Università di Pisa

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso 2° anno - 9 CFU

Paradigmi di programmazione

Professore:
Prof. Paolo Milazzo

Autore:
Filippo Ghirardini

Anno Accademico 2023/2024

Contents

1 Lambda calcolo

2 Sistemi di tipi

2.1 Perché?

Dato che nel lambda calcolo i programmi e i valori sono funzioni possiamo facilmente scrivere programmi che non sono corretti rispetto all'uso inteso dei valori. Ad esempio:

Esempio 2.1 (Errore tipi)**.** Nella seguente espressione si può applicare 0 a *False*, ottenendo quindi un risultato che però non ha alcun senso:

$$False\ 0 = (\lambda t.\lambda f.f)(\lambda z.\lambda s.z) \to \lambda f.f \tag{1}$$

Analogamente per una macchina tutto è un bit: istruzioni, dati e operazioni. Un esempio più pratico è il seguente:

Esempio 2.2. L'istruzione nel corpo dell'*if* contiene un errore di tipo (stringa divisa per un intero). Se non avessimo il controllo dei tipi l'unico modo per scoprire l'errore sarebbe eseguire numerosi test per riuscire a coprire tutte le possibilità, fino ad entrare nel corpo dell'*if*. Richiederebbe tempo e risorse e non ci garantisce neanche la certezza di aver provato tutti i casi possibili.

```
if (condizione_complicata) {
  return "hello"/10;
}
```

Se in certi linguaggi di programmazione ci troveremmo davanti ad errori di esecuzione, in altri (come ad esempio JavaScript) otterremmo un errore nel risultato in quanto l'interprete proverebbe a fare un cast manuale.
Concludendo, la mancanza di **type safety** aumenta il numero di bug, rendendo così un software meno funzionale e più vulnerabile.

2.2 Cosa sono i tipi?

I **sistemi di tipo** sono meccanismi che permettono di rilevare in anticipo errori di programmazione.

Definizione 2.1 (Tipo)**.** *Il tipo è un* ***attributo*** *di un dato che descrive come il linguaggio di programmazione permetta di usare quel particolare dato.*

Un tipo serve quindi a limitare i valori che un'espressione può assumere, che operazioni possono essere effettuate sui dati e in che modo questi ultimi possono essere salvati.

Definizione 2.2 (Sistema dei tipi)**.** *Un sistema dei tipi è un metodo* ***sintattico***, ***effettivo*** *per dimostrare l'assenza di comportamenti anomali del programma* ***strutturando*** *le operazioni del programma in base ai tipi di valori che calcolano.*

Analizziamo i tre aspetti:

- *Sintattico*: l'analisi viene effettuata dal punto di vista sintattico
- *Effettivo*: si può definire un algoritmo che effettui questa analisi
- *Strutturale*: i tipi assegnati si ottengono in maniera **composizionale** dalle sottoespressioni.

2.3 Come funziona?

Un sistema dei tipi associa dei tipi ai valori calcolati. Esaminando il flusso dei valori calcolati prova a dimostrare che non avvengano errori (di tipo, non in generale)facendo un controllo, che può avvenire in due modi:

- *Statico*: avviene in fase di compilazione, non degradando le prestazioni
- *Dinamico*: avviene in fase di esecuzione e aumenta il tempo di esecuzione

2.4 Come si progetta?

2.4.1 Specifiche del linguaggio

Prendiamo come esempio il seguente **linguaggio**:

Espressioni	**Valori**	**Valori numerici**	**Tipi**
E::=	V::=	NV::=	T::=
true	true	$0\|1\|2\|\ldots$	Bool
false	false		Nat
NV	NV		
if E then E else E			
succ E			
pred E			
isZero E			

2.4.2 Regole di valutazione

Avremo le seguenti **regole di valutazione**:

$$if\ true\ then\ E1\ else\ E2 \to E1 \tag{2}$$

$$if\ false\ then\ E1\ else\ E2 \to E2 \tag{3}$$

$$\frac{E \to E'}{if\ E\ then\ E1\ else\ E2 \to if\ E'\ then\ E1\ else\ E2 \to E1} \tag{4}$$

$$\frac{E \to E'}{succ\ E \to succ\ E'} \qquad \frac{m = n+1}{succ\ E \to succ\ E'} \tag{5}$$

$$\frac{E \to E'}{pred\ E \to pred\ E'} \qquad \frac{n > 0,\ m = n-1}{pred\ n \to m} \qquad pred\ 0 \to 0 \tag{6}$$

$$\frac{E \to E'}{isZero\ E \to isZero\ E'} \qquad isZero\ 0 \to true \qquad \frac{n > 0}{isZero\ n \to false} \tag{7}$$

2.4.3 Type checking

Il **controllo di tipo** definisce una relazione binaria (E, T) che associa il tipo T all'espressione E. Questo ha due caratteristiche principali:

- Utilizza il *metodo sintattico*
- Le regole sono definite per *induzione strutturale* sul programma

Le regole sono le seguenti:

$$true : Bool \qquad false : Bool \qquad n : Nat \tag{8}$$

$$\frac{E : Nat}{succ\ E : Nat} \qquad \frac{E : Nat}{pred\ E : Nat} \qquad \frac{E : Nat}{isZero\ E : Bool} \tag{9}$$

$$\frac{E : Bool, E1 : T, E2 : T}{if\ E\ then\ E1\ else\ E2} \tag{10}$$

2.4.4 Composizionalità

I sistemi di tipo sono **imprecisi**: non definiscono esattamente quale tipo di valore sarà restituito da ogni programma, ma solo un'**approssimazione conservativa**.

Esempio 2.3. La seguente espressione:

$$if\ E\ then\ 0\ else\ false \tag{11}$$

potrebbe restituire come risultato sia un *Bool* che un *Nat* a seconda del valore di E. Il controllo dei tipi quindi non permetterà che possano esserci due risultati diversi, riducendo la precisione ma mantenendo la sicurezza.

Questo avviene proprio per garantire la **composizionalità**, infatti ad esempio la regola dell'equazione 10 necessita che $E1$ ed $E2$ abbiano lo stesso tipo.

2.5 Dimostrazione

La **correttezza** del sistema di tipo è espressa da due proprietà:

- Progresso
- Conservazione

2.5.1 Progresso

Definizione 2.3 (Progresso)**.** *Se $E : T$ allora E è un valore oppure $E \rightarrow E'$ per una qualche espressione E'.*

In pratica, un'espressione ben tipata non si blocca a run-time. Può fare sempre un passo a meno che non sia un valore.

Proof. Utilizziamo l'induzione sulla struttura di derivazione di $E : T$.
I *casi base* sono i seguenti:

- $true : Bool$
- $false : Bool$
- $0|1|1| \ldots : Nat$

I *casi induttivi* sono tutti molto simili, vediamo quello per la formula 10.
Per *ipotesi induttiva* abbiamo due casi:

- $E1$ è un valore. In questo caso deve essere $true$ o $false$ e le regole della semantica fanno fare un **passo** del tipo $E \rightarrow E1$ o $E \rightarrow E2$
- Esiste $E4$ tale che $E1 \rightarrow E4$. In questo caso si applica la regola 4 e si esegue un **passo**.

□

2.5.2 Conservazione

Definizione 2.4 (Conservazione)**.** *Se $E : T$ e $E \rightarrow E'$ allora $E' : T$.*

In pratica i tipi sono preservati dalle regole di esecuzione.

Proof. Utilizziamo l'induzione come nella precedente dimostrazione.
I *casi base* sono immediati: $true$, $false$ e $0|1|2| \ldots$ sono valori e di conseguenza non fanno nessun passo.
Anche qui per i *casi induttivi* vediamo quello per la formula 4. Per l'ipotesi induttiva abbiamo due casi:

- $E1$ è un valore:
  - $true$: in questo caso $E \rightarrow E2$ e sappiamo già per ipotesi induttiva che $E2 : T$ (sappiamo che il passo ha successo)
  - $false$: in questo caso $E \rightarrow E3$ e $E3 : T$
- Esiste $E4$ tale che $E1 \rightarrow E4$. Questo implica:

  $$E = if\ E1\ then\ E2\ else\ E3 \rightarrow if\ E4\ then\ E2\ else\ E3$$

  Dato che per ipotesi induttiva $E1 : Bool$ abbiamo che $E4 : Bool$ e, grazie alle derivazioni che valgono per ipotesi $E2 : T$ e $E3 : T$, possiamo derivare applicando la regola 10.

□

2.6 Lambda calcolo tipato

Nel nostro caso descriveremo il lambda calcolo tipato con valori di tipo *booleano* e *funzione*.

2.6.1 Sintassi

Tipi	**Linguaggio**	**Valori**
$\tau ::=$	$e ::=$	$V ::=$
$Bool$	x	$fun\, x : \tau = e$
$\tau \to \tau$ [1]	$fun\, x : \tau = e$	$true$
	$Apply(e, e)$	$false$
	$true$	
	$false$	
	if e then e else e	

2.6.2 Semantica

Di seguito le regole della semantica del linguaggio:

$$Apply(fun\, x : \tau = e_1, v) \to e_1\{x := v\} \tag{12}$$

$$\frac{e_1 \to e'}{Apply(e_1, e_2) \to Apply(e', e_2)} \tag{13}$$

$$\frac{e2 \to e'}{Apply(v, e2) \to Apply(v, e')} \tag{14}$$

A questi corrisponde la *β-riduzione* con strategia call-by-value vista nel lambda calcolo.

$$\frac{e_1 \to e_4}{if\ e_1\ then\ e_2\ else\ e_3 \to if\ e_4\ then\ e_2\ else\ e_3} \tag{15}$$

$$if\ true\ then\ e_2\ else\ e_3 \to e_2 \tag{16}$$

$$if\ false\ then\ e_2\ else\ e_3 \to e_3 \tag{17}$$

Queste regole invece sono per le espressioni condizionali.

2.6.3 Ambiente dei tipi

L'ambiente dei tipi ci serve per tenere conto delle associazioni variabile-tipo in modo da poter eseguire correttamente le regole di semantica.
L'ambiente è una **funzione** di dominio finito e la indichiamo come:

$$\Gamma = x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2 \ldots x_k : \tau_k$$

Per ottenere il tipo τ_i dal valore x_i si usa la notazione

$$\Gamma(i) = \tau_i$$

Per **estendere** l'ambiente aggiungendo associazioni si usa la notazione

$$\Gamma, x : \tau$$

Per applicare l'ambiente nelle regole di semantica si usa la notazione

$$\Gamma \vdash e : \tau$$

Le regole sono applicate dal compilatore in fase di *analisi statica*. L'ambiente dei tipi è chiamato **symbol table**.

[1] Nota bene: l'associazione avviene a destra. Quindi $Bool \to Bool \to Bool = Bool \to (Bool \to Bool)$

2.6.4 Type checker

$$\Gamma \vdash true : Bool \qquad \Gamma \vdash false : Bool \qquad \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau} \tag{18}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : Bool \qquad \Gamma \vdash e_1 : \tau \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash if\, e\, then\, e_1\, else\, e_2 : \tau} \tag{19}$$

Poi abbiamo il tipo delle funzioni, ovvero $\tau_1 \to \tau_2$, ovvero prende in ingresso un argomento di tipo τ_1 e restituisce un risultato di tipo τ_2.

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash fun\, x : \tau_1 = e : \tau_1 \to \tau_2} \tag{20}$$

In pratica, estendiamo l'ambiente con il tipo dell'argomento in ingresso (che è noto), e poi troviamo il tipo dell'espressione e che sarà anche il tipo del risultato della funzione. Questa estensione "annulla" tutte le dichiarazioni precedenti della stessa funzione per questo scope.
Infine per l'applicazione delle funzioni:

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \to \tau_2 \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash Apply(e_1, e_2) : \tau_2} \tag{21}$$

2.6.5 Correttezza

Dimostrazione del progresso. Utilizziamo l'induzione sulle derivazioni di tipo.
I casi base sono identici alla dimostrazione 2.5.1.
Il caso delle variabili è banale.
Il caso dell'astrazione di funzione è immediato dato che le funzioni stesse sono valori.
Per il caso dell'applicazione di funzione

$$e = Apply(e_1, e_2), \emptyset \vdash e_1 : \tau_1 \to \tau_2, \emptyset \vdash \tau_1$$

Per *ipotesi induttiva* abbiamo due casi:

- Le due espressioni possono fare un passo: applichiamo le regole di riduzione dell'applicazione e terminiamo
- Le due espressioni sono entrambi valori: dovremo avere e_1 nella forma del tipo $fun\, x : \tau_1 = e' : \tau_1 \to \tau_2$ e possiamo applicare la regola 12

□

Dimostrazione della conservazione. Si dimostra per induzione strutturale sulle regole di tipo. Anche qui il caso difficile è quello per l'applicazione

$$e = Apply(e_1, e_2)$$

Quindi vale che:

$$\begin{gathered} \Gamma \vdash e : \tau \\ \Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \to \tau_2 \\ \Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \\ \tau = \tau_2 \\ e \to e' \end{gathered}$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\Gamma \vdash e' : \tau_2$$

La seconda affermazione comporta che

$$e_1 = fun\, x : \tau_1 = e_3 \qquad \Gamma, x : \tau_1 \vdash e_3 : \tau_2$$

che però non è ciò che ci serve: noi vogliamo ottenere

$$e' = e_3\{x := e_2\}$$

Dobbiamo in qualche modo eseguire la sostituzione, e per questo usiamo un lemma ad hoc:

Lemma 2.6.5.1 (Substitution lemma)**.** I tipi sono preservati dall'operazione di sostituzione.

$$\Gamma, x : \tau_1 \vdash e : \tau$$
$$\Gamma \vdash e_1 : \tau_1$$
$$\Gamma \vdash e\{x = e_1\} : \tau$$

Per dimostrarlo si usa l'induzione sulla derivazione del primo punto.

□

2.6.6 Estensioni

Cambiamo la sintassi del linguaggio per implementare le *operazioni numeriche* e le *dichiarazioni locali*:

$e ::=$	Espressioni
x	Variabili
$fun\, x : \tau = e$	Funzioni
$Apply(e, e)$	Applicazioni
$true$	Costante true
$false$	Costante false
n	Costanti numeriche
$e \oplus e$	Operazioni binarie
if e then e else e	Condizionale
$let\, x = e_1\, in\, e_2 : \tau_2$	Dichiarazioni locali

Aggiungiamo le seguenti regole di valutazione:

$$\frac{e_1 \to e'}{let\, x = e_1\, in\, e_2 : \tau_2 \to let\, x = e'\, in\, e_2 : \tau_2} \tag{22}$$

$$let\, x = v\, in\, e_2 : \tau_2 \to e_2\{x = v\} : \tau_2 \tag{23}$$

E le seguenti regole di tipo:

$$\Gamma \vdash n : Nat \tag{24}$$

$$\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2 \qquad \frac{\oplus : \tau_1 \times \tau_2 \to \tau}{\Gamma \vdash e_1 \oplus e_2 : \tau} \tag{25}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \qquad \Gamma, x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{let\, x = e_1\, in\, e_2 : \tau_2} \tag{26}$$

2.6.7 Ricorsione

Nel lambda calcolo tipato non possiamo utilizzare il combinatore Ω.
Dobbiamo quindi introdurre un generatore **aux** che, applicato ad una funzione iE approssima il comportamento di una ipotetica funzione (ad esempio *isEven*) fino a n. $iE\, k$ con $k \leq n$ restituisce il valore calcolato da $isEven\, k$. Allora $aux\, iE\, k$ restituisce una migliore approssimazione di *isEven* fino a $k+2$.

```
let aux = fun f:Nat -> Bool =
   fun x:Nat=
      if (isZero x) then true else
      if (isZero(pred x)) then false else
         f(pred(pred x))
aux: (Nat -> Bool) -> Nat -> Bool
```

Aggiungiamo al linguaggio un costrutto *fix* tale che $isEven = fix\, aux$. Applicando *fix* ad *aux* si ottiene il limite delle approssimazioni, ovvero il **punto fisso**.
Estendiamo la sintassi aggiungendo $fix\, e$, le seguenti regole di valutazione

$$\frac{e \to e'}{fix\, e \to fix\, e'} \tag{27}$$

$$fix(fun\, f : \tau = e) \to e[f = (fix(fun\, f : \tau = e))] \tag{28}$$

e le regole di tipo

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash fix\, e : \tau} \tag{29}$$

La versione semplificata della sintassi, che poi viene usata anche in Ocaml, è la seguente:

```
let rec x: <Type> = e in e'
```

che corrisponde a

```
let x = fix (fun x: <Type> = e) in e'
```

Esempio 2.4 (Esempio ricorsione semplificata)**.**

```
let rec isEven: Nat -> Bool =
   fun x:Nat =
      if(isZero x) then true else
      if (isZero (pred x)) then false
      else isEven(pred (pred x))
in isEven 7;
```

3 Macchine astratte

Alla base dei computer moderni troviamo il classico modello di Von Neumann, composto da **memoria**, che contiene dati e programmi, e **unità centrale di elaborazione**, che preleva le istruzioni, i dati necessari e le esegue una dopo l'altra.
Il processo eseguito da quest'ultima è il **ciclo Fetch-Decode-Execute**:

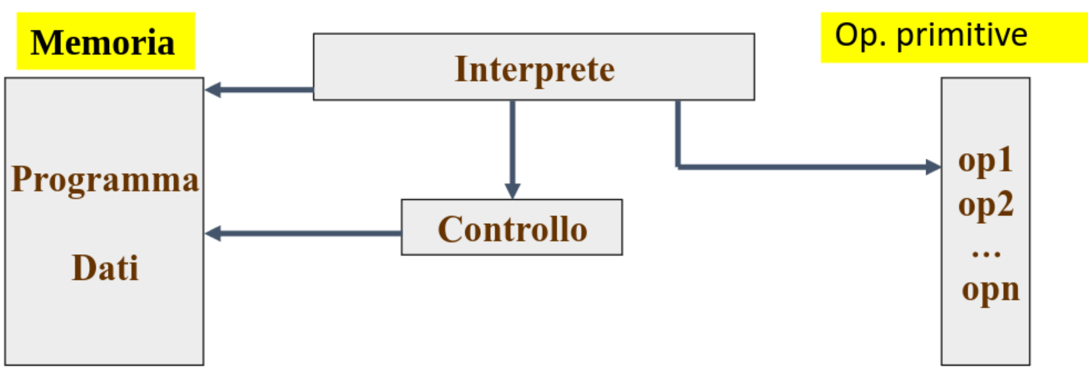
- *Fetch*: l'istruzione viene prelevata dalla memoria e messa nella CPU
- *Decode*: l'istruzione viene interpretata e vengono avviati i passi necessari
- *Data fetch*: vengono prelevati i dati necessari dalla memoria
- *Execute*: i passi vengono portati a termine
- *Store*: il risultato previsto viene memorizzato

Per implementare un **linguaggio di programmazione** che ci porti dal sorgente alla macchina abbiamo tre opzioni:

- **Compilazione**: ad esempio C, che traduce direttamente il sorgente in codice macchina
- **Interpretazione**: ad esempio JavaScript, si fa un'implementazione software che esegue le istruzioni del linguaggio sorgente con un processo analogo al *Fetch-Decode-Execute*
- **Misto**: ibrido tra i due precedenti, ad esempio Java

Definizione 3.1 (Macchina astratta)**.** *Consente l'esecuzione step-by-step dei programmi omettendo dei dettagli delle macchine reali. Rappresenta il comportamento della macchina fisica individuando:*

- *L'insieme delle* ***risorse*** *necessarie per l'esecuzione dei programmi*
- *L'insieme delle* ***istruzioni*** *progettate per operare con suddette risorse*



3.1 Interprete

In una implementazione software, l'interprete è il **programma** che prende in ingresso il **programma da eseguire** (tipicamente l'albero di sintassi astratta del programma) e lo esegue **ispezionandone la struttura** (l'albero di sintassi) per vedere cosa deve essere fatto.