ESERCIZIO 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1+\theta \\ & \ddots & \\ 1-\theta & & 1 \end{bmatrix}$$

① Per quali valori di θ, A é predominante diagonale

Sulle righe centrali $1 > 0$ OK

Sulla prima $1 > |1+\theta| \iff -1 < 1+\theta < 1 \iff -2 < \theta < 0$ ①

ultima $1 > |1-\theta| \iff -1 < 1-\theta < 1 \iff -2 < -\theta < 0$ ②

$0 < \theta < 2$

Quindi MAI perché ① AND ② hanno intersezione vuota

② Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili?

Dobbiamo verificare che le matrici M sono invertibili. In Jacobi M é la diagonale mentre in GS é la triangolare. In ogni caso la diagonale ha tutti valori sempre $\neq \emptyset$ quindi sono sempre applicabili

③ CONVERGENZA GS → Devo analizzare una condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE

Mi costruisco $G = M^{-1} N$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1-\theta & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \theta-1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1-\theta \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\theta^2 \end{bmatrix}$$

Cosa possiamo dire sul raggio spettrale di G? G é triangolare superiore, quindi gli autovalori sono sulla diagonale: $\lambda = 0 \quad \lambda = 1-\theta^2$

Quindi $\rho(G) = |1-\theta^2|$

La condizione necessaria e sufficiente dice che

$$\rho(G) < 1 \iff -1 < 1-\theta^2 < 1 \iff -2 < \theta^2 < 0 \iff 0 < \theta^2 < 2 \begin{cases} \theta^2 > 0 \text{ SSE } \theta \neq 0 \\ \theta^2 < 2 \to -\sqrt{2} < \theta < \sqrt{2} \end{cases}$$

(4) CONVERGENZA del metodo di JACOBI

$$J = \underline{I}^{-1} \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & 0 & \\ \theta-1 & & \end{bmatrix} = \underline{I} \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & 0 & \\ \theta-1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & 0 & \\ \theta-1 & & \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico $\det(\lambda \underline{I} - J)$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & & 1+\theta \\ & \ddots & \\ 1-\theta & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & & 1+\theta \\ & \ddots & \\ 1-\theta & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^{n-2} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & 1+\theta \\ 1-\theta & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (1-\theta^2)\right)$$

(Metodo di Laplace)

Gli autovalori quindi sono $\lambda = 0$

$$\lambda^2 = 1-\theta^2 \Rightarrow |\lambda|^2 = |1-\theta^2| \Rightarrow |\lambda| = \sqrt[2]{|1-\theta^2|}$$

Per verificare la convergenza: $\sqrt[2]{|1-\theta^2|} < 1 \iff |1-\theta^2| < 1 \iff -\sqrt{2} < \theta < \sqrt{2}$

e $\theta \neq 0$

Un'alternativa per calcolare gli autovalori era: con la RELAZIONE COSTITUTIVA:

$$Y = \lambda X \iff \begin{cases} -(1+\theta)\, x_n = \lambda x_1 \\ 0 = \lambda x_2 \iff x_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 = \lambda x_{n-1} \iff x_{n-1} = 0 \\ (\theta-1)x_1 = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(1+\theta)x_n = \lambda x_1 \\ \\ (\theta-1)x_1 = \lambda x_n \end{cases} \begin{cases} \dfrac{-(1+\theta)x_n}{\lambda} = x_1 \\ \\ \dfrac{-(\theta-1)(1+\theta)x_n}{\lambda} = \lambda^2 x_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 = 1-\theta^2$$

L'ultimo metodo per trovare gli autovalori é tramite la fattorizzazione LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & 1+\theta \\ & \ddots & \\ 1-\theta & & \lambda \end{bmatrix}}_{(\lambda I - J)} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} I & \emptyset \\ \hline \frac{1-\theta}{\lambda} & 1 \end{array}\right]}_{L} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & \\ & \ddots \\ & & \lambda\end{matrix} & 1+\theta \\ \hline 0 & y \end{array}\right]}_{U}$$

$$\frac{(1-\theta)(1+\theta)}{\lambda} + y = \lambda$$

$$y = \lambda - \frac{(1-\theta^2)}{\lambda}$$

$$\det = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \frac{1-\theta^2}{\lambda}\right) = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (1-\theta^2)\right)$$

4) Determinare quanti passi di GS sono sufficienti per garantire che

con $\theta = -\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\|e_k\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} \leq 2^{-48}$

N.B. $e_k = x_k - x$

$e_0 = x_0 - x$

Sappiamo dalla definizione di convergenza che $0 \leq \|e_k\|_\infty \leq \|P\|_\infty^k \|e_0\|_\infty$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|e_k\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} \leq \|P\|_\infty^k \qquad \text{con } P = G$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 & -\frac{1}{2} \\ & 0 & & \\ & & & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad \|G\|_\infty = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\|e_k\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq 2^{-48}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \leq 2^{-48} \iff k \log_2 \frac{3}{4} \leq -48$$

$k \leq \frac{-48}{\log_2 3/4}$ $\qquad$ $k \geq \frac{-48}{\log_2 \frac{3}{4}}$

ERRATO $\longrightarrow$ CORRETTO

perché $\log_2 \frac{3}{4}$ é NEGATIVO

$$\Downarrow$$

$$k = \left\lceil \frac{-48}{\log_2 3/4} \right\rceil$$

Se avessimo analizzato per Jacobi con $\theta = -\frac{1}{2}$ la norma sarebbe >1 e quindi non convergente

⑤ Determinare il costo computazionale di un'iterazione del metodo di Jacobi

Il costo è pari agli elementi non nulli di A $\Rightarrow O(n)$

Però se scriviamo il metodo di Jacobi

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} & & -1-\theta \\ & & \\ -1+\theta & & \end{bmatrix} x^{(k)} + b = \begin{bmatrix} -(1+\theta)\, x_n^{k} + b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ (\theta-1)\, x_1 + b_n \end{bmatrix}$$

Quindi faccio 2 operazioni moltiplicative e 2 additive per passo circa

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det A \neq 0$$

① Determinare se il metodo di Jacobi è convergente

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & \\ x & \ddots & \\ x & \cdots\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ x & \ddots & \\ x & \cdots\ x & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & \\ y & \ddots & \\ y & \cdots\ y & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono $\lambda = 0 \Rightarrow \rho(J) = \emptyset > 1 \Rightarrow$ Jacobi converge

Osservazione: una matrice triangolare dopo n passi di moltiplicazione per sé stessa diventerà NULLA $\quad J^n = \emptyset$

Quindi in quei casi il metodo iterativo diventa DIRETTO e restituisce direttamente il risultato senza errore.

ESERCIZIO 3

$$A = I - \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & & \\ 1/3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/3 \\ & & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

① Considerare un metodo iterativo con $M = I$ e $N = B$

Dimostrare che questo metodo é convergente

Data la complessitá nel calcolo del raggio spettrale, analizziamo la condizione sufficiente: é predominante diagonale quindi convergente