



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso a Libera Scelta - 6 CFU

Fisica

Professore:

Prof. Alessio Micheli
Prof. Claudio Gallicchio

Autore:

Matteo Giuntori Filippo Ghirardini

Anno Accademico 2023/2024

Contents

1	Punto materiale	2
1.1	Vettore accelerazione	3
1.2	Vettore quantità di moto	3
1.3	Vettore momento angolare rispetto a un polo P	3
1.4	Coordinate polari	3
1.5	Versori polari (2D)	4
2	Forze	6
2.1	Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$	6
2.2	Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{z}$	6
2.3	Forza elastica $\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_v - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{ \vec{r} - \vec{r}_v }$	7
2.4	Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$	8
2.5	Data la legge oraria, trovare la forza	8
2.6	Discretizzare la variabile temporale	9
3	Reazioni vincolari	10
4	Energia	12
4.1	Energia cinetica	12
4.2	Energia meccanica	13
5	Sistemi di punti materiali	15
5.1	Forze interne	16
5.2	Equazione del moto per il momento angolare	17
6	Corpo rigido	19
6.1	Teorema fondamentale sul moto del corpo rigido	19
6.2	Momento angolare del corpo rigido	20
6.3	Condizione del "puro rotolamento"	21
6.4	Energia del corpo rigido	22
6.5	Lavoro forza peso sul corpo rigido	23
6.6	Momento risultante della forza peso su un sistema	24
7	Urto	26
7.1	Equazioni cardinali e teorema forze vive in forma impulsiva	26

1 Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D. Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse. Vettore posizione come funzione del tempo $t[s]$.

Esempio 1.0.1. Una molecola di ossigeno se sono interessato all'aerodinamica di una vettura. Un satellite attorno alla terra se ignoro le forze di marea.

Un **vettore posizione** è una funzione del tempo $t[s]$.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Osservazione 1.0.1. I versori cartesiani sono costanti

Definizione 1.0.1 (Legge oraria). Si definisce come legge oraria la funzione $t \mapsto \vec{r}(t)$.

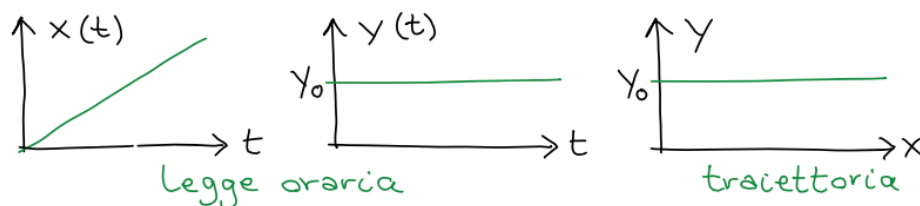
$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Dove $s(t)$ rappresenta la posizione dell'oggetto al tempo t , s_0 è la posizione iniziale dell'oggetto al tempo $t = 0$, v_0 è la velocità iniziale dell'oggetto, a è l'accelerazione dell'oggetto, t è il tempo trascorso.

Definizione 1.0.2 (Traiettoria). Il luogo geometrico di punti visitati dal punto materiale.

$$\{\vec{r}(t) \text{ per } t \in \mathbb{R}\}$$

Esempio 1.0.2. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ e $v_0 = 3m/s$, $y_0 = 5m$



Definizione 1.0.3. La **velocità istantanea** è la derivata della posizione rispetto al tempo.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Definizione 1.0.4. La **velocità media** è definita come il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo necessario per effettuarlo.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

In parole povere è una grandezza che ci dice con quale rapidità cambia la posizione di un punto rispetto al tempo nell'istante t .

Vettore velocità

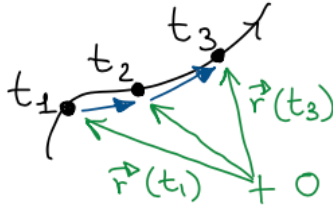
Derivata rispetto al tempo del vettore posizione e si indica come $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)[m/s]$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \end{aligned} \quad (1)$$

Per ricavare la forma esplicita uso le proprietà delle derivate (**linearità, Leibnitz**)

Esempio 1.0.3. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t\hat{x} + y_0\hat{y}$ abbiamo che $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0\hat{x}$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea").



$$\begin{aligned}
 L &= ||\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|| + ||\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|| + ||\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)|| + \dots \\
 &= \sum_i ||\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)|| \text{ per } |t_{i+1} - t_i| \text{ "piccolo"} \\
 &= \sum_i \left\| \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} ||\dot{\vec{r}}(t)||
 \end{aligned}$$

Esempio 1.0.4. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$ $||\dot{\vec{r}}(t)|| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0|$ $L = |v_0| \cdot (t_{fin} - t_{in})$
 Il vettore è costante quindi facendo la derivata torna zero. Con la velocità si calcola lo spazio percorso ("integrale di linea"). La differenza fra le posizioni e la differenza dei tempi è il rapporto incrementale in caso gli intervalli siano sufficientemente piccoli, da qui si ottiene l'integrale.

1.1 Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità e si indica con $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t) [m/s^2]$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \quad (2)$$

Esempio 1.1.1. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0 t^2, v_0 t, 0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (a_0 t, v_0, 0)$ $\ddot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$

Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determinata la legge oraria è formulata in termini di accelerazione.

Definizione 1.1.1. L'**accelerazione media** è il rapporto di variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene tale variazione

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

1.2 Vettore quantità di moto

Il prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (m\dot{x}(t), m\dot{y}(t), m\dot{z}(t)) = m\dot{x}(t)\hat{x} + m\dot{y}(t)\hat{y} + m\dot{z}(t)\hat{z}$$

Esempio 1.2.1. Prendiamo un punto di massa 2kg e velocità 3m/s lungo \hat{x} .

$$p_x(t) = 2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad p_y(t) = p_z(t) = 0.$$

Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di più punti materiali.

1.3 Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_p(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

Dove \vec{r}_p è il vettore posizione di p, mentre con $\dot{\vec{r}}(t)$ si fa il prodotto vettoriale.

Esempio 1.3.1. $\vec{r}_p = (l_0, 0, 0)$ $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$

$$\vec{L}_p = m[(v_0 t - l_0)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times (v_0\hat{x}) = m(v_0 t - l_0)v_0\hat{x} \times \hat{x} + m y_0 v_0 \hat{y} \times \hat{x} = m y_0 v_0 (-\hat{z}) = (0, 0, -m y_0 v_0)$$

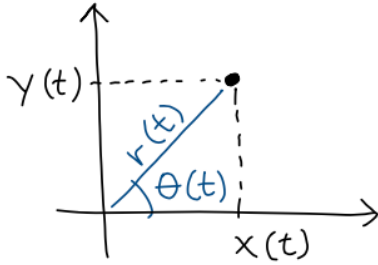
Ricorda che $\hat{x} \times \hat{x} = 0$ e $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Il momento angolare dice quanta inerzia ha un oggetto in una rotazione (descrizione sommaria).

Il polo P è parte della definizione. È una scelta! Il risultato dipende dal polo. Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

1.4 Coordinate polari

Un metodo per rappresentare delle coordinate x, y andando a misurare prima la distanza dall'origine e poi si va a vedere quanto vale l'angolo fra questo segmento dall'asse x, utilizzando seno e coseno.



$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ \text{tg}(\Theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$

Note 1.4.1. Attenzione, notare la la tg in $\text{tg}\Theta(t)$ si mette se si prende la funzione inversa, in caso contrario, per calcolare la $\Theta(t)$ bisogna fare:

$$\Theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \cdot \tan^{-1}$$

Esempio 1.4.1. Esempi di rappresentazione di coordinate in coordinate polari.

$$x = 0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = \pi/2$$

$$x = 0, y = -l_0 < 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = -\pi/2$$

$$x = l_0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}l_0, \Theta = \pi/4$$

1.5 Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\Theta}(t)$ ortogonale. Si esprime facilmente in coordinate polari.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \Theta(t), r(t) \sin \Theta(t)) = r(t)(\cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y})$$

Ma $\|\vec{r}(t)\| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco $\hat{r}(t) = \vec{r}(t)/\|\vec{r}(t)\| = \cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y}$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è:

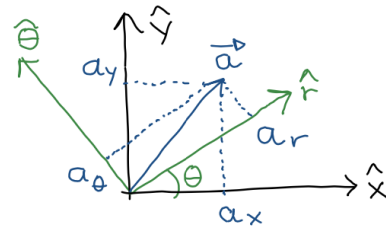
$$\hat{\Theta}(t) = -\sin \Theta(t)\hat{x} + \cos \Theta(t)\hat{y} \quad \text{infatti} \quad \hat{r} \cdot \hat{\Theta} = c \cdot (-s) + s \cdot c = 0$$

Note 1.5.1. Non c'è legame fra Θ e $\hat{\Theta}$ è solo una convenzione.

Le trasformazioni inverse invece si fanno come segue (verifico per sostituzione):

$$\hat{y} = \cos \Theta(t)\hat{r} - \sin \Theta(t)\hat{\Theta} \quad \hat{y} = \sin \Theta(t)\hat{r} + \cos \Theta(t)\hat{\Theta}$$

Possono quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\Theta\hat{\Theta}$ con le componenti polari a_r, a_Θ . Per evitare ambiguità non scriviamo (a_r, a_Θ) e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.



A differenza dei versori cartesiani quelli polari dipendono dal tempo per costruzioni.

$$\dot{\hat{r}}(t) = \frac{d}{dt}[\cos \Theta(t)\hat{x} + \sin \Theta(t)\hat{y}] = -\sin \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)\hat{x} + \cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)\hat{y}$$

Dove $\cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)$ si applica la derivata della somma, Leibnitz, funzione composta.

$$= \dot{\Theta}(t) \cdot \hat{\Theta}(t) \quad (\text{confronto l'espressione di } \hat{\Theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\dot{\Theta}(t)\hat{r}(t)$.

Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$$

Dove abbiamo che $\vec{r}(t)$ è il vettore, $r(t)$ è una coordinata polare, $\hat{r}(t)$ è il versore polare.

$$\dot{\vec{r}}(r) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\hat{r}}(t)$$

Dove la parte $\dot{\vec{r}}(r)$ è la velocità radiale.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\hat{r}}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\hat{r}}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\hat{r}}(t)]\hat{\theta}$$

Nel quale abbiamo che la parte $r(t)\dot{\hat{r}}(t)^2$ si chiama **accelerazione centripeta**, mentre $2\dot{r}(t)\dot{\hat{r}}(t)$ si dice **accelerazione di Coriolis**.

Note 1.5.2. Una piccola nota di calcolo goniometrico che può servire nella risoluzione di problemi con coordinate polari e versori.

$$\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{ax}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} \text{ con } (a, b, x > 0)$$

$$\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{ax}\right)\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} \text{ con } (a, b, x > 0)$$

Sappiamo che l'identità fondamentale della tangente inversa è $\tan^{-1}(x) = \Theta \Rightarrow x = \tan(\Theta)$ e sappiamo anche che $\tan(\Theta) = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}$. Questa cosa si ricava immaginando un triangolo rettangolo con un angolo di Θ e i lati b e ax . Quindi, il seno ed il coseno di Θ sono come scritti sopra.

2 Forze

La legge oraria $\vec{F}(t)$ di un punto materiale di massa m è determinata dalla soluzione di una equazione del moto detta **seconda legge di Newton**

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

\vec{F}_1 sono le **forze** [$kg \cdot m/s^2 \equiv N$] (N è l'unità di misura, Newton) agenti sul punto materiale: sono determinate empiricamente. L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo** (si chiamano così perché indicano le condizioni ai bordi del dominio), ad esempio $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ (con questa cosa stiamo dicendo che per descrivere un moto di un sistema dobbiamo sapere in un tempo dove il sistema si trova e la sua velocità).

Questa è un'equazione che va a descrivere fenomeni da dimensioni incredibilmente piccole a incredibilmente grandi.

Se la somma (detta **risultante** delle forze)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se tutte $\vec{F}_i = 0$ (**prima legge di Newton** o "principio di inerzia di Galileo"). Se un corpo non è soggetto a forze esterne mantiene il suo moto rettilineo uniforme. Questa cosa collega la proprietà di simmetria degli oggetti alla traslazione dello spazio.

2.1 Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} & \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \\ m\ddot{\vec{r}}(t) &= F_0\hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proietto su una base per ottenere 3 equazioni scalari. Mi servono $2 \times 3 = 6$ **condizioni al bordo** per risolvere. Ad esempio condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) & \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t \\ z(t) = z_0 + v_{0z}t \end{cases} & \Rightarrow \text{caso generale } \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \end{aligned}$$

Con t che rappresenta il **moto uniformemente accelerato**

2.2 Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{z}$

Usata per esempio in prossimità della superficie terrestre. Con m massa del punto materiale dell'oggetto in cui si applica, mentre \hat{z} ortogonale alla superficie. $g \equiv 9,8 m/s^2$, dipende da M_T , variazioni locali.

Esempio 2.2.1. Grave che cade da altezza h .

$$m\ddot{\vec{r}}(r) = -mg\hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = h \cdot \hat{z}, \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 \text{ (oggetto parte da fermo)}$$

$$\text{Proietto } m\ddot{z}(t) = -mg \quad \dot{z}(t) = -g(t - t_0) \quad z(t) = h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Si sostituisce le costanti della soluzione per verificare che siano verificate le condizioni ai bordi.

Esempio 2.2.2. Problema del proiettile.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} \text{ (equazione del moto)} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e } \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos \Theta \hat{x} + v_0 \cdot \sin \Theta \hat{z} \quad \text{ovver } \vec{v}_0 = v_0(\cos \Theta, \sin \Theta) \quad ||\vec{v}_0|| = v_0$$

Qui andiamo a considerare quindi una certa velocità v_0 con un angolo Θ , e andiamo a definire la velocità \vec{v}_0 . Proiezione lungo \hat{y} banale: $\ddot{y}(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & \dot{x}(t) = v_0 \cos \Theta \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos \Theta & x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -g & \dot{z} = v_0 \sin \Theta - g(t - t_0) \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin \Theta & z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

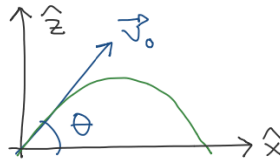
Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) / (v_0 \cos \Theta) \quad z = v_0 \sin \Theta x / (v_0 \cos \Theta) - \frac{1}{2}g x^2 / (v_0 \cos \Theta)^2 \quad z = v_0 \tan \Theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \Theta} x^2$$

Osservazione 2.2.1. $\frac{1}{\cos^2 \Theta} = \frac{\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} = 1 + \tan^2 \Theta \quad z = x \tan \Theta - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \Theta) x^2$ (Parabola)

Punto di atterraggio: sistema con $z = 0, x = 0$ (banale) $x = \frac{2v_0^2}{g} \tan \Theta / (1 + \tan^2 \Theta)$

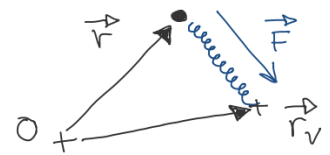


Esempio proiettile

2.3 Forza elastica $\vec{F} = -k(|\vec{r} - \vec{r}_v| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$

Chiamata anche **legge di hooke**. k è la costante elastica espressa in $[N/m]$ del materiale. $l_0[m]$ lunghezza a riposo della "molla", dipende dal vettore posizione \vec{r} ("posizionale").

$-\frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$ è il versore parallelo alla molla, cioè la distanza fra il punto di destinazione ed il vincolo, si usa perché consente di calcolare la forza elastica F nella direzione esatta della deformazione, anziché utilizzare solo la magnitudo della deformazione $((|\vec{r} - \vec{r}_v| - l_0))$.



La forza elastica è tanto più intensa quanto è estesa la molla, e questa relazione fondamentale è lineare. Una versione più classica della legge di hooke è:

$$\vec{F} = kx$$

Esempio 2.3.1. Oscillatore unidimensionale $\vec{r}_v = 0$.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}, \quad x(t) \geq 0$$

$$\vec{F} = -k(|x - 0| - l_0) \frac{x - 0}{|x - 0|} \hat{x} = -k(|x| - l_0) \frac{x}{|x|} \hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x}(t) = -k[x(t) - l_0]$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \Omega \equiv \sqrt{k/m}$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)$$

$\Omega[\text{rad/s}]$ la **frequenza angolare** $\Omega/2\pi[\frac{1}{s} = \text{Hz}]$ è la **frequenza** $T = 2\pi/\Omega[\text{s}]$ è il **periodo**, infatti $\Omega \cdot T = 2\pi$

Trovo A e B imponendo che la soluzione rispetti le condizioni al bordo, es: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \xrightarrow{b} 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B\Omega \cos(\Omega \cdot 0) \rightarrow 0 = 0 + B\Omega \Rightarrow B = 0$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) \xrightarrow{a} x_0 = l_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \rightarrow x_0 = l_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0) \cos(\Omega t)$$

2.4 Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$

Modello approssimato per le basse velocità. Abbiamo che $-\gamma[N/(m/s)]$ è la costante del materiale viscoso. Il meno è dato perché è una forza che si oppone linearmente ad una velocità.

Esempio 2.4.1. Proiettile in gel balistico.

$$m\ddot{x}(t) = \gamma t \dot{x}(t) \text{ con } \dot{x}(0) = v_0$$

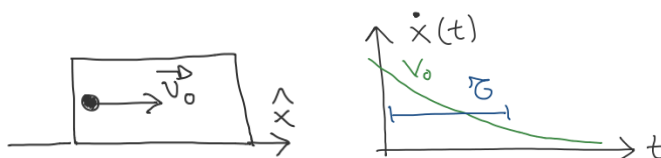
Pongo poi $u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{u}t = -\frac{1}{\tau}u(t)$ con $u(0) = v_0$ e $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}[\frac{1}{s}]$

Soluzione generale $u(t) = Ae^{-t/\tau} \Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$.

Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \text{ ovvero } \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

rallentamento esponenziale.



Situazione proiettile

Soluzione completa gel

2.5 Data la legge oraria, trovare la forza

$r(t) = R, \Theta(t) = \Omega t$ **moto circolare uniforme**

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} \quad \hat{r} = \cos(\Theta(t))\hat{x} + \sin(\Theta(t))\hat{y}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [r\ddot{\hat{r}} - r\dot{\hat{r}}^2]\hat{r} + [r\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Dalla legge oraria ho: $\dot{x}(t) = 0, \ddot{r}(t) = 0, \dot{\Theta} = \Omega, \ddot{\Theta}(t) = 0 \Rightarrow$ in questo caso $\ddot{\vec{r}}(t) = -R\Omega^2\hat{r}$.

La risultante \vec{F} delle forze deve essere tale che $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR\Omega^2\hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR\Omega^2\hat{r}$.

La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (**forza centrale** o **forza centripeta**).

Ottengo \vec{F} solo per questa legge oraria.

Integrazione numerica delle equazioni del moto.

2.6 Discretizzare la variabile temporale

Calcolo al "primo ordine" ("metodo di eulero"), ci sono anche molti altri algoritmi come per esempio Runge-Kutta, la scelta dipende dal problema.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_n \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t \quad \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} \simeq \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} \simeq \frac{\frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\delta t} - \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

L'equazione di Newton diventa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \vec{F}_{i-1}/m \quad \vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

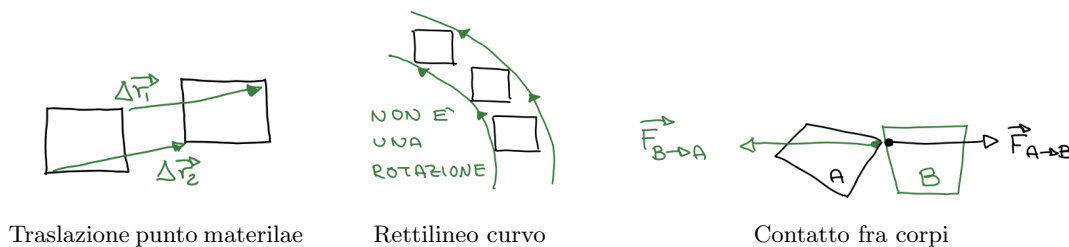
Servono 2 condizioni al bordo \vec{F}_i può dipendere da $t_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i$

3 Reazioni vincolari

Estendiamo il modello del "punto materiale" all'interazione di corpi estesi in moto traslatorio $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_2$ per ogni punto posso studiare una qualsiasi $\vec{r}(t)$

- La **traslazione** può avvenire su una traiettoria curva, parleremo di **rotazione** più avanti.
- Consideriamo il **contatto** tra punti materiali, corpi estesi, superfici.

Le forze di contatto ("reazioni vincolari") non sempre hanno una espressione esplicita e vengono determinate imponendo dei vincoli alle equazioni del moto, ad esempio che un punto segua una data traiettoria.



Esempio 3.0.1. $x(t) \equiv x_0$

La "terza legge di Newton" ("azione e reazione") stabilisce che $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$

Esempio 3.0.2. Massa su una bilancia in presenza di forza peso.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

In questo caso il **Vincolo** è:

$$\dot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = +mg\hat{z}$$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = mg$ (che noi chiamiamo comunemente peso).

Esempio 3.0.3. Massa su bilancia in ascensore accelerato.

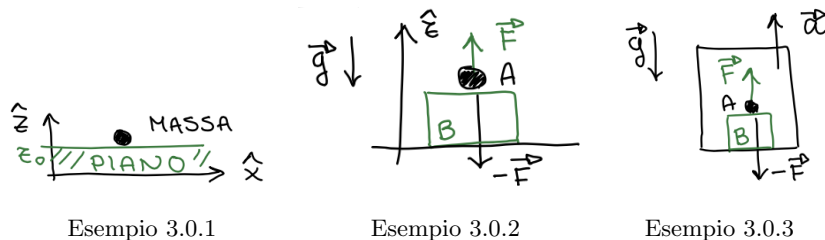
$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

Ciò che cambia ora è il suo **Vincolo** visto che si sta accelerando verso l'alto:

$$\ddot{\vec{r}}(t) \equiv a \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{F} = m(a + g)\hat{z}$$

La bilancia misura $\|\vec{F}\| = m(a + g)$. La bilancia allora misura una forza peso maggiore in un ascensore (stiamo usando l'equazione "al contrario").

Note 3.0.1. Un punto materiale si "solleva", si "distacca" da una superficie quando la reazione vincolare va a zero.



Scomponiamo la reazione vincolare nella direzione

- ortogonale: "reazione normale" \vec{N} .
- parallelo: "forza di attrito" \vec{F}_a

ad una superficie. Con una superficie **liscia** abbiamo $\vec{F}_a = 0$, non c'è movimento relativo al punto di contatto. **Attrito statico**, \vec{F}_a da determinare con vincoli. Condizione:

$$\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

Differenza di velocità \vec{v} al punto di contatto. **Attrito dinamico**:

$$\vec{F}_a = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

μ_s, μ_d : coeff. di attrito, numeri primi. $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ diretto in versione opposta alla velocità.

Esempio 3.0.4. Massa su un piano inclinato liscio e fisso.

$$\hat{x}' = \cos \alpha \cdot \hat{x} - \sin \alpha \cdot \hat{z} \quad \hat{z}' = \sin \alpha \cdot \hat{x} + \cos \alpha \cdot \hat{z} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{N}$$

- Proietto lungo \hat{z}' : $m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N$
- Proietto lungo \hat{x}' : $m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha$.

Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \quad \ddot{x}'(t) = g \cdot \sin \alpha$

Visto che $\sin \alpha < 1$ quindi l'accelerazione lungo il piano è $< g$.

Esempio 3.0.5. Massa ferma su piano inclinato scabro.

$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

La scelta fra $-F_a$ o $+F_a$ è indifferente, l'unica cosa che cambia è nel risultato poi sarà diverso il segno di F_a , la coerenza da tenere è riguardante il disegno, se si disegna in una determinata direzione, si cerca di mettere il segno uguale.

- Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$.
- Vincolo: $x'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{x}'(t) = 0 \Rightarrow F_a = mg \sin \alpha$

Qual'è il massimo valore di α ?

$$\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \Rightarrow mg \sin \alpha \leq \mu_s \cdot mg \cos \alpha \quad \tan \alpha \leq \mu_s \quad \alpha \leq \arctan \mu_s$$

Esempio 3.0.6. Massa scivola su piano inclinato scabro.

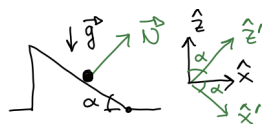
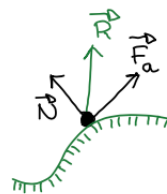
$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

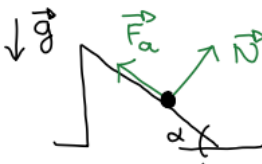
Forza di attrito dinamico:

$$F_a = \mu_d N \Rightarrow m\ddot{x}'(t) = mg \sin \alpha - \mu_d \cdot mg \cos \alpha \quad \ddot{x}'(t) = g(\sin \alpha - \mu_d \cdot \cos \alpha)$$

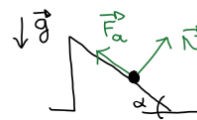
Accelerazione costante, minore che senza attrito.



Esempio 3.0.4



Esempio 3.0.5



Esempio 3.0.6

4 Energia

4.1 Energia cinetica

Definiamo **energia cinetica** di un punto materiale come:

$$K(t) = \frac{1}{2}m||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \quad [k] = kg \cdot m^2/s^2 \equiv J'' \text{ Joule''}$$

La parte di $\frac{1}{2}$ sta per convenzione/comodità, le prime definizioni nel 900 infatti non lo aveva.

Esempio 4.1.1. $\vec{r}(t) = v_0 \cap x \quad k = \frac{1}{2}mv_0^2$

Definiamo **lavoro** di una forza $\vec{F}(t)$ applicata nella posizione $\vec{r}(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad [L] = s \cdot N \cdot \frac{m}{s} = J$$

Esempio 4.1.2. $\vec{r} = v_0 \hat{x} \quad \vec{F}(t) = \alpha t \hat{x} + \beta \hat{y} \quad L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt (\alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}) \cdot v_0 \hat{x} = \alpha v_0 \frac{t_1^2 - t_0^2}{2}$

$$L(t_0, t_1) = \vec{F}(t) \cdot \vec{d}_{t_0, t_1} \cdot \cos(\Theta) \quad \text{con } \vec{d}_{t_0, t_1} \text{ spostamento dell'oggetto}$$

Teorema 4.1.1 (Delle forze vive). Per un punto materiale, la variazione di energia cinetica è pari al lavoro delle forze.

$$K(t_1) - K(t_0) = L_1(t_0, t_1) + L_2(t_0, t_1) + \dots$$

Segue dalla seconda legge di Newton:

$$\begin{aligned} \sum_i d\alpha_i(t) &= \sum_i dt \cdot \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \left(\sum_i \vec{F}_i(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= dt \cdot m \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \cdot m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \\ &= \frac{1}{2} m d ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \text{ e integro membro a membro.} \end{aligned}$$

Se la forza dipende solo dalla posizione di applicazione $\vec{r}(t)$, ma non esplicitamente dal tempo t , si dice **posizionale**. Questo vuol dire che, se immaginiamo un punto materiale che fa un determiante legge oraria, man mano che il punto materiale si muove il suo valore cambia, ed anche la forza cambia, quindi cambia in base alla posizione.

Esempio 4.1.3. $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \alpha x(t) \hat{x} + \beta y(t) \hat{y}$

La dipendenza dal tempo è determinata dall'eventuale movimento della posizione di applicazione. È ben definita $\vec{F}(\vec{r}) \forall t$.

Per una forza posizione il lavoro si semplifica e diventa:

$$\begin{aligned} L(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= \sum_i \Delta t_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t_i} = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = L_e \text{ "integrale di lena"} \end{aligned}$$

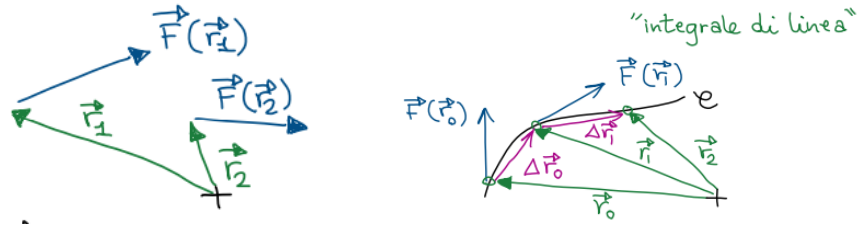
Dipende dalla traiettoria, non dalla legge oraria.

Esempio 4.1.4. $\vec{F}(x) = -kx \hat{x} \quad \vec{r}(t) = v_0 \cdot \cos(\Omega t) \hat{x}$

$$t_0 = 0, \vec{r}(t_0) = x_0 \hat{x}, \quad t_1 = \frac{\pi}{\Omega}, \quad \vec{r}(t_1) = x_0 \cdot (-1) \hat{x}$$

$$L(t_0, t_1) = \int_{x_0}^{-x_0} dx \hat{x} \cdot (-kx \hat{x}) = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{-x_0} = -kx_0^2 \text{ non dipende da } \Omega$$

Osservazione 4.1.1. Per calcolare l'integrale di linea può comunque convenire la formula $\int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ eventualmente usando una legge oraria più semplice con medesima traiettoria.



Esempio 4.1.5. $\vec{F}(\vec{r}) = -kx\hat{x}$ $\vec{r}(t) = R\vec{r}$, $\Theta(t) = \Omega t \Rightarrow x(t) = R \cos(\Omega t)$
 $t_0 = 0, \Theta(t_0) = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}, \Theta(t_1) = \frac{\pi}{2} \quad \dots d\vec{r} \dots \quad \dot{\vec{r}}(t) = R\Omega\hat{\Theta} = -R\Omega \sin(\Omega t)\hat{x} + R\Omega \cos(\Omega t)\hat{y}$

$$\begin{aligned} L(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_0^{\pi/2\Omega} [-kR \cos(\Omega t)\hat{x}] \cdot [-R\Omega \sin(\Omega t)\hat{x} + R\Omega \cos(\Omega t)\hat{y}] \\ &= \int_0^{\pi/2\Omega} kR^2\Omega \frac{1}{2} \sin(2\Omega t) (\equiv \alpha) = kR^2\Omega \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{2\Omega} \sin \alpha = \frac{1}{4}kR^2[-\cos \alpha] = \frac{1}{2}kR^2 \end{aligned}$$

Se la forza è **uniforme** lungo il percorso abbiamo

$$L(t_0, t_1) = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} = \vec{F} \cdot [\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)] \text{ (spostamento)}$$

Esempio 4.1.6. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(z) = -mg\hat{z}$ (uniforme ovunque).
 $\vec{r}(t) = v_0 t \hat{z} \quad t_0 = 0, \vec{r}(t_0) = 0 \quad t_1 = \frac{h}{v_0} \vec{r}(t_1) = h\hat{z}$

$$L(t_0, t_1) = \int_0^{hat} dz \hat{z} \cdot (-mg\hat{z}) = -mgh$$

Una forza posizione si dice **conservativa** e il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni iniziali e finali. Questo accade se e solo se esiste una funzione $u(\vec{r})$ detta **potenziale** tale che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}u(\vec{r}) \equiv \left(-\frac{d}{dx}u(\vec{r}), -\frac{d}{dy}u(\vec{r}), -\frac{d}{dz}u(\vec{r})\right)$$

In tal caso $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = u(\vec{r}_0) - u(\vec{r}_1)$

- Forza peso: $u(\vec{r}) = mgz \quad \frac{d}{dx}u(\vec{r}) = \frac{d}{dy}u(\vec{r}) = 0 \quad \frac{d}{dz}u(\vec{r}) = mg \Rightarrow \vec{\nabla}u(\vec{r}) = (0, 0, mg) = mg\hat{z} \Rightarrow$

$$\vec{F} = -mg\hat{z}$$

- Oscillatore unidimensionale: $u(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \frac{d}{dy}u(\vec{r}) = \frac{d}{dz}u(\vec{r}) = 0 \quad \frac{d}{dx}u(\vec{r}) = kx \Rightarrow \vec{\nabla}u(\vec{r}) = (kx, 0, 0) = kx\hat{x} \Rightarrow$

$$\vec{F} = -kx\hat{x}$$

Osservazione 4.1.2. Una forza non posizionale (es. reazioni vincolari) non può essere conservativa.

4.2 Energia meccanica

Il potenziale è definito "a meno di una costante" perché $-\vec{\nabla}[u(\vec{r}) + u_0] = -\vec{\nabla}u(\vec{r})$. Es: $mg(z - z_0)$ Per un punto materiale, la somma di energia cinetica e dei potenziali delle forze (conservative) alle quali è soggetto (calcolati nella sua posizione) si dice **energia meccanica**.

$$E(t) = K(t) + u_1(\vec{r}(t)) + u_2(\vec{r}(t)) + \dots$$

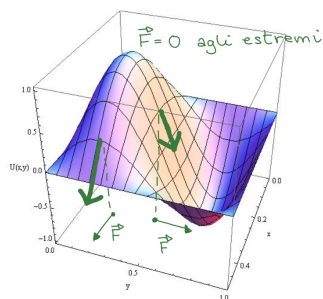
Dal teorema delle forze vive segue che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze **non conservative**

$$E(t_1) - E(t_0) = L_1^{NC}(t_0, t_1) + L_2^{NC}(t_0, t_1) + \dots \Rightarrow L(t_0, t_1) = E(t_1) - E(t_0)$$

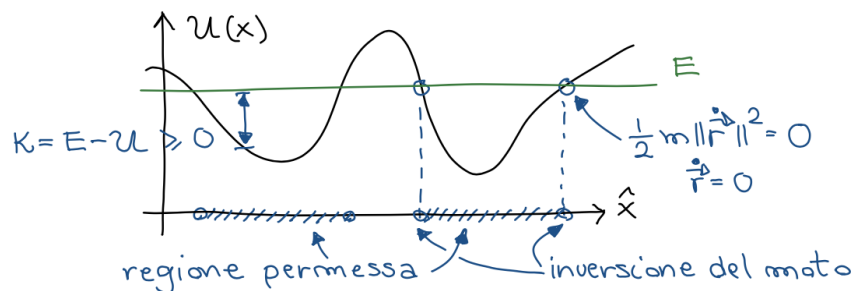
Se $L_i^{NC} = 0$ l'energia meccanica è **costante** nel tempo ("conservata").

$$E_{mecc} = E_{cin} + E_{pot} \Rightarrow \Delta E_{mecc} = E_{mecc, finale} - E_{mecc, iniziale}$$

Il profilo del potenziale visualizza le forze.



Il profilo di potenziale visualizza le regioni dove il moto è permesso se l'energia è conservata.



Osservazione 4.2.1. Il "tunneling" tra regioni permesse disgiunte è possibile per atomi e particelle subatomiche secondo le leggi della **meccanica quantistica**.

5 Sistemi di punti materiali

Consideriamo un insieme ("sistema") di punti materiali. Deduciamo delle equazioni del moto e leggi di conservazione come conseguenza delle leggi di Newton.

- Sistemi di punti molto molto numerosi possono dare origine a fenomeni emergenti (es. sistemi biologici) **"More is different"**
- Concetti utili sono introdotti da teorie non riduzionistiche.

Punti $\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ con masse $\{m_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ etc. Risultate delle forze su ogni punto $\{\vec{F}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Quantità definite per il sistema:

- **Massa**

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$$

- **Vettore quantità di moto**

$$\vec{P}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{P}_\alpha(t)$$

- **Vettore momento angolare rispetto ad un polo P**

$$\vec{L}_P(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{L}_{P,\alpha}(t) \quad \text{stesso P per ogni } \alpha$$

- **Energia cinetica** $k(t) = \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha(t)$

- **Energia meccanica** $E(t) = \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha(t)$

Nel caso di sistemi estremamente numerosi (es. atomi di gas, elettroni in un metallo, granelli di sabbia in una duna), può convenire considerare il sistema **continuo**.

- $n(\vec{r})$: numero di punti in un volumetto V attorno a \vec{r} , diviso per V $[n] = m^{-3}$
- $g(\vec{r})$: massa in un volumetto V attorno a \vec{r} diviso per V (**"densità"**) $[g] = kg \cdot m^{-3}$

Osservazione 5.0.1. Il risultato non deve dipendere dal valore preciso di V , ma l'ordine di grandezza dipende dal problema (es. densità della terra...?)

Definizione 5.0.1. Definisco **centro di massa** del sistema di punti di materiali il punto geometrico

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha(t)$$

Esempio 5.0.1. $\vec{r}_1(t) = v_0 t \hat{x} + y_0 \hat{y}$ $m_1 = m$ $\vec{r}_2(t) = -2v_0 t \hat{x} + 2y_0 \hat{y}$ $m_2 = 3m$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m+3m} [(mv_0 t - 6mv_0 t)\hat{x} + (my_0 + 6my_0)\hat{y}] = \frac{1}{4m} [-5mv_0 t \hat{x} + 7my_0 \hat{y}] = -\frac{5}{4}v_0 t \hat{x} + \frac{7}{4}y_0 \hat{y}$$

Osservazione 5.0.2. Il CM non è un punto fisico, può trovare fuori dalla regione spaziale occupata dal sistema.

Posso indicare ogni punto materiale con la posizione relativa al CM:

$$\vec{r}'_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha - \vec{r}_{CM}(t)$$

Osservo che

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^N [n_\alpha \vec{r}_\alpha(t) - m_\alpha \vec{r}_{CM}(t)] = M \vec{r}_{CM}(t) - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \vec{r}_{CM}(t) = 0$$

Esprimo il vettore quantità di moto:

$$\vec{p}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\dot{\vec{r}}_{CM} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)] = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \right) \dot{\vec{r}}_{CM}(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \right) = M \dot{\vec{r}}_{CM}(t)$$

ma non è un punto materiale.

Esprimo il vettore momento angolare rispetto a P:

$$\begin{aligned} \vec{L}_p(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\vec{r}_{CM}(t) + \vec{r}'_{\alpha}(t) - \vec{r}_p(t)) \times (\dot{\vec{r}}_{CM} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \{ (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) + (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) + \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \} \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) \right) + (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \right) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) = M (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) \end{aligned}$$

$M (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t)$ del CM. $\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)$ rispetto al CM. Ma non è un punto materiale.

Esprimo l'energia cinetica:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\dot{\vec{r}}_{\alpha}(t)\|^2 = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)) \cdot (\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} [\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \|\dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)\|^2 + 2 \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \right) \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)\|^2 + 2 \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_{CM}(t) = \frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)\|^2 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} M \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2$ dal CM e $\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)\|^2$ è rispetto al CM. Ma non è un punto materiale.

5.1 Forze interne

Chiamiamo **forze interne** quelle esercitate su un punto materiale su resto del sistema e **forze esterne** le altre. Ogni risultante diventa:

$$\vec{F}_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\alpha}^E(t)$$

Osservazione 5.1.1. Per la terza legge di Newton $\vec{F}_{\alpha\beta}(t) = -\vec{F}_{\beta\alpha}(t)$

Definisco **vettore momento di una forza applicata in $\vec{r}(t)$ rispetto al polo p** la quantità:

$$\vec{M}_p(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \vec{F}(t) \quad [\vec{M}_p] = N \cdot m \text{ (non si usa J)}$$

Osservazione 5.1.2. Il momento totale delle forze interne è nullo.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha=1}^N &= (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\text{dummy indices}) [(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\beta\alpha}(t)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) - (\vec{r}_\beta(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t) \text{ (per la terza legge) }] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [(\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_\beta(t)) \times \vec{F}_{\alpha\beta}(t)] = 0
 \end{aligned}$$

Per la simmetria $\vec{F}_{\alpha\beta}(t)$ deve essere parallela al vettore che congiunge $\vec{r}_\alpha(t)$ con $\vec{r}_\beta(t)$ quindi il prodotto vettoriale è nullo.

Le equazioni del moto per la **quantità di moto**:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{p}}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^N [\sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_\alpha^E(t)] \\
 M\ddot{\vec{r}}_{CM}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [\vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\beta\alpha}(t)] + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t)
 \end{aligned}$$

Abbiamo che $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N$ è il dummy indices, mentre $[\vec{F}_{\alpha\beta}(t) + \vec{F}_{\beta\alpha}(t)] = 0$ come visto sopra, quindi la **prima equazione cardinale** diventa:

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^E(t)$$

Esempio 5.1.1. $x_{CM}(t) = (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t))/(m_1 + m_2)$ $(m_1 + m_2)\ddot{x}_{CM}(t) = F - F_{a1} + F_{a2}$
Sommo tutte le forze applicate al sistema $(F - F_{a1} + F_{a2})$.

Esempio 5.1.2. $\dot{x}_2(t_0) = v_0$ $\dot{x}_1(t_0) = 0$ $\dot{x}_{CM} = m_2 \dot{x}_2(t_0)/(m_1 + m_2)$
 $(m_1 + m_2)\ddot{x}_{CM}(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_{CM}(t) = \dot{x}_{CM}(t_0)$

Le due masse oscillano ma il CM compie un moto rettilineo uniforme.

5.2 Equazione del moto per il momento angolare

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}}_p(t) &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha [(\dot{\vec{r}}_\alpha(t) - \dot{\vec{r}}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_\alpha(t) + (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \ddot{\vec{r}}_\alpha(t)] \\
 &= -\dot{\vec{r}}_p(t) \times (\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha(t)) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha(t)) \\
 &= -\dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{p}(t) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_\alpha(t)
 \end{aligned}$$

Siccome il momento totale delle forze interne è nullo abbiamo che:

$$\dot{\vec{L}}_p(t) = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_\alpha^E(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{P}(t)$$

$$\dot{\vec{L}}_p(t) = \vec{M}_p^E(t) - \dot{\vec{r}}_p(t) \times \vec{P}(t) \text{ Seconda equazione cardinale}$$

Esempio 5.2.1. Esempio del **campo centrale**. $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{\|\vec{r}\|} \cdot \hat{r}$ *polo : 0*

$$\vec{L}_0(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}}(t) = mr(t)\hat{r} \times (\dot{r}(t)\hat{r} + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta}) = mr(t)^2\dot{\theta}(t)\hat{z}$$

$$\dot{\vec{L}}_0(t) = (\dot{\vec{r}}(t) - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{F} = r(t)\hat{r} \times \left(-\frac{k}{\|\vec{r}\|}\hat{r}\right) = 0$$

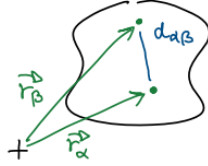
Il momento angolare è costante ("**conservativo**") $\Rightarrow r(t)^2\dot{\theta}(t) = L_0(t_0)$ $\dot{\theta}(t) = L_0(t_0)/r(t)^2$.
Questo vuol dire che la **la velocità angolare aumenta quando $r(t)$ decresce**

6 Corpo rigido

Descriviamo un corpo rigido come un sistema di punti materiali, le distanze tra i quali sono costanti nel tempo. Punti:

$$\{\vec{r}_{\alpha=1}^N\} \quad \{m_{\alpha}\}_{\alpha=1}^N \quad d_{\alpha\beta} = \|\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_{\beta}(t)\| = \text{const}$$

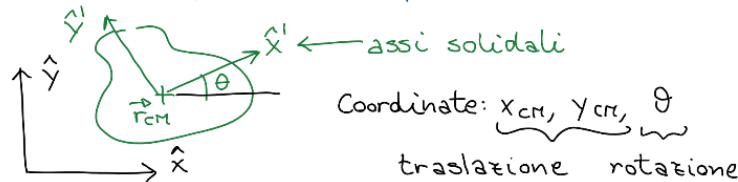
Le leggi orarie $\vec{r}_{\alpha}(t)$ dei punti del sistema sono vincolate da questa condizione. Detto ciò invece di $3N$ coordinate indipendenti ne bastano 6: $\vec{r}_{CM}(3)$ e 3 angoli. Per il moto planare: $\vec{r}_{CM}(2)$ e 1 angolo.



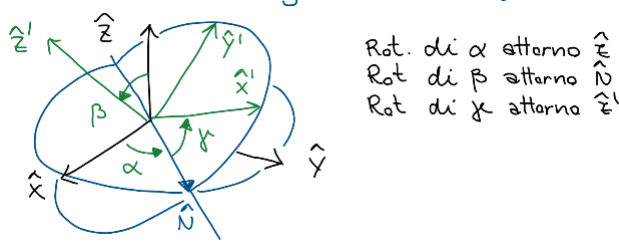
Un punto geometrico determinato solo dalle posizioni \vec{r}_{α} , come il centro di massa, ha pure distanze costanti da tutti gli \vec{r}_{α} , quindi $\|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{\alpha}(t)\| = \text{const}$. Si dice che tale punto è **solidale** al corpo rigido.

Due punti $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ solidali al C.R. definiscono un **vettore solidale** $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Conviene introdurre un sistema di **assi solidali**, $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ in cui le coordinate dei vettori solidali sono costanti.

In Geometria planare (quella che usiamo in questo corso):



Nella Geometria 3D (angoli di eulero):



Rot. di α attorno \hat{z}
 Rot. di β attorno \hat{N}
 Rot. di γ attorno \hat{z}'

6.1 Teorema fondamentale sul moto del corpo rigido

Il teorema fondamentale sul moto del corpo rigido dice che:

Teorema 6.1.1. Ad ogni istante di tempo esiste ed è unico il vettore $\vec{w}(t)$, detto **vettore velocità angolare**, tale che, dati due punti qualunque P_1, P_2 solidali al C.R.

$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) + \vec{w}(t) \times [\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)]$$

Dove $\vec{w}(t)$ è lo stesso per tutti i punti.

Sviluppiamo la teoria in modo generale, ma in questo corso incontriamo solo i moti planari dove:

$$\vec{r}_{\alpha}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + 0 \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{w}(t) = w(t)\hat{z}$$

Esempio 6.1.1. $t = t_0, \vec{w}(t_0) = w\hat{z}, \dot{\vec{r}}_1(t_0) = v_0\hat{x}$

$$\dot{\vec{r}}_2(t_0) = v_0\hat{x} + w\hat{z}x[L\hat{x} + L\hat{y}] = v_0\hat{x} + wL\hat{y} - wL\hat{x} = (v_0 - wL)\hat{x} + wL\hat{y}$$

Osservazione 6.1.1. Il vettore velocità angolare descrive il moto rotatorio del corpo rigido. Vogliamo quindi ottenere una equazione del moto per $\vec{w}(t)$ a partire dalla 2a Eq. cardinale. Svolgiamo i passi necessari in questa lezione e nella prossima.

6.2 Momento angolare del corpo rigido

Il momento angolare del corpo rigido si descrive come:

$$\vec{L}_p = M(\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)$$

Con $M(\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t)$ dal CM. Mente $\vec{L}_{CM}(t) \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t)$ rispetto al CM

$$\begin{aligned} \vec{L}_{CM}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N [\vec{r}'_{\alpha}(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times [\dot{\vec{r}}'_{\alpha}(t) - \dot{\vec{r}}_{CM}(t)] = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha}(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \times [\vec{w}(t) \times [\vec{r}'_{\alpha}(t) - \vec{r}_{CM}(t)]] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha}(t) \cdot \vec{r}'_{\alpha}(t)] \vec{w}(t) - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}(t) [\vec{r}'_{\alpha}(t) \cdot \vec{w}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_{\alpha}'^2 + z_{\alpha}'^2 & -x_{\alpha}'y_{\alpha}' & -x_{\alpha}'z_{\alpha}' \\ -y_{\alpha}'x_{\alpha}' & x_{\alpha}'^2 - z_{\alpha}'^2 & -y_{\alpha}'z_{\alpha}' \\ -z_{\alpha}'x_{\alpha}' & -z_{\alpha}'y_{\alpha}' & x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{x'}(t) \\ w_{y'}(t) \\ w_{z'}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coordinate nella base solidale: costante J.

La matrice J viene chiamata **tensore di inerzia** ed è una proprietà del corpo rigido, come la massa o il volume. $[J] = kg \cdot m^2$. In 3D devo usare una matrice di rotazione con gli angoli di Eulero $w_{x'}, w_{y'}, w_{z'}$.

Per moti planari (questo corso) $\vec{L}_p, \vec{L}_{CM}, \vec{w} // \hat{z}$

$$\vec{L}_{CM}(t) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2) w(t) \hat{z}$$

La parte $\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)$ è detta I_{CM} che sta per il momento di inerzia assiale.

Esempio 6.2.1. $I_{CM} = m_1|x_1'|^2 + m_2|x_2'|^2$ (ricordare che per la definizione $m_1x_1' + m_2x_2' = 0$)

Esempio 6.2.2. Momento di inerzia assiale di un cilindro. $V = \pi R^2 \cdot h$ densità $\rho = M/V$

$$I_z = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2) = \int dm (x'^2 + y'^2) = \int dx' \int dy' \int_0^h dz' \cdot \rho (x'^2 + y'^2)$$

Cambio di variabili nell'integrale per avere estremi più semplici: $x' = r \cdot \cos \Theta, y' = r \cdot \sin \Theta, dx' \cdot dy' = dr \cdot d\Theta \cdot r$

$$= \int_0^R dr' \int_0^{2\pi} d\Theta' \cdot r' \int_0^h \cdot \rho \cdot r'^2 = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = M \frac{1}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

Posso calcolare il momento di inerzia assiale usando un punto solidale al C.R. diverso dal CM.

$$\begin{aligned} I_p &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_p(t)\|^2 = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \|\vec{r}_{\alpha}(t) - \underline{\vec{r}_{CM}(t)} + \underline{\vec{r}_{CM}(t)} - \vec{r}_p(t)\|^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \{ \|\vec{r}_{\alpha}(t) - \underline{\vec{r}_{CM}(t)}\|^2 + \|\underline{\vec{r}_{CM}(t)} - \vec{r}_p(t)\|^2 + 2[\vec{r}_{\alpha}(t) - \underline{\vec{r}_{CM}(t)}] \cdot [\underline{\vec{r}_{CM}(t)} - \vec{r}_p(t)] \} \\ &= I_{CM} + M \cdot \|\underline{\vec{r}_{CM}(t)} - \vec{r}_p(t)\|^2 + 2 \{ \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}(t) - \underline{\vec{r}_{CM}(t)}] \} (= 0) \cdot [\underline{\vec{r}_{CM}(t)} - \vec{r}_p(t)] \Rightarrow I_p = I_{CM} + M \|\vec{r}_p\|^2 \end{aligned}$$

Teorema degli assi paralleli (Hyuhens - Steuiner)

Esempio 6.2.3. Cilindro con foro parallelo all'asse. Considero due cilindri fittizi di densità uguale al cilindro 1. Il 2 occupa lo spazio del foro, il 3 come 1 ma senza foro.

$$I_1^{(3)} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \quad (\text{per additività del momento di inerzia}) = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + M^{(2)} \cdot d^2$$

$$I_1^{(1)} = I_1^{(3)} - I_2^2 - M^{(2)}d^2 = \frac{1}{2}(\rho v^{(3)})R^2 - \frac{1}{2}(\rho v^{(2)})R_2^2 - (\rho v^{(2)})d^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho h\pi((R^4) - R_2^4 - R_2^2d^2) \quad \left(g = \frac{M}{\pi R^2 h}\right) = \frac{1}{2}MR^2\left[1 - \frac{R_2^4}{R^2} - \frac{R_2^2d^2}{R^4}\right] < \frac{1}{2}MR^2$$

Equazioni cardinali per il corpo rigido:

$$I. \quad \ddot{M}\vec{r}_{CM}(t) = \sum_i \vec{F}_i(e)(t)$$

Non importa il punto di applicazione delle forze **esterne** $\vec{F}_i^{(E)}(t)$

$$II. \quad \frac{d}{dt}[I_z\omega(t)\hat{z} + M[\vec{r}_{CM} - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}] = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(E)}(t) - M\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$$

La parte $I_z\omega(t)\hat{z}$ è una forma semplificata valida solo per il modo nel piano \hat{x}, \hat{y} . Essenziale il punto di applicazione delle forze. Polo \vec{r}_p arbitrario, scelgo quello che semplifica.

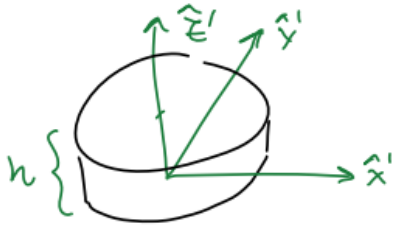
Esempio 6.2.4. Cilindro vincolato e forza costante.

Scelto come polo il CM. $\vec{F} = -F\hat{x}$ $\vec{N} = N\hat{x}$ $\vec{\omega} = \dot{\Theta}\hat{z}$.

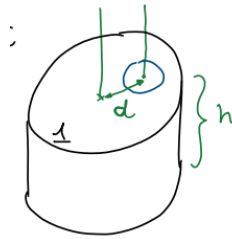
Abbiamo che $N = F$ e nessuna info su Θ . I vincoli sono: $\vec{r}_{CM}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = 0$

- I. $M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F} + \vec{N} = (N - F)\hat{x}$
- II. $\frac{d}{dt}[I_z\omega(t)\hat{z} + M[\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_p(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}] = \sum_i [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)] \times \vec{F}_i^{(E)}(t) - M\dot{\vec{r}}_p \times \dot{\vec{r}}_{CM}$

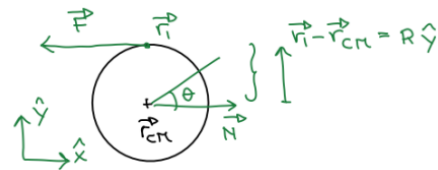
$$I_z\dot{\omega}(t)\hat{z} = (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F} + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM}) \times \vec{N} = R\hat{y} \times (-F\hat{x}) + 0 = RF\hat{z} \Rightarrow I_z\ddot{\Theta}(t) = RF \quad \ddot{\Theta} = \frac{2F}{MR} \text{ costante}$$



Esempio 6.2.2



Esempio 6.2.3



Esempio 6.2.4

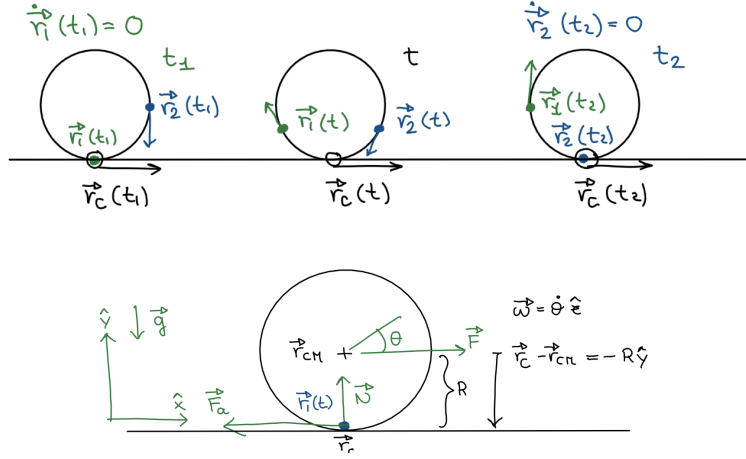
6.3 Condizione del "puro rotolamento"

Il punto \vec{r}_1 del corpo rigido a contatto con la superficie al tempo t_1 è fermo. Al tempo t_2 un altro punto \vec{r}_2 del corpo rigido è a contatto con la superficie. Il punto geometrico $\vec{r}_C(t)$ di contatto **non** è **solidale** e il suo moto non è determinato dal vettore $\vec{w}(t)$

Esempio 6.3.1. Cilindro trainato su piano scabro.

- I. $0 = M\ddot{y}_{CM}(t) = -Mg + N \Rightarrow N = mg \quad M\ddot{x}_{CM} = F - F_a$
- II. $I_z\dot{\omega}(t)\hat{z} = (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM}) \times \vec{F} + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM}) \times (\vec{F}_a + \vec{N}) = 0 + (-R\hat{y}) \times (-F_a\hat{x} + N\hat{y}) = -RF_a\hat{z}$

Abbiamo 3 incognite.



Vincolo del puro rotolamento

$$0 = \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_c(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$$

Ma quando il punto \vec{r}_1 è a contatto $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_c(t) \Rightarrow 0 = \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{r}_c(t) - \vec{r}_{CM}(t)]$

$$= \dot{x}_{CM}(t)\hat{x} + \dot{\Theta}(t)\hat{z} \times (-R\hat{y}) = \dot{x}_{CM}(t)\hat{x} + R\dot{\Theta}(t)\hat{x} \Rightarrow \underline{\dot{x}_{CM}(t) = -R\dot{\Theta}(t)} \Rightarrow \ddot{x}_{CM}(t) = -R\ddot{\Theta}(t)$$

Sostituisco nelle equazioni cardinali

$$\begin{cases} -MR\ddot{\Theta} = F - F_a \\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\Theta} = -RF_a \end{cases} \quad \begin{cases} F_a = -\frac{1}{2}MR\ddot{\Theta} \\ -MR\ddot{\Theta} = F + \frac{1}{2}MR\ddot{\Theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\Theta} = -\frac{2}{3}\frac{F}{MR} \\ F_a = \frac{1}{3}F \end{cases}$$

Minimo μ_s per mantenere puro rotolamento? $|F_a| \leq \mu_s |N| \quad \mu_s \geq \frac{F/3}{Mg} = \mu_s, \min$

6.4 Energia del corpo rigido

$$K(t) = \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_{\alpha}\|\dot{\vec{r}}_{\alpha}(t)\|^2$$

Con $\frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2$ dal CM e $\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_{\alpha}\|\dot{\vec{r}}_{\alpha}(t)\|^2$ rispetto al CM $\equiv K_{CM}(t)$

$$\begin{aligned} K_{CM}(t) &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_{\alpha}[\dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) - \dot{\vec{r}}(t)] \cdot [\dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) - \dot{\vec{r}}(t)] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_{\alpha}\vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_{CM}(t)] \cdot \vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{CM}(t)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2}m_{\alpha}\{\|\vec{w}(t)\|^2 \cdot \|\vec{r}_{\alpha}(t)\|^2 - \|\vec{w}(t) \cdot \vec{r}_{\alpha}(t)\|^2\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{x'}(t) \\ w_{y'}(t) \\ w_{z'}(t) \end{bmatrix}^T \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \begin{bmatrix} y_{\alpha}'^2 + x_{\alpha}'^2 & -x_{\alpha}'y_{\alpha}' & -x_{\alpha}'z_{\alpha}' \\ -y_{\alpha}'x_{\alpha}' & x_{\alpha}'^2 + z_{\alpha}'^2 & -y_{\alpha}'z_{\alpha}' \\ -z_{\alpha}'x_{\alpha}' & -z_{\alpha}'y_{\alpha}' & x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x'}(t) \\ w_{y'}(t) \\ w_{z'}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per motivi planari: $K(t) = \frac{1}{2}I_z w(t)^2$

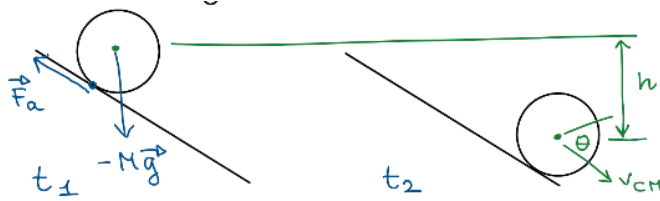
6.5 Lavoro forza peso sul corpo rigido

Consideriamo un piccolo spostamento in un tempo dt .

$$\begin{aligned}
 dL &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}(t) \cdot \vec{r}_{\alpha}(t) = \text{(teorema fondamentale sul C.R.)} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{g} [d\vec{r}_{CM}(t) + \vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_{CM}(t)]] dt \\
 &= M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM}(t) + \text{(identità vettoriale)} \vec{w}(t) \times \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{g} \cdot [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{CM}(t)] dt \\
 &= M \vec{g} \cdot d\vec{r}_{CM} + \vec{w}(t) \times \vec{g} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}(t) - M \vec{r}_{CM}(t) \right] dt
 \end{aligned}$$

Il lavoro (e quindi il potenziale) è lo stesso che per un punto materiale di massa M e posizione \vec{r}_{CM}

Esempio 6.5.1. velocità acquisita da un cilindro che rotola lungo un piano inclinato scabro.



- Energia potenziale: $u(t_1) = Mgh$ $u(t_2) = 0$
- Energia cinetica: $k(t_2) = 0$ $k(t_2) = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \dot{\Theta}^2$
- Puro rotolamento: $\dot{\Theta}^2 = v_{CM}^2 / R^2 = \frac{3}{4} M v_{CM}^2$
- Teorema delle forze vive: $\frac{3}{4} M v_{CM}^2 = Mgh \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$

La forza di attrito statico non fa lavoro perché il punto del corpo al quale si applica è fermo

Un punto geometrico $\vec{r}_v(t)$ si dice **centro istantaneo di rotolamento** per un corpo rigido se, al tempo t , vale

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \vec{w}(t) \times [\vec{r}_1(t) - \vec{r}_v(t)]$$

per tutti i punti \vec{r}_1 del corpo rigido.

Osservazione 6.5.1. Se \vec{r}_2 solidale al corpo rigido e $\dot{\vec{r}}_2(t) = 0$, allora dal teorema fondamentale $\vec{r}_2(t)$ è centro ist. rot. al tempo t .

Nel moto di puro rotolamento, il punto di contatto $\vec{r}_c(t)$ è centro istantaneo di rotolamento. Velocità di vari punti al tempo t .

$$\vec{r}_n(t) = \vec{r}_c(t) + h\hat{y} \quad \text{con} \quad \vec{r}_c(t) = \vec{r}_{CM}(t) - R\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{w}(t) \times [\vec{r}_h(t) - \vec{r}_c(t)] = w\hat{z} \times h\hat{y} = -wh\hat{x} \quad (\text{aumenta con } h)$$

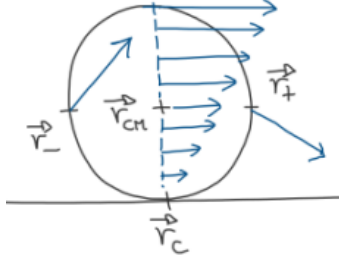
$$\dot{\vec{r}}_{CM}(t) = \dot{\vec{r}}_R(t) = -wR\hat{x} \quad \dot{\vec{r}}_{2R}(t) = -w2R\hat{x}$$

$$\vec{r}_{\pm}(t) = \vec{r}_{CM}(t) \pm R\hat{x} = \vec{r}_c(t) + R\hat{y} \pm R\hat{x} \quad \dot{\vec{r}}_{\pm}(t) = \vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\pm}(t) - \vec{r}_c(t)] = w\hat{z} \times [R\hat{y} \pm R\hat{x}] = -wR\hat{x} \pm wR\hat{y}$$

Esprimo il vettore momento angolare se il polo è centro istantaneo di rotazione, alternativa a KönigI.

$$\vec{L}_v(t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_v(t)] \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)] \times \vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_v(t)]$$

$$\text{Sono moti planari: } \begin{cases} \vec{w}(t) = w(t)\hat{z} \\ \vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t) = x'_{\alpha}(t)\hat{x} + y'_{\alpha}(t)\hat{y} \end{cases} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'_{\alpha}(t)^2 + y'_{\alpha}(t)^2) \cdot w(t) = I_v(t)w(t)$$



Momento di inerzia assiale rispetto al centro ist. rot. Utile soprattutto se I_v costante nel tempo.

Esprimo l'energia cinetica se esiste il centro di ist. rot, alternativa a Konig II.

$$K(t) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\dot{\vec{r}}_{\alpha}\|^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \|\vec{w}(t) \times [\vec{r}_{\alpha}(t) - \vec{r}_v(t)]\|^2$$

Solo moti planari:

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (x'_{\alpha}(t)^2 + y'_{\alpha}(t)^2) w(t)^2 = \frac{1}{2} I_v(t) w(t)^2$$

Utilizzando il teorema di **Huygens-Steiner** ritrovo le espressioni Konin I e II.

Esempio 6.5.2. Cilindro in moto di puro rotolamento.

$$\begin{aligned} \vec{L}_c(t) &= m[\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_c(t)] \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) + I_{CM} \dot{\Theta}(t) \hat{z} \quad (\text{Konig I}) \\ &= mR\hat{y} \times (-\dot{\Theta}(t)R\hat{x}) + I_{CM} \dot{\Theta}(t) \hat{z} \quad (\text{puro rotolamento}) \\ &= mR^2 \dot{\Theta}(t) \hat{z} + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\Theta}(t) \hat{z} = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\Theta}(t) \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_c(t) &= I_c \dot{\Theta} \hat{z} \quad (\text{centro istantaneo rotazione}) \\ &= (I_{CM} + mR^2) \dot{\Theta}(t) \hat{z} \quad (\text{Huygens - Steiner}) \\ &= (\frac{1}{2} mR^2 + mR^2) \dot{\Theta}(t) \hat{z} = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\Theta}(t) \hat{z} \end{aligned}$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}_{CM}(t)^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\Theta}(t)^2 \quad (\text{Koning II}) = \frac{1}{2} m [R \dot{\Theta}(t)]^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \dot{\Theta}(t)^2 = \frac{3}{4} mR^2 \dot{\Theta}(t)^2$$

$$K(t) = \frac{1}{2} I_v \dot{\Theta}(t)^2 \quad (\text{centro ist. rot.}) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} mR^2 + mR^2) \dot{\Theta}(t)^2 = \frac{3}{4} mR^2 \dot{\Theta}(t)^2$$

6.6 Momento risultate della forza peso su un sistema

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_0] \times \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_0] \times (m_{\alpha} \vec{g}) = (\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}) \times \vec{g} - (\sum_{\alpha} m_{\alpha}) \vec{r}_0 \times \vec{g} \\ &= M \vec{r}_{CM} \times \vec{g} - M \vec{r}_0 \times \vec{g} \quad (\vec{r}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}) = [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_0] \times (M \vec{g}) \end{aligned}$$

Il momento risultate è lo stesso che per un punto materiale di massa M e posizione \vec{r}_{CM} .

Esempio 6.6.1. Pendolo "fisico". Sbarretta omogenea di lunghezza L, massa M, sezione trascurabile. Centro (istantaneo) di rotazione nel vincolo. Coordinate polari $\hat{r} = -\cos \Theta \hat{y} + \sin \Theta \hat{x}$.

$$I_v = \sum_{\alpha} dm_{\alpha} \cdot r_{\alpha}^2 \simeq \int_0^L dr \cdot \lambda \cdot r^2 = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

usando $\lambda \equiv M/L$ densità per unità di lunghezza

$$r_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} dm_{\alpha} \simeq \frac{1}{M} \int_0^L dr \cdot \lambda r = \frac{1}{M} \lambda \frac{L^2}{2} = \frac{1}{M} M \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

Velocità del CM

$$\dot{\vec{r}}_{CM}(t) = \vec{w}(t) \times [\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_v(t)] = \dot{\Theta} \hat{z} \times \frac{L}{2} \hat{z} = \dot{\Theta}(t) \frac{L}{2} \hat{\Theta}$$

II equazione cardinale rispetto al vincolo.

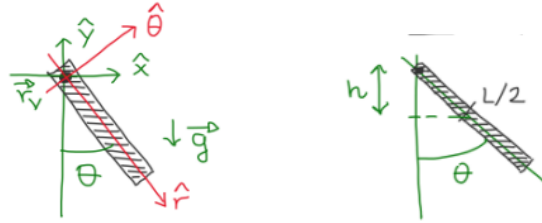
$$\vec{L}_v(t) = I_v \dot{\Theta}(t) \hat{z} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_v(t) = I_v \ddot{\Theta}(t) \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_v(t) &= (\vec{r}_v - \vec{r}_v) \times \vec{N} \quad (\text{reazione vincolare: nel polo}) + (\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_v) \times (M\vec{g}) \quad \text{forza peso : nel CM} \\ &= \frac{L}{2} \hat{r} \times (-Mg\hat{y}) = -\frac{MLg}{2} (-\cos \Theta(t) \hat{y} + \sin \Theta(t) \hat{x}) \times \hat{y} = -\frac{MLg}{2} \sin \Theta(t) \hat{z} \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}}_v(t) = \vec{M}_v(t) - M\dot{\vec{r}}_v(t) \times \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \quad \text{ma} \quad \dot{\vec{r}}_v(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}ML^2\ddot{\Theta}(t) = -\frac{MLg}{2} \sin \Theta(t)$$

$$\ddot{\Theta}(t) = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \Theta(t) \Rightarrow \Theta(t) = \cos(t)$$

Massimo Valore di $\Theta(t)$ se $\dot{\Theta}(t_1) = w_1$ per $\Theta(t_1) = 0$



Energia meccanica si conserva perché le forze che fanno lavoro sono conservative.

$L_n = 0$ perché \vec{N} applicata ad un punto del corpo che è fermo (in \vec{r}_v).

$$E(t) = \frac{1}{2}I_v\dot{\Theta}(t)^2 - Mg\frac{L}{2}\cos \Theta(t) \quad E(t_1) = \frac{1}{2}I_v w_1^2 - Mg\frac{L}{2} \quad E(t_{max}) = -Mg\frac{L}{2}\cos \Theta_{max}$$

Nel $E(t_{max})$ no contributo cinetico $\dot{\Theta}(t_{max}) = 0$

$$AE = L_{NC} \Rightarrow E(t_{max}) = E(t_1) \quad -Mg\frac{L}{2}\cos \Theta_{max} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2w_1^2 - Mg\frac{L}{2} \quad \Theta_{max} = \arccos[1 - \frac{1}{3}\frac{L}{g}w_1^2]$$

7 Urto

Un **urto** tra punti materiali / corpi rigidi avviene in un intervallo temporale $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ molto breve, rispetto alla dinamica del sistema.

Le reazioni vincolari sono difficili da descrivere con precisione. Ci interessa invece lo stato del sistema **subito prima** ($t_0^- \equiv t_0 - \epsilon$) e **subito dopo** ($t_0^+ = t_0 + \epsilon$). Durante l'urto le forze che non sono generate dal contatto sono spesso di intensità trascurabile.

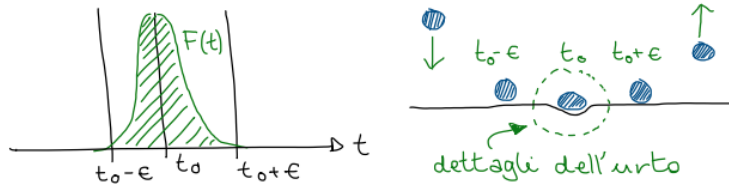
Definizione 7.0.1. Definisco **vetore impulso di una forza** $\vec{F}(t)$ un intervallo temporale $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$\vec{I}_\epsilon = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} dt \cdot \vec{F}(t) \quad e \quad \vec{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{I}_\epsilon$$

Dico che $\vec{F}(t)$ è una **forza impulsiva** se $\|\vec{I}\| \neq 0$ altrimenti la forza è non impulsiva. Una forza la cui intensità è limitata non può essere impulsiva.

Le coordinate sono funzioni continue del tempo (non ci può essere "teletrasporto"), ess. $\vec{r}(t_0^+) = \vec{r}(t_0^-)$ mentre velocità, accelerazione, quantità di moto, momento angolare, energia cinetica possono subire variazioni tra $t_0 - \epsilon$ e $t_0 + \epsilon$.

Se l'energia cinetica **del sistema** non varia tra $t_0 - \epsilon$ e $t_0 + \epsilon$ ("è conservata") l'urto si dice **elastico**, altrimenti **anelastico**. Se dopo l'urto si viene a formare un corpo rigido, l'urto è **completamente anelastico**.



7.1 Equazioni cardinali e teorema forze vive in forma impulsiva

Integro entrambi i membri da $t_0 - \epsilon$ a $t_0 + \epsilon$

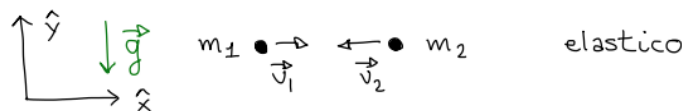
$$I. \quad m\ddot{\vec{r}}_{CM}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{(E)}(t) \Rightarrow m\dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^+) - m\dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^-) = \sum_i \vec{I}_i^{(E)}$$

$\vec{I}_i^{(E)}$ vuol dire che sono le \vec{F}_i impulsive contano.

$$II. \quad \dot{\vec{L}}_p(t) = \sum_i (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_p(t)) \times \vec{F}_i^{(E)} - \dot{\vec{r}}_p(t) \times M\dot{\vec{r}}_{CM}(t) \Rightarrow \vec{L}_p(t_0^+) - \vec{L}_p(t_0^-) = \sum_i (\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_p(t_0)) \times \vec{I}_i^{(E)}$$

Anche in questo caso solo le \vec{F}_i impulsive contano, in oltre come si nota in $M\dot{\vec{r}}_{CM}(t)$ le velocità rimangono limitate.

Esempio 7.1.1. Non ci sono forze esterne impulsive.

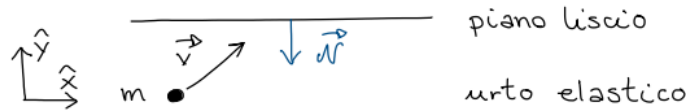


$$m_1 \dot{x}_1(t_0^+) + m_2 \dot{x}_2(t_0^+) - m_1 \dot{x}_1(t_0^-) - m_2 \dot{x}_2(t_0^-) = 0$$

Notiamo che $\dot{x}_1(t_0^-) = v_1$ e $m_2\dot{x}_2(t_0^-) = v_2$. L'urto è elastico

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2(t_0^+)^2 - \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1(t_0^-)^2 - \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2(t_0^-)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \dot{x}_2(t_0^+) = v_2 - \frac{m_1}{m_2}[\dot{x}_1(t_0^+) - v_1] &\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1(t_0^+)^2 + \frac{1}{2}m_2\{v_2 - \frac{m_1}{m_2}[\dot{x}_1(t_0^+) - v_1]\}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 0 \\ \dot{x}_1(t_0^+) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \end{aligned}$$

Esempio 7.1.2. Piano liscio, urto elastico. Liscio: la relazione vincolare impulsiva è solo normale.

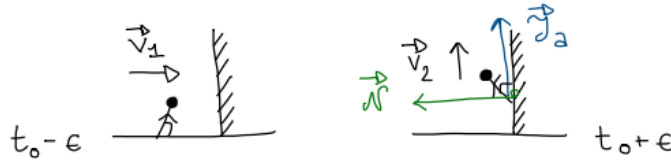


$$\begin{cases} m\dot{x}(t_0^+) - m\dot{x}(t_0^-) = 0 \\ m\dot{y}(t_0^+) - m\dot{y}(t_0^-) = N \text{ impulso relazione vincolare} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}m[\dot{x}(t_0^+)^2 + \dot{y}(t_0^+)^2] - \frac{1}{2}m[\dot{x}(t_0^-)^2 + \dot{y}(t_0^-)^2] = 0 \Rightarrow \dot{x}(t_0^+) = \dot{x}(t_0^-) \text{ non cambia}$$

$$\dot{y}(t_0^+)^2 - \dot{y}(t_0^-)^2 = 0 \Rightarrow \dot{y}(t_0^+) - \dot{y}(t_0^-) \text{ si inverte} \Rightarrow N = 2m\dot{y}(t_0^-)$$

Esempio 7.1.3. Minimo μ_s per un "wallrun"?

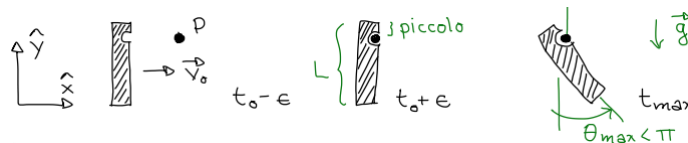


$$\dot{\vec{r}}(t_0^-) = v_1\hat{x} \quad \dot{\vec{r}}(t_0^+) = v_2\hat{y}$$

$$\begin{cases} m\dot{x}(t_0^+) - m\dot{x}(t_0^-) = -N \\ m\dot{y}(t_0^+) - m\dot{y}(t_0^-) = I_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mv_1 \\ I_a = mv_2 \end{cases}$$

Da $\|\vec{F}_a\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$, integrando membro a membro, segue $I_a \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{v_2}{v_1} = \mu_s, \min$

Esempio 7.1.4. Urto anelastico asta-perno. Massimo Θ ?



L'urto forza esterna impulsiva è la relazione vincolare in P, che però ha momento nullo rispetto a P.

$$\vec{L}_p(t_0^+) - \vec{L}_p(t_0^-) = 0 \quad \vec{L}_p(t_0^-) = (\vec{r}_{CM}(t_0^-) - \vec{r}_p) \times M\dot{\vec{r}}_{CM}(t_0^-) = -\frac{L}{2}\hat{y} \times Mv_0\hat{x} = \frac{1}{2}MLv_0\hat{z}$$

Solo il momento angolare "del CM" è non nullo.

$$\vec{L}_p(t_0^+) = \frac{1}{2}ML\frac{L}{2}\dot{\Theta}(t_0^+)\hat{z} + (\frac{1}{12}ML^2)\dot{\Theta}(t_0^+)\hat{z} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\Theta}(t_0^+)\hat{z}$$

$$\frac{1}{3}ML^2\dot{\Theta}(t_0^+) - \frac{1}{2}MLv_0 = 0 \Rightarrow \dot{\Theta}(t_0^+) = \frac{3}{2} \frac{v_0}{L}$$

Per $t > t_0$ l'energia si conserva perché le forze che fanno lavoro sono conservative. La relazione in P non è conservativa ma P è fermo e c'è attrito.

$$\frac{1}{2}M\left[\frac{L}{2}\dot{\Theta}(t_0^+)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\Theta}(t_0^+)^2 - Mg\frac{L}{2} = -Mg\frac{L}{2}\cos\Theta_{max}$$

$$\Rightarrow Mg\frac{L}{2}(1-\cos\Theta_{max}) = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}ML^2\dot{\Theta}(t_0^+)^2 = \frac{1}{6}ML^2\frac{g}{4} - \frac{v_0^2}{L^2} \Rightarrow 1-\cos\Theta_{max} = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{gL} \quad \Theta_{max} = \arccos\left(1 - \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{gL}\right)$$