Trasformazioni geometriche

Raimondo Schettini
DISCo - Universita' di Milano Bicocca
Raimondo.schettini@unimib.it

1

I docenti per lezioni ed esercitazioni si avvalgono di slide. Le slide superano abbondantemente il migliaio. Sono state fatte, rifatte, perfezionate negli anni, ma per quanto possano essere ben fatte non saranno saranno mai, da sole, un esaustivo supporto per lo studio. Per comprendere gli argomenti si suggerisce caldamente di seguire attivamente il corso e di prendere appunti. Per lo studio a casa si suggerisce di usare le slide e gli appunti come indice agli argomenti da studiare sul libro, o sui libri a disposizione.
Da quest'anno le slide verranno rese disponibili PRIMA delle lezioni.

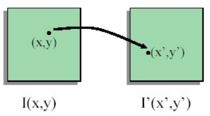
Le slide sono rese disponibili in formato elettronico e sono per uso personale.

2

Trasformazioni geometriche

$$x \rightarrow f_x(x,y) = x'$$
$$y \rightarrow f_y(x,y) = y'$$

$$I(x,y) = I'(f_x(x,y), f_y(x,y))$$



Le trasformazioni geometriche trovano largo impiego nell'elaborazione delle immagini.

Una operazione geometrica, in teoria, modifica soltanto la posizione spaziale del pixel cui è applicata.

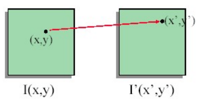
- Dipendenti dalle coordinate dei pixel
- Indipendenti dal contesto
- Indipendenti dal valore del pixel

3

Trasformazioni geometriche. esempio: traslazione

$$x' = f_x(x,y) = x + 3$$
$$y' = f_y(x,y) = y - 1$$

$$I'(x+3, y-1) = I(x,y)$$



Che problemi possono sorgere?

4

Trasformazioni geometriche - esempio: rotazione

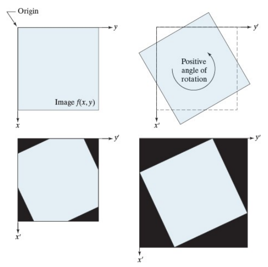
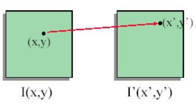


FIGURE 2.41 (a) A digital image. (b) Rotated image (note the counterclockwise direction for a positive angle of rotation). (c) Rotated image cropped to fit the same area as the original image. (d) Image enlarged to accommodate the entire rotated image.

5

Trasformazioni geometriche esempio: traslazione

Che problemi possono sorgere se la trasformazione fosse
X'=0.66X+Y e Y'=0.5X+2Y ?



(1,1)	(2.5,2.5)
(2,1)	(4,3)
(3,1)	(5.5,3.5)
…….	…….

Se la trasformazione spaziale applicata fosse quella dell'esempio i pixel dopo la trasformazione potrebbero venirsi a trovare in posizioni "intermedie" fra quelle possibili. (le coordinate dei pixel possono assumere solo certi valori).
In prima approssimazione potremmo arrotondare le coordinate risultanti all'intero più vicino.

6

Scaling delle immagini

Considerazioni analoghe alle precedenti possono essere per quanto riguarda il cambiamento di scala delle immagini (magnificazione e contrazione, nel seguito scaling)
Le operazioni di sovra-campionamento (zooming o magnificazione) e sotto-campionamento (shrinking o contrazione), effettuate direttamente su immagini digitali

Anche lo scaling richiede due fasi:

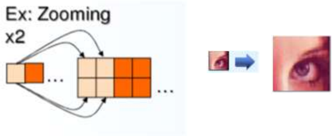
1) creazione di nuove locazioni di pixel
2) assegnazione dei valori di grigio ai nuovi pixel

Un caso particolare di questo metodo di interpolazione è la replica dei pixel, utile quando il *rapporto di magnificazione* è un numero intero (è il metodo utilizzato per mostrare gli effetti della variazione di risoluzione a parità di dimensioni dell’immagine): per zoomare di due volte basta in questo caso duplicare ogni colonna, e quindi duplicare ogni riga dell’immagine così ottenuta.

7

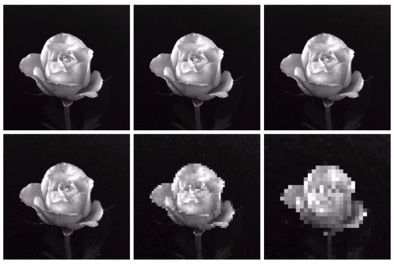
Zooming per replicazione

- La risoluzione di un’immagine può essere fittiziamente aumentata mediante un’operazione di *zooming.*
- Il più semplice operatore di zooming e la “*Replicazione*”: Per ogni pixel nell’immagine si copia lo stesso valore in una griglia di NxN pixel (ad esempio 2x2 repliche).



8

Zooming per replicazione

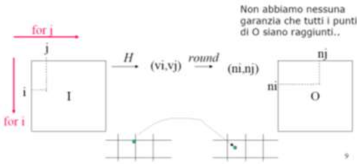


a b c
d e f

FIGURE 2.20 (a) 1024×1024, 8-bit image. (b) 512×512 image resampled into 1024×1024 pixels by row and column duplication. (c) through (f) 256×256, 128×128, 64×64, and 32×32 images resampled into 1024×1024 pixels.

9

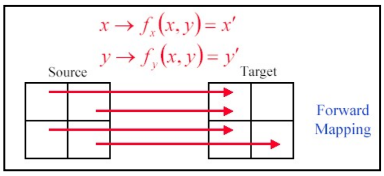
Mapping diretto dei pixel

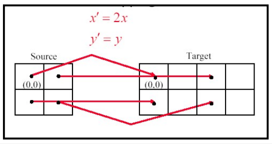


Nelle trasformazioni geometriche e nello scalining non è appropriato fare un forward mapping ed assegnare semplicemente il valore del pixel di ingresso al pixel di uscita più vicino (*nearest neighbor mapping*): infatti l’immagine di uscita potrebbe contenere dei punti nei quali nessun pixel di ingresso risulta trasferito ovvero dei punti provenienti da più pixel dell’immagine di ingresso.

10

Mapping diretto dei pixel





Problema: l’immagine di destinazione può avere dei “buchi” *(valori non definiti)*

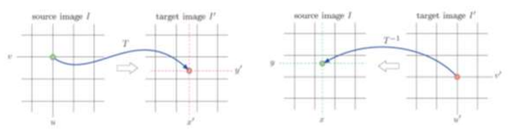
11

Trasformazioni geometriche- problemi mapping diretto

Risultati che si potrebbero ottenere applicando ai pixel dell’immagine di ingresso una trasformazione geometrica ipotizzata di scaling e di rotazione.

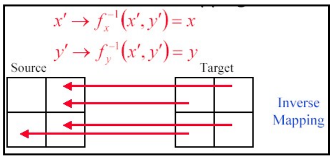
12

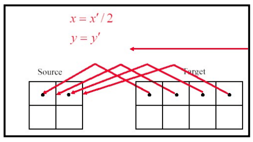
Mapping diretto e inverso dei pixel



13

Mapping inverso dei pixel

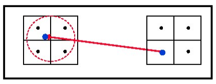


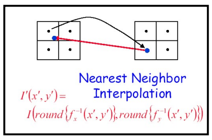


Primo passo Soluzione: il mapping viene fatto inversamente (si genera un array vuoto delle corrette dimensioni, si calcolano i valori dei pixel mediante mapping inverso $f^{-1}(x',y')$)

14

Mapping inverso dei pixel





Secondo passo soluzione: **stima dei valori dei pixel**

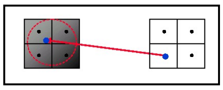
- **problema**: il mapping dei pixel può generare coordinate non intere. Che valore dare quindi al pixel ?

- **soluzione**: stimare un valore approssimato analizzando l'intorno del pixel nell'immagine originale (diverse strategie) e poi riportarlo nell'immagine finale.

- La strategia Nearest Nieghbor Interpolation è veloce ma produce immagini di qualità non elevata

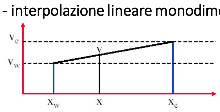
15

Mapping inverso dei pixel



Secondo passo soluzione: **stima dei valori dei pixel**
- **interpolazione dei valori** ad esempio interpolazione lineare: il valore assegnato è una media pesata del valore dei 4 pixel vicini

- interpolazione lineare monodimensionale



$$\frac{x - x_w}{x_e - x_w} = \frac{v - v_w}{v_e - v_w}$$

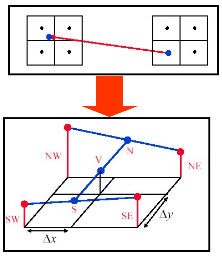
$$v = \frac{x - x_w}{x_e - x_w} v_e + \frac{x_e - x}{x_e - x_w} v_w$$

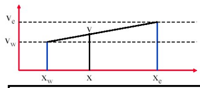
16

Mapping inverso dei pixel

interpolazione lineare bi-dimensionale

- possibili soluzioni diverse e più sofisticate





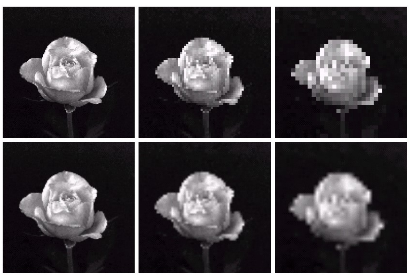
$$v = \frac{x - x_w}{x_e - x_w} v_e + \frac{x_e - x}{x_e - x_w} v_w$$

- interpolazione dei valori

$$S = SW \cdot (1 - \Delta x) + SE \cdot \Delta x$$
$$N = NW \cdot (1 - \Delta x) + NE \cdot \Delta x$$
$$V = S \cdot (1 - \Delta y) + N \cdot \Delta y$$

17

Mapping inverso dei pixel

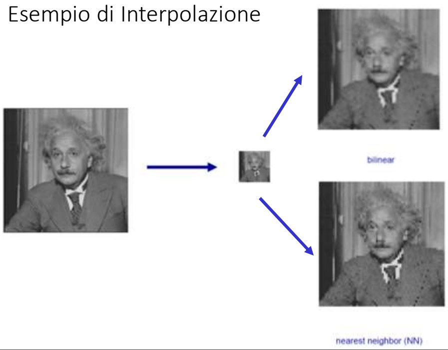


a b c
d e f

FIGURE 2.25 Top row: images zoomed from 128 × 128, 64 × 64, and 32 × 32 pixels to 1024 × 1024 pixels, using nearest neighbor gray-level interpolation. Bottom row: same sequence, but using bilinear interpolation.

18

Esempio di Interpolazione



19

Esempio di Interpolazione

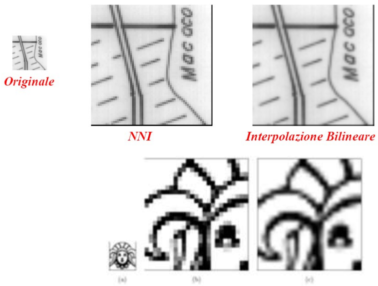


Figure 10.26 Image enlargement (8×): original (a), nearest-neighbor interpolation (b), and bilinear interpolation (c).

20

Esempio di Interpolazione

FIGURE 2.27
(a) Image reduced to 72 dpi and zoomed back to its original 930 dpi using nearest neighbor interpolation. This figure is the same as Fig. 2.23(d). (b) Image reduced to 72 dpi and zoomed using bilinear interpolation. (c) Same as (b) but using bicubic interpolation.

21

Trasformazioni geometriche

Transformation Name		Coordinate Equations	Example
Identity		$x = v$ $y = w$	
Scaling		$x = c_x v$ $y = c_y w$	
Rotation		$x = v\cos\theta - w\sin\theta$ $y = v\cos\theta + w\sin\theta$	
Translation		$x = v + t_x$ $y = w + t_y$	
Shear (vertical)		$x = v + s_v w$ $y = w$	
Shear (horizontal)		$x = v$ $y = s_h v + w$	

22

Trasformazioni geometriche - Coordinate omogenee

Per semplificare la concatenazione delle operazione le coordinate regolari possono essere convertite in coordinate omogenee. Nel caso bi-dimensionale

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{converts to} \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\,x \\ h\,y \\ h \end{pmatrix}.$$

$$x = \frac{\hat{x}}{h} \quad \text{and} \quad y = \frac{\hat{y}}{h}.$$

23

Trasformazioni geometriche

TABLE 2.2
Affine transformations based on Eq. (2.6.–23).

Transformation Name	Affine Matrix, T	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = w$	
Scaling	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = c_x v$ $y = c_y w$	
Rotation	$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v\cos\theta - w\sin\theta$ $y = v\cos\theta + w\sin\theta$	
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + t_x$ $y = w + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + s_v w$ $y = w$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = s_h v + w$	

24

Trasformazioni geometriche- Coordinate omogenee

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+d_x \\ y+d_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_{rot} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{translation} \\ \text{by } (x_c, y_c)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotation} \\ \text{by } \alpha}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{translation} \\ \text{by } (-x_c, -y_c)}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_c \cdot (1-\cos\alpha) + y_c \cdot \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_c \cdot (1-\cos\alpha) - x_c \cdot \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_c + (x-x_c) \cdot \cos\alpha - (y-y_c) \cdot \sin\alpha \\ y_c + (x-x_c) \cdot \sin\alpha + (y-y_c) \cdot \cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25

Trasformazioni geometriche- Coordinate omogenee

Usando le coordinate omogenee possiamo quindi esprimere qualsiasi combinazione di traslazione, rotazione e scala e sgambatura con un singola matrice chiamata “affine mapping” che avrà la seguente forma e i cui coefficienti sono trovati semplicemente combinando le diverse trasformazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

26

Trasformazioni geometriche

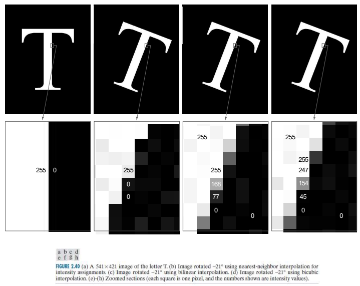
Le trasformazioni geometriche che abbiamo visto sono trasformazioni puntuali che non dovrebbero modificare il valore del pixel.

In alcuni casi tale valore può non essere definito. Vi è quindi la necessità di applicare le strategie di approssimazione del valore dei pixel precedentemente illustrati.

(a) original (b) nearest-neighbor (c) bilinear

27

Trasformazioni geometriche



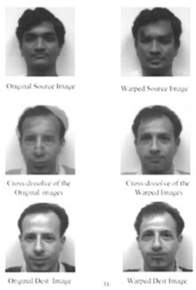
28

Combinazioni di immagini - dissolvenza

- Interpolare le immagini intere:
- Immagine a metà strada = (1-t)*Immagine1 + t*immagine2
- Nell'industria cinematografica questa operazione è chiamata dissolvenza incrociata.
- Ma cosa succede se le immagini non sono allineate?

29

Combinazioni di immagini - dissolvenza



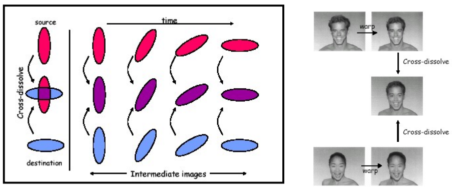
Ma cosa succede se le immagini non sono allineate?

Bisogna Combinare operazioni puntuali sui pixel e trasformazioni geometriche.

Per poter applicare le trasformazioni geometriche devo però stimarne i parametri attraverso coppie di punti: sorgente – destinazione che devono corrispondere

30

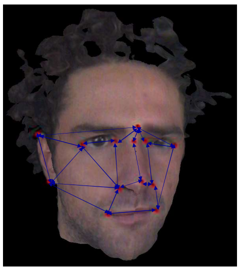
Metamorfosi



- Si definiscono l'immagine d'origine e di destinazione
- si definiscono alcune caratteristiche (feature) che devono corrispondere
- si trasformano geometricamente le immagini sull'immagine intermedia
- si combinano con pesi diversi le immagini d'origine e di destinazione
- Video esempio Michael Jackson - Black Or White (Official Video - Shortened Version) - YouTube

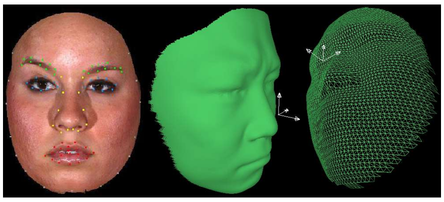
31

Estrazione di caratteristiche- feature facciali



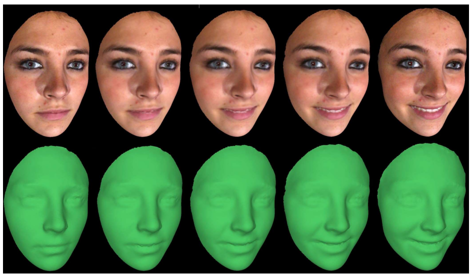
32

Metamorfosi volti 3d



33

Metamorfosi volti 3d - 1 soggetto

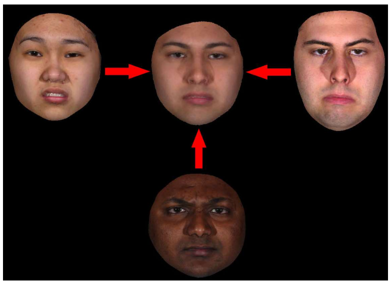


34

Metamorfosi volti 3d - 2 soggetto

35

Metamorfosi volti 3d - 3 soggetto

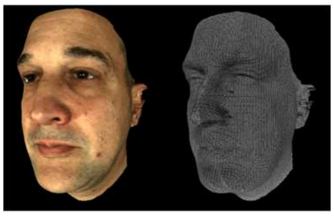


36

Sequenza, 3 Sorgenti

37

Sequenza, N Sorgenti



38

Trasformazioni geometriche

Raimondo Schettini
DISCo - Universita' di Milano Bicocca
Raimondo.schettini@unimib.it

39