Università di Pisa

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso 1° anno - 12 CFU

Analisi Matematica

Professore:
Prof. Mattia Talpo

Autore:
Matteo Giuntoni

Anno Accademico 2020/2021

Contents

Analisi Matematica

Realizzato da: Giuntoni Matteo

A.A. 2021-2022

---

1 Introduzione

1.1 Insiemi Numerici

Un insieme di numeri è una raccolta di elementi. Alcuni degli insiemi che verranno utilizzati maggiormente in questo corso sono:

- **N. Naturali** cioè tutti gli interi non negativi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
- **N. Interi**: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- **N. Razionali**, cioè le frazioni: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}$ dove p e q $\in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0\}$.
  Un sottoinsieme sono le **classi di equivalenza** che sono tutte le frazioni semplificate ai minimi termini.
- **N. Reali**, che possono essere visti come tutti gli elementi rappresentabili su una retta: $\mathbb{R}$

Note 1.1.1. I vari insiemi si contengono fra di loro. ($\mathbb{N} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)

Note 1.1.2. Esistono molti numeri reali che non sono razionali. Ess: $\sqrt{2}, \pi, ...$

1.2 Intervalli

Definizione 1.2.1 (Intervallo)**.** *$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se $\forall\, x,\, y \in I$ tale che $x < y$. Allora ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$ sta esso stesso in I. [1]*

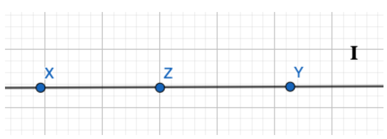
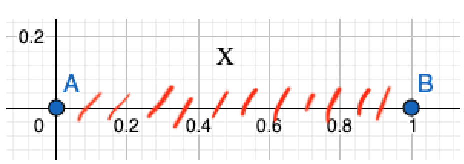


Figure 1: Tutto il segmento fra x e y deve stare in I

I è un intervallo se ogni ogni volta che $x, y \in I$ e $x < y$, tutto il segmento tra x e y sta in I. Inoltre in I non ci sono "buchi" (discontinuità).

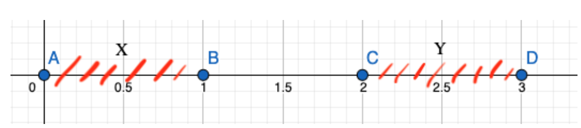
Esempio 1.2.1. Esempi di intervalli.

Questo caso **è un intervallo**



(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

Questo caso **non è un intervallo** fra A e D.



(b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1$ *oppure* $z < x < 3\}$

1.3 Notazione

Con $a, b \in \mathbb{R}$ e con $a < b$ è possibile scrivere le notazioni in tabella 1.

[a, b]	Intervallo chiuso di estremi a e b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	Intervallo aperto	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
[a, b)	Intervallo semi aperto a destra	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
(a, b]	Intervallo semi aperto a sinistra	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
[a, $+\infty$)	Semiretta chiusa a sinistra	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
($-\infty$, b]	Intervallo semi aperto a destra	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
($-\infty$, $+\infty$)	Insieme di tutti i numeri $\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R}\}$

Table 1: Notazione Intervalli

2 Funzioni

Definizione 2.0.1 (Funzione)**.** - *$f : A \longrightarrow B$:*
Dati due insiemi A, B, detti corrispettivamente dominio e codominio, una funzione è una "legge" o "regola" che associa ad ogni elemento di $a \in A$ uno ed uno solo elemento di B, che si denota con f(a).

Note 2.0.1. Tipicamente in questo corso le funzioni saranno date come formule del tipo $f(x) = x^2 - 7x - e^x$ andando poi a specificare dominio e codominio in questo modo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio 2.0.1. Esempi funzioni:

- $g(x) = x^2 - 7x - e^x \quad g(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
- $g(x) = x^2 \quad g(0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$. Va bene perché $x^2 > 0$ per qualsiasi valore di x.
- $h(x) = x^2 \quad h(0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0)$. Questa forma non va bene non definendo una funzione perché la formula non mi da numeri di $(-\infty, 0)$.
- $h(x) = x^2 \quad h(0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 1)$ Non va bene perché se preindiamo x=3 $f(3) = 9$ e 9 non fa parte del codominio.

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ ha un **grafico** che si indica come:

$$graph(f) = \{(a, b) \in A \ X \ B \ \mid b = f(a)\} \tag{1}$$

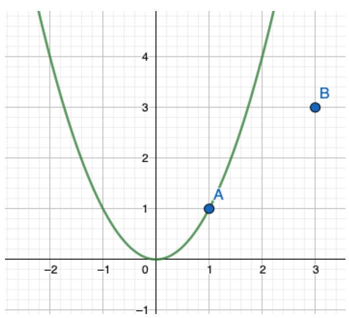


Figure 3: $f(x) = x^2$ con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio 2.0.2. Esempio punto sulla funzione

- Il punto A sta sul grafico si $f(x) = x^2$ esattamente quando $y = x^2$.
- Il punto B non sta sul grafico quindi $y \neq x^2$.

Note 2.0.2. A X B $\subseteq \mathbb{R}$ X $\mathbb{R}$. Dove R X R = R^2.

Esempio 2.0.3. A e B = $(0, +\infty)$, da qui vediamo che A X B rappresenta il primo quadrante.

2.1 Immagine

Definizione 2.1.1 (Immagine)**.** *Prendendo $f : A \longrightarrow B$ e $D \subseteq A$ l'immagine di D tramite f è il sottoinsieme $f(D) \subseteq B$ costituito dagli elementi f(d) dove $d \in D$.*

Esempio 2.1.1. Esempi immagine:

- Immagine di A, $f(A) \subseteq B$ si chiama anche immagine della funzione.
- $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ immagine di g è $[0, +\infty)$ perché $x^2 \geq 0 \, \forall \, x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = x?2$, $g : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'immagine di g è $[4, +\infty]$ perché se si calcola il punto minore del dominio, cioè 2, torna $g(2) = x^2$ che è uguale a 4, da lì possiamo prendere tutti i punti.

2.2 Suriettiva

Definizione 2.2.1 (Suriettiva)**.** *Una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio. Quindi prendendo una f(x), per che sia suriettiva deve l'immagine I essere uguale ad un valore, $I(f) = b$.*

Esempio 2.2.1. Esempi funzioni suriettive:

- $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non è suriettiva perché tutti i valori del codominio $y < 0$ non hanno un rispettivo nel dominio.
- $g(x) = x^2$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ lo è perchè andiamo a restringere il codominio ai punti che hanno un corrispettivo nel dominio.

2.3 Iniettiva

Definizione 2.3.1 (Iniettiva)**.** *Una funzione iniettiva è una funzione che associa, a elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio. Quindi prendendo una f(x) è iniettiva se prendendo due valori* x_1, x_2 *dove* $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$*. (Input diversi danno output diversi).*

Esempio 2.3.1. Esempi funzioni iniettiva:

- $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva perché se prendiamo $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ $f(x1) = f(x2)$.
- $g(x) = x^2$, $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è invece iniettiva perché non consideriamo i valori negativi.

2.4 Biunivoca

Definizione 2.4.1 (Biunivoca)**.** *Una funzione si definisce biunivoca o bigettiva se è sia iniettiva che suriettiva.*

2.5 Invertibile

Definizione 2.5.1 (Invertibile)**.** *Se una funzione è biunivoca si dice che tale funzione è anche invertibile.*

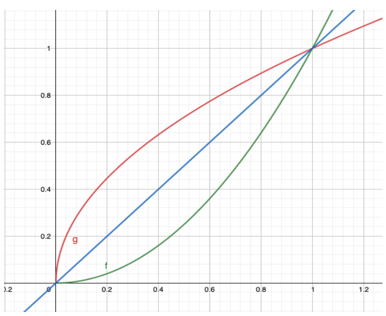


Figure 4: $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Se f è una funzione invertibile i grafici di f e di f^i (la funzione inversa) sono simmetrici rispetto alla retta y=x cioè alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Esempio 2.5.1. Se vediamo nell'immagine [6] prendendo l'inverso della funzione $f(x) = x^2$ definita in $[0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ e cioè la funzione $g(x) = \sqrt{x}$ è simmetrica.

2.6 Funzioni Monotone

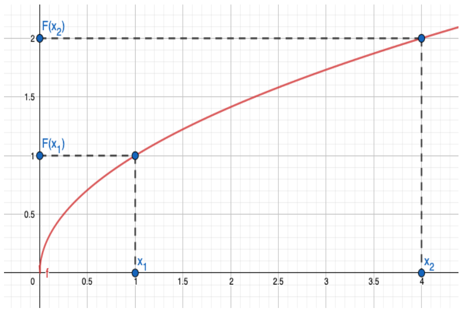
Definizione 2.6.1 (Monotone)**.** *Dato un insieme* $A \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2$ *se* $\forall x_1, x_2$ *risulta ciò che è scritto in Tabella 2.*

[1] Strettamente Crescente	$f(x_1) < f(x_2)$
[2]Debolmente Crescente	$f(x_1) \leq f(x_2)$
[3]Strettamente Decrescente	$f(x_1) > f(x_2)$
[4]Debolmente Decrescente	$f(x_1) \geq f(x_2)$

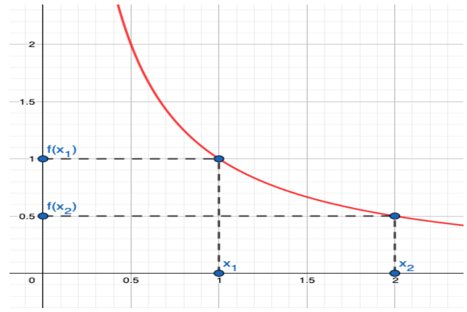
Table 2: Definizioni funzioni crescenti e decrescenti

Andando a considerare la Tabella 2 possiamo dire che:

- **Strettamente monotona** nei casi [1] e [3] della tabella.
- **Debolmente monotona** nei casi [2] e [4] della tabella.



(a) $f(x_1) < f(x-2)$ quindi è crescente



(b) $f(x_1) > f(x-2)$ quindi è decrescente

Esempio 2.6.1. Esempi funzioni crescenti e decrescenti:

Possiamo anche federe dalle immagini [5a] [5b] che:

- Se f(x) è **crescente** l'ordinamene verrà **mantenuto**.
- Se f(x) è **decrescente** l'ordinamento verrà **invertito**.

Osservazione 2.6.1. Osservazione sul rapporto incrementale:

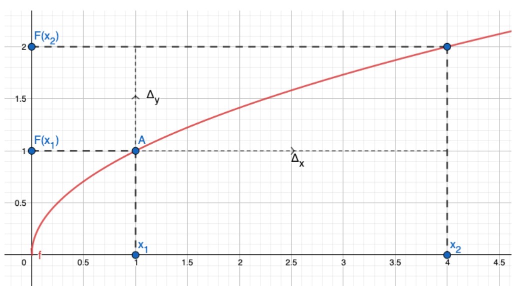


Figure 6: $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

f(x) è strettamente crescente se e solo se il **rapporto incrementale**[1] è maggiore di 0:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \tag{2}$$

Note 2.6.1. Il denominatore ed il numeratori devono essere concordi per fare in modo che il rapporto incrementale sia maggiore di 0 e quindi la funzione crescente.

Continuando ad analizzare il rapporto incrementale possiamo ricavare anche i casi in cui una funzione e strettamente decrescente o debolmente crescente o debolmente decrescente. Puoi vedere tutte le casistiche nella tabella 3.

Strettamente Crescente	$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$
Strettamente Decrescente	$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$
Debolmente Crescente	$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0$
Debolmente Decrescente	$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0$

Table 3: Analisi rapporto incrementale

Osservazione 2.6.2. Se una funzione f(x) è strettamente crescente è a sua volta anche debolmente crescente, mentre una funzione f(x) se è debolmente crescente non è strettamente crescente perché aggiunge una casistica che sarebbe $f(x_1) = f(x_2)$.

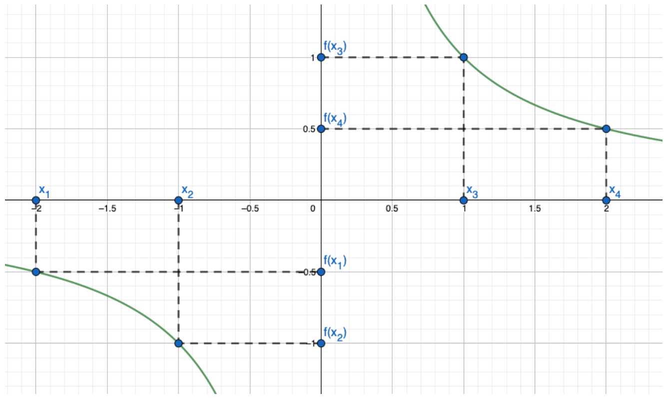


Figure 7: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Esempio 2.6.2. Casistica particolare:
Data $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funzione rappresentata nell'immagine [7].
Possiamo vedere che:

- f(x) è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.
  Quindi se andiamo a prendere $0 < x_3 < x_4$ abbiamo che $f(x_3) > f(x_4)$.
- f(x) è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.
  Quindi se andiamo a prendere $x_1 < x_2 < 0$ abbiamo che $f(x_1) > f(x_2)$.

Se però andiamo a considerare tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e quindi prendiamo i punti $x_1 < 0 < x_4$ vediamo che $f(x_1) < f(x_4)$. In conclusione si può dire quindi che $f(x) = \frac{1}{x}$) è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ ma non lo è in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.6.1 Composizione con funzioni monotone

Note 2.6.2. Il simbolo della composizione è "$\circ$", come $f \circ g$.

Prendendo i considerazioni 3 insiemi A, B, C tali che $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e 2 funzioni f(x) e g(x) così definitine: $\quad f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$.

1. Se f è crescente e g è crescente allora $g \circ f$ è crescente.
2. Se f è crescente e g è decrescente allora $g \circ f$ è decrescente. (Vale anche l'inverso).
3. Se f è decrescente e g è decrescente allo $g \circ f$ è crescente.

Esempio 2.6.3. $h(x) = e^{x^3}$
La funzione h si ottiene dalla composizione di:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$. Funzione crescente.
- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = e^t$. Funzione decrescente.

Quindi possiamo scrivere $h(x) = e^{x^3}$ come: $\quad e^{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ Inoltre visto che f è crescente e g è crescente, h è strettamente crescente

Osservazione 2.6.3. Se prendiamo una funzione f(x) strettamente monotona, allora f(x) è iniettiva. Questa condizione è vera ma NON lo è viceversa: una funzione f(x) iniettiva NON è per forza strettamente monotona.

Esempio 2.6.4. Se prendiamo una f(x) tale che: $\quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Possiamo vedere rifacendoci all'esempio in figura [7] che f è iniettiva ma non monotona.

[1] I rapporto incrementale misura quanto il punto della f si sposta in verticale in rapporto a quanto abbiamo l'asciasse in orizzontale.

2.7 Insieme di definizione

Definizione 2.7.1 (Insieme di definizione)**.** *Prendendo una funzione f(x) l'insieme di definizione o dominio naturale di una funzione è il più grande sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *dove ha senso la funzione f(x).*

Esempio 2.7.1. $f(x) = \frac{1}{x}$ L'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.8 Funzioni pari e dispari

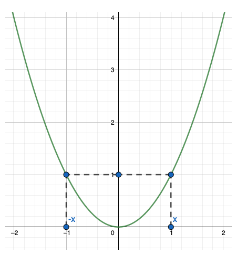
Definizione 2.8.1 (Pari)**.** *La funzione è* ***Pari*** *se* $f(x) = f(-x)\, \forall x$ *nel dominio di* $f \longrightarrow f$*.*

Definizione 2.8.2 (Dispari)**.** *La funzione è* ***Dispari*** *se* $f(x) = -f(-x)\, \forall x$ *nel dominio di* $f \longrightarrow f$*.*

Note 2.8.1. Il dominio di f deve essere tale che se $x \in Dominio$ allora $-x \in Codominio$.

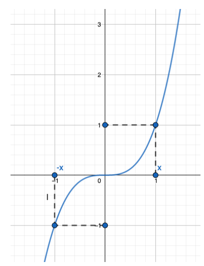
Esempio 2.8.1. Esempio funzioni pari e dispari.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, f(x) è **pari**:



(a) $f(x) = x^2$, graph(f) con f pari

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$, f(x) è **dispari**:



(b) $f(x) = x^3$, graph(f) con f dispari

2.9 Funzione periodica

Definizione 2.9.1 (Periodicità)**.** *Una funzione f(x) si dice periodica di periodo* $P \in \mathbb{R}$ *se* $\forall x\, f(x+P) = f(x)$*.*

Inoltre il dominio di f(x) deve essere tale che $x \in$ Dominio è uguale e a $x+P \in$ codominio.

Esempio 2.9.1. In figura [9] un esempio di funzione periodica.

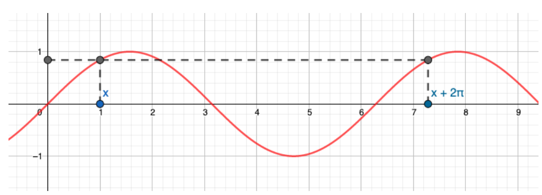


Figure 9: $sin(x) = sin(x + 2\pi)$

2.10 Funzioni Elementari

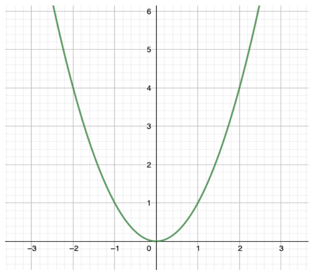
2.10.1 Retta

Funzione retta: $f(x) = ax + b. \qquad a, b \in \mathbb{R}$
Dove la "a" si dice coefficiente angolare, ed indica la pendenza della retta mentre la lettera "b" si chiama termine noto, ed indica il punto di incontro con l'asse Y.

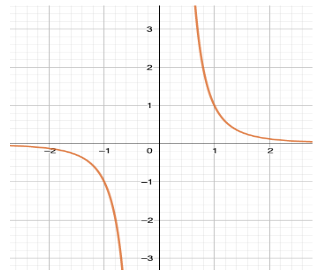
2.10.2 Esponente positivo o negativo

Fun. Esp. positivo: $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

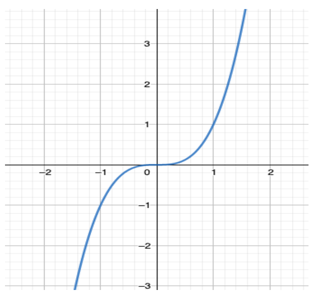
Fun. Esp. negativo: $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k < 0$.



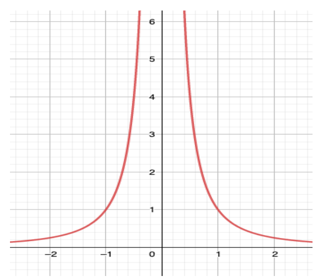
(a) con k pari



(b) con k dispari



(a) con k pari



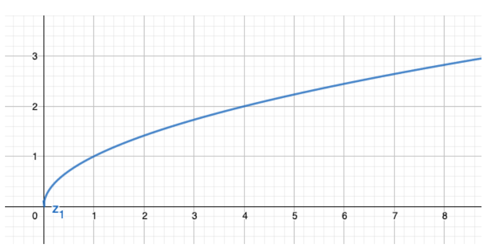
(b) con k dispari

Osservazione 2.10.1. **k pari:** Le funzioni con il k pari sono funzioni pari e hanno tutte una forma simile a quella in figura [10a] per le funzioni con k positive e per le funzioni con k negativo figura [11a].

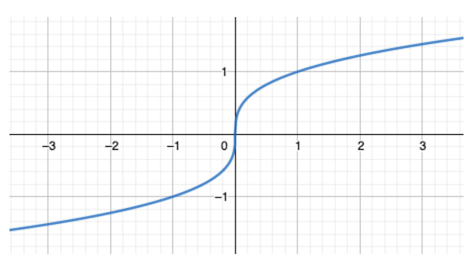
Osservazione 2.10.2. **k dispari:** Le funzioni con il k positivo e dispari sono funzioni dispari e hanno tutte una forma simile a quella in figura [10b] per le funzioni con k positive e per le funzioni con k negativo figura [11b].

2.10.3 Radici o esponente fratto

Funzionane radici o esponente fratto: $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ o $f(x) = \sqrt[q]{x^p} \quad$ con $\quad p, q \in \mathbb{N} \quad$ e $\quad q \neq 0.$ [2]



(a) con q pari



(b) con q dispari

[2]In matematica è possibile scrivere una un esponente fratto come radice mettendo il numeratore al radicando della radice e il denominatore all'indice: $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

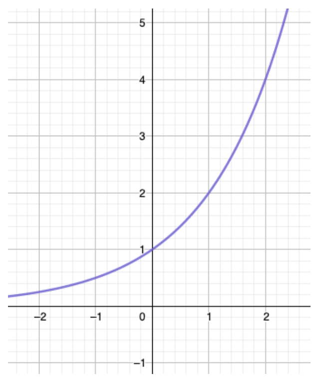
Note 2.10.1. p e q non possono essere entrambi pari perché in tal caso sono divisibili fra di loro e quindi portabili ad una forma ridotta.

Osservazione 2.10.3. q pari: Le funzioni con il q pari ha dominio $x \geq 0$ ed è invertibile sono come funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$. È rappresentata in figura [12a].

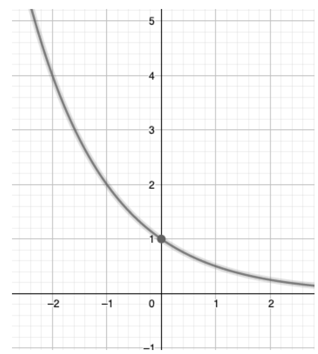
Osservazione 2.10.4. q dispari: Le funzioni con il q positivo ha dominio $x \in \mathbb{R}$ ed è ugualmente invertibile su tutto $\mathbb{R}$, è inoltre una funzione dispari. È rappresentata in figura [12b].

2.10.4 Esponenziale

Funzione esponenziale: $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$



(a) con $a > 1$



(b) con $0 < a < 1$

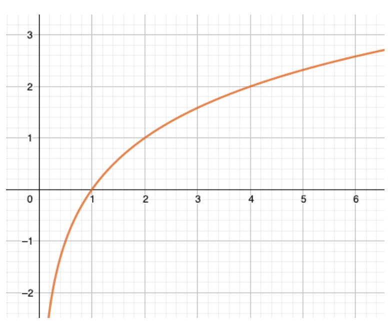
Note 2.10.2. La funzione esponenziale è sempre positiva.

Osservazione 2.10.5. $a > 1$**:** La funzione è strettamente crescente, come in nell'immagine [13a].

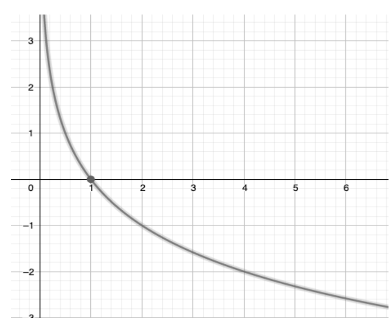
Osservazione 2.10.6. $0 < a < 1$**:** La funzione è decrescente, come in nell'immagine [13b].

2.10.5 Logaritmo

Funzione logaritmo: $f(x) = \log_a x, \quad f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ (inversa dell'esponenziale).



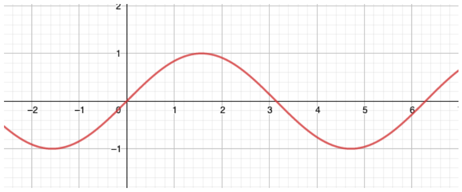
(a) con $a > 1$



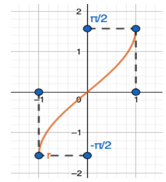
(b) con $0 < a < 1$

Osservazione 2.10.7. Casistica particolare - $f(x) = e^x$.
In questa casistica se andiamo a ridurre il codominio la funzione esponenziale è invertibile. $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$. Il suo inverso è un caso particolare di logaritmo e di chiama **logaritmo naturale**. E si può scrive in due modi:

- $\ln x$: sarebbe logaritmo in base naturale.
- $\log x$: scrivendo il logaritmo senza la base intendiamo il logaritmo in base e.



(a) $\sin x$



(b) $\arcsin x$ o $\sin x^{-1}$

2.10.6 Seno e Arcoseno

Seno: $f(x) = \sin x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Arcoseno: $f(x) = \arcsin x,\ f : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

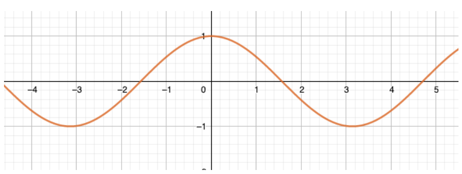
Osservazione 2.10.8. Sin(x): La funzione $\sin x$ (immagine [15a]) è periodica per 2π quindi possiamo scrivere $\sin(x + 2\pi) = \sin x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre è suriettiva per codominio [-1, 1]. Se invece definiamo $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ la funzione $\sin x$ è strettamente crescente e suriettiva, quindi anche invertibile, e la sua inversa è appunto $\arcsin x$.

Osservazione 2.10.9. Arcsin(x): La funzione $\arcsin x$ è l'inverso del seno e può essere scritta anche come $f(x) = \sin x^{-1}$, è rappresentata nell'immagine [15b].

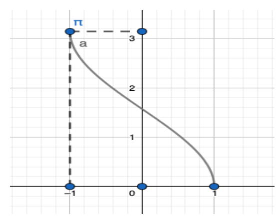
2.10.7 Coseno e Arcocoseno

Coseno: $f(x) = \cos x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Arcocoseno: $f(x) = \arccos x,\ f : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$



(a) $\cos x$



(b) $\arccos x$ o $\cos x^{-1}$

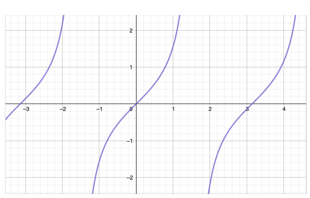
Osservazione 2.10.10. Cos(x): La funzione $\cos x$, rappresentata nell'immagine [16a], è periodica per 2π quindi possiamo scrivere $\cos(x + 2\pi) = \cos x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre è suriettiva per codominio [-1, 1]. Se invece definiamo $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ la funzione $\cos x$ è suriettiva, quindi anche invertibile, e la sua inversa è appunto $\arccos x$.

Osservazione 2.10.11. Arccos(x): La funzione $\arccos x$ è l'inverso del seno e può essere scritta anche come $f(x) = \cos x^{-1}$ ed è rappresentata nell'immagine [16b].

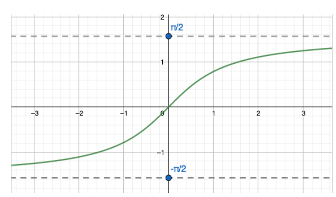
2.10.8 Tangente e Arcotangente

Tangente: $f(x) = \tan x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Arcotangente: $f(x) = \arctan x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



(a) $\tan x$



(b) $\arctan x$ o $\tan x^{-1}$

Osservazione 2.10.12. Tan(x): La funzione $\tan x$, rappresentata nell'immagine [17a], può essere scritta anche come $\frac{\sin x}{\cos x}$, ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione tangente è fatta da infiniti intervalli, è quindi periodica per π; è di base non invertibile, ma se la ristringiamo in $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ diventa biunivoca ed accetta la funzione inversa che è $\arctan x$.

Osservazione 2.10.13. Arctan(x): La funzione $\arctan x$, rappresentate nell'immagine [17b], è inversa della funzione $\tan x$, può quindi essere scritta anche con la forma $\tan x^{-1}$.

3 Massimi e minimi

3.1 Massimo e minimo intervalli

Definizione 3.1.1 (Massimo). *Dato un insieme A tale che:*
$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ *m si dice* ***massimo*** *di A se* $m \geq a \,\forall\, a \in A$ *e* $m \in A$

Definizione 3.1.2 (Minimo). *Dato un insieme A tale che:*
$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ *m si dice* ***minimo*** *di A se* $m \leq a \,\forall\, a \in A$ *e* $m \in A$

Esempio 3.1.1. Esempi massini e minimi intervalli:

- Dato $A = [0, 1]$ il max(A) = 1 e il suo min(A) = 0
- Dato $B = [0, 1)$ il min(B) = 0 mentre B non ha massimo.

Dimotrazione 3.1.1. Dimostriamo questo esempio:

Supponiamo per assurdo che $m \in \mathbb{R}$ sia il max di B, con ovviamente $m \in B$. Se tale condizione è vera $m < 1$ perché 1 non è incluso nell'insieme B = [0, 1).

Poniamo ora $\epsilon = 1 - m$, così facendo ϵ diventa la lunghezza dell'intervallo fra 1 ed m.

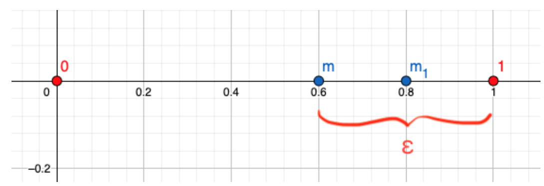


Figure 18: Segmento B

Definiamo ora un $m_1 = m + \frac{\epsilon}{2}$. Creando questo valore m_1 vediamo che $m_1 \in B$ ma anche che $m < m_1$ che contrasta con la definizione di massimo di B che dovrebbe essere $m \geq b \,\forall\, b \in B$. Così dimostriamo la non esistenza di un valore massimo.

3.2 Maggiorante e minorante intervalli

Definizione 3.2.1 (Maggiorante). $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{R}$ *si dice* ***maggiorante*** *di A se* $k \geq a \,\forall\, a \in A$. *L'insieme di tutti i maggioranti si indica con* M_A.

Definizione 3.2.2 (Minorante). $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{R}$ *si dice* ***minorante*** *di A se* $k \leq a \;\forall\; a \in A$. *L'insieme di tutti i minoranti si indica con* m_A.

Esempio 3.2.1. A = [0,3] allora 3 è un maggiorante di A, quindi $3 \in M_A$.
Mentre $\frac{1}{4}$ non è un maggiorante, quindi $\frac{1}{4} \notin M_A$, perché $1 > A$ e $1 > \frac{1}{2}$.

Osservazione 3.2.1. Se esiste un maggiorante di A allora ne esistono infiniti. Infatti se prendiamo un $k \in M_A$, m è un maggiorante di A $\forall\; m \geq k$. Questo discorso vale anche per i minoranti, infatti con $k \in m_A$, m è un minorante di A $\forall\; m \leq k$.

Esempio 3.2.2. Esempi per l'osservazione sopra:

- A = $\mathbb{R}$, A non ha maggioranti.
- A = $[4, +\infty]$ non ha maggioranti ma ha minoranti.

3.3 Intervallo limitato

Definizione 3.3.1 (Limitato superiormente). *Dato un intervallo A, se* $M_A \neq \emptyset$ *(insieme dei maggioranti) allora l'intervallo A si dice* ***limitato superiormente***

Definizione 3.3.2 (Limitato inferiormente). *Dato un intervallo A, se* $m_A \neq \emptyset$ *(insieme dei minoranti) allora l'intervallo A si dice* ***limitato inferiormente***

Definizione 3.3.3 (Limitato). $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *se A è sia superiormente che inferiormente limitato allora A si dice semplicemente intervallo* ***limitato***.

Osservazione 3.3.1. A è limitato se e solo se $\exists\; h, k \in \mathbb{R}$ tale che $k \leq a \leq h \;\forall\; a \in A$

3.3.1 Estremi superiori ed inferiori

Teorema 3.3.1 (Estremo superiore)**.** $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ed A è superiormente limitato, allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti. Tale minimo si dice **estremo superiore** di A e si indica con sup(A).

Teorema 3.3.2 (Estremo inferiore)**.** $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ed A è inferiormente limitato, allora esiste il massimo dell'insieme dei minoranti. Tale massimo si dice **estremo inferiore** di A e si indica con inf(A).

Esempio 3.3.1. Esempio estremi superiori ed inferiori:

- A = [0, 1) $M_A = [1, +\infty)$ e $m_A = (-\infty, 0]$ $\min(M_A) = \sup(\text{A}) = 1$ $\max(m_A) = \inf(\text{A}) = 0$
- B = [0, 1] $M_B = [1, +\infty)$ e $m_A = (-\infty, 0]$ $\min(M_B) = \sup(\text{B}) = 1$ $\max(m_B) = \inf(\text{B}) = 0$

Osservazione 3.3.2. Se esiste max(A) allora max(A) = sup(A) e viceversa se esiste min(A) allora min(A) = inf(A)

Note 3.3.1. Se A non è superiormente limitato scriviamo sup(A) $= -\infty$ e se non è inferiormente limitato inf(A) $= -\infty$.

Osservazione 3.3.3. $A \neq \emptyset$ e A è superiormente limitata, allora m = sup(A) se e solo se valgono 2 condizioni:

1. $a \leq m \ \forall \ a \in A$ Questo dice che m è un maggiorante
2. $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \overline{a}$[3]$\in A \mid \overline{a} > m - \epsilon$ $m - \epsilon$ mi dice che non ci sono maggioranti più piccoli di m.

Se valgono queste 2 condizioni m è l'estremo sup e viceversa se m è sup(A) allora valgono queste condizioni.

Note 3.3.2. Questa considerazione vale anche per m = inf(A).

Osservazione 3.3.4. La scrittura sup(A) $< +\infty$ vuol dire che l'estremo superiore di A è un numero reale, quindi A è superiormente limitato. Viceversa la scrittura inf(A) $> -\infty$ vuol dire che l'estremo inferiore di A è un numero reale, quindi A è inferiormente limitato.

3.4 Retta reale estesa

Definizione 3.4.1 (Retta reale estesa)**.** *La retta reale estesa si indica con* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *in modo che valga:* $-\infty \leq x \leq +\infty \ \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$

Osservazione 3.4.1. Se $x \in \mathbb{R}$ (quindi $x \neq +\infty, x \neq -\infty$) allora $-\infty < x < +\infty$

3.4.1 Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$

- Se $x \neq +\infty$ allora $x + (-\infty) = -\infty$.
- Se $x \neq -\infty$ allora $x + (+\infty) = +\infty$.
- Se $x > 0$ allora $x(+\infty) = +\infty$ e $x(-\infty) = -\infty$.
- Se Se $x < 0$ allora $x(+\infty) = -\infty$ e $x(-\infty) = +\infty$.
- $(+\infty) + (-\infty)$ e viceversa $0(+\infty)$ o $0(\infty)$ **Sono vietate**
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ **Sono consentite**

Osservazione 3.4.2. Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se A è superiormente limitato, A ha un massimo e se A è inferiormente limitato allora A ha un minimo.

[3] $\overline{a}$ è un semplice metodo di notazione

3.5 Parte intera di un numero

Definizione 3.5.1. *Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice* ***parte intera di x*** *e si indica con [x] il numero* $[x] = max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$

Possiamo spiegarlo in maniera semplice che è il primo numero intero che troviamo alla sinistra di x.

Esempio 3.5.1. $[\frac{25}{10}] = 2 \qquad [-\frac{25}{10}] = -2$

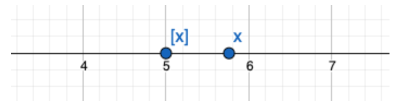


Figure 19: Parte intera di x

3.5.1 Grafico di f(x) = [x]

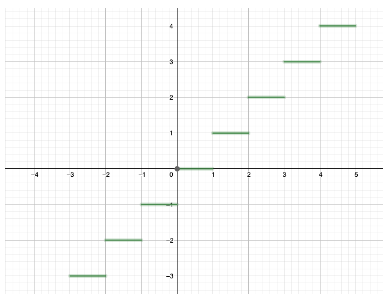


Figure 20: Grafico f(x) = [x]

Possiamo vedere nell'immagine [20] che tutti numeri vanno a valere in y come il valore del primo intero a sinistra.

Esempio 3.5.2. Esempio per f(x) = [x]:
$f(\frac{1}{2}) = 0 \qquad f(\frac{3}{2}) = 1$

$f(\frac{10}{3}) = 3 \qquad f(\frac{4}{3}) = 1$

3.6 Limiti, massimi e minimi su funzioni

Andiamo a fare una serie di definizioni prendendo due insiemi A, B tale che $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ ed una funzione $f(A)$ definita come $f : A \longrightarrow B$.

Definizione 3.6.1 (Limitata superiormente, inferiormente)**.** *f si dice limitata superiormente se $f(A)$ è limitata superiormente. Viceversa f si dice limitata inferiormente se $f(A)$ è limitata inferiormente. Se f è sia limitata superiormente che inferiormente si dice che f è limitata.*

Definizione 3.6.2 (Massimo e minimo)**.** *f ha massimo se la sua immagine $f(A)$ ha massimo. Si dice che M è il massimo di f e si scrive $M = max(f)$ se $M = max(f(A))$. Ugualmente f ha minimo se la sua immagine $f(A)$ ha minimo. Si dice che m è il minimo di f e si scrive $m = min(f)$ se $m = min(f(A))$.*

Definizione 3.6.3. *Se f non è limitata superiormente e si scrive $sup(f) = +\infty$. Ugualmente se f non è limitata inferiormente, e si scrive $inf(f) = -\infty$.*

Note 3.6.1. Rircoda che $\sup(f)$ corrisponde a scrivere $\sup(f(A))$ e ugualmente $\inf(f)$ è uguale a $\inf(f(A))$.

Definizione 3.6.4 (Punti di massimo e minimo)**.** *Se f ha massimo allora ogni $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = max(f)$ si dice punto di massimo per f. Similmente se f ha minimo allora ogni $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = min(f)$ si dice punto di minimo per f.*

Osservazione 3.6.1. Il massimo di f è unico mentre i punti di massimo possono essere molti.

Esempio 3.6.1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x$ [21]

$\max(f) = 1 \qquad x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

In questo caso essendo la funzione periodica in ogni intervallo di $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ esisterà un punto di massimo mentre il massimo rimarrà sempre 1.

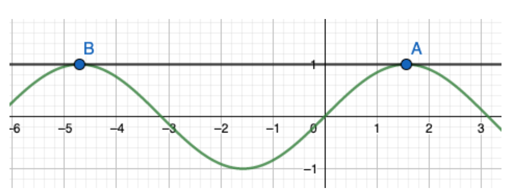


Figure 21: funzione $f(x) = \sin x$

Esempio 3.6.2. $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ [22]

In questa casistica f non ha ne massimo ne minimo. Questo lo possiamo dimostrare andando ad immaginare una casistica dove esiste un massimo ed un minimo e facendo poi alcune considerazione.

Innanzitutto prendiamo per assurdo che f avesse massimo allora $\implies \exists\ m$ tale che $f(x) \leq m \ \forall \ x \in (0, +\infty)$.
Se in questa casistica prendessimo un punto x e dicessima che quello è il massimo, $f(\frac{1}{x}) = m$, ma se poi prendiamo un punto che è $\frac{x}{2}$ esso apparitene sempre alla funzione e $f(\frac{x}{2}) = 2m$ e $2m > m$. Quindi vediamo come non è possibile determinare un massimo.

Questa funzione non può nemmeno avere un minimo perché $f(x) > 0 \ \forall \ x$, quindi $inf(f) = 0$. Se f avesse minimo dovrebbe essere $m(f) = inf(f) = 0$ ma questo presuppone che debba esiste un x_0 tale che $f(x_0) = 0$ cioè $\frac{1}{x_0} = 0$, ma questo è impossibile.

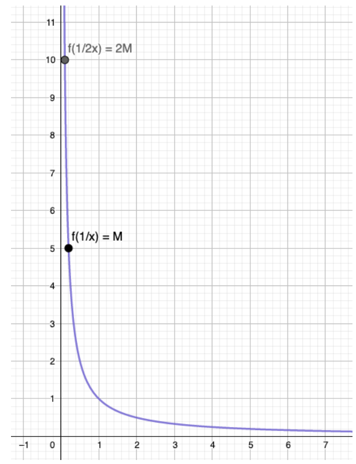
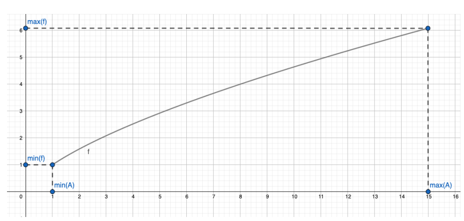


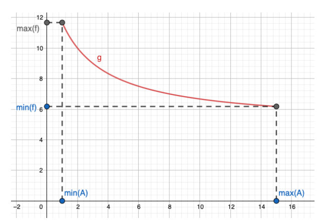
Figure 22: funzione $f(x) = \frac{1}{x}$

Osservazione 3.6.2. Consideriamo un insieme A $\subset \mathbb{R}$ e una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, valgono per essi le seguenti osservazioni:

- Se A ha massimo e f è debolmente crescente allora f ha max e max(f) = f(max(A)).
- Se A ha minimo e f è debolmente crescente allora f ha min e min(f) = f(min(A)).
- Se A ha minimo e f è debolmente crescente allora f ha min e min(f) = f(max(A)).
- Se A ha massimo e f è debolmente crescente allora f ha max e max(f) = f(min(A)).



(a) Punti max e min f crescente



(b) Punti max min f decrescente

Osservazione 3.6.3. Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ allora m = sup(f) se e solo se valgono queste due condizioni:

1. $f(x) \leq m \ \forall \ x \in A$ Questo vuol dire che m deve essere maggiore o uguale di qualsiasi f(x)
2. $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) > m - \epsilon$ Questo vuol dire che per qualsiasi valore ϵ maggiore di 0 deve esistere un $\overline{x}$ appartenendo all'insieme A tale che, se sottraiamo il valore ϵ a m il risultato deve essere inferiore a $f(\overline{x})$ ciò vuol dire che non ci sono altri valori per il quale la funzione è sempre sotto.

4 Valore assoluto

Definizione 4.0.1 (Valore assoluto)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x il massimo valore fra x e -x e si indica con $|x|$.*

$$|x| = max(\{x, -(x)\}) \tag{3}$$

Esempio 4.0.1. Esempi valore assoluto:

- $|5| = max(\{5, -5\}) = 5$
- $|-3| = max(\{-3, -(-3)\}) = 3$

4.1 Proprietà valore assoluto

(1) $x \leq \|x\| \ \forall \ x \in \mathbb{R}$	(2) $\|x\| = x$ se $x \geq 0, \|x\| = -x$ se $x \leq 0$
(3) $\|x\| \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$	(4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(5) $\|-x\| = \|x\|$	(6) $-\|x\| \leq x \leq \|x\|$
(7) $\|x\| \leq M \iff -M \leq x \leq M$ con $M \geq 0$	(8) $\|x\| \geq M \implies x \geq M$ oppure $x \leq -M$

Table 4: Proprietà valore assoluto

4.1.1 Spiegazioni proprietà

Se stabiliamo un punto M maggiore del valore assoluto la funzione si troverà compreso fra M e -M. Se invece stabiliamo un punto M minore del valore assoluto la funzione sarà maggiore di M e minore di -M. Spiegazione grafica nell'immagine [24]

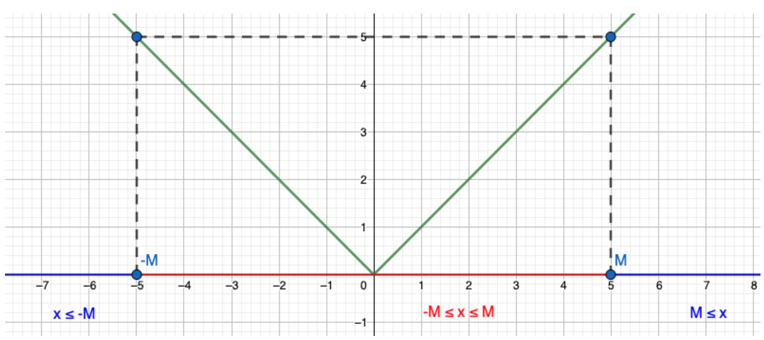


Figure 24: Spiegazione proprietà 7 e 8

4.2 Disuguaglianza triangolare

Definizione 4.2.1 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dati due valore a e b tali che $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che:*

$$(1) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \qquad (2) \quad ||a| + |b|| \leq |a - b| \tag{4}$$

Dimotrazione 4.2.1. Dimostrazione proprietà (1):
Dati due valori a e b calcoliamo il valore assoluto, che per la proprietà (6) in tabella 4 possiamo scrivere nella seguente forma:

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad -|b| \leq b \leq |b| \tag{5}$$

Ora facciamo una somma di disuguaglianze fra le forme riportate sopra:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \tag{6}$$

Possiamo vedere la prima parte $-|a| - |b|$ come un -M, la parte $a + b$ come una x e l'ultima parte $|a| + |b|$ come M. Utilizzando a questo punto la proprietà (7) in tabella 4, $|x| \leq M$ quindi:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{7}$$

Osservazione 4.2.1. Perché una disuguaglianza triangolare a 3 numeri, $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$, vale?

Perché se $|a + b + c|$ lo dividiamo in $|(a + b) + c|$ possiamo applicare la propria triangolare su 2 valori considerando $(a + b)$ il primo e c il secondo questo fa si che $|(a + b) + c| \leq |a + b| + |c|$ andando poi a riapplicare la disuguaglianza triangolare questa volta solo su $|a + b|$ vediamo che:

$$|a + b + c| = |(a + b) + c| \leq |a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c| \tag{8}$$

Da qui possiamo dedurre che la disuguaglianza triangolare vale indipendentemente dal numero di valori:

$$|a_1, a_2, a_3, ..., a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| \tag{9}$$

5 Continuità

Definizione 5.0.1 (Funzione continua)**.** *Dato un insieme A ed una funzione $f(x)$ tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, la funzione f si dice **continua** in x_0 se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che se data una $x \in A$:*

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{10}$$

La condizione scritta sopra [10] può essere scritta anche tramite due condizioni:

- $|x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
- $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Longleftrightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$

Esempio 5.0.1. Ora per capire meglio facciamo un esempio di funzione non continua:

Innanzitutto stabiliamo una $f(x)$ e verifichiamo che $f(x)$ in $x_0 = 0$ non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \quad x \leq 0 \\ 1 \ \ se \quad x > 0 \end{cases}$$

Come prima cosa stabiliamo un $\epsilon = \frac{1}{2}$. Ora, qualunque sia $\delta > 0$ se andiamo a prendere una x tale che $x \in (0, \delta) \Longrightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza $f(x_0) - \epsilon > f(x) < f(x_0) + \epsilon$, che diventerebbe $0 - \frac{1}{2} < f(x) < 0 + \frac{1}{2}$, è falsa.

Deduciamo quindi che in $x_0 = 0$ questa funzione non è continua.

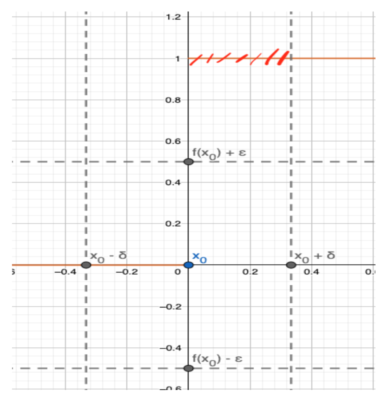


Figure 25: funzione non continua

Definizione 5.0.2. *Dato un insieme A ed una funzione $f(x)$ tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un insieme $B \subset \mathbb{R}$ si dice che f è continua in B e f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.*

Se invece si dice semplicemente che f è continua senza specificare il sotto insieme B vuol dire che f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

Esempio 5.0.2. Esempio basato sulla funzione vista sopra:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \quad x \leq 0 \\ 1 \ \ se \quad x > 0 \end{cases} \qquad f \text{ è continua in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

5.1 Permanenza del segno

Teorema 5.1.1 (Permanenza del segno)**.** Dato un insieme A ed una funzione f tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$ allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $x \in A$ è $|x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) > 0$. Analogo risultato se $f(x_0) < 0$.

Dimotrazione 5.1.1. Sappiamo che $f(x_0) > 0$. Ora scegliamo un $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ ed utilizziamolo nella definizione di continuità:

$$\exists\ \delta > 0 \ |\ x \in A, |x - x_0| < \delta \Longleftarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{11}$$

Ciò che risulta dalle condizioni poste dalla continuità è che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \tag{12}$$

Se prendiamo la prima parte $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ e facciamo le dovute sostituzioni risulta che:

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \tag{13}$$

Visto che $f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}$ è sempre maggiore di 0 risulta anche che $f(x)$ è maggiore di 0. ■

Corollario 5.1.1.1. *Se f è continua in x_0 $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) > M$ con $M \in \mathbb{R}$, $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$. (Vale anche con $f(x_0) < M \Longrightarrow f(x) < M$)*

Dimotrazione 5.1.2 (Dimostrazione del corollario 5.1.1.1)**.** La dimostrazione di questo corollario è immediata e si fa applicando al teorema precedente 5.1.1 la funzione $g(x) = f(x) - M$, perché se la funzione $f(x) - M > 0$ è come dire $f(x) > M$. ■

5.2 Continuità con operazioni fra funzioni

Teorema 5.2.1. Prendendo due funzioni f e g continue in un punto x_0 allora le funzioni $f + g$, $f * g$ e $|f|$, se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ è continua.

Corollario 5.2.1.1. *Prendendo due funzioni f e g continue in un punto x_0 allora $\frac{f}{g}$ è continua se $g(x_0) \neq 0$*

5.3 Funzioni invertibili e continuità

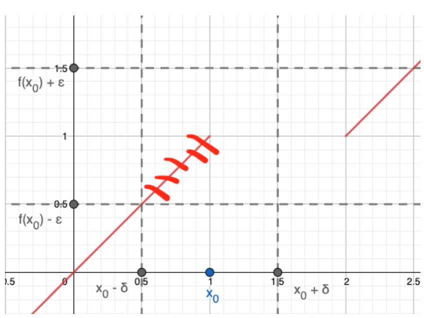
Proposizione 5.3.1. *Prendendo due insiemi I (I deve essere un intervallo) e B tale che $I \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $f : I \longrightarrow B$, se f è continua in I ed è invertibile allora f^{-1} è continua in B.*

Osservazione 5.3.1. Possiamo osservare che ipotesi della proposizione 5.3.1 dice che il domino sia un intervallo, questo non può essere omesso.

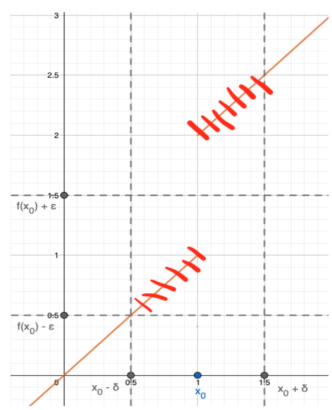
Esempio 5.3.1. Verifichiamo questa osservazione con un' esempio:

Prendiamo una funzione $f(x)$ definita in $f : (-\infty, 1] \cup (2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x \; se & x \leq 1 \\ x - 1 \; se & x > 1 \end{cases}$

Qui di seguito le rappresentazioni della funzione $f(x)$ e della sua inversa $f(x)^{-1}$



(a) Osservazione proposizione 5.3.1, funzione $f(x)$



(b) Osservazione proposizione 5.3.1, funzione $f(x)^{-1}$

- **Domanda 1°:** f è continua in $x_0 = 1$?
  La risposta a questa prima domanda è SI, essendo che noi andiamo a considerare solo i punti all'interno del dominio, quindi la parte compresa fra 1 e 2, dove la funzione presenta una discontinuità, non si considera.
- **Domanda 2°:** f è continua in $x_0 = 2$?
  La risposta in questo caso è che non ha senso considerare il punto $x_0 = 2$ visto che 2 non fa parte del dominio.

Quindi f è continua in tutto il suo dominio. Essendo f continua in tutto il suo dominio allora teoricamente f^{-1} è una funzione invertibile.

Possiamo però vedere che la funzione f^{-1}, figura [26b] non è continua in $x_0 = 1$ perché essendo la funzione inversa f^{-1} è definita come $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$, quindi dobbiamo considerare come dominio tutto $\mathbb{R}$, così facendo ci sono dei punti, in particolare con $x > 0$ che non rientrano nell'intervallo fra $f(x_0) - \epsilon$ e $f(x_0) + \epsilon$.

In conclusione da questo esempio deduciamo che, se f non è definita in un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f è continua.

5.4 Continuità delle funzioni elementari

$f(x) = x$ è una funzione continua. Da questa considerazione segue che tutte le funzioni con polinomi sono continue.

Note 5.4.1. Ricorda che anche le funzioni costanti sono sempre continue

Definiamo in maniera generica così una funzione formata da polinomi continua:

$$P(x) = a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x + a_0 \;\; con \;\; a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Quindi: $x^2 = x * x$ è continua $\qquad x^3 = x^2 * x$ è continua $\qquad x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{N}$

Le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione. Le funzioni razionali sono uguali a quoziente di polinomi: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomi, la funzione $f(x)$ è definita se $q(x) \neq 0$.

Assumendo che e^x, $\sin x$, $\cos x$ sono funzioni continue quindi anche $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\tan x$, $\arctan x$ sono continue.

5.5 Continuità fra composizione di funzioni

Teorema 5.5.1. Date due funzioni $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora $g \bullet f$ è continua in x_0.

Esempio 5.5.1. Facciamo un esempio usando la funzione $e^{\cos x}$.
$e^{\cos x}$ è una funzione continua perché è la composizione di $f(x) = \cos x$, funzione continua, e $g(x) = e^y$, pure essa funzione continua.

Osservazione 5.5.1. Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ allora $\sup(f(x))$ con $x \in (a, b) = \sup(f(x))$ con $x \in [a, b]$. E ugualmente $\inf(f(x))$ con $x \in (a, b) = \inf(f(x))$ con $x \in [a, b]$.

Esempio 5.5.2. $f(x) = x^2$ con $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\sup(f(x)) = f(1) = 1$ con $x \in [0, 1] \qquad \sup(f(x)) = f(1) = 1$ con $x \in (0, 1)$ [4]

5.6 Teorema degli zeri

Teorema 5.6.1 (Teorema degli zeri)**.** Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

Questo teorema dice che prendendo una funzione, che deve essere obbligatoriamente continua, se i valori di $f(x)$ nei due estremi moltiplicati fra di loro risultano minori di 0 la funzione passa per 0 in un ponto c e questo accade perché se il prodotto fra i due estremi torni inferiore a 0 vuol dire che hanno segno discorde.

Esempio 5.6.1. Facciamo un esempio di un caso in cui la funzione NON è continua:

Prendiamo $f(x) = [x] + \frac{1}{2} \quad f : [1, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Se ora prendiamo la f(x) nei due estremi e facciamo il prodotto torna che:
$f(1) \cdot f(-1) < 0$ ma $\nexists x \in [-1.1]$ t.c. $f(x) = 0$ come possiamo vedere nell'immagine 27.

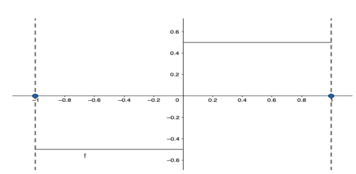


Figure 27: $f(x) = [x] + \frac{1}{2}$

[4] Ricorda che sup(imm($f(x)$)) = sup(0, 1) = 1

5.7 Teorema valori intermeti

Teorema 5.7.1 (Teorema dei valori intermedi)**.** Prendendo un intervallo $I \subset R$, ed una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $f(I)$ è un intervallo.

Questo teorema dice che se il nostro dominio è un intervallo e la f è continua all'ora anche il codominio o immagine di f sarà un intervallo.

Corollario 5.7.1.1. *Prendendo sempre un $I \subset R$, una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se f assume y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1 e y_2.*

5.8 Teorema di Weirstrass

Teorema 5.8.1 (Teorema di Weirstrass)**.** Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo.

Note 5.8.1. Notare che $a, b \in \mathbb{R}$ e non in $\overline{\mathbb{R}}$ perché $a, b \neq \pm\infty$ e gli estremi devono essere compresi.

Esempio 5.8.1. Facciamo ora un esempio per confermare come il teorema di Weirstrass possa valore solo con un intervallo chiuso:
Dato $f(x) = \frac{1}{x}$ con $f(x) : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

in questo caso f ha come dominio un intervallo non chiuso a sinistra
f è continua ma non ha max perché $\sup(f) = +\infty$

Esempio 5.8.2. Facciamo ora un esempio per confermare come il teorema di Weirstrass possa valore solo con un intervallo limitato:
Dato $f(x) = \arctan x$ con $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

in questo caso f è una funzione continua definita come $-\frac{\pi}{1} < f(x) < \frac{\pi}{2}$
Possiamo notare però che f non toccherà mai ne $-\frac{\pi}{2}$ ne $\frac{\pi}{2}$ e quindi non ha ne massimo ne minimo.

6 Limiti

6.1 Intorni

Definizione 6.1.1 (Intorno)**.** *Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice* ***intorno*** *di x_0 un insieme del tipo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ dove $\epsilon \in \mathbb{R}$, e $\epsilon > 0$. Inoltre ϵ si dice raggio dell'intorno*

- Un insieme del tipo $[x_0, x_0 + \epsilon]$ si dice **intorno destro** di x_0.
- Un insieme del tipo $[x_0 - \epsilon, x_0]$ si dice **intorno sinistro** di x_0.

Definizione 6.1.2. *Se $x_0 = +\infty$ un intorno di x_0 è un insieme del tipo $(a, +\infty)$*[5] *dove $a \in \mathbb{R}$*

Definizione 6.1.3 (Punto di accumulazione)**.** *Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{R}$ x_0 si dice* ***punto di accumulazione*** *per A se $\forall\, U$ intorno di x_0 risulta che $U \cap A \setminus \{x_0\} \neq 0$*

Questa definizione vuol dice che "vicino" a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0 (x_0 potrebbe anche non appartenere ad A).

Esempio 6.1.1. Prendiamo un intervallo A = (2, 3).

Se prendiamo un punto x_0 che appartiene a A, quindi $x_0 \in (a, b)$, allora ogni intorno di x_0 interseca A in infiniti punti, quindi x_0 è un punto di accumulazione di A.

Definizione 6.1.4 (Intorno bucato)**.** *Se invece non andiamo a considerare x_0 nel suo intorno si dice* ***Intorno bucato*** *e si scrive come $\{x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\} \setminus \{x_0\}$*

Ora andiamo a dimostrare come tutti i punti [2,3] $\in$ acc(A). Se poniamo per esempio $x_0 = 2$. Se andiamo a prendere un intorno di x_0 nonostante il ϵ possa essere piccolissimo esisteranno sempre infiniti punti nell'intersezione fra U intorno e A ($U \cap A \setminus \{x_0\}$) perché qualsiasi sia l'epsilon $2 + \epsilon$ rientrerà sempre in A.
Questo anche con $x_0 = 3$.

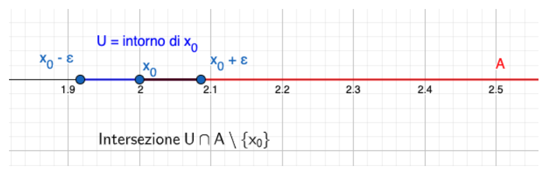


Figure 28: Punto di acc $x_0 = 2$ dell'intervallo A

Note 6.1.1. Nota che oltre a tutto [2,3] $\in$ A non esisto altri punti di accumulazione di un intervallo A.

Definizione 6.1.5 (Punto isolato)**.** *Dato un insieme A, $x_0 \in A$ si dice* ***punto isolato*** *di A se esiste un U intorno di x_0 tale che $U \cap A = \{x_0\}$*

Esempio 6.1.2. Facciamo un osservazione con un intorno spezzato per vedere un caso di punto isolato.

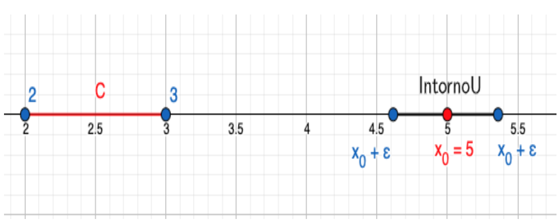


Figure 29: Punto di acc $x_0 = 5$ dell'intervallo C

Se prendiamo un punto C $= (2, 3) \cup \{5\}$ non possiamo dire che tutti i punti dell'intervallo C siano punti di accumulazione perché se prendiamo $x_0 = 5$ possono esistere dei casi in cui il suo intorno non interseca C (con U intorno di $x_0 = 5$, $U \cap C \setminus 5 = \emptyset$).
Diciamo quindi che in questo caso acc(c) = [2,3]

Esempio 6.1.3. Esempio in cui verifichiamo come, dato un insieme D $= (3, +\infty)$, sia $+\infty \in$ acc(D).
Come prima cosa prendiamo un U intorno di $x_0 = +\infty$. Quindi $U = (a, +\infty)$.
Definiamo ora il punto maggiore fra 3 ed a, $b = \max(3, a)$, questo punto sarà l'estremo sinistro dei punti di accumulazione. Facciamo ora l'intersezione:

$$U \cap D \setminus \{x_0\} = (2, +\infty) \cap (a, +\infty) \setminus +\infty = (b, +\infty) \neq \emptyset.$$

Vediamo dunque che $+\infty$ è un punto i accumulazione di D, quindi acc(D) $= [b, +\infty]$.

[5] $(a, +\infty)$ è una semiretta

Esempio 6.1.4. Esempio prendendo come insieme $E = \mathbb{N}$.

Se osserviamo l'immagine 30 vediamo chiaramente come tutti gli elemento di $\mathbb{N}$ sia punti isolare e quindi non siano punti di accumulazione. Ma, per l'esempio visto sopra, $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{R}$. $\text{Acc}(\mathbb{N}) = +\infty$.

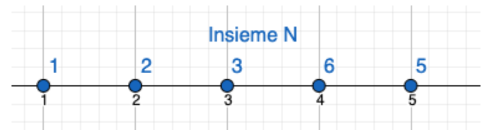


Figure 30: Insieme $\mathbb{N}$

Note 6.1.2. Allo stesso modo prendendo in considerazione l'insieme $\mathbb{Z}$ i suoi punti di accumulazione sono $\text{acc}(\mathbb{Z}) = \{-\infty, +\infty\}$

Definizione 6.1.6. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in A$, si dice x_0 punto interno ad A se esiste un U intorno di x_0 tale che $U \subset A$. L'insieme dei punti interni si indica con int(A).*

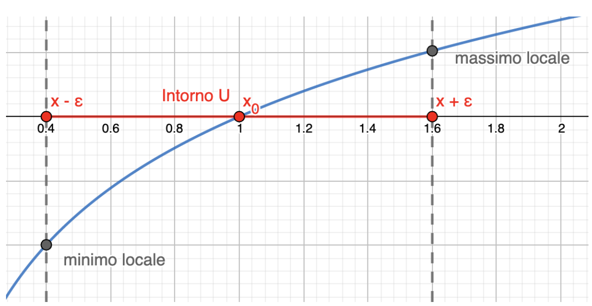
Esempio 6.1.5. Dato un A = [3, 5] i punti intesi sono (3,5) e non [3,5] perché se prendiamo $x_0 = 3$ o $x_0 = 5$ essendo che l'intorno di x_0 è $[x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon]$ rimarrà sempre una parte fuori, in particolare quella di sinistra per $x_0 = 3$, e quella di destra per $x_0 = 5$.

6.1.1 Minimi e massimi locali

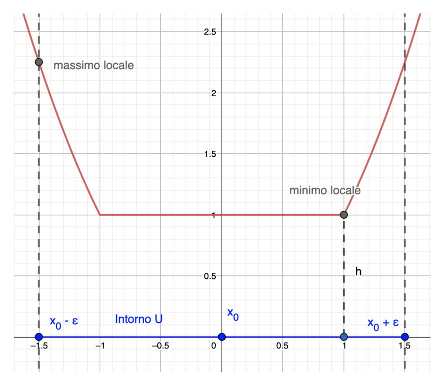
Definizione 6.1.7 (Minimi e massimi locali e locali stretti)**.** *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in A$ si dice che x_0 è:*

- ***Minimo locale*** *(o relativo) se esiste un U intorno di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)\,\forall\, x \in U \cap A$*
- ***Minimo locale stretto*** *se esiste un U intorno di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)\,\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$*
- ***Massimo locale*** *(o relativo) se esiste un U intorno di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)\,\forall\, x \in U \cap A$*
- ***Massimo locale stretto*** *se esiste un U intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)\,\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$*

Questa definizione vuol dire che se andiamo a prendere un intorno di x_0, il punto x_0 può essere definito minimo o massimo di quel determinato intorno se è il punto più "in basso" o più "in alto" rispetto a tutti gli altri punti dell'intorno.



(a) Minimo e massimo locale



(b) Minimo e massimo locale stretto

Come si può vedere dalle immagini [31a] [31b] noi andiamo a considerare solo i punti all'interno dell'intorno di x_0, infatti esisterebbero altri punti esterni a U intorno maggiori o minori, ma non li consideriamo.

Note 6.1.3. Nota che se x_0 è punto di minimo allora è anche punto di minimo locale, qualsiasi sia l'intorno che prendiamo in considerazione.

6.2 I limiti

Definizione 6.2.1 (Limite)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, ed un x_0 punto di accumulazione per A, si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ se $\forall$ V intorno di l, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in V$*

Questa definizione dice che un valore l per essere definito come limite di una funzione con x che tende a x_0 bisogna che per qualsiasi intorno che andiamo a prendere di l deve esistere una intorno di x_0 chiamato U tale che, se una x appartiene ad U allora la $f(x)$ apparterrà all'intorno di l.
Se ci rifacciamo alle definizioni di intorno vediamo che $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ vuol dire che $|x - x_0| < \delta$ e che $f(x) \in V$ vuol dire che $l - \epsilon < f(x_0) < l + \epsilon$.
Questa definizione può essere scritta in altre parole dicendo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^6 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } x \in A, |x - x_0| < \delta \land x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Esempio 6.2.1. Alcuni esempi di limiti:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad V = (a, \pm\infty) \qquad f(x) \in V$ se e solo se $f(x) > a$
  Il risultato di questo limite è $\pm\infty$ se $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta, x \in A, x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) > a$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l \qquad$ se $l \in \mathbb{R}$ se e solo se $x \to \infty$
  Il risultato del limite è un valore appartenete a $\mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > a\ \exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $x > a \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ se e solo se $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $x > b \Longrightarrow f(x) > a$

Teorema 6.2.1 (Unicità dei limiti)**.** Se esiste un limite di f con $x \to x_0$, questo limite è unico.

6.3 Continuità con i limiti

Rivediamo le definizioni di limiti (con il limite che sia un numero finito) e continuità accanto:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0 \in A$, $l \in \mathbb{R}$ è vera se e solo se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $x \in A, x \neq x_0$ è $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
2. f è continua in x_0 se e solo se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ con $x \in A \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Notiamo subito che fra la definizione (1) e la (2) c'è come unica differenza che nella prima c'è l mentre nella seconda c'è $f(x)$. Possiamo dunque trarre una serie di osservazioni.

Osservazione 6.3.1. Data una funzione $f(x)$ essa è continua in $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Osservazione 6.3.2. Una funzione è sempre continua nei punti isolati.

Osservazione 6.3.3. Nella definizione di limite non serve che x_0 sia nel dominio di una funzione, basta che sia un punto di accumulazione per il dominio.

Esempio 6.3.1. Esempio di continuità con i limiti:

$$f(x) = \begin{cases} 3 \ \ se \quad x \neq 0 \\ 2 \ \ se \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$, senza considerare f in $x = 0$.
Secondo la definizione di continuità di una funzione vista sopra (dove andiamo a guardare il valore del limite in x_0):

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in A,\ x \neq x_0 \text{ allora } |f(x) - l| < \epsilon.$$

Se andiamo però a vedere $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$ mentre $f(0) = 2$ e ovviamente $2 \neq 3$ quindi f non è continua in x_0.

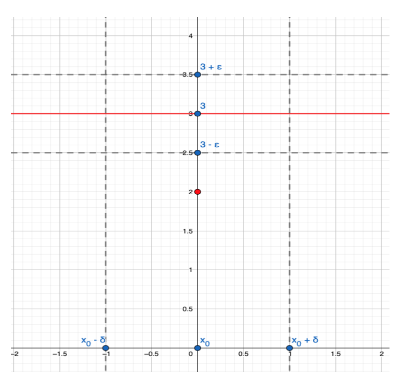


Figure 32: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

[6] La notazione $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ è quella con cui andiamo a scrivere i limiti e vuol dire limite di $f(x)$ con x che tende a x_0 è uguale a l valore del limite

6.4 Limite destro e sinistro

Definizione 6.4.1 (Limite destro e sinistro)**.** *Se dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, un $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 deve essere un numero finito), ed $f : A \to \mathbb{R}$, allora si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da **destra** (si scrive come $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$) se:*

$$\forall\, V \text{ intorno di } l\, \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } x_0 < x < x_0 + \delta,\, x \in A \Longrightarrow f(x) \in V$$

*Si dice limite **sinistro** (si scrive come $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$) se:*

$$\forall\, V \text{ intorno di } l\, \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } x_0 - \delta < x < x_0,\, x \in A \Longrightarrow f(x) \in V$$

Esempio 6.4.1. Se prendiamo una $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ se} & x < 0 \\ 1 \text{ se} & x > 0 \end{cases}$

Il $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ mentre $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Ciò perché andiamo nel caso del limite destro a guardare il valore ”alla destra” di 0 e nel limite sinistro il valore ”alla sinistra”.

Osservazione 6.4.1. $\lim_{x\to x_0^+} = l$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^+} = l_1$, $\lim_{x\to x_0^-} = l_2$ e $l_1 = l_2$. Cioè per far in modo che il limite di una funzione che tende ad un valore x_0 sia unico bisogna che il limite destre e quello sinistro siano uguali. Nell'esempio precedente infatti possiamo notare che non esiste un unico limite perché i valori del destro e del sinistro sono diversi.

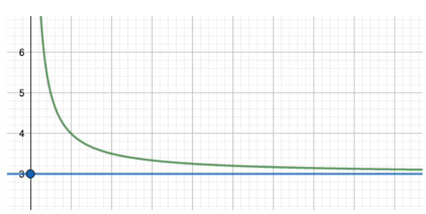
6.5 Limite da sopra e da sotto

Dato un $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in Acc(A)$

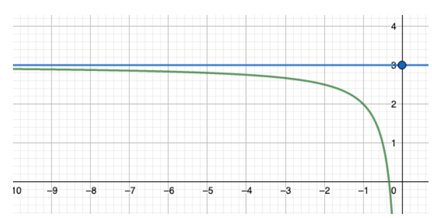
Definizione 6.5.1. *Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^+$ (con $l \in \mathbb{R}$) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ed esiste un U intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) > l$*

Definizione 6.5.2. *Mentre analogamente si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^-$ (con $l \in \mathbb{R}$) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ed esiste un U intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) < l$*

Queste due definizione vogliono dire che la funzione può tendere ad un valore ”da sopra” nel caso del + e ”da sotto” nel caso del -.



(a) Limite che tende da sopra



(b) Limite che tende sa sotto

Esempio 6.5.1. Un esempio è con $f(x) = \frac{1}{x}$ dove $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$

6.6 Permanenza del segno

Teorema 6.6.1 (Permanenza del segno)**.** Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$ se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, dove $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l \neq 0$ allora esiste un intorno U di x_0 t.c se $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ allora $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Esempio 6.6.1. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Quindi visto che $+\infty > 0$ se prendiamo un intorno di x_0 qualsiasi $f(x)$ con x appartenente all'intersezione fra il dominio e l'intorno (escluso x_0) tornerà che $f(x) > 0$.

6.7 Non esistenza di un limite

Ci sono casistiche di funzioni nel quale un limite non esiste, e quindi no può essere calcolato. Per verificare ciò vediamo alcuni esempi.

Esempio 6.7.1. $\lim_{x \to x_0} \sin(x)$ Non esiste. Vediamo perché.

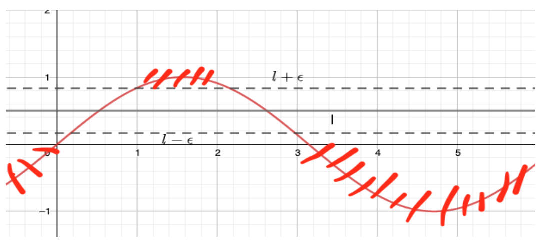


Figure 34: Limite che non esiste

Supponiamo per assurdo che:
$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = l$
[7]Prendiamo ora un valore $\epsilon < \frac{1}{2}$.

Se esistesse il limite $l \in \mathbb{R}$ allora dovrebbe esistere $a > 0$ t.c. $x > a \implies l - \epsilon < \sin x < l + \epsilon$ ma questo assurdo perché vorrebbe dire che $\sin x$ oscilla con ampiezza minore di 2ϵ mentre $\sin x$ oscilla con ampiezza 2.

Note 6.7.1. Nota che nell'immagine 34 le parti rosse escono dall"intervallo $[l - \epsilon, l + \epsilon]$.

6.8 Continuità destra e sinistra

Definizione 6.8.1 (Continuità destra e sinistra)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$:*

- *se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che f è* ***continua a destra*** *in x_0.*
- *se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che f è* ***continua a sinistra*** *in x_0.*

Esempio 6.8.1. Data una $f(x) = \begin{cases} 1 \ se & x \geq 0 \\ -1 \ se & x < 0 \end{cases}$
Il $\lim_{0^+} f(x) = 1$ mentre $\lim_{0^-} f(x) = -1$
Questo esempio ci dice, come spiegato nella definizione sopra (6.8.1), che la funzione è continua a destra nel caso di 0^+ mentre con 0^- la funzione non è continua a sinistra perché il risultato del limite $l \neq f(x_0)$.

Osservazione 6.8.1. Nel esempio sopra possiamo vedere che la funzione è continua in x_0^+ ma non in x_0^-. Sin può osservare infatti come una funzione f è continua in un punto x_0 se e solo se è continua sia a destra che ha sinistra, perché ciò vorrebbe dire che entrambi i limiti, quello da x_0^- e x_0^+, avrebbero uno stesso risultato:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \qquad l_1 = l_2 = f(x_0)$$

6.9 Teorema di confronto

Teorema 6.9.1 (Teorema di confronto)**.** Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(x)$, e due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se esiste un $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ e se esiste un U intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ e $f(x) \leq g(x)$ allora $l_1 \leq l_2$.

Questo teorema in maniera sintetica dice che se una funzione "sta sotto" l'altra a sua volta anche il limite della prima starà sotto il secondo, detto in altre parole la disuguaglianza passa ai limiti:

$$\text{Se } f(x) \leq g(x) \text{ allora } \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Osservazione 6.9.1. Se però esiste $f(x) < g(x)$ non potrei dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$. Perché:

[7]Ricorda che per la definizione di limite la f(x) deve essere compresa fra $f(x_0) + \epsilon$ e $f(x_0) - \epsilon$ qualsiasi sia il valore di ϵ

Se prendiamo come esempio due funzioni una $f(x) = -\frac{1}{x}$ e una $g(x) = \frac{1}{x}$ vediamo che $f(x) < g(x)$ ma se calcoliamo i limiti $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e quindi i limiti sono uguali. Possiamo dunque dire che le disuguaglianze passano al limite ma diventano sempre deboli:

$$\text{Se } f(x) < g(x) \text{ allora } \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

6.10 Teorema somma e prodotto

Teorema 6.10.1 (Teorema somma e prodotto)**.** Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano i limiti $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Se ha senso $l_1 + l_2$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$.
- Se ha senso $l_1 \cdot l_2$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 \cdot l_2$.

Note 6.10.1. Sono esclusi i casi $l_1 = +\infty$ e $l_2 = -\infty$ (o viceversa) per il prodotto. Sono invece esclusi i casi $l_1 = 0$ e $l_2 = \pm\infty$ (o viceversa) per la somma. Questi casistiche sono dette indeterminate e non possono essere calcolate in maniera diretta.

6.11 Teorema dei carabinieri

Teorema 6.11.1 (Teorema dei carabinieri)**.** Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e due funzioni $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ (i due limiti hanno lo stesso risultato) e se esiste un intorno U di x_0 t.c. $x \in A \cup U \setminus \{x_0\}$, se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

Il teorema dei carabinieri dice in maniera sintetica che se due funzioni hanno lo stesso limite ed una è inferiore all'altra se esiste una $g(x)$ in mezzo a queste due funzioni avrà lo stesso limite per uno stesso x_0, quindi dall'esistenza dei limiti di f e h (uguali) deduco l'esistenza del limite di g

Esempio 6.11.1. Facciamo un esempio prendendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin(x)}{x}$. Prendendo due funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{3}{x}$ sapiamo che $\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin(x)}{x} \leq \frac{3}{x}$.
Se poi andiamo a calcolare i limiti per $x \to +\infty$ di $f(x)$ e di $h(x)$ vediamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Allora per il teorema dei carabinieri $\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin(x)}{x} = 0$

Alcune conseguenze del teorema dei carabinieri visto sopra:

Proposizione 6.11.1. *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$:*

- *Se f è lim. inferiormente in intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = +\infty$.*
- *Se f è lim. superiormente in intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = -\infty$.*
- *Se f è limitata in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$.*

Esempio 6.11.2. Prendiamo il $\lim_{x \to +\infty} x + \sin(x)$
$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ non esiste.
Data l'inesistenza del secondo limite non posso applicare il teorema sul limite della somma ma $\sin(x)$ è limitata inferiormente quindi: Per il teorema dei carabinieri $x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 2$, e visto che $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$ possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = +\infty$

6.12 Limitatezza funzione con i limiti

Teorema 6.12.1. Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e $f : A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \in \mathbb{R}$ (quindi l non è $\pm\infty$) allora f è limitata in un intorno di x_0 cioè $\exists U$ intorno di x_0 e $\exists M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ t.c. $x \in U \cap A \Longrightarrow |f(x)| \leq M$.

Questo teorema dice che se prendiamo una funzione che ha un limite per $x \to x_0$ che è un valore diverso da $\pm\infty$ e prendiamo un intorno di x_0 esisterà un valore M dove per qualsiasi $x \in U \cap A$ il $|f(x)| \leq M$ che corrisponderebbe a $-M \leq f(x) \leq M$ quindi la funzione sarà limitata nell'intorno selezionato.

Esempio 6.12.1. Se prendiamo $f(x) = \frac{1}{x}$ è limitata in un intorno di $+\infty$ perché $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Definizione 6.12.1. *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e $f : A \to \mathbb{R}$ possiamo dire che:*

- *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora si dice che f è **infinitesima** per x che tende a x_0.*
- *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora si dice che f è **diverge positivamente** per x che tende a x_0.*
- *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora si dice che f è **diverge negativamente** per x che tende a x_0.*
- *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ed $l \in \mathbb{R}$ (l è finito) allora si dice che f è **converge** in l per x che tende a x_0.*

6.13 Forme indeterminate

[1] $(+\infty) + (-\infty)$	[2] $(-\infty) + (+\infty)$	[3] $0 \cdot (\pm\infty)$
[4] $(\pm\infty)^0$	[5] $(0^+)^0$	[6] $(1)^{\pm\infty}$

Table 5: Forme indeterminate

Dimotrazione 6.13.1. Dimostriamo come la forma [1] e la [2] siano indeterminate (facciamo un esempio considerandone una, ma sono equivalente).
Prendiamo un $f(x) = 2x$ e $g(x) = -x$ e facciamo i limiti di entrambi, ed il limite della somma.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, la somma $\lim_{x \to +\infty} (f + g)(x) = 2x - x = x = +\infty$
In questo cosa il limite di $(+\infty) + (-\infty)$ torna $+\infty$.

Ora prendiamo invece altre due funzioni $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = -x$ e calcoliamo come prima i limiti di entrambi ed il limite della loro somma.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, la somma $\lim_{x \to +\infty} (f + g)(x) = (\frac{x}{2} - x) = -\frac{x}{2} = -\infty$
In questo caso invece il limite di $(+\infty) + (-\infty)$ torna $-\infty$.

Alla domanda, quale scegliamo? La risposta è nessuna delle due, infatti non potendo avere un risultato fisso diciamo che questa è una forma indeterminata.
Nota che questa dimostrazione è valida anche per la forma $0 \cdot (\pm\infty)$.

Per le forme [4], [5] e [6] possiamo tramite dei calcoli algebrici spiegarle riconducendoci alle prime 3 forme.

Possiamo infatti vederle come $f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)}})= e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$ e quindi possiamo analizzare i casi in cui $\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim(f(x))$ è indeterminato:

4. Con $g \to 0$ e $f \to +\infty \Longrightarrow \log(f(x)) \to +\infty = 0 \cdot +\infty$ (quindi $(+\infty)^0$ è indeterminata).
5. Con $g \to 0$ e $f \to +0^+ \Longrightarrow \log(f(x)) \to -\infty = 0 \cdot -\infty$ (quindi $(0^+)^0$ è indeterminata).
6. Con $g \to \pm\infty$ e $f \to 1 \Longrightarrow \log(f(x)) \to 0 = 0 \cdot \pm\infty$ (quindi $(1)^{\pm\infty}$ è indeterminata).

6.14 Calcolo dei limiti

Proposizione 6.14.1. *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e $f : A \to \mathbb{R}$ possiamo vedere che nel calcolare alcuni limiti si verificano delle situazioni ricorrenti:*

- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$
- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^- \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$
- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+.$
- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-.$
- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *con* $l \neq 0, \pm\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}.$

Note 6.14.1. Nota che se abbiamo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (non 0^+ o 0^-) non si conclude nulla su $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$

Proposizione 6.14.2. *Dati due valori $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, una $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con f debolmente crescente. Allora esistono $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = inf(f(x))$ quando $x \in (a, b)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = sup(f(x))$ con $x \in (a, b)$. (Analogamente con f debolmente crescente)*

Esempio 6.14.1. $f : (9, -\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -\frac{1}{x}$
Se calcoliamo i limiti viene che $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = +\infty = sup(f)$ mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = 0 = inf(f)$

6.14.1 Limiti fondamentali

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+$ se $a \geq 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 1$ se $a = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$

Table 6: Limiti fondamentali

Questi limiti scritti sopra sono alcuni dei limiti fondamentali (considera quando c'è n come $n \in \mathbb{N}$)

6.14.2 Limiti di polinomi

Se prendiamo una funzione generale così definitiva:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ con } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, n \text{ è il grado del polinomio } n \in N$$

è possibile trovare una standardizzazione per la risoluzione di $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$

Esempio 6.14.2. Prendiamo in $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7x + 1.$
Questa è una forma indeterminata $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7x + 1 = +\infty - \infty + 1$, per risolvere si raccogliere:

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2(1 - \frac{7x}{3x^2} + \frac{1}{3x^2}) = \lim_{x\to+\infty} +\infty \cdot (1 - \frac{7x}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}) = \lim_{x\to+\infty} +\infty \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$$

Come regola generale presa la funzione $p(x)$ scritta sopra risolviamo il limite tendente a $\pm\infty$ raccogliendo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^n} + ... + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{x}{x^n} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n})$$

Poi visto che i vari $\frac{x^{n-1}}{x^n}$, $\frac{x}{x^n}$ ecc. si annullano e quindi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^4 + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

6.14.3 Funzioni razionali

Se prendiamo una situazione $\frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q due polinomi quindi

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \qquad q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$$

Possiamo sviluppare il limite seguendo la logica vista nei singoli limiti di polinomi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n (1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^n}+...+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n})}{b_n x^n (1+\frac{b_{n-1}}{b_n}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^n}+...+\frac{b_0}{b_n}\cdot\frac{1}{x^n})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^n}$$

Esempio 6.14.3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4+5x^2}{-2x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{-2} = -\infty$

6.14.4 Limiti notevoli

In tabella 7 alcuni limiti notevoli, cioè limiti che all'apparenza possono sembrare il risultato ma che in realtà tornano un risultato finito.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Table 7: Limiti notevoli

Dimotrazione 6.14.1. Dimostriamo $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} = \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))}$ Moltiplico e divido per $(1+\cos(x))$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}$ Utilizzo le formule goniometriche.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}$ Spezziamo la divisioni in 3 parti.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+1}$ Facciamo il limite dei singoli pezzi.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Dimostrazione finita. ■

6.14.5 Logaritmi e potenze

Vediamo una serie di casi di calcolo di limiti con logaritmi e potenze.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata.
  Eseguiamo un cambio di variali con $y = \log(x)$ e $x = e^y$. Se $x \to +\infty \Longrightarrow y = \log(x) \to +\infty$

  Torna che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))^\beta}{x^\alpha}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta > 0$
  Possiamo risolvere con un cambio di variabile $y = \log(x)$, $x = e^y$ e se $x \to +\infty \Longrightarrow y \to +\infty$

  Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\beta}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\beta}{e^{y\cdot\alpha}} = 0$ (l'esponenziale cresce più velocemente).
- $\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0\cdot(-\infty)$ forma indeterminata.
  Facciamo il cambio di variabile $y = \log(x)$, e $x = e^y$ con $x \to 0^+ \Longrightarrow y \to -\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{y\to -\infty} e^y \cdot y = 0^+ \cdot (-\infty)$ ancora indeterminata.
Possiamo fare un altro cambio di varibile con $z = -y$, e $y = -z$ e se $y \to -\infty \implies z \to +\infty$

$\lim_{y\to -\infty} e^y \cdot y = \lim_{z\to +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \frac{-z}{e^z} = 0$

- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log(x)$ con $\alpha > 0$.
  Cambio di variabile con $y = x^\alpha$, e $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ e con $x \to 0^+ \implies y \to^+$

  $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log(x) = \lim_{y\to 0^+} y \cdot \log(y^{\frac{1}{\alpha}}) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\alpha} \cdot \log(y) = \frac{1}{\alpha} \lim_{y\to 0^+} y \cdot \log(y) = 0$ per l'esempio sopra.

6.15 Limite della composizione di funzioni

Teorema 6.15.1 (Limite della composizione di funzioni)**.** Dati $A, B \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to B$, ed una $g : B \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in Acc(A)$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ e $y_0 \in Acc(B)$ e $\exists \lim_{x\to x_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e se verifichiamo almeno delle seguenti ipotesi:

1. $y_0 \in B$ e g è continua in y_0.
2. Esiste U intorno di x_0 t.c. se $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \implies f(x) \neq y_0$

Allora $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = l$. Cioè:

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y)$$

Esempio 6.15.1. Facciamo un esempio andando a calcolare il $\lim_{x\to -\infty} \arctan(x^2)$.
Questo limite è una composizione fra $f(x) = x^2$ e $g(y) = \arctan(y)$, che può essere scritto come $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \arctan(x^2)$.
Noi abbiamo che $x_0 = -\infty$ mentre $t_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$.
Vediamo dunque che l'ipotesi (1) non è verificata perché $y_0 = +\infty$ e non appartiene al dominio di g.
Mentre possiamo vedere che l'ipotesi (2) è ovviamente verificata perché chiedo che $f(x) \neq y_0$ cioè $f(x) \neq +\infty$ che è ovviamente sempre vero. Possiamo dunque applicare il teorema:
$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \implies \lim_{x\to -\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$

Osservazione 6.15.1. Quello che osserviamo nel teorema del limite della composizione di funzioni + un teorema di cambiamento di variabili. Infatti andando a prendere l'esempio di prima vediamo che:

$$\text{Da } \lim_{x\to +\infty} \arctan(x^2) \text{ cambiamo variabile e ponto } y = x^2,\ \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

Nel caso $x \to -\infty$ dobbiamo vedere a quanto tende y, quindi $\lim_{x\to -\infty} = \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$

Osservazione 6.15.2. Un altra osservazione è del perché è inserita l'ipotesi (2) nel teorema. Facciamo un esempio per capire il suo scopo.
Prendiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
Poi prendiamo anche una $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $g(x) = \begin{cases} 3se & y = 1 \\ 5se & y \neq 1 \end{cases}$. Facciamo la composizioni di queste due funzioni e valutiamo il limite con $x \to 0$.
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1) = 3 \forall x \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) = 3$. Ma $\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to 1} g(y) = 5$.
$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
Vediamo dunque che $\lim_{x\to x_0} \neq \lim_{y\to y_0} g(y)$.
Ma infatti in questo esempio non abbiamo considerato che non vale l'ipotesi (2) e nemmeno la (1).

6.16 Teorema di Weirstrass generalizzato

Teorema 6.16.1 (Teorema di Weirstrass generalizzato)**.** Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\exists \lim_{x\to b} f(x) = l_2$, valgono i seguenti risultati:

1. f è limitata inferiormente $\iff l_1 \neq -\infty$ e $l_2 \neq -\infty$.
2. f è limitata superiormente $\iff l_1 \neq +\infty$ e $l_2 \neq +\infty$.
3. f è limitata $\iff l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \in \mathbb{R}$.
4. f ha minimo $\iff \exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) \leq min\{l_1, l_2\}$.
5. f ha massimo $\iff \exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) \geq max\{l_1, l_2\}$.

Osservazione 6.16.1. I risultati precedenti valgono anche nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ oppure $b \in \mathbb{R}$ e $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ (f sempre continua).

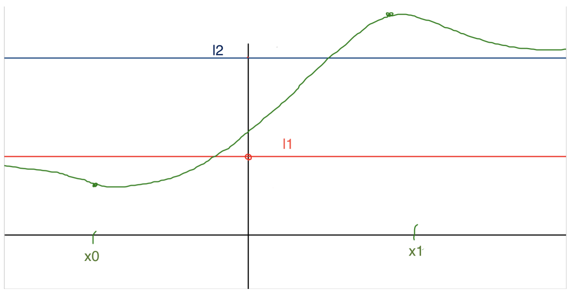


Figure 35: Massimi e minimi con Weirstrass

Come possiamo vedere nella figura 35 se la funzione sale sopra il limite maggiore dovrà necessariamente scendere e quindi si andrà a creare un massimo.

Ugualmente se la funzione scende sotto il limite minore vuol dire che poi risalirà creando dunque un minimo.

Esempio 6.16.1. Prendiamo $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ definita in $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ e calcoliamo il limite agli estremi:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cdot(1-x)} = \frac{1}{0^+\cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x\cdot(1-x)} = \frac{1}{1\cdot(1-1^-)} = \frac{1}{1\cdot 0^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

In questo caso per il teorema visto la funzione $f(x)$ ha minimo.

Esempio 6.16.2. Con $f(x) = \frac{x^2+x|x|+x}{1+x^2}$ che va da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifichiamo se c'è massimo e o minimo.

$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x}{1+x^2} & se\ \ x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & se\ \ x < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x|x|+x}{1+x^2} = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x|x|+x}{1+x^2} = 0$

Quello che ci dobbiamo domandare è se $\exists x_0$ t.c. $f(x) \leq 0$ e o $f(x) \geq 2$.

Se $x < 0 \implies f(x) = \frac{2x^2+x}{1+x^2} < 0 \forall x < 0$ quindi f ha minimo.
Mentre se $x \geq 0 \implies f(x) = \frac{x}{1+x^2} \geq 0 \implies 2x^2 + x \geq 2 + 2x^2 \implies x \geq 2$ quindi f ha anche massimo.

7 Infinitesimi

7.1 O-piccolo

Definizione 7.1.1 (O-piccolo)**.** *Prendiamo $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$). Si dice che f è **o-piccolo** di g per x che tende a x_0, e si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega(x)$ t.c. $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = 0$ e $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$.*

Osservazione 7.1.1. Se esiste un intorno U di x_0 t.c. $g(x) \neq 0 \forall x \in U \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) = o(g(x)) \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (vuol dire che $f(x) = \omega(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \omega(x) \to 0$), possiamo infatti scrivere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ allora } f(x) = o(g(x))$$

Intuitivamente possiamo dire anche che se $f(x) = o(g(x))$ vuol dire che $f(x)$ è infinitesimamente più piccola di $g(x)$ per $x \to x_0$.

Esempio 7.1.1. Se prendiamo una $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$, $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$.
Infatti $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2} = x \to 0$ per $x \to 0$.
Possiamo vedere l'applicazione della definizione con $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) = x$ e visto $\omega(x) \to 0$.

7.2 Proprietà o-piccolo

Dato un $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A)$, e due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ e con tutti gli o-piccoli che si intendono per $x \to x_0$, valgono le seguenti proprietà.

1. $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$.
2. Se $k \in \mathbb{R}$, e $k \neq 0 \implies o(k \cdot g(x)) = o(g(x))$.
3. $o(g) + o(g) = o(g)$. [8]
4. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies f(x) \cdot g(x) = o(g(x))$.
5. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies o(g) + o(f \cdot g) = o(g)$.
6. $o(o(g)) = o(g)$.
7. $o(f + g) = o(f) + o(g)$.
8. $o(g) \cdot o(f) = o(f \cdot f)$.

Osservazione 7.2.1. Facciamo un osservazione relativa alla proprietà (3) e di essa valga anche nel caso $o(g) - o(g)$.
$o(g) - o(g) = o(g) + (-1) \cdot o(g) = o(g) + o(-1 \cdot g) = o(g) + o(g) = o(g)$.
Vediamo dunque che la proprietà (2) compre anche i casi con il meno.

Esempio 7.2.1. Facciamo un esempio per capire meglio l'osservazione sopra.
Prendiamo $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^4$, vediamo che $x^3 = o(x^2)$ e $x^3 = o(x^2)$ ma che $x^3 - x^4 \neq 0$.

Osservazione 7.2.2. Una casistica molto frequente e quella con $g =$ potente di x (o di $x - x_0$).

Infatti se prendiamo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \beta \implies x^\alpha = o(x^\beta)$ perché $x^\alpha = x^\beta \cdot x^{\alpha-\beta}$.
Quindi quando $\omega(x) = x^{\alpha-\beta} \to 0$ perché $\alpha > \beta$. Mentre quando $\omega(x) = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \to 0$ sempre perché $\alpha > \beta$.

Esempio 7.2.2. Prendiamo $f(x) = \tan(x) \cdot \sin(x)$ e dico che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Infatti $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)\cdot\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \tan(x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \cdot 1 = 0$ (ricorda il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$)

[8] Scrivere $o(g(x))$ oppure $o(g)$ è equivalente

7.3 Sviluppi al primo ordine

- Dai limiti notevoli sappiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 0$.
  Possiamo dunque dire che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x} = 0$ quindi per definizione:
  $$\sin(x) - x = o(x) \quad \text{e che} \quad \sin(x) = x - o(x) \text{ per } x \to 0$$
- Dal limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ ottengo, come prima, che:
  $$1 - \cos(x) - \frac{1}{2} = o(x^2) \quad \text{e che} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow \tan(x) = x + o(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Longrightarrow e^x = 1 + x + o(x)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Longrightarrow \log(1+x) = x + o(x)$

Esempio 7.3.1. Esempio risolvendo $(\tan(x))^2$ in termini di o-piccoli. Sappiamo che $\tan(x) = x+o(x)$.

$\tan(x)^2 = (x+o(x))^2 = x^2+2x\cdot o(x)+(o(x))^2 = x^2+o(2x^2)+o(x^2) = x^2+o(x^2)+o(x^2) = x^2+o(x^2)$

Quindi il risultato è che $\tan(x)^2 = x^2 + o(x^2)$

Esempio 7.3.2. Proviamo a risolvere $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2(x))-1}{x^4}$. Ricorda che $\sin(x) = x + o(x)$, quindi

Ricorda che $\sin(x) = x + o(x)$, quindi $\sin^2(x) = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$

$\cos(\sin^2(x)) - 1 = \cos(x^2 + o(x^2)) - 1$ poniamo $t = x^2 + o(x^2)$

Abbiamo quindi che in termini di o-piccolo $\cos(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ con $t \to 0$

Possiamo fare questa sostituzione perché $\cos(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ vale con $t \to 0$, se $t = x^2 + o(x^2)$ ottengo che se $x \to 0$ allora $x^2 + o(x^2) \to 0$ quindi $t \to 0$.

Ri-sostituendo la t abbiamo che $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{(x^2+o(x^2))^2}{2} + o((x^2 + o(x^{)})^2) =$

$= 1 - \frac{x^4+2x^2\cdot o(x^2)+(o(x^2))^2}{2} + o(x^4 + 2x^2 \cdot o(x^2) + o(x^2)^2) = 1 - \frac{x^4+o(x^4)+o(x^4)}{2} + o(x^4 + o(x^4) + o(x^4)) =$

$= 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ quindi abbiamo che:

$\frac{\cos(\sin^2(x))-1}{x^4} = \frac{1-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}$

Visto che $\frac{o(x^4)}{x^4}$ tende a 0 abbiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2(x))-1}{x^4} = -\frac{1}{2}$

7.4 O-grande

Definizione 7.4.1 (O-grande)**.** *Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, e $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \geq M \cdot |g(x)| \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ dove U è un intorno di x_0, allora si dice che f è O-grande di g per x che tende a x_0 e si scrive $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.*

Osservazione 7.4.1. Se g non si annulla in un intorno di x_0 allora possiamo scrivere che:

$$f(x) = O(g) \Longleftrightarrow |\frac{f(x)}{g(x)}| \geq M \text{ in un intorno di } x_0$$

Esempio 7.4.1. Facciamo un esempio prendendo $f(x) = x\sin(x)$ e $g(x) = x$.
Vediamo che $|\frac{f(x)}{g(x)}| = |\frac{x\sin(x)}{x}| = |\sin(x)| \geq 1$ quindi $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ per qualunque $x_0 \to \overline{\mathbb{R}}$

Definizione 7.4.2. *Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, e $f, g : A \to \mathbb{R}$ infinitesime per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$). Se esistono $L, \alpha \in \mathbb{R}$ con $L \neq 0$ t.c. $f(x) = L \cdot (g(x))^\alpha + o((g(x))^\alpha)$ per $x \to x_0$ si dice che f è infinitesima di ordine α rispetto a g con parte principali $L(g(x))^\alpha$ per x che tende a x_0.*
Stessa definizioni del caso in. cui f e g siano divergenti (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$)

Esempio 7.4.2. Prendiamo $f(x) = 3\sin(x) + x^2$ e $g(x) = x$ con $x_0 = 0$.
f è di ordine 1 rispetto a g per $x \to 0$ con parte principale $3x$. Infatti $3\sin(x) + x^2 = 3x + o(x)$.
(Perché $\sin(x) = x + o(x) \Longrightarrow 3\sin(x) + x^3 = 3x + o(x) + x^2 = 3x + o(x)$)

Esempio 7.4.3. Prendiamo il caso con $f(x) = 5x^4 + (2\sin(x)) \cdot x^2 + 3x$ e $g(x) = x$.
f è di ordine 4 rispetto a x per $x \to +\infty$ con parte principale $5x^4$
Questo perché $(2\sin(x)) \cdot x^2 + 3x = o(x^4)$ quindi, $f(x) = 5x^4 + o(x^4)$ infatti $\frac{(2\sin(x))\cdot x^2+3x}{x^4} \to 0$

Esempio 7.4.4. Guardiamo un esempio con $f(x) = \log(e^{3x} + x^2)$ per $x \to +\infty$

$\log(e^{3x} + x^2) = \log(e^{3x} \cdot (1 + \frac{x^2}{e^{3x}}) = \log(e^{3x}) + \log(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}) = 3x + \log(1 + \frac{x^2}{e^{3x}})$
Abbiamo che $\frac{x^2}{e^{3x}} \to 0$ per $x \to +\infty$. Possiamo dunque dire che $f(x)$ è di ordine 1 rispetto a x con parte principale $3x$ per $x \to +\infty$. Quindi $f(x) = 3x + o(x)$

8 Asintoti

8.1 Asintoto orizzontale

Definizione 8.1.1 (Asintoto orizzontale)**.** *Data una $f : A \to \mathbb{R}$, un $a \in \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (finito) si dice che f ha un* ***asintoto orizzontale*** *di equazione $y = l$ per x che tende a $\pm\infty$.*

Esempio 8.1.1. Prendiamo $f(x) = e^x$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

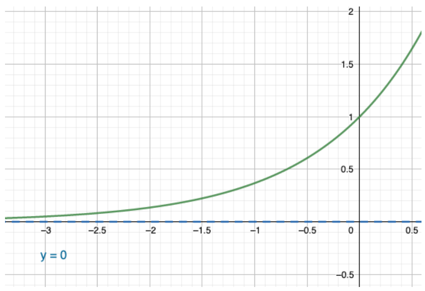


Figure 36: Asintoto orizzontale di e^x

Andiamo come prima cosa a calcolare il limite: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Possiamo così vedere che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

Come possiamo notare nell'immagine a fianco (asintoto segnato dalla linea blu in basso).

Esempio 8.1.2. Facciamo un altro esempio prendendo questa volta $f(x) = \arctan(x)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Anche qui compre prima cosa calcoliamo il limite sia vero $+\infty$ che verso $-\infty$ della funzione:
$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Vediamo dunque due asintoti con equazioni $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ rispettivamente con $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Possiamo vedere i due asintoti nell'immagine a fianco (rette in blu).

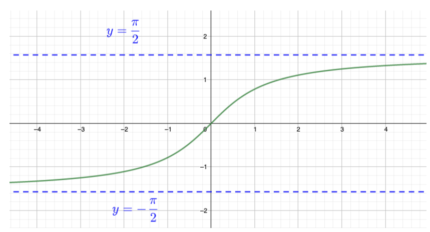


Figure 37: Asintoto orizzontale di $\arctan(x)$

8.2 Asintoto verticale

Definizione 8.2.1 (Asintoto verticale)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$. Se f diverge per x che tende a x_0 da destra o da sinistra (o da entrambe le parti) si dice che f ha un* ***asintoto verticale*** *di equazione $x = x_0$.*

Esempio 8.2.1. Prendiamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita come $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Andiamo a calcolare nel punto di discontinuità, che è lo 0, il limite sia da destra che da sinistra:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Vediamo dunque la f ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Possiamo vedere l'asintoto nell'immagine a fianco (asintoto verticale segnato in blu).

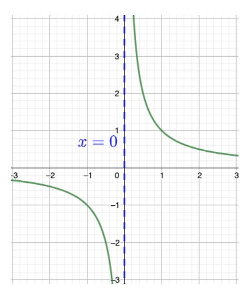


Figure 38: Asintoto verticale di $\frac{1}{x}$

Osservazione 8.2.1. Una funzione al massimo ha 2 asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ ed uno a $-\infty$) ma può anche avere ∞ asintoti verticali, come nel caso di $f(x) = \tan(x)$ che ha ∞ asintoti verticali.

8.3 Asintoto obliquo

Definizione 8.3.1 (Asintoto obliquo)**.** *Data una* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Se esiste* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ *con* $m \in \mathbb{R}$ *e* $m \neq 0$*, e se esiste anche* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q$ *con* $q \in \mathbb{R}$ *allora si dice che* f *ha un* ***asintoto obliquo*** *di equazione* $y = mx + q$ *per* $x \to +\infty$*. Lo stesso vale con* $x \to -\infty$*.*

Esempio 8.3.1. Facciamo un esempio di calcolo dei asintoto obliquo con $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x-5}$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x} = 2$, quindi $m = 2$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2+10x}{x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13$

Abbiamo dunque che esiste un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + 13$ per $x \to +\infty$

Osservazione 8.3.1. Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ ed uno a $-\infty$). Inoltre non può avere contemporaneamente un asintoto orizzontale ed uno obliquo "dalla stessa parte".

Esempio 8.3.2. Prendiamo $f(x) = 3x + 5\log(x)$ definita come $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Proviamo ora a calcolare l'asintoto obliquo.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5\log(x)}{x} = 3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{5\log(x)}{x} = 3 + 0 = 3$ quindi $m = 3$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} 3x + 5\log(x) - 3x = 5\log(x) = +\infty$.

Visto che la q non torna un numero finito vediamo che questa funzione non ha asintoto obliquo.

9 Derivate

Definizione 9.0.1 (Derivata)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A) \cap A$. Se esiste il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ allora l si dice derivata di f in x_0. Se $l \in \mathbb{R}$ (è finito) allora f si dice derivabile in x_0 la derivata si indica con $f'(x)$ oppure $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x)$, quindi:*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

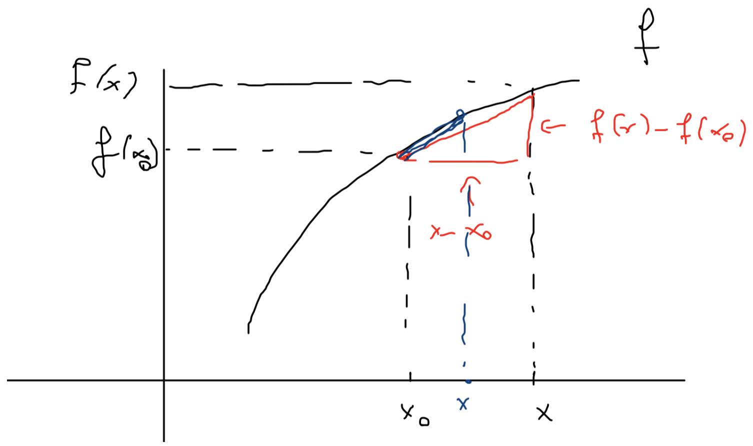


Figure 39: Derivata $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ con rapporto incrementale

Osservazione 9.0.1. Osserviamo che l'esistenza della derivata e la derivabilità sono due cose diverse perché la derivata potrebbe valere anche $\pm\infty$. In tal caso f non è derivabile ma esiste la derivata

Esempio 9.0.1. Prendiamo $f(x) = \sqrt{x}$ con $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Calcoliamo al derivata in $x_0 = 0$.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.
$f'(0) = +\infty$ quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$

9.1 Continuità funzioni derivabili

Teorema 9.1.1 (Continuità funzioni derivabili)**.** Se prendiamo una f che è derivabili in x_0 allora f è continua in x_0

Dimotrazione 9.1.1. Per dimostrare questo teorema proviamo a fare il $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0))$ (Andiamo a sommare e sottrarre una costante $f(x_0)$)

$= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0))$ (Portiamo fuori una costante dal limite)

$= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} (\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}) \cdot (x - x_0))$ (Moltiplichiamo e dividiamo per $x - x_0$, otteniamo il rap. increm.)

$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) + 0 = f(x_0)$ (Risolviamo il rap. increm.)

Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi f è continua in x_0. ■

Osservazione 9.1.1. Possiamo però osservare che non è vero il contrario infatti se f è continua non è detto che sia derivabile.

Esempio 9.1.1. Facciamo un esempio per verificare questa osservazione. $f(x)|x|$ con $x_0 = 0$.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$. Ma abbiamo che $|x| = x$ con $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$ quindi dobbiamo fare il limite destro e sinistro: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$.
Essendo diversi questi due limiti non esiste il limite e quindi non esiste la derivata di $|x|$ in $x_0 = 0$

9.2 Derivata destra e sinistra

Definizione 9.2.1 (Derivata destra e sinistra)**.** *Se esiste* $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *questa si chiama* ***derivata destra*** *di* f *in* x_0. *Invece* $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *si dice* ***derivata sinistra****. Si indicano con* $f'_+(x_0)$ *e* $f'_-(x_0)$.

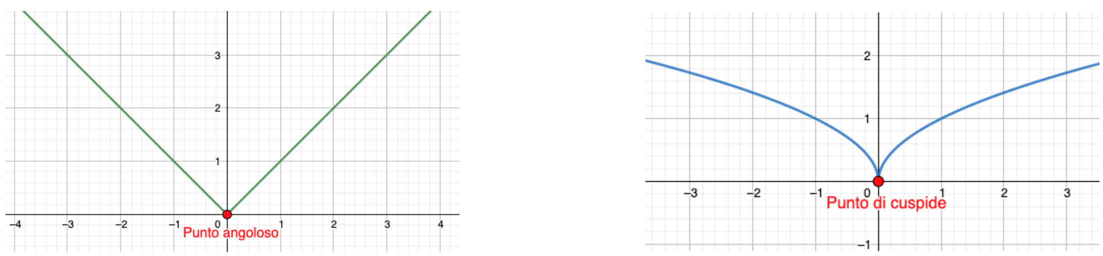
Osservazione 9.2.1. Una funzione f è derivabili in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambi finite.

Esempio 9.2.1. Facciamo un esempio di derivata destra e sinistra con $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.
$f'_+(0) = 1$ mentre $f'_+(0) = -1$ quindi $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

9.3 Punto angoloso o di cuspide

Definizione 9.3.1 (Punto angoloso)**.** *Se esiste* $f'_+(x_0)$ *e* $f'_-(x_0)$ *entrambi finite ma diverse tra loro allora* x_0 *si dice* ***punto angoloso***

Definizione 9.3.2 (Punto di cuspide)**.** *Se* $f'_+(x_0) = +\infty$ *e* $f'_-(x_0) = -\infty$ *(o viceversa) il punto* x_0 *si dice* ***punto di cuspide****.*



(a) (b)

Figure 40: In (a) un punto angoloso ed in (b) un punto di cuspide

Esempio 9.3.1. Prendiamo una $f(x) = \sqrt{|x|}$ con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f'_+(0) = +\infty$ mentre $f'_-(0) = -\infty$, quindi f in $x_0 = 0$ ha un punto di cuspide.

9.4 Retta tangente ad un punto

Osservazione 9.4.1. f è derivabile in x_0 se e solo se $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$.
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$ (Porto tutto dalla stessa parte)

$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = 0$ (Porto tutto alla stesso denominatore)

$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = o(x - x_0)$ che è uguale $f(x) = f(x) + f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$.

La parte $f(x) + f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ha un utilizzo particolare.

Definizione 9.4.1. *Se* f *è derivabile in* x_0 *allora la retta* $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ *si dice retta tangente al grafico di* f *nel punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$*.*

9.5 Derivate di ordine superiori al primo

$f : A \to \mathbb{R}$ supponiamo che f sia derivabile in ogni punto $x \in A$. Allora $\exists f'(x) \forall x \in A$ e costituiscono la funzione derivata di f. $f' : A \to \mathbb{R}$.

Se la funzione f' è a sua volta derivabile posso calcolare la derivata che chiamo derivata seconda di f ed indico con f''.
Posso in questo modo definire le derivate successive continuando a derivare le funzioni che otteniamo (se ovviamente sono derivabili).

Esempio 9.5.1. $f''(x) = (f')'$, $f'''(x) = (f'')'$, $f^(4)(x) = (f''')'$, ..., $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'$.
Per convenzione si indica con $f^{(0)}$ la funzione stessa $f^{(0)} = f$.

Definizione 9.5.1. *Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^n se f è derivabile n-volte e $f^{(n)}$ è continua.*

9.6 Operazioni sulle derivate

Teorema 9.6.1. Se f, g sono funzioni derivabili in x_0 allora:

1. $f + g$ è derivabile in x_0 è vale che $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. Se $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

Osservazione 9.6.1. Se f, g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora andando a combinare il punto (2) e (3) del teorema sopra otteniamo che:

$\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

9.6.1 Derivata funzione inversa

Definizione 9.6.1 (Derivabile della funzione inversa)**.** *Data una $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona (quindi invertibile), se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ ed è uguale a:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ricordiamo che $x_0 = f^{-1}(y_0)$ è possibile scriverlo come:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Esempio 9.6.1. Facciamo un esempio con $f(x) = e^x$

$y = e^x \implies x = \log(y) \implies f^{-1}(y) = \log(y)$, quindi $f'(x) = e^x$

$(\log(y))' = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$ con $y > 0$ quindi la $D(\log(y)) = \frac{1}{y}$

9.7 Derivate con funzione crescente e decrescenti

Proposizione 9.7.1. *Prendiamo $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$. Se f è debolmente decrescente, e valgono le stesse condizione scritte prima, $f'(x_0) \leq 0$.*

Dimotrazione 9.7.1. Prendiamo $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ma se f è debolmente crescente allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, ma visto che f mantiene l'ordinamento, quindi numeratore e denominatore sono concordi in segno. A questo punto passando al limite si mantiene la disuguaglianza, quindi otteniamo che $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. ■

Osservazione 9.7.1. Se f è strettamente crescente non posso dedurre che $f'(x_0) > 0$. Ma solo che $f'(x_0) \geq 0$ questo perché quando passiamo al limite le disuguaglianze strette potenzialmente si indeboliscono, come visto nel teorema di confronto.

Esempio 9.7.1. Con $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, abbiamo che $f'(x) = 3x^2$ e $f'(x) = 0$, quindi $f' \geq 0$ mentre $f > 0$ (la funzione "si indebolisce").

9.8 Teorema di Fermat

Teorema 9.8.1 (Teorema di Fermat)**.** $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f, e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimotrazione 9.8.1. Se f è derivabile in x_0 allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f, in un intorno di x_0 succederà che:

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dove $f(x) - f(x_0) \geq 0$ e $x - x_0 \geq 0$. Quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \geq 0$
$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dove $f(x) - f(x_0) \leq 0$ e $x - x_0 \leq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \leq 0$.
Ma noi sappiamo che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Longrightarrow f'_+(x_0) = 0, f'_-(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Osservazione 9.8.1. Osserviamo che se il punto non è interno al dominio allora il teorema non è necessariamente valido.

Esempio 9.8.1. Prendiamo per esempio $f(x) = x^2$ ma definita come $f : [2, 3] \to \mathbb{R}$ dove quindi il $min(f) = f(2) = 4$ ed il $max(f) = f(3) = 9$. Se calcoliamo la derivata abbiamo che $f'(x) = 2x$ e $f'(2) = 4$ ed ancora $f'(3) = 9$. In questo caso 2 e 3 sono punti agli estremi del dominio e quindi non sono punti interni.

Osservazione 9.8.2. L'ipotesi di derivabilità è necessaria. Quindi possono esserci punti di minimo o di massimo locale dove la derivata non si annulla (perché non esiste).

Esempio 9.8.2. Infatti se prendiamo la funzione $f(x) = |x|$ il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) ma la derivata $f'(0)$ non esiste.

Osservazione 9.8.3. Il teorema è condizione necessaria per un massimo o un minimo locale ma non sufficiente.

Esempio 9.8.3. Prendiamo $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ ma $f'(x) = 0$ ma $x = 0$ non è ne punti di massimo ne di minimo.

9.9 Teorema di Rolle

Teorema 9.9.1 (Teorema di Rolle)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in [a,b] e derivabile in (a, b).Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists x \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

Dimotrazione 9.9.1. Se f è continua in $[a, b]$ per il teorema di Weirstrass assume massimo minimo. Siano x_1 e $x_2 \in [a, b]$ i punti di max e di min (2 dei possibili punti di massimo e minimo, essendo che possono essercene di più), cioè $f(x_1) = max(f)$ e $f(x_2) = min(f)$, distinguiamo 2 casi:

1. $x_1 = a, x_2 = b$ o viceversa. Dato che $f(a) = f(b)$ allora sarebbe $max(f) = min(f)$ questo vuol dire che f è costante in $[a, b] \Longrightarrow f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$

2. Almeno uno dei due punti x_1 o x_2 non è negli estremi. Allora esiste un punto di massimo o di minimo interno ad (a,b), per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$ (nel quale x_1 o x_2 uguale a c). ■

9.10 Teorema di Lagrange

Teorema 9.10.1 (Teorema di Lagrange)**.** Data una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dimotrazione 9.10.1. Definiamo una nuova funzione $r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ che è una retta che passa per gli estremi del grafico, che sarebbero $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Definiamo anche $g(x) = f(x) - r(x)$, g è continua in [a,b] e derivabile in (a,b).

$g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0 \qquad g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$

Allora $g(a) = g(b)$ e quindi possono applicare Rolle alla funzione g. Quindi $\exists x \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Calcoliamo ora $g'(x)$.

$g'(x) = f'(x) - r'(x) \ = \ f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Se $g'(c) = 0$ allora $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

9.10.1 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema 9.10.2. Dato un $I \subset \mathbb{R}$ sia un intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile nei punti interni di I cioé in int(I). Allora valgono le seguenti affermazioni:

1. Se $f'(x) = 0 \forall x \in Int(I) \implies f$ è contante in I.
2. Se $f'(x) \geq 0 \forall x \in Int(I) \implies f$ è debolmente crescente in I.
3. Se $f'(x) \leq 0 \forall x \in Int(I) \implies f$ è debolmente decrescente in I.
4. Se $f'(x) > 0 \forall x \in Int(I) \implies f$ è strettamente crescente in I.
5. Se $f'(x) < 0 \forall x \in Int(I) \implies f$ è strettamente decrescente in I.

Dimotrazione 9.10.2. Dimostriamo il punto (4).
Prendiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Devo dimostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.

Visto x_1 o x_2 stanno in I osservo che $(x_1, x_2) \subset Int(I)$. Allora applico il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$ (lo posso fare perché la funzione è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2)).
Quindi $\exists c \in (x_1, x_2)$ tale che: $f'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Ma $f'(c) > 0 \implies \frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, quindi $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (perché $x_2 - x_1 > 0$ visto che $x_1 < x_2$) $\implies f(x_2) > f(x_1)$. ■

Osservazione 9.10.1. Se f non è definita su un intervallo il teorema potrebbe no essere vero.

Esempio 9.10.1. $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \neq 0$, ma f non è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

Esempio 9.10.2. Prendiamo $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan \frac{1}{x}$ che è derivabile.
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \ = \ \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \implies f$ è costante in $(0, +\infty)$.
Per calcolare la costante basta calcolare in un qualsiasi punto, per comodità prendiamo $x = 1$.
$f(1) = \arctan(1) + \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Quindi $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x > 0$ (visto che $x \in (0, +\infty)$).
Se $x < 0$ f è costante perché $f'(x) = 0$ (va definita la funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$).Per calcolare la costante valuto f in $x = -1$. $f(-1) = \arctan(-1) + \arctan \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.
Quindi $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ se $x < 0$.
Questa seconda considerazione si poteva anche dedurre dal fatto che $f(x)$ è una funzione dispari.

Proposizione 9.10.1. *Dato un $I \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in I$, f derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in I. Valgono (con f' non necessariamente definita in x_0):*

1. *Se $f'(x) \leq 0$ in un introno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale per f.*

2. *Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di massimo locale per f.*

Esempio 9.10.3. Data una $f(x) = x^3 - x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 - 1$, studiamo il segno di f': $3x^2 - 1 \geq 0 \iff 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3} \implies |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

Esempio 9.10.4. Vediamo ora un caso in cui f non sia derivabile in x_0.
$f(x) = |x|$ f non è derivabile in $x_0 = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 1 & sex \geq 0 \\ -1 & sex < 0 \end{cases}$.

Avrò dunque che $x_0 = 0$ è punto di minimo anche se in quel punto la funzione non è derivabile.

Esempio 9.10.5. $f(x) = \sqrt{|x|}$, questa funzione ha una cuspide in $x = 0$, in questo punto quindi la funzione non è derivabile ma ugualmente il punto è un punto di minimo.

Teorema 9.10.3. Dato $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Int(A)$, con f derivabile 2 volte in x_0 e $f'(x_0) = 0$. Valgono allora le seguenti affermazioni:

1. Se x_0 è punto di minimo locale $\implies f''(x_0) \geq 0$.

2. Se x_0 è punto di massimo locale $\implies f''(x_0) \leq 0$.

3. Se $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ è punto di minimo locale.

4. Se $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ è punto di massimo locale.

Note 9.10.1. In questo teorema le condizioni (1) e (2) sono **necessarie** mentre le (3) e (4) sono **sufficienti**.

Esempio 9.10.6. Dato $f(x) = x^2$ e $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, f'' è sempre > 0.
$f'(0) = 0$, $f''(x) > 0 \implies x = 0$ è punti di minimo locale.

Esempio 9.10.7. Definiamo una $g(x) = -x^2$ e $g'(x) = -2x$, $g''(x) = -2$.
$g'(0) = 0$ e $g''(0) = -2 < 0 \implies x_0 = 0$ è punto di massimo locale.

Note 9.10.2. Se $f''(x_0) = 0$ (la disuguaglianza quindi è debole) non posso affermare niente.

Esempio 9.10.8. Per verificare la nota prendiamo $h(x) = x^3$, $h'(x) = 3x^2$ e $h''(x) = 6x$.
$h'(0) = 0$, $h''(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ non è ne di massimo ne di minimo locale.

Esempio 9.10.9. $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^3$.
$f(0) = 0$ e $f''(0) = 0$ e in questo caso $x_0 = 0$ è punto di minimo.
Mentre se prendo $g(x) = -x^4$ e $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 0$ e quindi $x_0 = 0$ è punto di massimo.

9.11 Teorema di Cauchy

Teorema 9.11.1. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Se inoltre $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Questa formula ci dice che c'è un punto in cui il rapporto delle derivate delle due funzioni in quel punto è uguale al rapporto degli incrementi totali delle funzioni sull'intervallo. Inoltre l'ipotesi $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ garantisce che non ci siano punti in cui la derivata prima si annulli.

9.12 Teorema di de l'Hopital

Teorema 9.12.1. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b). Se valgono le seguenti condizioni:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$.
2. $g'(x) \neq 0$ in un introno destro di a.
3. $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

allora $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. (Stesso risulta con per $x \to b^-$)

Note 9.12.1. Questo teorema funziona anche nel caso di x_0 interno all'intervallo perché basta fare i due limiti destro e sinistro, e se coincidono otteniamo il limite complessivo.

Esempio 9.12.1. Facciamo un esempio per capire il funzionamento di questo teorema.

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2+x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$.
$f(x) = 2\cos(x) - 2 + x^2$ e $g(x) = x^4$ $f'(x) = -2\cos(x) + 2x$ e $g'(x) = 4x^3$
Provo a fare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)+2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$, ancora indeterminato quini applico de l'Hopital.

$f(x) = -2\sin(x) + 2x$ e $g(x) = 4x^3$, quindi $f'(x) = -2\cos(x) + 2x$ e $g(x)12x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+2}{12x^2} = \frac{0}{0}$, ancora indeterminato quindi riapplico de l'Hopital.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(x)}{24x} = \frac{1}{12} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}$

Esempio 9.12.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, applico de l'Hopital derivando numeratore e denominatore.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, derivo di nuovo, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

Osservazione 9.12.1. Verificare sempre l'ipotesi (1) di de l'Hopital, cioè di essere una forma indeterminata.

Esempio 9.12.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.
Se non mi accordo che l'ipotesi (1) non vale e applicando de l'Hopital (sbagliando) e derivo: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$, sbagliano.

Osservazione 9.12.2. Potrebbe non esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ma esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Esempio 9.12.4. $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ e $g(x) = x$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} = \frac{0}{0}$. Se applico de l'Hopital e quindi derivo succede che:
$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ e $g'(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$ ma $2x\sin\frac{1}{x}$ tende a 0 mentre $-\cos\frac{1}{x}$ non esiste quindi il limite complessivamente non esiste.

Ma invece non uso de l'Hopital e faccio $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$.
Quindi noto che in questo caso $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ma invece $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Sarebbe quindi sbagliato dire che se $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \nexists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Osservazione 9.12.3. Se $\exists \lim_{x \to x0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite finito), e $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} (f+g) = 0$.

Dimotrazione 9.12.1. Per assurdo se $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = m$ allora $g(x) = (f+g)(x) - f(x)$ dove $(f+g)(x) \to m$ mentre $f(x) \to l$ quindi $g(x) = (f+g)(x) - f(x) \to m - l$ ma questo è assurdo perché $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Corollario 9.12.1.1. *Se f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0 (eccetto al più in x_0) e se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow f'(x_0) = l$.*

Esempio 9.12.5. Prendiamo $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \geq 0 \\ x^2 & se\ x < 0 \end{cases}$. f è derivabile in $x_0 = 0$?

$f'(x) = \begin{cases} 2x & se\ x > 0 \\ 2x & se\ x < 0 \end{cases}$, (per ora non consideriamo 0).

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ perché f non è continua, e quindi non posso usare il corollario.

Osservazione 9.12.4. Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ non è detto che f non sia derivabile in x_0.

Esempio 9.12.6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$.

La funzione è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot$ limitata $= 0 = f(0)$.
Vediamo se è derivabile:

1. Calcolare il limite della derivata. Se $x \neq 0$ $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = 0-$ una cosa che non esiste $\Longrightarrow$ non esiste il limite di $f'(x)$. Da questo no posso concludere che f non è derivabile in $x_0 = 0$.

2. Limite del rapporto incrementale: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.
   Quindi f è derivabile e $f'(0) = 0$.

Esempio 9.12.7. Esempio di de l'Hopital.
Calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{0^+} = \frac{0}{0}$ e quindi posso usare de l'Hopital.
$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot (\frac{1}{x^2})}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$, notiamo dunque che la situazione è peggiorata andando ad usare d l'Hopital rispetto a come si era partiti.
Possiamo osservare che $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} \to \frac{\infty}{\infty}$, riproviamo con de l'Hopital.
$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}$ derivando viene che $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{e^{\frac{1}{x}} \cdot x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$, in questo caso la situazione è migliorata anche se è ancora indeterminato del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applico di nuovo de l'Hopital.
$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\infty} = 0$.

10 Sviluppi di Taylor

10.1 Fattoriale

Definizione 10.1.1 (Fattoriale)**.** *Dato un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ definiamo un fattoriale come il prodotto dei primi n numeri naturali:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$$

Note 10.1.1. Nota che $0! = 1$ per definizione.

Esempio 10.1.1. $1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 4! = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$

Possiamo definire un uguaglianza per definire il fattoriale:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \text{ dove } (n+1)! = [1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n] \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

10.2 Sommatorie

Supponiamo di avere dei numeri naturali indicizzati con un numero naturale.

$$a_1, a_2, ..., a_n \text{ e } a_j \in \mathbb{R} \text{ con } j \in \mathbb{N}$$

Per esempio si potrebbe prendere $a_j = \frac{1}{j}$ quindi: $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ecc. Oppure possiamo $a_j = \sqrt{j}$ quindi: $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{2}$, ecc.

Definizione 10.2.1 (Sommatoria)**.** *Definisco sommatoria degli a_j per j che va da m ad n dove $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \leq n$, e si scrivere*[9]*:*

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$$

Esempio 10.2.1. $\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{5}$

Esempio 10.2.2. $\sum_{j=0}^{3} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

10.3 Formula di Taylor

10.3.1 Taylor con resto di Peano

Supponiamo di avere una funzione f derivabile nel punto $x_0 \in (a, b)$, allora abbiamo visto che posso scrivere $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$. Abbiamo dunque un polinomi di grado 1 ungule a $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ed un resto $o(x - x_0)$, f quindi differisce dal polinomio per un resto che è infinitesimo rispetto a $x - x_0$ cioè $\lim_{x \to x_0} = \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.

Posso precisare meglio la quantità di $o(x - x_0)$ ma f deve essere derivabile più volte nel punto x_0.

Definizione 10.3.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Dato una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile n volte in x_0 ed almeno $n - 1$ volte nel resto dell'intervallo (a,b) (cioè in $(a, b) \setminus \{x_0\}$) allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ ed una funzione $R_n(x)$ tale che:*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \text{ e } R_n(x) = o(x - x_0)^n \text{ per } x \to x_0$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha la seguente forma:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j$$

Scritto in maniera esplicita:

$$P_n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Osservazione 10.3.1. Il grado massimo del polinomio è correlato all'ordine di infinitesimo del resto. Cioè P_n è di grado n e $R_n = o(x-x_0)^n$. Questo vuol dire che: $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $o((x-x_0)^n)$ è la differenza fra la funzione ed il polinomio che l'approssima.

[9]Usiamo j per convenzione ma è possibile utilizzare qualsiasi variabile

10.3.2 Taylor con resto di Lagrange

Definizione 10.3.2 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Dato una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ e f derivabili in $n + 1$ volte in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ e n volte in x_0. Allora $f(x) = P_n + R_n(x)$ ed esiste z compreso tra x e x_0 tale che:*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dico un punto compreso fra x e x_0 perché a priori non so quali dei due valori sta a destra e quale sta a sinistra, quindi parlo semplicemente di punto compreso.

10.3.3 Esempi di formula di Taylor

Esempio 10.3.1. $f(x) = e^x$ e $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ... $f^{(j)}(x) = e^x\ \forall j \in \mathbb{N}$. La calcolo in $x_0 = 0$ [10].
$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, ..., $f^j(0) = 1$. Quindi $e^x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}) + o(x^n) = (\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot (x-0)^j) + o(x^n)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
Per esempio in ordine 2: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, se lo confrontiamo con il limite notevole $e^x = 1+x+o(x)$ vediamo che $o(x)$ (che è $R_1(x)$)in realtà è $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (che è $R_2(x)$).

Osservazione 10.3.2. $R_2(x)$ in particolare è un $o(x)$ perché se faccio $\frac{R_2(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x} = \frac{x}{2}+o(x) \to 0$ se $x \to 0$. Quella con il grado 2 è più precisa di quella con il grado 1.

Esempio 10.3.2. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$.
$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$. $\sin x = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{j!} \cdot x^j + R_n(x)$.
$\sin x = 0 + \frac{x}{1} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!+o(x^3)} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ordine $n = 3$.
In questo caso $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e $R_3(x) = o(x^3)$.
Proviamo con ordine 4: $\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1\frac{x^3}{3!} + o \cdot \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
In questo caso invece $P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e $R_4(x) = o(x^4)$, vediamo che in questo caso $P_3(x) = P_4(x)$.

Ora confrontiamo:
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ordine 3 $\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ ordine 4.
Possiamo vedere che sono vere entrambi ma la seconda è più precisa perché ha un resto più piccolo.
Allo stesso modo $\sin x = x + o(x)$ ma visto che sappiamo che la derivata seconda del seno calcolato in 0 è 0 possiamo scrivere in maniera più precisa $\sin x = x + o(x^2)$.

10.4 Taylor per le funzioni elementari

Possiamo dunque ora scrivere le varie formule di Taylo per delle funzioni ricorrenti.

Formula seno: $\sin x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}) + o(x^{2n+2})$

Esempio 10.4.1. Proviamo questa formula con $n = 2$.

$$\frac{(-1)^0 \cdot x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1 \cdot x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 \cdot x^{2\cdot 2\cdot 1}}{(2\cdot 2+1)!} + o(x^{2\cdot 2+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6).$$

Formula coseno: $\cos x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j)!}) + o(x^{2n+1})$

Esempio 10.4.2. Formula di Taylor di grado 7 per il coseno:
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$.

[10] Si dice che in questo caso si fa centrato in 0

Formula logaritmo: $\log(1+x) = (\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j}) + o(x^n)$

Esempio 10.4.3. Facciamo un esempio con $n = 4$ della formula del logaritmo:
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

Note 10.4.1. Nota che il coseno è una funzione peri ed il polinomio dalla funzione di Taylor contiene sempre potenze pari mentre il seno essendo dispari contiene solo dispari.

Formula tangente: per la tangente la formula è molto complicata quindi scriviamo semplicemente: $\tan(x) = x + o(x^2)$ e $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Formula Arcotangente: $\arctan(x) = (\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{2j+1}) + o(x^{2n+2})$ Quindi sviluppata al settimo grado:
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$
Note 10.4.2. Nota che anche nell'arcotangente come nel logaritmo non c'è il fattoriale.

Formula Binomiale: dato $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere:

$(1+\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$.

Esempio 10.4.4. Con $\alpha = \frac{1}{2}$ quindi $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \cdot x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Esempio 10.4.5. Con invece $\alpha = -1$ quindi con $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$.
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!} \cdot x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} \cdot x^3 + o(x^3) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{3!}{3!} \cdot x^3 + o(x^3) = 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Quindi se sostituiamo $x = -t$ abbiamo che:
$\frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + o(t^3) = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$, generalizzando possiamo scrivere:
$\frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + ... + t^n + o(t^n)$

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^2n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$

Table 8: Formule di taylor

10.5 Utilizzo di Taylor nei limiti

Esempio 10.5.1. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$. Si può utilizzare gli o-piccoli:
$\sin x = x + o(x^2) \qquad e^x = 1 + x + o(x) \qquad \log(1+x) = x + o(x)$

$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{x + o(x^2) - x}{1 + x + o(x) - (x + o(x)) - 1} = \frac{o(x^2)}{o(x)}$ ma anche questo è indeterminato.

Dobbiamo quindi andare un po' avanti negli sviluppi del numeratore e del denominatore.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} o(x^2)$

$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + (x^2)) - 1} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{x}{6} + o(x^4)}{1 + o(x^2)} = \frac{0}{1} = 0$

Esempio 10.5.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4}$
$\sin t = t + o(t^2) \qquad t = x^2$
$\sin x^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x^2) + (o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3) \quad \sin x^2 = x^2 + o(x^4)$

$\frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4} = \frac{x^2 + o(x^3) - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$
Questa è una forma indeterminata perché $\frac{o(x^2)}{x^3} \to 0$ e $\frac{1}{x} \to \infty$. Quindi aumentiamo il grado dell'approssimazione andando a migliorare $(\sin x)^2$. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$(\sin x)^2 = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 - 2x \cdot \frac{x^2}{6} + 2x \cdot o(x^4) - 2 \cdot \frac{x^3}{6} \cdot o(x^4) = x^2 \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$
$\frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1} \to -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$.
(Divido sopra e sotto per x^4)

11 Convessità

11.1 Funzione convessa

Definizione 11.1.1 (Convessa)**.** *Dato un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo*[11] *ed una $f : I \to \mathbb{R}$. f si dice* ***convessa*** *in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f il segmento che li unisce è sopra il grafico di f.*

In formule si esprime dicendo che: f si dice convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $\forall t \in (0, 1)$ risulta che:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

Se la stessa disuguaglianza vale con il $<$ (minore stretto) allora f si dice strettamente convessa.

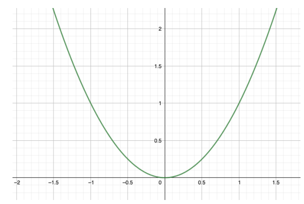


Figure 41: Funzione convessa

11.2 Funzione concava

Definizione 11.2.1 (Concava)**.** *f si dice concava se $-f$ è convessa. Strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.*

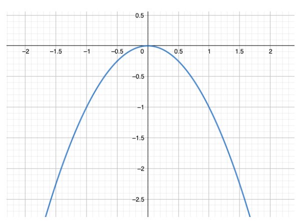


Figure 42: Funzione concava

Se andiamo a scrivere in formule una funzione concava è uguale a:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

Note 11.2.1. Nota che, come per la concavità, se andiamo scrivere $>$ (maggiore stretto) allora f si dice strettamente concava.

11.3 Calcolo della convessità

Proposizione 11.3.1. *Dato $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:*

1. *f è convessa (strettamente convessa).*
2. *f' è debolmente crescente (strettamente crescente).*
3. *$f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$.*

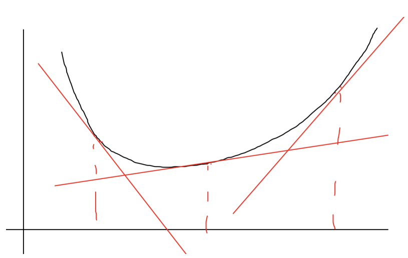
Note 11.3.1. La proposizione è uguale per la concavità ma con il segno scambiato.

Esempio 11.3.1. $f(x) = x^2$ da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'8x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \implies f$ è convessa (anche strettamente) in tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 11.3.2. $f(x) = e^x$ e $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ sempre $\implies f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

Esempio 11.3.3. $f(x) = \log(x)$ con $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} < 0\, \forall x > 0 \implies f$ è strettamente concava.

11.4 Interpretazione geometrica

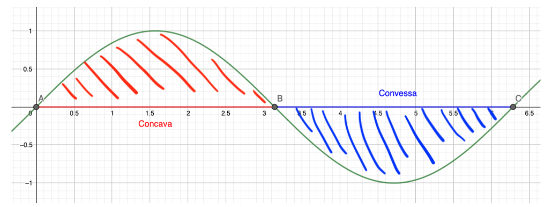


Dire che f' è crescente vuol dire che diciamo che il coefficiente angolare sulla tangente cresce, e questo vuol dire che se noi pensiamo alla retta tangente come un punto che tocca il grafico e mano a mano si sposta sul grafico e così facendo va a cambiare inclinazione ruotando, quindi possiamo dire che "la tangente ruota in senso antiorario".

[11] Si parla sempre di intervalli quando si parla di convessità perché la convessità non ha senso sennò

Esempio 11.4.1. Esempio di funzione concava e convessa solo in sotto intervalli del dominio.

$f(x) = \sin x$, $f : [0, 2\pi]$. $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$.
$-\sin x \geq 0. \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$.
$f''(x) \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$ $\quad f''(x) \leq 0 \iff x \in [0, \pi]$



Proposizione 11.4.1. *Prendiamo un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, una $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa in I se e solo se $\forall\, x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ cioè, $\forall\, x_0, x \in I$:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Concava se vale il $\leq$. Stret. convessa se vale $>$ con $x \neq x_0$ e stret. concava se vale $<$ con $x \neq x_0$.

Note 11.4.1. Il grafico di $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente.

Esempio 11.4.2. $f(x) = e^{-|x|}$, questa è una funzione pari e $f(x) = e^{-x}$ se $x \geq 0$.
Questa funzione non è ne concava ne convessa in tutto $\mathbb{R}$, perché ci sono dei tratti dove f sta sotto altri dove sta sopra.

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi se $x > 0$ $f'(x) = -e^{-x}$ e $f''(x) = e^{-x} > 0 \Longrightarrow f$ è convessa sull'insieme $\{x > 0\}$.
Mentre se $x < 0$ $f'(x) = e^{-x}$ e $f''(x) = e^{x} > 0 \Longrightarrow f$ è convessa sull'insieme $\{x \leq 0\}$.

Da questo esempio vediamo che se prendiamo f in due intervalli separati, in entrambi questi intervalli è convessa ma nell'unione dei due intervalli f smette di essere convessa. Il motivo è che abbiamo un punto in $x = 0$ di non derivabilità.

Esempio 11.4.3. Se invece prendiamo $f(x) = e^{|x|}$ quindi $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

In questo caso f è convessa in $(-\infty, 0]$ ed è convessa anche in $[0, +\infty)$ e in questo caso f è convessa anche in tutto $\mathbb{R}$.

Possiamo notare che nel secondo esempio se calcoliamo $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$ mentre se vediamo l'esempio prima $f'_-(0) = 1$ e $f'_+(0) = -1$.

Proposizione 11.4.2. *Prendiamo un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno di I, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Siano $I_1 = \{x \in I \mid x < x_0\}$ e $I_2 = \{x \in I \mid x > x_0\}$ abbiamo che se f è convessa in I_1 e I_2 e x_0 è un punto angoloso per f allora f è convessa in I se e solo se $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.*

Questa cosa perché, se noi prendiamo una funzione che presenta un angolo e tracciamo la tangente, data dalla derivata, a sinistra notiamo che mano a mano che ci spostiamo verso destra questa tangente "ruoterà" sul grafico, nel punto x_0 avremo due tangenti una dalla derivata destra ed una dalla sinistra, possiamo notare che se la funzione rimane concava o convessa questa tangente continuerà a "ruotare" nello stesso verso senza fare "uno scatto" nel suo andamento, in caso contrario allora non manterrà la concavità o la convessità.

11.5 Flessi

Definizione 11.5.1 (Flesso)**.** *Dato un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno ad I si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 ed esiste un intorno $U \subset I$ di x_0 t.c. la quantità*

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} \text{ non cambia segno in } U \setminus \{x_0\}$$

Dire che $\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0}$ non cambia segno vuol dire che il grafico della funzione passa da sopra a sotto la tangente (o viceversa).

Definizione 11.5.2 (Flesso a tangente verticale)**.** *Se invece $f'(x) = \pm\infty$ (f non è derivabile), f è continua in x_0, e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale.*

Un flesso verticale è un cambiamento di convessità con un flesso verticale.

Osservazione 11.5.1. Se avete una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo ed f derivabile due volte in I. Allora se $f''(x_0) = 0$ e f cambia segno in x_0 allora x_0 è punto di flesso.

Cambia segno vuol dire che $f''(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$ e $f''(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$ (o viceversa), con $x \in U$ intorno di x_0.

Esempio 11.5.1. Calcoliamo il flesso di $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$.
Vediamo dall'immagine che esiste un flesso in $x = 0$, infatti:
$f''(x) = 0$, $f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$ e $f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.

Osservazione 11.5.2. $f''(x_0) = 0$ non è sufficiente per aver un flesso

Esempio 11.5.2. Prendiamo per verificare l'osservazione $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.
Anche se $f(0) = 0$ abbiamo che $f''(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies$ f è convessa in $\mathbb{R}$.

Osservazione 11.5.3. Ci possono essere punti di flesso dove non esiste la derivata seconda.

Esempio 11.5.3. $f(x) = x \cdot |x| \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Possiamo vedere che $x_0 = 0$ è punto di flesso, infatti f è derivabile in $x_0 = 0$ infatti $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$. La retta tangente in $x = 0$ è $y = 0$. f passa da sopra la tangente in $x_0 = 0$, quindi x_0 è un punto di flesso. Però non esiste la derivata seconda in $x_0 = 0$ perché in questo punto c'è un punto angoloso.

Osservazione 11.5.4. Se abbiamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$, f convessa nei punti interni di I, ed f continua in tutto $I \implies f$ è convessa in I.
Quindi se abbiamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convessa in (a, b) ed f continua in $[a, b] \implies f$ è convessa in $[a, b]$.

12 Studio di funzione

12.0.1 Punti da seguire

Data una funzione $f(x)$ bisogna andare ad eseguire una serie di passi. $f(x)$ viene di solito assegnata senza specificare il dominio.

1. Determinare l'insieme di definizione di f.
2. Determinare l'insieme di continuità di f.
3. Determinare l'insieme di derivabilità di f.
4. Vedere eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui.
5. Studiare la monotonia della funzione.
6. Trovare punti di massimo o di minimo locali.
7. Determinare massimo e minimo d f oppure estremo sup. ed inf.
8. Studiare la convessità di f (con eventuali punti di flesso).

12.0.2 Esempio studio di funzione

Esempio 12.0.1. Studiamo la funzione $f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x}$.

1. $|x| > 0 \iff x \neq 0$ e $4x \neq 0 \longleftarrow x \neq 0$. **Insieme di definizione** è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. La f è **continua** in tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (composizione funzioni continue e prodotto e sottrazioni funzioni continue).
3. f **derivabile** in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (sempre perché tutte queste funzioni sono derivabili in tutto il loro insieme di definizione, il valore assoluto non è derivabile in 0 ma non lo si considera).
4. Per vedere gli **asintoti** dobbiamo fare i limiti ai bordo e sui punti non interi al dominio:
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x} = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} \log|-\infty| - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{4(-\infty)} = +\infty.$
   $\lim\limits_{x\to0^-} \log|0^-| - \frac{0^-}{4} + \frac{1}{4(0^-)} = -\infty - 0 - \infty.$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+} \log|0^+| - \frac{0^+}{4} + \frac{1}{4(0^+)} = -\infty - 0 + \infty$
   $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(-\frac{x}{4}) + \lim\limits_{x\to0^+} \log|x| + \frac{1}{4x} = 0 + \lim\limits_{x\to0^+} \frac{4x\log|x|+1}{4x} = 0 + \frac{0+1}{4\cdot0^+} = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \log|+\infty| - \frac{\infty}{4} + \frac{1}{4\cdot\infty} = \infty - \infty + 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\log|x|}{4} - \frac{1}{4}) + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = \infty(0 - \frac{1}{4}) + 0 = -\infty$. Abbiamo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e non ci sono asintoti orizzontali. Vediamo se ci sono asintoti obliqui: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}) \cdot \frac{1}{x} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$, quindi $m = -\frac{1}{4}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4}\cdot x = \infty + 0 = \infty.$
   Non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e neanche a $x \to -\infty$ perché i conti sono uguali.
5. Studiamo ora la **monotonia** di f.
   $$\log|x| = \begin{cases} \log(x) & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad D(\log|x|) = \begin{cases} D(\log(x)) = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ D(\log(-x)) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
   Quindi possiamo notare che $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$.
   $f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}$ conferma che è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$.

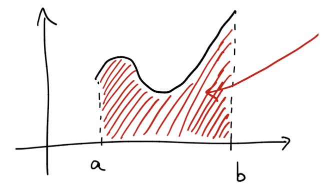
   Il denominatore è > 0 in tutto il dominio, allora il segno di f' è lo sesso del numeratore. Per trovare il segno bisogna trovare dove si annulla il numeratore.
   $-x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}.$
   f è decrescente in $(-\infty, 0)$, decrescente in $(0, 2-\sqrt{3}]$, crescente in $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, decrescente in $[2+\sqrt{3}, +\infty)$. Questa separazione va fatta perché il teorema di Lagrange prevede intervalli e lo 0 interrompeva l'intervallo.

6. Vedendo la monotonia possiamo anche dire i punti di **massimo e minimo locali**.
   $x = 2 - \sqrt{3}$ è punti di minimo locale. $x = 2 + \sqrt{3}$ è punti di massimo locale.
   Per calcolare esattamente questi punti dove si collocano nel grafico basta sostituirli in $f(x)$.

7. Dal fatto che $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ otteniamo che $sup(f) = +\infty \implies f$ non ha **massimo**. Dal fatto che $\lim\limits_{x \to 0^-} = -\infty$ otteniamo che $inf(f) = -\infty \implies f$ non ah **minimo**.

8. Come ultima calcoliamo al derivata seconda e troviamo la **convessità**.
   $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{-2x+1}{2x^2}$
   Segno del numeratore $-2x + 1 > 0 \iff 1 > 2x \iff x < \frac{1}{2}$.
   Segno del denominatore $2x^3 > 0 \iff x > 0$.
   f è concava in $(-\infty, 0)$ convessa in $(0, \frac{1}{2}]$ concava in $[\frac{1}{2}, +\infty)$.
   Il punti di ascissa $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso visto che c'è un cambio di convessità.

13 Integrali



In questo corso tratteremo gli integrali detti **di Riemain**. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata. (ad esempio una funzione continua). L'idea della definizione è che l'integrale (definito) di $f(x)$ in $[a, b]$ rappresenta l'area del sotto grafo di f (questo è vero se $f \geq 0$ su $[a, b]$).

Definizione 13.0.1 (Suddivisione di un intervallo)**.** *Una **suddivisione** di [a,b] è un insieme di* $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *con* $a = x_0 < x_1 < x : 2 < ... < x_n = b$.

Osservazione 13.0.1. Le lunghezze degli intervalli $[x_{i-1}, x_u]$ non sono necessariamente uguali. Inoltre $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a =$ lunghezza di $[a, b]$.

Definizione 13.0.2 (Somma inferiore)**.** *Dato una suddivisione di un intervallo A, si dice somma inferiore di f relativa alla suddivisione di A*

$$S'(f, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

E la somma delle aree dei rettangoli rossi. Approssima l'area del sotto grafico di $f(x)$ per difetto.

Definizione 13.0.3 (Somma superiore)**.** *Dato una suddivisione di un intervallo A, si dice somma superiore di f relativa alla suddivisione di A*

$$S'(f, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \right) \cdot (x_{i-1} - x_i)$$

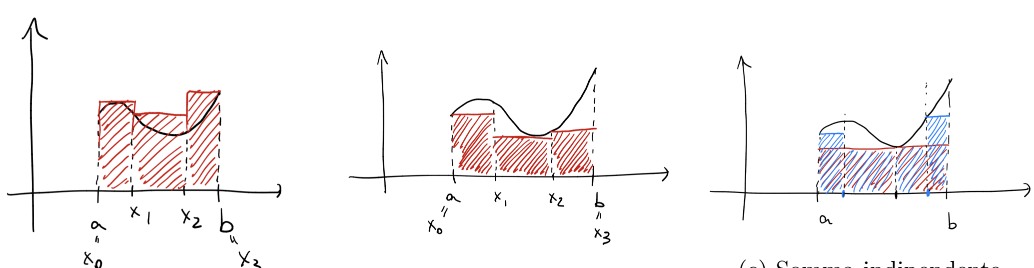
Somma delle aree dei rettangoli rossi. Questa volta è un'approssimazione per eccesso dell'area del sotto grafico.

Osservazione 13.0.2. Non server che f sia continua per dare tutte queste definizione, ma soltanto che sia limitata.

Definizione 13.0.4 (Somme indipendente dalle suddivisioni)**.** *Le somme inferiori e superiori indipendenti dalle suddivisioni si definiscono come:*

- $S'(f) = sup\{S'(f, A) \mid A$ *suddivisione di* $[a, b]\}$ *si dice somma inferiore di* f.
- $S''(f) = inf\{S'(f, A) \mid A$ *suddivisione di* $[a, b]\}$ *si dice somma superiore di* f.

Aggiungendo punti le somme inferiori crescono (e le somme superiori calano).



(a) Somma superiore

(b) Somma inferiore

(c) Somma indipendente

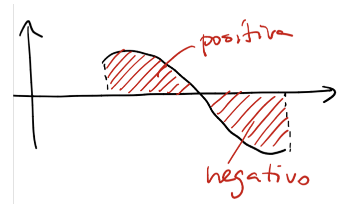
Figure 43: Somme delle sezioni

Definizione 13.0.5 (Integrabile secondo Rieman)**.** *Se* $S'(f) = S''(f)$ *si dice che f è **integrabile secondo Rieman** su* $[a, b]$ *e il valore comune si dice integrale di f su* $[a, b]$ *e si indica come:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\; = S'(f) = S''(f)$$

Osservazione 13.0.3. Questa definizione ha senso anche quando f può prendere anche valori negativi.

Se $f \leq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ ed è l'opposto dell'area in figura. In generale $\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma algebrica delle aree in figura (si sommano le aree dove l'integrale è positivo e si sottraggono quelle dove è negativo).



Teorema 13.0.1. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Osservazione 13.0.4. Ci sono anche funzioni non continue che sono integrabili, ad esempio una funzione con un punto in cui c'è un salto.

Definizione 13.0.6. *Una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua se è limitata e ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuità.*

Esempio 13.0.1. Funzione non generalmente continua. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ con $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
C'è un solo punto di discontinuità, ma f non è limitata $\implies$ non è generalmente continua.

Teorema 13.0.2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua, allora f è integrabile.

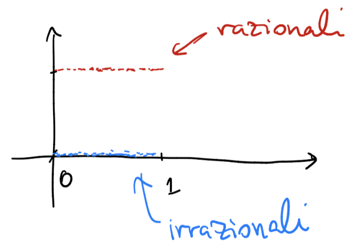
Esempio 13.0.2. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ con $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
$f(x)$ non è continua ma è generalmente continua $\implies$ integrabile

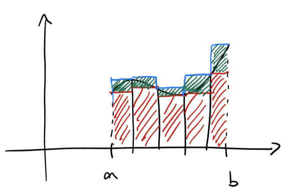
Esempio 13.0.3. Esempio di una funzione non integrabile. (Esempio con la funzione di Dirichlet).

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ con } f : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Per qualsiasi intervallo $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [0, 1]$ si ha che:

$sup(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} = 1$ e $inf(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} = 0$.
Segue che $S'(f, A) = 0\ \forall A$ suddivisione di $[0, 1] \implies S'(f) = 0$ e $S''(f, A) = 1\ \forall A$ suddivisione di $[0, 1] \implies S''(f) = 1$. Quindi $S'(f) \neq S''(f) \implies f$ non è integrabile.



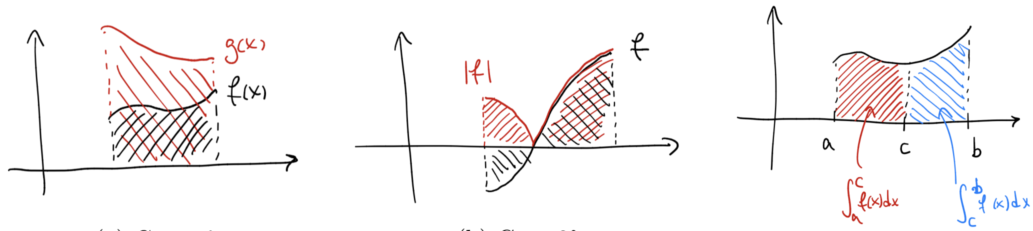


Se f è integrabile, $S''(f, A) - S'(f, A)$ (la differenza, l'area della regione verde nell'immagine) "tende a 0" al raffinarsi delle suddivisioni.

13.1 Calcolo degli integrali

Teorema 13.1.1. Siano f, g integrabili su $[a, b]$ e un numero $k \in \mathbb{R}$, allora: $f+g, k\cdot, |f|$ sono integrabili, e si ha che:

1. $\int_a^b (f + g)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
2. $\int_a^b (k \cdot f)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.
3. Se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
4. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
5. Se $a < c < b$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.



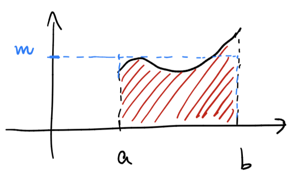
(a) Caso 1° (b) Caso 2° (c) Caso 3°

Osservazione 13.1.1. Osserviamo anche che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è constante, cioè $f(x) = k \ \forall x \in [a,b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = k \cdot (b-a)$

13.2 Media Integrabile

Definizione 13.2.1 (Media Integrabile)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si dice **media integrabile** di f su $[a,b]$.*

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$



Graficamente, m è l'altezza di un rettangolo di base $b-a$, con la stessa area del sotto grafico di f.

Teorema 13.2.1 (Teorema della media integrale)**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora:

$$inf(f(x))_{[a,b]} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq sup(f(x))_{[a,b]}$$

Se f è continua, allora $\exists x \in [a,b]$ tale che: $f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Dimotrazione 13.2.1. $\forall x \in [a,b]$ abbiamo $inf(f(x))_{[a,b]} \leq f(x) \leq sup(f(x))_{[a,b]}$. Integriamo questa disuguaglianza usando la proprietà (3) del teorema, e otteniamo:
$\int_a^b inf(f(x))_{[a,b]}\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b sup(f(x))_{[a,b]}\,dx$. Sia $\int_a^b inf(f(x))_{[a,b]}\,dx$ che $\int_a^b sup(f(x))_{[a,b]}\,dx$ sono costanti $\Longrightarrow \big(inf(f(x))_{[a,b]}\big)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \big(sup(f(x))_{[a,b]}\big)(b-a)$.
Dividendo per $(b-a)$ ottengo proprio: $inf(f(x))_{[a,b]} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leq sup(f(x))_{[a,b]}$.

Se f è continua, allora per il teorema di Weirstrass $inf(f) = min(f)$ e $sup(f) = max(f)$. Inoltre per il teorema dei valor intermedi f prende tutti i valori compresi tra il $min(x)$ e $max(f)$. La media integrale è un tale valore per quanto visto, quindi $\exists z \in [a,b]$ tale che $f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Osservazione 13.2.1. Se $b < a$, definiamo $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, e definiamo anche $\int_a^a f(x) = 0$.

Esempio 13.2.1. $\int_2^1 x^3\,dx = -\int_1^2 x^3\,dx$

Le proprietà viste precedentemente valgono anche con i valori scambiati come nell'esempio sopra.

Osservazione 13.2.2. La media integrale ha senso anche quando gli estremi sono scambiati. Se $b < a$, allora $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = (\frac{1}{b-a})\big(-\int_a^b f(x)\,dx\big) = \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx$

Definizione 13.2.2 (Primitiva)**.** *Prendiamo un $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F è derivabile in I e vale che $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.*

Esempio 13.2.2. $f(x) = 2x$. Una primitiva è $F(x) = x^2$. Non è l'unica primitiva, $G(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ ho comunque $G'(x) = 2x + 0 = f(x)$ quindi queste funzioni sono tutte primitive di $f(x) = 2x$.

In generale, se F è primitiva di f, tutte le funzioni $G(x) = F(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$ sono pure primitive di $f(x)$.

Osservazione 13.2.3. In effetti due primitive di $f(x)$ differiscono sempre per una costante.

Dimotrazione 13.2.2. Siano F e G due primitive di f. Allora ho che $F' = f$, $G' = f$. Quindi $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Visto che siamo su un intervallo, concludo che $F - G$ è costante $K \in \mathbb{R} \Longrightarrow F(x) = G(x) + k \ \forall x \in I$.

Definizione 13.2.3 (Integrale indefinito)**.** ***L'integrale indefinito*** *di $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ e si indica con $\int f(x)\,dx$ (senza gli estremi).*

Osservazione 13.2.4. $\int f(x)\,dx$ non indica una singola funzione, ma un insieme di funzioni.

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \textit{ derivabile e } F' = f\}$$

Esempio 13.2.3. Se prendiamo per esempio $\int 2x\,dx = \{x^2 + k \mid k \in \mathbb{R}\}$ di solito si abbrevia scrivendo $\int 2x\,dx = x^2 + k$.

L'integrale di Riemainn $\int_a^b f(x)\,dx$ invece è un numero reale, e rappresenta l'area del sotto grafico di f, e si dice **integrale definito** e a, b sono gli **estremi di integrazione** ("a" è inferiore e "b" superiore).

13.3 Formule per integrali indefiniti

Dalle formule per le derivate seguono formule per le primitive di una funzione f(x). Vedere la tabella di seguito.

$\int e^x = e^x + k$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + k$
$\int \cos(x)\,dx = \sin x + k$	$\int \sin x\,dx = -\cos(x) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x}$

Table 9: Formule primitive

13.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 13.4.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F(x) = \inf_a^x f(t)\,dt$ (chiamata anche funzione integrale) è una primitiva di f, cioè $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Dimotrazione 13.4.1. Mostriamo che F è derivabile calcolandone il rapporto incrementale in $x_0 \in I$ arbitrario, e poi facendo il limite.

$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(y)\,dt - \int_a^{x_0} f(y)\,dt\right) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$. In risultato è la media integrale di f sull'intervallo di estremi x e x_0.

Visto che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists\, z(x)$ compreso tra x_0 e x tale che $f(z(x)) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$.
Quindi $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f(z(x))$. Cambio variabile e prendo $y = z(x)$. Devo capire a cosa tende y quando $x \to x_0$. So che $z(x)$ è compreso tra x_0 e x (ad esempio se $x \le x_0$, so che $x \le z(x) \le x_0$) quindi per il teorema dei carabinieri ho che $\lim\limits_{cx \to x_0} y = x_0$.

Segue che $\lim\limits_{x \to x_0} f(z(x)) = \lim\limits_{y \to x_0} f(y) = f(x_0)$ (questo per la continuità di f). Questo dimostra che $F'(x_0) = f(x_0)$m quindi $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$. ■

13.5 Teorema di Torricelli

Teorema 13.5.1 (Teorema di Torricelli)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione continua, $a \in I$. Se G è una primitiva di f in I, allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$ e $\forall \alpha, \beta \in I$ abbiamo che $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

A livello di notazioni si va a scrivere: $[G(x)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

Esempio 13.5.1. Prendiamo $\int_1^3 x\,dx$. Una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{x^2}{2}$.
Quindi $\int_1^3 x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$. (Se prendiamo un'altra primitiva ad esempio $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, trovato $\int_1^3 x\,dx = [\frac{x^2}{2} + 1]_1^3 = \frac{8}{2} = 4$)

13.6 Integrali con estremi variabili

Teorema 13.6.1. Dato un $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Abbiamo poi $A \subseteq \mathbb{R}$, e $\alpha, \beta : A \to I$ derivabili. Sia $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$. Allora $G(x)$ è derivabile e si ha:

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

In particolare se $\alpha(x) = a$ constante e $\beta(x) = x$, si ha $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, e la formula scritta sopra è uguale a $f(x) \cdot\ - f(a) \cdot 0 = f(x)$. (Come della conclusione del teorema fondamentale)

Esempio 13.6.1. $G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \cdot \arctan(t)\,dt$ $\qquad f(t) = e^t \arctan(t)$, $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = \sin(x)$.
Abbiamo $G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = e^{\sin x} \cdot \arctan(\sin(x)) \cdot \cos(x) - e^{x^2} \cdot \arctan(x^2) \cdot 2$.
Applicazione: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t \cdot \arctan(x)\,dt}{\sin(x^4)} = \frac{\int_0^0 (\dots)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$. Usiamo de l'hopital.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} \cdot \arctan(x^2) \cdot 2x}{\cos(x^4) \cdot 4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{\arctan(x^2) \cdot x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{\arctan(x^2)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2} = 1 \cdot \frac{1}{2}$

13.7 Metodi di calcolo per integrali indefiniti

13.7.1 Integrazione per parti

Prendiamo $f, g : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f continua e g di classe C^1 (g e derivabile e la derivata è continua). Se F è una primitiva di f allora:

$$\int f \cdot g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx$$

Dimotrazione 13.7.1. Se faccio la derivata del prodotto $(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = fg + F'g$.
(Se due funzioni sono uguali anche gli integrali indefiniti delle due funzioni sono uguali)Integrando ambo i membri ottengo che $\int (Fg)'\,dx = \int (fg)\,dx + \int F \cdot g'\,dx = \int F \cdot g\,dx = \int (fg)\,dx + \int F \cdot g'\,dx$.
Abbiamo così dimostrato la formula. ■

Esempi ed esercizi guarda i lucidi delle lezioni (gli appunti del professore).

Osservazione 13.7.1. Se il ho $\log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (sto supponendo che $f(x) > 0$), quindi segue che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(x)) + k$.

13.7.2 Integrazione per sostituzione

Supponiamo di avere $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Prendiamo poi $\phi : J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora $\int (f \circ \phi) \cdot \phi'\,dx = (F \circ \phi) + k$.

Dimotrazione 13.7.2. $(F \circ \phi)' = (F'(\phi)) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi'$ per la regola di derivazione di funzioni composte, Integrando trovo che: $\int (f \circ \phi) \cdot \phi'\,dx = \int (F \circ \phi)'\,dx = (F \circ \phi) + k$. ■

Esempio 13.7.1. Prendiamo $\int x e^{x^2}\,dx$. Pongo $t = x^2$ (funzione di x), $\frac{dt}{dx} = dx$ quindi $dt = 2xdx$, $\frac{dt}{2} = xdx$.
$\int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t\,dt = \frac{1}{2} e^t + c$ e poi si torna in x sostituendo $t = x^2$ quindi torna $\frac{1}{2} e^{x^2} + k$.

Per gli integrali definiti possiamo fare in due modi. Prendiamo $\int_0^2 x e^{x^2}\,dx$:

1. Calcolare $\int xe^{x^2}\,dx$. Abbiamo che che è $\frac{1}{2}e^{x^2}+k$. Poi $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = [\frac{1}{2}e^{x^2}+k]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4-1)$.

2. Possiamo usare la sostituzione, ricordandosi di cambiare gli estremi: $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ pongo come prima $dt = 2xdx$, $\frac{dt}{2} = xdx$.
   Quindi $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int \frac{e^t}{2}\,dt$ e bisogna calcolare gli estremi vedendo quanto vale t negli estremi. $x=0$ quindi $t = 0^2 = 0$ e $x = 2$ quindi $t = 2^2 = 4$. Alla fine avremo $\int_0^4 xe^{x^2}\,dx$, da qui poi si va avanti come prima.

Esempio 13.7.2. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ e $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$ quidi $dx = \cos(t)\,dt$.
$= \int \sqrt{1-\sin(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt = \int \sqrt{\cos(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt = \int |\cos(t)|\cdot\cos(t)\,dt$ (il valore assoluto si toglie visto che $\cos(t) \geq 0$ nell'intervallo in cui stiamo integrando che è fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$).
$\int \cos(t)^2\,dt = \frac{t+\sin(t)\cdot\cos(t)}{2} + c = \frac{\arcsin(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2} + c$.

Se andiamo a fare l'integrale di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ si va a calcolare l'area del cerchio unitario.
Infatti $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\big[\frac{\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2}\big]_0^1 = 4\cdot\frac{\arcsin(1)}{2} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$.

Se volessimo calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+k$ visto che $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Osservazione 13.7.2. Ho anche $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, quindi $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)+k'$. Segue che $\arcsin(x) - (-\arccos(x))$ è costante. Per vedere quanto vale basta calcolare in $x = 0$, e trovo $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$. Quindi $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ \ \forall x \in [-1, 1]$.

13.8 Integrali di funzioni razionali

Consideriamo integrali nella forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi in x ed il grado di $q(x) \leq 2$, $\deg(q(x)) \leq 2$.

- Caso con denominatore ha grado 1, $\deg(q(x)) = 1$.
  Esempio caso particolare con numeratore costante con $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$. In questo caso usiamo la sostituzione $y = ax + b$ e $dy = a\cdot dx$.
  $= \int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$.

  Caso con $\deg(p(x)) > 0$. Usiamo il caso precedente ma facendo prima la divisione di polinomi di $p(x)$ per $q(x) = ax + b$. Cioè scriviamo:
  $p(x) = (ax + b)\cdot Q(x) + R(x)$ dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi e $\deg R(x) < \deg(ax + b) = 1$, (allora R(x) è una costante ed è uguale a $p(-\frac{b}{a})$).

  C'è un algoritmo per fare la divisione in maniera veloce:

  Esempio 13.8.1. Prendiamo $\int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx$. $\frac{p(x)}{ax+b} = \frac{2x^2+1}{x+1}$, quindi $a = 1$ e $b = 1$.
  Divido $2x^2 + 1$ per $x + 1$. (Fare la divisione, vedere gli appunti delle lezioni per il modo preciso).
  Il risultato è: $\int \frac{(x+1)(2x-2)+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(2x-2)}{(x+1)}dx + \int \frac{3}{x+1} = \int(2x-2)dx + 3\log|x+1| + c = x^2 - 2x + 3\log|x+1| + c$

- Caso con grado denominatore uguale a 2, $\deg(q(x)) = 2$.
  Il primo passaggio è sempre quello di fare la divisione scrivendo $p(x) = (ax^2+bx+c)\cdot Q(x)+R(x)$ dove $\deg R(x) < 2$ cioè $R(x) = cx + d$.
  Quindi $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{(ax^2+bx+c)\cdot Q(x)+R(x)}{ax^2+bx+c}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{ax^2+bx+c}dx$, dove $R(x) = cx + d$.
  Per calcolare gli integrali di questa forma rimane da vedere come calcare $\int \frac{cx+d}{ax^2+bx+c}dx$.
  Ci sono usa serie di casi particolare da analizzare, a seconda del numero di radici reali del denominatore:

  1. Due radici coincidenti e numeratore costante. $\int \frac{dx}{(x-a)^2}$, si fa una sostituzione del tipo $y = x - a$ e $dy = dx$. $\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-1}\cdot y^{-1} + c = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{x-a} + c$.

2. Due radici reali distinte e numeratore costante. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ con $a \neq b$. Si cercano due numeri reali A e B tali che valga:
$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{x(A+B)-Ab-Ba}{(x-a)(x-b)}$. Se voglio che valga questa uguaglianza, per il principio di identità dei polinomi deve essere che:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases} = \begin{cases} B=-A \\ -Ab+Aa=1 \end{cases} = \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{a-b} \end{cases} = \begin{cases} B=-\frac{1}{a-b} \\ A=\frac{1}{a-b} \end{cases}$$

A questo punto posso sostituire con l'espressione trovata sopra:
$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int (\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-b)})dx = \frac{1}{a-b}(\log|x-a) - \log|x-b|) + c$

- Denominatore senza radici reali e numeratore costante.
$\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$. Generalizzando $\int \frac{dx}{k^2+x^2}$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.
$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{k})^2}$ facciamo poi una sostituzione con $y = \frac{x}{k}$ e $dy = \frac{dx}{k}$.
$\frac{1}{k^2} \int \frac{1}{a+y^2} \cdot k\, dy = \frac{1}{k} \cdot \arctan(y) + c = \frac{1}{k} \cdot \arctan(\frac{x}{k}) + c$.
Il casi generale con il denominatore come $ax?2 + bx + c$ senza radici reali, cioè $\Delta < 0$. In realtà posso supporre che $a = 1$: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} dx$. Quindi guardo polinomi della forma x^2+bx+c con $\Delta < 0$. Io posso fare $x^2+bx+c = (x^2+bx+\frac{b^2}{4}) - \frac{b^2}{4} + c = (x+\frac{b}{2})^2 + \frac{1}{4}(-b^2+4c)$.
$\int \frac{dx}{x^2+x+c} = \int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2+k^2}$, con $k^2 = \frac{1}{4}(-b^2+4c) > 0$. Se poi andiamo a sostituire con $y = x + \frac{b}{2}$ e $dy = dx$ abbiamo $\int \frac{1}{y^2+k^2} dx$ e questo lo sappiamo fare perché visto sopra ed è $\frac{1}{k}\arctan(\frac{x+\frac{b}{2}}{k}) + c$.

Esempio 13.8.2. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3}\arctan(\frac{x+1}{3}) + c$.
(se si fosse scelto $k = -3$ invece che $k = 3$ sarebbe venuto lo stesso risultato perché $-\frac{1}{3}\arctan(-\frac{y}{3}) + c = \frac{1}{3}\arctan(\frac{y}{3})$)

- Caso nel quale il denominatore non è costante, cioè ha grado 1, bisogna vedere come comportarsi con il numeratore.
$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+c-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} = \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} dx + \frac{a}{2} \int \frac{-c\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} dx$ ora per il primo integrale il numeratore è la derivata del denominatore, mentre nel secondo essendoci una costante al numeratore lo sappiamo fare.
$\frac{a}{2}\log|x^2+cx+d| + \frac{a}{2} \int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} dx$.

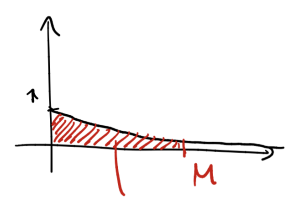
Esempio 13.8.3. $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1} dx = 2 \int \frac{2x+\frac{5}{2}+2-2}{x^2+2x-1} dx = 2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x-1} dx + 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x-1} dx =$
$= 2\log|x^2+2x-1| + \int \frac{1}{x^2+2x-1}$

13.9 Integrali impropri

Gli Integrali impropri o generalizzati estendo la definizione di integrale definito al caso in cui l'integrale non è limitato, oppure l'intervallo di integrazione non è limitato.

Esempio 13.9.1. Dobbiamo dare un senso per esempio a $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$.

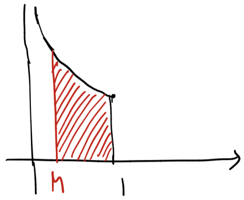
Intuitivamente rappresenta l'area di tutto il sotto grafico sopra $(0, +\infty)$. Formalmente definiremo un limite:



$\lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-x}\, dx = \lim_{M \to +\infty} [-e^{-x}]_0^M = \lim_{M \to +\infty} -e^{-M} + 1 = 1$.
In questo caso il sotto grafico $[0, +\infty)$ ha area finita uguale a 1.

Esempio 13.9.2. Se invece prendiamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x} dx =$
$\lim_{M \to +\infty} [\log(1+x)]_0^M = \lim_{M \to +\infty} (\log(1+M) - 0) = +\infty$. In questo caso l'area del sotto grafico è infinito.

Esempio 13.9.3. Facciamo un' altro esempio di integrale improprio con $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.



$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ notiamo che la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata sull'intervallo compreso fra $[0, 1)$.

$\lim_{M \to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{M \to 0^+} [2\sqrt{x}]_M^1 = \lim_{M \to 0^+} (2 - 2\sqrt{M}) = 2$, l'area del sotto grafico di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sopra a $[0, 1]$.

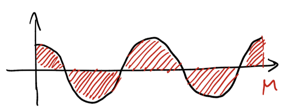
Esempio 13.9.4. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to 0^+} [\log(x)]_M^1 = \lim_{M \to 0^+} (0 - \log(M)) = +\infty$.
Quindi in questo caso il sotto grafico ha area infinita.

Definizione 13.9.1 (Integrali impropri o generalizzati)**.** *Dati due punti $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ e $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile in tutti gli intervalli $[a, M]$ con $a < M < b$. Se esiste $\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\, dx = L$, definiamo $\int_a^b f(x)\, dx = L$.*

- *Se L è reale finito si dice che l'integrale di $f(x)$ su $[a, b)$ converge (oppure che $f(x)$ è integrabile "in senso generalizzato su $[a, b)$").*
- *Se L è uguale a $+\infty$ si dice che l'integrale diverge positivamente (o "a $+\infty$").*
- *Se L è uguale a $-\infty$ si dice che l'integrale diverge negativamente (o "a $-\infty$").*

Vedendo gli esempi visti sopra possiamo dire che:
$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ converge $\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\, dx$ diverge pos. $\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge $\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ diverge pos.

Esempio 13.9.5. Esempio in cui il limite non esiste:



$\int_0^{+\infty} \cos(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M \cos(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} [\sin(x)]_0^M = \lim_{M \to +\infty} (\sin(M) - 0)$ e questo non esiste.

Analogamente si definisce $\int_a^b f(x)\, dx$ quando $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ e f integrabile su $[M, B] \forall a < M < b$ come $\lim_{M \to a^+} \in_M^b f(x)\, dx$ (se esiste).

Se però abbiamo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ questa funzione "ha un problema" in entrambi a e b, ad esempio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ oppure $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2}\, dx$.

Definizione 13.9.2. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ che sia integrabile su $[M_1, M_2]$ con $a < M_1 < M_2 < b$. Scegliamo arbitrariamente $c \in (a, b)$, se esistono entrambi $\int_a^c f(x)\, dx$ e $\int_c^b f(x)\, dx$ allora si definisce:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \text{ Se la somma non è indeterminata (cioè non è} + \infty - \infty)$$

E in questo caso si diche che f è integrabile in senso improprio su (a,b)

Osservazione 13.9.1. L'esistenza e il valore di $\int_a^b f(x)\, dx$ non dipende dalla scelta di $c \in (a, b)$.
Se scelgo $d \in (a, b)$ ho $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ e $\int_d^b f(x)\, dx = \int_d^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.
Sommando queste due equazioni ottengo $\int_a^b f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^c f(x)\, dx$ la seconda somma $\int_c^d f(x)\, dx + \int_d^c f(x)\, dx = 0$ quindi vediamo che il risultato non cambia.

Esempio 13.9.6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. Scelgo $c = 0$.
$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{M \to -\infty} \int_M^0 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{M \to -\infty} [\arctan(x)]_{-M}^0 = \lim_{M \to -\infty} [0 - \arctan(M)] = +\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} =$ (stessi conti di prima) $= \frac{\pi}{2}$. Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2$ (converge)

Esempio 13.9.7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, scegliamo $c = 1$.
$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to 0^+} [-x^{-1}]_M^1 = \lim_{M\to 0^+} [-1+\frac{1}{M}]_M^1 = +\infty$ (diverge positivamente).
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{M\to +\infty} [-x^{-1}]_1^M = \lim_{M\to +\infty} [-\frac{1}{M}+1] = 1$.
Quindi $\int_0^+ \infty\frac{1}{x^2}\, dx = +\infty + 1 = +\infty$ quindi il grafico diverge positivamente.

Esempio 13.9.8. Prendiamo $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$ in questo caso spezziamo in $c = 0$.
$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$.
$\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to 0^-} \int_{-1}^M = \lim_{M\to 0^-} [\log(-x)]_{-1}^M = \lim_{M\to 0^-} \log(-M) = -\infty$.
$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to 0^+} [\log(x)]_M^1 = \lim_{M\to 0^+} -\log(M) = +\infty$.
Se vado a fare la soma ho che la somma è indeterminata $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty - \infty$ e dunque non esiste.

Attenzione a non fare $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_{-1}^1 = \log(1) - \log(1) = 0$ perché è sbagliato, il teorema di Torricelli non si applica perché f non è integrabile su $[-1, 1]$. Bisogna trattarlo come integrale improprio.

Osservazione 13.9.2. I potrebbe pensare che ha senso dire che $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = 0$ visto che $\frac{1}{x}$ è dispari, e le aree sopra e sotto si sovrappongono perfettamente. Si preferisce dire comunque che l'integrale non esiste.

Si potrebbe sommare $\int_{-1}^a \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx$ e far tendere $a \to 0^-$ e $b \to 0^+$.
Il problema è che il risultante del limite dipende da come viene fatto questo limite.

Esempio 13.9.9. $\lim_{b\to 0^+} (\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx) = \lim_{b\to 0^+} (\log(b) - \log(b)) = 0$.
Ma per esempio se prendiamo $-2b$ invece che b abbiamo $\lim_{b\to 0^+} (\int_{-1}^{-2b} \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx) = \lim_{b\to 0^+} (\log(2b) - \log(b)) = \lim_{b\to 0^+} \log(\frac{2b}{b}) = \log(2)$ ed il risultato è diverso.

Se ci sono "più problemi" sull'intervallo di integrazione si spezza in tanti intervalli quanto basta per ricondursi a integrali impropri in cui c'è solo un problema.

Esempio 13.9.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx$ ci sono problemi sia agli estremi, più ha due asintoti a -1 e 1.
Quindi si spezza come $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty}$ e la somma ha senso se hanno senso (cioè i limiti esistono) e non è indeterminata.

Osservazione 13.9.3. In questi casi si scrive comunque $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$ e non $\int_{[-1,0)\cup(0,1]} \frac{1}{x}\, dx$.

Proposizione 13.9.1. *Data una $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a, M] \forall\, a < M < b$ e supponiamo che f abbia segno costante. Allora esiste (finito o infinito) $\int_a^b f(x)\, dx$. Ed esiste un enunciato analogo per il caso simmetrico $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.*

Dimotrazione 13.9.1. Supponiamo ad esempio che $f \geq 0$ su $[a, b)$. Mostriamo che $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è debolmente crescente. Seguirà che $\exists \lim_{x\to b^-} F(x)$ che è proprio $\int_a^b f(t)\, dt$. Infatti se $x_1 < x_2$, allora $F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\, dt = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x^2} f(t)\, dt \geq \int_a^{x_1} F(x_1)$. Il pezzo $\int_{x_1}^{x^2} \geq 0$ perché $f(t) \geq 0$ e $x_2 > x_1$. ■

13.9.1 Integrali impropri notevoli

Con la forma: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha = 1$, $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| \longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to +\infty} [\log(x)]_1^M = \lim_{M\to +\infty} (\log(M)) = +\infty$, diverge.
- Se $\alpha \neq 1$, $\int \frac{1}{x} = \int x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + c$.
  Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{M\to +\infty} [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^M = \lim_{M\to +\infty} (\frac{1}{1-\alpha} M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha})$.
- Se $1 - \alpha > 0$, cioè $\alpha < 1$, il limite è $+\infty$.

- se $1-\alpha<0$, cioè $\alpha>1$, il limite è finito e vale $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}>0$.

Esempio 13.9.11. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge a $+\infty$.

Con la forma: $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Se $\alpha=1$, $\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=\lim\limits_{M\to 0^+}[\log(x)]_M^1=\lim\limits_{M\to 0^+}(\log(M))=+\infty$ diverge.
- Se $\alpha\neq 1$, $\int\frac{1}{x}=\int x^{-\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}+c$.
  Quindi $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}=\lim\limits_{M\to 0^+}[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}]_M^1=\lim\limits_{M\to 0^+}(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}M^{1-\alpha})$.
- Se $1-\alpha>0$, cioè $\alpha<1$, il limite è finito e vale $-\frac{1}{1-\alpha}>0$.
- se $1-\alpha<0$, cioè $\alpha>1$, il limite è finito e vale $+\infty$.

Osservazione 13.9.4. Quindi questo implica che $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=+\infty\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

13.10 Criteri per la convergenza di integrali impropri

13.10.1 Criterio del confronto

Prendiamo un $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ (deve essere $+\infty$), e $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni $[a,M]\ \forall\ a<M<b$. Se $\exists\,U$ intorno sinistro di b tale che $0\leq f(x)\leq g(x)\ \ \forall\,x\in U\cap[a,b)$.

1. Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $(a,+\infty)$, allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $(a,+\infty)$.

C'è un enunciato analogo se $f,g:(a,b]$.

Esempio 13.10.1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4+3x^3+x+1}$, chiamiamo $f(x)=\frac{dx}{x^4+3x^3+x+1}$ è continua in $[1,+\infty)$ perché $x^4+3x^3+x+1>0\ \forall x\geq 1$.
Inoltre $0\leq f(x)\leq\frac{1}{x^4}\forall x\in[1,+\infty)$. Visto che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$ converge, per confronto concludiamo che $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge.

13.10.2 Criterio del confronto asintotico o C.A.

Prendiamo $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$, e $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni $[a,M]\ \forall a<M<b$. Se $\exists U$ intorno sinistro di b tale che $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0\forall x\in U\cap[a,b)$ e $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Allora:

- Se $l\neq 0,+\infty$, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Longleftrightarrow\int_a^b g(x)\,dx$ converge.
- Se $l=0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- Se $l=+\infty$ e $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

C'è un enunciato analogo se $f,g:(a,b]$.
Esempio: nel secondo caso $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Longrightarrow$ per x vicine a b vale $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 1\Longrightarrow f(x)\leq g(x)$ vicino b.

Osservazione 13.10.1. Le implicazioni di questi criteri non si invertono.

Esempio 13.10.2. $\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x}$ $(f(x)\leq g(x))$ per $x\geq 0$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge non si può concludere che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ diverge. Il criterio del confronto non vale in maniera inversa.

Esempio 13.10.3. $\int_0^1\frac{1}{x-\sin(x)}\,dx$, prendiamo $f(x)=\frac{1}{x-\sin x}$ è continua in $(0,1]$ e $f(x)>0$ in $(0,1]$.
Il metodo è usare Taylor per confrontare la $f(x)$ con una certa forma $\frac{1}{x^\alpha}$. Sviluppiamo il denominatore in 0 (il punto "problematico")
$x-\sin x=x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. $f(x)=\frac{1}{x-\sin x}=\frac{1}{\frac{x^3}{6}}$ attorno a 0.

Uso il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^3}$. $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$. Per il C.A. concludo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^3}$ che sappiamo diverge. Quindi $\int_0^1 \frac{1}{x-\sin(x)}\,dx$ diverge.

Osservazione 13.10.2. I criteri del confronto e del confronto asintotico si possono usare anche per funzioni negative, cambiando opportunamente le conclusioni.
Ad esempio: se $g(x) \leq f(x) \leq 0$ per $x \in [a,b)$ allora:

- Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge (a $-\infty$ per forza) allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge (a $-\infty$).

13.10.3 Criterio dell'assoluta convergenza

Questo criterio si applica a funziono a segno variabile.

Definizione 13.10.1. *f, integrabile su ogni intervallo chiuso $[a,b] \subseteq I$, si dice assolutamente integrabile su I se $|f|$ è integrabile (eventualmente in senso generalizzato) su I, cioè $\int_I |f(x)|\,dx$ converge.*

Definizione 13.10.2 (Parte positiva e negativa)**.** *Prendiamo un $x \in \mathbb{R}$. Definiamo:*

- *La **parte positiva** di x è $x^+ = maxx, 0$ cioè è x se $x \geq 0$ ed è 0 se $x < 0$.*
- *Mentre la **parte negativa** di x è $x^- = -minx, 0$ che è $-x$ quando $x \leq 0$ e 0 se $x > 0$.*

Esempio 13.10.4. $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $(-3)^+ = 0$, $(-3)^- = 3$

Osservazione 13.10.3. Ogni $x = x^+ - x^-$ mentre $|x| = x^+ + x^-$. Segue che $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ e $x^- = \frac{|x|-x}{2}$.
Analogamente, se $f(x)$ è una funzione ho $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, e $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$.

Proposizione 13.10.1 (Criterio dell'assoluta integrabilità)**.** *Se f è assolutamente integrabile su I allora f è integrabile (in senso generalizzato) su I.*

Per questa proposizione non vale il viceversa.

Dimotrazione 13.10.1. $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$ quindi:
$0 \leq (f(x))^+ \leq |f(x)|$ e $0 \leq (f(x))^- \leq |f(x)|$

Per confronto, supponendo che $\int_I |f|\,x$ converga, concludo che convergono $\int_I f(x)^+\,x$ e $\int_I f(x)^-\,x$.
Visto che $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, concludo che:
$\int_I f(x)\,dx = \int_I (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_I f(x)^+\,dx - \int_I f(x)^-\,dx$.

Ad esempio se $I = [a,b)$, abbiamo che:
$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^M (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_a^M f(x)^+\,dx - \int_a^M f(x)^-\,dx$, passando al limite per $M \to b^-$ so che i limiti di $\int_a^M f(x)^+\,dx - \int_a^M f(x)^-\,dx$ esistono, quindi esiste anche $\lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx$. ■

Corollario 13.10.0.1. *$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$ integrabili in $[a,M]\forall a < M < b$. Se $\exists U$ intorno sinistro di b tale che $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in U \cap [a,b)$ e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge. (Confronto + assoluta integrabilità)*

Esempio 13.10.5. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ a segno variabile su $[1, +\infty)$.
$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nel corollario di sopra.
Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, concludo che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$ converge.

Esempio 13.10.6. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. Procedendo alla stesso modo di sopra $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a segno variabile.
$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Questa volta però $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.
Quindi non posso concludere niente su $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. In questo caso possiamo: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} =$ (integro per parti) $= \int_1^M \sin x \frac{1}{x}\,dx = [-\frac{\cos x}{x}]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} (-\frac{\cos M}{M} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2})\,dx =$

$\lim\limits_{M\to+\infty}(-\frac{\cos M}{M}+\cos 1)-\lim\limits_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx$.
Il risultato finale è uguale a $\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ che converge come il caso con seno (visto nell'esempio prima). Mentre la parte $-\frac{\cos M}{M}$ tende a 0, quindi $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ converge.

Osservazione 13.10.4. Stesso discorso per $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}$ che converge.

Esempio 13.10.7. Vediamo come $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}$ diverge(questo da un esempio di $f(x)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, ma $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,dx$ diverge).

Osserviamo che $|\sin x| \geq (\sin x^2)$ (perché $-1 \leq \sin x \leq 1$). Quindi $\int_1^M \frac{|\sin x|}{x} \geq \int_1^M \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \int_1^M \frac{(1-\cos 2x)}{2x} = \int_1^M \frac{1}{2x} - \int_1^M \frac{\cos sx}{2x} = \int_1^M \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_2^{2M}\frac{\cos t}{t}\,dt$ con $t=2x$ e $dt=2dx$. Il primo integrale diverge ed il secondo converge perché si ritorna ad un caso visto prima ($\int_2^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$).
Quindi in conclusione la somma diverge a $+\infty$ quindi $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}$ diverge a $+\infty$.

13.10.4 Integrali impropri ricorrenti

TIPO 1°. Vediamo ora gli integrali del tipo $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha \log(x)^\beta}\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

- Caso con $\alpha>1$: possiamo prendere un $\gamma\in\mathbb{R}$ tale che $\alpha>\gamma>1$.
  $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}$ e $g(x)=\frac{1}{x^\gamma}$. $f(x),g(x)\geq 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\gamma}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\gamma}(\log(x))^\beta}$ questo limite è 0.
  Quindi visto che $\gamma>1$, quindi $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}dx$ converge e per C.A. concludiamo che $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}dx$ converge.

- Caso con $\alpha<1$: possiamo prendere un $\gamma\in\mathbb{R}$ tale che $\alpha<\gamma<1$.
  $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}$ e $g(x)=\frac{1}{x^\gamma}$. $f(x),g(x)\geq 0$.
  Questa volta $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\log(x)^\beta)}=+\infty$.
  Visto che $\gamma<1$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}\,dx$ diverge per C.A. Possiamo quindi concludere che $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx$ diverge $\forall\beta\in\mathbb{R}$.

- Caso con $\alpha=1$: $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx$.
  $\int_2^M \frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx=$ con $t=\log(x)$ e $dt=\frac{1}{x}\,dx=\int_{\log(2)}^{\log(M)}\frac{1}{t^\beta}\,dt=\lim\limits_{M\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}=\int_{\log(2)}^{+\infty}\frac{1}{t^\beta}\,dt$ che converge se $\beta>1$ e diverge a $+\infty$ se $\beta\leq 1$.

TIPO 2°. Analogamente studiamo $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
$\int_M^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx=$ con $t=\frac{1}{x}$ quindi $x=\frac{1}{t}$, e $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\int_{\frac{1}{M}}^{2}\frac{-dt}{t^2\cdot t^{-\alpha}|l-\log(t)|^\beta}=$ (se $M\to 0^+$ allora $\frac{1}{M}\to+\infty$) $=\int_2^{\frac{1}{M}}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta}=\lim\limits_{M\to 0^+}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta}=\int_2^{\frac{1}{M}}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta}$ e questo l'abbiamo appena studiato. Segue che $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx$ abbiamo che:

- $2-\alpha>1$ ($\alpha<1$) converge $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
- $2-\alpha<1$ ($\alpha>1$) diverge a $+\infty$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
- $2-\alpha=1$ ($\alpha=1$) con $\beta>1$ converge.
- $2-\alpha=1$ ($\alpha=1$), $\beta\leq 1$ diverge a $+\infty$.

TIPO 3°. Vediamo come ultimo gli integrali della forma $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}$.

- Questo integrale converge se $a>0$ e $\alpha>1$.
- Invece l'integrale diverge a $+\infty$ se $a>0$ e $\alpha\leq 1$-

13.10.5 Esempi riassuntivi

Esempio 13.10.8. Primo esempio riassuntivo: $\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{x-x_0}$

- Converge se $\alpha < 1$.
- Diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Dato M tale che $x_0 < M < x_0 + 1$. $\int_M^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} =$ con $t = x - x_0$ e $dt = dx = \int_{M-x_0}^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.
$\lim_{M \to x_0^+} \int_M^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{M \to x_0^+} \int_{M-x_0}^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ e sappiamo che questo converge se $\alpha < 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Esempio 13.10.9. Secondo esempio riassuntivo: $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\, dx$. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4}$ è definita e continua in $[0, 2)$ quindi integrale va trattato come integrale improprio. Bisogna notare anche che $f(x) < 0$ (sempre positiva) in tutto $[0, 2)$ perché $x^3 + 1 > 0$ per $x > 0$ e $x^2 - 4 < 0$ per $0 \leq x < 2$.
Avendo segno costante si possono usare i criteri del confronto e del confronto asintotico.
$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)}$ il pezzo problematico è $g(x) = \frac{1}{x-2}$.
Usiamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x-2}$ (notare $g(x) < 0$ in $[0, 2)$). Poi facciamo $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$:
$\lim_{x \to 2} \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)} \cdot (x-2) = \frac{9}{4} \neq 0, +\infty$. Per C.A. $\int_0^2 f(x)\, dx$ ha lo stesso comportamento di $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\, dx$ che sappiamo diverge negativamente (sostituzione $t = 2 - x$ per ricondursi a $\int \frac{dt}{t}$).
Quindi $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\, dx = -\infty$ (si scrive sono $-\infty$ che vuol dire che diverge negativamente)

Esempio 13.10.10. Terzo esempio riassuntivo: $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ $(1 + x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$. Infine $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi l'unico problema è a $+\infty$.
Per x grandi $\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ sarà circa $\frac{\log(x^2)}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\log(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ e sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, quindi probabilmente anche il nostro divergerà.
Facciamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$.
Quindi visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, concludo che $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge positivamente. Segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$ cioè il nostro integrale diverge positivamente.

Esempio 13.10.11. Quarto esempio riassuntivo: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}\, dx$. $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}$ definita e continua su $(0, +\infty)$ e $f(x) > 0$ su $(0, +\infty)$, ci sono 2 problemi, in 0 e a $+\infty$ quindi spezziamo in $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ e studiamo i due pezzi.

- Caso $\int_0^1$: per $x \to 0^+$ si ha $\arctan(x^{5/2}) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$ quindi $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)(x^{\frac{5}{2}}+o(x^{5/2}))} = \frac{x^2}{2x^{\frac{5}{2}}+o(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}+o(x^{\frac{1}{2}})}$ prendo $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Ho $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}+o(x^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$. Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge per C.A. concludo che converge anche $\int_0^1 f(x)\, dx$.
- Caso $\int_1^{+\infty}$: per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{x^2}{x^4(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}$
la seconda parte per $x \to +\infty$ fa $\frac{1}{3\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$, prendo quindi $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\cdot(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{2}{3\pi} \neq 0, +\infty$. Vito che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, per C.A. converge anche $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Esempio 13.10.12. Quinto esempio (con segno variabile): $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}\, dx$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}$ definita e continua in $(0, +\infty)$, problemi in $x = 0$ e $x = +\infty$, $f(x)$ a segno variabile.
Spezziamo $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$

- Caso $\int_0^1$: osserviamo che $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$ perché ($\sin(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$). Quindi posso usare confronto e C.A. per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)} = \frac{x+o(x)}{x^{3/2}+o(x^{3/2})} = \frac{1+o(1)}{x^{1/2}+o(x^{1/2})}$, prendo quindi $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$.
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{1/2}+o(x^{1/2})} \cdot x^{1/2} = 1 \neq 0, +\infty$. Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge, per C.A. concludiamo che $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge.

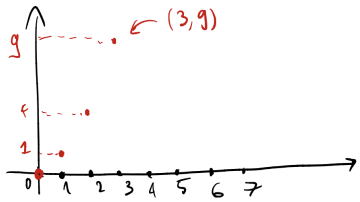
- Caso $\int_1^{+\infty}$ qui $f(x)$ non è costante ma oscilla tra valori positivi e negativi. Proviamo ad usare assoluta convergenza:
  $|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{7/2}}$. Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/2}}\, dx$ converge, per confronto ho che $\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge e per il criterio dell'assoluta integrabilità segue che $\int_1^{+\infty} f(x)$ converge.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

14 Successioni

Definizione 14.0.1 (Successione)**.** *Una successione*[12] *è una funzione* $f : S \to \mathbb{R}$ *dove* S *è una semiretta di* $\mathbb{N}$*, cioè* $S = \{n \in \mathbb{R} \mid x \geq n_0\}$ *per qualche* n_0*.*

Esempio 14.0.1. Consideriamo $f(n) = n^2$ con $S = \mathbb{N}$.



Da questa funzione posso calcolare tutti i valori: $f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$

E possibile disegnare un grafico di una successione che è composto da una serie di punti sparsi.

Esempio 14.0.2. $f(n) = \frac{1}{n}$, come S non posso prendere tutti i naturali perché con 0 non ha senso quindi $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$. $f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}$.

14.1 Notazione

Nelle successioni invece di scrivere $f(n)$ di solito una successione si denota con a_n. Negli esempio di prima si sarebbe: $a_n = n^2$, $a_n = \frac{1}{n}$.
L'intera successione si denota con $\{a_n\}$ oppure $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n\in S}$.

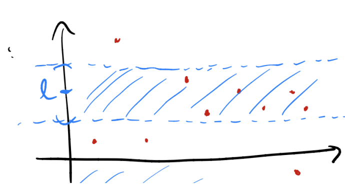
Esempio 14.1.1. $a_n = \frac{1}{n-5}$. La formula ha senso per $n \neq 5$, quindi si può prendere $S = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 6\}$ (avrei anche potuto prendere $n \geq 7$ o $n \geq 8$).

Esempio 14.1.2. $a_n = \sqrt{5-n}$. La formula ha senso se $5 - n \geq 0$ cioè $n \leq 5$. Nessuna semiretta va bene perché in una successione n diventa sicuramente più grande ad un certo punto quindi non definisce una successione.

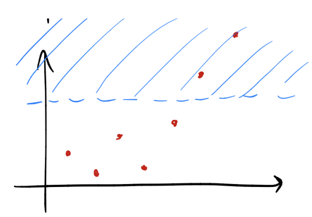
14.2 Limiti di Successioni

Come per le funzioni bisogna guardare come si comporta la successioni all'avvicinarsi ad un limite. L'unico limite che ha senso è il limite per $n \to +\infty$, perché $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di tutto il dominio (perché $S \subseteq \mathbb{N}$).

Definizione 14.2.1 (Limite di successione)**.** *Si ha che* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ *se* $\forall$ U *intorno di* l *si ha che* $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n \in U$ $\forall\, n \geq \overline{n}$*.*
Si dice che a_n *converge a* l *se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ *e* $l \in \mathbb{R}$ *e che diverge a* $\pm\infty$ *se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$*.*



(a) Graficamente se il limite è in $\mathbb{R}$ quindi $l \in \mathbb{R}$



(b) E con $l = +\infty$

Esiste una **Terminologia** quando si parla di queste cose: se $P(n)$ è un predicato la cui verità dipende da $n \in \mathbb{N}$ (esempio: $P(n) =$ "n è pari") si dice che $P(n)$ è vero definitivamente se $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $P(n)$ è vero $\forall n \geq \overline{n}$.
Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ se $\forall\, U$ introno di l si ha che $a_n \in U$ definitivamente.

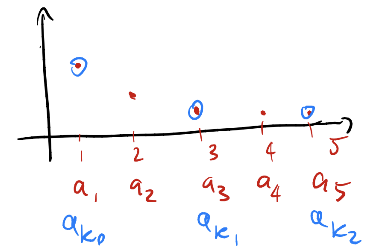
[12] Nelle successioni si è soliti scrivere n al posto di x come simbolo per la variabile ess. $f(n)$

14.3 Sottosuccessioni (estratte)

Definizione 14.3.1 (Sottosuccessione)**.** *Dato $a_n : S \to \mathbb{R}$ una successione, consideriamo $k_n : \mathbb{N} \to S$ strettamente crescente (cioè $k_n > k_m$ quando $n > m$), possiamo considerare la composizione a_{k_n}. Questa è una nuova successione detta sottosuccessione di $\{a_n\}$ (In pratica scegliamo solo un certo sottoinsieme di indici, in modo crescente).*

Esempio 14.3.1. Prendiamo la successione $a_n = \frac{1}{n}$.

Per avere una sottosuccessione prendo $k_n : \mathbb{N} \to S$,e prendo $n \mapsto 2n+1$. Abbiamo $a_{k_n} = \frac{1}{k_n} = \frac{1}{2n+1}$.
Quindi graficamente:
$a_{k_0} = \frac{1}{0+1} = 1$, $a_{k_1} = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3} = a_3$, $a_{k_2} = \frac{1}{2\cdot 2+1} = \frac{1}{5} = a_5$.



Teorema 14.3.1. Data una successione $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ se e solo se vale $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$ per ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$.

A volta si può usare per dimostrare che una successione non ha limite.

Esempio 14.3.2. $a_n = (-1)^h = \begin{cases} -1 & \text{se n è pari} \\ -1 & \text{se n è dispari} \end{cases}$

Questo successione non ha limite e si dimostra con il teorema visto sopra. Infatti, consideriamo le sottosuccessioni $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ date da indici pari e dispari.
Abbiamo che $a_{2n} = (-1)^{2n} = (1)^n = 1$ che converge a 1 mentre, $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ e quindi converge a -1. Visto che questi limiti esistono e sono diversi, segue dal teorema che $\{a_n\}$ non può avere limite.

Osservazione 14.3.1. Per i limiti di successioni valogono molti dei teoremi visti per le funzioni, ad esepio:

- Formule per limiti di somme, prodotti, quozienti, esponenziali etc.
- Teorema di permanenza del segno.
- Teorema dei carabinieri.
- Teorema del confronto, ed altri...

Esempio 14.3.3. Per esempio il teorema della permanenza del segno per le successioni dice: se abbiamo una successione che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente.

14.4 Monotonia

Definizione 14.4.1 (Monotonia)**.** *Una successione $\{a_n\}$ essa si dice:*

- ***Debolmente crescente*** *se $n > m \Longrightarrow a_n \geq a_n$.*
- ***Strettamente crescente*** *se $n > m \Longrightarrow a > a_m$.*
- ***Debolmente decrescente*** *se $n > m \Longrightarrow a_n \leq a_m$.*
- ***Strettamente decrescente*** *se $n > m \Longrightarrow a_n < a_m$.*

Successione è monotona quando vale una di queste 4 proprietà.

Osservazione 14.4.1. $\{a_n\}$ è debolmente crescente se e solo se vale $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in S$ (basta guardare termini successivi).
Infatti, se so che $a_{n+1} \geq a_n \forall\, n \in \mathbb{N}$, poi se $n > m$ allora $a_n \geq ... \geq a_{m+2} \geq a_{m+1} \geq a_m$.

Esempio 14.4.1. Prendiamo $a_n = n^2$ e controlliamo che è strettamente crescente: vediamo che $a_{n+1} > a_n$. Infatti $a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ e $a_n = n^2$ e quindi $n^2 + 2n + 1 > n^2 \iff 2n + 1 > 0$ che è vero $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 14.4.1. Se $\{a_n\}$ è monotona (cioè debolmente crescente o decrescente) allora ammette limite. Se è debolmente crescente, il limite non può essere $-\infty$ e se Se è debolmente decrescente, il limite non può essere $+\infty$

14.5 Limitatezza

Definizione 14.5.1 (Limitatezza)**.** *Una successione $\{a_n\}$ è **limitata superiormente** se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \subseteq M \,\forall \in S$ e **limitata inferiormente** se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq m \forall\, n \in S$ e **limitata** se è limitata sia inferiormente e superiormente. (immagine 46a)*

Osservazione 14.5.1. Una successione convergente (che ha limite finito) è limitata. Questo non è vero per funzioni di variabile reale.

Esempio 14.5.1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ abbiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ma f non è limitata, perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ però $a_n = \frac{1}{n}$ invece è limitata.

Teorema 14.5.1. Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, allora $\{a_n\}$ ha minimo (cioè $\exists\, n_{min} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq a_{n_{min}} \,\forall\, n \in S$). Se invece $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ allora a_n ha massimo. (immagine 46b)

(a) Graficamente definizione di limiti inf, sup

(b) Graficamente teorema minimo massimo

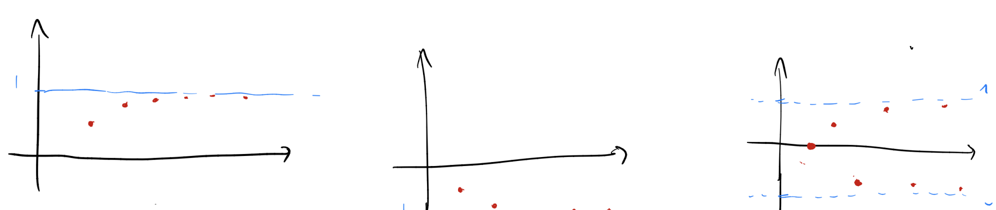
Figure 46: Raffigurazione di definizione limitatezza e teorema minimo massimo

Ci si può chiedere come domanda se una successione $\{a_n\}$ è limitata, necessariamente massimo e minimo? La risposte è no.

Esempio 14.5.2. Se prendiamo $a_n = \frac{1}{n}$ è limitata: $1 \geq \frac{1}{n} > 0$ ma non ha minimo. $max\{a_n\} = 1$ e $inf\{a_n\} = 0$ (uguale a $\lim_{n \to +\infty} a_n$). Non ha minimo perché non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} = 0$

Inoltre è possibile chiedersi se $\{a_n\}$ è limitata, esiste almeno uno tra massimo minimo? E la risposta anche in questo caso è no.

Esempio 14.5.3. Prendiamo $a_n = (1 - \frac{1}{n})(-1)^n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{per n pari} \\ -(1 - \frac{1}{n}) & \text{per n dispari} \end{cases}$



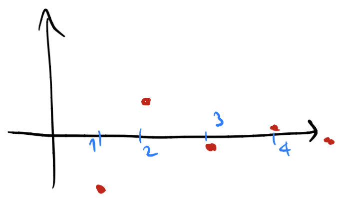
(a) n pari

(b) n dispari

(c) Complessivamente

Complessivamente possiamo vedere la la successione oscilla avvicinandosi con $sun\{a_n\} = 1$ e $inf\{a_n\} = -1$, e non esistono massimo e minimo, anche se a_n è limitata, visto che $-1 < a_n < 1$.

Esempio 14.5.4. Prendiamo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e ci chiediamo se ha limite e sa ha massimo e o minimo.



Abbiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$. Infatti abbiamo che $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ e visto che $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ per il teorema dei carabinieri abbiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Quindi ha massimo e minimo il massimo è in $n = 2$ ed il minimo in $n = 1$.

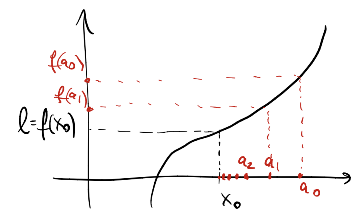
Teorema 14.5.2. Se ho usa successione che converge $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ finito allora:

- $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\overline{n}} \geq l \Longrightarrow \{a_n\}$ ha massimo.
- $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\overline{n}} \leq l \longrightarrow \{a_n\}$ ha minimo.

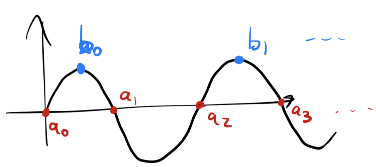
14.6 Legame tra limiti di funzione e successioni

Teorema 14.6.1. Prendiamo una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme $f : A \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in acc(A)$. Allora abbiamo che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = l$ per ogni successione $\{a_n\} \subseteq A$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente.

Questo teorema a volte si può utilizzare per dimostrare che non esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.



Esempio 14.6.1. Dimostriamo che non esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$.
Esibiamo due successioni a_n, b_n che tendono a $+\infty$, tali che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(a_n)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(b_n)$ esistono, ma sono diversi.
Prendo $a_n = n\pi$. Abbiamo $\lim\limits_{a\to+\infty} a_n = n\pi = +\infty$. Inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = 0$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Di nuovo, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ ma questa volta $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.



Per il teorema concludo che non esiste il $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ In particolare il teorema implica che se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = l$. Attenzione che non è vero il viceversa.

Esempio 14.6.2. $f(x) = \sin(x\pi)$. Abbiamo $f(n) = \sin(n\pi) = 0$. Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, ma non esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x\pi)$.

14.7 Calcolo dei limiti di successioni

Teorema 14.7.1. Se abbiamo due successioni $a_n \to l$ e $b_n \to l'$ allora $a_n + b_n \to l + l'$, $a_n \cdot b_n \to l \cdot l'$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{l'}$ (se $l' \neq 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente), $a_n^{n^n} \to l^{l'}$ (se $l > 0$ e $a_n > 0$ definitivamente), se $a_n = c \forall\, n \in \mathbb{N}$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$.

Questo teorema vale solo se supponiamo che non vengono forme indeterminate che sono le stesse viste con le funzioni.

Teorema 14.7.2. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in acc(A)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ e $a_n : S \to A$ tale che $a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente allora $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = l$. In particolare se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = l$.

Esempio 14.7.1. Alcuni esempi di calcolo dei limiti con successioni:

- $\lim_{n\to+\infty}(n^2+2n)$. Partendo da $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ troviamo $(\lim_{n\to+\infty} n^2)+\lim_{n\to+\infty}(2n) = (\lim_{n\to+\infty} n)(\lim_{n\to+\infty} n)+ 2\lim_{n\to+\infty} n = (+\infty)\cdot(+\infty)+2(+\infty) = +\infty$.

- $\lim_{n\to+\infty}(n^2-2n) = +\infty-\infty$ possiamo fare $n^2-2n = n(n-2) \to +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$. Si poteva anche dire $f(x) = x^2-2x$ visto che $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x) = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n}{n} = +\frac{+\infty}{+\infty}$ possiamo però fare $\frac{n^2-2n}{n} = n-2 \to +\infty$.

- $\lim_{n\to+\infty} e^n$, consideriamo $f(x) = e^x$, so che $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ quindi $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

- $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} = +\infty\cdot 0$, pongo $f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ e calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ e $\frac{1}{x}\to 0$ quando $x\to+\infty$, poniamo $t = \frac{1}{x}$ e viene $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin t}{t} = 1$.

  Altro modo utilizzando taylor: poniamo $\sin t = t + o(t)$ per $t\to 0$ sostituisco $t = \frac{1}{n}$ (infatti $\frac{1}{n}\to 0$ quando $n\to+\infty$), po $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$ quindi $n\cdot\sin\frac{1}{n} = n\cdot(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})) = 1+o(1)\to 1$ per $x\to+\infty$.

Osservazione 14.7.1. $f(n)$ può avere limite anche se $f(x)$ non c'è l'ha infatti per esempio: $f(x) = \sin\pi x$ non ha limite per $x\to+\infty$ ma $f(n) = \sin\pi n$ ha limite.
Quindi il metodo di utilizzare la funzione può non sempre funzionare.

Esempio 14.7.2. Ci chiediamo se esiste $\lim_{n\to+\infty}\sin(n)$. Vediamo che il limite non esiste:

Chiediamo quando $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$ in $[0,\pi]$ succede esattamente per $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi]$. L'intervallo ha lunghezza $\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{8}\pi > 2$. Quindi l'intervallo contiene almeno due numeri interi (in $\mathbb{N}$) e lo stesso vale per tutti gli traslati di multipli di 2π.
Questo ci permette di costruire una successione crescete h_n di numeri naturali tale che $\sin(h_n)\geq\frac{1}{2}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$. Questo mi dice che se esiste $\lim_{n\to+\infty}\sin(n) = l$, allora sicuramente $l\geq\frac{1}{2}$ (conseguenza della permanenza del segno).
Posso fare lo stesso discorso partendo da $\sin(x)\leq-\frac{1}{2}$, e trovo che $l\leq-\frac{1}{2}$. Questo è assurdo, e mi dimostra che non esiste $\lim_{n\to+\infty}\sin(n)$.

Esempio 14.7.3. $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\sin n$, ci chiediamo se esiste il limite.

Considerando la successione dell'esempio precedente h_n, troviamo una sottosuccessione $h_n^2\cdot\sin(h_n)$, $\sin(h_n)\geq\frac{1}{2}$ quindi $h_n^2\cdot\sin(h_n)\geq\frac{1}{2}\cdot h_n^2\to+\infty$. Se k_n è una successione di naturali tale che $\sin(k_n)\leq -\frac{1}{2}\forall\, n$, abbiamo una sottosuccessione $k_n^2\cdot\sin(k_n)\leq-\frac{1}{2}kn^2\to+\infty$. Quindi ho due sottosuccessioni di $n^2\sin n$ che hanno limiti diversi. Segue che non esiste $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\sin n$.

Teorema 14.7.3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (nota [13]) una successione,e $\{a_{h_n}\}$ e $\{a_{k_n}\}$ due sottosuccessioni tale che $\{h_n\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{k_n\mid n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. (si dice che le due sottosuccessioni "saturano tutti gli indici").
Se $\exists\lim_{n\to+\infty}\_h_n$ e $\exists\lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$ e sono uguali, allora esiste anche $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ed è uguale agli altri due.

Un caso tipico in cui si utilizza questo teorema è quando si prendono gli indici pari e dispari.

Esempio 14.7.4. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n+1)^{(-1)^h}}{n^3}$. Guardiamo gli indici pari $k_n = 2n$ con il quale ho $\frac{(\log(2n+1))^1}{(2n)=3}\to 0$, e poi guardiamo gli indici dispari $h_n = 2n+1$ dove viene $\frac{(\log(2n+1))^{-1}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{(2n+1)^3\log(2n+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ quindi le sottosuccessioni saturano tutti gli indici.
Usando il teorema concludiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n+1)^{(-1)^h}}{n^3} = 0$.

14.7.1 Criterio del rapporto

Teorema 14.7.4 (Criterio del rapporto)**.** Sia $\{a_n\}$ una successione. Se $a_n > 0$ definitivamente, e se esiste $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora:

[13] In questa scrittura ci sono tutti i numeri naturali

1. Se $0 \leq l \leq 1$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Se $l > 1$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Osservazione 14.7.2. Se $l = 1$, non si può dire niente sul comportamento di a_n.

Esempio 14.7.5. Esempi del criterio del rapporto con $l = 1$:

- Prendo $a_n = 1 \forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \to 1$ quindi $l = 1$ e a_n converge a 1.
- Con $a_n = n$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$ quindi $l = 1$ e $a_n \to +\infty$.
- Con $a_n = \frac{1}{n}$, di nuovo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ sempre $l = 1$ e $a_n \to 0$.

Esempio 14.7.6. Esempi di applicazioni del criterio del rapporto:

- $a_n = (\frac{1}{2})^n$. Usando il criterio $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} = l$ e ho $0 \leq l \leq 1$. Quindi $a_n \to 0$.
- $a_n = 2^n$ (si può usare $f(x) = 2^x$ e il fatto che $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$). Usiamo il criterio del rapporto quindi $\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = l$ e con $l > 2$ concludo che $a_n \to +\infty$.
- $a_n = n!$. Criterio del rapporto che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n + 1 \to +\infty = l$ quindi $l > 1$ e quindi $a_n \to +\infty$. In questo caso si poteva anche osservare che $n! > n$ e $n \to +\infty$ quindi per confronto segue che $n! \to +\infty$.

Confronto di $n!$ con n^k, b^n, n^n:

- **Potenza** (n^k) con $(k \geq 1)$. Vogliamo guardare che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^k} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata.
  Usiamo quindi il criterio del rapporto per $a_n = \frac{n!}{n^k}$. Ho $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^k}{(n+1)^k} = (n+1) \cdot (\frac{n}{n+1})^k \to +\infty \cdot (1)^k = +\infty = l$ quindi $l > 1$.
  Segue che $\frac{n!}{n^k} \to +\infty$, quindi $n!$ "tende a $+\infty$ più velocemente di n^k".
- **Esponenziale** (b^n) con $b > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata. Guardiamo quindi il rapporto, per $a_n = \frac{n!}{b^n}$. Quindi abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} = (n+1) \cdot \frac{1}{b} \to +\infty = l > 1$. Segue che $\frac{n!}{b^n} \to +\infty$, quindi $n!$ tende a $+\infty$ più velocemente di b^n.
- **Esponenziale potentissimo** (n^n). Notare che $n^n \to +\infty$ ad esempio perché $n^n \geq n$ e $n \to +\infty$. Facciamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata. Usiamo il criterio del rapporto per $a_n = \frac{n^n}{n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ che è un limite notevole che $\to e > 1$. (per vederlo ad esempio si può scrivere $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{\log(1+\frac{1}{n})^n} = e^{n\cdot\log(1+\frac{1}{n})} = e^{n\cdot(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{1+o(1)} \to e^1 = e$). Quindi segue che $\frac{n^n}{n!} \to +\infty$ quindi n^n tende a $+\infty$ più velocemente di $n!$.

14.7.2 Criterio della radice

Teorema 14.7.5. Se $a_n > 0$ definitivamente, e $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, allora:

1. Se $0 \leq l < 1$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Se $l > 1$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Osservazione 14.7.3. Se $l = 1$ non si può dire niente riguardo al comportamento di a_n come sul criterio del rapporto.

Dimotrazione 14.7.1. Dimostrazione dei due casi del criterio della radice.

1. Suppongo che $0 \leq l \leq 1$ e fisso un $m \in \mathbb{R}$ tale che $l < m < 1$. Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ definitivamente avrò $\sqrt[n]{a_n} < m$, quindi $a_n < m^n$. Ora visto che $m < 1$ abbiamo visto che $m^n \to 0$, quindi visto che $0 < a_n < m^n$ per il teorema dei carabinieri segue che $a_n \to 0$.

2. Questo punto si fa analogo, se invece $l > 1$ scelto $m \in \mathbb{R}$ tale che $1 < m < l$. Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ avrò $\sqrt[n]{a_n} > m$ definitivamente segue che definitivamente ho $a_n > m^n$ e visto che $n > 1$ ho $m^n \to +\infty$. Per confronto segue che $a_n \to +\infty$. ■

14.7.3 Relazione fra criteri del rapporto e della radice

Teorema 14.7.6 (Relazione fra rapporto e radice)**.** Se $a_n > 0$ definitivamente e se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ed è uguale a l.

Osservazione 14.7.4. Questo teorema è vero anche con $l = 1$.

Osservazione 14.7.5. Potrebbe esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e non esistere il $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (quindi questo teorema vale solo per un verso e non il viceversa).

Esempio 14.7.7. Alcuni esempi utilizzando quest'ultimo teorema.

- Fissiamo un $a > 0$. Proviamo a calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$. (Si può fare in diversi modi come $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$). Usiamo l'ultimo teorema $a_n = a$ successione costante. Abbiamo quindi $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a}{a} = 1$. Per il teorema segue che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a} = 1$.
- Proviamo a fare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$. usiamo il teorema con $a_n = n$. Abbiamo quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$. Quindi segue che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$.
- Nello stesso modo dell'esempio sopra si vede che $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$ dove $p(n)$ è un polinomio in n.

Esempio 14.7.8. Esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ma non esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Prendiamo $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se n è pari} \\ 2 & \text{se n è dispari} \end{cases}$

Abbiamo $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Abbiamo appena visto che $\sqrt[n]{1} \to 1$ e $\sqrt[n]{2} \to 1$, per il teorema dei carabinieri segue che $\sqrt[n]{2} \to 1$.

Ora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{1} = 2 & \text{se n è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se n è dispari} \end{cases}$ e questa successione non ha limite.

Esempio 14.7.9. Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2 + \sin n}$. Usare il rapporto non sembra promettente perché se $a_n = 2 + \sin n$, sarebbe $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+\sin n+1}{2+\sin n}$. Visto che $-1 \leq \sin n \leq 1$ abbiamo che $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2 + \sin n} \leq \sqrt[n]{3}$, in questo caso sia $\sqrt[n]{1} \to 1$ che $\sqrt[n]{3} \to 1$ quindi per il teorema dei carabinieri, il limite è 1.

In riferimento all'esempio di prima possiamo dire più in generale, che se a_n è limitata $m \leq a_n \leq M$ definitivamente (definitivamente limitata), con $m > 0$ allora ho $\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}$ e come sopra visto che $\sqrt[n]{1} \to 1$ e $\sqrt[n]{3} \to 1$ concludo che $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

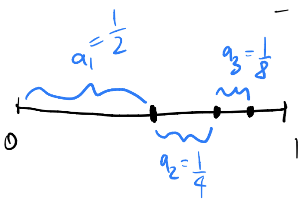
Esempio 14.7.10. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$, pongo $a_n = n!$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to +\infty$. Dall'ultimo teorema visto segue che $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

15 Serie numeriche

Sia $\{a_n\}$ una successione $S \to \mathbb{R}$ una successione $S \to \mathbb{R}$. Vogliamo definire $\sum\limits_{n \in S} a_n$, la somma di tutti i termini della successione.

Esempio 15.0.1. Dato $a_n = \frac{1}{2^n}$, con $S = \{n \geq 1\}$. Voglio definire $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Questo sarà uguale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n}$.

Notiamo che aggiungendo termini sembra che la somma si avvicini sempre di pi a 1. In effetti si ha che $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
Prendendo il limite per $n \to +\infty$ sembra ragionevole che $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} = 1$.



Definizione 15.0.1. *Dato $\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiamo $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_i + ... + a_n$ (somma parziale n-esima), se $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una nuova successione. Definiamo $\sum_n a_n$ (questa è la serie associata alla successione $\{a_n\}$) come $s = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$, se questo esiste.*

- *Se il limite non esiste, si dice che la serie è indeterminata.*
- *Altrimenti, se $s \in \mathbb{R}$, si dice che la serie è convergente.*
- *Mentre se $s = +\infty$ si dice che la serie diverge positivamente.*
- *Mentre se $s = -\infty$ si dice che la serie diverge negativamente.*

Esempio 15.0.2. Vediamo alcuni esempi di serie.

- $a_n = 0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = 0 + ... + 0 = 0$ e $s = \lim\limits_{\to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$
- $a_n = 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = 1 + ... + 1 = n + 1$ e $s = \lim\limits_{\to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$.
- $a_n = n$, $s_n = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e quindi $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+n}{2} = +\infty$.

15.1 Serie geometrica

Prendiamo un $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n = \alpha^n$ (l'esempio di sopra è $\alpha = \frac{1}{2}$). Proviamo ora a calcolare $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n$.

Per farlo dobbiamo calcolare le serie parziali $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j = 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$.
Questa può essere dimostrata per induzione oppure usando la seguente uguaglianza: $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-1}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n)$.
Facciamo $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}-1}{\alpha-1}$ e questo può fare:

- Se $|\alpha| < 1$, abbiamo $\alpha^{n+1} \to 0$, quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}-1}{\alpha-1} = \frac{-1}{\alpha-1} = \frac{1}{1-\alpha}$. Quindi converge.
- Se $|\alpha| > 1$, allora $\alpha^{n+1} \to +\infty$, quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}-1}{\alpha-1} = +\infty$, quindi diverge positivamente.
- Se $\alpha = 1$ allora $a_n = \alpha^n = 1^n = 1 \forall \, n \in \mathbb{N}$, quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$.
- Se $\alpha = 0$, $a_n = \alpha^n = 0 \, \forall \, n \geq 1$, quindi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$ quindi converge.
- Se $\alpha < -1$, α^{n+1} non ha limite e questo perché se n è pari (quindi n+1 è dispari) $\alpha^{n+1} < 0$ tende a $-\infty$ (perché $|\alpha| > 1$).
  Se n è dispari (quindi n+1 è pari) abbiamo che $\alpha^{n+1} > 0$ e tende a $+\infty$. Abbiamo quindi due sottosuccessioni $d_{2n} \to -\infty$ e $d_{2n+1} \to -\infty$ e segue per i teoremi precedentemente visti che

$b_n = \alpha^{n+1}$ non ha limite. Quindi anche $s_n = \frac{a^{n+1}-1}{\alpha-1}$ non ha limite.
$s_{2n} = \frac{b_{2n}-1}{\alpha-1} \to \frac{-\infty}{\alpha-1} = +\infty$, $s_{2n+1} = \frac{b_{2n+1}-1}{\alpha-1} \to \frac{+\infty}{\alpha-1} = -\infty$. Dunque s_n non ha limite e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n$ è indeterminata se $\alpha < -1$.

- $\alpha = -1$, $\alpha^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{n pari} \\ -1 & \text{n dispari} \end{cases}$
  $s_0 = a_0 = (-1)^0 = 1$, $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1)^1 + 1 = 1$, $s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$ ...

  $s_n = \begin{cases} 1 & \text{n pari} \\ 0 & \text{n dispari} \end{cases}$ non ha limite, anche in questo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n$ è indeterminata.

Riassumendo questi esempio possiamo dire che $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$:
- Se $|\alpha| < 1$ allora fa $\frac{1}{1-\alpha}$.
- Se $\alpha \geq 1$ allora fa $+\infty$.
- Se $\alpha \leq 1$ allora è indeterminata.

Ora chiediamoci cosa fa $\sum_{n=k}^{+\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} + ...$ (per $|\alpha| < 1$ con $\alpha \neq 0$)
$= \alpha^k(1 + \alpha + \alpha^2 + ...) = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$. Ad esempio se $\alpha = \frac{1}{2}$ e $k = 1$, quindi guardo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{(\frac{1}{2})^1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ (come ci asoettavamo).

Invece $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = 1 + 1 = 2$ ($= \frac{1}{1-\alpha}$ in questo caso $\alpha = \frac{1}{2}$ quindi $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$).

Esempio 15.1.1. Prendiamo $\alpha = -\frac{1}{3}$, e con $k = 0$, quindi ho $\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

Osservazione 15.1.1. Se $-1 < \alpha < 0$, la somma $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$. Vediamo che $0 < -\alpha < 1 \Longrightarrow 1 < 1 - \alpha < 2$ quindi la somma è compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1.
Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + ...$, i vari elementi sono tutti $\alpha > 0, \alpha^2 > 0, \alpha^3 > 0\alpha^4 > 0$.

Esempio 15.1.2. Un caso per calcolare il valore preciso di una serie è quando si può usare gli sviluppi di taylor. Vediamo per esempio $\sum_n \frac{1}{n!}$ che converge ed è uguale a e.
Partiamo da $e^x = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + R_n(x)$ sviluppo di taylor di e^x con io resto di lagrange che in generale è $R_n = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ con z compresa tra x e x_0.
Nel nostro caso $R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}(x-0) = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot x^n$ con z compreso tra 0 e x. Ora specifichiamo $x = 1$, troviamo $e^1 = \sum_{j^0}^n \frac{1}{j!} + R_n(1) = \frac{e^z}{(n+1)} \cdot 1$. (Ricordiamo che $\sum_{j^0}^n = s_n$ per $\sum_n \frac{1}{n!}$).
Quindi ricavo che $|e - s_n| = \frac{e^z}{(n+1)!}$ (la z dipende da $n!$ ma è sempre $0 < z < 1$) quindi posso dire che $\frac{e^z}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$ Prendo il limite per $n \to +\infty$, visto che $\frac{e}{(n+1)!} \to 0$ e quindi concludo che $s_n \to e$. Quindi concludo che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

15.2 Condizione necessaria per l'esistenza di una serie

Teorema 15.2.1 (Condizione necessaria di una serie)**.** Se a_n è una successione qualsiasi, e $\sum_n a_n$ converge, allora concludo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimotrazione 15.2.1. $s_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Quindi se $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$. Se suppongo che $\sum_n a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $s_{n+1} - s_n \to (l - l) = 0$, ma differenza $s_{n+1} - s_n = a_n$ quindi segue che $a_n \to 0$. ■

La conseguenza pratica di questo teorema è che se ho una successione $\{a_n\}$ e controllo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ non è 0 (quindi può non esistere oppure essere $\pm\infty$ o essere un numero $\neq 0$) allora sicuramente $\sum_n a_n$ non converge.

Esempio 15.2.1. Alcuni esempio in cui è utile usare questo teorema.

- $a_n = 1 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, quindi $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ non converge.
- $a_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} n$ non converge.

Attenzione che se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, non è detto che $\sum_n a_n$ converga.

15.3 Valore della somma di sue serie

Teorema 15.3.1. se a_n e b_n sono due successioni e $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno senso (cioè non sono indeterminate) allora anche $\sum_n(a_n + b_n)$ ha senso e vale $\sum_n(a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$ questo supponendo che la somma non sia una forma indeterminata.[14]

Esempio 15.3.1. Alcuni esempi di utilizzo di questo teorema.

- $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $b_n = (\frac{1}{3})^n$. Abbiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
  Quindi $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}((\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.
- $a_n = 1$, $b_n = -1$, ho $\sum_n a_n = +\infty$, $\sum_n b_n = -\infty$ quindi $\sum_n(a_n + b_n)$ non si può sapere tramite il teorema perché non si applica. Però $a_n + b_n = 1 - 1 = 0$, quindi $\sum_n(a_n + b_n) = 0$.
- $a_n = n^2$, $b_n = -n$, ho quindi $\sum_n a_n = +\infty$, $\sum_n b_n = -\infty$. Questa volta $a_n + b_n = n^2 - n \to +\infty$ (perché $n^2 - n = n(n-1)$) e segue dalla condizione necessaria che $\sum_n(a_n + b_n)$ non converge (ma diverge positivamente, visto che $a_n + b_n \to +\infty$).

Osservazione 15.3.1. Non c'è un teorema analogo riguardo a $\sum_n(a_n \cdot b_n)$. In particolare non è vero che $\sum_n(a_n \cdot b_n) = (\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$.

Esempio 15.3.2. Possiamo vedere del perché di questa osservazione prendendo $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $b_n = (\frac{1}{3})^n$. $\sum_n a_n = 2$, $\sum_n b_n = \frac{3}{2}$. $a_n \cdot b_n = (\frac{1}{6})^2$ e $\sum_n a_n \cdot b_n = \sum_n (\frac{1}{6})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$ e $\frac{6}{5} \neq 2 \cdot \frac{3}{2}$.

Può anche succedere che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergano ma $\sum_n a_n \cdot b_n$ non converge.

15.4 Serie definitivamente a termini positivi

Teorema 15.4.1. Se ho $a_n \geq 0$ definitivamente [15] allora $\sum_n a_n$ converge oppure diverge positivamente (non pu essere indeterminata o andare a $-\infty$).

Dimotrazione 15.4.1. Come prima abbiamo visto che $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Se $a_n \geq 0$ definitivamente, ho che $s_{n+1} \geq s_n$ definitivamente. Quindi $\{s_n\}$ è definitivamente (debolmente) crescente, quindi ammette limite, che può essere un numero reale, oppure $+\infty$ (non $-\infty$ perchè ho una successione che sta crescendo). ■

Osservazione 15.4.1. Se $a_n \leq 0$ definitivamente, analogamente si può dire che $\sum_n a_n$ converge oppure diverge negativamente.

15.5 Criterio del confronto

Teorema 15.5.1 (Criterio del confronto)**.** Se $o \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

1. Se $\sum_n b_n$ converge $\implies \sum_n a_n$ converge.
2. Se $\sum_n a_n$ diverge $\implies \sum_n b_n$ diverge.

L'idea è che se $0 \leq a_n \leq b_n \,\forall\, \in \mathbb{N}$, allora $0 \leq \sum_n a_n \leq \sum_n b_n$

Esempio 15.5.1. Alcuni esempi su questo teorema.

- Sapendo che $\sum_n 1 = +\infty$, posso concludere che $\sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty$ (perché $0 \leq 1 \leq n \forall\, n \geq 1$) e anche $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 = +\infty$ (perché $0 \leq 1 \leq n^2 \,\forall\, n \geq 1$)

[14] Le forme indeterminate possibili sono $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$

[15] Questo vuol dire che da un certo punto in poi è sempre positiva

- Voglio sapere cosa fa $\sum_n \frac{\sin n^2}{2^2}$. $a_n = \frac{\sin n^2}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = b_n$. So che $\sum_n b_n$ converge e sappiamo calcolare la somma, dunque per il teorema anche questa $\sum_n a_n$ converge.
- Cosa fa $\sum_n n!$. Abbiamo $n! \geq n \,\forall\, n \geq 1$, e sappiamo che $\sum_n n = +\infty$, quindi concludiamo che $\sum_n n! = +\infty$

15.6 Criterio del confronto asintotico

Teorema 15.6.1 (Criterio del confronto asintotico)**.** Prendiamo $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni, tale che $a_n > 0$ e $b_n > 0$ definitivamente, e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora si può dire che:

1. Se $l \in (0, +\infty)$, allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento (cioè entrambe convergono o entrambe divergono a $+\infty$).
2. Se $l = 0$ e $\sum_n b_n$ converge allora $\sum_n a_n$ converge. ("infatti" $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \implies \frac{a_n}{b_n} < 1$ definitivamente $\implies a_n < b_n$ definitivamente e da qui è chiaro che *se* $\sum_n b_n$ converge allora anche $\sum_n a_n$)
3. Se $l = +\infty$ e $\sum_n b_n$ diverge, allora $\sum_n a_n$ diverge. ($\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} > 1$ definitivamente $\implies a_n > b_n$ definitivamente)

Osservazione 15.6.1. Ad esempio nel punto (2), se $\sum_n b_n = +\infty$, non posso concludere niente riguardo a $\sum_a a_n$.

Esempio 15.6.1. $\sum_n \frac{1}{2^n - \log(n)}$. $a_n = \frac{1}{2^n - \log(n)}$, definitivamente > 0 perché $2^n > \log(n)$ definitivamente. L'idea qui è che per n grande, $\log(n)$ "conta molto meno di 2^n" quindi faccio confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{2^n}$.
Abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n - \log(n)}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n - \log(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{\log(n)}{2^n}} = 1$ questo è l. Quindi in questo caso $l \in (0, +\infty)$, quindi $\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum_n b_n = \sum_n (\frac{1}{2})^n$ che converge. Quindi $\sum_n a_n$ converge.

15.7 Criterio della radice

Teorema 15.7.1 (Criterio della radice)**.** Prendo una $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se $0 \leq l \leq 1$, allora $\sum_n a_n$ converge. ($\implies$ per la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$).
2. Se $l > 1$, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Dimotrazione 15.7.1. Dimostriamo i due casi del teorema.

1. Se $l < 1$, scelgo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $l < \alpha < 1$, e visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$, definitivamente avrò $\sqrt[n]{a_n} < \alpha$ quindi $a_n < \alpha^n$ definitivamente. Per confronto, visto che $\sum_n \alpha^n$ converge, concludo che anche $\sum_n a_n$ converge.
2. Discorso simile anche per questo punto, quindi prendo $< \alpha < l$, e poi definitivamente $\alpha < \sqrt[n]{a_n}$ quindi $\alpha^n < a_n$ definitivamente, e ora però $\sum_n \alpha^n = +\infty$ perché $\alpha > 1$, quindi anche $\sum_n a_n$ diverge. ■

Osservazione 15.7.1. Come per le successioni quando $l = 1$ no si può concludere niente.

Esempio 15.7.1. $\sum_n \frac{n}{3^n}$, $a_n = \frac{n}{3^n}$, e $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} = l$ quindi $l < 1$, e quindi la serie converge.

15.8 Criterio del rapporto

Teorema 15.8.1 (Criterio del rapporto)**.** Prendo $\{a_n\}$ successione, $a_n > 0$ definitivamente. Se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se $0 \leq l < 1$, allora $\sum_n a_n$ converge.
2. Se $l > 0$, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Dimotrazione 15.8.1. Sappiamo che se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora esiste anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ed è uguale a l. Quindi la conclusione segue dal criterio della radice (appena visto).

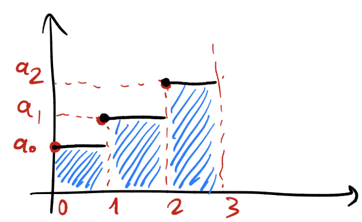
Esempio 15.8.1. $\sum_n \frac{n^2}{n!}$, $a_n = \frac{n^2}{n!}$. Usiamo il criterio del rapporto.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \to 0 = l$. Quindi visto che $l = 0$, concludo che la serie converge.

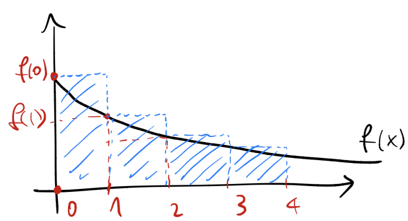
Osservazione 15.8.1. Questi criteri per successioni definitivamente positive si applicano anche a successioni **definitivamente negative**. Infatti se $a_n < 0$ definitivamente allora $-a_n > 0$ definitivamente, quindi applico i criteri visti alla successioni $\{-a_n\}$ e poi $\sum_{j=0}^{n} a_j = -\sum_{j=0}^{n}(-a_j)$ dunque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-a_n)$ (se i limiti esistono).

15.9 Legami con gli integrali impropri

Una serie $\sum_n a_n$ si può scrivere come integrale improprio. Considero una $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = a_{[x]}$ ($[x]$ parte intera di un x).

Si crea dunque una funzione a gradini. Si ha $\sum_{j=0}^{n} a_j = \int_0^{n+1} f(x)\ dx$. Quindi prendendo il limite per $n \to +\infty$, trovo $\sum_n a_n = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ (se i limiti hanno senso).





Viceversa, partendo da $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, posso considerare la successione $a_n = f(n)$ e la serie $\sum_n a_n = \sum_n f(n)$ (in questo caso la serie $\sum_n a_n$ è la somma delle aree dei rettangoli blu). Questa volta $\sum_n a_n$ e $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ non saranno proprio uguali.

Teorema 15.9.1 (Criterio dell'integrale)**.** Fissiamo $\overline{n} \in \mathbb{N}$, e $f : [\overline{n}, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia debolmente crescente, continua, con $f(x) \geq 0\ \forall x \in [\overline{n}, +\infty)$, e poniamo $a_n = f(n)$. Allora $\sum_n a_n$ e $\int_{\overline{n}}^{+\infty} f(x)\, dx$ hanno lo stesso comportamento, e $\sum_{n=\overline{n}+1}^{+\infty}$.

Questo teorema può essere usato per entrambi i versi.

Esempio 15.9.1. Vediamo alcuni esempi del criterio.

- $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$. Serie armonica generalizzata ($\alpha = 1 \longrightarrow \sum_n \frac{1}{n}$ serie armonica).
  Converge se $\alpha > 1$, e dunque se $\alpha \leq 1$. Infatti se prendo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è decrescente e continua. Quindi abbiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$:
  - Converge se $\alpha > 1$.
  - Diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

  Quindi applicando il criterio dell'integrale si conclude quello scritto sopra.

  Osservazione 15.9.1. Se $\alpha \leq 0$, $\sum_n \frac{1}{x^\alpha}$ diverge perché non è soddisfatta nemmeno la condizione necessaria.

- Calcoliamo $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log(n))^\beta}$. Usiamo il criterio dell'integrale con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta}$. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta}$ posiamo notare che:
  - Converge se $\alpha > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.
  - Diverge se $\alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.
  - Converge se $\alpha = 1$, $\beta > 1$.
  - Diverge se $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$.

  (Questo come visto in precedenza). La serie si comporta allo stesso modo.

Esempio 15.9.2. Prendiamo $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$. $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ (essendo maggiore di zero posso usare in seguito il confronto asintotico).
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{1}{n}} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Quindi la condizione necessaria è soddisfatta e la serie può convergere. Possiamo usare lo sviluppo di talyor con $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, quindi $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ (t $= \frac{1}{n}$). In termini di "importante" sarà $\frac{1}{n}$. In questi casi pongo $b_n = \frac{1}{n}$ e uso il confronto asintotico:
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}(1 + o(1)) = 1$.
Per confronto asintotico, concludo che $\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n}$ (che è la serie armonica) che sappiamo diverge. Quindi $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

15.10 Convergenza assoluta

Prendiamo $\{a_n\}$ un successione qualsiasi (quindi non supponiamo che sia ne definitivamente positivo ne def. negativo).

Definizione 15.10.1 (Convergenza assoluta)**.** *Diamo che $\sum_n a_n$* ***converge assolutamente*** *se $\sum_n |a_n|$ converge.*

Teorema 15.10.1 (Criterio dell'assoluta convergenza)**.** Se la serie $\sum_n a_n$ converge assolutamente, allora converge, e $|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|$.

Dimotrazione 15.10.1. Dimostrazione che segue quella dell'analogo per gli integrali impropri. Vediamo innanzitutto che $a_n = a_n^+ - a_n^-$, mentre $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ e $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ e se $\sum_n |a_n|$ converge, per confronto convergono anche $\sum_n a_n^+$ e $\sum_n a_n^-$. Quindi converge anche $\sum_n a_n = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$. Per la disuguaglianza triangolare se prendo $|\sum_{j=0}^n a_j| \leq \sum_{j=0}^n |a_j|$ e prendendo il limite per $n \to +\infty$ trovo $|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|$. ■

Esempio 15.10.1. Prendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ è a segno variabile.
$|a_n| = |\frac{\sin n}{n^2}| = \frac{|\sin n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$. Visto che $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$) per confronto segue che $\sum_n |\frac{\sin n}{n^2}|$ converge, quindi per il criterio di assoluta convergenza, concludo che anche $\sum_n \frac{\sin n}{n^2}$ converge (notiamo che però non sappiamo a che numero converge sappiamo solo che converge).

Osservazione 15.10.1. Se $\sum_n |a_n|$ diverge, non si può dire niente riguardo a $\sum_n a_n$ (cioè la $\sum a_n$ potrebbe converge o divergere).

15.11 Criterio di Leibnitz

Definizione 15.11.1 (Serie a segno alterno)**.** *Una serie a segno alterno è una serie della forma $\sum_n(-1)^n \cdot a_n$, dove $\{a_n\}$ è una successione a segno costante.*

Esempio 15.11.1. $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^3}$ è a segno alterno. $\sum_n(-1)^n(-\frac{1}{n})$ è a segno alterno.. $\sum_n(-1)^n \sin n$ non è a segno alterno.

Teorema 15.11.1 (Criterio di Leibnitz)**.** Se ho $\{a_n\}$ definitivamente ≥ 0 e debolmente crescente e tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora $\sum_n(-1)^n a_n$ converge. E $\left|\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j a_j - \sum_{j=0}^n(-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.

Esempio 15.11.2. Vediamo alcuni esempi di questo criterio.

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge, perché $a_n = \frac{1}{n}$ è ≥ 0 e debolmente decrescente e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
  Notare che la serie dei valori assoluti è $\sum_n |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$. Questo è un esempio in cui $\sum_n |b_n|$ diverge ma $\sum_n b_n$ converge.
- $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ vediamo se si può applicare Laibnitz. $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{(-1)^n}{n}$ converge, quindi converge anche $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$.

Esempio 15.11.3. Vediamo alcuni esempi particolari "di avvertimento".

- Può essere che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergano, ma $\sum_n a_n b_n$ non converga.
  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\log(n)}$. $\sum_n a_n$ converge. $\sum_n b_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ converge per Leibnitz.
  $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{\log(n)} = (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n\log(n)} = \frac{1}{n\log(n)}$ e $\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{n\log(n)}$ diverge (visto prima).
- Il confronto asintotico non funziona se il segno della successione non è definitivamente costante.
  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(-1)^n\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}}} = 1$ (perché $\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}} \to 0$).
  Quindi il confronto asintotico (se funzionasse) mi diverge che $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento. Ma $\sum_n a_n = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge per Leibnitz e $\sum_n b_n = \sum_n b_n = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_n \frac{1}{n}$ ($\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge e $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$) quindi $\sum_n b_n$ diverge.