SOLUZIONI "TAKE-HOME #1"

Esercizio 1

Consideriamo le seguenti due basi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \quad \text{(base standard o base canonica)} \quad ; \quad \mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$$

(1) La matrice associata ad A rispetto alla base standard $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ sia in partenza che in arrivo è la matrice 2×2 le cui due colonne sono le coordinate dei vettori $A(e_1)$ e $A(e_2)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$, cioè:

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \left(A(e_1)_{\mathcal{E}} \;\middle|\; A(e_2)_{\mathcal{E}} \right)$$

NOTA BENE: Se non specificato altrimenti, le coordinate si intendono rispetto alla base standard.

Notiamo che $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$.

Quindi $A(e_1) = A\left(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right) = \frac{1}{2}A(v_1) + \frac{1}{2}A(v_2) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\end{pmatrix},$$ che sono le coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$.

Notiamo inoltre che $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$.

Quindi $A(e_2) = A\left(\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right) = \frac{1}{2}A(v_1) - \frac{1}{2}A(v_2) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-3/2\end{pmatrix}.$$ Concludiamo che

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

(2) La matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ sia in partenza che in arrivo è la matrice 2×2 le cui colonne sono le coordinate dei vettori $A(v_1)$ e $A(v_2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \left(A(v_1)_{\mathcal{B}} \;\middle|\; A(v_2)_{\mathcal{B}} \right)$$

Notiamo che $A(v_1) = \begin{pmatrix}1\\ \end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2$, quindi le coordinate di $A(v_1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $A(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Inoltre $A(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$, quindi le coordinate di $A(v_2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $A(v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi:

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) La matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e rispetto alla base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ in arrivo e' la matrice 2×2 le cui colonne sono le coordinate dei vettori $A(v_1)$ e $A(v_2)$ rispetto alla base canonica.

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \left(A(v_1)_{\mathcal{E}} \,\middle|\, A(v_2)_{\mathcal{E}} \right)$$

Adesso $A(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$) e $A(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$), quindi:

$$A_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$//$

Esercizio 2 In base alle definizioni,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff \text{esistono } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{tali che } \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$

il sistema
$$\begin{cases} 4\lambda_1 = 4 \\ k\cdot\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \end{cases}$$
e' risolubile.

Applichiamo le riduzioni di Gauss alla matrice associata:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ k & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ k & 1 & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{II - \frac{k}{4} I} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5-k \end{array}\right. \xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5-k \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{2} I} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & -4+k \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto ha soluzione $\iff$ l'ultima equazione ha la forma $0=0$, cioe' quando $-4+k=0 \iff k=4$.

Quindi concludiamo che $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff k=4$

//

Esercizio 3 $\qquad V \doteq \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$.

Per definizione di V, i vettori v_1 e v_2 sono generatori di V.

Visto che i vettori v_1 e v_2 sono anche linearmente indipendenti,

$\mathcal{B}_V = \{ v_1, v_2 \}$ e' una base di V, e percio' $\dim V = 2$.

$W \doteq \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+4y+2z=0 \right\}$ dove $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

e' l'applicazione lineare definita da $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x+4y+2z$.

$Im(A) \subseteq \mathbb{R}$ e' un sottospazio e $Im(A) \neq \{0\}$, quindi $Im(A) = \mathbb{R}$ ed ha dimensione 1. Visto che $\dim(\ker A) + \dim(Im(A)) = 3$, ricaviamo che $\dim W = \dim(\ker(A)) = 2$.

Il sottospazio $W \subsetneq V+W$ e' strettamente piu' piccolo di $V+W \subseteq \mathbb{R}^3$.

Infatti, ad esempio, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ e quindi $v_1 \in V+W$, ma $v_1 \notin W$, visto che $2\cdot(1) + 4\cdot(-1) + 2\cdot(0) \neq 0$. Quindi

$$2 = \dim(W) < \dim(V+W) \leq 3 \implies \dim(V+W) = 3.$$

Questo ci dice che $V+W = \mathbb{R}^3$.

Applicando la formule di Grassman:

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

si ottiene che $3 = 2 + 2 - \dim(V \cap W)$ e quindi

$\dim(V\cap W) = 1$. Una base di $V\cap W$ si ottiene prendendo un

qualunque vettore $u \in V\cap W$ con $u \neq 0$.

Ad esempio, notiamo che $u = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in V\cap W$. Infatti

$v_2 \in V$ e anche $v_2 \in W$, visto che $2\cdot(1) + 4\cdot(0) + 2(-1) = 0$.

Quindi $\mathcal{B}_{V\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di $V\cap W$.

Un vettore $u \in V\cap W$ si poteva trovare anche in questo modo.

$u \in V \iff$ esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $u = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, cioe'

$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$. Un tale vettore u appartiene anche a $W \iff$ le sue coordinate soddisfano l'uguaglianza

$2x + 4y + 2z = 0$, cioe' $2\cdot(\lambda_1 + \lambda_2) + 4(-\lambda_1) + 2(-\lambda_2) = 0 \iff$

$2\lambda_1 + \cancel{2\lambda_2} - 4\lambda_1 - \cancel{2\lambda_2} = 0 \iff \lambda_1 = 0$. Quindi per ogni λ_2,

il vettore $u = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in V\cap W$. Ad esempio, quando $\lambda_2 = 1$

otteniamo il vettore $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gia' individuato prima.

Un metodo alternativo per risolvere l'Esercizio 3 e' il seguente.

Troviamo prima una base di W e poi determiniamo $V \cap W$.

La matrice associata all'appl. lineare A e' la matrice 1×3
$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ P \quad L \quad L \end{array}$, quindi banalmente le variabili libere sono y e z.

Troviamo le soluzioni speciali:

$$\begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \qquad 2x+4y+2z=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \qquad w_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} y=0 \\ z=1 \end{matrix} \qquad 2x+4y+2z=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \qquad w_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque una base di $W=\operatorname{Ker} A$ e' $\mathcal{B}_W=\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \right\}$.

Vediamo ora come determinare $V \cap W$ conoscendo le basi di V e di W:

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} \quad e \quad \mathcal{B}_W = \left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Osserviamo che $v_2 = -w_2 \in V \cap W$, quindi $\dim(V \cap W) \geq 1$.

Notiamo inoltre che $v_1 \notin W$, visto che $2 \cdot (1) + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (0) \neq 0$.

Allora $V \cap W \subsetneq V$ e' un sottospazio proprio, e percio' $\dim(V \cap W) < \dim(V) = 2$. Concludiamo che $\dim(V \cap W) = 1$ e una sua base e' $\mathcal{B}_{V \cap W} = \left\{ \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$.

Infine, usando la formula di Grassman, ricaviamo che

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

e quindi $V + W = \mathbb{R}^3$.

//

Esercizio 4

Se $P(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ allora $P'(x) = 3aX^2 + 2bX + c$,

e quindi $P'(-2) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot (-2)^2 + 2b(-2) + c = 12a - 4b + c = 0$.

Dunque $V = \{ aX^3 + bX^2 + cX + d \mid 12a - 4b + c = 0 \}$.

A meno di isomorfismi, possiamo identificare V con il

sottospazio $V' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \, 12a - 4b + c = 0 \right\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Si tratta di un iperpiano di $\mathbb{R}^4$ ed ha quindi dimensione 3.

Infatti $V' = \ker T$ dove $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e' l'applicazione

lineare $T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 12a - 4b + c$; visto che $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$,

si ha che $4 = \dim(\ker T) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\ker T) + 1 \Longrightarrow$

$\dim(V) = \dim(V') = \dim(\ker T) = 4 - 1 = 3$.

La matrice associata a T e' $A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. b, c, d sono le 3 variabili libere.

Una base di $V' = \ker(T)$ è data dalle soluzioni speciali.

$b=1$, $c=0$, $d=0$ $\quad 12a-4b+c=0 \implies 12a-4+0=0 \implies a=\frac{1}{3} \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b=0$, $c=1$, $d=0$ $\quad 12a-4b+c=0 \implies 12a-0+1=0 \implies a=-\frac{1}{12} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1/12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b=0$, $c=0$, $d=1$ $\quad 12a-4b+c=0 \implies 12a-0+0=0 \implies a=0 \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base di V' è $\mathcal{B}_{V'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La corrispondente base di V è

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \frac{1}{3}x^3 + x^2 ;\ -\frac{1}{12}x^3 + x ;\ 1 \right\}$$

//