OSSERVAZIONI sui MOMENTI

Sappiamo che $\mathbb{E}[X^n]$ esiste se $\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} \sum |x_i|^n p_X(x_i) & \text{(discreto)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f_X(x)\,dx & \text{(con densità)} \end{cases} < \infty$

Lemma

Se $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$, allora per ogni $m \le n$ $\mathbb{E}[|X|^m] < \infty$

Dimostrazione

$\forall x \geq 0$, $x^m < x^n + 1 \implies |x|^m \le 1 + |x|^n \Rightarrow \forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)|^m \le 1 + |X(\omega)|^n$

Quindi $\mathbb{E}[|X|^m] \le \mathbb{E}[1 + |X|^n] = \mathbb{E}[1] + \mathbb{E}[|X|^n] = 1 + \mathbb{E}[|X|^n] < \infty$

E.g. con esponenziali e Gaussiane

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} < \infty \quad \forall n \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx < \infty \quad \forall n$$

Dimostrazione in 2 variabili

Ricordiamo da Cauchy-Schwartz che $|\mathbb{E}[XY]| \le \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[Y^2]^{1/2}$

$\Downarrow$

Se X e Y hanno MOMENTO SECONDO FINITO allora è finito anche $\mathbb{E}[XY]$

N.B. Se $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ sono BEN DEFINITI e X, Y sono INDIPENDENTI allora $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, in particolare $\mathbb{E}[XY]$ è FINITO

Abbiamo visto che se $X_1, \dots, X_n$ sono Bernoulli(p) INDIPENDENTI

allora $Y = X_1 + \dots + X_n$ è Bernoulli (n,p)

$\Downarrow$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np$$

Dunque il valore atteso di una Bernoulli (n,p) è np

Osservazione: se X, Y hanno la stessa legge (discrete o con densità) allora $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$, $VAR(X) = VAR(Y)$

E.g. Se X, Y hanno densità, avere la stessa legge significa $f_X(t) = f_Y(t) \quad \forall t$
$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

CORRELAZIONE

Vogliamo provare a misurare se c'è una CORRELAZIONE LINEARE tra due variabili aleatorie

Definizione: se $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ variabili aleatorie ognuna con MOMENTO 2° FINITO

allora
$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y]] - \mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Definizione: definiamo il COEFFICIENTE di CORRELAZIONE come

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \quad \text{se } \sigma(X), \sigma(Y) \neq 0$$

N.B. $\sigma(X) = \sqrt{VAR(X)}$
$\Downarrow$
Se $VAR(X) = 0$ allora X è una COSTANTE

Osservazione: se X e Y sono INDIPENDENTI allora $cov(X, Y) = 0$, $\rho(X, Y) = 0$

N.B. NON è vero il contrario: se $cov(X, Y) = 0$ allora X, Y sono INDIPENDENTI

e.g. Consideriamo le variabili aleatorie X con densità uniforme su $[-1, 1]$ e $Y = X^2$

quindi $f_X(t) = \begin{cases} 1/2 & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^n\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ pari} \end{cases}$$

quindi $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] =$
$= 0 - 0 \cdot \frac{1}{3} = \emptyset$

Osservazione: vale la stessa cosa con X Gaussiana Standard, $Y = X^2$

<u>Proposizione</u>: se X, Y, Z hanno MOMENTO 2° FINITO allora valgono le seguenti proprietà:

① $Cov(aX+bY+c, Z) = a\,Cov(X,Z) + b\,Cov(Y,Z)$

② $VAR(X) = Cov(X,X)$

③ $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

④ $VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

⑤ Sono EQUIVALENTI

ⓐ $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

ⓑ $Cov(X,Y) = 0$

ⓒ $VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y)$

⑥ $|\rho(X,Y)| \leq 1$, $|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

<u>Dimostrazione</u> ① Per LINEARITÀ di $\mathbb{E}$ $\rightarrow \mathbb{E}[(aX+bY+c)Z] - \mathbb{E}[aX+bY+c]\mathbb{E}[Z] =$

$= a\mathbb{E}[XZ] + b\mathbb{E}[YZ] + c\mathbb{E}[Z] - a\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] + b\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] - c\mathbb{E}[Z]$

$= a\,Cov(X,Z) + b\,Cov(Y,Z)$

② $Cov(X,X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

③ La formula $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ è SIMMETRICA in X, Y

④ $\mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]$

$= VAR(X) + VAR(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

⑤ ⓐ $\Leftrightarrow$ ⓑ dalla definizione $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

ⓐ $\Rightarrow$ ⓒ dal punto ④ ma anche che $2Cov(X,Y) = VAR(X+Y) - VAR(X) - VAR(Y)$

quindi se vale ⓒ il membro dx è nullo, dunque ⓑ

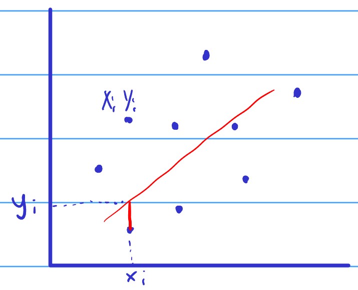
⑥ Segue da Cauchy-Schwarz applicato a $X' = X - \mathbb{E}[X]$, $Y' = Y - \mathbb{E}[Y]$

$$|Cov(X,Y)| = |\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]| \leq \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]^{1/2}\,\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2]^{1/2}$$

$$= VAR(X)^{1/2}\,VAR(Y)^{1/2} = \sigma(X)\sigma(Y)$$

Teorema: se X, Y hanno MOMENTO 2° e $\sigma(X), \sigma(Y) \neq 0$

vale che $\min_{a,b \in \mathbb{R}^2} \{ \mathbb{E}[(Y - a - bX)^2] \} = \text{VAR}(Y)(1 - \rho(X,Y)^2) = Q$



Idea: ci chiediamo quando una generica retta calcolata in X approssima bene Y $(Y \approx aX + b)$

Caso discreto (x_i, y_i) esiti della coppia X, Y $\rightarrow \mathbb{E}[(Y - a - bX)^2] = \sum_i (y_i - a - bx_i)^2 p_{(X,Y)}(x_i, y_i)$

In maniera analoga anche quando X, Y con densità (avremo le formule con gli integrali)

Osservazione: se $\rho(X,Y) = \pm 1$ allora $Q = \emptyset$, dunque esistono due punti a^*, b^* tali che $\mathbb{E}[(Y - a - bX)^2] = 0$

quindi $Y = a + bX$ (correlazione LINEARE)

Più ρ si allontana da ± 1, meno l'approssimazione $Y \approx a + bX$ è sensata perché Q cresce

ESERCIZIO

Se X è Poisson(λ) e Y è Poisson(μ) e sono <u>INDIPENDENTI</u>, determinare la legge $Z = X + Y$

Sappiamo che la funzione di massa di una Poisson è $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = k)$ $k \in \mathbb{N}$

Applichiamo la formula della CONVOLUZIONE $\left(p_Z(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(n-k) p_Y(k) \right)$

$$p_Z(n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{(n-k)} \mu^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \mu^k = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

Quindi Z è Poisson$(\lambda + \mu)$