| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 948719<br>13 luglio 2022 |
|---|---|---|

**1.** La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{(x^2)}+1\right)$

(a) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

► (b) ha un asintoto obliquo e nessun altro tipo di asintoto

(c) non ha nessun tipo di asintoto

(d) ha un asintoto verticale e nessun altro tipo di asintoto

*Soluzione*:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}\log(e^{x^2}+1)$$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua, quindi non ha asintoti verticali. Cerchiamo un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^4+1)}\log\left[e^{x^2}\left(1+e^{-x^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^5(1+o(1))}\left[x^2+\log\left(1+e^{-x^2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^5(1+o(1))}\cdot(1+o(1)) = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{x^2}+1\right)-x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[\log(e^{x^2})+\log(1+e^{-x^2})\right]-x(x^4+1)}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[x^2+e^{-x^2}+o(e^{-x^2})\right]-x^5-x}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{-x^2}-x+o(x^3e^{-x^2})}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}-x^{-2}+o(e^{-x^2})}{x+x^{-1}} = \frac{0}{+\infty} = 0 = q.$$

f ha quindi l'asintoto obliquo di equazione $y=x$ per $x\to+\infty$. Dato che f è dispari, ha anche lo stesso asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

La presenza di asintoti orizzontali è incompatibile con quella degli asintoti obliqui.

**2.** Sia $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x & \text{se } x\geq 0\\ \log(1+x) & \text{se } x<0.\end{cases}$ Allora

(a) $f$ è continua in $(-1{,}0]$

► (b) $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=f'_+(0)$

(c) $f'(0)=1$

(d) $f$ è continua in $(-1,+\infty)$

*Soluzione*:

$$f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R} \qquad f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x & \text{se } x\geq 0\\ \log(1+x) & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$\text{se } x<0 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\text{se } x>0 \Rightarrow f'(x)=\cos x-\sin x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\cos 0-\sin 0=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

**3.** Se $F(x)=\int_{\log x}^{e^2}\frac{t^2}{e^t+e^{3t}}\,dt$ allora $F'(e^2)=$

(a) $\frac{4}{e^2+e^6}$

(b) $\frac{e^4}{e^{(e^2)}+e^{(3e^2)}}$

► (c) $\frac{-4}{e^8+e^4}$

(d) $0$

*Soluzione*:

$$F(x)=\int_{\log x}^{e^2}\frac{t^2}{e^t+e^{3t}}\,dt$$

$$F'(x)=-\frac{\log^2 x}{e^{\log x}+e^{3\log x}}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{\log^2 x}{x+x^3}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{\log^2 x}{x^2+x^4}$$

$$F'(e^2)=-\frac{\log^2(e^2)}{e^4+e^8}=\frac{-4}{e^4+e^8}$$

**4.** $\int_{-3}^{-2}\frac{x+3}{2-x}\,dx=$

► (a) $-1+5\log\frac{5}{4}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $5\log 4-5\log 5$

(d) non esiste

*Soluzione*:

$$\int \frac{x+3}{2-x}\,dx = -\int \frac{x+3}{x-2}\,dx = -\int \frac{x-2+5}{x-2}\,dx = \int -1 - \frac{5}{x-2}\,dx =$$

$$= -x - 5\log|x-2| + c$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\,dx = \Big[-x - 5\log|x-2|\Big]_{-3}^{-2} = 2 - 5\log|-4| - 3 + 5\log|-5| =$$

$$= -1 + 5\log\frac{5}{4}$$

**5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(a) diverge positivamente (b) non esiste (c) diverge negativamente (d) converge

*Soluzione*:

Per $x \to 0$

$$e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e^{\frac{x-1}{x+1}} - e^{-1} = e^{-1}\left(e^{\frac{x-1}{x+1}+1} - 1\right) = e^{-1}\left(e^{\frac{x\cancel{-1}+x\cancel{+1}}{x+1}} - 1\right)$$

$$= e^{-1}\left(e^{\frac{2x}{x+1}} - 1\right) = e^{-1}\left(\cancel{1}+\frac{2x}{x+1} + o\left(\frac{2x}{x+1}\right) \cancel{-1}\right) =$$

$$= x e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \cancel{x} e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x^{3/2}}} \cdot \cancel{x^{1/2}} = e^{-1} \cdot 2$$

Dato che $\int_0^1 g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)dx$ converge, dove $f(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

Per $x \to +\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e}$

quindi scegliamo $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ per ottenere

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = e - \frac{1}{e}$. Dato che $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

**6.** Sia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{(e^{x^2}-1)\sqrt{x}\log(1+x)}$. Allora

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -\infty$ ▶ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ esiste finito (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ non esiste (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = +\infty$

*Soluzione*:

per $x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{\sin x\,(\cos x - 1)}{(e^{x^2}-1)\sqrt{x}\,\log(1+x)} = \frac{[x+o(x^2)]\,[\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\cancel{-1}]}{[\cancel{1}+x^2+o(x^2)\cancel{-1}]\,x^{1/2}\,[x+o(x)]}$$

$$= \frac{\cancel{x}(1+o(x))\,\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+o(x)\right)}{\cancel{x^2}(1+o(1))\cdot x^{1/2}\,\cancel{x}(1+o(1))} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{x^{1/2}(1+o(1))}$$

scegliamo quindi $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ ottenendo che

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$. Poiché $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ converge,

dal criterio del confronto asintotico abbiamo che

anche $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ converge.

**7.** $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2-\frac{1}{n^2}\right)(n^3-e)$

(a) vale $+\infty$

(b) vale $-\infty$

► (c) è un numero reale diverso da 0

(d) vale 0

*Soluzione*:

$$a_n = \left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right)(n^3 - e) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) n^3 (1 + o(1)) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) n^3 (1 + o(1)) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cancel{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}}\right) n^3 (1 + o(1)) =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1 + o(1))\, n^3 (1 + o(1)) = 1 + o(1)$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

**8.** La successione $a_n = \log(2e^n - n) - n, \quad n \geq 1$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

► (d) ha minimo ma non ha massimo

*Soluzione*:

$$a_n = \log(2e^n - n) - n = \log\left(2e^n\left(1 - \frac{n}{2e^n}\right)\right) - n =$$

$$= \log 2 + \cancel{n} + \log\left(1 - \frac{n}{2e^n}\right) - \cancel{n} \longrightarrow \log 2.$$

$$a_n < \log 2 \iff \log(2e^n - n) - n < \log 2$$

$$\iff \log\left(\frac{2e^n - n}{e^n}\right) < \log 2 \iff \frac{2e^n - n}{e^n} < 2$$

$$\iff \cancel{2e^n} - n < \cancel{2e^n} \iff -n < 0 \quad \text{sempre verificata } \forall n \geq 1$$

Quindi $a_n < \log 2 \;\; \forall n \geq 1$. Ne segue che $(a_n)$ ha minimo ma non ha massimo $(\sup(a_n) = \log 2)$.

**9.** La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-n)^3\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

► (c) converge assolutamente

(d) diverge negativamente

*Soluzione*:

$$\sum_{n\geq 1} (-n)^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

La serie è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$\left| (-n)^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3} \right| = n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

Proviamo ora ad applicare il criterio della radice

$$\sqrt[n]{n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \sqrt[n]{n^3} \cdot \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$. Consideriamo l'altro fattore.

$$\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \log\left(n \sin \frac{1}{n}\right)} = e^{n^2 \log\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)}$$

$$= e^{n^2 \log\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{n^2 \left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{6} + o(1)} \longrightarrow e^{-1/6}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}} = 1 \cdot e^{-1/6} = \frac{1}{e^{1/6}} < 1$.

Per il criterio della radice, la serie converge assolutamente.

**10.** La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-4n} \log^2 n}{n+1}$

(a) è indeterminata

(b) diverge a $+\infty$

(c) converge semplicemente ma non assolutamente

► (d) converge assolutamente

*Soluzione*:

Sia $a_n = \frac{(-1)^n e^{-4n} \log^2 n}{n+1}$. Vediamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{e^{-4n} \log^2 n}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-4} \sqrt[n]{\log^2 n}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{e^{-4}\cdot 1}{1} = \frac{1}{e^4} < 1,$$

quindi la serie converge assolutamente.

**11.** L'insieme dove i gradienti delle due funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$ sono paralleli

► (a) è costituito da infiniti punti allineati

(b) è costituito da un solo punto

(c) è vuoto

(d) è costituito da due punti

*Soluzione*:

$$f(x,y) = x^2+y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-3)$$

$\nabla f$ è parallelo a $\nabla g \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\begin{cases} \cancel{2}x = \lambda \cancel{2}(x-1) \\ \cancel{2}y = \lambda \cancel{2}(y-3) \end{cases}$$

osserviamo che $x=1$ non è soluzione come $y=3$ non è soluzione.

quindi $\begin{cases} \lambda = \frac{x}{x-1} \\ y = \frac{x}{x-1}(y-3) \end{cases} \Rightarrow (x-1)y = x(y-3) \iff \cancel{xy} - y = \cancel{xy} - 3x$

$\iff \boxed{y = 3x}$ che descrive una retta.

**12.** Gli insiemi di livello della funzione $f(x,y) = \frac{3y}{x}$ sono

(a) archi di iperbole

(b) archi di parabola

► (c) rette private di un punto

(d) ellissi

*Soluzione*:

$$f(x,y) = \frac{3y}{x}$$

La funzione non è definita per $x = 0$.

Le curve di livello sono descritte dall'equazione

$\frac{3y}{x} = \lambda$ , $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $x \neq 0$, moltiplichiamo per $x$

$3y = \lambda x$ $\quad y = \frac{\lambda}{3} x$ che descrive una retta privata di

un punto, dato che $x \neq 0$.