UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso a Libera Scelta - 6 CFU

Introduzione all'Intelligenza Artificiale

Professore:
Prof. Alessio Micheli
Prof. Claudio Gallicchio

Autore:
Matteo Giuntoni Filippo Ghirardini

Anno Accademico 2023/2024

Contents

1 Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D. Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse. Vettore posizione come funzione del tempo t[s].

Esempio 1.0.1. Una molecola di ossigeno se sono interessato all'aereodinamica di una vettua. Un satellite attorno alla terra se ignoro le forze di marea.

Un vettore posizione è una funzione del tempo $t[s]$.

$$r(\vec{t}) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{z} + z(t)\hat{z}$$

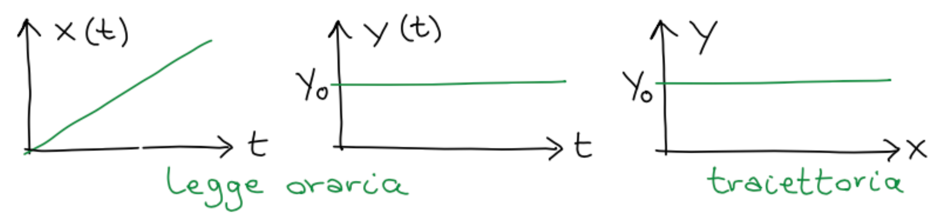
Osservazione 1.0.1. I versori cartesiani sono costanti

Definizione 1.0.1 (Legge oraria)**.** *Si definisce come legge oraria la funzione* $t \to \vec{r}(t)$.

Definizione 1.0.2 (Traiettoria)**.** *Il lungo geometrico di punti visitati dal punto materiale.*

$$\{\vec{r}(t) \;\; per \; t \in \mathbb{R}\}$$

Esempio 1.0.2. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ e $v_0 = 3m/s, y_o = 5m$



Vettore velocità

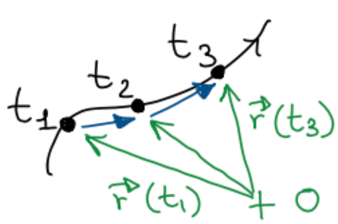
Derivata rispetto al tempo del vettore posizione e si indica come $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)[m/s]$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}\end{aligned} \tag{1}$$

Per ricavare la forma esplicita uso le proprietà delle derivate (**linearità**, **Leibnitz**)

Esempio 1.0.3. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t\hat{x} + y_0\hat{y}$ abbiamo che $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0\hat{x}$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea").



$$\begin{aligned}L &= ||\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|| + ||\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|| + ||\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)|| + \dots \\ &= \sum_i ||\vec{r}(t_{i+1} - \vec{r}(t_i)|| \;\; per \;\; |t_{i+1} - t_i| \text{"piccolo"} \\ &= \sum_i ||\frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}||(t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{f_{in}}} ||\dot{\vec{r}}(t)||\end{aligned}$$

Esempio 1.0.4. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$ $\quad ||\dot{\vec{r}}(t)|| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0|$ $\quad L = |v_0| \cdot (t_{f_{in}} - t_{in})$
Il vettore è costante quindi facendo la derivata torna zero. Con la velocità si calcolo lo spazio percorso ("integrale di linea"). La differenza fra le posizioni e la differenza dei tempi è il rapporto incrementale in caso gli intervalli siano sufficentemente piccoli, da qui si ottiene l'integrale.

1.1 Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità e si indica con $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t)[m/s^2]$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \;=\; \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \tag{2}$$

Esempio 1.1.1. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2, v_0t, 0) \qquad \dot{\vec{r}}(t) = (a_0t, v_0, 0) \qquad \dot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$

Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determinata la legge oraria è formulata in termini di accelerazione.

1.2 Vettore quantità di moto

Il prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (m\dot{x}(t), m\dot{y}(t), m\dot{x}(t)) = m\dot{\vec{x}}(t)x + m\dot{\vec{y}}(t)y + m\dot{\vec{z}}(t)z$$

Esempio 1.2.1. Prendiamo un punto di massa 2kg e velocità 3m/s lungo $\hat{x}$.
$p_x(t) = 2 \cdot 3kg \cdot m/s = 6kg \cdot m/s \qquad p_y(t) = p_z(t) = 0.$

Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di piu punti materiali.

1.3 Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_p(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

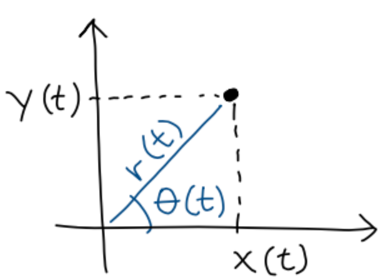
Dove $\vec{r}_p$ è il vettore posizione di p, mentre $\dot{\vec{r}}(t)$ è il prodotto vettoriale.

Esempio 1.3.1. $\vec{r}_p = (l_0, 0, 0) \qquad \vec{r}(t) = (v_0t, y_0, 0)$
$\vec{L}_p = m[(v_0t - l_0)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times (v_0\hat{x}) \;=\; m(v_0t - l_0)v_0\hat{x} \times \hat{x} + my_0v_0\hat{y} \times \hat{x} \;=\; my_0v_0(-\hat{z}) = (0, 0, -my_0v_0)$
Ricorda che $\hat{x} \times \hat{x} = 0$ e $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Il momento angolare dice quanta inerzia ha un oggetto in una rotazione (descrizione sommaria).
Il polo P è parte della definizione. È una scelta! Il risultato dipende dal polo. Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

1.4 Coordinate polari

Un metodo per rapprensentare delle cordinate x, y andando a misurare prima la distanza dall'origine e poi si va a vedere quanto vale l'angolo fra questo segmento dall'asse x, utilizzando seno e coseno.



$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ tg(\Theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$

Esempio 1.4.1. Esempi di rappresentazione di coordinate in coordinate polari.
$x = 0, y = l_0 > 0 \;\Rightarrow\; r = l_0, \Theta = \pi/2$
$x = 0, y = -l_0 < 0 \;\Rightarrow\; r = l_0, \Theta = -\pi/2$
$x = l_0, y = l_0 > 0 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2}l_0, \Theta = \pi/4$

1.5 Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\Theta}(t)$ ortogonale. Si esprime facilmente in coordinte polari.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t)\cos\Theta(t), r(t)\sin\Theta(t)) \quad = \quad r(t)(\cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y})$$

Ma $||\vec{r}(t)|| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco $\hat{r}(t) = \vec{r}(t)/||\vec{r}(t)|| = \cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y}$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è:

$$\hat{\Theta(t)} = -\sin\Theta(t)\hat{x} + \cos\Theta(t)\hat{y} \;\text{ infatti }\; \hat{r}\cdot\hat{\Theta} = c\cdot(-s) + s\cdot c = 0$$

Note 1.5.1. Non c'è legame fra Θ e $\hat{\Theta}$ è solo una convenzione.

Le trasformazioni inverse invece si fanno come segue (verifico per sostituzione):

$$\hat{y} = \cos\Theta(t)\hat{r} - \sin\Theta(t)\hat{\Theta} \qquad \hat{y} = \sin\Theta(t)\hat{r} + \cos\Theta(t)\hat{\Theta}$$

Possono quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\Theta\hat{\Theta}$ con le componenti polari a_r, a_Θ. Per evitare ambiguità non scriviamo (a_r, a_Θ) e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.

A differenza dei versori cartesiani quelli polari dipendono dal tempo per costruzioni.

$$\dot{\hat{r}}(t) = \frac{d}{dt}[\cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y}] \quad = \quad -\sin\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)\hat{x} + \cos\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)\hat{y}$$

Dove $\cos\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)$ si applica la derivata della somma, Leibnitz, funzione composta.

$$= \dot{\Theta}(t)\cdot\hat{\Theta}(t) \quad \text{(confronto l'espressione di}\hat{\Theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\dot{\Theta}\hat{r}(t)$.

Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$$

Dove abbiamo che $\vec{r}(t)$ è il vettore, $r(t)$ è una coordinata polare, $\hat{t}(t)$ è il versore polare.

$$\dot{\vec{r}}(r) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\Theta}(t)\hat{\Theta}(t)$$

Dove la parte $\dot{\vec{r}}(r)$ è la velocità radiale.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Nel quale abbiamo che la parte $r(t)\dot{\Theta}(t)^2$ si chiama **velocità centripeta**, mentre $2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)$ si dice **accelerazione di Coriolis**.

2 Forze

La legge oraria $\vec{F}(t)$ di un punto materiale di massa m è determinata salla soluzione di una equzione del moto detta **seconda legge di newton**

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$\vec{F}_1$ sono le **forze** $[kg \cdot m/s^2 \equiv N]$ (N è l'unità di misura, Newton) agenti sul punto meteriale: sono determinate empiricamente. L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo** (si chiamano così perché indicano le condizioni ai bordi del dominio), ad esempio $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ (con questa cosa stiamo dicendo che per decsrivere un moto di un sistema dobbiamo sapere in un tempo dove il sistema si trova e la sua velocità).
Questa è un equazione che va a descrivere fenomeni da dimensioni incredibilmente piccole a incredibilmente grandi.

Se la somma (detta **risultate** delle forze)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se tutte $\vec{F}_i = 0$ (**prima legge di Newton** o "principio di inserzia di Galileo"). Se un corpo non è soggetto a forze esterne mantiene il suo modo rettilineo uniforme. Questa cosa collega la proprierà di simmetria degli oggetti alla traslazione dello spazio.

2.1 Forza costante $\vec{F} = F_0\hat{x}$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \qquad \ddot{(\vec{r})}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z}$$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = F_0\hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{t}(t) = 0 \end{cases}$$

Protietto su una base per ottenere 3 equazioni scalari. Mi servono $2 \times 3 = 6$ **condizioni al bordo** per risolvere. Ad esempio codnizioni iniziali:

$$\vec{r}(0) = \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0) \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}tz(t) = z_0 + v_{0z}t \end{cases}$$

Con t che rappresenta il **moto uniformamente accelerato**

2.2 Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{z}$

Usata per esempio in prossimità della superficie terreste. Con m massa del punto materiale dell'oggetto in cui si applica, mentre $\hat{z}$ ortogonale alla superficie. $g \equiv 9,8m/s^2$, dipende da M_T, variazioni locali.

Esempio 2.2.1. Grave che case da altezza h.

$$m\ddot{\vec{r}}(r) = -mg\hat{z} \qquad \text{con} \qquad \vec{r}(t_0) = h \cdot \hat{z},, \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 (\text{oggetto parte da fermo})$$

Proietto $m\ddot{z}(t) = -mg \qquad \dot{z}(t) = -g(t - t_0) \qquad z(t) = h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$
Si sostituisce le costanti della soluzione per verificare che siano verificate le condizioni ai bordi.

Esempio 2.2.2. Problema del proiettile.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mh\hat{z}(\text{equazione del moto}) \;\; \text{con}\vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e } \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos\Theta\hat{x} + v_0 \cdot \sin\Theta\hat{z} \quad \text{ovver} \quad \vec{v}_0 = v_0(\cos\Theta, \sin\Theta) \;\; ||\vec{v}_0|| = v_0$$

Proiezione lungo $\hat{y}$ banale: $\ddot{y}(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos\Theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 \cos\Theta \\ x(t) &= v_0 \cos\Theta(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -g \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin\Theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{t} &= v_0 \sin\Theta - g(t - t_0) \\ z(t) &= v_0 \sin\Theta(t - t_0) - \tfrac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\Theta(t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin\Theta(t - t_0) - \tfrac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) \;/\; (v_0 \cos\Theta) \quad z = v_0 \sin\Theta x \;/\; (v_0 \cos\Theta) - \frac{1}{2}gx^2 \;/\; (v_0 \cos\Theta)^2 \quad z = v_0 tg\Theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2\Theta}$$

Osservazione 2.2.1.

2.3 Forza elastica $\vec{F} = -k(||\vec{r} - \vec{r}_v|| - l_0)\frac{\vec{r}-\vec{r}_v}{||\vec{r}-\vec{r}_v||}$

Chiamata anche **legge di hooke**. k è la costante elastica espressa in $[N/m]$ del materiale. $l_0[m]$ lunghezza a riposo della "molla", dipende dal vettore posizione $\vec{r}$ ("posizionale"). Altro estremoi / vincolo $\vec{r}_v$. $-\frac{\vec{r}-\vec{r}_v}{||\vec{r}-\vec{r}_v||}$ è il versone parallelo alla molla, cioò la distanza fra il punto di destinazione ed il vincolo. La forza elastica è tanto piu intensa quanto è estesa la molla, e questa relazione fondamentale è lineare.

Esempio 2.3.1. Oscillatore unidimensionale $\vec{r}_v = 0$.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}, x(t) \geq 0$$

$$\vec{F} = -k(|x - 0| - l_0)\frac{x - 0}{|x - 0|}\hat{x} \quad = \quad -k(|x| - l_0)\frac{x}{|x|}\hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x}(t) = -k[x(t) - l_0]$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \text{con}\Omega \equiv \sqrt{k/m}$$

$\Omega[rad/s]$la **frequenza angolare** $\quad \Omega/2\pi[\frac{1}{s} = Hz]$è la **frequenza** $\quad T = 2\pi/\Omega[s]$è il **periodo**, infatti $\Omega{\cdot}T = 2\pi$

Trovo A e B imponendo che la soluzione rispetti le condizoni al bordo, es: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B\Omega \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow 0 = 0 + B\Omega \Rightarrow B = 0$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow x_0 = l_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow x_0 = l_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0)\cos(\Omega t)$$

2.4 Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\dot{\vec{r}}(t)$

Modello approssimato per le basse velocità. Abbiamo che $-\gamma[N/(m/s)]$ è costante. Il meno è dato perché è una forza che si oppone linearmente ad una velocità.

Esempio 2.4.1. Proiettile in gel balistico.

$$m\ddot{x}(t) = \gamma t\dot{x}(t) \ \ con \ \ \dot{(}0) = v_0$$

Pongo poi $u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{u}t = -\frac{1}{\tau}u(t)$ con $u(0) = v_0$ e $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}[\frac{1}{s}]$
Soluzione generale $u(t) = Ae^{-t/\tau} \Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$.
Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \ \ \text{ovver} \ \ \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

rallentamento esponenziale.

2.5 Data la legge oraria, trovare la forza

$r(t) = R, \Theta(t) = \Omega t$ **moto circolare uniforme**

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} \qquad \hat{r} = \cos(\Theta(t))\hat{x} + \sin(\Theta(t))\hat{t}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [r\ddot{(t)} - r(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Dalla legge oraria ho: $\dot{(t)} = 0, \ddot{r}(t) = 0, \dot{\Theta} = \Omega, \ddot{\Theta}(t) = 0 \Rightarrow$ in questo caso $\ddot{\vec{r}}(t) = -R\Omega^2\hat{r}$.
La risultate $\vec{F}$ delle forze deve essere tale che $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR\Omega^2\hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR\Omega\vec{r}$.
La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (**forza centrale** o **forza centripeda**).
Ottengo $\vec{F}$ solo per questa legge oraria.