Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 13 dicembre 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x^3((\log x) - 1)$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, la funzione è definita sulla semiretta $(0, +\infty)$. La funzione è derivabile, e quindi continua, su tutto il suo dominio in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. La funzione si annulla per $x = e$, risulta negativa per $x \in (0, e)$ e positiva per $x > e$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} x^3((\log x) - 1) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2((\log x) - 1) = +\infty,$$

da cui deduciamo che non esistono nè asintoti verticali nè orizzontali. Inoltre la funzione risulta inferiormente limitata, ma $\sup(f) = +\infty$. Applicando il Teorema di Weierstrass generalizzato, dato che f assume anche valori negativi, possiamo concludere che f ammette minimo assoluto. Abbiamo inoltre che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3((\log x) - 1)}{x} = +\infty$$

e quindi non esistono nemmeno asintoti obliqui.

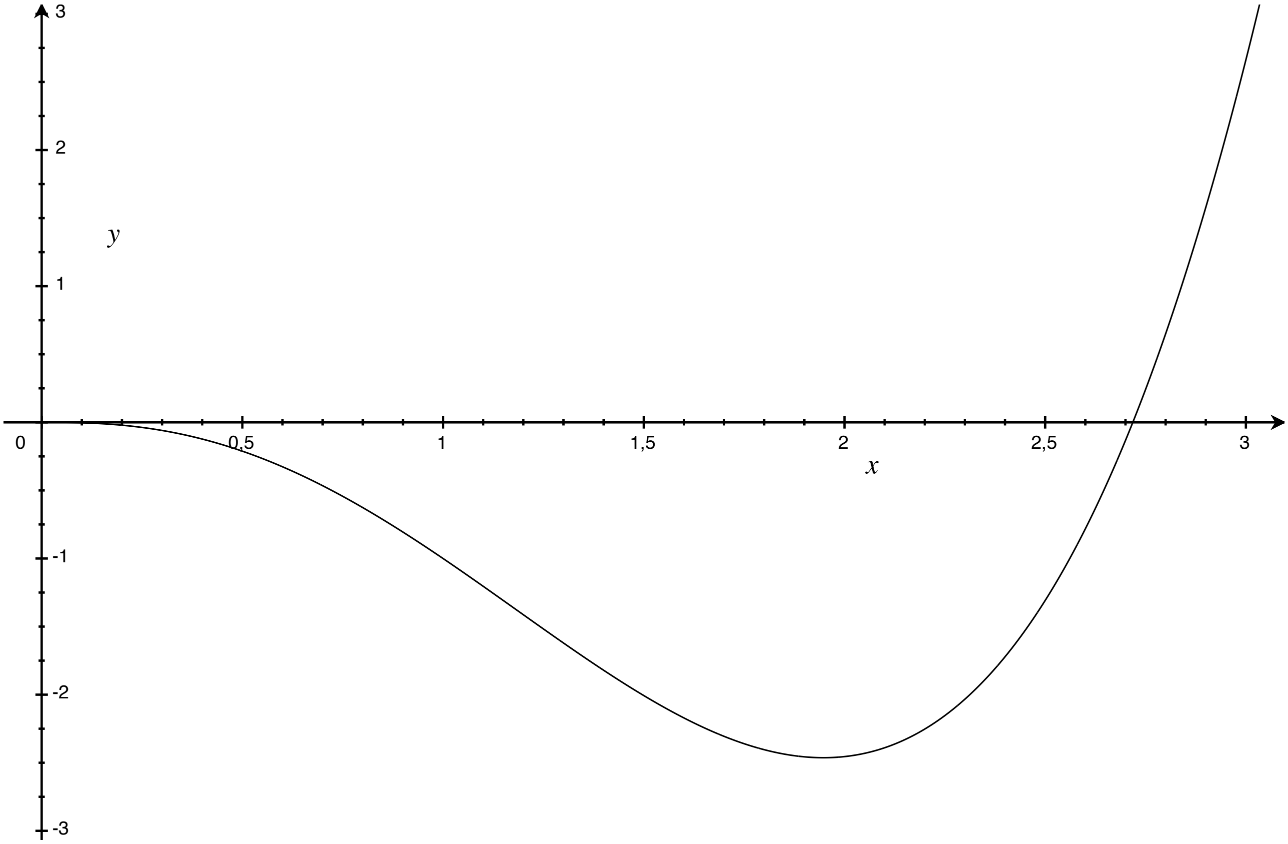
Calcoliamo la derivata prima con la regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$f'(x) = 3x^2((\log x) - 1) + x^3 \left(\frac{1}{x}\right) = x^2(3(\log x) - 2).$$

Per la ricerca di punti di minimo, studiamo il segno della derivata prima. Si ha $f'(x) > 0$ per $x > e^{\frac{2}{3}}$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < e^{\frac{2}{3}}$ con $f'(e^{\frac{2}{3}}) = 0$. La funzione risulta strettamente decrescente per $0 < x < e^{\frac{2}{3}}$ e strettamente crescente per $x > e^{\frac{2}{3}}$. Ne segue che il punto $x = e^{\frac{2}{3}}$ è l'unico punto di minimo locale ed è quindi il punto di minimo assoluto. Per studiare la convessità della funzione, ne calcoliamo la derivata seconda con calcoli analoghi a quelli utilizzati per il calcolo della derivata prima. Abbiamo

$$f''(x) = x(6(\log x) - 1).$$

Poichè $x > 0$ in tutto il dominio, il segno della derivata seconda dipende dal segno di $(6(\log x) - 1)$, ovvero $f''(x) = 0$ per $x = e^{\frac{1}{6}}$ con $f''(x) > 0$ per $x > e^{\frac{1}{6}}$ e $f''(x) < 0$ per $0 < x < e^{\frac{1}{6}}$. Il punto $x = e^{\frac{1}{6}}$ è un punto di flesso e la funzione è strettamente concava se $0 < x < e^{\frac{1}{6}}$, mentre è strettamente convessa se $x > e^{\frac{1}{6}}$.



Esercizio 2 Sia

$$F(x) = \frac{1}{x^2 - x} \int_x^{x^2} \arctan t \, dt.$$

Calcolare $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Soluzione

Osserviamo che $F(x)$ non è definita per $x = 1$. La funzione integranda è continua, quindi possiamo applicare il teorema della media integrale e trovare un punto $z(z)$ compreso tra x e x^2 tale che

$$F(x) = \arctan(z(x)).$$

Se $x \to 0^+$ possiamo considerare $x < 1$ quindi $x^2 \leq z(x) \leq x$. Ne segue che $\lim_{x \to 0^+} z(x) = 0$. Eseguendo la sostituzione $y = z(x)$ otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan(z(x)) = \lim_{y \to 0} \arctan y = 0.$$

Allo stesso modo, per $x \to +\infty$, possiamo trovare $z(x)$, con $x \leq z(x) \leq x^2$ (qui stiamo supponendo $x > 1$) tale che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan(z(x)) = \lim_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Vediamo anche una soluzione alternativa.

Calcoliamo esplicitamente l'integrale eseguendo prima l'integrale indefinito per parti

$$\int \arctan t \, dt = \int 1 \cdot \arctan t \, dt = t \arctan t - \int t \frac{1}{1+t^2} \, dt = t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c.$$

Quindi

$$\int_x^{x^2} \arctan t \, dt = \left[t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_x^{x^2} = x^2 \arctan(x^2) - \frac{1}{2} \log(1+x^4) - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\arctan(x^2) - \frac{1}{2}\log(1+x^4) - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^2+o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^4+o(x^4)\right) - x\left(x+o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+o(x^2)\right)}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x(x-1)} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\arctan(x^2) - \frac{1}{2}\log(1+x^4) - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\arctan(x^2) - \frac{\log(1+x^4)}{2x^2} - \frac{\arctan x}{x} + \frac{\log(1+x^2)}{2x^2}\right)}{x^2(1-\frac{1}{x})} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 3 Data la successione

$$a_n = \frac{e^n}{n!}(\sin n)^n,\ \ n \geq 1$$

determinare se è superiormente o inferiormente limitata e se ha massimo o minimo. Studiare inoltre la convergenza, semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n.$$

Soluzione

Mostriamo che $|a_n| \to 0$ per $n \to +\infty$, da cui segue che anche $a_n \to 0$. Visto che $|(\sin n)^n| \leq 1$ abbiamo $0 < |a_n| \leq \frac{e^n}{n!}$ e la successione $\frac{e^n}{n!}$ tende a 0, dunque per confronto tende a 0 anche $|a_n|$.

Da questo segue che a_n è sia superiormente che inferiormente limitata. Inoltre a_n ha massimo perché esiste un n per cui $a_n > 0$ (ad esempio $n = 1$, dato che $\sin 1 > 0$), e ha anche minimo perché esiste un n per cui $a_n < 0$ (ad esempio $n = 5$, dato che $(\sin 5)^5 < 0$).

Per quanto riguarda la serie, usando di nuovo la stima $|a_n| \leq \frac{e^n}{n!}$, e il fatto che la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^n}{n!}$ converge (per il criterio del rapporto, visto che $\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}$ tende a 0), per confronto concludiamo che la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ è assolutamente convergente. Dal criterio dell'assoluta convergenza segue che converge anche semplicemente.