Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 maggio 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione
$$f(x) = xe^{\frac{1}{1-|x|}}$$
determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (oppure estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali, punti angolosi e di cuspide, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita se $x \neq \pm 1$ ed è continua in tutto il suo insieme di definizione. L'unico punto dove potrebbe essere non derivabile è $x = 0$ a causa del valore assoluto. Lo verificheremo in seguito. Osserviamo che
$$f(-x) = -xe^{\frac{1}{1-|-x|}} = -f(x)$$
quindi la funzione è dispari. La studieremo quindi per $x \geq 0$ sfruttando la simmetria.
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-1^-}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-1^+}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\, e^{\frac{1}{-\infty}} = +\infty\, e^{0} = +\infty.$$
Otteniamo quindi che la funzione ha un asintoto verticale (da sinistra) di equazione $x = 1$ e che $\sup(f) = +\infty$. Per simmetria, f ha un asintoto verticale (da destra) di equazione $x = -1$ e $\inf(f) = -\infty$. La funzione quindi non ha né massimo né minimo. Non ci sono asintoti orizzontali ma potrebbero esserci quelli obliqui.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{1-|x|}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1 =: m$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{1-|x|}} - x = \lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{1-x}} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1-x}\,(1 + o(1)) = -1 =: q.$$
Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$ per $x \to +\infty$. Per simmetria esiste anche un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ per $x \to -\infty$.

Studiamo ora la monotonia valutando il segno della derivata, considerando il caso $x > 0$.
$$f'(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-x}} + xe^{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} = e^{\frac{1}{1-x}}\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) = e^{\frac{1}{1-x}}\, \frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2}.$$
Risulta quindi immediato che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Osserviamo che esiste finito
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = e$$
quindi, dato che f è continua in $x = 0$ otteniamo che $f'_+(0) = e$ e, per simmetria, anche $f'_-(0) = e$. Ne segue che f è derivabile anche in $x = 0$. Sempre dal fatto che f è dispari abbiamo che $f'(x) > 0$ per ogni x nell'insieme di definizione. Ne segue che f è strettamente crescente sugli intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$. Non ci sono punti di massimo o di minimo locali. Non ci sono punti angolosi o di cuspide.

Valutiamo ora la convessità studiando la derivata seconda, sempre per $x > 0$.
$$f''(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2} + e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(2x-1)(1-x)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1))}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4} \left(x^2 - x + 1 + (2x-1)(x^2-2x+1) - 2(x^3-2x^2+2x-1) \right)$$

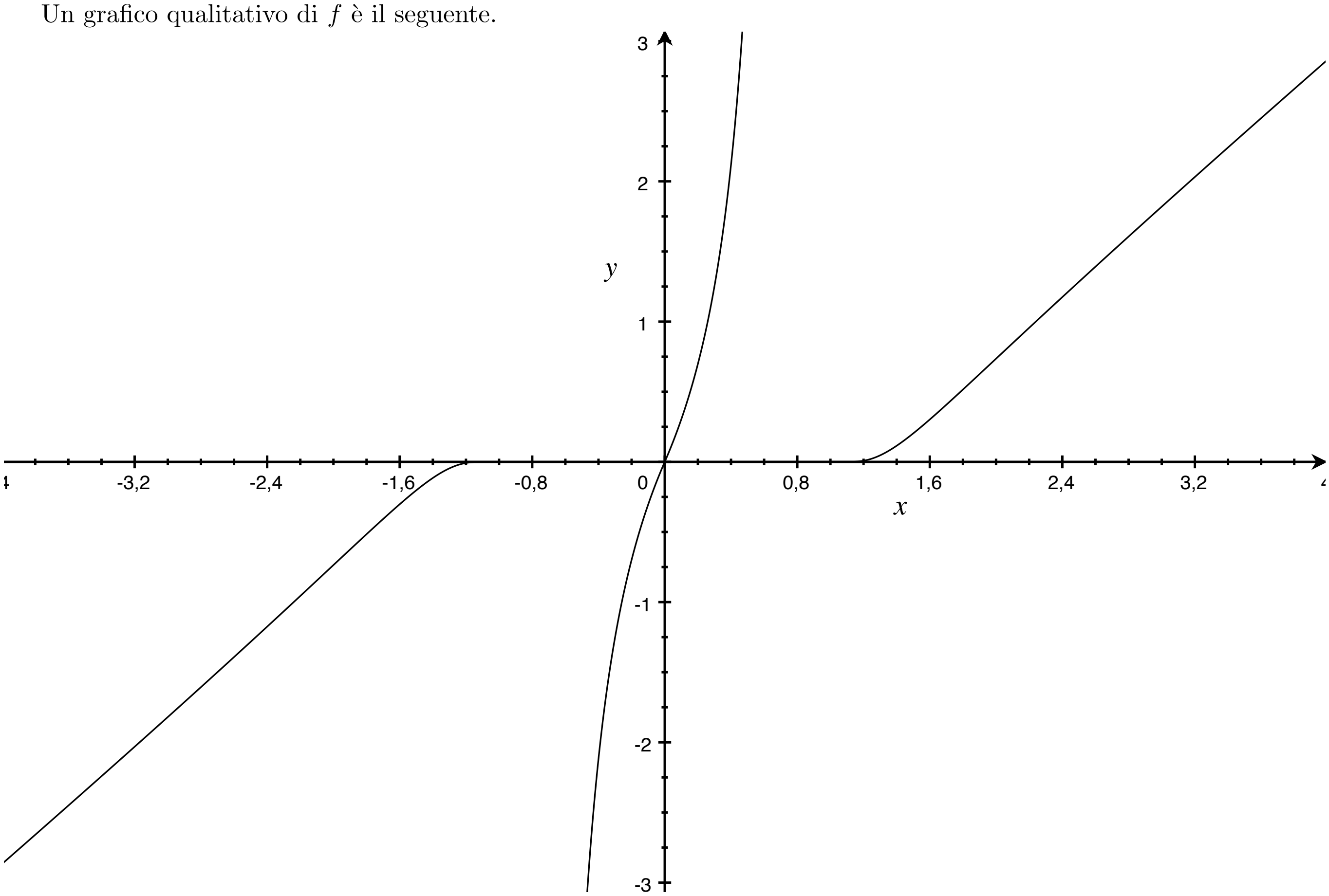
$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4} (2-x).$$

Ne segue che f è convessa sull'intervallo $[0,1)$ e sull'intervallo $(1,2]$, concava sulla semiretta $[2,+\infty)$. Per simmetria, f è convessa sulla semiretta $(-\infty,-2]$ e concava sugli intervalli $[-2,-1)$ e $(-1,0]$. I punti $x=-2$, $x=0$ e $x=2$ sono punti di flesso. Si noti che nel punto di flesso non esiste la derivata seconda. Infatti, essendo f' continua in $x=0$ risulta che

$$f''_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f''(x) = 2e$$

mentre $f''_-(0) = -2e$ poiché f' è pari.

Un grafico qualitativo di f è il seguente.



Esercizio 2 Studiare la serie

$$\sum_n \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!} (-1)^{(n^2)}$$

detrminandone convergenza e convergenza assoluta.

Soluzione

Osserviamo che n^2 è pari se e solo se n è pari, quindi $(-1)^{(n^2)} = (-1)^n$. La serie diventa quindi

$$\sum_n (-1)^n a_n$$

avendo posto

$$a_n = \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Verifichiamo la convergenza assoluta con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{e^n(n!)^2} = \frac{e^{n+1}}{e^n}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = e(n+1)^2\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Risulta quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{4} < 1.$$

Per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente, quindi converge anche semplicemente.

Esercizio 3 Dire se converge l'integrale

$$\int_0^1 t\log t\,dt$$

e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

Soluzione

La funzione integranda non è definita per $t = 0$. Dato $M \in (0,1)$ calcoliamo per parti, integrando t e derivando $\log t$

$$\int_M^1 t\log t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_M^1 - \int_M^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log 1 - \frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{2}\int_M^1 t\,dt = -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_M^1$$

$$= -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{4}(1-M^2)$$

Dato che

$$\lim_{M\to0^+} -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{4}(1-M^2) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

l'integrale converge e il suo valore è $-\frac{1}{4}$.