Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 24 ottobre 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log|e^{-4x} - 5| - 6x$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo e del valore assoluto del suo argomento, l'unica condizione da imporre affinché la funzione sia definita è $e^{-4x} - 5 \neq 0$. Il dominio della funzione quindi è l'insieme $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-\log 5}{4}\}$. La funzione è continua nel suo dominio in quanto composizione e somma di funzioni continue. Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{-\log 5}{4}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Ne deduciamo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = \frac{-\log 5}{4}$. Non ha invece asintoti orizzontali. Deduciamo anche che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Controlliamo l'eventuale esistenza di asintoti obliqui a $\pm\infty$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^{-4x}) + \log(1 - 5e^{4x}) - 6x}{x} = -10$$

e controlliamo che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 10x = 0.$$

La funzione ammette quindi asintoto obliquo di equazione $y = -10x$ per x che tende a $-\infty$. Calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -6$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 6x = \log 5.$$

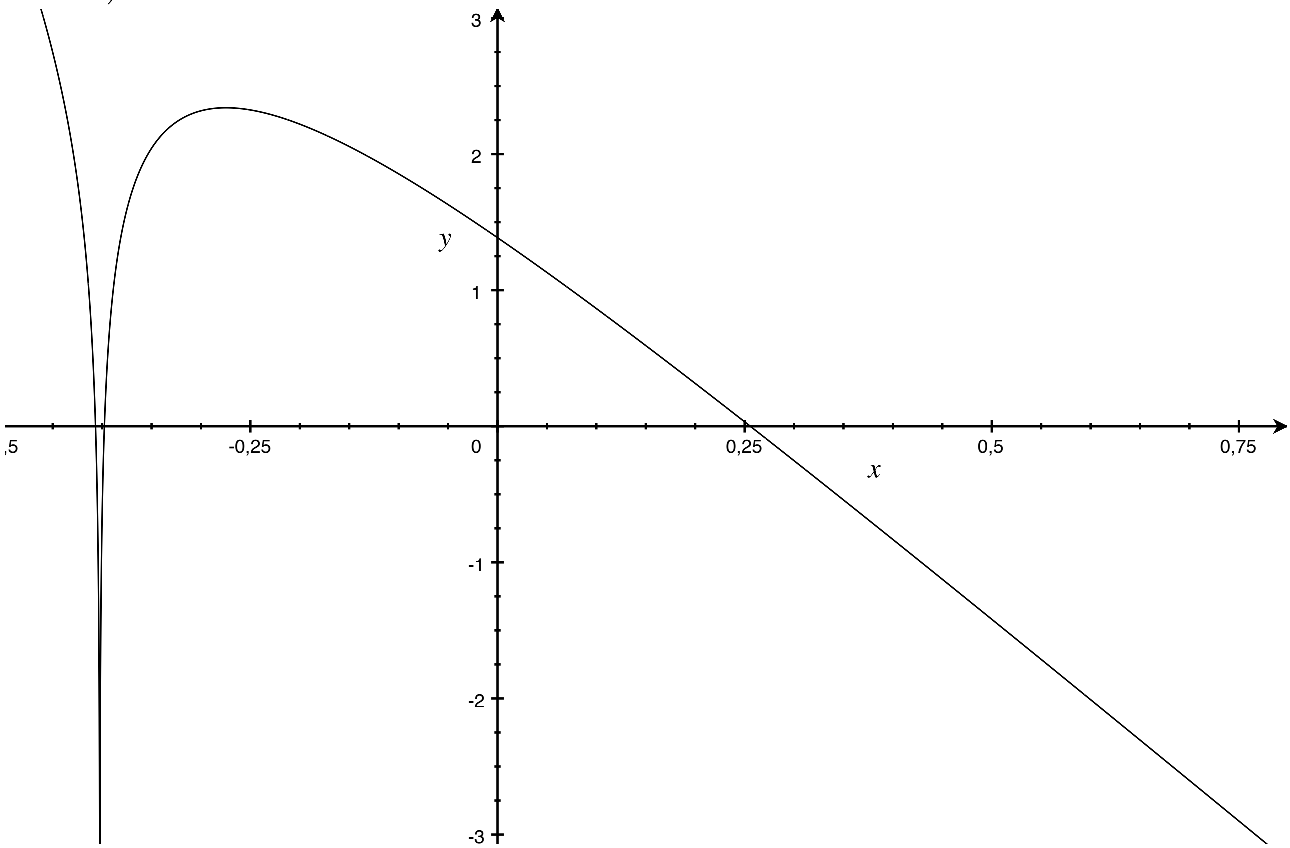
Esiste un asintoto obliquo anche per x che tende a $+\infty$ con equazione $y = -6x + \log 5$. La funzione risulta derivabile nel suo dominio perché composizione e somma di funzioni derivabili in questo dominio. Possiamo calcolare facilmente la sua derivata ed otteniamo

$$f'(x) = \frac{4}{5e^{4x} - 1} - 6$$

che esiste in tutti i punti del dominio. Ne studiamo il segno. La derivata risulta positiva per $\frac{-\log 5}{4} < x < \frac{-\log 3}{4}$, negativa per $x > \frac{-\log 3}{4}$ e si annulla per $x = \frac{-\log 3}{4}$. Ne segue che il punto $x = \frac{-\log 3}{4}$ è un punto di massimo locale. Invece per $x < \frac{-\log 5}{4}$ la derivata ha segno sempre negativo. Riassumendo, la funzione è strettamente decresecente per $x < \frac{-\log 5}{4}$, strettamente crescente per $\frac{-\log 5}{4} < x < \frac{-\log 3}{4}$ e ancora strettamente decrescente per $x > \frac{-\log 3}{4}$. Vogliamo studiare anche la convessità della funzione. A tal fine ne calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{80e^{4x}}{(5e^{4x} - 1)^2}$$

che è negativa su tutto il dominio e quindi la funzione è concava sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{-\log 5}{4}\right)$ e sulla semiretta $\left(\frac{-\log 5}{4}, +\infty\right)$.



Esercizio 2 Dire se la successione

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[(n^3)]{e} - \cos\left(\frac{3}{n^3}\right)}{\sin\left(\log\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\right)}$$

è superiormente o inferiormente limitata.

Soluzione

Il numeratore si riscrive come $e^{\frac{1}{n^3}} - \cos(\frac{3}{n^3})$, e il denominatore come $\sin(\log(1+\frac{2}{n^2}))$. Usando gli sviluppi di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$, $\cos(t) = 1 + o(t)$, $\log(1+t) = t + o(t)$ e $\sin(t) = t + o(t)$, si trova

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + o(1)}{2 + o(1)}$$

che tende a 0 quando $n \to +\infty$. Segue che la successione a_n è limitata sia inferiormente che superiormente.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_0^1 x e^{(x^2)} \cos\left(x^2\right)\, dx.$$

Soluzione

Se $t = x^2$ abbiamo $dt = 2xdx$, e t varia pure tra 0 e 1. Usando questa sostituzione, l'integrale diventa

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^t \cos(t) dt$$

che si calcola usando due volte la regola di integrazione per parti. Abbiamo

$$\int e^t \cos(t) = e^t \cos(t) - \int e^t(-\sin(t)) = e^t \cos(t) + \left(e^t \sin(t) - \int e^t \cos(t)dt\right)$$

da cui segue

$$\int e^t \cos(t) = \frac{1}{2}e^t(\cos(t) + \sin(t)).$$

e dunque per il teorema di Torricelli

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^t \cos(t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^t(\cos(t) + \sin(t))\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e(\cos(1) + \sin(1)) - 1).$$