Variabili Aleatorie Discrete

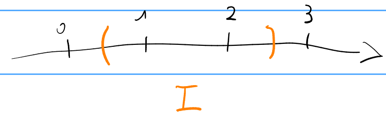
$\Omega, \mathbb{P}$ spazio di probabilità $\quad X : \Omega \to \mathbb{R}$ discreta se $\mathbb{P}_X$ è discreta

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{se } x = x_i \text{ con } x_1 \dots x_n \dots \text{ numerevoli punti di } \mathbb{R} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left(= \mathbb{P}(\{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x \}) \right)$$

Possiamo chiamare $p_X(x) = \mathbb{P}_X(\{x\})$ FUNZIONE di MASSA di X

e caratterizza la legge $\mathbb{P}_X : \mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I) = \sum_{i : x_i \in I} p_i$



Variabili Aleatorie Binomiali

Di parametri $n \geq 1$, $p \in [0,1]$, hanno legge $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n$

Descrivono il NUMERO di SUCCESSI in n PROVE INDIP. con probabilità di successo in una singola prova p

e.g. tiriamo a canestro $n = 10$ volte, $p = 0.90$ prob. di fare canestro ad ogni tiro (tiri indip.)

$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{10}{5} 0.9^5 \, 0.1^5$

↳ Probabilità di fare 5 canestri

$B(n, p)$

Variabili Aleatorie Geometriche

Exp con 2 esiti $\{0, 1\}$, ripetiamo l'exp fino al primo successo

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ (e_1, e_2, \dots) \mid e_i = 0, 1 \}$$

Supponiamo che i tentativi siano IND. e con prob. $p \in \{0,1\}$

Probabilità che il tentativo n abbia avuto successo $\longrightarrow \mathbb{P}(\{ e \in \Omega : e_n = 1 \}) = p$

$G(p)$

Il numero di tentativi fino al primo successo (incluso) $\longrightarrow \mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \dots$

$$\text{con } \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p (1-p)^{k-1} = \underbrace{p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n}_{\text{serie geometrica}} = p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} = 1$$

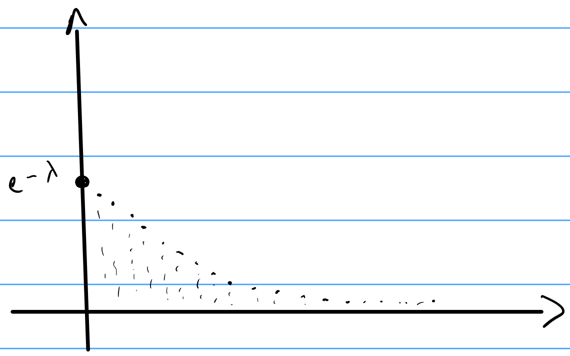
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

VARIABILI ALEATORIE di POISSON

Se in un esperimento la prob. tende a $\emptyset$ e le ripetizioni tendono ad ∞

la legge X di parametro $\lambda > 0$ $(P(\lambda))$ si dice di Poisson se

$$P_X(\{k\}) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$ (eventi RARI)



Consideriamo una legge binomiale con $n \to \infty$ e $p = \lambda/n$ (tante prove, bassa prob.)

la funzione di massa é $p^n(k) = \binom{n}{k} \left(\lambda/n\right)^k \left(1 - \lambda/n\right)^{n-k}$ $\quad k = 0, 1, \dots, n$

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}}_{\substack{1 \\ \text{(Approx. di Stirling)}}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

e.g. Telefonate ad un numero verde ≥ 4

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$

ESERCIZIO 1

Ci sono n parlamentari, $0 \leq h \leq n$ di sinistra, $n-h$ di destra

Formiamo una commissione a SORTEGGIO di $r < n$ parlamentari (estraendo a caso senza reinserimento)

- Probabilità di averne K di sinistra?
  - $K > h \rightarrow \emptyset$
  - $\dfrac{\#\text{ scelte } k \text{ di } sx \text{ e } r-K \text{ di } dx}{\#\text{ scelte totali}} = \dfrac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}}$

Diciamo che $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, r\} \subseteq \mathbb{R}$ è di tipo IPERGEOMETRICO di parametri n, h, r se ha legge:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}} \qquad K = 0, \dots, h$$

$$\sum_{K=0}^{h} \binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k} = \binom{n}{r} \quad \text{IDENTITÀ DI VANDERMANDE} \rightsquigarrow \sum_{K=0}^{h} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

NOTA: se $K > h$, $\binom{h}{k} = \emptyset$

Presi $x_1, \dots, x_n, \dots$ e $p_1, p_2, \dots \in [0,1]$ t.c. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

scelto $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x) = \begin{cases} p_i & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \quad \forall i \end{cases}$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X(x) = x$ ALLORA $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{x\})$

ESERCIZIO 2 - Assenza di MEMORIA nelle VARIABILI GEOMETRICHE

Se X VAR. AL. GEOM. di parametro p $\left(\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p \quad k=1, \dots\right)$
per ogni scelta di $n, h > 0$ vale

$$\mathbb{P}(\underbrace{X=n+h}_{\text{Prob. di avere successo alle } n+h \text{ volte}} \mid \underbrace{X>n}_{\text{Sapendo di aver fallito le prime } n \text{ volte}}) = \mathbb{P}(X=h)$$