Università di Pisa

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Formulario di Statistica

Professore:
Prof. Francesco Grotto

Autore:
Filippo Ghirardini

Anno Accademico 2023/2024

Contents

Formulario di Statistica

Realizzato da: Ghirardini Filippo

A.A. 2023-2024

---

1 Formulario

1.1 Statistica descrittiva

1.1.1 Indici statistici

Definizione 1.1.1 (Media campionaria)**.**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Definizione 1.1.2 (Mediana)**.** *È il dato x_i tale che metà degli altri valori è minore o uguale a x_i e l'altra metà maggiore o uguale. Se n è pari si prende la media aritmetica dei due valori centrali.*

Definizione 1.1.3 (Varianza campionaria)**.**

$$var(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

Definizione 1.1.4 (Deviazione standard o scarto quadratico medio)**.**

$$\sigma(x) = \sqrt{var(x)} \tag{3}$$

Proposizione 1.1.1.

$$\frac{\#\{x_i : |x_i - \bar{x}| > d\}}{n-1} \leq \frac{var(x)}{d^2} \tag{4}$$

Definizione 1.1.5 (Sample skewness o misura campionaria di asimmetria)**.**

$$b = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 \tag{5}$$

1.1.2 Quantili

Definizione 1.1.6 (Funzione di ripartizione empirica)**.**

$$F_e(t) = \frac{\#\{i | x_i \leq t\}}{n} \tag{6}$$

Definizione 1.1.7 (β-quantile)**.** *Il dato x_i tale che:*

- *almeno βn dati siano $\leq x_i$*
- *almeno $(1-\beta)n$ dati siano $\geq x_i$*

1.1.3 Dati multivariati

Definizione 1.1.8 (Covarianza campionaria).

$$cov(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \tag{7}$$

Definizione 1.1.9 (Coefficiente di correlazione).

$$r(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{8}$$

1.2 Probabilità e indipendenza

1.2.1 Spazi di probabilità

Definizione 1.2.1 (σ-additività). $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Proposizione 1.2.1. *Operazioni su spazi di probabilità:*

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Proposizione 1.2.2. *Vale:*

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) \tag{9}$$

1.2.2 Probabilità discreta

Definizione 1.2.2 (Probabilità).

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{10}$$

Proposizione 1.2.3. *Calcolo combinatorio:*

- *Sequenze ordinate con possibile ripetizione di k numeri da 1 a n: n^k*
- *Numero di modi in cui si può ordinare $\{1,\ldots,n\}$: $n!$*
- *Numero di sequenze ordinate senza ripetizione di k numeri di $\{1,\ldots,n\}$: $\frac{n!}{(n-k)!}$*
- *Numero di sottoinsiemi di $\{1,\ldots,n\}$ formati da k elementi: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$*

Definizione 1.2.3 (Funzione di massa). *Se $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme numerabile:*

$$\Omega \ni x_i \mapsto p(x_i) = \mathbb{P}(\{x_i\}) \in [0,1] \tag{11}$$

e valgono:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:x_i \in A} p(x_i) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R} \tag{12}$$

$$p(x_i) \geq 0 \tag{13}$$

$$\sum_{i=1,2,\ldots} p(x_i) = 1 \tag{14}$$

1.2.3 Probabilità condizionata

Definizione 1.2.4 (Probabilità condizionata).

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{15}$$

Proposizione 1.2.4 (Condizionamento ripetuto).

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \tag{16}$$

Definizione 1.2.5 (Formula della probabilità totale o formula di fattorizzazione).

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) \tag{17}$$

Definizione 1.2.6 (Formula di Bayes).

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \tag{18}$$

Se $B_1, \ldots, B_n$ è un sistema di alternative e A è un evento non trascurabile:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} \tag{19}$$

Definizione 1.2.7 (Eventi indipendenti).

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}) \tag{20}$$

1.2.4 Entropia di Shannon

Definizione 1.2.8 (Entropia).

$$H^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i) \tag{21}$$

Proposizione 1.2.5. *L'entropia ha queste proprietà:*

- *È una funzione simmetrica*
- $H^{(n)}(1, 0, \ldots, 0) = 0$
- *È coerente tra n diversi:* $H^{(n)}(p_1 = 0, p_2, \ldots, p_n) = H^{(n-1)}(p_2, \ldots, p_n)$
- $H^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \leq H^{(n)}(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$
- *Data una probabilità su $n \times m$ oggetti, $\Omega = \{x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nm}\}$, $\mathbb{P}(\{x_{ij}\}) = q_{ij}$, considerando gli eventi $A_i = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,m}\}$, $\mathbb{P}(A_i) = p_i$:*

$$H^{(nm)}(q_{11}, \ldots, q_{ij}, \ldots, q_{nm}) = H^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H^{(m)}\left(\frac{q_{i1}}{p_i}, \ldots, \frac{q_{im}}{p_i}\right) \tag{22}$$

Teorema 1.2.1 (Teorema di Shannon). Una funzione continua che soddisfa queste proprietà deve avere la forma:

$$cH^{(n)} \qquad c > 0 \tag{23}$$

1.2.5 Densità di probabilità

Definizione 1.2.9 (Densità di probabilità)**.** *Una funzione non negativa* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$*, integrabile e tale che:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Definizione 1.2.10 (Probabilità di una densità di probabilità)**.**

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx \qquad A \subseteq \Omega \tag{24}$$

Proposizione 1.2.6. *Se* $A \cap B = \emptyset$*:*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \tag{25}$$

Proposizione 1.2.7 (Probabilità di singoli punti)**.**

$$\mathbb{P}(\{t\}) = \int_{\{t\}} f(x)dx = 0 \tag{26}$$

Definizione 1.2.11 (Densità uniforme)**.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases} \tag{27}$$

Definizione 1.2.12 (Funzione indicatrice)**.**

$$\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \qquad \mathcal{X}_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \tag{28}$$

1.3 Variabili aleatorie

1.3.1 Legge di una variabile aleatoria

Definizione 1.3.1 (Legge di una variabile aleatoria)**.** *Data una variabile aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, la sua legge si indica con la notazione:*

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \qquad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

Definizione 1.3.2 (Variabile aleatoria discreta)**.** *Se ha legge di probabilità discreta:*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i) \tag{29}$$

Definizione 1.3.3 (Variabile aleatoria continua)**.** *Se ha legge di probabilità continua:*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx \tag{30}$$

Se $A = [a, b]$ *è un segmento, vale:*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx \tag{31}$$

1.3.2 Funzione di ripartizione e quantili

Definizione 1.3.4 (Cumulative Distribution Function o Funzione di ripartizione).

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} \tag{32}$$

Proposizione 1.3.1. *Proprietà della c.d.f.:*

- *F non è decrescente ($x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$)*
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- *F è continua a destra ($\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x_n) \to F(x)$ per ogni successione $x_n \to x \quad x_n \geq x$)*

Proposizione 1.3.2.

$$\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) \tag{33}$$

Definizione 1.3.5 (c.d.f. discreta).

$$F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p(x_i) \tag{34}$$

Proposizione 1.3.3.

$$\mathbb{P}\{X = x\} = F(x) - F_{\text{-}}(x) \tag{35}$$

Definizione 1.3.6 (c.d.f. continua).

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{36}$$

Definizione 1.3.7 (β-quantile).

$$r_\beta = inf\{r \in \mathbb{R} : F(r) \geq \beta\} \qquad \beta \in (0,1) \tag{37}$$

Definizione 1.3.8 (Inversa generalizzata).

$$F^{\leftarrow} : (0,1) \to \mathbb{R} \qquad F^{\leftarrow}(t) = inf\{r \in \mathbb{R} : F(r) \geq t\} \tag{38}$$

Ha le seguenti proprietà:

- *Se F è strettamente crescente $F^{\leftarrow} = F^{-1}$*
- *$F^{\leftarrow}$ è sempre non decrescente*
- $F^{\leftarrow}(F(t)) \leq t \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $F(F^{\leftarrow}(t)) \geq t \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $F^{\leftarrow}(t) \leq s \Leftrightarrow F(s) \geq t$

1.3.3 Variabili aleatorie notevoli discrete

Definizione 1.3.9 (Variabili binomiali - $B(n,p)$). *Date n prove di un esperimento con due esiti, di cui uno ha probabilità p. Sia X la variabile che conta il numero di successi, vale:*

$$\mathbb{P}(X = h) = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} \tag{39}$$

Definizione 1.3.10 (Variabili geometriche - $G(p)$). *Un esperimento con due esiti di cui uno ha probabilità p. Sia X la variabile che indica l'istante del primo successo (il numero h). Vale:*

$$\mathbb{P}(X = h) = (1-p)^{h-1} p \qquad h \in \mathbb{N}_0 \tag{40}$$

Definizione 1.3.11 (Variabili ipergeometriche - $I(n,h,r)$). *In un'urna ci sono n biglie di cui $0 \leq h \leq n$ sono bianche e $n-h$ nere. Se ne estraggono $r \leq n$. Sia X la variabile che conta quante di quelle estratte sono bianche. Vale:*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}} \qquad k = 0, \ldots, h \tag{41}$$

Definizione 1.3.12 (Identità di Vandermonde).

$$\sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k} = \binom{n}{r} \tag{42}$$

Definizione 1.3.13 (Variabili di Poisson - $P(\lambda)$). *La variabile X indica il numero di successi in n prove ripetute quando n è elevato e p è basso e $np \circeq \lambda$. Vale:*

$$\mathbb{P}(X = h) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^h}{h!} \qquad h \in \mathbb{N} \tag{43}$$

1.3.4 Variabili aleatorie notevoli con densità

Definizione 1.3.14 (Variabili uniformi su Intervalli). *Valore casuale in un intervallo.*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \frac{t}{b-a} & 0 < t \le b \\ 1 & t > b \end{cases} \tag{44}$$

Definizione 1.3.15 (Variabili esponenziali). *Tempo di attesa tra due eventi aleatori.*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases} \tag{45}$$

Definizione 1.3.16 (Variabili di Pareto - Power law). *Fenomeni in cui eventi estremi hanno una probabilità cospicua di avvenire.*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha x_m^{\alpha} t^{-1-\alpha} & t > x_m \\ 0 & t \le x_m \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 & t < x_m \\ 1 - (\frac{x_m}{t})^{\alpha} & t \ge x_m \end{cases} \tag{46}$$

Definizione 1.3.17 (Variabili Gaussiane Standard - $N(0,1)$).

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} \tag{47}$$

È pari e valgono:

$$\mathbb{P}\{-t \le Z \le t\} = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1 \tag{48}$$

$$\Phi(0) = \mathbb{P}\{X \ge 0\} = \mathbb{P}\{X \le 0\} = \frac{1}{2} \tag{49}$$

Definizione 1.3.18 (Variabili Gaussiane Non Standard - $N(m, \sigma^2)$). *Data X una v.a. $N(0,1)$ e Y una v.a. del tipo $Y = \sigma X + m$.*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\{Y \le t\} = \mathbb{P}\{\sigma X + m \le t\} = \mathbb{P}\left(X \le \frac{t-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) \tag{50}$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{51}$$

1.3.5 Trasformazioni di variabili con densità

$$Y : \Omega \to \mathbb{R} \qquad Y = h \circ X \qquad F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \le y\} = \mathbb{P}\{h(X) \le y\} \tag{52}$$

Proposizione 1.3.4 (Cambio di variabile). *Sia $h : A \to B$ biunivoca, differenziabile e con inversa differenziabile:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases} \tag{53}$$

Se h è crescente:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y)) \tag{54}$$

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \tag{55}$$

Se h è decrescente:

$$\mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq h^{-1}(y)) = 1 - F_X(h^{-1}(y)) \tag{56}$$

1.3.6 Valore atteso, varianza e momenti

Definizione 1.3.19 (Valore atteso)**.**

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_X(x_i) \qquad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt \tag{57}$$

Proposizione 1.3.5. *Sia X discreta, la variabile $g(x)$ ammette valore atteso se $\sum_i |g(x_i)| p(x_i) < +\infty$. In quel caso vale:*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) p(x_i) \tag{58}$$

Sia X con densità, la variabile $g(x)$ ammette valore atteso se $\int_{-\infty} *{+\infty} |g(x)| f(x) dx < +\infty$. In quel caso vale:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty} *{+\infty} g(x) f(x) dx \tag{59}$$

Proposizione 1.3.6. *Se X ha valore atteso, valgono:*

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \quad \mathbb{E}[b] = b$
- $|\mathbb{E}[X]| \leq E[|X|]$
- $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0$

Definizione 1.3.20 (Momento di ordine n)**.**

$$\mathbb{E}[X^n] \qquad \mathbb{E}[|X|^n] < +\infty \tag{60}$$

Definizione 1.3.21 (Disuguaglianza di Jensen)**.**

$$\mathbb{E}[|X|^m]^{\frac{1}{m}} \leq \mathbb{E}[|X|^n]^{\frac{1}{n}} \qquad 1 \leq m \leq n \tag{61}$$

Definizione 1.3.22 (Disuguaglianza di Markov)**.**

$$a\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \mathbb{E}[X] \qquad a > 0 \tag{62}$$

Definizione 1.3.23 (Varianza)**.**

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \tag{63}$$

Definizione 1.3.24 (Scarto quadratico medio)**.**

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \tag{64}$$

Definizione 1.3.25 (Disuguaglianza di Chebyshev)**.**

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| > d\} \leq \frac{Var(X)}{d^2} \qquad d > 0 \tag{65}$$

1.3.7 Momenti di variabili aleatorie notevoli

Proposizione 1.3.7 (Variabili di Bernoulli - $B(1,p)$).

$$\mathbb{E}[X^k] = p \qquad Var(X) = p - p^2 = p(1-p) \qquad k \geq 1 \tag{66}$$

Proposizione 1.3.8 (Variabili Binomiali).

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad Var(X) = np(1-p) \tag{67}$$

Proposizione 1.3.9 (Variabili di Poisson).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{h=0}^{+\infty} h e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!} = \lambda \tag{68}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda + \lambda^2 \tag{69}$$

$$Var(X) = \lambda \tag{70}$$

Proposizione 1.3.10 (Variabili uniformi su intervalli finiti).

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{71}$$

Proposizione 1.3.11 (Variabili Esponenziali).

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{72}$$

Proposizione 1.3.12 (Variabili Gaussiane Standard).

$$\mathbb{E}[X^{2h+1}] = 0 \tag{73}$$

$$\mathbb{E}[X^{2h+2}] = (2h+1)\mathbb{E}[X^{2h}] \tag{74}$$

$$Var(X) = 1 \tag{75}$$

Proposizione 1.3.13 (Variabili Gaussiane).

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + m] \qquad Var(Y) = Var(\sigma X + m) = \sigma^2 Var(X) \tag{76}$$

1.4 Distribuzioni multivariate

1.4.1 Variabili doppie

$$\Omega \ni \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}((X,Y) \in A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\Omega)) \in A\} \tag{77}$$

Proposizione 1.4.1 (Distribuzione di probabilità di variabile doppia discreta).

$$p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \tag{78}$$

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}\{(X,Y) \in A\} = \sum_{(x_i,y_j) \in A} p(x_i, y_j) \tag{79}$$

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) \tag{80}$$

$$p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) \tag{81}$$

Proposizione 1.4.2 (Distribuzione di probabilità di variabile doppia con densità).

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}\{(X,Y) \in A\} = \int\int_A f(x,y) dx dy \tag{82}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \tag{83}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \tag{84}$$

1.4.2 Indipendenza di variabili aleatorie

Definizione 1.4.1 (Variabili aleatorie indipendenti).

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in A_n) \tag{85}$$

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \qquad \forall (x_i, y_j) \tag{86}$$

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall (x, y) \tag{87}$$

1.4.3 Funzioni di variabili indipendenti

Proposizione 1.4.3 (Somma di Binomiali).

$$X \to B(n, p) \quad Y \to B(m, p) \Longrightarrow Z = X + Y \to B(n + m, p) \tag{88}$$

Proposizione 1.4.4 (Funzione di massa di somma di variabili discrete).

$$Z = X + Y \Longrightarrow p_Z(n) = \sum_{h=0}^{n} p_X(h) \cdot p_Y(n - h) \tag{89}$$

Proposizione 1.4.5 (Funzione di massa di somma di variabili con densità o formula della convoluzione).

$$Z = X + Y \Longrightarrow p_Z(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z - y) dy \tag{90}$$

1.4.4 Covarianza e correlazione

Proposizione 1.4.6 (Valore atteso di somma di variabili). *Dati X e Y con valore atteso:*

- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

- $X \geq Y \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

Se sono anche indipendenti:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \tag{91}$$

$$\mathbb{E}[h(X)k(Y)] = \mathbb{E}[h(X)] \cdot \mathbb{E}[k(Y)] \tag{92}$$

Proposizione 1.4.7 (Disuguaglianza di Schwartz).

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]} \tag{93}$$

Definizione 1.4.2 (Covarianza).

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \tag{94}$$

Definizione 1.4.3 (Coefficiente di correlazione).

$$\triangleright(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \tag{95}$$

1.5 Variabili indipendenti e teoremi limite

Definizione 1.5.1 (Convergenza in probabilità).

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \tag{96}$$