CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2023/2024 – Correzione Prova Scritta – 24/05/2023

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. $A\boldsymbol{e} = (1 - n\alpha)\boldsymbol{e}$. Per $\alpha = 1/n$ $A\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ e quindi A è non invertibile.
2. Si ha $P = N$ e quindi $\| P \|_\infty = n|\alpha|$. Se $|\alpha| < 1/n$ $\| P \|_\infty < n/n = 1$ e quindi il metodo converge.
3. Dal teorema di Gerschgorin si ha $|\lambda| \leq n|\alpha|$. Inoltre $\lambda = n\alpha$ è autovalore di P con corrispondente autovettore $\boldsymbol{e}$. Segue che $\rho(J) = n|\alpha|$ e il metodo converge se e solo se $|\alpha| < 1/n$.
4. L'iterazione $\boldsymbol{x}_{k+1} = \alpha\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{b}$ può essere implementata con costo lineare.

Esercizio 2

1. Si ha $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0$ $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $f''(x) = 6x \geq 0$ $\forall x \geq 0$. Vale $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$. Segue che $\exists$ 3 soluzioni reali α, β, γ con $-2 < \alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma < 2$.
2. Per $x_0 = -2$ si ha convergenza ad α per il teorema di convergenza in largo applicato in $[-2, \alpha)$. Per $x_0 = 2$ si ha convergenza a γ per il teorema di convergenza in largo applicato in $(\gamma, 2]$.
3. Vale $|g'(x)| = x^2$. Dunque $|g'(\alpha)| > 1$, $|g'(\gamma)| > 1$, $|g'(\beta)| < 1$. Il metodo è localmente convergente in β.