Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 10 gennaio 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, dobbiamo imporre la condizione di esistenza $|x| > 0$ che equivale a $x \neq 0$. Inoltre, la funzione è definita laddove non si annulla il suo denominatore, ovvero per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq \pm e$. Il dominio della funzione risulta quindi essere $(-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile in tutto il suo dominio in quanto composizione e quoziente di funzioni derivabili nel loro dominio. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Notiamo che la funzione è pari perchè soddisfa $f(-x) = f(x)$. Possiamo quindi limitare lo studio della funzione agli $x > 0$ e concludere poi per simmetria nel caso $x < 0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0^+ \frac{1}{-\infty} = 0^-,$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{e}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

Le rette $x = \pm e$ sono asintoti verticali. Non esistono invece asintoti orizzontali. Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui. Calcoliamo in primo luogo il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log(x) - 1} = +\infty \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

Il risultato ottenuto esclude l'esistenza di asintoti obliqui. Dai limiti deduciamo che $\sup(f) = +\infty$ e $\inf(f) = -\infty$ e quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluti. Il Teorema di Weierstrass generalizzato applicato all'intervallo $(e, +\infty)$ ci garantisce l'esistenza di un punto di minimo locale in questo intervallo. Per individuare questo punto di minimo locale e trovare eventuali altri punti di massimo e minimo locali studiamo la derivata prima. Possiamo calcolare, per $x > 0$,

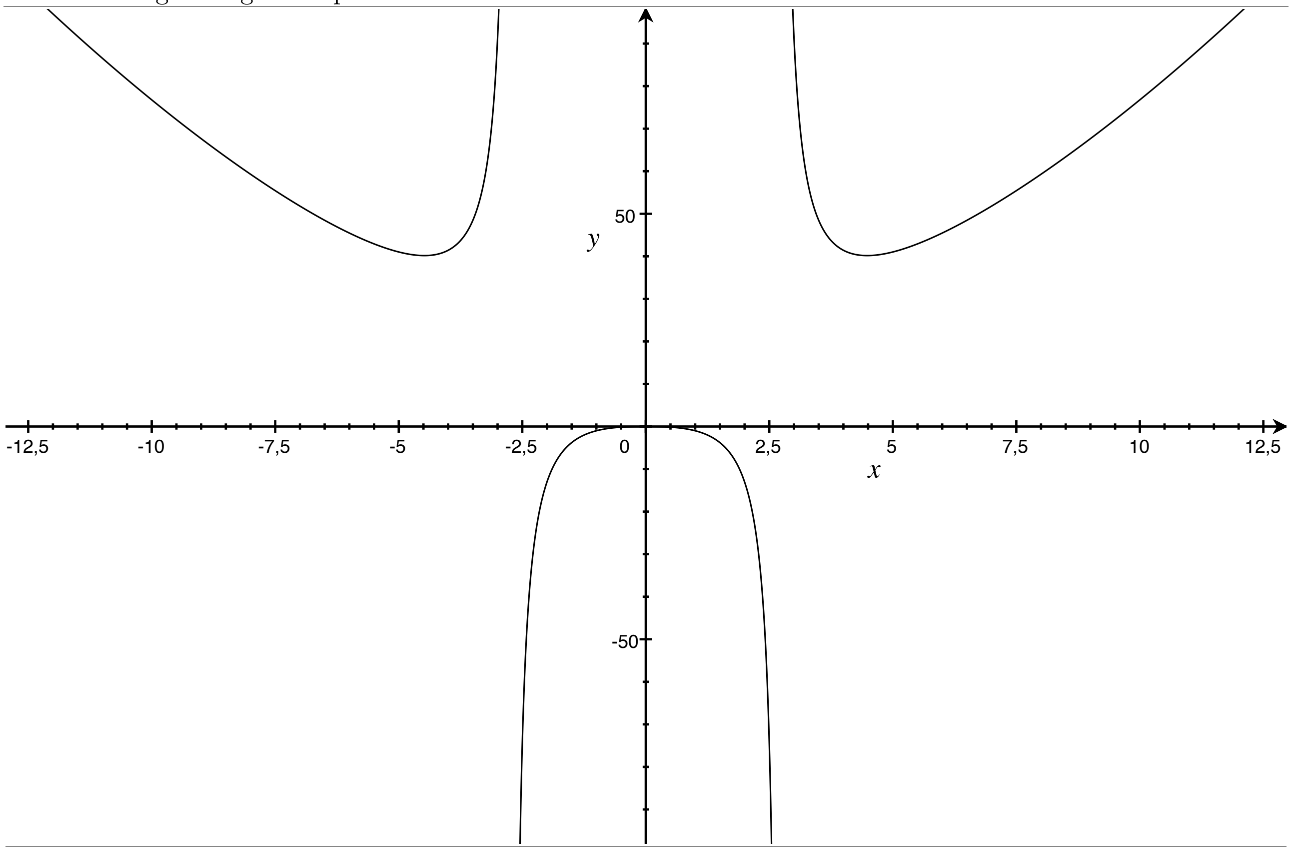
$$f'(x) = \frac{x(2\log(x) - 3)}{(\log(x) - 1)^2}$$

e notiamo che il denominatore risulta sempre positivo nel dominio della funzione. Il segno della derivata prima dipende dal segno del suo numeratore. Poiché stiamo studiando la funzione per $x > 0$, avremo che $f'(x) > 0$ se e solo se $2\log(x) - 3 > 0$. Concludiamo quindi che $f'(x) < 0$ per $0 < x < e$ e per $e < x < e^{3/2}$, intervalli in cui la funzione risulta strettamente decrescente, mentre $f'(x) > 0$ per $x > e^{3/2}$, dove la funzione risulta strettamente crescente. Ne segue che il punto $x = e^{3/2}$ è il punto di minimo locale la cui esistenza era garantita dal Teorema di Weierstrass generalizzato e non esistono altri punti di minimo o massimo locale. Per studiare la convessità della funzione, ne calcoliamo la derivata seconda usando le regole di derivazione; per $x > 0$ otteniamo

$$f''(x) = \frac{2\log^2(x) - 7\log(x) + 7}{(\log(x) - 1)^3}.$$

Notiamo che il numeratore non si annulla mai ed in particolare è sempre positivo (basta usare la sostituzione $t = \log(x)$ e accorgersi che $2t^2 - 7t + 7 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$), quindi il segno della derivata seconda dipende solo dal suo denominatore.

Abbiamo allora $f''(x) > 0$ per $e < x < +\infty$ e la funzione risulta convessa su questo intervallo, mentre $f''(x) < 0$ per $0 < x < e$, intervallo dove la funzione è concava. Non ci sono punti di flesso. Per simmetria concludiamo per gli $x < 0$ e otteniamo il seguente grafico qualitativo.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx.$$

Soluzione

Scriviamo l'integranda come $1 \cdot \log(x^2+1)$ e usiamo integrazione per parti, integrando 1 e derivando $\log(x^2+1)$. Troviamo

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \log(x^2+1)\,dx &= x\log(x^2+1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= x\log(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\ &= x\log(x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx \\ &= x\log(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + C\end{aligned}$$

Segue

$$\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx = \Big[x\log(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)\Big]_0^1 = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 3 Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Soluzione

Usiamo il criterio del rapporto, con $a_n = \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}$. Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{e^n (n!)^2} = \frac{e(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

(dove abbiamo usato $((n+1)!)^2 = ((n+1)(n)!)^2 = (n+1)^2(n!)^2$ e $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$). Ora,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{en^2+2en+e}{4n^2+6n+2} = \frac{e}{4} < 1,$$

dunque la serie converge.