UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso 2° anno - 6 CFU

Calcolo Numerico

Professore:
Prof. Luca Germignani

Autore:
Matteo Giuntoni

Anno Accademico 2022/2023

Contents

Calcolo Numerico

Realizzato da: Giuntoni Matteo

A.A. 2022-2023

---

1 Aritmetica di Macchina

Per una macchina la scrittura $(x + y) + z \neq x + (y + z)$. Vediamo dunque che ci sono alcuni punti focali da considerare per far si che una macchina funzioni correttamente:

- Trovare uno standard per come memorizzare i numeri.
- Trovare uno standard per come manipolare i numeri.

Da questi due punti possiamo ricondurci ad un solo problema, come andare a rappresentare i numeri.

1.1 Teorema di rapresentazione

Teorema 1.1.1. Dato $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ esistono e sono univocamente determinati.

1. un intero $p \in \mathbb{Z}$ detto esponente della rappresentazione.
2. una successione di numeri naturiali $\{d_i\}_{i\geq 1}$ con $d_i \neq 0, 0 \leq d_i \leq B - 1$ e d_i non definitvamente uguali a $B - 1$, dette cire della rappresentazione; tali per cui si ha

$$x = sign(x)B^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-1}. \tag{1}$$

Andiamo ora ad analizzare il significato di questo teorema. Esso descrive quella che viene chiamata rappresentazione in virgola mobile, in quanto l'esponente p on è determinato in modo da avere la parte intera nulla. Le cose da considerare in questo teorema sono:

- La condizione $d_i \neq 0$ e d_i non definitivamente uguale a $B - 1$ sono introdotte per garantire l'unicità delle rappresentazioni. Ad esempio:

  $$B = 10 \text{ abbiamo } 1 = +10^1(1 \cdot 10^{-1}) = +10^2(0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-1})$$

  Quindi due rappresentazioni diverse per lo stesso numero, però considerando le condizioni scritte sopra la seconda non risulta accettabile perché la prima cifra è nulla.

- Il caso $x = 0$ non ammette rapresentazione normalizzata. Questa casistica viene trattata dalla macchina in un modo particolare, per questo abbiamo la condizione $x \neq$.

- Questa rapresentazione si estende anche all'insieme dei numeri complessi del tipo $z = a + ib$, utilizzando una rapresentazione come coppie di numeri reali del tipo (a, b).

Possiamo dedurre che visto che stiamo lavornano con registri di meoria di un calcolatore con memoria a numero finito, anche la quantità di cifre rapresentabili saranno a numero finito esso vinene chiamato **insieme dei numeri di macchina**.

Dal teorema di rapresentazione in base di un numero reale può avvenire assegnando delle posizioni di meoria per il segno, per l'esponente e per le cifre della rappresentazione.

Definizione 1.1.1 (Insieme die numeri di macchina)**.** *Si definisce l'insieme dei nuermi di macchina in rappresentazione floating point con t cifre, base B e range $-m, M$ l'insieme dei numeri reali.*

$$\mathbb{F}(B,t,m,M) = \{0\} \cup \{s \in \mathbb{R} \,:\, x = sign(x)B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-1}, 0 \leq d_i \leq B-1, d_1 \neq 0, -m \leq p \leq M\}$$

Si osserva in questa definizione che:

- L'insieme $\mathbb{F}$ ha cardinalità finita $N = 2B^{t-1}(B-1)(M+m+1)+1$.
- L'insieme dei numeri di macchina $\mathbb{F}(B,t,m,M)$ è simmetrico rispetto all'origine.
- Possiamo definire $\Omega = B^M(B-1)\sum_{i=1}^{t} b^{-1}$ come il più grande numero macchina e $\omega = B^{-m}B^{-1}$ come invece il più piccolo.
- Posto un $x = B^P \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-1}$ possiamo definire il suo successiovo numero di macchina come $y = B^p(\sum_{i=1}^{t-1} d_i B^{-1} + (d_t+1)B^{-t})$. Da qui vediamo che la distanza $y - x = B^p - t$ porta i numeri ad essere non equispaziali fra di loro, quindi la distanza aumento con l'avicinarci a Ω