CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2021/2022 – Prova Scritta 30/03/2021

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 1$, definita come

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j; \\ a \text{ se } i > j; \\ b \text{ se } i < j; . \end{cases}$$

Per $n = 3$ si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ a & 1 & b \\ a & a & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui A è predominante diagonale.
2. Sia J la matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato ad A. Si determini i valori di a, b per cui $\| J \|_\infty \leq 1/2$. Sotto tale condizione si determini un numero di iterazioni k del metodo di Jacobi applicato ad A sufficiente a garantire che $\| \boldsymbol{e}^{(k)} \|_\infty / \| \boldsymbol{e}^{(0)} \|_\infty \leq 2^{-32}$.
3. Scrivere una funzione MatLab che dato in ingresso $a, b \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ esegue con costo lineare in n un'iterazione del metodo di Jacobi applicato per la soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ con punto iniziale $\boldsymbol{x}^{(0)}$ restituendo in uscita $\boldsymbol{x}^{(1)}$.

Esercizio 2 Si consideri l'equazione

$$f(x) = x^4 - 4x + 2.5 = 0$$

1. Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione. Per ogni soluzione si determini un'intervallo di separazione.
2. Si dica se il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, $g(x) = \frac{x^4+2.5}{4}$ è localmente convergente in un'intorno di queste radici.
3. Si studi la convergenza del metodo delle tangenti per l'apoppreossimazione delle radici dell'equazione.