FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 3

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Una sequenza di caratteri (stringa) $a_1 a_2 \cdots a_n$ si dice palindroma se

$$a_1 a_2 \cdots a_n = a_n a_{n-1} \cdots a_1$$

cioè leggerla da sinistra verso destra è come leggerla da destra verso sinistra. Ad esempio, le sequenze `bob`, `1010101` e `AB313BA` sono palindrome.

Calcolare il numero di targhe di automobile (italiane) palindrome: si ricorda che una targa è una stringa della forma `XXNNNXX`, dove ogni `X` è una di 22 possibili lettere dell'alfabeto inglese, e ogni `N` è una cifra in $\{0, \ldots, 9\}$.

ESERCIZIO 2

Anna, Bob, Chiara e Davide giocano a carte con un mazzo da 52 (non ci sono carte ripetute). All'inizio del gioco ad ognuno dei 4 giocatori vanno 5 carte, cioè Anna pesca 5 carte, poi Bob 5, poi Chiara 5 e poi Davide 5. L'assegnamento di un insieme di 5 carte ad ognuno dei 4 giocatori determina la configurazione iniziale del gioco. Quante possibili configurazioni iniziali ci sono?

ESERCIZIO 3

Un gruppo di 6 amici decide di cenare assieme al ristorante: per semplicità identifichiamo i 6 amici con i numeri da 1 a 6, e vediamo idealmente i tavoli come cerchi con i commensali seduti lungo la circonferenza. Per esempio, se i 6 amici siedono in un unico tavolo, disporsi come 345612 o 561234 è equivalente a 123456 perché rappresentano la stessa rotazione ciclica: in tal senso, le rotazioni cicliche 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345 rappresentano lo *stesso* modo distinto di disporsi attorno al tavolo e quindi non vanno conteggiate separatamente. Chiarito questo punto, passiamo alle domande:

1. Supponiamo che il gruppo trovi un tavolo di 6 posti: in quanti modi distinti i 6 amici possono disporsi attorno al tavolo?

2. Supponiamo che il gruppo trovi due tavoli da 3 posti ciascuno: in quanti modi distinti i 6 amici possono disporsi attorno ai tavoli? Nota: i due tavoli non devone essere considerati distinti (cioè sono due tavoli identici e quindi 123 e 456 conta anche come 456 e 123).

ESERCIZIO 4

Sia dato un numero $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con B_n l'insieme delle sequenze binarie di lunghezza n che *non* contengono due bit consecutivi uguali a 1. Poniamo $b_n := |B_n|$.

1. Calcolare esplicitamente b_1, b_2 e b_3.

2. Per $n \geq 3$, trovare una formula che esprima b_{n+1} in termini di b_n e di b_{n-1}, motivando la risposta.

È familiare?

ESERCIZIO 5

Si ricorda che per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, l'insieme n è $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Siano dati due numeri naturali n e $m \in \mathbb{N}$.

1. Contare le funzioni iniettive $f : n \to m$.

ESERCIZIO 6*

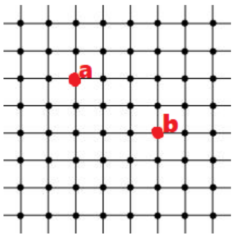
Si ricorda che per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, l'insieme n è $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Siano dati due numeri naturali n e $m \in \mathbb{N}$.

1. Contare le funzioni *parziali* $f : n \to m$.
2. Contare le relazioni iniettive $R : n \leftrightarrow m$.
3. Contare le relazioni totali $R : n \leftrightarrow m$.
4. Contare le relazioni surgettive $R : n \leftrightarrow m$.

ESERCIZIO 7

Una griglia è un grafo dove ogni nodo *interno* ha 4 vicini, e per semplicità puo essere disegnato in modo che questi siano uno in alto, uno in basso, uno a destra e uno a sinistra. Gli altri nodi (*bordi* e *angoli* della griglia) hanno gradi diversi, ma non consideriamoli per questo esercizio.

Consideriamo la griglia qui disegnata, immaginando che si estenda in lungo e in largo abbastanza da potersi muovere liberamente senza mai raggiungere i bordi, e consideriamo i nodi **a** e **b** evidenziati.



Si osservi che si può ottenere un cammino da **a** a **b** muovendosi 3 volte a destra e poi 2 in giù. In generale, ogni walk in questo grafo può essere espresso come una sequenza di elementi dell'insieme: $\{su, giu, destra, sinistra\}$.

Si risponda alle seguenti domande:

- Quanti shortest path esistono tra **a** e **b**? (dove uno shortest path è un path dalla lunghezza minore possibile)
- Per quali valori di k esiste un *walk* tra **a** e **b** di lunghezza *esattamente* k?
- Quanti walk chiusi esistono, a partire da **a**, che hanno lunghezza esattamente 12 e usano tanti archi verticali quanti orizzontali? (un esempio è il walk $destra, destra, destra, su, su, su, sinistra, sinistra, sinistra, giu, giu, giu$).

SOLUZIONI PROPOSTE

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Sia $T = x_1x_2a_1a_2a_3x_3x_4$, dove x_i sono lettere dell'alfabeto e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, una targa. T è palindroma se e solo se $a_1a_2a_3$ è palindroma e $x_1 = x_4 = X,\ x_2 = x_3 = Y$. Inoltre $a_1a_2a_3$ è palindroma se e solo se $a_1 = a_3$: chiamiamo $A = a_1 = a_3$ e $B = a_2$. Abbiamo scoperto che T è palindroma se e soltanto se

$$T = XYABAYX$$

dove X, Y sono lettere dell'albabeto e A, B sono numeri presi dall'insieme $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Abbiamo quindi

$$22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 = 48400$$

targhe palindrome.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

All'inizio Anna pesca 5 carte da un mazzo di 52. Si noti che l'ordine con cui le pesca non è rilevante. Quindi siamo interessati alle **c**ombinazioni di 5 elementi su un insieme di 52 che sappiamo essere

$$\binom{52}{5}$$

Successivamente Bob pesca 5 carte, ma il mazzo adesso contiene solo 52-5 carte (in quanto 5 sono già state prese da Anna). Quindi per Bob ci sono

$$\binom{52-5}{5}$$

possibili pescaggi.

Ragionando in modo del tutto analogo per Chiara e Davide ci sono, rispettivamente

$$\binom{52-(5\cdot 2)}{5} \text{ e } \binom{52-(5\cdot 3)}{5}$$

possibili pescaggi.

Pertanto le possibili configurazioni iniziali sono

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{52-5}{5} \cdot \binom{52-(5\cdot 2)}{5} \cdot \binom{52-(5\cdot 3)}{5}$$

cioè

$$\frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} \cdot \frac{(52-5)!}{5! \cdot (52-(5\cdot 2))!} \cdot \frac{(52-(5\cdot 2))!}{5! \cdot (52-(5\cdot 3))!} \cdot \frac{(52-(5\cdot 3))!}{5! \cdot (52-(5\cdot 4))!}$$

che equivale a

$$\frac{52!}{(5!)^4 \cdot (52-(5\cdot 4))!}$$

Alla stessa formula si può arrivare anche ragionando nel seguente modo. I quattro giocatori pescano in sequenza, nell'ordine stabilito, 20 carte dal mazzo. Questo può essere fatto in $D(52, 20)$ modi diversi, cioè il numero di disposizioni di 52 elementi in 20 posti. Per ogni giocatore l'ordine in cui le sue 5 carte sono state estratte non conta, quindi il numero di disposizioni va diviso per il numero di permutazioni di 5 elementi, $P(5)$, e questo per ognuno dei 4 giocatori. Otteniamo quindi

$$\frac{D(52, 20)}{P(5)^4} = \frac{52!}{(52-20)! \cdot (5!)^4} = 147826284347564402003424\,0$$

come il paziente studente può facilmente verificare.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Identifichiamo l'insieme dei 6 amici con l'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Poiché il tavolo in cui siedono i 6 amici è rotondo, ogni possibile disposizione è invariante per rotazione ciclica a destra (o a sinistra) dei commensali.

   Possiamo pensare una disposizione degli amici come una permutazione degli elementi di X. La condizione di sopra non distingue, ad esempio, le seguenti disposizioni:

   - 123456
   - 561234
   - 456123
   - 345162
   - 234516
   - 612345

   Deduciamo che ogni permutazione genera 6 permutazioni di X equivalenti tra loro. Il numero di possibili configuarazioni è pertanto

   $$\frac{6!}{6} = 5! = 120$$

2. In quanti modi possiamo decidere quali persone siedono ai due tavoli? Ci basta contare i modi di scegliere 3 dei 6 amici e metterli ad un tavolo (i restanti 3 amici sono forzati a sedersi all'altro tavolo) e dividerlo per 2:

   $$\frac{\binom{6}{3}}{2} = \frac{6!}{3!3!2} = 10.$$

   Quest'osservazione si vede bene considerando le sequenze binarie di lunghezza 6 che hanno esattamente 3 bit a 1: in tal caso le sequenze complementari, per esempio 101100 e 010011 danno luogo alla stessa configurazione perché i due tavoli sono indistinguibili e non esiste un tavolo 0 e un tavolo 1. Per ognuna di tali scelte abbiamo $\frac{3!}{3} \cdot \frac{3!}{3} = 2 \cdot 2 = 4$ possibili configurazioni dei due tavoli. Abbiamo quindi in totale

   $$10 \cdot 4 = 40$$

   possibilità.

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 4</u>
Facciamo a mano i casi $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.
Se $n = 1$ si ha che

$$B_1 = \{\texttt{0, 1}\}$$

e quindi $b_1 = 2$.
Se $n = 2$, allora

$$B_2 = \{\texttt{00, 01, 10}\}$$

e quindi $b_2 = 3$.
Se $n = 3$, allora

$$B_3 = \{\texttt{000, 010, 100, 001, 101}\}$$

e quindi $b_3 = 5$.
Sia ora $n \geq 2$ e cerchiamo di determinare b_{n+1} sapendo b_n e b_{n-1}.
Prendiamo $w \in B_{n+1}$ e lo scriviamo come

$$w = abw'$$

con a, $b \in \{\texttt{0, 1}\}$ e w' sequenza di $n - 1$ bit. Si hanno due casi:

1. Se $a = \texttt{0}$ allora

   $$w \in B_{n+1} \iff bw' \in B_n$$

   e quindi si hanno b_n possibili scelte in questo caso.

2. Se $a = \mathbf{1}$ allora
$$w \in B_{n+1} \iff b = 0 \textbf{ e } w' \in B_{n-1}$$
e quindi si hanno b_{n-1} possibili scelte in questo caso.

In conclusione, abbiamo trovato la formula
$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \end{cases}$$
Osserviamo che la clausola induttiva è la stessa di quella dei numeri di Fibonacci, ma le clausole base sono diverse.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

1. Per prima cosa osserviamo che se $n > m$ allora non possono esistere funzioni iniettive $f\colon n \to m$ (Principio delle buche dei piccioni, Corollario 6.2.4). Quindi se $n > m$, ci sono 0 funzioni iniettive.

   Consideriamo adesso il caso in cui $n \leq m$.
   In quanti modi possiamo scegliere f?

   - Abbiamo m scelte per $f(0)$
   - f deve essere iniettiva, quindi abbiamo $m - 1$ scelte per $f(1)$

   $\vdots$

   - abbiamo $m - n + 1$ scelte per $f(n - 1)$

   Di conseguenza le possibili f iniettive sono
   $$m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$
   Si può arrivare allo stesso risultato osservando che contare tutte le $f : n \to m$ iniettive equivale a contare tutti i sottoinsiemi ordinati
   $$\{f(0), \dots, f(n-1)\} \subset \{0, \dots, m-1\}$$
   e cioè a contare tutte le **disposizioni** di n elementi in m posti. Sappiamo che queste sono
   $$D(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!} = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$
   come mostrato sopra.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6
Di seguito denotiamo gli insiemi delle relazioni tra n ed m totali, univalenti, surgettive ed iniettive con, rispettivamente, $\mathit{TRel}(n,m)$, $\mathit{URel}(n,m)$, $\mathit{SRel}(n,m)$ e $\mathit{IRel}(n,m)$.

1. Si ricorda che una funzione parziale $f\colon n \to m$ è per definizione una relazione univalente $R\colon n \leftrightarrow m$. Calcoliamo pertanto il numero di relazioni univalenti, cioè $|\mathit{URel}(n,m)|$.

   Iniziamo prendendo un elemento speciale, che denotiamo con $\perp$, che non appartiene né ad $n = \{0, \dots, n-1\}$ né ad $m = \{0, \dots, m-1\}$.

   Si osservi che $\mathit{URel}(n,m) \cong \mathit{Fun}(n, m \cup \{\perp\})$. La biiezione $\iota\colon \mathit{URel}(n,m) \to \mathit{Fun}(n, m \cup \{\perp\})$ associa ad ogni $R \in \mathit{URel}(n,m)$ la funzione $\iota(R)\colon n \to m \cup \{\perp\}$ definita per ogni $x \in n$ come
   $$x \mapsto \begin{cases} \perp & \text{se non esiste } y \in m \text{ tale che } (x,y) \in R. \\ y & \text{se } (x,y) \in R. \end{cases}$$

Ad esempio per $R = \{(0,1),(2,0)\}\colon 3 \leftrightarrow 2$, $\iota(R)$ mappa

$$0 \mapsto 1, \qquad 1 \mapsto \bot, \qquad \text{e} \qquad 2 \mapsto 0.$$

Si noti che $\iota(R)$ è effettivamente una funzione: è univalente poichè R è univalente; è totale perchè ad ogni $x \in n$ associa sempre o un $y \in m$ o $\bot$. Lasciamo al volenteroso studente il compito di dimostrare che ι sia effettivamente una biiezione.

Grazie al Corollario 6.2.5 (Regola di biiezione), sappiamo quindi che

$$|\mathit{URel}(n,m)| = |\mathit{Fun}(n, m \cup \{\bot\})|.$$

Si osservi che $|m \cup \{\bot\}| = m+1$ e, pertanto, $|\mathit{Fun}(n, m \cup \{\bot\})| = (m+1)^n$. Ci sono pertanto $(m+1)^n$ relazioni univalenti tra n e m. In simboli,

$$|\mathit{URel}(n,m)| = (m+1)^n.$$

2. Si osservi che

$$\mathit{IRel}(n,m) \cong \mathit{URel}(m,n)$$

per la Proposizione 2.4.30 (dualità di relazioni). Grazie al Corollario 6.2.5 (Regola di biiezione), sappiamo quindi che

$$|\mathit{IRel}(n,m)| = |\mathit{URel}(m,n)|.$$

Grazie al risultato del punto precedente sappiamo che $|\mathit{URel}(m,n)| = (n+1)^m$. Pertanto ci sono $(n+1)^m$ relazioni iniettive tra n ed m. In simboli,

$$|\mathit{IRel}(n,m)| = (n+1)^m.$$

3. Si osservi che $\mathit{Rel}(n,m) \cong \mathit{Fun}(n, \mathcal{P}(m))$. La biiezione $\iota\colon \mathit{Rel}(n,m) \to \mathit{Fun}(n,\mathcal{P}(m))$ associa ad ogni relazione $R\colon n \leftrightarrow m$ la funzione $\iota(R)\colon n \to \mathcal{P}(m)$ definita per ogni $x \in n$ come

$$x \mapsto \{y \in m \mid (x,y) \in R\}.$$

Ad esempio, per la relazione $R = \{(0,0),\ (0,1)\}\colon 2 \leftrightarrow 2$, la funzione $\iota(R)\colon 2 \to \mathcal{P}(2)$ mappa

$$0 \mapsto \{0,1\} \qquad \text{e} \qquad 1 \mapsto \varnothing.$$

Lasciamo al volenteroso studente il compito di dimostrare che ι sia effettivamente una biiezione.

La seconda osservazione chiave è che R è totale se e soltanto se $\iota(R)(x) \neq \varnothing$ per ogni $x \in n$. Infatti, se esiste un qualche $x \in n$ tale che $\iota(R)(x) = \varnothing$, allora nessun elemento $y \in m$ è associato ad x e quindi la relazione R non è totale. Viceversa, se R non è totale, deve esistere almeno un $x \in n$ per cui non esiste alcun $y \in m$ tale che $(x,y) \in R$. E quindi $\iota(R)(x) = \varnothing$.

Possiamo quindi dire che le relazioni totali sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni $f\colon n \to (\mathcal{P}(m) \setminus \varnothing)$. In simboli,

$$\mathit{TRel}(n,m) \cong \mathit{Fun}(n, \mathcal{P}(m) \setminus \varnothing).$$

Grazie al Corollario 6.2.5 (Regola di biiezione), sappiamo quindi che

$$|\mathit{TRel}(n,m)| = |\mathit{Fun}(n, \mathcal{P}(m) \setminus \varnothing)|$$

Si osservi che $|\mathcal{P}(m) \setminus \varnothing| = 2^m - 1$. Quindi $|\mathit{Fun}(n, \mathcal{P}(m) \setminus \varnothing)| = (2^m-1)^n$. Pertanto ci sono $(2^m-1)^n$ relazioni totali tra n ed m. In simboli

$$|\mathit{TRel}(n,m)| = (2^m-1)^n.$$

4. Denotiamo con $TRel(n, m)$ e $SRel(n, m)$ gli insiemi delle relazioni tra n e m rispettivamente totali e surgettive. Si osservi che

$$SRel(n, m) \cong TRel(m, n)$$

per la Proposizione 2.4.30 (dualità di relazioni). Grazie al Corollario 6.2.5 (Regola di biiezione), sappiamo quindi che

$$|SRel(n, m)| = |TRel(m, n)|.$$

Grazie al risultato del punto precedente sappiamo che $|TRel(m, n)| = (2^n - 1)^m$. Pertanto ci sono $(2^n - 1)^m$ relazioni surgettive tra n ed m. In simboli,

$$|SRel(n, m)| = (2^n - 1)^m.$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 7

Importante ricordare che tutti i cammini possono essere definiti come sequenze di movimenti "su", "giu", "destra", "sinistra". In altre parole i cammini sono parole (sequenze) su un alfabeto di 4 caratteri.

- Ogni shortest path ha lunghezza 5 e deve contenere 3 spostamenti a destra e 2 in giu. In altre parole, è una sequenza di 5 elementi, dove 2 sono "giu" e tutti gli altri sono "destra": quanti modi abbiamo di scegliere quali 2 dei 5 elementi devono essere "giu"? $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$
- Si noti che abbiamo bisogno di almeno 5 archi per raggiungere b, quindi $k \geq 5$. Si noti anche che faccio un passo addizionale (ad es, in su), ho bisogno di un ulteriore passo per annullarlo tornare a b (ad es, in giu). Questi passi possono essere fatti in qualsiasi momento, ma tolti i 5 passi necessari, il numero di "su" e "giu" deve corrispondere (per annullare l'effetto), e ugualmente il numero di "destra" e "sinistra". Ne segue che gli unici k validi corrispondono a 5 + un numero pari, ovvero k è un numero dispari maggiore o uguale a 5.
- Si osservi che in un walk chiuso tutti i "su" e i "giu" devono annullarsi, e allo stesso modo tutti i "destra" e "sinistra", e dato che dobbiamo averne in numero uguale, l'unica possibilità è avere 3 "su", 3 "giu", 3 "destra" e 3 "sinistra". La soluzione segue dal fatto che *qualsiasi* ordine in cui scriviamo questi elementi è un valido walk chiso: se consideriamo gli elementi come lettere, questo corrisponde quindi a tutti i possibili anagrammi della parola "$destra, destra, destra, su, su, su, sinistra, sinistra, sinistra, giu, giu, giu$", di lunghezza 12 e con 4 lettere con ognuna molteplicità 3. Come abbiamo visto a lezione, le permutazioni con molteplicità sono date dal fattoriale della lunghezza, diviso il fattoriale di ogni molteplicità, ovvero: $\frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 369\,600$