

Relazione #1.3 - Codice per equazione di Poisson

Menessini Matteo, 987810

1 Introduzione

In questa relazione si riportano le modifiche apportate al codice step-6 della libreria di deal.II in [2] per determinare numericamente le linee del campo elettrico generate da due elettrodi in una particolare configurazione, adatta a produrre una spinta nell'ambito della propulsione ionica atmosferica. In particolare, i due elettrodi sono costituiti da un filo attraversato da corrente (da qui definito *emettitore*) e un profilo NACA collegato "a terra" (definito *collettore*).

Assumendo che il campo magnetico non vari nel tempo, il campo elettrico è conservativo e può essere definito come gradiente di una funzione potenziale: $E = -\nabla u$.

Per determinare le linee del potenziale, viene presa in considerazione l'equazione 1;

$$-\nabla \cdot \epsilon \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

ove \mathbf{u} è il potenziale elettrico, ϵ la permittività dell'aria e la forzante \mathbf{f} lo sbilanciamento locale di carica, che, in prima approssimazione, può essere trascurato.

Il dominio Ω viene opportunamente definito per ottenere la condizione di gradiente del potenziale nullo ai bordi: la griglia risultante dovrà essere sufficientemente "ampia" rispetto agli elettrodi. Sui bordi degli elettrodi sarà invece imposto un valore di potenziale fissato: V_C e V_E per collettore ed emettitore rispettivamente. Le condizioni al contorno risultanti, definendo con Γ_C i bordi del collettore e con Γ_E quelli dell'emettitore, sono riportate di seguito.

$$\begin{cases} \nabla u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u = V_C & \text{su } \Gamma_C \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u = V_E & \text{su } \Gamma_E \end{cases} \quad (4)$$

2 Codice

Il codice presente in [2] risolve un problema analogo ma con differente mesh, coefficiente a moltiplicare il gradiente del potenziale ϵ e condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno descritte nell'introduzione vengono facilmente sostituite a quelle presenti nel codice, utilizzando `boundary_id` opportunamente definiti nella fase di creazione della griglia. In particolare, il potenziale all'emettitore viene posto pari a $V_E = 20 \text{ kV}$, mentre, per il potenziale al collettore: $V_C = 0 \text{ V}$.

La scelta dei valori del potenziale deriva da quanto usato generalmente in letteratura: il collettore viene solitamente posto "a terra" mentre l'emettitore può avere potenziale positivo o negativo. In questo caso viene scelto di analizzare la scarica in corona positiva, dove sono gli ioni positivi a trasferire momento per fornire la spinta, mentre gli elettroni verranno attirati dall'emettitore, generando ionizzazioni secondarie se la loro energia è sufficiente.

Il termine forzante viene, come precedentemente menzionato, trascurato per questa simulazione.

Il coefficiente ϵ viene fatto coincidere con la costante dielettrica dell'aria, pari a $1.0006 \epsilon_0$, dove ϵ_0 rappresenta la costante dielettrica del vuoto.

2.1 Griglia computazionale

Come griglia computazionale viene scelta una mesh rettangolare, costruita come l'unione di diverse mesh: una per l'emettitore e due, speculari, per la metà inferiore e superiore del profilo NACA. Questa configurazione, rispetto all'utilizzo delle funzioni per la creazione dei profili aerodinamici in `deal.II`, permette una maggiore flessibilità nello scegliere la forma della mesh e la distanza tra i due elettrodi, con la complicazione aggiunta di dover definire manualmente i `Manifold` utilizzati dal software per posizionare correttamente i vertici delle celle durante il raffinamento della griglia. Inoltre, alcuni accorgimenti vanno presi per evitare la deformazione eccessiva delle celle adiacenti al bordo di attacco del profilo durante il raffinamento.

Questo viene fatto sfruttando la funzione polinomiale che descrive un generico profilo NACA a 4 cifre, disponibile in [4], per definire l'altezza del profilo aerodinamico al variare della distanza dal bordo di attacco. Da qui la necessità di creare due metà separate per il profilo NACA: definire due manifold separati permette di avere una funzione biettiva che converte dalla distanza dal bordo di attacco al punto sul profilo NACA di interesse (a cui verrebbero altrimenti associati due punti: uno sopra ed uno sotto la corda del profilo).

Per comodità, si decide di far coincidere l'origine del sistema di riferimento con il centro dell'emettitore e di allineare la corda del profilo aerodinamico con l'asse delle ascisse.

Per definire le dimensioni della mesh computazionale, vengono presi in considerazione i seguenti valori:

- raggio emettitore: $r = 100 \text{ } \mu\text{m}$
- distanza emettitore-collettore: $d = 20 \text{ mm}$
- profilo aerodinamico: NACA0010, con corda $c = 100 \text{ mm}$
- collettore: sul bordo di attacco del profilo aerodinamico, lunghezza $l = 30 \text{ mm}$
- dimensioni griglia: $700 \text{ mm} \times 700 \text{ mm}$

Il raggio del filo è volutamente basso, in modo da ottenere un campo elettrico elevato in sua prossimità, che possa permettere ionizzazione. Gli altri valori sono compatibili con quelli trovati

in letteratura. Solo la scelta della dimensione globale della griglia è arbitraria.

La griglia ottenuta, prima di qualunque step di raffinamento, è riportata in figura 1.

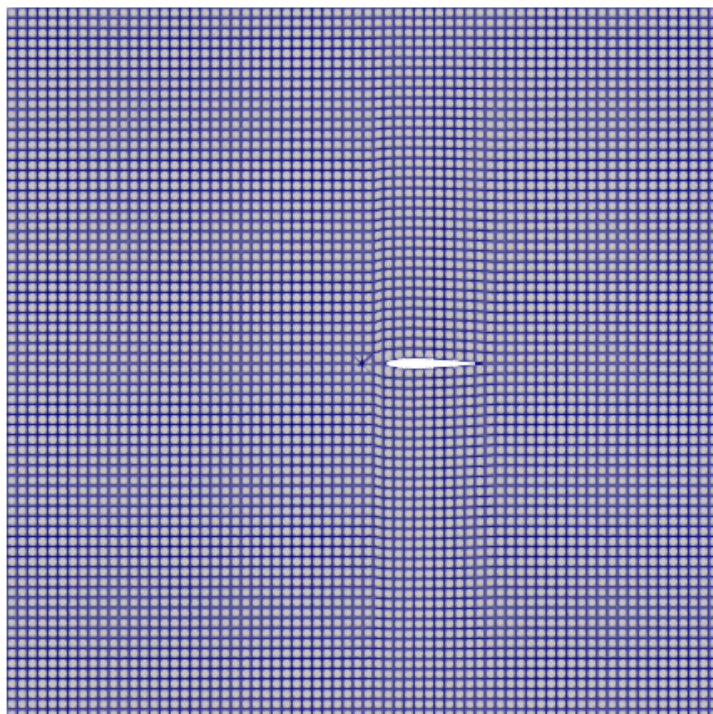


Figura 1: La griglia computazionale prima di qualunque raffinamento.

Si noti come, oltre a quelli che delimitano i bordi del profilo aerodinamico, anche i vertici delle celle sopra e sottostanti siano stati spostati, come evidenziato dal dettaglio nella figura 2. Si è infatti osservato che questo procedimento porta ad una minore deformazione delle celle durante il raffinamento della griglia (si veda la sezione 2.2), in modo particolare se unita alla definizione di un *Manifold* cilindrico per le celle adiacenti al bordo di attacco.

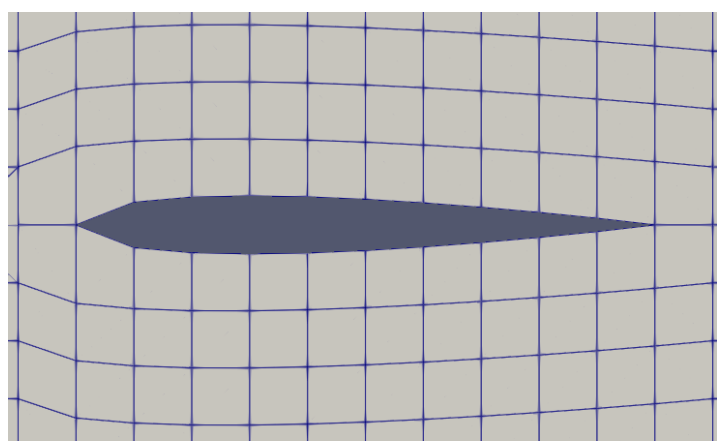


Figura 2: Dettaglio del profilo NACA nella griglia iniziale.

Si noti che la simmetria del problema non viene sfruttata nel ricercare la soluzione sia per mantenere la generalità (per un'eventuale estensione ad un problema non simmetrico) che per avere condizioni al contorno al bordo del dominio più semplici da definire.

2.2 Raffinamento adattivo

Il codice presente in [2] prevede un'integrazione numerica raffinando la mesh in modo adattivo. Lo stimatore dell'errore utilizzato è il `KellyErrorEstimator`, sviluppato appositamente per l'equazione di Laplace (si veda [3]). Per la risoluzione di problemi più complessi sarà opportuno scegliere uno stimatore apposito per garantire efficienza ed accuratezza.

Lo stimatore sviluppato da Kelly et al. utilizza il quadrato del salto del gradiente tra una faccia e l'altra delle celle della griglia, normalizzato sulla dimensione della cella stessa, per stimare l'errore. Come suggerito in [2], si utilizza per questo errore una formula di quadratura di Gauss-Newton con $N=n+1$ punti, dove n indica l'ordine degli elementi finiti utilizzati. Infatti, il quadrato del gradiente della soluzione avrà ordine $2n$, mentre la formula di Gauss-Newton integra esattamente polinomi fino all'ordine $2N - 1 = 2n + 1 > 2n$.

Nel raffinamento adattivo, una data percentuale delle celle con errore più elevato vengono raffinate per migliorare l'accuratezza della soluzione mentre il 10% con errore più basso viene unito per migliorarne l'efficienza. I valori esatti delle percentuali possono essere regolati in base al problema e alla griglia di partenza. Il secondo valore può essere elevato se la griglia di partenza è particolarmente raffinata o se, come in questo caso, non c'è da aspettarsi un elevato gradiente della soluzione in alcuni campi del dominio. La percentuale delle celle da rifinire viene abbassata finché un ulteriore decremento non porterebbe ad una variazione del risultato alla fine del ciclo. Si nota inoltre che le celle vengono rifinite sempre nelle medesime zone, quindi il loro numero (e, conseguentemente, la percentuale del numero di celle totali) aumenta dopo ogni ciclo di raffinamento. Per questo motivo viene scelto di fissare la percentuale di celle da raffinare all'1% per il primo ciclo, aumentando il valore di 2.5 punti percentuali ad ogni ciclo successivo, fino a un massimo del 10%.

2.2.1 Criterio di arresto

Dal momento che il raffinamento della griglia avviene in maniera adattiva, in più macro-iterazioni (definite *cicli*), queste ultime vengono limitate ad un massimo di 20. A ciò si aggiunge un criterio di convergenza basato sulla differenza del valore del potenziale normalizzata. In particolare, il calcolo viene arrestato quando:

$$err = \frac{|x_{curr} - x_{old}|}{|x_{curr}|} < tol \quad (5)$$

ove x_{curr} è il valore della soluzione in un punto specifico del dominio nella griglia al passo corrente e x_{old} il valore della soluzione calcolato nella griglia precedente. La tolleranza viene imposta pari a 10^{-3} .

Per determinare la convergenza viene utilizzato il valore della soluzione nel punto $x(1,0.2)$. Questa scelta è arbitrariamente ricaduta su un punto a metà fra i due elettrodi lungo le ascisse ma disallineato in altezza. La convergenza viene valutata sul valore del potenziale in quanto valutarla sul campo elettrico comporterebbe propagazione dell'errore sul potenziale nel calcolo del gradiente.

2.3 Solver

Per risolvere il sistema di equazioni all'interno di ogni ciclo, viene utilizzato il metodo del **gradiente coniugato**, adatto per il problema di Poisson, nel quale la matrice del sistema lineare è simmetrica e definita positiva. Per altri sistemi di equazioni che non presentano queste proprietà, si rende necessario l'utilizzo di altri procedimenti iterativi (ad esempio, in [1] vengono suggeriti BICGStab o GMRES).

Il numero massimo di iterazioni viene fissato a 1000 e la tolleranza a 10^{-12} . Ovvero, la tolleranza per la convergenza del singolo ciclo è diversi ordini di grandezza inferiore a quella utilizzata

per definire la convergenza fra cicli.

Come base funzionale per la soluzione numerica, vengono scelti elementi finiti lineari, osservando che questi permettono di giungere a convergenza in un tempo minore degli elementi biquadratici, sebbene questi ultimi richiedano meno cicli.

Viene utilizzato il Symmetric Successive Over-Relaxation (SSOR) come preconditionatore, con coefficiente di rilassamento pari a 1.5. Questa scelta viene effettuata empiricamente, osservando che il numero di iterazioni per il metodo del gradiente coniugato e il tempo richiesto risultano minori rispetto agli altri valori nell'intervallo $[1, 2)$ testati. Si osserva inoltre che il coefficiente di rilassamento ottimale è diverso nel caso si utilizzino elementi biquadratici. Altri preconditionatori considerati, come quello di Jacobi, richiedono un maggior numero di iterazioni e tempo per ottenere convergenza con il metodo del gradiente coniugato. Un'analisi più accurata potrà essere svolta nell'ambito di equazioni più complesse, dove l'efficienza computazionale sarà più importante.

2.4 Dati per la simulazione numerica*

I dati utilizzati per la simulazione numerica sono riassunti in tabella 1.

Tabella 1: Dati simulazione numerica

Ciclo	$N_{max} = 20$ $tol = 10^{-3}$
Solver lineare	Metodo: Gradiente Coniugato Precondizionatore: SSOR (coefficiente di rilassamento = 1.5) Elementi finiti: lineari $N_{max} = 1000$ $tol = 10^{-12}$
Raffinamento adattivo	refine: $\min(15\%, 1\% + 2.5\% (n_{ciclo}))$ coarsen: 10%
Mesh	700x700 $mm \times mm$
Profilo	NACA0010 $l = 100 \text{ mm}$
Distanza fra elettrodi	$d = 200 \text{ mm}$
Collettore	primi 30 mm del profilo NACA
Potenziale	emettitore: $V_E = 20 \text{ kV}$ collettore: $V_C = 0 \text{ V}$
Costante dielettrica	aria: $\epsilon_{AIR} = 1.0006 \epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

3 Simulazione numerica

In questa sezione vengono riportati i risultati per la simulazione numerica svolta con i dati in 1 per un emettitore a filo di raggio $r = 100 \mu m$.

La griglia risultante dopo aver raggiunto convergenza, dopo 16 iterazioni di raffinamento è presentata in figura 3.

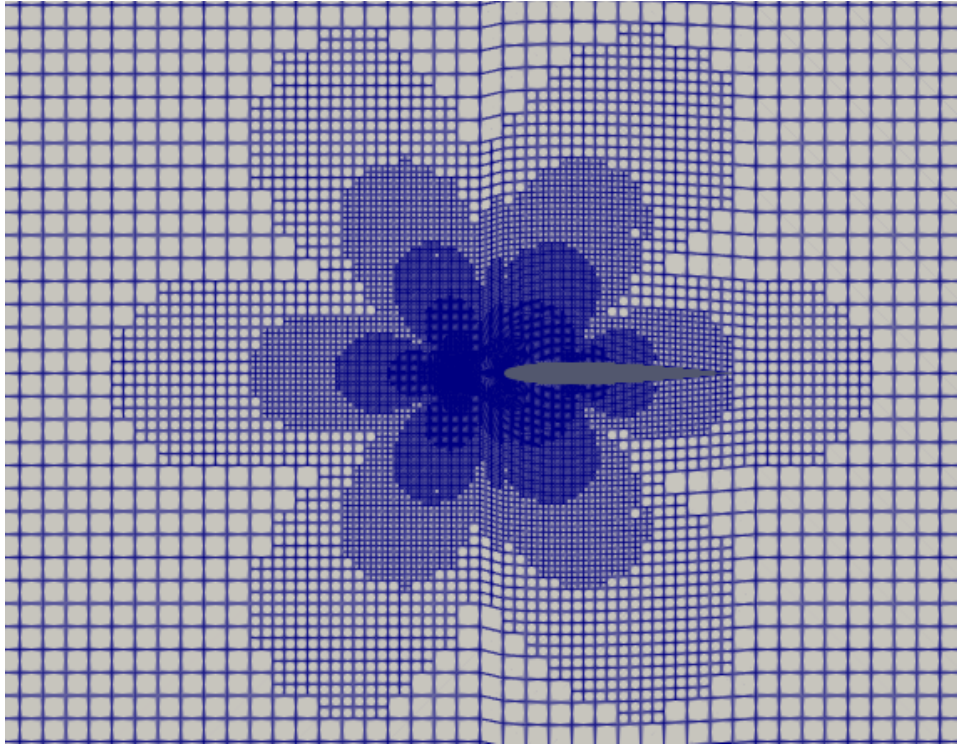


Figura 3: La griglia computazionale al termine del calcolo.

In 4 si può notare come le zone più raffinate siano quelle attorno all'emettitore, in prossimità del bordo di attacco del profilo e nella zona in cui termina il collettore, a circa $1/3$ della corda del NACA.

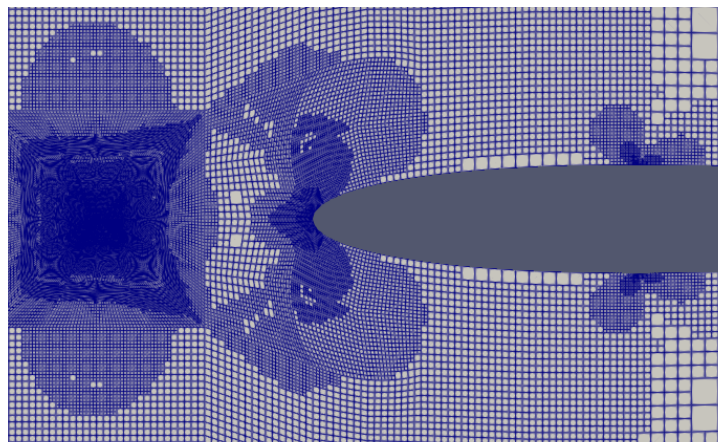


Figura 4: Dettaglio della griglia computazionale al termine del calcolo.

Rappresentando il campo elettrico mediante vettori orientati, si ottiene quanto riportato in 5.

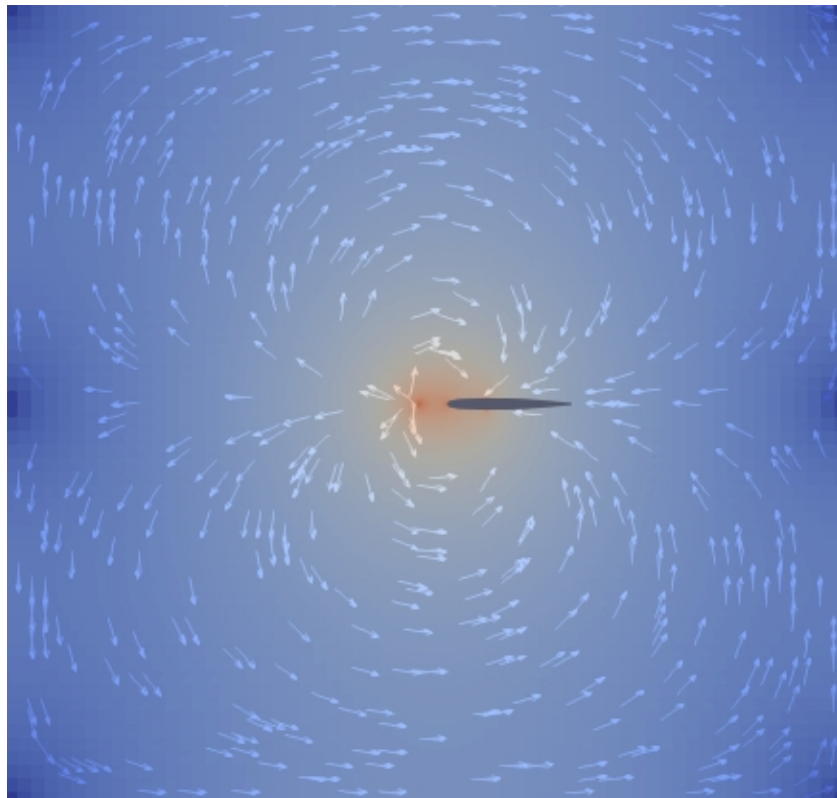


Figura 5: Campo elettrico per filo di raggio $r = 50 \mu m$. Colore associato all'intensità del campo, in scala logaritmica.

Nel dettaglio riportato in 6 si può notare come effettivamente il collettore sia presente solo nella parte anteriore (i primi $30mm$) del profilo aerodinamico, mentre il campo risulta tangente al profilo altrove.

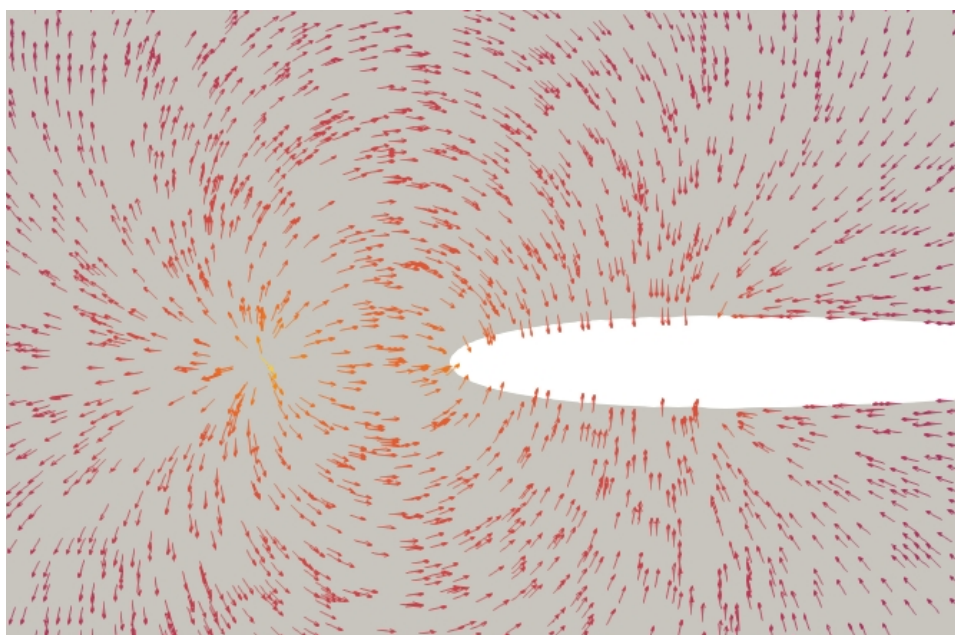


Figura 6: Vettori campo elettrico per filo di raggio $r = 100 \mu m$

Sovrapponendo al campo elettrico 109 isolinee equispaziate tra loro tra i valori massimo (20 kV) e minimo (0 V) del potenziale elettrico, si ottiene quanto riportato in 7.

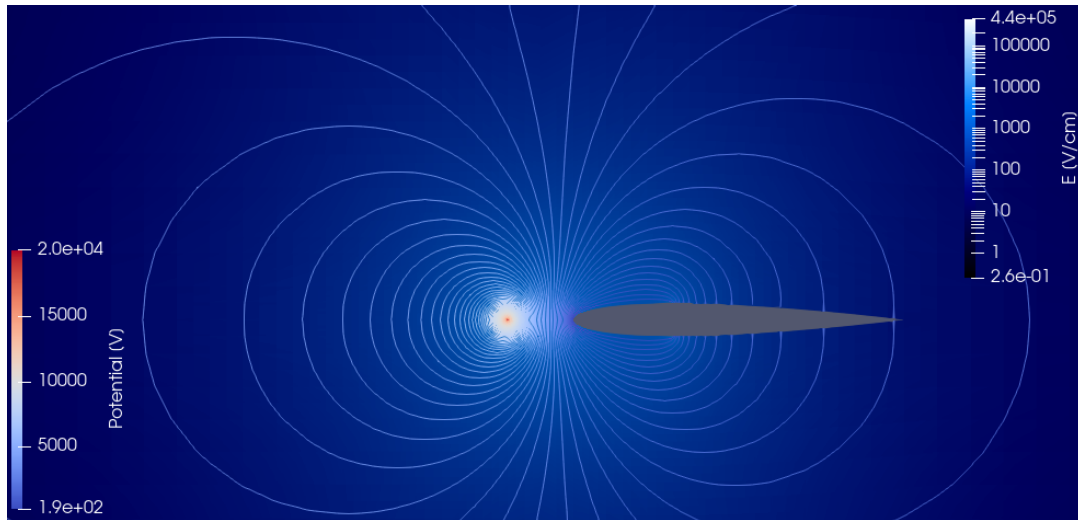
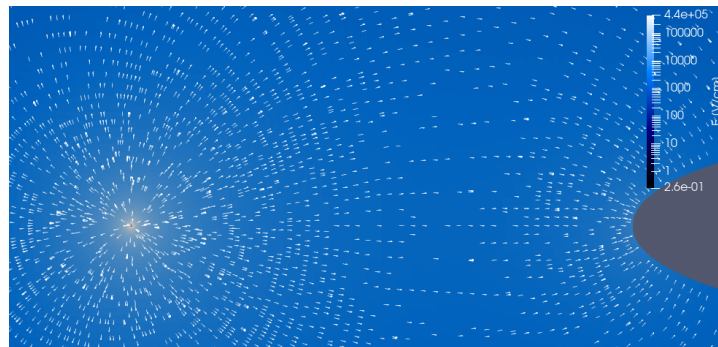
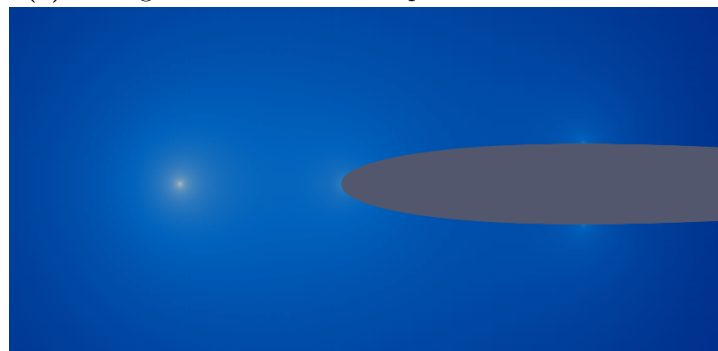


Figura 7: Intensità di campo elettrico e isolinee del potenziale per filo di raggio $r = 50\text{ }\mu\text{m}$.

In 8a e 8b sono riportati alcuni dettagli del campo elettrico vicino all'emettitore. Più ci si avvicina all'elettrodo, più il campo si avvicina a quello generato da una carica puntiforme.



(a) Dettaglio dei vettori del campo elettrico vicino al filo.



(b) Dettaglio dell'intensità di campo elettrico vicino al filo

4 Geometrie Alternative*

Modificando appositamente una porzione della griglia computazionale per ottenere geometrie diverse, possono essere analizzati gli effetti sul campo elettrico dovuti all'utilizzo di diversi emettitori. In particolare, oltre che l'emettitore a filo, vengono considerati anche lamine o lame, e viene studiato l'effetto che la variazione delle dimensioni della sezione degli elettrodi ha sul campo elettrico.

Le simulazioni vengono effettuate utilizzando gli stessi dati riportati in tabella 1 e variando unicamente i dati riguardanti la geometria degli emettitori.

Per valutare il campo elettrico, si sceglie di analizzare la norma del campo in un punto dove ci si attende un massimo, con l'idea che questa possa rappresentare una stima dell'estensione della zona in cui può avvenire ionizzazione (i.e. in cui il campo elettrico è sufficientemente elevato) che permette il corretto funzionamento del sistema propulsivo.

4.1 Emittitore: filo*

Considerando il filo, il punto in cui viene valutato il campo è sul bordo dell'elettrodo, nel punto dell'emettitore più vicino al collettore.

Studiando gli effetti della variazione del raggio del filo sul campo elettrico, si può notare come l'intensità del campo elettrico aumenti all'aumentare della curvatura dell'elettrodo, per quanto riguarda i casi riportati in tabella 2. Non si osservano differenze nella distribuzione globale dell'intensità del campo, che continua ad essere concentrata attorno all'emettitore, con picchi sul bordo di attacco del profilo e al termine del collettore, come in figura 5.

Tabella 2: Emittitore a filo: effetto della variazione del raggio r sul modulo del campo elettrico

$r [\mu m]$	$ E [kV/cm]$
50	688
100	437
200	241

Nota: Vengono utilizzate unicamente 3 cifre significative in quanto la tolleranza non è elevata e il criterio di convergenza è definito sul potenziale, ed eventuali errori vengono amplificati nella valutazione del gradiente.

Un dettaglio dell'intensità di campo in prossimità dell'elettrodo è riportata in figura 9. Salvo distorsioni dovute alla discretizzazione ed alla forma della mesh, l'intensità del campo elettrico diminuisce in direzione radiale, come ci si può attendere.

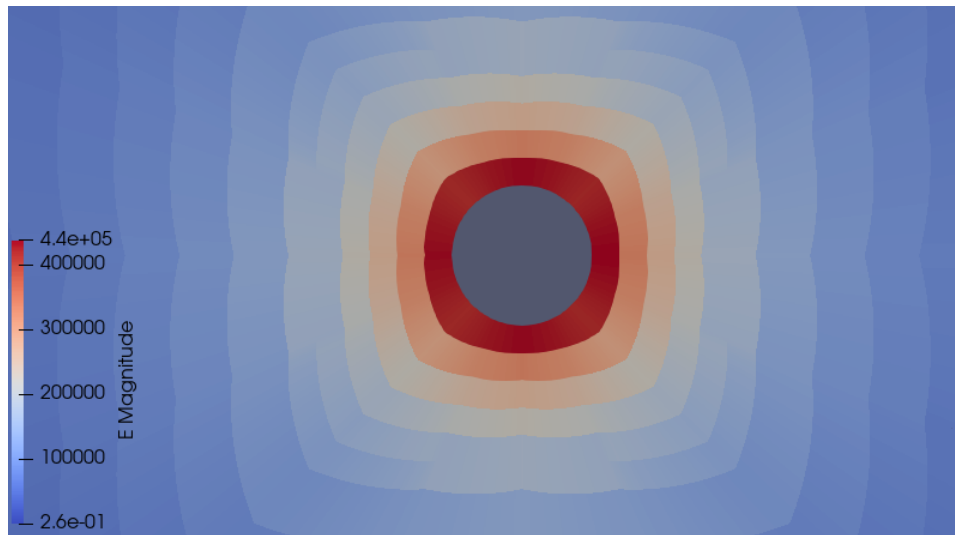


Figura 9: Dettaglio del campo elettrico in prossimità dell'emettitore a filo. Simulazione per filo di raggio $r = 100 \mu m$.

4.2 Emettitore: lamina*

La lamina considerata è a sezione rettangolare, con il lato breve orientato lungo l'asse delle ordinate.

La geometria risultante nella griglia iniziale è riportata in figura 10.

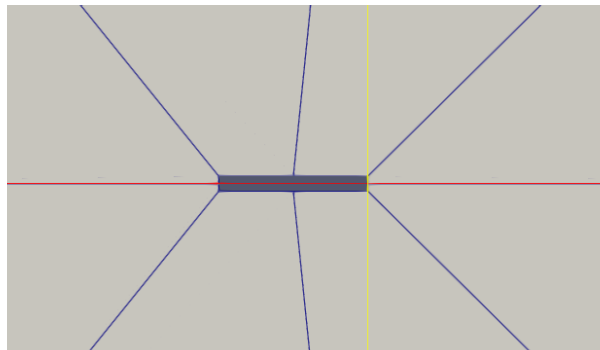


Figura 10: Griglia iniziale per la lamina. In rosso l'asse delle ascisse, in giallo quello delle ordinate.

Il campo elettrico risultante dalla simulazione, utilizzando i medesimi parametri utilizzati per il filo per l'integrazione, è riportato in figure 11 e 12.

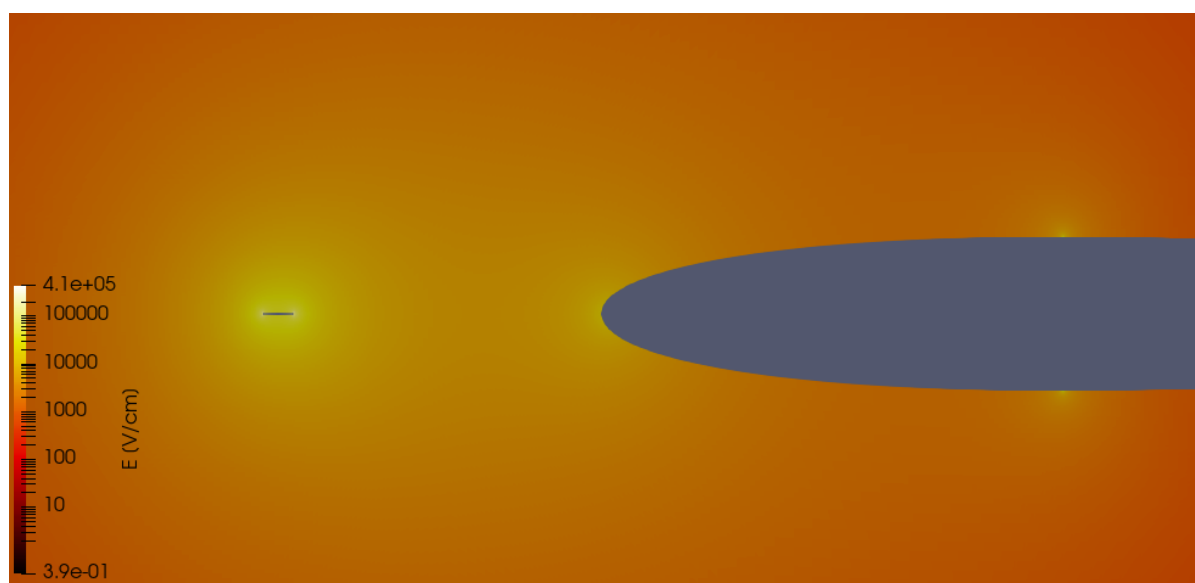


Figura 11: Intensità del campo elettrico per lamina. Lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$.

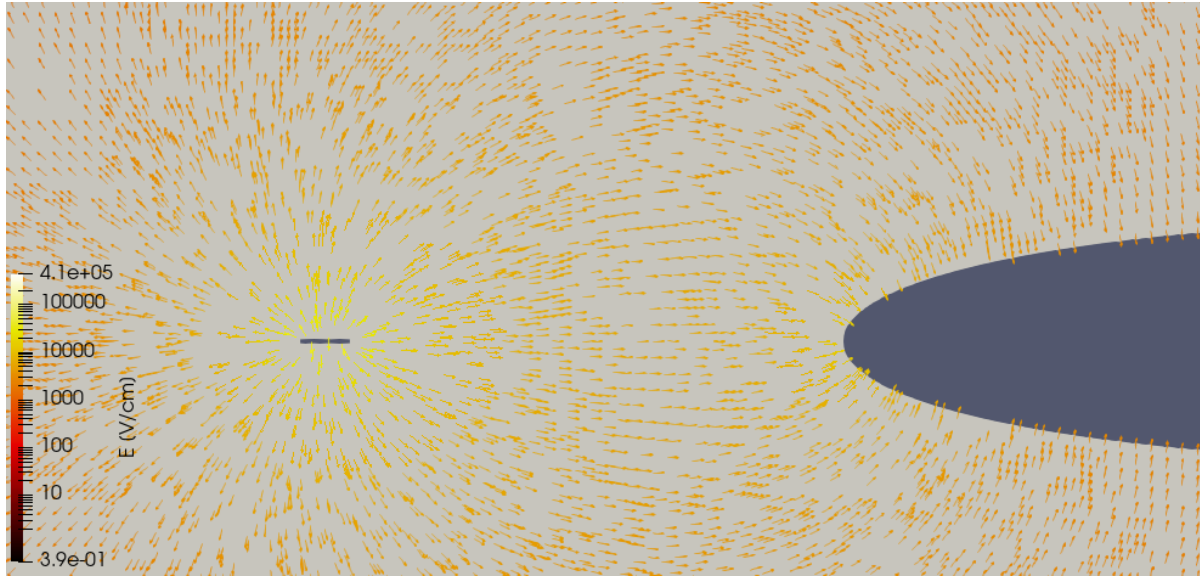


Figura 12: Intensità del campo elettrico per lamina. Lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$.

Nel caso della lamina, il modulo del campo viene valutato sullo spigolo rivolto verso il collettore e nella direzione delle ordinate positive. Questo perché ci si aspetta l'intensità massima nel punto di curvatura maggiore e più vicino all'elettrodo di polo opposto.

Viene dunque studiato l'effetto della variazione dell'altezza e della lunghezza della sezione rettangolare sul modulo del campo, ottenendo quanto riportato in tabella 3. Si può notare una diminuzione del campo sia all'aumentare della lunghezza, che all'aumentare dell'altezza.

Anche in questo caso, la distribuzione dell'intensità del campo rimane simile a quanto riportato in 11 nei vari casi analizzati, con l'unica differenza costituita dalla variazione del modulo del campo.

Tabella 3: Emettitore a lamina: effetto della variazione di altezza h e lunghezza l sul modulo del campo elettrico.

	$h = 200\text{ }\mu\text{m}$	$h = 400\text{ }\mu\text{m}$
$l = 2\text{ [mm]}$	194 [kV/cm]	170 [kV/cm]
$l = 4\text{ [mm]}$	161 [kV/cm]	144 [kV/cm]
$l = 8\text{ [mm]}$	109 [kV/cm]	98.7 [kV/cm]

Un dettaglio dell'intensità di campo in prossimità dell'elettrodo è riportata in figura 13. Si osserva come le zone che presentano un elevato campo elettrico siano limitate in prossimità dei vertici e non distribuite uniformemente attorno all'elettrodo come per il filo. Si nota inoltre come il modulo massimo del campo (210 kV/cm) sia più elevato che quanto riportato in tabella 3 e che dunque questo non venga raggiunto esattamente sul vertice ma nella zona adiacente.



Figura 13: Dettaglio del campo elettrico in prossimità dell'emettitore a lamina. Simulazione per lamina di lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$.

4.3 Emettitore: lama*

La lama considerata ha come sezione un trapezio rettangolo, con lato acuto rivolto verso il collettore e vertice nell'origine.

La geometria risultante nella griglia iniziale è riportata in figura 14.

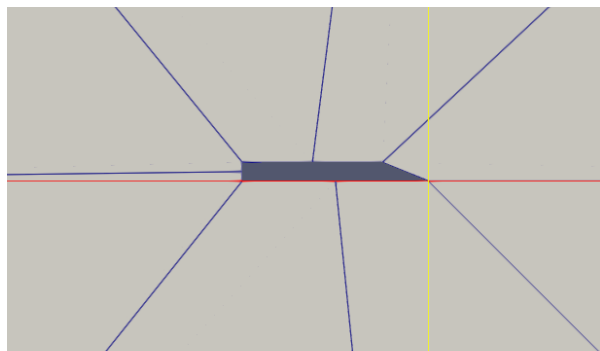


Figura 14: Griglia iniziale per la lama. In rosso l'asse delle ascisse, in giallo quello delle ordinate.

Il campo elettrico risultante, utilizzando i medesimi parametri utilizzati per il filo per l'integrazione, è riportato in figure 15 e 16.

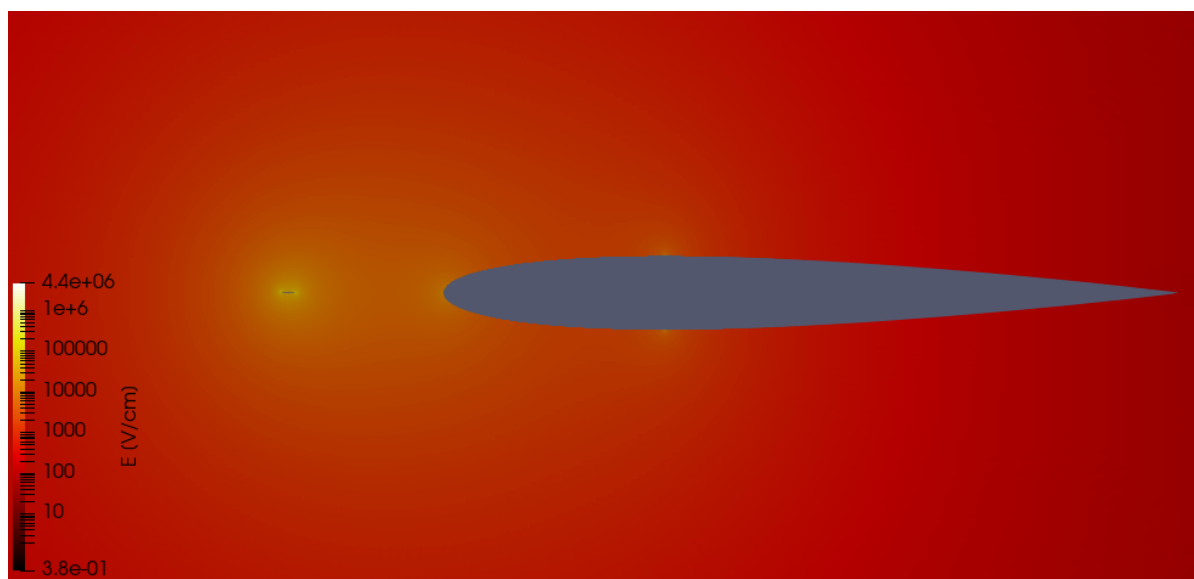


Figura 15: Intensità del campo elettrico per lama. Lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$, angolo di lama $\gamma = 25^\circ$.

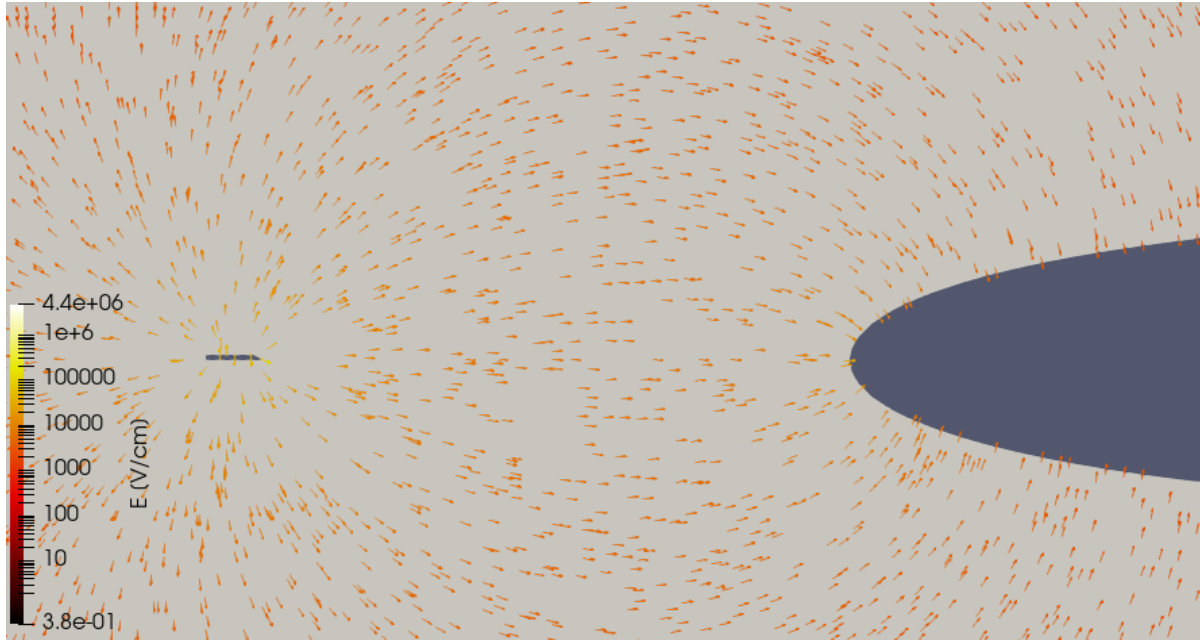


Figura 16: Vettori del campo elettrico per lama. Lunghezza $l = 2 \text{ mm}$, altezza $h = 200 \mu\text{m}$, angolo di lama $\gamma = 25^\circ$.

Il modulo del campo viene valutato nel vertice dell'emettitore, dove ci si attende la massima intensità del campo.

Viene studiato l'effetto della variazione dell'altezza e della lunghezza della sezione a trapezio sul modulo del campo. Come nel caso della lamina, i risultati in tabella 4 evidenziano una diminuzione del modulo del campo all'aumentare della lunghezza, ma una variazione minore al variare dell'altezza.

Tabella 4: Emittitore a lama: effetto della variazione di altezza h e lunghezza l sul modulo del campo elettrico. Angolo di lama fissato a $\gamma = 25^\circ$.

	$h = 200 [\mu\text{m}]$	$h = 400 [\mu\text{m}]$
$l = 2 [\text{mm}]$	223 [kV/cm]	215 [kV/cm]
$l = 4 [\text{mm}]$	134 [kV/cm]	131 [kV/cm]
$l = 8 [\text{mm}]$	78.6 [kV/cm]	76.1 [kV/cm]

La dipendenza dall'angolo di lama è invece riportata in tabella 5. Vengono valutati valori tipici per le lame, nell'intervallo $[22^\circ, 30^\circ]$. All'aumentare dell'angolo è associata una diminuzione del modulo del campo.

Tabella 5: Emittitore a lama: effetto della variazione dell'angolo di lama γ sul modulo del campo elettrico. Lunghezza e altezza mantenute costanti, $l = 2 \text{ mm}$, $h = 200 \mu\text{m}$ rispettivamente.

$\gamma [\text{deg}]$	$ E [\text{kV/cm}]$
22	255
25	223
30	186

Come nel caso del filo, anche qui non si hanno grandi variazioni sulla distribuzione dell'intensità del campo, che rimane simile a quanto riportato in 15.

Un dettaglio dell'intensità di campo in prossimità dell'elettrodo è riportata in figura 17. Anche qui, come nel caso della lamina, si può notare che le zone di campo elettrico elevato siano molto più localizzate rispetto al caso del filo e come il valore massimo (85000 kV/cm) sia più elevato che quanto riportato in tabella 4 e che dunque non si raggiunga sulla punta ma in prossimità di essa.

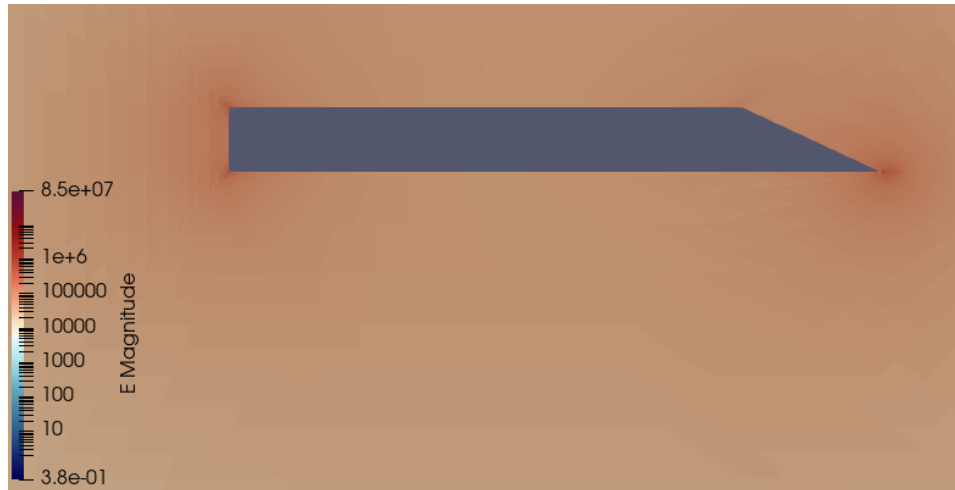


Figura 17: Dettaglio del campo elettrico in prossimità dell'emettitore a lama. Modulo in scala logaritmica. Simulazione per lama di lunghezza $l = 2 \text{ mm}$, altezza $h = 200 \mu\text{m}$, angolo di lama $\gamma = 25^\circ$.

4.4 Emittitore: punta*

La punta considerata ha una sezione equivalente a quella della lama ma specchiata rispetto all'asse orizzontale, risultando dunque simmetrica, con lato acuto rivolto verso il collettore e vertice nell'origine. L'angolo di punta viene definito come il doppio di quello di lama, misurato dall'asse di simmetria della sezione.

La geometria risultante nella griglia iniziale è riportata in figura 18.

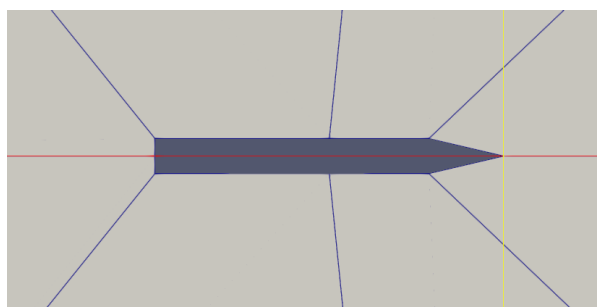


Figura 18: Griglia iniziale per la punta. In rosso l'asse delle ascisse, in giallo quello delle ordinate.

Il campo elettrico risultante, utilizzando i medesimi parametri utilizzati per l'integrazione, è riportato in figure 19 e 20.

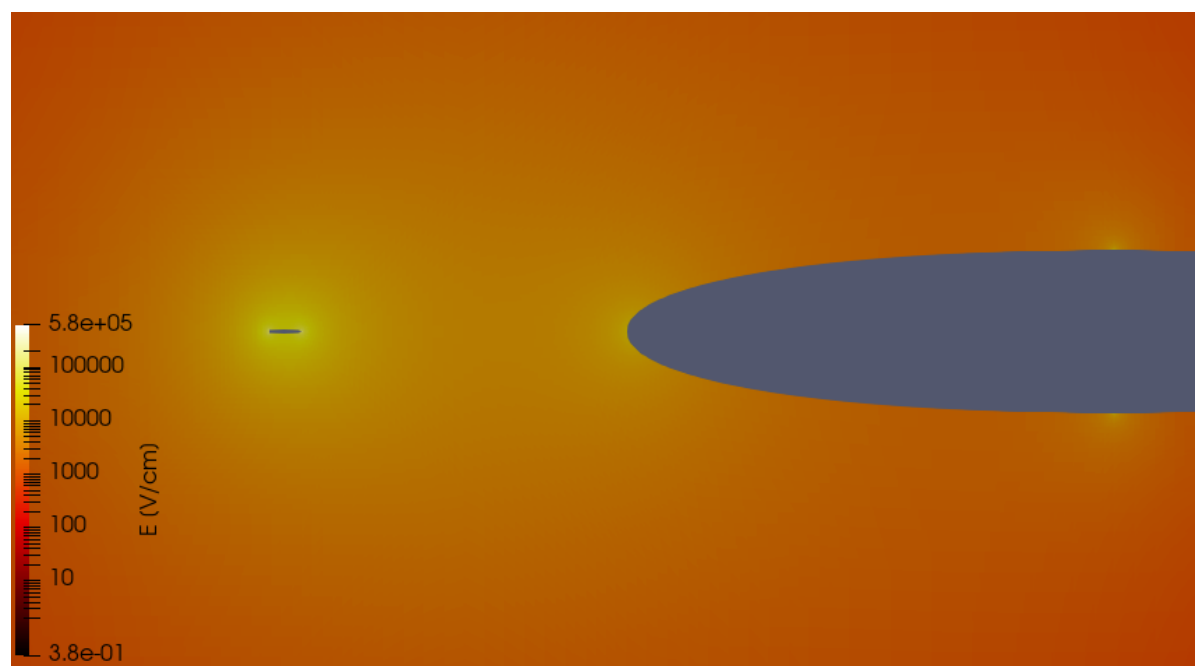


Figura 19: Intensità del campo elettrico per emettitore a punta. Lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$, angolo di punta $\phi = 50^\circ$.

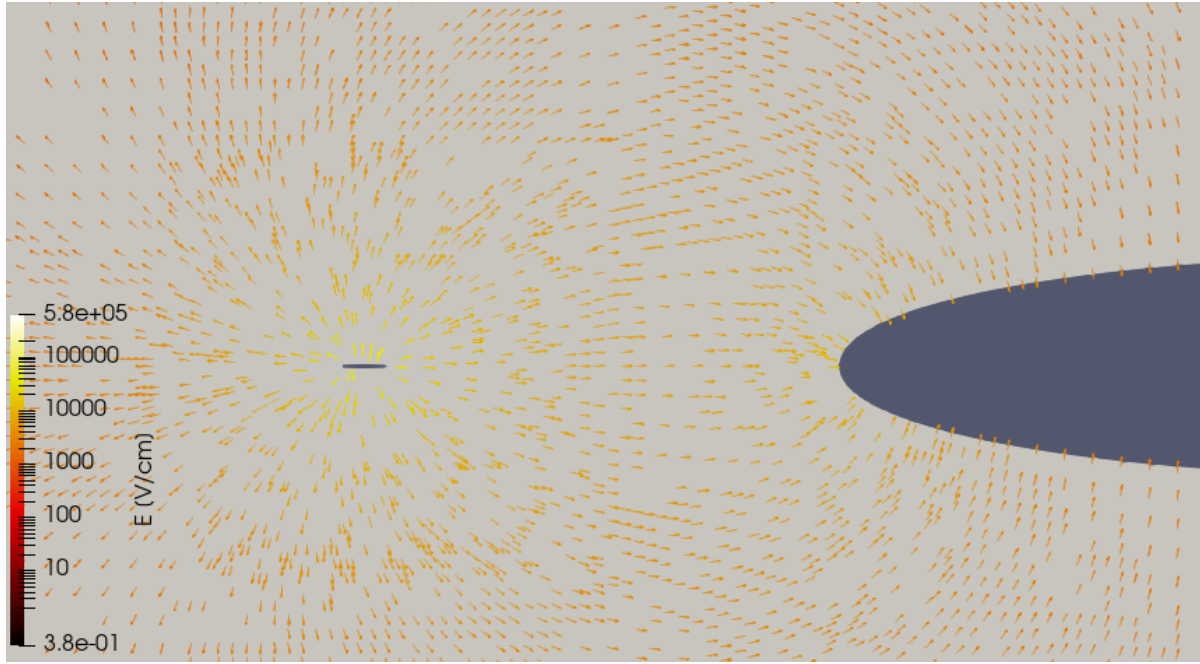


Figura 20: Vettori del campo elettrico per emettitore a punta. Lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$, angolo di punta $\phi = 50^\circ$.

Il modulo del campo viene valutato nel vertice dell'emettitore, dove ci si attende la massima intensità del campo.

Viene studiato l'effetto della variazione dell'altezza e della lunghezza della sezione della punta sul modulo del campo. Come nel caso della lamina, i risultati in tabella 6 evidenziano una diminuzione del modulo del campo all'aumentare della lunghezza e dell'altezza. Fa però eccezione il caso per $l = 8\text{ mm}$ e $h = 400\text{ }\mu\text{m}$.

Tabella 6: Emettitore a lama: effetto della variazione di altezza h e lunghezza l sul modulo del campo elettrico. Angolo di punta fissato a $\phi = 50^\circ$.

	$h = 200\text{ }\mu\text{m}$	$h = 400\text{ }\mu\text{m}$
$l = 2\text{ [mm]}$	580 [kV/cm]	405 [kV/cm]
$l = 4\text{ [mm]}$	283 [kV/cm]	260 [kV/cm]
$l = 8\text{ [mm]}$	244 [kV/cm]	298 [kV/cm]

La dipendenza dall'angolo di lama è invece riportata in tabella 7. Vengono valutati valori nell'intervallo $[30^\circ, 60^\circ]$. All'aumentare dell'angolo è associata una diminuzione del modulo del campo.

Tabella 7: Emettitore a punta: effetto della variazione dell'angolo di punta ϕ sul modulo del campo elettrico. Lunghezza e altezza mantenute costanti, $l = 2\text{ mm}$, $h = 200\text{ }\mu\text{m}$ rispettivamente.

$\phi\text{ [deg]}$	$ E \text{ [kV/cm]}$
30	910
40	714
50	580
60	373

Come negli altri casi considerati, anche qui non si hanno grandi variazioni sulla distribuzione

dell'intensità del campo, che rimane simile a quanto riportato in 19.

Un dettaglio dell'intensità di campo in prossimità dell'elettrodo è riportata in figura 21. Di nuovo, come nel caso della lamina e della lama, si può notare che le zone di campo elettrico elevato siano più localizzate rispetto al caso del filo.



Figura 21: Dettaglio del campo elettrico in prossimità dell'emettitore a punta. Simulazione per punta di lunghezza $l = 2\text{ mm}$, altezza $h = 200\text{ }\mu\text{m}$, angolo di punta $\phi = 50^\circ$.

4.5 Discussione dei risultati*

In tutti i casi analizzati, l'intensità del campo elettrico nei punti considerati aumenta con l'aumentare della curvatura (e.g. riducendo il raggio del filo o l'angolo di lama). Questo risultato è atteso in quanto il potenziale imposto non varia, dunque riducendo il raggio di curvatura viene aumentata la densità di carica superficiale. Tuttavia, questo non spiega perché l'intensità del campo diminuisca all'aumentare dell'altezza o della lunghezza della sezione degli elettrodi non a filo.

In effetti, se per l'emettitore a filo si utilizza una geometria ottagonale anziché circolare (che, nella pratica, non è possibile riprodurre alla perfezione, specialmente nel caso di fili di piccole dimensioni) si ottiene un campo più elevato in prossimità degli spigoli, come evidenziato in figura 22. Il massimo modulo (550 kV/cm) risulta superiore a quello ottenuto per un filo di diametro analogo (440 kV/cm) in figura 9).

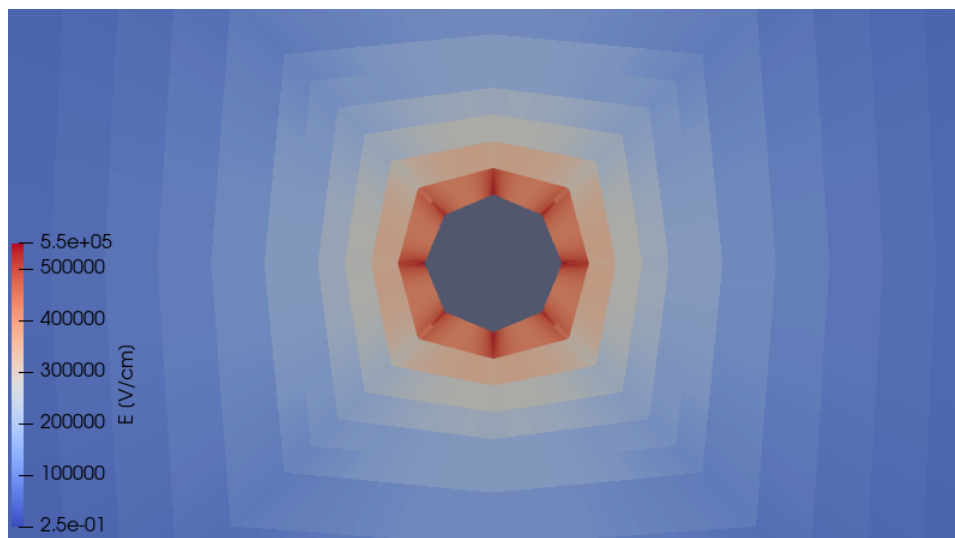


Figura 22: Dettaglio del campo elettrico in prossimità dell'emettitore a sezione ottagonale. Simulazione con raggio $r = 100 \mu\text{m}$.

Mentre non sorprende l'aver trovato un'intensità del campo elettrico più elevata in prossimità delle punte degli emettitori a lamina e lama, ci si chiede se il fatto che il massimo non sia esattamente sulla punta ma leggermente spostato possa avere un significato fisico o sia piuttosto dovuto alla approssimazione per elementi finiti, ed in particolare alla forma della celle della griglia nella zona di interesse. Questo è particolarmente evidente nel caso della lama, dove in una singolarità vicino alla punta si ha un campo di 2 ordini di grandezza superiore rispetto al vertice. Dovranno essere utilizzati griglie differenti per verificare questa ipotesi.

Può essere inoltre importante evidenziare come, nell'applicazione in ambito propulsivo, un campo elettrico più elevato non sia indice di migliori prestazioni dell'elettrodo. Infatti, se l'intensità necessaria a produrre ionizzazione è molto localizzata in termini di superficie, la produzione di ioni potrebbe essere inferiore rispetto a quella di un elettrodo che generi un campo elettrico inferiore in modulo ma maggiormente distribuito. Uno studio più approfondito sarebbe comunque opportuno per valutare in quale misura le ionizzazioni secondarie dovute alla maggiore energia degli elettroni possano compensare la ridotta estensione spaziale.

5 Conclusione*

Un codice per la risoluzione dell'equazione di Poisson è stato adattato per il calcolo del campo elettrico in un caso di interesse per la propulsione ionica atmosferica. Sebbene il calcolo presentato non presenti alcuna innovazione dal punto di vista numerico, il codice ottenuto può essere facilmente adattato per analizzare diversi tipi di configurazione di emettitore, permettendo di esaminarne le caratteristiche. Sono inoltre possibili estensioni a problemi che includono equazioni più complesse. In ogni caso, è possibile margine di miglioramento per quanto riguarda l'efficienza computazionale, sempre più rilevante al crescere della complessità del problema.

5.1 Possibilità di estensione*

Oltre al sempre possibile aumento di efficienza, le possibilità di estensione per il semplice codice ottenuto sono molteplici e, in particolare:

- **Estendere il problema in 3 dimensioni.** La mesh creata può essere facilmente replicata in 3 dimensioni con l'utilizzo di pochi semplici comandi disponibili nella libreria di deal.II. Le condizioni al contorno andrebbero poi adeguate di conseguenza.
- **Esplorare diverse disposizioni di elettrodi.** La distanza e l'allineamento fra gli elettrodi possono essere variati, valutando il loro effetto sul campo elettrico. Egualmente, si potrebbero anche valutare configurazioni con più emettitori e collettori in serie o in parallelo. L'efficienza computazionale potrebbe essere aumentata effettuando diverse iterazioni di calcolo con una sola coppia di elettrodi ma aggiornando le condizioni al contorno con i valori ottenuti dall'integrazione numerica alla distanza a cui sarebbero poste le altre coppie di elettrodi.
- **Definire un'area di ionizzazione efficace.** Conoscendo la minima intensità di campo elettrico necessaria per ionizzare una data percentuale di particelle di un gas (in questo caso, aria), il codice potrebbe essere sfruttato per determinare l'estensione dell'area in cui questa condizione è soddisfatta, fornendo un parametro utile di confronto fra elettrodi di vario tipo.

Riferimenti bibliografici

- [1] Wolfgang Bangerth. The deal.ii library. the step-3 tutorial program, 1999.
- [2] Wolfgang Bangerth. The deal.ii library. the step-6 tutorial program, 2000.
- [3] Wolfgang Bangerth. The deal.ii library: Kellyerrorestimator, 2001.
- [4] Airfoil Tools. Naca 4 digit airfoil generator.