Algebra Lineare
14 Marzo 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. Ogni esercizio vale 8 punti. Per alcuni esercizi potrà eventualmente essere attribuito un punto in più per valorizzare la qualità, la chiarezza, la precisione.

Esercizio 1. Si consideri un'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) Si scriva la matrice di A rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(2) Si scriva la matrice di A rispetto alla base $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ (stessa base in partenza e in arrivo).

(3) Si scriva la matrice di A rispetto alla base $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ in partenza e alla base $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ in arrivo.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che

$$w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

Valori di k

Esercizio 3. Sia $V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il kernel dell'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $A((x, y, z)) = 2x + 4y + 2z$. Determinare: (a) la dimensione dello spazio vettoriale $V + W$; (b) la dimensione dello spazio vettoriale $V \cap W$; (c) una base di $V \cap W$.

Risposta (a)	Risposta (b)	Risposta (c)

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e sia $V \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ il sottospazio dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che $p'(-2) = 0$, dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

i) Trovare la dimensione di V.

ii) Trovare una base di V.

Dimensione	Base