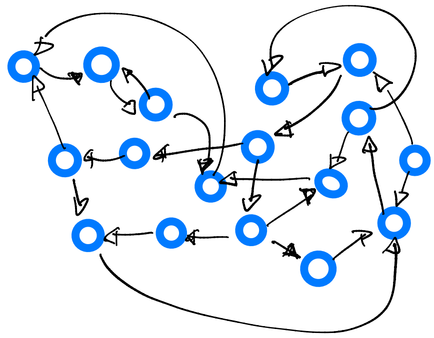
FONDAMENTI DELL'INFORMATICA – a.a. 2021/22

Esercitazione N^o 2

Soluzioni Proposte

ESERCIZIO 1

Mostrare le componenti fortemente connesse del seguente grafo orientato.



ESERCIZIO 2

La *legge dei sei gradi di separazione* è un'ipotesi secondo la quale ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso una catena di conoscenze e relazioni con non più di 5 elementi intermediari.

Questo vale in particolare per le relazioni di amicizia su Facebook.

(A) Prendendo il grafo $G = (V, E)$ dell'amicizia su FB, come si traduce tale legge in una proprietà sui nodi di G espressa utilizzando solo la terminologia introdotta per i grafi?

(B) Esprimere la legge dei sei gradi di separazione utilizzando una formula del tipo

$$Exp_1 \subseteq Exp_2$$

dove Exp_1 e Exp_2 sono espressioni costruite con:

- la relazione $FBFriend : FB \leftrightarrow FB$ (dove $(x, y) \in FBFriend$ se x e y hanno l'amicizia su Facebook),
- le operazioni su relazioni viste a lezione (ad esempio la composizione, l'identità, la relazione vuota, la relazione completa, l'unione e l'intersezione) e

Ad esempio, la formula $FBFriend; FBFriend \subseteq FBFriend$ esprime la transitività della relazione $FBFriend$ (che chiaramente non vale).

ESERCIZIO 3

Dimostrare il Teorema di Caratterizzazione per le relazioni anti-simmetriche (Teorema 4.2.19.4):

Per tutti gli insiemi A, e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$ vale che:
R è anti-simmetrica se e solo se $R \cap R^{op} \subseteq id_A$

ESERCIZIO 4
Dire se il seguente enunciato è vero: in caso affermativo fornire una dimostrazione discorsiva o per sostituzione (utilizzando le leggi viste fin'ora); in caso negativo fornire un controesempio.

Per tutti gli insiemi A e per tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$ vale che:
se $R \in Rel(A, A)$ è antisimmetrica, allora $R^\star \in Rel(A, A)$ è una relazione di ordinamento parziale.

ESERCIZIO 5
Per ognuno dei seguenti enunciati dire se è vero: in caso affermativo fornire una dimostrazione; in caso negativo fornire un controesempio.

(a) Per tutti i DAG $G = (V, E)$, $E \in Rel(V, V)$ è un ordinamento parziale.

(b) Per tutti i DAG $G = (V, E)$, $E \cup id_V \in Rel(V, V)$ è un ordinamento parziale.

(c) Per tutti i DAG $G = (V, E)$, $E^\star \in Rel(V, V)$ è un ordinamento parziale.

ESERCIZIO 6
Sia $G = (V, E)$ un DAG, e sia $H = (V, E^{op})$ il grafo ottenuto invertendo le direzioni degli archi di G.

Per ognuno dei seguenti enunciati dire se è vero: in caso affermativo fornire una dimostrazione; in caso negativo fornire un controesempio:

1. Ogni sorgente in G è pozzo in H.
2. Ogni pozzo in G è sorgente in H.
3. Esiste un walk da x a y in G *se e solo se* esiste un walk da x a y in H.
4. Esiste un walk da x a y in G *se e solo se* esiste un walk da y a x in H.
5. H è un DAG.

ESERCIZIO 7
Definiamo la funzione $mult2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induttivamente come:

- Clausola Base: $mult2(0) = 0$;
- Clausola Induttiva: $mult2(n + 1) = 2 + mult2(n)$.

Definiamo la funzione $sommatoria \colon \mathbb{N} \times Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ induttivamente come:

- Clausola Base: $sommatoria(0, f) = f(0)$ per ogni $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N})$;
- Clausola Induttiva: $sommatoria(n + 1, f) = f(n + 1) + sommatoria(n, f)$ per ogni $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

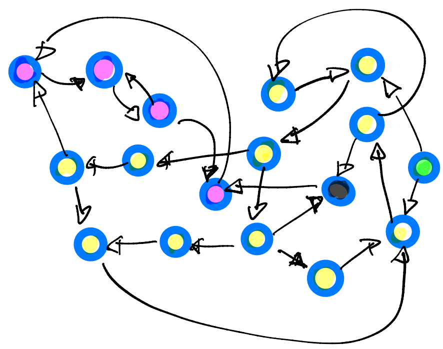
Dimostrare per induzione i seguenti due enunciati.

1. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $mult2(n + m) = mult2(n) + mult2(m)$.
2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, $sommatoria(n, f; mult2) = mult2(sommatoria(n, f))$. *Suggerimento:* utilizzare il punto precedente. Si ricorda inoltre che $(f; g)(n)$ e $g(f(n))$ sono due notazioni per indicare il risultato dell'applicazione della funzione composta $f; g$ ad n.

SOLUZIONI PROPOSTE

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Usiamo la proprietà che due nodi sono nella stessa componente fortemente connessa sse appartengono entrambi a uno stesso cammino chiuso (orientato).



SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(A) Per ogni coppia di nodi $x, y \in V$, esiste sempre un cammino di lunghezza al più 6 (cioè 5 nodi intermedi e 6 archi) da x a y.

(B)

$$FB \times FB \subseteq (FBFriend \cup id_{FB})^6$$

dove $(FBFriend \cup id_{FB})^6$ è la relazione $(FBFriend \cup id_{FB})\,;\,(FBFriend \cup id_{FB})\,;\,(FBFriend \cup id_{FB})\,;\,(FBFriend \cup id_{FB})\,;\,(FBFriend \cup id_{FB})\,;\,(FBFriend \cup id_{FB})$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Ricordiamo la definizione di relazione anti-simmetrica (Definizione 4.2.14):

Si dice che R è antisimmetrica se per tutti gli elementi $x, y \in A$,
se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, allora $x = y$.

Illustriamo una dimostrazione discorsiva. Trattandosi di un se e solo se possiamo dimostrare le due implicazioni:

1. Se R è anti-simmetrica, allora $R \cap R^{op} \subseteq id_A$. Utilizzando come ipotesi che R è anti-simmetrica, dimostriamo che $R \cap R^{op} \subseteq id_A$.

   Sia (x, y) una coppia in $R \cap R^{op}$. Dalla definizione di intersezione, sappiamo che $(x, y) \in R$ e $(x, y) \in R^{op}$. Dalla definizione di R^{op} sappiamo che $(y, x) \in R$. Adesso dal fatto che $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ e con l'ipotesi che R è antisimmetrica, possiamo concludere che $x = y$, cioè $(x, y) \in id_A$.

2. Se $R \cap R^{op} \subseteq id_A$, allora R è anti-simmetrica. Utilizzando come ipotesi che $R \cap R^{op} \subseteq id_A$ dimostriamo che R è anti-simmetrica.

   Siano $x, y \in A$ generici elementi di A. Se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ allora per definizione di intersezione e relazione opposta vale che $(x, y) \in R \cap R^{op}$. Adesso dall'ipotesi $R \cap R^{op} \subseteq id_A$ e dal fatto che $(x, y) \in R \cap R^{op}$, deduciamo che $(x, y) \in id_A$, cioè che $x = y$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

FALSO. Non è vero che per tutti gli insiemi A e tutte le relazioni $R \in Rel(A, A)$, vale che se R è antisimmetrica, allora $R^\star$ è una relazione di ordinamento. Infatti $R^\star$ è banalmente riflessiva e transitiva ma potrebbe non essere antisimmetrica.

Per illustrare un controesempio dobbiamo trovare un insieme A ed una relazione $R \in Rel(A, A)$ che falsificano l'implicazione, cioè tali che R sia antisimmetrica ma $R^\star$ non è un ordinamento parziale.

Pertanto, come controesempio, prendiamo $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$. Opportunamente calcolando $R^\star$ si ottiene che

$$R^\star = id_A \cup \{(a, b), (b, c), (c, a), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

A questo punto è sufficiente notare che $R^\star$ non è antisimmetrica e quindi non è un ordinamento parziale.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

(a) FALSO. La relazione $E \in Rel(V, V)$ non è un ordinamento parziale per tutti i DAG $G = (V, E)$. Si prenda infatti come G il seguente grafo.

$$0 \to 1 \to 2$$

Questo è chiaramente un DAG, ma E non è un ordinamento parziale in quanto E non è né transitiva né riflessiva.

(b) FALSO. La relazione $E \cup Id_V \in Rel(V, V)$ non è un ordinamento parziale per tutti i DAG $G = (V, E)$. Si prenda infatti come G il seguente grafo.

$$0 \to 1 \to 2$$

Questo è chiaramente un DAG, ma $E \cup Id_V$ non è un ordinamento parziale in quanto $E \cup Id_V$ non è transitiva.

(c) VERO. La relazione $E^\star \in Rel(V, V)$ è un ordinamento parziale per tutti i DAG $G = (V, E)$. Si veda la dimostrazione della Proposizione 5.3.2.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

1. VERO. Sia x una sorgente di G, e si ricordi che $(x, y) \in E^{op} \iff (y, x) \in E$. Dato che x è un sorgente di G, non esiste alcun arco $(y, x) \in E$, quindi non esiste alcun arco $(x, y) \in E^{op}$. Ne consegue che x è un pozzo in $H = (V, E^{op})$.

2. VERO. Sia x un pozzo di G, e si ricordi che $(x, y) \in E^{op} \iff (y, x) \in E$. Dato che x è un pozzo di G, non esiste alcun arco $(x, y) \in E$, quindi non esiste alcun arco $(y, x) \in E^{op}$. Ne consegue che x è una sorgente in $H = (V, E^{op})$.

3. VERO. Sia x un pozzo di G, e si ricordi che $(x, y) \in E^{op} \iff (y, x) \in E$: dato che x è un pozzo di G, non esiste alcun arco $(x, y) \in E$, quindi non esiste alcun arco $(y, x) \in E^{op}$. Ne consegue che x è una sorgente in $H = (V, E^{op})$. Con lo stesso ragionamento otteniamo che ogni sorgente di G è un pozzo di H.

4. FALSO. Un controesempio è semplicemente il DAG G con un unico arco $(x, y) \in E$.

5. VERO. Sia $W = w_0 = x, w_1, \ldots, w_k = y$ un walk in G. Per ogni arco $(w_i, w_{i+1}) \in E$, esiste l'arco $(w_{i+1}, w_i) \in E^{op}$. Si osservi la sequenza $W^R = w_k = y, w_{k-1}, \ldots, w_0 = x$ ottenuta invertendo W: per ogni coppia di nodi consecutivi esiste un arco $(w_i, w_{i-1}) \in E^{op}$. Ne consegue che W^R è un walk da y a x in H.

6. VERO. Assumiamo per assurdo H *non* sia un DAG, quindi esiste un ciclo $C = c_0, c_1, \ldots, c_0$ in H. Come osservato sopra, per ogni arco $(c_i, c_{i+1}) \in E^{op}$ esiste il suo opposto $(c_{i+1}, c_i) \in E$. Ne consegue che la sequenza inversa di C è un ciclo in G: questa è una contraddizione, visto che G è un DAG. Ne consegue che H non ha cicli, quindi H è un DAG.

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 7</u>

1. Sia P la proprietà sui numeri naturali dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale (cioè $P(n) = \mathtt{t}$) se e solo se
$$\mathit{mult2}(n+m) = \mathit{mult2}(n) + \mathit{mult2}(m) \text{ per ogni } m \in \mathbb{N}$$
Dimostriamo $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$ utilizzando il principio di induzione.

   - Caso Base: Dobbiamo dimostrare $P(0)$, cioè che $\mathit{mult2}(0+m) = \mathit{mult2}(0) + \mathit{mult2}(m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Basta osservare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale che:
$$\begin{aligned} \mathit{mult2}(0+m) &= \mathit{mult2}(m) && \text{(Calcolo)} \\ &= 0 + \mathit{mult2}(m) && \text{(Calcolo)} \\ &= \mathit{mult2}(0) + \mathit{mult2}(m) && \text{(Clausola base)} \end{aligned}$$

   - Passo Induttivo: Dobbiamo dimostrare $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè che se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$ per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, dobbiamo dimostrare $P(n+1)$, cioè che $\mathit{mult2}(n+1+m) = \mathit{mult2}(n+1) + \mathit{mult2}(m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, utilizzando come ipotesi $P(n)$, cioè $\mathit{mult2}(n+m) = \mathit{mult2}(n) + \mathit{mult2}(m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (questa è chiamata ipotesi induttiva). Si procede come segue.
   Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale che:
$$\begin{aligned} \mathit{mult2}(n+1+m) &= \mathit{mult2}(n+m+1) && \text{(Calcolo)} \\ &= 2 + \mathit{mult2}(n+m) && \text{(Clausola induttiva)} \\ &= 2 + \mathit{mult2}(n) + \mathit{mult2}(m) && \text{(Ipotesi Induttiva)} \\ &= \mathit{mult2}(n+1) + \mathit{mult2}(m) && \text{(Clausola induttiva)} \end{aligned}$$

2. Sia P la proprietà sui numeri naturali dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale (cioè $P(n) = \mathtt{t}$) se e solo se
$$\mathit{sommatoria}(n, f; \mathit{mult2}) = \mathit{mult2}(\mathit{sommatoria}(n, f)) \text{ per ogni } f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$$
Dimostriamo $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$ utilizzando il principio di induzione.

- Caso Base: Dobbiamo dimostrare $P(0)$, cioè che $\mathit{sommatoria}(0, f; \mathit{mult}) = \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(0, f))$ per ogni $f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Basta osservare che per ogni $f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vale che:

$$\begin{aligned}
\mathit{sommatoria}(0, f; \mathit{mult}2) &= (f; \mathit{mult}2)(0) && \text{(Clausola base)}\\
&= \mathit{mult}2(f(0)) && \text{(Calcolo)}\\
&= \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(0, f)) && \text{(Clausola base)}
\end{aligned}$$

- Passo Induttivo: Dobbiamo dimostrare $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, cioè che se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$ per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, dobbiamo dimostrare $P(n+1)$, cioè che $\mathit{sommatoria}(n+1, f; \mathit{mult}2) = \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(n+1, f))$ per ogni $f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, utilizzando come ipotesi $P(n)$, cioè $\mathit{sommatoria}(n, f; \mathit{mult}2) = \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(n, f))$ per ogni $f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ (questa è chiamata ipotesi induttiva). Si procede come segue.

  Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $f \in \mathit{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vale che:

$$\begin{aligned}
& \mathit{sommatoria}(n+1, f; \mathit{mult}2) \\
= \;& (f; \mathit{mult}2)(n+1) + \mathit{sommatoria}(n, f; \mathit{mult}2) && \text{(Clausola induttiva)}\\
= \;& \mathit{mult}2(f(n+1)) + \mathit{sommatoria}(n, f; \mathit{mult}2) && \text{(Calcolo)}\\
= \;& \mathit{mult}2(f(n+1)) + \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(n, f)) && \text{(Ipotesi Induttiva)}\\
= \;& \mathit{mult}2(\, f(n+1) + \mathit{sommatoria}(n, f)\,) && \text{(Punto 1. dello stesso esercizio)}\\
= \;& \mathit{mult}2(\mathit{sommatoria}(n+1, f)) && \text{(Clausola induttiva)}
\end{aligned}$$