



# UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Informatica  
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso a Libera Scelta - 6 CFU

## Introduzione all'Intelligenza Artificiale

**Professore:**

Prof. Alessio Micheli  
Prof. Claudio Gallicchio

**Autore:**

Matteo Giuntoni Filippo Ghirardini

---

Anno Accademico 2023/2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Punto materiale</b>	<b>2</b>
1.1	Vettore accelerazione . . . . .	3
1.2	Vettore quantità di moto . . . . .	3
1.3	Vettore momento angolare rispetto a un polo P . . . . .	3
1.4	Coordinate polari . . . . .	3
1.5	Versori polari (2D) . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Forze</b>	<b>5</b>
2.1	Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$ . . . . .	5
2.2	Forza peso $\vec{F} = -mg \hat{z}$ . . . . .	5
2.3	Forza elastica $\vec{F} = -k( \vec{r} - \vec{r}_v  - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{ \vec{r} - \vec{r}_v }$ . . . . .	6
2.4	Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$ . . . . .	6
2.5	Data la legge oraria, trovare la forza . . . . .	7
2.6	Discretizzare la variabile temporale . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Reazioni vincolari</b>	<b>8</b>

# 1 Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D. Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse. Vettore posizione come funzione del tempo  $t[s]$ .

**Esempio 1.0.1.** Una molecola di ossigeno se sono interessato all'aerodinamica di una vettura. Un satellite attorno alla terra se ignoro le forze di marea.

Un vettore posizione è una funzione del tempo  $t[s]$ .

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

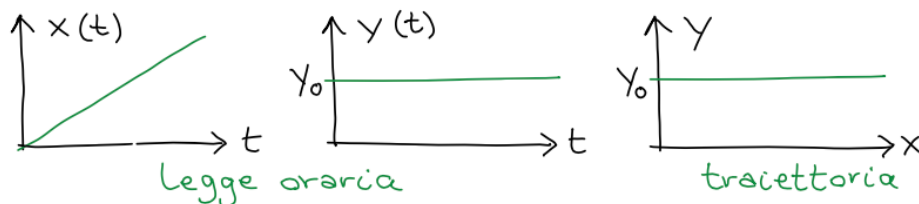
**Osservazione 1.0.1.** I versori cartesiani sono costanti

**Definizione 1.0.1** (Legge oraria). Si definisce come legge oraria la funzione  $t \rightarrow \vec{r}(t)$ .

**Definizione 1.0.2** (Traiettoria). Il lungo geometrico di punti visitati dal punto materiale.

$$\{\vec{r}(t) \text{ per } t \in \mathbb{R}\}$$

**Esempio 1.0.2.**  $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$  e  $v_0 = 3m/s, y_0 = 5m$



## Vettore velocità

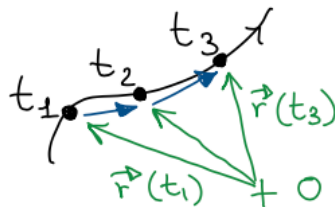
Derivata rispetto al tempo del vettore posizione e si indica come  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  oppure  $\dot{\vec{r}}(t)[m/s]$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}\end{aligned}\tag{1}$$

Per ricavare la forma esplicita uso le proprietà delle derivate (**linearità, Leibnitz**)

**Esempio 1.0.3.**  $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t\hat{x} + y_0\hat{y}$  abbiamo che  $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0\hat{x}$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea").



$$\begin{aligned}L &= \|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)\| + \|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\| + \|\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)\| + \dots \\ &= \sum_i \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\| \text{ per } |t_{i+1} - t_i| \text{ "piccolo"} \\ &= \sum_i \left\| \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt\end{aligned}$$

**Esempio 1.0.4.**  $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$   $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$   $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0|$   $L = |v_0| \cdot (t_{fin} - t_{in})$   
Il vettore è costante quindi facendo la derivata torna zero. Con la velocità si calcola lo spazio percorso ("integrale di linea"). La differenza fra le posizioni e la differenza dei tempi è il rapporto incrementale in caso gli intervalli siano sufficientemente piccoli, da qui si ottiene l'integrale.

## 1.1 Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità e si indica con  $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$  oppure  $\ddot{\vec{r}}(t)[m/s^2]$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \quad (2)$$

**Esempio 1.1.1.**  $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2, v_0t, 0)$      $\dot{\vec{r}}(t) = (a_0t, v_0, 0)$      $\ddot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$

Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determinata la legge oraria è formulata in termini di accelerazione.

## 1.2 Vettore quantità di moto

Il prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (m\dot{x}(t), m\dot{y}(t), m\dot{z}(t)) = m\dot{x}(t)x + m\dot{y}(t)y + m\dot{z}(t)z$$

**Esempio 1.2.1.** Prendiamo un punto di massa 2kg e velocità 3m/s lungo  $\hat{x}$ .

$$p_x(t) = 2 \cdot 3kg \cdot m/s = 6kg \cdot m/s \quad p_y(t) = p_z(t) = 0.$$

Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di più punti materiali.

## 1.3 Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_p(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

Dove  $\vec{r}_p$  è il vettore posizione di p, mentre  $\dot{\vec{r}}(t)$  è il prodotto vettoriale.

**Esempio 1.3.1.**  $\vec{r}_p = (l_0, 0, 0)$      $\vec{r}(t) = (v_0t, y_0, 0)$

$$\vec{L}_p = m[(v_0t - l_0)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times (v_0\hat{x}) = m(v_0t - l_0)v_0\hat{x} \times \hat{x} + my_0v_0\hat{y} \times \hat{x} = my_0v_0(-\hat{z}) = (0, 0, -my_0v_0)$$

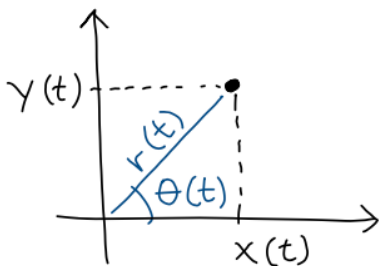
Ricorda che  $\hat{x} \times \hat{x} = 0$  e  $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Il momento angolare dice quanta inerzia ha un oggetto in una rotazione (descrizione sommaria).

Il polo P è parte della definizione. È una scelta! Il risultato dipende dal polo. Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

## 1.4 Coordinate polari

Un metodo per rappresentare delle coordinate x, y andando a misurare prima la distanza dall'origine e poi si va a vedere quanto vale l'angolo fra questo segmento dall'asse x, utilizzando seno e coseno.



$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ \text{tg}(\Theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$

**Esempio 1.4.1.** Esempi di rappresentazione di coordinate in coordinate polari.

$$x = 0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = \pi/2$$

$$x = 0, y = -l_0 < 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = -\pi/2$$

$$x = l_0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}l_0, \Theta = \pi/4$$

## 1.5 Versori polari (2D)

Definisco un versore  $\hat{r}(t)$  che punta verso il punto materiale e un versore  $\hat{\Theta}(t)$  ortogonale. Si esprime facilmente in coordinate polari.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \Theta(t), r(t) \sin \Theta(t)) = r(t)(\cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y})$$

Ma  $||\vec{r}(t)|| = |r(t)| = r(t)$  allora definisco  $\hat{r}(t) = \vec{r}(t)/||\vec{r}(t)|| = \cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y}$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è:

$$\hat{\Theta}(t) = -\sin \Theta(t)\hat{x} + \cos \Theta(t)\hat{y} \quad \text{infatti} \quad \hat{r} \cdot \hat{\Theta} = c \cdot (-s) + s \cdot c = 0$$

*Note 1.5.1.* Non c'è legame fra  $\Theta$  e  $\hat{\Theta}$  è solo una convenzione.

Le trasformazioni inverse invece si fanno come segue (verifico per sostituzione):

$$\hat{y} = \cos \Theta(t)\hat{r} - \sin \Theta(t)\hat{\Theta} \quad \hat{y} = \sin \Theta(t)\hat{r} + \cos \Theta(t)\hat{\Theta}$$

Possono quindi scrivere ogni vettore nella forma  $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\Theta\hat{\Theta}$  con le componenti polari  $a_r, a_\Theta$ . Per evitare ambiguità non scriviamo  $(a_r, a_\Theta)$  e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.

A differenza dei versori cartesiani quelli polari dipendono dal tempo per costruzioni.

$$\dot{\hat{r}}(t) = \frac{d}{dt}[\cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y}] = -\sin \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)\hat{x} + \cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)\hat{y}$$

Dove  $\cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)$  si applica la derivata della somma, Leibnitz, funzione composta.

$$= \dot{\Theta}(t) \cdot \hat{\Theta}(t) \quad (\text{confronto l'espressione di } \hat{\Theta}(t))$$

Similmente  $\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\dot{\Theta}(t)\hat{r}(t)$ .

### Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$$

Dove abbiamo che  $\vec{r}(t)$  è il vettore,  $r(t)$  è una coordinata polare,  $\hat{r}(t)$  è il versore polare.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\hat{r}}(t)$$

Dove la parte  $\dot{\vec{r}}(t)$  è la velocità radiale.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Nel quale abbiamo che la parte  $r(t)\dot{\Theta}(t)^2$  si chiama **velocità centripeta**, mentre  $2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)$  si dice **accelerazione di Coriolis**.

## 2 Forze

La legge oraria  $\vec{F}(t)$  di un punto materiale di massa  $m$  è determinata dalla soluzione di una equazione del moto detta **seconda legge di Newton**

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$\vec{F}_1$  sono le **forze** [ $kg \cdot m/s^2 \equiv N$ ] ( $N$  è l'unità di misura, Newton) agenti sul punto materiale: sono determinate empiricamente. L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo** (si chiamano così perché indicano le condizioni ai bordi del dominio), ad esempio  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$  e  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$  (con questa cosa stiamo dicendo che per descrivere un moto di un sistema dobbiamo sapere in un tempo dove il sistema si trova e la sua velocità).

Questa è un'equazione che va a descrivere fenomeni da dimensioni incredibilmente piccole a incredibilmente grandi.

Se la somma (detta **risultante** delle forze)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se tutte  $\vec{F}_i = 0$  (**prima legge di Newton** o "principio di inerzia di Galileo"). Se un corpo non è soggetto a forze esterne mantiene il suo moto rettilineo uniforme. Questa cosa collega la proprietà di simmetria degli oggetti alla traslazione dello spazio.

### 2.1 Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} & \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \\ m\ddot{\vec{r}}(t) &= F_0 \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proiettato su una base per ottenere 3 equazioni scalari. Mi servono  $2 \times 3 = 6$  **condizioni al bordo** per risolvere. Ad esempio condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) & \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t \\ z(t) = z_0 + v_{0z}t \end{cases} \end{aligned}$$

Con  $t$  che rappresenta il **moto uniformemente accelerato**

### 2.2 Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{z}$

Usata per esempio in prossimità della superficie terrestre. Con  $m$  massa del punto materiale dell'oggetto in cui si applica, mentre  $\hat{z}$  ortogonale alla superficie.  $g \equiv 9,8 m/s^2$ , dipende da  $M_T$ , variazioni locali.

**Esempio 2.2.1.** Grave che cade da altezza  $h$ .

$$m\ddot{\vec{r}}(r) = -mg\hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = h \cdot \hat{z}, \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 \text{ (oggetto parte da fermo)}$$

$$\text{Proietto } m\ddot{z}(t) = -mg \quad \dot{z}(t) = -g(t - t_0) \quad z(t) = h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Si sostituisce le costanti della soluzione per verificare che siano verificate le condizioni ai bordi.

**Esempio 2.2.2.** Problema del proiettile.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mgh\hat{z} \text{ (equazione del moto)} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e } \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos \Theta \hat{x} + v_0 \cdot \sin \Theta \hat{z} \quad \text{ovvero} \quad \vec{v}_0 = v_0(\cos \Theta, \sin \Theta) \quad ||\vec{v}_0|| = v_0$$

Proiezione lungo  $\hat{y}$  banale:  $\ddot{y}(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & \dot{x}(t) = v_0 \cos \Theta \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos \Theta & x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -g & \dot{z}(t) = v_0 \sin \Theta - g(t - t_0) \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin \Theta & z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) / (v_0 \cos \Theta) \quad z = v_0 \sin \Theta x / (v_0 \cos \Theta) - \frac{1}{2}gx^2 / (v_0 \cos \Theta)^2 \quad z = v_0 \tan \Theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \Theta} x^2$$

**Osservazione 2.2.1.**

### 2.3 Forza elastica $\vec{F} = -k(|\vec{r} - \vec{r}_v| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$

Chiamata anche **legge di hooke**.  $k$  è la costante elastica espressa in  $[N/m]$  del materiale.  $l_0[m]$  lunghezza a riposo della "molla", dipende dal vettore posizione  $\vec{r}$  ("posizionale"). Altro estremoi / vincolo  $\vec{r}_v$ .  $-\frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$  è il versore parallelo alla molla, cioè la distanza fra il punto di destinazione ed il vincolo. La forza elastica è tanto più intensa quanto è estesa la molla, e questa relazione fondamentale è lineare.

**Esempio 2.3.1.** Oscillatore unidimensionale  $\vec{r}_v = 0$ .

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}, x(t) \geq 0$$

$$\vec{F} = -k(|x - 0| - l_0) \frac{x - 0}{|x - 0|} \hat{x} = -k(|x| - l_0) \frac{x}{|x|} \hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x}(t) = -k[x(t) - l_0]$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \text{con } \Omega \equiv \sqrt{k/m}$$

$\Omega[rad/s]$  la **frequenza angolare**  $\Omega/2\pi[\frac{1}{s} = Hz]$  è la **frequenza**  $T = 2\pi/\Omega[s]$  è il **periodo**, infatti  $\Omega \cdot T = 2\pi$

Trovo  $A$  e  $B$  imponendo che la soluzione rispetti le condizioni al bordo, es:  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ . Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B\Omega \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow 0 = 0 + B\Omega \Rightarrow B = 0$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow x_0 = l_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow x_0 = l_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0) \cos(\Omega t)$$

### 2.4 Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$

Modello approssimato per le basse velocità. Abbiamo che  $-\gamma[N/(m/s)]$  è costante. Il meno è dato perché è una forza che si oppone linearmente ad una velocità.

**Esempio 2.4.1.** Proiettile in gel balistico.

$$m\ddot{x}(t) = \gamma t \dot{x}(t) \quad \text{con } \dot{x}(0) = v_0$$

Pongo poi  $u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{u}t = -\frac{1}{\tau}u(t)$  con  $u(0) = v_0$  e  $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}[\frac{1}{s}]$

Soluzione generale  $u(t) = Ae^{-t/\tau} \Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$ .

Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{ovver } \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

rallentamento esponenziale.

## 2.5 Data la legge oraria, trovare la forza

$r(t) = R, \Theta(t) = \Omega t$  **moto circolare uniforme**

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} \quad \hat{r} = \cos(\Theta(t))\hat{x} + \sin(\Theta(t))\hat{t}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [r(t)\ddot{\Theta}(t) - \dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Dalla legge oraria ho:  $\dot{r}(t) = 0, \ddot{r}(t) = 0, \dot{\Theta} = \Omega, \ddot{\Theta}(t) = 0 \Rightarrow$  in questo caso  $\ddot{\vec{r}}(t) = -R\Omega^2\hat{r}$ .

La risultante  $\vec{F}$  delle forze deve essere tale che  $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR\Omega^2\hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR\Omega^2\hat{r}$ .

La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (**forza centrale** o **forza centripeta**).  
Ottengo  $\vec{F}$  solo per questa legge oraria.

Integrazione numerica delle equazioni del moto.

## 2.6 Discretizzare la variabile temporale

Calcolo al "primo ordine" ("metodo di eulero"), ci sono anche molti altri algoritmi come per esempio Runge-Kutta, la scelta dipende dal problema.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_n \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t \quad \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_i} \simeq \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\bigg|_{t=t_i} \simeq \frac{\frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} - \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

L'equazione di Newton diventa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \vec{F}_{i-1}/m \quad \vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

Servono 2 condizioni al bordo  $\vec{F}_i$  può dipendere da  $t_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i$



### 3 Reazioni vincolari

Estendiamo il modello del "punto materiale" all'interazione di corpi estesi in moto tralatorio  $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_2$  per ogni punto posso studiare una qualsiasi  $\vec{r}(t)$

- La **traslazione** può avvenire su una traiettoria curva, parleremo di **rotazione** più avanti.
- Consideriamo il **contatto** tra punti materiali, corpi estesi, superfici.

Le forze di contatto ("reazioni vincolari") non sempre hanno una espressione esplicita e vengono determinate imponendo dei vincoli alle equazioni del moto, ad esempio che un punto segua una data traiettoria.

**Esempio 3.0.1.**  $x(t) \equiv x_0$

La "terza legge di Newton" ("azione e reazione") stabilisce che  $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{G}_{A \rightarrow B}$

**Esempio 3.0.2.** Massa su una bilancia in presenza di forza peso.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

In questo caso il **Vincolo** è:  $\dot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = +mg\hat{z}$ . La bilancia misura  $||-\vec{F}|| = mg$  (che noi chiamiamo comunemente peso).

**Esempio 3.0.3.** Massa su bilancia in ascensore accelerato.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

Ciò che cambia ora è il suo **Vincolo** visto che si sta accelerando verso l'alto:  $\ddot{\vec{r}}(t) \equiv a \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{F} = m(a + g)\hat{z}$ . La bilancia misura  $||-\vec{F}|| = m(a + g)$ . La bilancia allora misura una forza peso maggiore in un ascensore (stiamo usando l'equazione "al contrario").

*Note 3.0.1.* Un punto materiale si "solleva", si "distacca" da una superficie quando la reazione vincolare va a zero.

Scomponiamo la reazione vincolare nella direzione

- ortogonale: "reazione normale"  $\vec{N}$ .
- parallelo: "forza di attrito"  $\vec{F}_a$

ad una superficie. Con una superficie **liscia** abbiamo  $\vec{F}_a = 0$ , non c'è movimento relativo al punto di contatto. **Attrito statico**,  $\vec{F}_a$  da determinare con vincoli. Condizione:  $||\vec{F}_a|| \leq \mu_s ||\vec{N}||$ .

Differenza di velocità  $\vec{v}$  al punto di contatto. **Attrito dinamico**,  $\vec{F}_a = -\mu_a ||\vec{N}|| \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ ,  $\mu_s, \mu_d$ : coeff. di attrito, numeri primi.  $-\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$  diretto in versione opposta alla velocità.

**Esempio 3.0.4.** Massa su un piano inclinato liscio e fisso.

$$\hat{x}' = \cos \alpha \cdot \hat{x} - \sin \alpha \cdot \hat{z} \quad \hat{z}' = \sin \alpha \cdot \hat{x} + \cos \alpha \cdot \hat{z} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{N}$$

Proietto lungo  $\hat{z}'$ :  $m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N$

Proietto lungo  $\hat{x}'$ :  $m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha$

Vincolo:  $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \quad \ddot{x}'(t) = g \cdot \sin \alpha$

Visto che  $\sin \alpha < 1$  quindi l'accelerazione lungo il piano è  $< g$ .

**Esempio 3.0.5.** Massa ferma su piano inclinato scabro.

$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

La scelta fra  $-F_a$  o  $+F_a$  è indifferente, l'unica cosa che cambia è nel risultato poi sarà diverso il segno di  $F_a$ , la coerenza da tenere è riguardante il disegno, se si disegna in una determinata direzione, si cerca di mettere il segno uguale.

Vincolo:  $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

Vincolo:  $x'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{x}'(t) = 0 \Rightarrow F_a = mg \sin \alpha$

Qual'è il massimo valore di  $\alpha$ ?

$$||\vec{F}_a|| \leq \mu_s ||\vec{N}|| \Rightarrow mg \sin \alpha \leq \mu_s \cdot mg \cos \alpha \quad \tan \alpha \leq \mu_s \quad \alpha \leq \arctan(\mu_s)$$

**Esempio 3.0.6.** Massa scivola su piano inclinato scabro.

$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

Vincolo:  $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

Forza di attrito dinamico:  $F_a = \mu_\alpha N \Rightarrow m\ddot{x}'(t) = mg \sin \alpha - \mu_\alpha \cdot mg \cos \alpha$

$\ddot{x}'(t) = g(\sin \alpha - \mu_\alpha \cdot \cos \alpha)$ . Accelerazione costante, minore che senza attrito.