Esercizio 1. Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a) Trovare una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Span}(v_3, v_4)$ nei casi dove $a = 4$ o $a = 5$.

b) Esiste un valore di a tale che $\dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Span}(v_3, v_4)) = 2$?

Esercizio 2. Sia $V = \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_3) \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dove

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la dimensione di V.

b) Sia $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici dove la seconda riga è uguale a $(0, 0)$. Calcolare la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Esercizio 3. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione linare tale che

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}(\phi)$.

b) Calcolare

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}\right).$$

c) Partendo dei dati sopra si può determinare

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}\right)?$$

Esercizio 4. Consideriamo l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definita tramite il prodotto "righe per colonne" come segue:

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Determinare le dimensioni del nucleo e dell'imagine di f.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio delle polinomi reali di grado ≤ 2 e sia $\rho : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ la mappa

$$f \mapsto \rho(f) := \begin{bmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{bmatrix}.$$

a) Verificare che ρ è un'applicazione lineare.

b) Trovare basi di $\mathrm{Ker}(\rho)$ e di $\mathrm{Im}(\rho)$.