FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 0

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva; in caso negativo un controesempio. (Suggerimento: i diagrammi di Eulero-Venn possono aiutare la vostra intuizione).

1. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: se $A \subseteq B$, allora $A \cup C \subseteq B \cup C$.
2. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: se $A \cup C \subseteq B \cup C$, allora $A \subseteq B$.
3. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: $A \subseteq B$ se e solo se $A \cup C \subseteq B \cup C$.

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva; in caso negativo un controesempio. (Suggerimento: i diagrammi di Eulero-Venn possono aiutare la vostra intuizione).

1. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: se $A \subseteq B$, allora $A \cap C \subseteq B \cap C$.
2. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: se $A \cap C \subseteq B \cap C$, allora $A \subseteq B$.
3. Per tutti gli insiemi A, B, C, vale che: $A \subseteq B$ se e solo se $A \cap C \subseteq B \cap C$.

ESERCIZIO 3

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva; in caso negativo un controesempio. (Suggerimento: i diagrammi di Eulero-Venn possono aiutare la vostra intuizione).

1. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: se $A \subseteq B$, allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, allora $A \subseteq B$.
3. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: $A \subseteq B$ se e solo se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

ESERCIZIO 4

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva; in caso negativo un controesempio. (Suggerimento: i diagrammi di Eulero-Venn possono aiutare la vostra intuizione).

1. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: se $A \subseteq B$, allora $\overline{A} \supseteq \overline{B}$.
2. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, allora $A \supseteq B$.
3. Per tutti gli insiemi A, B, vale che: $A \subseteq B$ se e solo se $\overline{A} \supseteq \overline{B}$.

ESERCIZIO 5
Si osservi che l'inclusione

$$A \subseteq A \cup B \tag{1}$$

vale per tutti gli insiemi A e B. Utilizzando (1) si dia una dimostrazione per sostituzione del seguente enunciato:

per tutti gli insiemi A, B, C vale che: $A \cup B \subseteq C$ se e solo se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.

ESERCIZIO 6
Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera: in caso affermativo fornire una dimostrazione; in caso negativo un controesempio.

1. Per tutti gli insiemi A, B, C e relazioni $R \in Rel(A, B)$ e $S \in Rel(B, C)$ e $T \in Rel(B, C)$ vale che: se $S \subseteq T$, allora $R; S \subseteq R; T$.
2. Per tutti gli insiemi A, B, C e relazioni $R \in Rel(A, B)$ e $S \in Rel(B, C)$ e $T \in Rel(B, C)$ vale che: se $R; S \subseteq R; T$ allora $S \subseteq T$.
3. Per tutti gli insiemi A, B e relazioni $R \in Rel(A, B)$ e $S \in Rel(A, B)$ vale che: $R \subseteq S$ se e solo se $R^{op} \subseteq S^{op}$.

SOLUZIONI PROPOSTE

Prima di analizzare ogni singolo esercizio, è opportuno fare una premessa. Tutti gli enunciati dei vari esercizi appaiono in una delle due seguenti forme:

1. Per tutti gli $A, B, \dots$ vale che: se $I(A, B, \dots)$, allora $T(A, B, \dots)$;
2. Per tutti gli $A, B, \dots$ vale che: $P(A, B, \dots)$ se e solo se $Q(A, B, \dots)$.

dove

- $A, B, \dots$ sono insiemi (e, nell'ultimo esercizio, anche relazioni).
- $I(A, B, \dots)$, $T(A, B, \dots)$, $P(A, B, \dots)$ e $Q(A, B, \dots)$ sono proprietà il cui valore di verità (vero o falso) varia al variare di $A, B, \dots$

Gli enunciati espressi nella forma 1 (se-allora) sono veri se ogni volta che gli insiemi $A, B, \dots$ rendono vera l'ipotesi $I(A, B, \dots)$, allora rendono vera anche la tesi $T(A, B, \dots)$. Invece sono falsi quando esistono degli insiemi $A, B, \dots$ che rendono vera l'ipotesi $I(A, B, \dots)$ e falsa la tesi $T(A, B, \dots)$.

Pertanto, per mostrare che un tale enunciato è vero, si deve fare una dimostrazione che assuma come ipotesi $I(A, B, \dots)$ e concluda con la tesi $T(A, B, \dots)$.

Per dimostrare che un tale enunciato è falso, si deve trovare un *controesempio* cioè degli oggetti $A, B, \dots$ che rendono vere le ipotesi $I(A, B, \dots)$ *e* rendono falsa la tesi $T(A, B, \dots)$

Gli enunciati espressi nella forma 2 (se-e-solo-se) sono equivalenti a dire:

per tutti gli $A, B, \dots$ vale che: se $P(A, B, \dots)$, allora $Q(A, B, \dots)$

e

per tutti gli $A, B, \dots$ vale che: se $Q(A, B, \dots)$, allora $P(A, B, \dots)$.

Pertanto per dimostrarli è necessario dimostare i due enunciati nella forma 1 (se-allora) e per falsificarli è sufficiente mostrare un controesempio per almeno uno dei due enunciati (se-allora).

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Vero: dobbiamo dimostrare che $A \cup C \subseteq B \cup C$ usando come ipotesi $A \subseteq B$. Per dimostrare l'inclusione $A \cup C \subseteq B \cup C$ è necessario mostrare che ogni elemento $x \in A \cup C$ è anche un elemento di $B \cup C$. Procediamo quindi prendendo un generico elemento di $x \in A \cup C$. Per definizione di unione ($\cup$) ci sono due casi: $x \in A$ oppure $x \in C$:

$x \in A$. Se $x \in A$, allora possiamo utilizzare l'ipotesi $A \subseteq B$ per concludere che x appartiene anche a B, cioè $x \in B$. Per definizione di unione ($\cup$) se $x \in B$, allora x appartiene anche a $B \cup C$, cioè $x \in B \cup C$.

$x \in C$. Se $x \in C$, allora per definizione di unione ($\cup$) x appartiene anche a $B \cup C$, cioè $x \in B \cup C$.

Abbiamo dimostrato la tesi in entrambi i casi e quindi la dimostrazione è conclusa.

2. Falso: per mostrare che è falso dobbiamo trovare un controesempio, cioè tre insiemi A, B, C per i quali è vero che $A \cup C \subseteq B \cup C$ ma non è vero che $A \subseteq B$.

   A tale scopo scegliamo $A = \{a\}$, $B = \varnothing$ (l'insieme vuoto) e $C = \{a, b\}$. Si ha che $A \cup C = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$; $B \cup C = \varnothing \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ e quindi l'ipotesi $A \cup C \subseteq B \cup C$ risulta vera. La tesi però è falsa in quanto $A = \{a\} \not\subseteq \emptyset = B$.

3. Falso: l'enunciato è equivalente ad

   $$1 \; e \; 2$$

   (in simboli $1 \wedge 2$). Dal momento che l'enunciato 2 è falso, allora anche l'enunciato 3 è falso.

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 2</u>

1. Vero: dobbiamo dimostrare che $A \cap C \subseteq B \cap C$ usando come ipotesi $A \subseteq B$. Per dimostrare l'inclusione $A \cap C \subseteq B \cap C$ è necessario mostrare che ogni elemento $x \in A \cap C$ è anche un elemento di $B \cap C$. Procediamo quindi prendendo un generico elemento di $x \in A \cap C$. Per definizione di intersezione ($\cap$) vale che $x \in A$ *e* $x \in C$. Utilizzando l'ipotesi $A \subseteq B$, da $x \in A$ possiamo dedurre che $x \in B$. Urilizzando la definizione di intersezione ($\cap$) da $x \in B$ e $x \in C$, si deduce che $x \in B \cap C$.

2. Falso: per mostrare che è falso dobbiamo trovare un controesempio, cioè tre insiemi A, B, C per i quali è vero che $A \cap C \subseteq B \cap C$ ma non è vero che $A \subseteq B$.

   A tale scopo scegliamo $A = \{a\}$, $B = C = \varnothing$ (l'insieme vuoto). Si ha che $A \cap C = \{a\} \cap \varnothing = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ e quindi l'ipotesi $A \cap C \subseteq B \cap C$ risulta vera. La tesi però è falsa in quanto $A = \{a\} \not\subseteq \emptyset = B$.

3. Falso: l'enunciato è equivalente ad

   $$1 \; e \; 2$$

   (in simboli $1 \wedge 2$). Dal momento che l'enunciato 2 è falso, allora anche l'enunciato 3 è falso.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

1. Falso: per mostrare che è falso dobbiamo trovare un controesempio, cioè un insieme A e un insieme B, per i quali è vero che $A \subseteq B$ ma non è vero che $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Ricordiamoci che per la definizione di $\bar{\cdot}$ è necessario aver definito un universo $\mathcal{U}$. Fissiamo $\mathcal{U} = \{a, b, c, d\}$.

   A tale scopo scegliamo $A = \varnothing$ e $B = \{a\}$. Banalmente l'ipotesi è vera $A = \varnothing \subseteq \{a\} = B$, ma la tesi è falsa: infatti $\overline{A} = \mathcal{U} \nsubseteq \{b, c, d\} = B$.

2. Falso: per mostrare che è falso dobbiamo trovare un controesempio, cioè un insieme A e un insieme B, per i quali è vero che $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ ma non è vero che $A \cap B$. Ricordiamoci che per la definizione di $\bar{\cdot}$ è necessario aver definito un universo $\mathcal{U}$. Fissiamo $\mathcal{U} = \{a, b, c, d\}$.

   A tale scopo scegliamo $A = \mathcal{U}$ e $B = \{b, c, d\}$. Si ha che $\overline{A} = \overline{\mathcal{U}} = \varnothing$ e $\overline{B} = \{a\}$. Pertanto l'ipotesi è vera $\overline{A} = \varnothing \subseteq \{a\} = \overline{B}$. La tesi però è falsa in quanto $A = \mathcal{U} \nsubseteq \{b, c, d\} = B$.

3. Falso: l'enunciato è equivalente ad

$$1 \; e \; 2$$

   (in simboli $1 \wedge 2$). Dal momento che l'enunciato 2 (o, 1) è falso, allora anche l'enunciato 3 è falso.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

1. Vero: dobbiamo dimostrare che $\overline{A} \supseteq \overline{B}$ usando come ipotesi $A \subseteq B$. Per dimostrare l'inclusione $\overline{A} \supseteq \overline{B}$ è necessario mostrare che ogni elemento $x \in \overline{B}$ è anche un elemento di $\overline{A}$. Procediamo quindi prendendo un generico elemento di $x \in \overline{B}$. Per definizione di complemento ($\bar{\cdot}$) si ha che $x \notin B$. Utilizzando l'ipotesi $A \subseteq B$, da $x \notin B$ si deduce che $x \notin A$. Utilizzando la definizione di complemento ($\bar{\cdot}$) da $x \notin A$ si deduce che $x \in \overline{A}$.

2. Vero: dobbiamo dimostrare che $A \supseteq B$ usando come ipotesi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Per dimostrare l'inclusione $A \supseteq B$ è necessario mostrare che ogni elemento $x \in B$ è anche un elemento di A. Procediamo quindi prendendo un generico elemento di $x \in B$. Per definizione di complemento ($\bar{\cdot}$) si ha che $x \notin \overline{B}$. Utilizzando l'ipotesi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, da $x \notin \overline{B}$ si deduce che $x \notin \overline{A}$. Utilizzando la definizione di complemento ($\bar{\cdot}$) da $x \notin \overline{A}$ si deduce che $x \in A$.

3. Vero: l'enunciato è equivalente a

$$1 \; e \; 2$$

   (in simboli $1 \wedge 2$). Dal momento che sia 1 che 2 sono veri allora anche l'enunciato 3 è vero.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Trattandosi di un se-e-solo-se possiamo dimostrare i seguenti due se-allora.

(a) Per tutti gli insiemi A, B, C vale che: se $A \cup B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.

(b) Per tutti gli insiemi A, B, C vale che: se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ allora $A \cup B \subseteq C$.

Mostriamo una dimostrazione per sostituzione. Per (a) si ha che

$$\begin{array}{lcll} A & \subseteq & A \cup B & (1) \\ & \subseteq & C & (\text{ip: } A \cup B \subseteq C) \end{array}$$

ed anche che

$$\begin{array}{lcll} B & \subseteq & A \cup B & (1) \\ & \subseteq & C & (\text{ip: } A \cup B \subseteq C) \end{array}$$

Si noti che, oltre ad utilizzare l'osservazione (1) come se fosse una legge, la dimostrazione utilizza anche l'ipotesi dell'enunciato che si intende dimostrare ($A \cup B \subseteq C$).

Per (b):

$$\begin{array}{lcll} A \cup B & \subseteq & C \cup B & (\text{ip: } A \subseteq C) \\ & \subseteq & C \cup C & (\text{ip: } B \subseteq C) \\ & = & C & (\text{idempotenza}) \end{array}$$

Come la dimostrazione per (a), anche la dimostrazione per (b) utilizza le ipotesi dell'enunciato (nel caso di (b), le ipotesi sono $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$). L'utilizzo in (b) però è più sottile.

Si consideri ad esempio il primo passo: utilizzando l'ipotesi $A \subseteq C$ si afferma che $A \cup B \subseteq C \cup B$. Questa conclusione è lecita grazie all'Esercizio 1.1.

In modo del tutto analogo, nel secondo passo utilizzando l'ipotesi $B \subseteq C$ si afferma che $C \cup B \subseteq C \cup C$. Di nuovo, questa conclusione è lecita grazie all'Esercizio 1.1.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

1. Vero: dobbiamo dimostrare che $R; S \subseteq R; T$ usando come ipotesi $S \subseteq T$. Per dimostrare l'inclusione $R; S \subseteq R; T$ è necessario mostrare che ogni coppia $(a, c) \in R; S$ è anche una coppia di $R; T$. Procediamo quindi prendendo una generica copppia $(a, c) \in R; S$. Dalla definizione di composizione (;) si ha che esiste almeno un $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Utilizzando l'ipotesi $S \subseteq T$, da $(b, c) \in S$ possiamo dedurre che $(b, c) \in T$. Utilizzando la definzione di composizione (;) da $(a, b) \in S$ e $(b, c) \in T$ possiamo dedurre che $(a, c) \in S; T$.

2. Falso: per mostrare che è falso dobbiamo trovare un controesempio, cioè tre insiemi A, B, C e tre relazioni $R \in \mathit{Rel}(A, B)$ e $S, T \in \mathit{Rel}(B, C)C$ per i quali è vero che $R; S \subseteq R; T$ ma non è vero che $S \subseteq T$.

   A tale scopo scegliamo $A = B = C = \{a\}$, $R = \varnothing_{A,B}$, $S = \{(a, a)\}$ e $T = \varnothing_{B,C}$. Si ha che $R; S = \varnothing_{A,C}$ e $R; T = \varnothing_{A,C}$. Quindi l'ipotesi $R; S \subseteq R; T$ risulta vera. La tesi però è falsa in quanto $S = \{(a, a)\} \nsubseteq \varnothing_{B,C} = T$.

3. Vero: Trattandosi di un se-e-solo-se dobbiamo dimostrare i seguenti due se-allora.

   3.a Per tutti gli insiemi A, B e relazioni $R \in \mathit{Rel}(A, B)$ e $S \in \mathit{Rel}(A, B)$ vale che: se $R \subseteq S$ allora $R^{op} \subseteq S^{op}$.

   3.b Per tutti gli insiemi A, B e relazioni $R \in \mathit{Rel}(A, B)$ e $S \in \mathit{Rel}(A, B)$ vale che: se $R^{op} \subseteq S^{op}$ allora $R \subseteq S$.

   Iniziamo con 3.a. Dobbiamo dimostrare che $R^{op} \subseteq S^{op}$ usando come ipotesi $R \subseteq S$. Per dimostrare l'inclusione $R^{op} \subseteq S^{op}$ è necessario mostrare che ogni coppia $(b, a) \in R^{op}$ è anche una coppia di S^{op}. Procediamo quindi prendendo una generica copppia $(b, a) \in R^{op}$. Dalla definizione di relazione opposta $(\cdot^{op})$ si ha che $(a, b) \in R$. Utilizzando l'ipotesi che $R \subseteq S$, da

$(a, b) \in R$ possiamo dedurre che $(a, b) \in S$. Utilizzando la definizione di relazione opposta $(\cdot^{op})$, da $(a, b) \in S$ possiamo concludere che $(b, a) \in S^{op}$. Questo conclude la dimostrazione di 3.a.

Per dimostrare 3.b, dobbiamo mostrare che $R \subseteq S$ utilizzando come ipotesi che $R^{op} \subseteq S^{op}$. Possiamo utilizzare il punto precedente e procedere per sostituzione.

$$\begin{array}{lcll} R & = & (R^{op})^{op} & \text{(convoluzione)} \\ & \subseteq & (S^{op})^{op} & \text{(ipotesi } R \subseteq S\text{, punto 3.a)} \\ & = & S & \text{(convoluzione)} \end{array}$$