FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 5

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Sia $A = \{a, c, g, t\}$ l'alfabeto del DNA. Sia $L \subseteq A^\star$ il linguaggio di tutte e sole le stringhe in cui ogni occorrenza del simbolo a è seguita da cg. Ad esempio, ε, cc, $ccacgt$, $tacggacgt$ appartengono ad L, mentre a, acc $ccagct$, $acgctact$ non appartengono ad L.

- Progettare un automa a stati finiti in cui uno stato accetta esattamente il linguaggio L;
- Progettare una grammatica libera da contesto in cui un simbolo non terminale (o categoria sintattica) genera esattamente il linguaggio L.

ESERCIZIO 2

Utilizzando i seguenti quattro simboli proposizionali **A** per "Angela viene alla festa", **B** per "Bruno viene alla festa", **C** per "Carla viene alla festa" e **D** per "Davide viene alla festa", si formalizzino le seguenti proposizioni:

1. "Angela viene alla festa, ma Bruno no"
2. "Carla viene alla festa se non vengono Angela e Bruno"
3. "Carla viene alla festa solo se viene Davide, ma se viene Davide allora Bruno non viene"

ESERCIZIO 3

Dimostrare **per sostituzione** che le seguenti proposizioni sono tautologie. Si ricorda che P è una tautologia se e solo se $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$ è una tautologia.

1. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
2. $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$
3. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

ESERCIZIO 4

Dimostrare che per ogni alfabeto A, per ogni automa $\mathcal{A} = (S, T, F)$ sull'alfabeto A, per ogni stato $x \in S$, simbolo $a \in A$ e stringa $w \in A^\star$ vale che:

1. $\varepsilon \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ se e solo se $x \in F$;
2. $aw \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ se e solo se esiste $y \in S$ tale che $(x, y) \in T_a$ e $w \in \langle\!\langle y \rangle\!\rangle$.

ESERCIZIO 5

Per ognuna delle seguenti proposizioni dire se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di nessuna delle due. Motivare la risposta, mostrando un controesempio se non è una tautologia o una contraddizione, e una dimostrazione per sostituzione se lo è. In particolare, si ricorda che P è una tautologia sse $P \Leftrightarrow \mathsf{T}$ è una tautologia, mentre P è una contraddizione se e solo se $P \Leftrightarrow \mathsf{F}$ è una tautologia.

1. $P \Rightarrow P \wedge Q$
2. $(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \Rightarrow R)$
3. $(\neg Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$

ESERCIZIO 6

Si ricordi la definizione di grammatica corrispondente ad un automa (Definizione 8.4.1 nelle dispense). e si osservi che per qualsiasi grammatica $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (S_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}})$ corrispondente ad un automa $\mathcal{A}$ vale che per tutti gli $\langle x\rangle \in S_{\mathcal{A}}$, $a \in A$ e $w \in A^\star$:

(O1) $\varepsilon \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle$ se e solo se $\langle x\rangle \rightsquigarrow \varepsilon \quad \in P_{\mathcal{A}}$;

(O2) $aw \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle$ se e solo se esiste $\langle y\rangle \in S_{\mathcal{A}}$ tale che $\langle x\rangle \rightsquigarrow a\langle y\rangle \quad \in P_{\mathcal{A}}$ e $w \in \langle\!\langle \langle y\rangle \rangle\!\rangle$.

Utilizzando i due punti di tale osservazione ed i due punti dell'Esercizio 4, dimostrare per induzione il Teorema 8.4.4 delle dispense, cioè che per tutti gli automi $\mathcal{A} = (S, T, F)$, gli stati $x \in S$ e tutti le parole $w \in A^\star$ vale che

$$w \in \langle\!\langle x \rangle\!\rangle \text{ se e solo se } w \in \langle\!\langle \langle x\rangle \rangle\!\rangle.$$

SOLUZIONI PROPOSTE

Attenzione: le soluzioni degli esercizi sono presentate nel seguente ordine: 1, 4, 6, 2, 5 e 3.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

- Un possibile automa $\mathcal{A} = (S, T, F)$ definito sull'alfabeto $A = \{a, c, g, t\}$ è dato da:
  - $S = \{1,\ 2,\ 3\}$;
  - $T = \{((x, 1), 1) \mid x \in A \setminus \{a\}\} \cup \{((a, 1), 2),\ ((c, 2), 3),\ ((g, 3), 1)\}$;
  - $F = \{1\}$.

  Una sua rappresentazione grafica:

$$\begin{tikzcd} \overline{1} \arrow[loop left, "{c,g,t}"] \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

- Utilizzando la costruzione della grammatica corrispondente all'automa $\mathcal{A}$ si ottiene: $S_{\mathcal{A}} = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle\}$ e $P_{\mathcal{A}}$ le seguenti produzioni.

$$\begin{array}{lcl} \langle 1\rangle & \leadsto & \varepsilon \mid c\langle 1\rangle \mid g\langle 1\rangle \mid t\langle 1\rangle \mid a\langle 2\rangle \\ \langle 2\rangle & \leadsto & c\langle 3\rangle \\ \langle 3\rangle & \leadsto & g\langle 1\rangle \end{array}$$

- Un'altra possibile (più compatta) grammatica libera da contesto è $\mathcal{G} = (S, P)$ con $S = \{\langle Seq\rangle\}$ e produzioni

$$\langle Seq\rangle \quad \leadsto \quad \varepsilon \mid c \mid g \mid t \mid acg \mid \langle Seq\rangle\langle Seq\rangle$$

  si verifica facilmente che $L = \langle\!\langle \langle Seq\rangle \rangle\!\rangle$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Ricordiamo che per ogni $x \in S$

$$\langle\!\langle x\rangle\!\rangle = \{w \in A^* \mid \exists y \in F,\ (x, y) \in T_w\}$$

e ricordiamo la definizione induttiva di T_w:

[Clausola base] $T_\varepsilon = id_S$.

[Clausola induttiva] $T_{aw} = T_a; T_w$.

1. Vediamo le due implicazioni:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon \in \langle\!\langle x\rangle\!\rangle & \Rightarrow & \exists y \in F \text{ tale che } (x, y) \in T_\varepsilon & (\text{Definizione di } \langle\!\langle x\rangle\!\rangle) \\ & \Rightarrow & x = y & (T_\varepsilon = id_S) \\ & \Rightarrow & x \in F & \end{array}$$

   Viceversa, osserviamo che sicuramente $(x, x) \in T_\varepsilon$. Se inoltre $x \in F$, allora $\varepsilon \in \langle\!\langle x\rangle\!\rangle$ per definizione, come volevamo.

2. Segue dalle definizioni e dal fatto che si può ridenominare una variabile quantificata:

$$\begin{array}{llll} aw \in \langle\!\langle x\rangle\!\rangle & \iff & \exists y \in F\ .\ (x, y) \in T_{aw} & (\text{Definizione di } \langle\!\langle x\rangle\!\rangle) \\ & \iff & \exists y \in F\ .\ (x, y) \in T_a; T_w & (\text{Definizione di } T_{aw}) \\ & \iff & \exists y \in F,\ \exists z \in S\ .\ (x, z) \in T_a\ \wedge\ (z, y) \in T_w & (\text{Composizione di relazioni}) \\ & \iff & \exists z \in S\ .\ (x, z) \in T_a \wedge w \in \langle\!\langle z\rangle\!\rangle & (\text{Definizione di } \langle\!\langle z\rangle\!\rangle) \\ & \iff & \exists y \in S\ .\ (x, y) \in T_a \wedge w \in \langle\!\langle y\rangle\!\rangle & (\alpha\text{-conversione}) \end{array}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Sia $\mathcal{A} = (S, T, F)$ un generico automa ed $x \in S$ uno stato di tale automa. Consideriamo la proprietà $P\colon A^\star \to Bool$, definita per ogni $w \in A^\star$ come $P(w) = \mathtt{t}$ se vale che

$$w \in \langle\langle x \rangle\rangle \text{ se e solo se } w \in \langle\langle \langle x \rangle \rangle\rangle.$$

Dimostriamo che per ogni $w \in A^\star$ vale $P(w)$, utilizzando l'induzione su $A^\star$.

1. [CASO BASE] $w = \varepsilon$.

$$\begin{array}{llll} \varepsilon \in \langle\langle x \rangle\rangle & \text{se e solo se} & x \in F & \text{(Esercizio 2.1)} \\ & \text{se e solo se} & \langle x \rangle \rightsquigarrow \varepsilon \;\; \in P_{\mathcal{A}} & \text{(Definizione } P_{\mathcal{A}}) \\ & \text{se e solo se} & \varepsilon \in \langle\langle \langle x \rangle \rangle\rangle & \text{(O.1)} \end{array}$$

2. [PASSO INDUTTIVO] $w = aw'$.

$$\begin{array}{llll} aw' \in \langle\langle x \rangle\rangle & \text{se e solo se} & (x, y) \in T_a \text{ e } w' \in \langle\langle y \rangle\rangle & \text{(Esercizio 2.2)} \\ & \text{se e solo se} & \langle x \rangle \rightsquigarrow a\langle y \rangle \;\; \in P_{\mathcal{A}} \;\text{ e } w' \in \langle\langle y \rangle\rangle & \text{(Definizione } P_{\mathcal{A}}) \\ & \text{se e solo se} & \langle x \rangle \rightsquigarrow a\langle y \rangle \;\; \in P_{\mathcal{A}} \;\text{ e } w' \in \langle\langle \langle y \rangle \rangle\rangle & \text{(Ipotesi induttiva)} \\ & \text{se e solo se} & aw' \in \langle\langle \langle x \rangle \rangle\rangle & \text{(O.2)} \end{array}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Utilizzando i quattro simboli proposizionali dati

- **A** per "Angela viene alla festa"
- **B** per "Bruno viene alla festa"
- **C** per "Carla viene alla festa"
- **D** per "Davide viene alla festa"

dobbiamo costruire le formule collegando le occorrenze dei simboli proposizionali con connettivi logici, suggeriti dalle congiunzioni linguistiche, in modo da rispecchiare fedelmente il significato originale.

Può essere utile completare le frasi (vedi parte tra parentesi), evidenziare le proposizioni (vedi riquadri) elementari o elementari negate e le congiunzioni (vedi parti in corsivo).

1. "$\boxed{\text{Angela viene alla festa}}$, *ma* $\boxed{\text{Bruno } \textit{no} \text{ (ovvero Bruno } \textit{non} \text{ viene alla festa)}}$"

   Rendiamo *ma* con il connettivo $\wedge$ e *non* con il connettivo $\neg$. La proposizione si formalizza allora come:

$$\mathbf{A} \;\wedge \neg \mathbf{B}$$

2. "Carla viene alla festa se non vengono Angela e Bruno"

   Anche se il lettore potrebbe intepretare in modo univoco questa frase, dal confronto con più persone risulta che la frase può essere interpretata in due modi:

   a) Carla viene alla festa se non vengono né Angela né Bruno

   b) Carla viene alla festa se non viene almeno uno tra Angela e Bruno

   Si tratta quindi di una frase ambigua in italiano, e questo ha un effetto immediato sulla sua formalizzazione, perchè alle due interpretazioni corrispondono formule proposizionali diverse e non equivalenti. La formalizzazione in logica di frasi in linguaggio naturale ha in effetti anche il vantaggio di evidenziare ambiguità per esempio nella fase di analisi dei requisiti del software. Nel caso specifico abbiamo quindi due possibili formalizzazioni:

   a) In questo caso "*non* vengono (alla festa) angela *e* Bruno" indica che né Angela, né Bruno vengono alla festa. La congiunzione *e* viene resa con il connettivo $\wedge$. La presenza di *se* deve far pensare ad una implicazione, anche se non troviamo *allora*. Non ci si faccia ingannare dall'ordine delle due proposizioni elementari. Si provi in questi casi ad invertirlo:
      "*se* $\boxed{\textit{non}\text{ vengono (alla festa) Angela }\textit{e}\text{ Bruno}}$ (*allora*) $\boxed{\text{Carla viene alla festa}}$"
      La proposizione si formalizza allora come:

      $$\neg\,\mathbf{A} \wedge \neg\,\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$$

   b) In questo caso "*non* vengono Angela e Bruno" viene interpretato come "*non* viene Angela oppure non viene Bruno". Quindi con un ragionamento analogo al caso precedente la proposizione si formalizza allora come:

      $$\neg\,\mathbf{A} \vee \neg\,\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$$

      Si noti che $\neg\,\mathbf{A} \vee \neg\,\mathbf{B}$ è logicamente equivalente a $\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$

3. "$\boxed{\text{Carla viene alla festa}}$ *solo se* $\boxed{\text{viene Davide (cioè viene alla festa)}}$, *ma se* $\boxed{\text{viene Davide}}$ *allora* $\boxed{\text{Bruno }\textit{non}\text{ viene (cioè Bruno viene alla festa)}}$"

   Dire che "P *solo se* Q" è un altro modo di dire "P *implica* Q". Anche la presenza di *se* e di *allora* ci porta ad avere una implicazione e, come prima, rendiamo *ma* con il connettivo $\wedge$ e *non* con il connettivo $\neg$.

   La proposizione si formalizza allora come:

   $$(\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}) \wedge (\mathbf{D} \Rightarrow \neg\,\mathbf{B})$$

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 5</u>

1. $P \Rightarrow P \wedge Q$

   - La proposizione non può essere una tautologia, dato che è possibile individuare valori delle variabili proposizionali che la rendono falsa. Prendendo infatti l'interpretazione $\{P \mapsto \mathsf{T}, Q \mapsto \mathsf{F}\}$, ottengo F.
   - La proposizione non può essere nemmeno una contraddizione, dato che è possibile individuare valori delle variabili proposizionali che la rendono vera. Prendendo infatti l'interpretazione $\{P \mapsto \mathsf{T}, Q \mapsto \mathsf{T}\}$ ottengo T.

2. $(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \Rightarrow R)$ con l'interpretazione $\{P \mapsto \mathsf{T}, Q \mapsto \mathsf{T}, R \mapsto \mathsf{T}\}$ ottengo T e quindi non può essere una contraddizione. Si tratta invece di una tautologia, ovvero di una formula che vale **T** per qualunque valore assegnato alle variabili. Per dimostrarlo, si può procedere, costruendo una dimostrazione, basata sulle leggi introdotte a lezione. Procediamo quindi per sostituzione. Nel seguito si usa la sottolineatura per evidenziare a quale parte della formula si applica la legge indicata:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)} \vee (Q \Rightarrow R) \\
\Leftrightarrow & \text{(Distrib.), al contrario} \\
 & (Q \wedge \underline{(P \vee \neg P)}) \vee (Q \Rightarrow R) \\
\Leftrightarrow & \text{(Terzo Escluso)} \\
 & \underline{(Q \wedge \mathsf{T})} \vee (Q \Rightarrow R) \\
\Leftrightarrow & \text{(Elemento Neutro)} \\
 & Q \vee \underline{(Q \Rightarrow R)} \\
\Leftrightarrow & \text{(Elim-}\Rightarrow\text{)} \\
 & \underline{Q \vee (\neg Q \vee R)} \\
\Leftrightarrow & \text{(Assoc.)} \\
 & \underline{(Q \vee \neg Q)} \vee R \\
\Leftrightarrow & \text{(Terzo Escluso)} \\
 & \underline{\mathsf{T} \vee R} \\
\Leftrightarrow & \text{(Elemento Assorbente)} \\
 & \mathsf{T}
\end{array}
$$

3. $(\neg Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)) \Rightarrow R$ con l'interpretazione $\{P \mapsto \mathsf{F}, Q \mapsto \mathsf{F}, R \mapsto \mathsf{F}\}$ ottengo F e quindi non può essere una tautologia; non può essere nemmeno una contraddizione, basti prendere l'interpretazione $\{P \mapsto \mathsf{T}, Q \mapsto \mathsf{T}, R \mapsto \mathsf{T}\}$ che ci fa ottenere T.

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 3</u>

Procediamo per sostituzione.

1. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q} \\
\Leftrightarrow & \text{(Elim-}\Rightarrow\text{)} \\
 & \underline{\neg(\neg P \wedge (P \vee Q))} \vee Q \\
\Leftrightarrow & \text{(De Morgan), (Doppia Neg.)} \\
 & P \vee \underline{\neg(P \vee Q)} \vee Q \\
\Leftrightarrow & \text{(De Morgan)} \\
 & \underline{P \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee Q \\
\Leftrightarrow & \text{(Compl.)} \\
 & \underline{(P \vee \neg Q) \vee Q} \\
\Leftrightarrow & \text{(Ass.)} \\
 & P \vee \underline{(\neg Q \vee Q)} \\
\Leftrightarrow & \text{(Terzo escluso)} \\
 & \underline{P \vee \mathsf{T}} \\
\Leftrightarrow & \text{(Elemento Ass.)} \\
 & \mathsf{T}
\end{array}
$$

2. $(P \Rightarrow Q) \lor (R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \Rightarrow S) \lor (R \Rightarrow Q)$

   Procedo sviluppando il termine a sinistra, il che mi riconduce al termine a destra, dimostrandone così l'equivalenza.

   $\quad \underline{(P \Rightarrow Q)} \lor \underline{(R \Rightarrow S)}$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \underline{(\neg P \lor Q) \lor (\neg R \lor S)}$

   $\Leftrightarrow$ (Ass. e Comm.)

   $\quad \underline{(\neg P \lor S)} \lor \underline{(\neg R \lor Q)}$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$) al contario, due volte

   $\quad (P \Rightarrow S) \lor (R \Rightarrow Q)$

3. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

   $\quad \underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \neg\underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)} \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \neg(\neg\underline{(P \Rightarrow Q)} \lor P) \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \neg\underline{(\neg(\neg P \lor Q)} \lor P) \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (De Morgan e Doppia Neg.)

   $\quad \underline{\neg((P \land \neg Q) \lor P)} \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (De Morgan)

   $\quad (\underline{\neg(P \land \neg Q)} \land \neg P) \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (De Morgan e Doppia Neg.)

   $\quad \underline{((\neg P \lor Q) \land \neg P) \lor P}$

   $\Leftrightarrow$ (Comm. e Compl.)

   $\quad \underline{(P \lor (\neg P \lor Q))}$

   $\Leftrightarrow$ (Ass.)

   $\quad \underline{(P \lor \neg P)} \lor Q$

   $\Leftrightarrow$ (Terzo Escluso)

   $\quad \underline{\mathsf{T} \lor Q}$

   $\Leftrightarrow$ (Elem. Ass.)

   $\quad \mathsf{T}$

   Alternativamente e più rapidamente potremmo invece avere il seguente sviluppo, dove la legge *Eliminazione dell'implicazione negata (Neg-$\Rightarrow$)* consente di ridurre il numero di passaggi:

   $\quad \underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \underline{\neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)} \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (Neg-$\Rightarrow$)

   $\quad ((P \Rightarrow Q) \land \neg P) \lor P$

   $\Leftrightarrow$ (Elim-$\Rightarrow$)

   $\quad \underline{((\neg P \lor Q) \land \neg P) \lor P}$

$\Leftrightarrow$ (Comm. e Compl.)

$\underline{(P \lor (\neg P \lor Q))}$

$\Leftrightarrow$ (Ass.)

$\underline{(P \lor \neg P)} \lor Q$

$\Leftrightarrow$ (Terzo Escluso)

$\underline{\mathsf{T} \lor Q}$

$\Leftrightarrow$ (Elem. Ass.)

T