

## Algebra Lineare

18 gennaio 2022

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**IMPORTANTE:** Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema lineare  $\mathcal{S}$  dove  $b_1, b_2, b_3, b_4$  sono numeri reali qualunque:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = b_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = b_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_4 \end{cases}$$

Sia inoltre

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathcal{S} \text{ ha soluzione} \right\}.$$

- (1) Trovare un'applicazione lineare  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  con  $W = \text{Im}(\varphi)$ .
- (2) Trovare una base di  $W$ .
- (3) Determinare la dimensione di  $\text{Ker}(\varphi)$ .

Risposta 1:  $\varphi$

Risposta 2: Base

Risposta 3: Dimensione

**Esercizio 2.** Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita ponendo:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$$

Si considera inoltre la base  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$  di  $\mathbb{R}^2$ .

- (1) Trovare la matrice di  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  in partenza e la base standard  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  in arrivo.
- (2) Trovare la matrice di  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  in partenza e in arrivo.

Risposta 1: Matrice

Risposta 2: Matrice

**Esercizio 3.** Si consideri la seguente matrice, dove  $k$  è un parametro.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Per quali valori di  $k$  si ha che  $A$  ammette un autovalore di molteplicità algebrica 2?
- (2) Per quali valori di  $k$  si ha che  $A$  ammette un autovalore di molteplicità algebrica 3? (Ce n'è solo uno.)
- (3) Per il valore di  $k$  trovato nel punto (2) sopra la matrice è diagonalizzabile?

Risposta 1: Valori di  $k$

Risposta 2: Valori di  $k$

Risposta 3: SI/NO

**Esercizio 4.** Sia  $V \subseteq \mathcal{R}^3$  il sottospazio vettoriale di tutte le soluzioni del seguente sistema  $\mathcal{S}$ :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- (1) Qual è la dimensione di  $V$ ?
- (2) Qual è la dimensione dello spazio ortogonale  $V^\perp$ ?
- (3) Trovare una base **ortonormale** di  $V^\perp$ .

Risposta 1:  $\dim(V)$

Risposta 2:  $\dim(V^\perp)$

Risposta 3: Base