Università di Pisa

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso 1° anno - 6 CFU

Algebra Lineare

Professore:
Prof. Tamas Szamuely

Autore:
Matteo Giuntoni

Anno Accademico 2020/2021

Contents

Algebra Lineare

Realizzato da: Giuntoni Matteo

A.A. 2021-2022

---

1 Introduzione

1.1 Sistemi di equazioni

L'algebra lineare è lo studio delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari utilizzando spazi vettoriali.

Esempio 1.1.1. Un esempio di sistemi di equazioni:

1. $\left.\begin{array}{l} E_1 : x + y = 5 \\ E_2 : x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 - E_1$ (sostituzione): $\begin{cases} y = 5 - 3 = 2 \\ x = 3 - 2 = 1 \end{cases}$ Un unica soluzione.

2. $\left.\begin{array}{l} E_1 : x + y = 3 \\ E_2 : 2x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 - 2E_1\colon\ 0 = 0.$

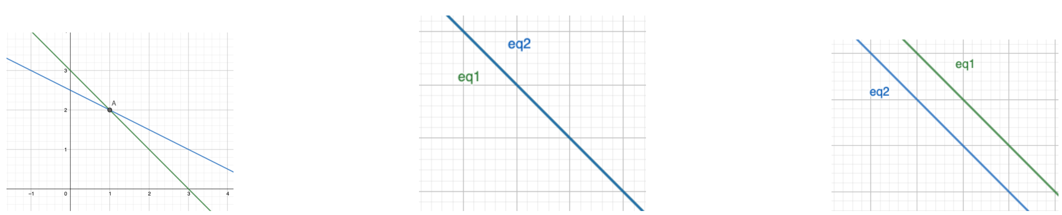
   Infatti $E_2 = 2E_1 \Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow \exists\infty$ soluzioni.

3. $\left.\begin{array}{l} E_1 : x + y = 3 \\ E_2 : 2x + 2y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 - 2E_1 : 0 = -1$ è impossibile infatti $\nexists$ soluzioni comuni.

Possiamo vedere da questi esempi che abbiamo tre possibili risultati: 1 soluzione, ∞ e 0.

1.2 Interpretazioni geometrica

In ogni caso le equazioni E_1 ed E_2 rappresentano rette su un piano a 2 dimensioni. Le soluzioni comuni sono i punti di intersezione delle rette.
Nel caso specifico dell'esempio 1.1.1 abbiamo che:



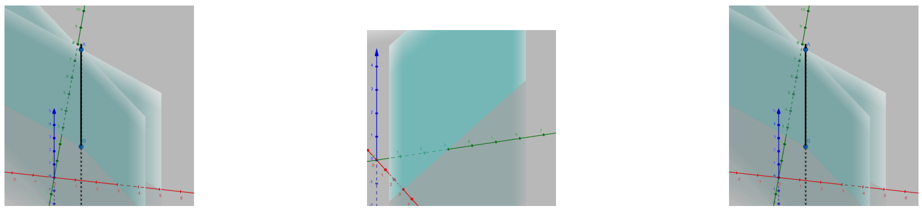
(a) 1° hanno un punto in comune P=(1,2)

(b) 2° coincidono $\Rightarrow \infty$ punti in comune

(c) 3° sono parallele $\Rightarrow \nexists$ punti in comune

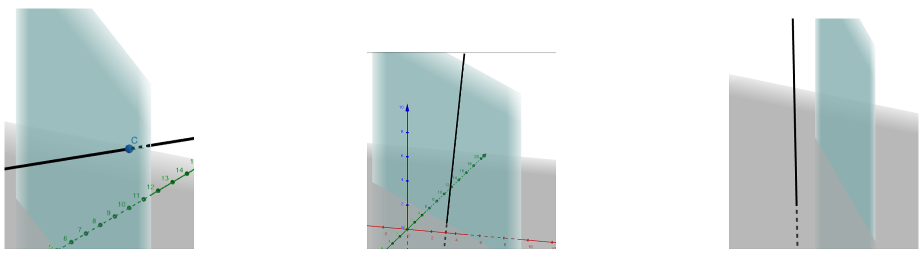
1.3 Equazioni a 3 variabili

Un esempio di equazione a 3 variabili è $x + 2y + 3z = 4$. Ciò crea, invece di una retta, un piano nello spazio 3-dimensionale. Se adesso consideriamo le equazioni viste sopra E_1 ed E_2 come equazioni a 3 variabili possiamo vedere che esse corrispondono a 2 piani nello spazio ed i punti in comune formano una retta.
Se oltre a E_1 ed E_2 consideriamo una terza equazione E_3 essa corrisponde ad un terzo piano.



(a) 1° forma una retta (b) 2° i due piani coincidono (c) 3° i due piani sono paralleli

Possiamo vedere come esso si comporta intersecandolo con l'intersezione fra E_1 ed E_2, $E_1 \cap E_2$.



(a) $E_1 \cap E_2$ è una retta che, intersecata con E_3, crea un punto (b) $E_1 \cap E_2$ può essere contenuto in E_3 quindi nuova retta (c) $E_1 \cap E_2$ e E_3 possono non coincidere

1.4 Caso generale

Possiamo definire un sistema (E) di n equazioni a m variabili con $n, m > 0$ e con $a_{nm}, b_n \in \mathbb{R}$ come:

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n$$

Definizione 1.4.1 (Sistema omogeneo)**.** *Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = \ldots = b_n = 0$. In caso contrario possiamo considerare il sistema omogeneo associato (E_{om}) definito come:*

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0$$
$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0$$
$$\vdots$$
$$E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0$$

*Se (E) è **omogeneo**, $\exists$ sempre una soluzione comune del tipo $(x_1, \ldots, x_n) = (0_1, \ldots, 0_n)$.*

Proposizione 1.4.1. *Se $(c_1, ..., c_n)$ e $(d_1, ..., d_n)$ sono soluzioni di $(E) \implies c_1 - d_1, ..., c_n - d_n$ è soluzione del sistema omogeneo.*

Dimostrazione 1.4.1. Se $(c_1, \ldots, c_m)$ è soluzione vuol dire che :
$E_1 : a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{im}c_m = b_i$
$E_2 : a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + a_{im}d_m = b_i$
Quindi se sottraggo $E1 - E2$ e raccolgo viene:
$a_{i1}(c_1 - d_1) + a_{i2}(c_2 - d_m) + a_{im}(c_m - d_m) = 0 \ \forall \, i, ..., n$

Teorema 1.4.1. Se $(c_1, \ldots, c_m)$ è soluzione del sistema (E) tutte le soluzioni (E) sono della forma $(c_1 + e_1, c_2 + e_2, \ldots, c_m + e_m)$ dove $(e_1, \ldots, e_m)$ è soluzione di E_{om}.

In sinestesi si può semplificare questo teorema scrivendo:

$$\text{"Soluzione generale"} = \text{"Soluzione particolare"} + \text{"Soluzione omogenea"} \tag{1}$$

Dimostrazione 1.4.2. La proposizione 1.4.1 dice che le soluzioni hanno questa forma. Viceversa se $(e_1, \ldots, e_m)$ sono soluzioni di $(E_{om}) \Longrightarrow (c_1 + e_1, c_2 + e_2, \ldots, c_m + e_m)$ sono soluzioni di (E).

Esempio 1.4.1. Prendiamo n=1 e m=2 e prendiamo come sistema di equazioni $(E) : 2x + 3y = 5$ e come equazione omogenea $(E_{om}) : 2x + 3y = 0$

Vediamo che le soluzioni particolari sono $x = y = 1$. Per calcolare le soluzioni omogenee si fa $2x = -3y$ e poi $x = -\frac{3}{2}y$, qui per ogni valore di y trovo un valore di x.
La soluzioni omogenea è $(-\frac{3}{2}p, p)$ dove p è un parametro che può essere qualsiasi valore.
Sappiamo che "sol. generale" = "sol. particolare" + "sol. omogenea" $\Rightarrow (1, 1) + (-\frac{3}{2}t, t) = (1 - \frac{3}{2}t, 1 + t)$.

Osservazione 1.4.1. $(0, ..., 0)$ è sempre soluzione di (E_{om}). Quindi se (E) ammette una soluzione questo soluzione è unica $\Longleftrightarrow (0, ..., 0)$ è l'unica soluzione di (E_{om}).

1.5 Interpretazione geometrica caso generico

L'interpretazione geometrica per (E_{om}) è un iperpiano attraverso l'origine", e la soluzione è traslazione di questo caso generale per un caso particolare.

1. $n = 1$, $m = 2$ (E) $a_{1n}x_1 + a_{m2}x_2 = b_1$.
   Una soluzione $\Longleftrightarrow$ retta (E_{om}) $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ una soluzione a (E) $\Rightarrow$ retta attraverso (0,0).
2. $n = 1$, $m = 2$, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a$ (E), punto attraverso (0,0,0).

1.6 Come trovare le soluzioni?

Per trovare le soluzioni comuni di (E) possiamo usare 3 operazioni per semplificare il sistema:

1. Scambiare due equazioni.
2. Moltiplicare E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j, $E_j = E_j + \lambda E_i$.
3. Moltiplicare un'equazione E_i per un costate $\lambda \neq 0$, $E_i \Rightarrow \lambda E_i$.

Osservazione 1.6.1. Queste operazioni non cambiano l'insieme delle soluzioni di (E).

Dimostrazione 1.6.1. Dimostriamo le 3 proprietà:

1. La prima è ovvia quindi non ha bisogno di una dimostrazione.
2. Se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di E_i ed $E_j \Rightarrow$ è anche soluzione di $E_i + \lambda E_j$.
   Viceversa se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di E_i, $E_j + \lambda E_i \Rightarrow$ anche soluzione di $(E_j + \lambda E_i)$ - $\lambda = E_j$.
3. Se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di (E) $\Rightarrow$ anche di λE e viceversa.

2 Algoritmo di Gauss

2.1 Matrice a scalini

Utilizzando le proprietà (1), (2) e (3) viste sopra si ottiene un algoritmo per semplificare (E). In un primo momento si considera $b_1 = \ldots = b_n = 0$ e mettiamo i coefficienti in una matrice $n \times m$, $[a_{ij}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{(Con operazioni)}} \begin{bmatrix} \ldots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} + a_{j2} + \lambda a_{i2} + \ldots + a_{jm} + \lambda a_{im} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Le operazioni di prima si traducono come:

1. Scambiare due righe fra di loro.
2. Sostituire la riga R_j con la riga $R_j + \lambda R_i$.
3. Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$.

Partendo da una matrice l'algoritmo produce, utilizzando le 2 operazioni una matrice detta **a forma di scalini**.

Definizione 2.1.1 (Matrice a forma a scalini)**.** *Una matrice è a forma a scalini (per righe) se:*

- *Le righe* $(0, \ldots, 0)$ *sono "in fondo" alla matrice (partendo da sinistra).*
- *Il primo elemento di ogni riga (se esiste) è a destra del primo elemento diverso da 0 della riga precedente. Tale elemento si dice pivot.*

Definizione 2.1.2 (Pivot)**.** *Il primo elemento diverso a 0 d ogni riga di una matrice (nella forma a scalini) si chiama pivot.*

Esempio 2.1.1. Esempio di matrici in forma a scalini e non:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NO SI NO

Osservazione 2.1.1. Quando ci troviamo davanti ad una matrice a scalini possiamo avere due casi principali:

1. Se abbiamo che ogni colonna ha un **pivot**, notiamo che partendo dal basso avremo $a \cdot X_m = 0 \Rightarrow X_m = 0$. Quindi sostituendo nella riga precedente avremo che $b \cdot X_{m-1} + a \cdot X_m = 0 \Rightarrow X_{m-1} = 0$ e così via fino ad arrivare ad una **soluzione banale**, ovvero $(0, \ldots, 0)$.
2. Altrimenti per ogni colonna senza **pivot** avremo una variabile libera che dà ∞ soluzioni.

2.2 Algoritmo in un sistema omogeneo

Definizione 2.2.1 (Algoritmo di Gauss)**.** *Ogni matrice* $n \times m$ *si mette in forma a scalini (per righe) con operazioni del tipo 1 e 2.*

0. *Se la matrice è già in forma a scalini abbiamo finito.*
1. *Si cerca il primo elemento diverso da* 0 *della prima colonna diversa da* 0.
2. *Cambiando n righe si può supporre che questo elemento è il pivot della prima riga. Se siamo in forma a scalini abbiamo finito, altrimenti procediamo.*
3. *Si annullano tutti gli elementi della colonna del pivot sotto il pivot con operazioni del tipo (B). Se siamo in forma a scalini abbiamo finito, altrimenti procediamo.*
4. *Non consideriamo la prima riga e ricominciamo dal punto 1.*

Esempio 2.2.1. Prendiamo il seguente sistema di equazioni e scriviamolo su una matrice:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da qui iniziamo ad applicare l'algoritmo

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo il passo (1) e troviamo 1 come pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo il passo (3) e calcoliamo $R_2 = R_2 - 3R_1$ e $R_3 = R_3 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Applichiamo (4) e non consideriamo la riga R_1 per poi ripetere l'operazione (3) facendo $R_3 = R_3 - 3R_2$

Vediamo così che la matrice finale è in forma a scalini. Possiamo ora prendere i numeri nella matrice e andare a riscrivere il sistema di equazioni associato. Per il nostro esempio abbiamo:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \xRightarrow{\text{(E la matrice)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

A questo punto se consideriamo $x_4 = t$ abbiamo che $x_3 = -5t$ e di conseguenza $2x_2 - 5t + t = 0$ e quindi $x_2 = 2t$ ed ancora abbiamo $x_1 = 2t - 3t - t$. Possiamo dunque dire che in questo esempio x_4 essendo una colonna senza pivot è una "variabile libera" e quindi ci sono più soluzioni.
Potrebbe esserci anche il caso in cui la colonna contenga un pivot e quinci ci sarebbe un unica soluzione.

2.3 Algoritmo in un sistema non omogeneo

Se consideriamo invece un sistema non omogeneo formato aggiungendo una colonna con $b_1, ..., b_n$, è possibile utilizzare ugualmente l'algoritmo di Gauss aggiungendo una colonna alla matrice.

Esempio 2.3.1. Prendiamo il seguente sistema di equazioni e mettiamolo su una matrice:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Uso algoritmo}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \\ R_4 = R_4 - 2R_1 \end{array}$$

Il pivot è in R_1 ed è 1, da qui applichiamo (3) e poi (4).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

Il pivot ora è in R_3 e quindi applichiamo (2) per scambiare R_2 con R_3 e poi facciamo (3) con $R_4 = R_4 - R_2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

Usiamo (4) per eliminare R_2 e troviamo il pivot in R_3, applichiamo poi (4) con $R_4 = R_4 + R_4$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

Abbiamo finito perché il risultato è a scalini

Il risultato finale corrisponde al seguente sistema:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_2 - x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ -5x_4 = -15 \end{array}$$

Se sostituiamo:
$x_4 = 4, x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 0$
Quindi abbiamo un sistema con un unica soluzione

Da questo esempio possiamo vedere una caratteristica comune per questa tipologia di esercizi, cioè che il sistema di equazione ha un unica soluzione se ogni colonna contiene un pivot.

Esempio 2.3.2. Altro esempio di sistema di applicazione dell'algoritmo di gauss.

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 5R_1 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{bmatrix} R_3 = R_3 + 8R_2$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Questa è una matrice in forma a scalini e la sua trasposizione in sistema di equazione è: $$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

Abbiamo quindi che x_3 è una variabile libera e quindi se poniamo $x_3 = t$ abbiamo $x_2 = 2t$ e $x_1 = 1+2t$. Soluzione particolare: (1,0,0). Soluzione generale: $(1 + 2t, 2t, t)$. Sol. Omogenea: $(2t, 2t, t)$.

Da questo esempio vediamo invece che se c'è una colonna senza pivot all'ora esiste almeno una variabile libera e quindi ci sono ∞ soluzioni.

Esempio 2.3.3. Facciamo un ultimo esempio per vedere un ulteriore casistica per l'algoritmo di gauss.

$$\begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 9x_3 = 7 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 4R_1 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} R_3 = R_3 - 5R_2$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$ Questa è una matrice in forma a scalini e la sua trasposizione in sistema di equazione è: $$\begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -60 = 25 \end{matrix}$$

Possiamo notare che l'equazione $0 = 25$ non ha senso quindi non c'è nessuna soluzione.

Anche in questo caso possiamo estendere l'esempio in un caso generale dicendo che se c'è un pivot nell'ultima colonna allora non esistono soluzioni particolari (il sistema omogeneo però ammette ∞ soluzioni).
In sintesi possiamo riassumere i 3 casi visti in questi esempi come di seguito:

- Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot $\iff$ unica soluzione.
- C'è un pivot nell'ultima colonna $\iff$ $\nexists$ soluzione.
- C'è una colonna "non aggiunta" senza pivot e l'ultima colonna non ne ha $\iff$ ∞ soluzioni.

2.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

Questo algoritmo estende l'algoritmo di Gauss producendo una matrice ridotta a scalini.

Definizione 2.4.1 (Matrice ridotta)**.** *Una matrice è in forma* ***ridotta*** *a scalini se:*

- *E' in forma a scalini.*
- *Ogni pivot è uguale a 1.*
- *Ogni pivot è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna.*

Esempio 2.4.1. Esempio di matrici in forma a scalini ridotta e non.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SI, è in forma a scalini ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NO, questa è in forma scalini ma non ridotta.

Definizione 2.4.2 (Algoritmo di Gauss-Jordan)**.** *L'algoritmo sfrutta le 2 operazioni viste per l'algoritmo di gauss (A) e (B) ma aggiungendo anche l'operazione (C). Questo algoritmo, partendo da una matrice a scalini genera una matrice ridotta a scalini.*

1. *Con l'algoritmo di Gauss portiamo la matrice in forma a scalini.*
2. *In ogni riga si cerca il pivot (se esiste). Poi se il pivot è* $\lambda \neq 1$*, moltiplicare la riga per* $\frac{1}{\lambda}$ *(operazione (C)).*
3. *Nella colonna dei pivot gli elementi sotto (e nella riga a sinistra) sono già uguali a 0. Annullare gli elementi sopra della colonna con operazioni del tipo (B).*
   Questa operazione non cambia gli altri pivot perché sono o a sinistra o sotto.

Esempio 2.4.2. Proviamo ad applicare l'algoritmo di gauss-jordan con il seguente sistema di euqzioni

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Per semplificare la matrice usiamo l'operazione (C) e moltiplichiamo una riga per una costante: $R_2 = 2R_2$, $R_4 = 2R_4$

$\Rightarrow$ Applichiamo l'algoritmo di gauss

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 10 & -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \\ R_4 = R_4 - 5R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 = R_3 + 5R_2 \\ R_4 = R_4 + 9R_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 = \frac{1}{8}R_3 \\ R_4 = R_4 - \frac{18}{8}R_3 \end{matrix}$$

La matrice è in forma scalini quindi applichiamo il punto (2) dell'algoritmo di guass-jordan

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 = R_1 + 2R_3 \\ R_2 = R_2 - R_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$$

Esempio 2.4.3. Vediamo ora un secondo esempio di questo algoritmo.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso semplifichiamo la seconda riga con un operazione (C) $R_2 = 2R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & -12 & 2 & 18 & 16 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = -\frac{1}{7}R_2 \\ R_3 = -R_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} R_3 = R_3 + R_2 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = R_1 - 3R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \frac{1}{2}R_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 = s & x_1 = 3 + 2s - 4t \\ x_4 = t & x_3 = -1 + 3t \end{matrix}$$

3 Spazi Vettoriali

Motivazione geometrica: saranno punti e vettori nel piano $\mathbb{R}^2$. Un punto di $\mathbb{R}^2$ si può descrivere con due coordinate (x_1, x_2), ma anche come un vettore (una freccia) dall'origine (0,0) a (x_1, x_2).

Esistono 2 operazioni che si possono fare fra due vettori:

- **Somma** di due vettori che a livello di coordinate è: $(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$
  Geometricamente si calcolare un punto di incontro facendo il parallelogramma.
- **Moltiplicare con uno scalare** $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$
  A livello geometrico la lunghezza è moltiplicata da λ ma l'angolo non cambia.

3.1 Generalizzazione operazioni

Queste due operazioni si possono anche generalizzare:

- **Somma** $(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$.
- **Moltiplicazione** $\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

Si possono anche generalizzare queste operazione tramite le matrici e la definizione di $\mathbb{R}^n$.

$$R^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Spazio n-dimensioni standard.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{bmatrix}$$

Definizione Somma.

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

Definizione Moltiplicazione.

Definizione 3.1.1 (Spazio vettoriale)**.** *Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:*

- *Somma: dati $v_1, v_2 \in V \Longrightarrow v_1 + v_2 \in V$.*
- *Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: dato $v \in V \Longrightarrow \lambda \cdot v \in V$.*

Per queste operazioni esistono anche una serie di assiomi che devono essere rispettati:

Assiomi Somma	Assiomi Moltiplicazione
$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$	$(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$	$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
$\nexists\, 0 \in V \ : \ 0 + v = v + 0 = v \ \forall\, v$	$(\lambda_1\, \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2\, v)$
$\forall\, v \nexists\, -v \in V \ : \ v + (-v) = (-v) + v = 0$	$(1 \cdot v) = v$

Table 1: Assiomi somma e moltiplicazioni vettori

Osservazione 3.1.1. R^n soddisfa tutti gli assiomi sopra scritti.

Esempio 3.1.1. Consideriamo una matrice $n \times m$ elementi reali $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Esempio 3.1.2. Prendiamo due funzioni continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Possiamo effettuare le operazioni. Somma: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ Prodotto con λ: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdots f(x)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \ : \ a_i \in \mathbb{R}, n \leq 0\}$

Somma: se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

3.2 Sottospazio

Introduciamo ora il concetto di sottospazio vettoriale.

Definizione 3.2.1 (Sottospazio)**.** *Sia V uno spazio vettoriale. Un **sottospazio** $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che:*

- $v_1, v_2 \in W \Longrightarrow v_1 + v_2 \in W$.
- $v \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda v \in W \ \forall \ \lambda$.

Proposizione 3.2.1. *Un sottospazio $W \subset V$ è a sua volta uno spazio vettoriale.*

Esempio 3.2.1. Prendiamo $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio.

Un elemento generale di questo sottospazio (sottospazio con $n = 2$) è: $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $(x_2 \in \mathbb{R})$

Se prendiamo $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in W$ e $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \cdot x_2 \end{bmatrix} \in W$

Similmente se prendiamo $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ vettori di forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ che è un sottospazio.

Esempio 3.2.2. Se prendiamo invece $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_1 = 1 \right\}$ questo non è un sottospazio perché: Se prendiamo il caso con $n = 2$ $\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ che non è un sottospazio.

Esempio 3.2.3. Prendiamo ora $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_1 = t_2 \right\} \subset \mathbb{R}$ questo è un sottospazio perché: se facciamo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2' \\ x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2' \\ x_2 + x_1' \end{bmatrix}$ e $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ quindi è un sottospazio.

Esempio 3.2.4. Facciamo un esempio differente, prendiamo $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ a = 0 \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio. Ma nel caso ci ci fosse stato $a = 1$ non sarebbe stato un sottospazio, perché non sarebbe passato passato per (0,0).

Esempio 3.2.5. Facciamo alcuni esempi prendendo delle funzioni all'interno degli spazzi vettoriali.

- Dato $\{f \in \mathbb{R} \ : \ deg(f) \leq d\} \subset \mathbb{R}[x]$ con d fisso ≥ 0. Questo è un sottospazio.
- $\{f \in \mathbb{R} : deg(f) = d\}$ non è un sottoinsieme perché se per esempio $d = 2$ abbiamo $f = x^2 + 3 \in W$, $g = -x^2 + x + 1 \in W$ ma $f + g = x + 4 \notin W$.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(0) = d\} \subset \mathbb{R}[x]$ invece è un sottoinsieme perché $f(0) = 0$, $g(0) = 0 \Longrightarrow (f + g)(0) = 0$ e anche $(\lambda f)(0) = 0$.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(0) = 1\}$ non è un sottoinsieme perché già non contiene 0.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(2022) = 0\}$ è un sottoinsieme.

Esempio 3.2.6. Dati $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissi e dato il seguente insieme vettoriale

$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio. Perché preso $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \\ a_1y_1 + a_2y_2 \end{cases}$
vediamo che la somma $a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2) = 0$ ed anche il prodotto con λ fa $a_1(\lambda x_1)+a_2(\lambda x_2) = 0$. Possiamo generalizzare scrivendo che, dato $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ fissi:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ è un sottospazio.}$$

Vediamo dunque che le soluzioni di un equazioni lineari omogenee a n variabili definiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Possiamo generalizzare ulteriormente:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ Quindi è un sottospazio.}$$

Dunque che la soluzione di un sistema di questioni lineare omogenee definisce un sottospazio $\mathbb{R}^m$.

3.3 Combinazioni lineari

Definizione 3.3.1 (Combinazione lineare e banale)**.** *Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \cdots v_m \in V$. Una **combinazione lineare** di $v_1, \cdots, v_m$ è una somma $\lambda v_1 + \lambda v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. In questo caso $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda v_m = 0$.*

Nota che una combinazione lineare po' essere 0 ma non banale, per esempio:
$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$.

Definizione 3.3.2 (Sottospazio generato)**.** *Siano $v_1, \cdots, v_m \in V$ m vettori. Il **sottospazio generato** da $v_1, \cdots, v_m$ è: $span(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_m \ : \ \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$.*
Quindi $span(v_1, \cdots, v_m)$ è l'insieme delle combinazioni lineari.

Proposizione 3.3.1. *$span(v_1, \cdots, v_m) \subset V$ è un sottospazio.*

Dimostrazione 3.3.1. Bisogna verificare che $v, w \in span \Longrightarrow v + w \in span$ e $\lambda v \in span \, \forall \, \lambda$.

Esempio 3.3.1. Prendiamo $\mathbb{R}^2 = span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ sono due rette.

Se facciamo $span\left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$

Esempio 3.3.2. Sia $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} in\mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0 \right\}$ abbiamo allora che: $W = span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

quindi: $\left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ : \ x_1 = 0 \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ma non è uguale a $\mathbb{R}^3$, ma è più piccolo essendo un piano attraverso l'origine.

3.4 Vettori lineamenti indipendenti

Definizione 3.4.1. *I vettori* $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ *sono* ***linearmente indipendenti*** *se* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ *vale solo per* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Questo vuol dire che se una combinazione lineare dei V è uguale a zero $\Longrightarrow$ la combinazione è banale.
Se $v_1, \cdots, v_n$ non sono indipendenti allora sono **linearmente dipendenti**.
$v_1, v_2, \cdots, v_m$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ non tutti uguali a 0 tale che $\lambda_1 v_1 + \lambda v_2 + \cdots + \lambda_2 v_2 = 0$.

Proposizione 3.4.1. $v_1, v_2, \cdots, v_m$ *sono linearmente dipendenti* $\Longleftrightarrow$ $\exists\, 1 \le i \le n$ *tale che* v_i *è combinazione lineare dei* v_j *per* $j \neq i$.

Dimostrazione 3.4.1. Se $v_1, \cdots, v_m$ sono dipendenti allora $\exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ non tutti ugualia 0 tale che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_m = 0$. $\exists i : \lambda_i \neq 0$ che possiamo usare come dividendo: $\frac{\lambda_1}{\lambda_1} v_1 + \cdots + 1 v_i + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_m = 0$ (mando tutti a destra) $v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_m$. Se $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_m v_m$ allora $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_m v_m = 0$

In pratica per vedere se m vettori $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti prendiamo innanzitutto m vettori:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 1 \\ a_2 1 \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}, \text{ questi sono vettori di } \mathbb{R}^m.$$

Questi vettori sono linearmente indipendente, quindi l'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ vale, se e solo se $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ è soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ &\cdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{aligned}$$

Quindi $v_1, \cdots, v_m$ sono lin. indipendenti $\Longrightarrow$ il sistema sopra ammette solo la soluzione banale (0,$\cdots$,0)

3.5 Interpretazioni geometrica

Facciamo un interpretazione geometrica di quello visto sopra ponendo $n = 2$. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti $v_1, v_2 \neq 0$ oppure $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \,:\, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Ad esempio $\lambda \neq 0$, $v_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_2$ e se $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \setminus \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e corrisponde un punto della retta $x_2 = 0$.
In generale se $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, v_2 deve essere $\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ quindi v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Longleftrightarrow$ i punti corrispondenti sono sulla tessa retta attraverso (0,0).

Esempio 3.5.1. Si decida se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Per faro dobbiamo cercare le soluzioni del sistema lineare omogeneo con la matrice associata.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ &2x_1 + 2x_4 = 0 \\ &3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Algoritmo di gauss} \\ R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} R_3 = R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso ci sono 3 pivot, una variabile libera $\Longrightarrow \infty$ soluzioni

Quindi il sistema ammette soluzioni non banali $\Longrightarrow$ i vettori sono lim. dipendenti.
Se si guardasse solo v_1, v_2, v_3 quello che risulterebbe sarebbe una matrice 3×3 con 3 pivot, in questo caso allora ci sarebbe solo la soluzione banale ed allora v_1, v_2, v_3 sarebbero lin. indipendenti.

Proposizione 3.5.1. *Se* $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ *sono vettori tali che* v_n *è combinazione lineare di allora:* $span(v_1, v_2, ..., v_n) = span(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1})$.

3.6 Base di un sistema lineare

Definizione 3.6.1. *Un sistema $v_i, \cdots, v_n$ di vettori è una **base** di V se i vettori $v_i, \cdots, v_n$:*

- *Sono linearmente indipendenti.*
- *Lo $span(v_1, v_2, \cdots, v_n) = V$*

Corollario 3.6.0.1. *Se $span(v_1, \cdots, v_n))C$ si può scegliere una base di V fra i $v_1, \cdots, v_n$.*

Esempio 3.6.1. Vogliamo trovare la base standard di $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Possiamo osservare che } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2\_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

dunque $span(e_1, \cdots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ma questa non è l'unica base, c'è ne sono tante, ad esempio se prendiamo $n = 2$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base perché $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se e solo se $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Esempio 3.6.2. Troviamo la base standard di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si applica lo stesso ragionamento visto sopra con $\mathbb{R}^n$.

Esempio 3.6.3. Base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{R}[x] : deg(x) \leq d\}$ sarebbe $1, x, x^2, \cdots, x^s$. Infatti, $a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_d \cdot x^d$ è il sistema indipendente

Esempio 3.6.4. Prendiamo $\mathbb{R}[x]$ che non ammette di base finita. Infatti $\nexists f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{R}[x]$: $span(f_1, \cdots, f_n = \mathbb{R}[x]$ perché se $f \in span(f_1, \cdots, f_n)$ allora $deg(f) \leq max(deg(f_1), \cdots, deg(f_n))$. (Comunque è vero: $span(1, x, x^2, x^2, \cdots) = \mathbb{R}[x]$ e ogni sottoinsieme finito di $1, x, x^2, \cdots$ è lin. indipendente)

La dimensione di uno spazio V sarà definita come il numero degli elementi di una base. Per questo bisogna sapere: questo numero è lo stesso per ogni base.

Proposizione 3.6.1. *Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ e $r > n \implies v_1, v_2, \cdots, v_n$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione 3.6.1. Per $n = 2$, la prima osservazione è che se la proposizione vale per $r = 2$ vale per ogni $r > 2$. Infatti se $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ è una combinazione lineare non banale allora $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + \cdots + 0 \cdots v_r = 0$ è una combinazione non banale (perché λ_1, λ_2 o λ_3 è diverso da 0). Quindi siano $n = 2, r = 3$ e e_1, e_2 una base di V. Come $V = span(e_1, e_2)$, $v_1, v_2, v_3 \in span(e_1, e_2)$. Quindi:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ v_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \\ v_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 \end{aligned}$$

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti $= 0$ tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Facciamo la sostituzione con il sistema a fianco.

$\lambda_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + \lambda_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) + \lambda_3(a_{31}e_1 + a_{32}e_2) = 0$ che diventa $(\lambda_1 a_{11} + \lambda_1 a_{12})e_2 + (\lambda_2 a_{21} + \lambda_2 a_{22})e_2 + (\lambda_3 a_{31} + \lambda_3 a_{32})e_2 = 0$. Ma e_1, e_2 sono linearmente indipendenti, quindi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0 \end{aligned}$$

Questo è un sistema omogeneo di equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con matrice di coefficienti $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$

Se facciamo l'algoritmo di Gauss, ottengo un numero di pivot minore o uguale a 2 (perché ci sono solo due righe), allora ci sarà ≥ 1 colonne senza pivot ed allora il sistema avrà ∞ soluzioni ed allora ci sarà una soluzione non banale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$. Ma se il sistema sopra ha una soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$ allora anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sarà una combinazione non banale e quindi ci siamo.

La dimostrazione per n, r generale è la stessa, infatti alla fine ottengo un sistema lineare di n equazioni in $r > n$ variabili ed allora c'è sempre una soluzione non banale. ■

Corollario 3.6.0.2. *Se $v_1, \cdots, v_r$ ed $e_1, \cdots, e_n$ sono due basi di V allora $r = n$.*

Dimostrazione 3.6.2. Se $r > n$, $v_1, \cdots, v_r$ è linearmente dipendente dopo la proposizione se $e_1, \cdots, e_n$ è una base, quindi $r \leq n$. Se $r < n$ e $v_1, \cdots, v_n$ è una base allora $e_1, \cdots, e_n$ è linearmente dipendete e questa è una contraddizione. Dunque $r = n$. ■

3.7 Dimensione spazio vettoriale

Definizione 3.7.1 (Dimensione di un V). *Se V ammette una base $e_1, \cdots, e_n$ n è la dimensione di V. La dimensione di V si indica come $dimV = n$.*

Corollario 3.7.0.1. *Se la dimensione di V è n e $v_1, \cdots, v_m$ sono vettori lin. indipendenti con $m < n \implies \exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \cdots, w_n \ :\ v_1, \cdots, v_n, w_{m+1}, \cdots, w_n$ sono una base di V.*

Dimostrazione 3.7.1. Dobbiamo verificare che $span(v_1, \cdots, v_m) = V$. Sappiamo che $span(v_1, \cdots, v_m)$ non può essere V, allora $\exists v \in V$ tale che $v \notin span(v_1, \cdots, v_m)$ ma allora basta vedere che $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sono linearmente indipendenti ed allora abbiamo una contraddizione.
Sia $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda_0 v_0 = 0$ una combinazione lineare se $\lambda = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, v_n \cdots, v_m$ lin. indipendenti allora $v_1, v_2, \cdots, v_m$ lin. indipendenti. Se prendiamo un $\lambda_{m+1} \neq 0$ possiamo fare $-\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n = V \in span(v_1, \cdots, v_n)$, ma questa è una contraddizione $v \notin span$. ■

Esempio 3.7.1. Decidiamo se $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ sono una base $\mathbb{R}^3$.
Per faro dobbiamo solo decidere se sono indipendenti o meno, e per farlo usiamo gauss.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} R_3 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Scambio} R_2, R_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Vediamo dunque che ci sono 3 pivot e quindi i vettori sono lineamenti indipendenti e di conseguenza abbiamo una base.

Esempio 3.7.2. Prendiamo $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Abbiamo visto che $1, x, x^2$ sono una base questo vuol dire allora che $\mathbb{R}[x]_{<2} = 2$. Vediamo se $1, 1 + x, (1 + x)^2$ forma una base. Per fare questo bisogna vedere se sono linearmente indipendenti. Supponiamo che: $\lambda_1 1 + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + 2x\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)1 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3 + x^2 = 0$.
Visto che $1, x, x^2$ sono lin. indipendenti allora $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 0$ sostituendo viene che $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$ allora $1, 1 + x, (1 + x)^2$ sono lin. indipendenti ed allora sono una base di $\mathbb{R}(x)_{<2}$.

Proposizione 3.7.1. *Sia $v_1, \cdots, v_n$ una base di V, e $v \in V$ un vettore. Allora $\exists!\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ :\ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. (Ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base)*

Dimostrazione 3.7.2. Scriviamo come $V = span(v_1, \cdots, v_n)$, l'esistenza degli α_i è chiaro. Se adesso $v = \alpha_1 v_i + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ allora $0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta)v_n$ allora $\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_1 = \beta_n$ perché i v_i sono lin. indipendenti.

Esempio 3.7.3. $W' = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}\ :\ f(1) = f(2) = 0\}$, $W' \subset W$ (per esempio visto prima) e $dim(W) = 3 \implies dim(W') \leq 2$. Ci sono due vettori indipendenti in W, $(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ di gradi diversi $\implies dim(W') = 2$.
$W' \subset W$ in base W' è $(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ e completiamo in una base di W $(x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2 \in W \setminus W'$ è una base di W, perché sono indipendenti:
$W \subset V$, $dim(V) = 4$, $dim(W) = 4$. $1, x-1, (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ è una base di $V \setminus W$.

Esempio 3.7.4. $V = M_{3\times3}(\mathbb{R})$, la dimensione è $dim(V) = 9$. Mentre $W \subset \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) :$ la somma di ogni riga è $0\}$. Supponiamo $dim(W) < 9$ elementi linearmente indipendenti di W.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Essendo linearmente indipendente allora $dim(W) \geq 6$. Proviamo a dire che $dim(W) = 6$. L'idea:
$W_1 = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima riga $= 0\}$,
$W_1 = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima e della seconda riga $= 0\}$.
$W \subset W_2 \subset W_1 \subset M_{3\times3}(\mathbb{R})$, sapendo $dim(M_{3\times3}(\mathbb{R})) = 9, dim(W_1) = 6, dim(W_2) = 7, dim(W) = 7$.

Esempio 3.7.5. Sappiamo già: $v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ che sono una base di $\mathbb{R}^3$. Troviamo le coordinate di $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ rispetto a queste basi. $\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$. Ed usiamo Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\\3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 - 2R_1\\R_3 - 3R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & 2\\0 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_3 - R_2\\R_2 = \frac{1}{2}R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} R_1 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1$.

Esempio 3.7.6. Vedere se $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ è una base $\mathbb{R}^3$ e calcolare coordinate $\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$ rispetto a base.
Per calcolare le coordinate dobbiamo risolvere il sistema lineare che si crea con le 3 matrici:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$	$x_3 = 0$	Usiamo Gauss per verificare l'indipendenza perché se
$x_3 = 0$	$x_1 = 4$	questi vettori sono indipendenti allora i coefficienti
$x_1 + x_3 = 4$	$x_2 = -1$	$4, -1, 0$ saranno le coordinate.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} R_3 - R_1 \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\0 & -2 & -2\end{bmatrix} \text{Inverto } R_2, R_3 \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Torna $x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 0$, inoltre abbiamo una forma a scalini con 3 pivot allora i vettori sono indipendenti e quindi sono una base.

Proposizione 3.7.2. *Se abbiamo uno spazio vettoriale $dim(V) = n$ ed abbiamo $v_1, v_2, \cdots, v_m$ vettori linearmente indipendenti di V con $m < n$ allora $\exists\ w_{m+1}, w_{m+2}, \cdots, w_n\ :\ v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}, \cdots, w_n$ sono una base di V.*

Dimostrazione 3.7.3. $spa(v_1 \cdots, v_m)$ non può essere V, perché se $span(v_1, \cdots, v_m) = V \implies v_1, \cdots, v_m$ è una base ma $m < n$ è $dim(V) = n$ e questa è una contraddizione. Quindi $span(v_1, \cdots, v_m) \neq V \implies \exists w_{m+1} \in V : w_{m+1} \notin span(v_1, \cdots, v_m)$. Ma allora $v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}$ sono linearmente indipendenti tale che se $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} = 0$, $\lambda_{m+1} = 0$ allora $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Se $\lambda_{m+1} \neq 0$ allora $v_{m+1} = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}})v_1 + \cdots + (\frac{-\lambda_m}{\lambda_{m+1}})w_m \in span(w_1, \cdots, v_m)$ che è una contraddizione.

Per ricapitolare se la $dim(V) = n$ e $v_1, \cdots, v_n$ sono vettori di V possiamo dire che:

- Se $m > n$ allora i vettori sono linearmente dipendenti.
- Se $m = n$ e i vettori sono indipendenti allora si forma una base.
- Se $m < n$ e i vettori sono indipendenti allora si completa in una base di V.

Esempio 3.7.7. Facciamo un esercizio che sarà suddiviso in due parti.

- Decidiamo se i vettori $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. $dim(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow$ se sono indipendenti sono allora una base. Usiamo gauss.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 + R_1\\R_3 - R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} R_2 + R_3 \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

  Risulta avere 2 pivot e quindi i vettori sono dipendenti. I pivot però sono delle colonne 1 e 3 e quindi se escludiamo la colonna centrale abbiamo come risultato due vettori indipendenti che chiamiamo v_1, v_2.

- Ora come secondo punto dobbiamo completare v_1, v_2 in una base di $\mathbb{R}^3$. Per fare questo dobbiamo trovare un terzo vettore non contenente in $span(v_1, v_2)$.
  L'idea qui è che so che $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ è la base standard. So anche che almeno uno di questi 3 vettori non è contenuto in $span(v_1, v_2)$ perché se $e_1, e_2, e_3 \in span(v_1, v_2) \Longrightarrow span(e_1, e_2, e_3) \subset span(v_1, v_2)$ ma $span(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$ e quindi abbiamo una contraddizione. A questo punto devo trovare quale dei 3 vettori non è in $span(v_1, v_2)$. Lo facciamo provando i vari vettori e trovano quello che utilizzando Guass faccia venire 3 pivots.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 + R_1\\R_3 - R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix} R_3 - 2R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -2 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  Il risultato in questo caso è 3 pivot quindi i vettori sono linearmente indipendenti e quindi è una base di $\mathbb{R}^3$.

Proposizione 3.7.3. *Sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora:*

1. *Abbiamo che $dim(W) \leq dim(v)$.*
2. *E se $W \neq V$ allora $dim(W) < dim(v)$.*

Dimostrazione 3.7.4. Per dimostrare questa proposizione bisogna andare a dimostrare i due punti separatamente.

1. Se $r = dim(W)$ e $w_1, \cdots, w_r$ è una base di W allora se $r > n$ allora per una proposizione vista precedentemente $w_1, \cdots, w_r$ sarebbero linearmente dipendenti e questa è una contraddizione quindi $r \leq n$.

2. se $r = n$, $w_1, \cdots, w_r$ sono $n = r$ vettori lineamenti indipendenti di V ed allora sono una base di V quindi $span(w_1, \cdots, w_r) = V \Longrightarrow V = W$.

Esempio 3.7.8. Sia $V = M_{2\times2}(\mathbb{R}), W = \{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \ : \ b = c\}$ (questa è definita anche matrice simmetrica).
Si calcoli da dimensione di W, $dim(W)$. Partiamo dal fatto che la $dim(M_{2\times2}(\mathbb{R})) = 4$ (basi standard). Mentre $V \neq M_{2\times2}(\mathbb{R}) \Longrightarrow dim(V) \leq 3$. Vediamo però che:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti quindi devono essere una base di W e quindi dim(W) = 3

Esempio 3.7.9. Sia $W = \{f \in \mathbb{R}[x \ : deg(f) \leq 3, f(1) = 0\}$ sottospazio di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Sappiamo che la $dim(V) = 4$ (1, x, x^2, x_3). La proposizione mi dice che $dim(W) \leq 3$ e se trovo 3 vettori indipendenti allora $dim(W) = 3$. Possiamo vedere che $x - 1, x^2 - 1, x_3 - 1$ sono lin. indipendenti quindi concludiamo che $dim(W) = 3$.

Osservazione 3.7.1. Se V è un spazio, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora anche $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio. Infatti se $v \in V_1 \cup V_2$ e $w \in V_1 \cap V_2 \implies v+wV_1 \cap V_2$ perché V_1 sottospazio ed allora $v+w \in V_1$ ed allora in modo simile per $V_2 \implies v+w \in V_2$ ed in modo simile $\lambda v \in V_1, \lambda v \in V_2 \implies \lambda v \in V_1 \cap V_2 \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.7.10. Sia $W_i \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $E_i\ : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$. Allora $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$ è il sottospazio delle soluzioni comuni di $E_1, E_2, \cdots, E_r$.

3.8 Formula di Grassman

Definizione 3.8.1 (Somma fra sottospazi)**.** *Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi. La loro somma di V_1, V_2 è definita come:*

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_1\ :\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Osservazione 3.8.1. Si osservi che $V_1 + V_2 \subset V$ è un sottospazio a sua volta.

Dimostrazione 3.8.1. Questa definizione si somma fra sottospazi è vera perché se $v, w \in V_1 + V_2$ allora:

$$\left.\begin{array}{ll} v = v_1 + v_2 & \text{con } (v_i \in V_i) \\ w = w_1 + w_2 & \text{con } (w_i \in V_i) \end{array}\right\} \Rightarrow v+w = (v_1+w_1)+(v_2+w_2) \in V_1+V_2 \text{ perché } (v_1+w_1) \in V_1, (v_2+w_2) \in V_2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \in V_1 + V_2$ con $\lambda v_1 \in V_1$ e $\lambda v_2 \in V_2$. ■

Proposizione 3.8.1. *Se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V_1 + V_2 \implies span(v_1, \cdots, v_n) \subset V_1 + V_2$.*

Dimostrazione 3.8.2. La dimostrazione è abbastanza veloce, infatti basta vedere che se $V_1 + V_2$ è un sottospazio che contiene $v_1, \cdots, v_n$ allora contiene le loro combinazioni. lineari.

Esempio 3.8.1. Dato un $V_1 = \{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\}\ :\ b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi.
Allora $V_1 + V_2 = \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\ :\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Esempio 3.8.2. Dati $V_1 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\ :\ a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
Allora $V_1 + V_2 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\ :\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\not\models}$ ma anche $V_1 \cap V_2 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a_2 \in \mathbb{R}\}$

Teorema 3.8.1 (Formula di Grassman)**.** Sia $dim(V) < \infty$, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora:

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2)$$

Dimostrazione 3.8.3. Per dimostrare questa formula sia $e_1, \cdots, e_4$ una base di $V_1 \cap V_2$. Si completa in una base $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$ di V_1 e $e_1, \cdots, e_r, w_{r+1}, \cdots, w_m$ di V_2.
Quindi abbiamo he $dim(V_1) = n, dim(V_2) = m$ e che $V_1 \cap V_2 = r$. A questo punto verifichiamo che $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n, w_{r+1}, \cdots, w_m$ è una base di $V_1 + V_2$. Se fosse una base allora $dim(V_1 + V_2) = n + m - r$. Per verificare se è una base verifichiamo se è lin indipendente, sia:
$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n + \nu_1 w_{r+1} + \cdots + \nu_{m-r} w_m = 0$. Tutti i coefficienti $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$, dobbiamo ora vedere se sono tutti uguali a 0.

$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n = -\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m$. Vediamo che la parte $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n \in V_1$ mentre $-\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m \in V_2$, quindi $-\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m \in V_1 \cap V_2 \implies$ come $e_1, \cdots, e_r$ è una base di $V_1 \cap V_2, \exists\, \alpha_1, \cdots, \alpha_r\ :$ $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r = -\nu w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m$.

Ma $e_1, \cdots, e_r, w_{r+1}, \cdots, w_m$ è base di V_2 ed allora è linearmente indipendente ed allora $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \nu_1 = \cdots = \nu_{m-r} = 0$, ma allora $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \cdots + \nu_{n-r} v_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_{n-r} = 0$ perché $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$ è una base di V_1.

Vediamo dunque che $span(e_1, \cdots, e_r, v_1, \cdots, v_{n-r}, w_1, \cdots, w_{m-r}) = V_1 + V_2$ se $v \in V_1 + V_2$, $v = v^1, v^2$: $v^1 \in V_1, v^2 \in V_2$. Ma allora $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$:
$v^2 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} v_1 + \cdots + \alpha_n v_{n-r}$ e $v_2 = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_r e_r + \beta_{r+1} w_1 + \cdots + \beta_m w_{m-r}$ perché $e_1, \cdots, e_r, v_1, \cdots, v_{n-r}$ è un base di V_1 e $e_1, \cdots, e_r, w_1, \cdots, w_{m-r}$ è una base di V_2.
Detto ciò allora abbiamo che $v_1 = v^1 + v^2 = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_r + \beta_r)e_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_{r+1} w_1 + \cdots + \beta_m w_m$. ■

Esempio 3.8.3. Consideriamo i due sottospazi in $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$V = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\}, W = span\left(W_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $dim(V \cap W), dim(V + W)$. Sappiamo che $dim(W) = 2$ perché ovviamente $W_1 \neq \lambda w_2$. Bisogna dunque calcolare la $dim(V)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} R_2 + R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{matrix}$$

Abbiamo dunque x_3, x_4 come variabili libere che fa si che $x_2 = -x_3 - 3x_4$ e $x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 = x_3 + 6x_4$, la soluzione generale è dunque:

$$\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $dim(V) = 2$ e v_1, v_2 è una base. Cerchiamo ora $dim(V + W)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_3 + 3R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{Inverto } R_2, R_4 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} R_4 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} R_4 + \frac{1}{3} R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque 3 pivots ed allora le prime 3 colonne sono indipendenti ma v_1, v_2, w_1, w_2 sono dipendenti. Questo fa si che $dim(V + W)$ =3.
Utilizzando poi Grassman: $dim(V \cap W) = dim(V) + dim(W) - dim(V + W) = 1$

Esempio 3.8.4. Siano $V = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), W = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Chiamiamo i due vettori in V v_1, v_2 mentre i due in W w_1, w_2. Trovare basi di $V + W, V \cap W$. Per $V + W$ facciamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} R_4 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque 3 pivtos ed allora $dim(V + W) = 3$, perché v_1, v_2, w_2 sono lin. indipendenti e quindi sono una base. Utilizzando allora Grassmann: $dim(V \cap W) = dim(V) + dim(W) - dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$.
In uno spazio di $dim = 1$ ogni vettore diverso da 0 è base, per trovarlo facciamo:

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{matrix}$$

Abbiamo dunque che $x_4 = 0, x_3 =$ t sono variabili libere. Quindi $x_2 = -\frac{7}{2}, x_1 = -\frac{t}{2}$

La soluzione generale è dunque $(-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, t, 0)$ e con $t = 1$ abbiamo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0)$ che fa si abbiamo $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - w_1 = 0$. Dunque $w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in V \cap W$.
Quindi w_1 è una base di $V \cap W$ e questo perché so che questo spazio ha $dim = 1$ grazie a Grassman.
Ogni volta che $V \cap W$ è della forma $t \cdot w_1$ allora ri dimostra che $dim(V \cap W) = 1$.

4 Applicazione lineare

Definizione 4.0.1 (Applicazione lineare)**.** *Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un'applicazione lineare (o mappa lineare) è una mappa $\varphi : V_1 \to V_2$ soddisfano:*

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \,\forall\, v_1, v_2 \in V_1$.
2. $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \forall\, v \in V_1$.

Esempio 4.0.1. Alcuni esempi di applicazioni lineari:

- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\Big(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\Big) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ fisso.
- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \\ \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_n a_n \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e $\mu_1, \cdots, \mu_n$ fissi.
- $V_1 = \mathbb{R}^n, V_2 = \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$
- $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq d}, V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$ quindi è come scrivere $\varphi(f) = f'$.
  E questo va bene perché sono rispettate le proprietà (a) e (b) della definizione sopra.
- $V_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ continua }, \int_0^1 f < \infty\}$, $V_2 = \mathbb{R}$. Vediamo che $\varphi(f) = \int_0^1 f$.
  Infatti, anche in questo caso, le proprietà (a) e (b) della definizione sono rispettate.

Sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare e sia $e_1, \cdots, e_n$ una base di V_1 allora sia $v \in V_1$, $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$. $\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1) + \varphi(\lambda_2 e_2) + \cdots + \varphi(\lambda_n e_n) = \lambda_1\varphi(e_1) + \lambda_2\varphi(e_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$. In conclusione, conoscere $\varphi(v) \iff$ conoscere $\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)$ e lineare coordinate di v rispetto $e_1, \cdots, e_n$. Viceversa se faccio $\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \cdots, \varphi(e_n) = v_n$ allora $\exists!$ applicazione lineare $\varphi v_1 - \varphi v_2$ con queste proprietà.

Esempio 4.0.2. $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$ e le basi standard sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Esiste una sola $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$, $\varphi\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$. Infatti tale φ è dato da $\varphi\Big(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\Big)$

4.1 Nucleo e immagine

Definizione 4.1.1. *Sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare possiamo definire di φ:*

- ***Il nucleo**: $Ker(\varphi) = \{v \in V_1 \,:\, \varphi(v) = 0\} \subset V_1$ sottospazio.*
- ***L'immagine**: $Im(\varphi) = \{v_2 \in V_2 \,:\, \exists v_1 \in V_1 \,:\, \varphi(v_1) = v_2\} \subset V_2$ sottospazio.*

Esempio 4.1.1. Alcuni esempi di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

1. Per $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
   $Ker(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \,:\, x_1 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad Im(\varphi) = \{\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \,:\, x_2 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   $Ker(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \,:\, x_1 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad Im(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \,:\, x_2 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

3. $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$, $Ker(\varphi) = \{$ polinomi costanti $\} = span(1) \qquad Im(\varphi) = \mathbb{R}[x]_{d-1}$

Teorema 4.1.1. Sia $dim(V_1) < \infty$ e sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare, allora vale che:

$$dim\, Ker(\varphi) + dim\, Im(\varphi) = dim\, V_1$$

Dimostrazione 4.1.1. Per dimostrare il teorema sopra partiamo prendendo $v_1, \cdots, v_r$ una base di $Ker(\varphi)$ (quindi $dim\, Ker(\varphi) = r$), e $w_1, \cdots, w_s$ una base di $Im(\varphi)$ (quindi $dim\, Im(\varphi) = s$).

Siano poi $\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_s} \in V_1$ tali che $\varphi(\overline{v_1}) = w_1, \cdots, \varphi(\overline{v_s}) = w_s$. Noi dobbiamo dimostrare che $v_1, \cdots, v_r, \overline{v_1}, \cdots, \overline{v_2}$ è una base di V_1 (in questo modo dimostriamo che $dim\, V_1 = r + s$ ed il teorema è verificato).

Verifichiamo l'indipendenza lineare. Supponiamo che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1}\overline{v_1} + \cdots + \lambda_{r+s}\overline{v_s} = 0$. Applichiamo φ: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \varphi(\lambda_{r+1}\overline{v_1} + \cdots + \lambda_{r+2}\overline{v_s}) = 0$ $(\varphi(v_1) = 0 \; \forall : i)$. quindi $\lambda_{r+1}\varphi(\overline{v_1}) + \cdots + \lambda_{r+2}\varphi(\overline{v_s}) = 0$ che è come scrivere $\lambda_{r+1}w_1 + \cdots + \lambda_{r+s}w_s = 0 \implies \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+s} = 0$ perché $w_1, \cdots, w_s$ base.

Quindi $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ ed allora $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ perché $v_1, \cdots, v_r$ è una base di $Ker(\varphi)$.
In fine $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+s} = 0$.
$span(v_1, \cdots, v_r, \overline{v_1}, \cdots, \overline{v_s}) = v_1$ tale che sia $v\imath V_1$. $\varphi(v) \in Im(\varphi) \implies \exists\, \overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_s}$ tale che $\varphi(v) = \overline{\lambda_1}w_1 + \cdots + \overline{\lambda_s}w_s$. Ma allora $\varphi(v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s}) = \varphi(v) - \overline{\lambda_1}\varphi(\overline{v_1}) - \cdots - \overline{\lambda_s}\varphi(\overline{v_s}) = 0$. Quindi $v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s} \in Ker(\varphi)$, ma allora $v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \; \forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ perché $v_1, \cdots, v_r$ base di $Ker(\varphi)$. In somma $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \overline{\lambda_1}\overline{v_1} + \cdots + \overline{\lambda_s}\overline{v_s}$