ESERCIZIO 1

$$x = g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

CE: $\mathbb{R}$ $\quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

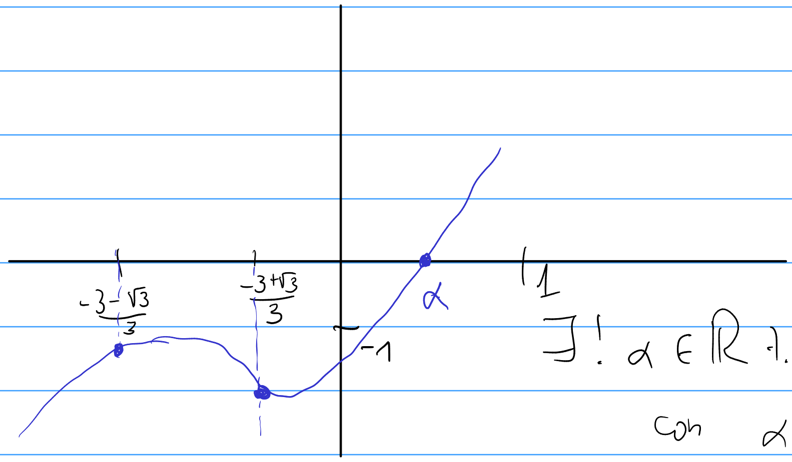
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{x} + 1$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1 \geq 0 \qquad f'(x) = 0 \to x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$+ + + +$ | $- - - \ldots$ | $+ + + +$

$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$

$$f''(x) = 3x + 3 \geq 0 \iff x \geq -1$$



$\exists!\ \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = 0$

con $\alpha \in [0, 1)$

Il metodo delle tangenti a partire da 1 é convergente?

in $(\alpha, 1]$ $\quad f > 0 \quad f'' > 0 \Rightarrow f f'' > 0 \qquad f' \neq 0 \Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R})$

QUINDI CONVERGE

Se il punto iniziale é $\emptyset$? Graficamente vedo che mi basta un'iterazione per trovarmi in $(\alpha, 1]$

$x = g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$

Prendiamo il metodo

$x_{k+1} = g(x_k)$

CONVERGE?

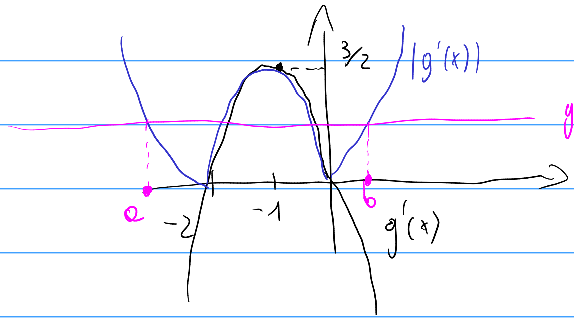
$|g'(\alpha)| = ?$ $\rightarrow$ $g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$

$|g'(x)| < 1$?

$g'(x) = 0 \iff x = 0 \lor x = -2$

asse su -1

vertice $= 3/2$



$y = 1 \Rightarrow |g'(x)| < 1$ quando è compreso tra a e b

$|g'(x)| < 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{3}{2}x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 = 0$

$\Updownarrow$

$3x^2 + 6x - 2 = 0$

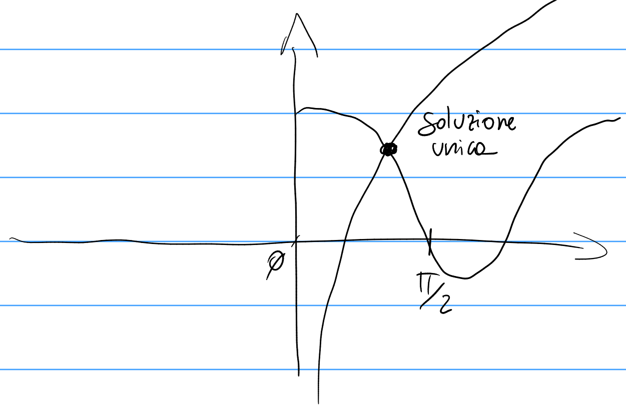
$a, b = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}$

Esercizio 2

$$3\log x - \cos x = \emptyset$$

Separazione grafica

$$3\log x = \cos x$$



Esercizio 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

① Per quali valori A é predominante diagonale?

Prima riga: $1 > (n-1)|\beta| \Leftrightarrow |\beta| < \frac{1}{n-1}$

Ultima riga: $1 > (n-1)|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{n-1}$

Altre righe: $k|\alpha| + h|\beta| \qquad h + k = n-1$

$$k|\alpha| + h|\beta| < \frac{1}{n-1}k + \frac{1}{n-1}h \leq \frac{k+h}{n-1} = 1$$

$$J = I^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -\beta & \cdots & -\beta \\ -\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\beta \\ -\alpha & \cdots & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

② Per quali valori di α e β $\|J\|_\infty < \frac{1}{2}$

$$(n-1)|\beta| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\beta| < \frac{1}{2(n-1)}$$

$$(n-1)|\alpha| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{2(n-1)}$$

$$k|\alpha| + h|\beta| < \frac{1}{2}$$

③ $e^{(k)} = P^k \cdot e^{(0)} \rightarrow \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|P\|^{(0)} \rightarrow \frac{\|e^{(k)}\|_\infty}{\|e^{(0)}\|_\infty} \leq \|J\|^K < \left(\frac{1}{2}\right)^K \qquad K = 32$

④ Costo computazionale per il metodo di Jacobi?

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} & -\beta & \cdots & -\beta \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\beta \\ -\alpha & \cdots & -\alpha & \end{bmatrix} x^{(k)}}_{\text{Posso fare questo prodotto in } O(n) \text{ passi}} + b \longrightarrow O(n)$$

In ogni caso non superiamo il numero di elementi diversi da zero (per questo esercizio n^2)