

CALCOLO NUMERICO  
Corso di Laurea in Informatica  
A.A. 2021/2022 – Prova Scritta – 12/07/2022

---

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

---

**Esercizio 1** Sia  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , definita come

$$a_{i,j} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = j; \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per  $n = 3$  si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Si mostri che gli autovalori di  $A$  sono non negativi. Si mostri che  $\lambda = 0$  è l'autovalore minimo.
2. Posto  $B = A + \alpha I_n$ ,  $\alpha > 0$ , si mostri che  $B$  è invertibile.
3. Per la risoluzione del sistema lineare  $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$  si considera il metodo iterativo con  $B = M - N$ ,  $M = \alpha I_n$  e  $N = -A$ . Si determini condizioni su  $\alpha$  sufficienti a garantire la convergenza del metodo. Si determini il costo computazionale di un'iterazione del metodo.

**Esercizio 2** Si consideri l'equazione

$$x = 2 + \log(x).$$

1. Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione. Per ogni soluzione si determini un'intervallo di separazione.
2. Si dica se il metodo  $x_{k+1} = 2 + \log(x_k)$ ,  $k \geq 0$ , è localmente convergente in un intorno delle soluzioni dell'equazione.
3. Si dica se la successione generata dal metodo  $x_{k+1} = 2 + \log(x_k)$ ,  $k \geq 0$ , con punto iniziale  $x_0 = e$  è convergente e nel caso se ne determini il limite.