Esercizio 1. In ciascuni i casi seguenti, determinare se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e se il vettore v è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3. Nel caso favorevole calcolare le coordinate.

$$a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. (Problema di compito recente) Per quali valori del parametro a le matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali?

Esercizio 3. (Problema di compito recente) Per quali valori del parametro reale a i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti?

Esercizio 4. Siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e $W := \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$.

Calcolare la dimensione di W.