello spazio vettoriale:
   $numero\ equazioni\ cartesiane = dim(spazio\ vettoriale\ di\ partenza) - dim(V)$
   La dimensione di V si ottiene semplicemente guardando quanti vettori compongono la base (es: base formata da 3 vettori $\rightarrow dim(V) = 3$)

2. Metto a sistema i vettori della base e nell'ultima colonna posiziono le incognite delle equazioni (tante quante il numero di vettori)
3. Riducendo a scala, le righe nulle della matrice incompleta mi restituiscono le equazioni cartesiane

Base e dimensione della somma di due spazi vettoriali

Metodo 1: Sottospazi definiti tramite sistema di generatori

1. Trovo una base per ciascuno dei due sottospazi (Es. B_V, B_W)
2. Faccio l'unione degli elementi delle due basi ($B_V \cup B_W$).
3. Tale insieme ($B_V \cup B_W$) è un sistema di generatori per il sottospazio somma ($V + W$) quindi per trovare una base devo cercare dei vettori linearmente indipendenti all'interno di $B_V \cup B_W$.

Metodo 2: Sottospazi definiti tramite equazioni cartesiane

1. Trovo le basi dei due sottospazi
2. Faccio l'unione degli elementi delle due basi ($B_V \cup B_W$).
3. Tale insieme ($B_V \cup B_W$) è un sistema di generatori per il sottospazio somma ($V + W$) quindi per trovare una base devo cercare dei vettori linearmente indipendenti all'interno di $B_V \cup B_W$.

Metodo 3: Un sottospazio definito tramite sistema di generatori e uno tramite equazioni cartesiane

Mi basta applicare entrambe i metodi precedenti.

Base e dimensione dell'intersezione di due spazi vettoriali

Metodo 1: Sottospazi definiti tramite sistema di generatori

1. Ricavare le basi dei sue sottospazi
2. Ricavare le equazioni cartesiane dei due sottospazi
3. Ricondursi al metodo 2

Metodo 2: Sottospazi definiti tramite equazioni cartesiane

1. Creare un sistema lineare omogeneo utilizzando le equazioni dei due sottospazi
2. Estrarre una base dal sistema di equazioni appena creato

3. La base risultante dal sistema di equazioni sarà la base dell'intersezione dei due sottospazi
4. Il rango della matrice incompleta mi darà la dimensione dell'intersezione

---

Metodo 3: Un sottospazio definito tramite sistema di generatori e uno tramite equazioni cartesiane

Calcolare la matrice associata

$T : V \to W$

Basi degli spazi vettoriali: B_V, B_W

Caso 1: Applicazione definita in forma esplicita

1. Calcolo le immagini dei vettori che compongono la base dello spazio di partenza ($T(B_V)$)
2. **Passaggio superfluo nel caso si usino le basi canoniche**
   Scrivo i vettori risultanti dal primo passaggio come combinazione lineare dei vettori della base dello spazio di arrivo (B_W)
3. Metto i vettori risultanti nel secondo passaggio in una matrice e ottengo la matrice associata

Esempio:

$T : V \in \mathbb{R}^3 \to W \in \mathbb{R}^2 \qquad T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \end{pmatrix}$

$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

#Calcolo le immagini dei vettori di che compongono la base dello spazio di partenza (B_V)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 2 \\ -2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#Scrivo i vettori risultanti dal primo passaggio come combinazione lineare dei vettori della base dello spazio di arrivo (B_W)

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\\-a_2\end{pmatrix} = \begin{cases}a_1 + a_2 = 0\\a_1 - a_2 = 0\end{cases}\begin{cases}a_2 + a_2 = 0\\a_1 = a_2\end{cases}\begin{cases}a_2 = 0\\a_1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2\\-b_2\end{pmatrix} = \begin{cases}b_1 + b_2 = 1\\b_1 - b_2 = 0\end{cases}\begin{cases}b_2 + b_2 = 1\\b_1 = b_2\end{cases}\begin{cases}2 \cdot b_2 = 1\\b_1 = b_2\end{cases}\begin{cases}b_2 = \frac{1}{2}\\b_1 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_2\\-c_2\end{pmatrix} = \begin{cases}c_1 + c_2 = 0\\c_1 - c_2 = -1\end{cases}\begin{cases}c_2 - 1 + c_2 = 0\\c_1 = c_2 - 1\end{cases}\begin{cases}c_2 = \frac{1}{2}\\c_1 = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

#La matrice associata quindi sarà:

$$M_{B_W,B_V}(T) = \begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Caso 2: Applicazione definita da immagini di vettori

Esempio:

$T : V \in \mathbb{R}^3 \rightarrow W \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \Bigg| \; v_2 = T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Bigg| \; v_3 = T\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Base canonica: $T\left(e_1\right) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Bigg| \; T\left(e_2\right) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Bigg| \; T\left(e_3\right) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

#Scrivo v_1, v_2, v_3 come combinazione lineare delle immagini dei vettori della base canonica

-1 $1 \cdot T(e_1) + 1 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_1$
-2 $0 \cdot T(e_1) + 1 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_2$
-3 $-1 \cdot T(e_1) + 0 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_3$

#Scrivo queste combinazioni lineari come un sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & v_2 \\ -1 & 0 & 1 & | & v_3 \end{bmatrix} \text{Riduco a scala} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & v_3 + v_1 - v_2 \end{bmatrix}$$

#Partendo dall'ultima riga, risolvo le varie equazioni

-1

$$\begin{gathered} 0 \cdot T(e_1) + 0 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_3 + v_1 - v_2 \\ T(e_3) = v_3 + v_1 - v_2 \end{gathered} \rightarrow T(e_3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-1 \\ 1+0-0 \\ 1+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-2

$$\begin{gathered} 0 \cdot T(e_1) + 1 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_2 \\ T(e_2) = v_2 - T(e_3) \end{gathered} \rightarrow T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-3

$$\begin{gathered} 1 \cdot T(e_1) + 1 \cdot T(e_2) + 1 \cdot T(e_3) = v_1 \\ T(e_1) = v_2 - T(e_2) - T(e_3) \end{gathered} \rightarrow T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 \\ 0+1-1 \\ 1-0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#Di conseguenza la matrice associata rispetto alla base canonica sarà:

$$M_{E_3,E_3}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare equazione applicazione lineare da matrice associata

Per calcolare la legge esplicita mi basta moltiplicare il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Esempio:

$$M_{W,V}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x - 2y + 3z \\ 0x - y + z \\ 0x + 0y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x - 2y + 3z \\ -y + z \\ +z \end{pmatrix} = T(x, y, z)$$

Composizione di applicazioni lineari

$f : U \rightarrow W \mid g : W \rightarrow V$

Basi: B_U, B_W, B_V
Applicazione lineare composta: $T = g \circ f$
Quindi un qualsiasi vettore di T sarà: $v = g(w) = g(f(w)) = T(u)$

1. Trovo le matrici associate delle due applicazioni lineari: $M_{B_W,B_U}(f)$ e $M_{B_V,B_W}(g)$
2. Per trovare la matrice associata all'applicazione lineare composta mi basterà fare la moltiplicazione delle due matrici associate delle funzioni di partenza: $M_{B_V,B_U}(T) = M_{B_V,B_W}(g) \cdot M_{B_W,B_U}(f)$

Calcolare autovalori

1. Calcolare la matrice associata dell'applicazione lineare
2. Calcolare la matrice H, ovvero la matrice associata meno gli autovalori (t) per la matrice identità (II): $H = M_{B_W,B_V} \cdot t \cdot II$
3. Calcolare il determinante della matrice H per ottenere un'equazione
4. Risolvere l'equazione e si ottengono gli autovalori

Calcolare autovettori (+ autospazi)

1. Calcolo gli autovalori
2. I prossimi passaggi vanno fatti per ogni autovalore
3. Sostituisco il valore dell'autovalore nella matrice H
4. Risolvo il sistema lineare omogeneo dato da $H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow (Hx = 0)$
5. Il risultato ottenuto dal sistema lineare, ovvero i valori di x, y, z, sarà il mio autovettore

Calcolare l'immagine

$T : V \rightarrow W$

1. Calcolo la matrice associata dell'applicazione lineare
2. Calcolare il rango della matrice associata
3. La dimensione dell'immagine corrisponde con il rango della matrice associata
4. La base dell'immagine è composta dai vettori (Colonne della matrice associata) linearmente indipendenti della matrice associata (quelli con i pivot non nulli)

Calcolare il nucleo

$T : V \rightarrow W$

1. Per ottenere la dimensione del nucleo devo sottrarre la dimensione dell'immagine dalla dimensione dello spazio di partenza: $dim(Ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T))$
2. Scrivo un sistema lineare composto dalle **righe** indipendenti della matrice associata (Non le colonne che ovviamente sarebbero la base dell'immagine)
3. Il risultato del sistema lineare mi restituirà i vettori della base del nucleo

Diagonalizzare una matrice

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$mg = n - rg(H)$ Formula per calcolare la molteplicità geometrica (n: ordine matrice A)

1. Calcolare gli autovalori
2. La somma delle molteplicità algebriche (Il numero di autovalori) **deve** essere uguale all'ordine della matrice di partenza per essere diagonalizzabile
3. Verificare che la molteplicità algebrica degli autovalori coincida con la loro molteplicità geometrica, se coincide, allora la matrice è diagonalizzabile
4. Di conseguenza avremo che la **matrice diagonale** D **(con tutti gli autovalori della matrice** A **sulla diagonale)** sarà data da $P^{-1} \cdot A \cdot P$ dove P **sarà la matrice composta da tutti gli autovettori**

Calcolare matrice del cambio di base

$V \in \mathbb{K}^n$

Base: $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Nuova base: $B_V^{'} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

1. Per poter passare scrivere la matrice del bambino di base da B_V a $B_V^{'}$ riscrivo i vettori della nuova base come combinazione lineare di quelli della base originaria:
$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n \\ w_2 &= b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_n \cdot v_n \\ &\vdots \\ w_n &= c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \dots + c_n \cdot v_n \end{aligned}$$
2. Quindi posso scrivere la matrice del cambiamento di base come:
$$M(B_V, B_V^{'}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Calcolare matrice associata dopo un cambio di base

$T: V \in \mathbb{K}^n \rightarrow W \in \mathbb{K}^n$

Basi: $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ | $B_W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Nuove basi: $B_V^{'} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ | $B_W^{'} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

Matrice associata prima del cambio di base: A

Matrice associata dopo il cambio di base: C

1. Trovo la matrice del cambiamento di base da B_V a $B_V^{'}$: $P(B_V, B_V^{'})$
2. Trovo la matrice del cambiamento di base da B_W a $B_W^{'}$: $Q(B_W, B_W^{'})$
3. La matrice associata dopo il cambio di base sarà: $C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Una base, per essere ortonormale, deve essere composta solo da vettori ortonormali, ovvero vettori ortogonali a due a due e tutti di norma 1.
Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è uguale a zero $(< v_1, v_2 > = 0)$

Norma di un vettore: $\| v_1 \| = \sqrt{< v_1, v_1 >}$

$V \in \mathbb{K}^n$

Base: $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Base ortonormale: $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_n\}$

Per trasformare una base non ortonormale in una ortonormale si utilizza l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

- $n_1 = \dfrac{v_1}{\| v_1 \|}$
- $n_2 = \dfrac{v_2 - < v_2, n_1 > \cdot n_1}{\| v_2 - < v_2, n_1 > \cdot n_1 \|}$
- $n_3 = \dfrac{v_3 - < v_3, n_1 > \cdot n_1 - < v_3, n_2 > \cdot n_2}{\| v_3 - < v_3, n_1 > \cdot n_1 - < v_3, n_2 > \cdot n_2 \|}$
- $\vdots$
- $n_n = \dfrac{v_n - < v_n, n_1 > \cdot n_1 - < v_n, n_2 > \cdot n_2 - \ldots - < v_n, n_{n-1} > \cdot n_{n-1}}{\| v_n - < v_n, n_1 > \cdot n_1 - < v_n, n_2 > \cdot n_2 - \ldots - < v_n, n_{n-1} > \cdot n_{n-1} \|}$

Calcolare complemento ortogonale

$V \in \mathbb{K}^n$

$V^{\perp} \in \mathbb{K}^n$

$dim(V) + dim(V^{\perp}) = dim(\mathbb{K}^n)$

1. Determino una base dello spazio vettoriale
2. Calcolo il prodotto scalare tra un vettore di incognite (es. (x, y, z, t)) e ogni vettore della base dello spazio vettoriale
3. Creo un sistema lineare composto dai risultati dei prodotti scalari
4. Risolvendolo trovo la base del complemento ortogonale di V, ovvero una base di $V^{\perp}$

Esempio:

$W \in \mathbb{R}^4$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow dim(W) = 2$$

Quindi sapendo che $dim(W) + dim(W^{\perp}) = dim(\mathbb{R}^4)$ deduciamo che $dim(W^{\perp}) = 2$

#Faccio il prodotto scalare:

1. $< \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z - 1 \cdot t$
2. $< \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 0 \cdot t$

#Compongo il sistema lineare:

$\begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z - 1 \cdot t = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 0 \cdot t = 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$(Il sistema è già ridotto a scala)

Per ricavare la base scelgo due variabili “libere” cosi da poter ricavare dei vettori dal sistema (scelgo y e t):

$$\begin{cases} x+y-t=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-y+t \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-y+t \\ y=y \\ z=0 \\ t=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-y+t \\ y=y+0t \\ z=0y+0t \\ t=0y+t \end{cases}$$

Quindi $B_{W^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow dim(W^\perp) = 2$

Retta da forma cartesiana a forma parametrica

Retta da forma parametrica a forma cartesiana

Trovare equazione del vettore direzione di una retta in forma cartesiana

Scrivere equazione retta passante per un punto

Scrivere equazione retta parallela (esterna) ad un piano

Scrivere equazione retta perpendicolare ad un piano

Una retta ed un piano, per essere perpendicolari, devono avere il vettore direttore della retta (v_r) e il vettore normale del piano (n_π) ortogonali fra loro, ovvero:
$< v_r, n_\pi > = 0$

Scrivere equazione piano incidente a retta

Scrivere equazione piano che contiene una retta (retta giace sul piano) (retta parallela interna al piano)

$$\lambda \cdot (prima\ equazione\ retta\ r) + \mu \cdot (seconda\ equazione\ retta\ r) = 0$$

Calcolare matrice associata di una forma bilineare

Capire se un insieme è un sottospazio vettoriale

$V \in \mathbb{K}^n$ spazio vettoriale
W sottoinsieme non vuoto di V

Per essere un sottospazio devono valere le seguenti proprietà:

1. Condizione necessaria: $0_V \in W$
2. $\forall w_1, w_2 \in W,\ w_1 + w_2 \in W$
3. $\forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}^n,\ \lambda w \in W$

Nozioni utili

- **RETTA IN FORMA CARTESIANA**

$$\begin{matrix} \pi : ax + by + cz + d = 0 \\ \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- **RETTA IN FORMA PARAMETRICA**

  $r : X = P + tv$ dove v è chiamato **vettore direttore/direzione**

  Si può anche scrivere come $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases}$

- **PIANO IN FORMA CARTESIANA**

  $\pi : ax + by + cz + d = 0$

- **PIANO IN FORMA PARAMETRICA**

  $\pi : X = P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$

- **VETTORE DIRETTORE/DIREZIONE (VETTORE NORMALE) DI UN PIANO IN FORMA CARTESIANA**

  $\pi : ax + by + cz + d = 0$

  Il vettore direttore sarà: $n_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

- **APPLICAZIONE LINEARE BEN DEFINITA**

  Un'applicazione lineare è ben definita quando, se definita da n vettori con le loro rispettive immagini, questi vettori sono una base dello spazio vettoriale di partenza.
  Se una matrice è ben definita, allora le immagini dei vettori dello spazio vettoriale di partenza compongono una matrice associata della mia applicazione lineare.

  Esempio:
  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da:

$$T(v_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Bigg| \ T(v_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \ \Bigg| \ T(v_3) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'applicazione lineare T è ben definita sse v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$

- **DURANTE UNA RIDUZIONE A SCALA, SE PIÙ RIGHE SONO MULTIPLE DELLA PRIMA RIGA VENGONO ELIMINATE**

  Esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **RANGO DI UNA MATRICE:**
  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
  $rg(A) \leq min(m, n)$
- **DIMENSIONE BASE SPAZIO VETTORIALE DI MATRICI:**
  Uno spazio vettoriale di matrici definito come $Mat(m, n, \mathbb{K})$ ha una base di dimensione $m \cdot n$

  Esempio:
  Spazio vettoriale: $Mat(3,2,\mathbb{R})$ la sua base avrà dimensione $3 \cdot 2 = 6$
- **SOMMA SPAZI VETTORIALI**
- **SOMMA DIRETTA SPAZI VETTORIALI:**
  $W\ e\ S$ sottospazi di V
  Si dice che V è somma diretta di $W\ e\ S$ sse:
  1. $dim(W + S) = dim(V)$
  2. $dim(W \cap S) = 0$
- **INTERSEZIONE SPAZI VETTORIALI**
- **TRACCIA DI UNA MATRICE:**
  La traccia di una matrice è definita solo per le matrici quadrate ed è la somma dei valori sulla diagonale principale di una matrice.
- **SPETTRO DI UNO SPAZIO VETTORIALE:**
  L'insieme degli autovalori di una autospazio "T" si chiama spettro e si indica con $sp(T)$
- **<u>MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA</u>**
  Numero di volte in cui si ripete un determinato valore di un autovalore
- **<u>MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA</u>**
  $mg = n - rg(H)$
- **VETTORI ORTOGONALI:**
  Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è uguale a zero ($< v_1, v_2 > = 0$)
- **NORMA DI UN VETTORE:** $\| v_1 \| = \sqrt{< v_1, v_1 >}$
- **VETTORE NORMALE:**
  Vettore con norma uguale a 1: $\| v_1 \| = \sqrt{< v_1, v_1 >} = 1$
- **VETTORI ORTONORMALI:**
  Due vettori sono ortonormali se sono fra loro ortogonali e entrambe di norma 1

- **MATRICE DI DIAGONALIZZAZIONE ORTOGONALE:**
  Se una matrice è simmetrica, allora ammette una matrice di diagonalizzazione ortogonale
- **MATRICI SIMILI:**
  Due matrici A e B si dicono simili se esiste una matrice invertibile P tale che $A = P^{-1}BP$
- **SPAZIO EUCLIDEO:**
  Spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare qualsiasi, generalmente lo indichiamo con (Nome spazio vettoriale, nome prodotto scalare) (Es. (V, g))
- **SPAZIO HERMITIANO:**
  Spazio vettoriale dotato di un prodotto hermitiano qualsiasi
- **UNIONE DI SPAZI VETTORIALI:**
  Siano $W, U \in V$ allora $W \cup U \notin V$
  L'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale dello spazio di partenza
- **MATRICE ORTOGONALE:**
  Si dice ortogonale qualsiasi matrice quadrata invertibile la cui matrice inversa coincide con la trasposta.