FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 1

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Si osservi che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \,.\, (x < y \wedge y < 2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2-x} < \frac{1}{2-y} \tag{1}$$

cioè per tutti i numeri reali x e y, se x è minore di y ed y è minore di 2, allora $\frac{1}{2-x} < \frac{1}{2-y}$. Si consideri poi, la funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita induttivmente come:

- Clausola Base: $f(0) = \frac{1}{2}$.
- Clausola Induttiva: $f(n+1) = \frac{1}{2-f(n)}$.

A titolo esemplificativo valutiamo la funzione su qualche caso:

$$f(1) = f(0+1) = \frac{1}{2-f(0)} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = f(1+1) = \frac{1}{2-f(1)} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$f(3) = f(2+1) = \frac{1}{2-f(2)} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

Utilizzando l'osservazione (1) ed il principio di induzione, dimostrare che

1. $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, f(n) < 1$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, f(n) \geq \frac{1}{2}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, f(n+1) > f(n)$.

ESERCIZIO 2

Fornire una dimostrazione discorsiva o per sostituzione del seguente enunciato:

per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$ vale che: $R^{op} \cap Id_A = (R \cap Id_A)^{op}$.

ESERCIZIO 3

Fornire un controesempio al seguente enunciato:

per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$ vale che: $R \subseteq R; R$.

ESERCIZIO 4

Per ognuno dei seguenti enunciati dire se è vero: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva o per sostituzione (utilizzando le leggi viste fin'ora); in caso negativo fornire un controesempio.

1. Per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in \mathit{Rel}(A, A)$ vale che: $R \subseteq (Id_A \cup R); R$.
2. Per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in \mathit{Rel}(A, A)$ vale che: $R \subseteq (Id_A \cap R); R$.

ESERCIZIO 5

Sia A un insieme. Siano $\varnothing_{\varnothing,A} \in \mathit{Rel}(\varnothing, A)$ e $\varnothing \times A \in \mathit{Rel}(\varnothing, A)$, rispettivamente, le relazioni vuota e completa tra $\varnothing$ e A.

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione; in caso negativo un controesempio.

1. $\varnothing_{\varnothing,A} = \varnothing \times A$;
2. $\varnothing_{\varnothing,A}$ è una funzione da $\varnothing$ ad A.
3. $\varnothing \times A$ è una funzione da $\varnothing$ ad A.

Inoltre si risponda alle seguenti domande:

4. Quante sono le relazioni da $\varnothing$ ad A?
5. Quante sono le funzioni da $\varnothing$ ad A?
6. Quante sono le funzioni da A a $\varnothing$?
7. Quante sono le funzioni da A a 1? (Si ricorda che 1 è l'insieme $\{0\}$.)

ESERCIZIO 6*

Dimostrare che per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: $\mathit{Fun}(A \times B, C) \cong \mathit{Fun}(A, \mathit{Fun}(B, C))$.

SOLUZIONI PROPOSTE

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Sia P la proprietà sui numeri naturali dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale (cioè $P(n) = \mathtt{t}$) se e solo se
$$f(n) < 1$$
Dimostriamo $\forall n \in \mathbb{N} \, . \, P(n)$ utilizzando il principio di induzione.

   - Caso Base: Dobbiamo dimostrare $P(0)$, cioè che $f(0) < 1$. Basta osservare che
$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} && \text{(Clausola base)} \\ &< 1 && \text{(Calcolo)} \end{aligned}$$

   - Passo Induttivo: Dobbiamo dimostrare $\forall n \in \mathbb{N} \, . \, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè che se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$ per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, dobbiamo dimostrare $P(n+1)$, cioè che $f(n+1) < 1$, utilizzando come ipotesi $P(n)$, cioè $f(n) < 1$ (questa è chiamata ipotesi induttiva). Si procede come segue
$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{1}{2 - f(n)} && \text{(Clausola induttiva)} \\ &< \frac{1}{2-1} && \text{(Ipotesi induttiva) e (1)} \\ &= 1 && \text{(Calcolo)} \end{aligned}$$
   Si osservi che nel secondo passaggio, è necessario usare sia l'ipotesi induttiva ($f(n) < 1$) che l'osservazione (1), per dedurre che $\frac{1}{2-f(n)} < \frac{1}{2-1}$. Per essere del tutto formali è opportuno specificare che, per utilizzare l'osservazione (1), è necessario sapere che $f(n) < 2$ ma questo è banalmente vero grazie all'ipotesi induttiva.

2. Prima di illustrare la dimostrazione, è opportuno sottolineare che dall'osservazione (1) si può derivare facilmente
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \, . \, x \leq y \wedge y < 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2-y} \tag{2}$$
Infatti se $x \leq y$, allora ci sono due casi: $x < y$ oppure $x = y$. Nel primo caso si può utilizzare l'osservazione (1) per dedurre $\frac{1}{2-x} < \frac{1}{2-y}$ e quindi $\frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2-y}$. Nel secondo caso, vale chiaramente $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-y}$.

   Sia P la proprietà sui numeri naturali dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale (cioè $P(n) = \mathtt{t}$) se e solo se
$$f(n) \geq \frac{1}{2}$$
Dimostriamo $\forall n \in \mathbb{N} \, . \, P(n)$ utilizzando il principio di induzione.

- Caso Base: Dobbiamo dimostrare $P(0)$, cioè che $f(0) \geq \frac{1}{2}$. Basta osservare che

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} && \text{(Clausola base)} \\ &\geq \frac{1}{2} && \text{(Calcolo)} \end{aligned}$$

- Passo Induttivo: Dobbiamo dimostrare $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè che se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$ per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, dobbiamo dimostrare $P(n+1)$, cioè che $f(n+1) \geq \frac{1}{2}$, utilizzando come ipotesi $P(n)$, cioè $f(n) \geq \frac{1}{2}$ (questa è chiamata ipotesi induttiva). Si procede come segue

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{1}{2 - f(n)} && \text{(Clausola induttiva)} \\ &\geq \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} && \text{(Ipotesi induttiva) (2)} \\ &= \frac{1}{(\frac{3}{2})} && \text{(Calcolo)} \\ &= \frac{2}{3} && \text{(Calcolo)} \\ &\geq \frac{1}{2} && \text{(Calcolo)} \end{aligned}$$

  Si osservi che nel secondo passaggio, è necessario usare sia l'ipotesi induttiva ($f(n) \geq \frac{1}{2}$) che l'osservazione (2), per dedurre che $\frac{1}{2-f(n)} \geq \frac{1}{2-\frac{1}{2}}$. Per essere del tutto formali è opportuno specificare che, per utilizzare l'osservazione (2), è necessario sapere che $f(n) < 2$ ma questo è vero grazie al punto 1 provato sopra.

3. Sia P la proprietà sui numeri naturali dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale (cioè $P(n) = \mathtt{t}$) se e solo se

$$f(n+1) > f(n)$$

Dimostriamo $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$ utilizzando il principio di induzione.

- Caso Base: Dobbiamo dimostrare $P(0)$, cioè che $f(0+1) > f(0)$. Basta osservare che

$$\begin{aligned} f(0+1) &= \frac{1}{2 - f(0)} && \text{(Clausola induttiva)} \\ &> \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} && \text{(Clausola base)} \\ &= \frac{2}{3} && \text{(Calcolo)} \\ &> \frac{1}{2} && \text{(Calcolo)} \\ &= f(0) && \text{(Clausola base)} \end{aligned}$$

- Passo Induttivo: Dobbiamo dimostrare $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè che se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$ per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, dobbiamo dimostrare $P(n+1)$, cioè che $f((n+1)+1) > f(n+1)$, utilizzando come ipotesi $P(n)$, cioè $f(n+1) > f(n)$ (questa è chiamata ipotesi induttiva). Si procede come segue

$$\begin{aligned} f((n+1)+1) &= \frac{1}{2 - f(n+1)} && \text{(Clausola induttiva)} \\ &> \frac{1}{2 - f(n)} && \text{(Ipotesi induttiva) e (1)} \\ &= f(n+1) && \text{(Clausola Induttiva)} \end{aligned}$$

Si osservi che nel secondo passaggio, è necessario usare sia l'ipotesi induttiva ($f(n+1) > f(n)$) che l'osservazione (1), per dedurre che $\frac{1}{2-f(n+1)} > \frac{1}{2-f(n)}$. Per essere del tutto formali è opportuno specificare che, per utilizzare l'osservazione (1), è necessario sapere che $f(n+1) < 2$ ma questo è vero grazie al punto 1 provato sopra.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

L'equivalenza $R^{op} \cap Id_A = (R \cap Id_A)^{op}$ vale per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$. Illustriamo una dimostrazione discorsiva: dimostriamo le inclusioni $R^{op} \cap Id_A \subseteq (R \cap Id_A)^{op}$ e $(R \cap Id_A)^{op} \subseteq R^{op} \cap Id_A$ separatamente e concludiamo per antisimmetria di $\subseteq$.

- $R^{op} \cap Id_A \subseteq (R \cap Id_A)^{op}$. Dobbiamo dimostrare che una qualsiasi coppia $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A$, appartiene anche a $(R \cap Id_A)^{op}$, in altre parole, se $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A$, allora $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$ (in simboli $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A \Rightarrow (x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$).

  Prendiamo una coppia generica $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A$. Dalla definizione di $\cap$, sappiamo che $(x, y) \in R^{op}$ *e* $(x, y) \in Id_A$ (in simboli $(x, y) \in R^{op} \wedge (x, y) \in Id_A$). Da $(x, y) \in R^{op}$ e dalla definizione di $\cdot^{op}$, sappiamo che $(y, x) \in R$. Da $(x, y) \in Id_A$ e dalla definizione di Id_A, sappiamo che $x = y$. Pertanto $(x, x) = (x, y) = (y, x) = (y, y)$. Quindi $(y, x) \in Id_A$.

  Da $(y, x) \in R$ e da $(y, x) \in Id_A$, per definizione di $\cap$ si ha che $(y, x) \in R \cap Id_A$. Dalla definizione di $\cdot^{op}$, si ha che $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$.

- $(R \cap Id_A)^{op} \subseteq R^{op} \cap Id_A$. Dobbiamo dimostrare che una qualsiasi coppia $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$, appartiene anche a $R^{op} \cap Id_A$, in altre parole, se $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$, allora $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A$ (in simboli $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op} \Rightarrow (x, y) \in R^{op} \cap Id_A$).

  Prendiamo una coppia generica $(x, y) \in (R \cap Id_A)^{op}$. Dalla definizione di $\cdot^{op}$ sappiamo che $(y, x) \in (R \cap Id_A)$. Pertanto, dalla definizione di $\cap$, sappiamo che $(y, x) \in R$ *e* $(y, x) \in Id_A$ (in simboli $(y, x) \in R \wedge (y, x) \in Id_A$). Da $(y, x) \in Id_A$ e dalla definizione di Id_A, sappiamo che $y = x$. Pertanto $(x, x) = (x, y) = (y, x) = (y, y)$. Quindi $(x, y) \in Id_A$.

  Da $(y, x) \in R$, per definizione di $\cdot^{op}$, sappiamo che $(x, y) \in R^{op}$. Da $(x, y) \in R^{op}$ e $(x, y) \in Id_A$, per definizione di $\cap$, si ha che $(x, y) \in R^{op} \cap Id_A$.

Illustriamo di seguito una dimostrazione per sostituzione utilizzando le regole nelle Tabelle 2.1-6 delle dispense.

$$\begin{aligned} R^{op} \cap Id_A &= R^{op} \cap Id_A^{op} && \text{(op-id)} \\ &= (R \cap Id_A)^{op} && \text{(distributività di } \cdot^{op} \text{ su } \cup) \end{aligned}$$

Si noti quanto la dimostrazione per sostituzione sia più concisa di quella discorsiva.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

L'inclusione $R \subseteq R; R$ non vale per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$. Prendiamo come controesempio $A = \{a, b\}$ e $R = \{(a, b)\}$. Si ha che $\{(a, b)\} \not\subseteq \{\} = \{(a, b)\} \,;\, \{(a, b)\}$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

1. VERO. L'inclusione $R \subseteq (Id_A \cup R); R$ vale per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$. Illustriamo una dimostrazione discorsiva:

   - $R \subseteq (Id_A \cup R); R$. Dobbiamo dimostrare che una qualsiasi coppia $(x, y) \in R$, appartiene anche a $((Id_A \cup R); R$, in altre parole, se $(x, y) \in R$, allora $(x, y) \in (Id_A \cup R); R$ (in simboli $(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in (Id_A \cup R); R)$.
     Prendiamo una coppia generica $(x, y) \in R$. Dal momento che $(x, y) \in Rel(A, A)$, si ha che $x \in A$ e $y \in A$.
     Dalla definizione di Id_A, si ha che $(x, x) \in Id_A$. Per definizione di unione $(x, x) \in (Id_A \cup R)$.
     Dal momento che $(x, x) \in (Id_A \cup R)$ e $(x, y) \in R$, dalla definizione di ; si ha che $(x, y) \in (Id_A \cup R); R$.

   Illustriamo adesso una dimostrazione per sostituzione:

$$\begin{aligned} R &\subseteq R \cup R; R && (\dagger) \\ &= Id_A; R \cup R; R && \text{(unità)} \\ &= (Id_A \cup R)\,;\, R && \text{(distributività di ; su } \cup) \end{aligned}$$

   Il primo passaggio, etichettato con (†) è ovvio: infatti per tutti gli insiemi A e B vale che $A \subseteq A \cup B$.

2. FALSO. L'inclusione $R \subseteq (Id_A \cap R); R$ non vale per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$. Prendiamo come controesempio $A = \{a, b\}$ e $R = \{(a, b)\}$. Si ha che $Id_A \cap R = \{(a, a), (b, b)\} \cap \{(a, b)\} = \{\} = \varnothing_{A,A}$ e quindi $(Id_A \cap R); R = \varnothing_{A,A}; R = \varnothing_{A,A}$. Chiaramente $R = \{(a, b)\} \not\subseteq \{\} = \varnothing_{A,A} = (Id_A \cap R); R$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

1. Vero: basta osservare che per ogni insieme A, $\varnothing \times A = \varnothing$.
2. Vero: Per dimostrare che $\varnothing_{\varnothing,A} \in Rel(\varnothing, A)$ è una funzione dobbiamo dimostrare che è totale e univalente.

   a) Ricordiamo che una relazione R è *totale* se per ogni elemento a dell'insieme di partenza esiste almeno un elemento b dell'insieme di arrivo tale che $(a, b) \in R$. Visto che in $\varnothing_{\varnothing,A}$ l'insieme di partenza è vuoto, non esiste alcun elemento a. Quindi non c'è niente da verificare e la proprietà vale immediatamente.
   b) Ricordiamo che una relazione R è *univalente* se per ogni elemento a dell'insieme di partenza esiste al più un elemento dell'insieme di arrivo b, tale che $(a, b) \in R$. Visto che in $\varnothing_{\varnothing,A}$ l'insieme di partenza è vuoto, non esiste alcun elemento a. Quindi non c'è niente da verificare e la proprietà vale immediatamente.

3. Vero: al primo punto abbiamo dimostrato che $\varnothing_{\varnothing,A} = \varnothing \times A$ e, al secondo punto che $\varnothing_{\varnothing,A}$ è una funzione. Quindi anche $\varnothing \times A$ à una funzione.

4. La risposta è 1. Infatti $\varnothing \times A = \varnothing$ ed esiste un solo sottoinsieme dell'insieme vuoto: l'insieme vuoto stesso.

5. La risposta è 1. Infatti la relazione vuota $\varnothing_{\varnothing,A}$ è, per quanto visto sopra, una funzione. Non essendoci altre relazioni con ci sono neppure altre funzioni.

6. La risposta è se $A = \varnothing$, allora 1, altrimenti 0.

   Infatti se $A = \varnothing$, allora dall'esercizio precedente (che vale per ogni insieme A e quindi in particolare anche per $A = \varnothing$), c'è esattamente una funzione.

   Se $A \neq \varnothing$, si osserva che la relazione vuota è la sola relazione tra A e $\varnothing$, ma questa non è una funzione da A a $\varnothing$ in quanto non è totale (in A c'è almeno un elemento).

7. La risposta è 1. Si ricorda che $1 = \{0\}$. La relazione $\{(a, 0) \mid a \in A\} \subseteq A \times 1$ è totale ed univalente. E quindi è una funzione. Si osservi che tale funzione è anche l'unica $f\colon A \to 1$. Infatti per ogni $a \in A$, ci deve essere esattamente un elemento $f(a) \in 1$. Visto che l'insieme 1 contiene solamente l'elemento 0, tale elemente $f(a)$ deve essere necessariamente 0.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6*

Prima di vedere la soluzione dell'esercizio è opportuno ricordare la notazione per rappresentare le funzioni. Una funzione $f\colon A \to B$ può essere definita come

$$f(x) = E(x)$$

per una qualche espressione $E(x)$ il cui valore (in B) varia al variare di x (in A). Tale funzione può essere anche rappresentata come

$$x \mapsto E(x)$$

ma non utilizzeremo questa notazione nello svolgimento di questo esercizio. L'alternativa per rappresentare tale funzione è quella di utilizzare insiemi di coppie:

$$f = \{(a, b) \in A \times B \mid b = E(a)\}$$

Prima di cominciare, ricordiamo inoltre che date due funzioni $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ per dimostare che queste sono la stessa funzione, cioè che $f = g$, dobbiamo mostare che

$$f(x) = g(x)$$

per tutti gli $x \in X$.

Adesso iniziamo lo svolgimento dell'esercizio. Come per la biiezione tra $\mathcal{P}(A)$ e $\mathit{Fun}(A, 2)$ è conveniente cominciare con delle definizioni accessorie.

Data una funzione $f\colon A \times B \to C$ definiamo per ogni elemento $a \in A$ la funzione $f_a\colon B \to C$ come

$$f_a(b) = f(a, b) \tag{3}$$

per tutti i $b \in B$.

Data una funzione $g\colon A \to \mathit{Fun}(B, C)$, definiamo $\tilde{g}\colon A \times B \to C$ come

$$\tilde{g}(a, b) = g(a)(b) \tag{4}$$

per tutti gli $(a,b) \in A \times B$. Si noti che $g(a) \in \mathit{Fun}(B,C)$, cioè $g(a)$ è una funzione da B a C. Quindi $g(a)(b)$ denota l'elemento di C in cui b è mappato dalla funzione $g(a)$.

Procediamo adesso con la costruzione della biiezione. Definiamo una funzione i che va da $\mathit{Fun}(A \times B, C)$ a $\mathit{Fun}(A, \mathit{Fun}(B,C))$. Intuitivamente i prende una funzione $f\colon A \times B \to C$ e gli associa una funzione $i(f)\colon A \to \mathit{Fun}(B,C)$. La funzione $i(f)$ è definita come

$$i(f)(a) = f_a \tag{5}$$

per tutti gli $a \in A$.

Per dimostrare che i è una biiezione definiamo una funzione $j\colon \mathit{Fun}(A, \mathit{Fun}(B,C)) \to \mathit{Fun}(A \times B, C)$ che poi dimostremo essere l'inversa di i. Tale funzione j prende una funzione $g\colon A \to \mathit{Fun}(B,C)$ e la mappa in una funzione $j(g)\colon A \times B \to C$. Tale funzione è definita come

$$j(g) = \tilde{g} \tag{6}$$

.

Adesso dobbiamo dimostrare che j è la funzione inversa di i, cioè che $i;j = id_{\mathit{Fun}(A\times B,C)}$ e $j;i = id_{\mathit{Fun}(A,\mathit{Fun}(B,C))}$.

- Per dimostrare che $i;j = id_{\mathit{Fun}(A\times B,C)}$, dobbiamo dimostrare che per ogni $f \in \mathit{Fun}(A \times B, C)$, $i;j(f) = id_{\mathit{Fun}(A\times B,C)}(f)$. Visto che $id_{\mathit{Fun}(A\times B,C)}(f) = f$ dobbiamo dimostrare che

  $$i;j(f) = f$$

  Per dimostare che $i;j(f) = f$, dobbiamo dimostare che per tutti gli $(a,b) \in A \times B$ vale che

  $$(i;j(f))(a,b) = f(a,b)$$

  Questo si può dimostrare come segue:

  $$\begin{array}{rcll} (i;j(f))(a,b) & = & \widetilde{i(f)}(a,b) & (6) \\ & = & i(f)(a)(b) & (4) \\ & = & f_a(b) & (5) \\ & = & f(a,b) & (3) \end{array}$$

- Per dimostrare che $j;i = id_{\mathit{Fun}(A,\mathit{Fun}(B,C))}$, dobbiamo dimostrare che per ogni $g \in \mathit{Fun}(A, \mathit{Fun}(B,C))$, $j;i(g) = id_{\mathit{Fun}(A,\mathit{Fun}(B,C))}(g)$. Visto che $id_{\mathit{Fun}(A,\mathit{Fun}(B,C))}(g) = g$ dobbiamo dimostrare che

  $$j;i(g) = g$$

  Per dimostare che $j;i(g) = g$, dobbiamo dimostrare che per tutti gli $a \in A$, vale che

  $$(j;i(g))(a) = g(a)$$

  Analizziamo prima $(j;i(g))(a)\colon B \to C$. Si ha che

  $$\begin{array}{rcll} (j;i(g)) & = & i(\tilde{g})(a) & (6) \\ & = & (\tilde{g})_a & (5) \end{array}$$

  Ci manca quindi da dimostrare che $(\tilde{g})_a = g(a)$. Per dimostrare che queste due funzioni sono la stessa si deve mostrare che

  $$(\tilde{g})_a(b) = g(a)(b)$$

per ogni $b \in B$. Ma questo segue immediatamente da (4) e (3).

$$
\begin{aligned}
(\tilde{g})_a(b) &= \tilde{g}(a, b) && (4)\\
&= g(a)(b) && (3)
\end{aligned}
$$