Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 13 luglio 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3|$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Determinare inoltre il numero degli zeri della funzione. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo e del termine al denominatore, dobbiamo imporre $|x-3| \neq 0$ quindi si ha che l'insieme di definizione di f è dato da $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Osserviamo che la funzione è tale che $f(x+3) = f(-x+3)$, questo implica che il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 3$. Inoltre possiamo calcolare il limite per $x \to 3$ con la sostituzione $t = |x-3|$ come segue

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3| = \lim_{t\to 0^+} \frac{2 + 5\sqrt{t}\log t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

La retta $x = 3$ risulta essere un asintoto verticale per f. Calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Escludiamo la presenza di asintoti obliqui poichè $f(x) \sim 5\log|x-3|$ per $x \to \pm\infty$. La funzione è derivabile nel suo insieme di definizione in quanto composizione di funzioni derivabili. Ne calcoliamo la derivata prima ed otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right) & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

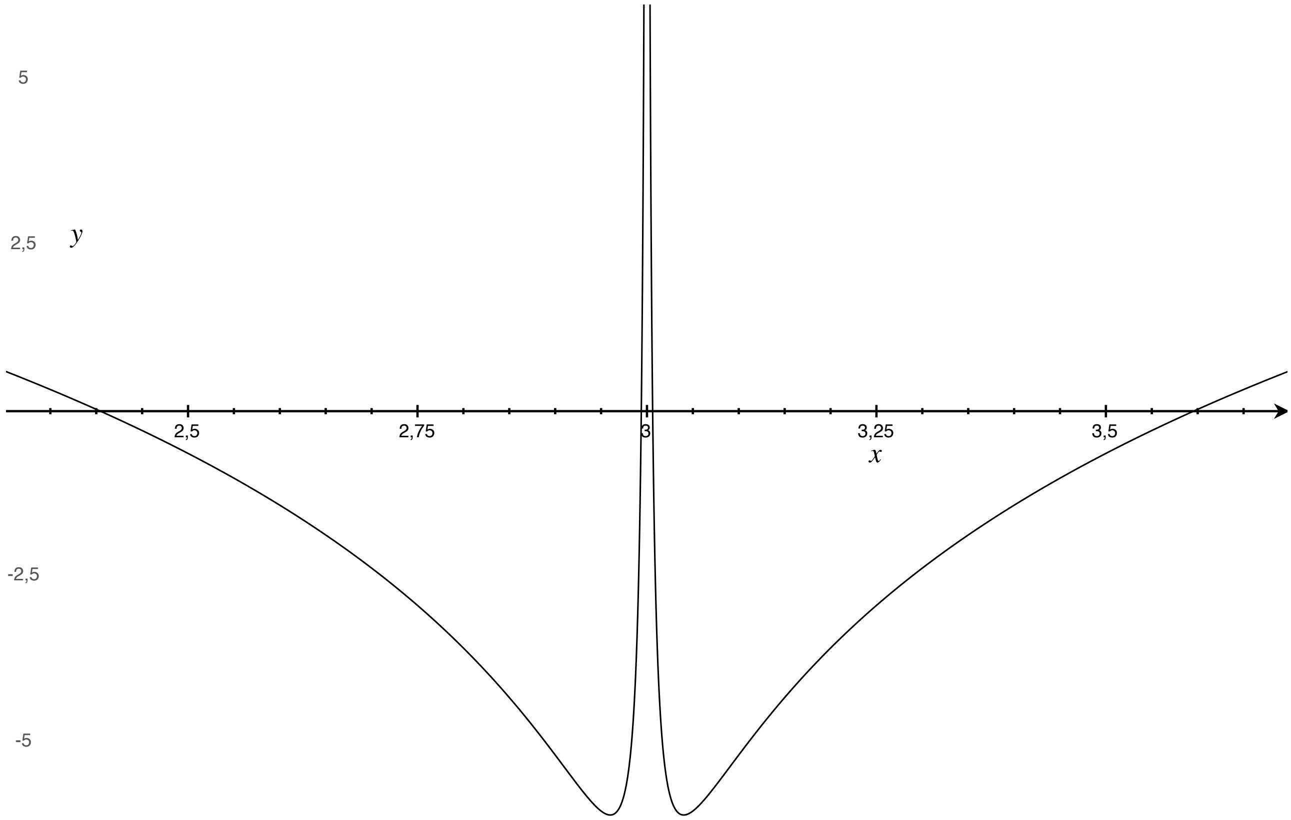
Si ha che $f'(x) = 0$ in $x = \frac{74}{25}$ e in $x = \frac{76}{25}$ con $f'(x) > 0$ per $\frac{74}{25} < x < 3$ e per $x > \frac{76}{25}$. Ne deduciamo che i punti $x = \frac{74}{25}$ e $x = \frac{76}{25}$ sono di minimo assoluto per f, f è crescente in $\left[\frac{74}{25}, 3\right)$ e in $\left[\frac{76}{25}, +\infty\right)$, mentre f è decrescente in $\left(-\infty, \frac{74}{25}\right]$ e in $\left(3, \frac{76}{25}\right]$. Inoltre vale $f\left(\frac{74}{25}\right) = f\left(\frac{76}{25}\right) = 10(1-\log 5) < 0$. Poichè $f(0) > 0$, il teorema degli zeri ci garantisce che f ammette quattro zeri x_1, x_2, x_3, x_4 con

$$0 < x_1 < \frac{74}{25} < x_2 < 3 < x_3 < \frac{76}{25} < x_4.$$

Sfruttiamo ora la simmetria rispetto alla retta $x = 3$ e calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 3$. Abbiamo per $x < 3$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{(3-x)^{5/2}} - \frac{5}{(x-3)^2}$$

che si annulla per $x = \frac{291}{100}$ ed è strettamente positiva per $\frac{291}{100} < x < 3$, intervallo ove la funzione risulta quindi strettamente convessa. La funzione risulta invece concava per $-\infty < x < \frac{291}{100}$. Il punto $x = \frac{291}{100}$ è di flesso. Per simmetria concludiamo nel caso $x > 3$.



Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Soluzione

Visto che $e^{(x^2)} - 1 \neq 0$ per $x > 0$, l'unico punto problematico per la continuità è $x = 0$. Ovviamente si ha $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$, quindi basta preoccuparsi del $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Usando gli sviluppi di Taylor vediamo che

$$\frac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} = \frac{(\alpha - 1)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

da cui segue che il limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ è 0 se e solo se $\alpha = 1$. Dunque la $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 1$, e per $\alpha \neq 1$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma discontinua in 0.

Per quanto riguarda la derivabilità, la $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per qualsiasi α, con derivata $f'(x) = 0$ se $x < 0$ e

$$f'(x) = \frac{(2\alpha x \cos(\alpha x^2) - 2 \sin x \cos x)(e^{(x^2)} - 1) - (\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2)(2xe^{(x^2)})}{(e^{(x^2)} - 1)^2}$$

se $x > 0$.

Rimane da preoccuparsi di $x = 0$, e visto che derivabile implica continua, l'unica possibilità è che $\alpha = 1$. Chiaramente $f'_-(0) = 0$, quindi dobbiamo vedere se $f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} = 0$ oppure no.

Per $h \to 0^+$, sviluppando il numeratore a ordine 3 abbiamo

$$\frac{f(h) - 0}{h} = \frac{\sin(h^2) - (\sin h)^2}{h(e^{(h^2)} - 1)} = \frac{h^2 + o(h^3) - (h^2 + o(h^3))}{h^3 + o(h^3)} = \frac{o(h^3)}{h^3 + o(h^3)} \to 0$$

e quindi la $f(x)$ per $\alpha = 1$ è effettivamente derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza, semplice ed assoluta, della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n + \sqrt[(n^2)]{n}}{n}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, in quanto $\sqrt[(n^2)]{n} = n^{\frac{1}{n^2}} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la convergenza semplice e assoluta sono equivalenti.

Scriviamo

$$\sum_n \frac{(-1)^n + \sqrt[(n^2)]{n}}{n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n} + \sum_n \frac{\sqrt[(n^2)]{n}}{n}.$$

La prima serie converge per il criterio di Leibnitz. Per quanto riguarda la seconda serie, visto che

$$\sqrt[(n^2)]{n} = n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\log n}{n^2}} \to e^0 = 1$$

quando $n \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha lo stesso comportamento della serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$, che diverge positivamente.

In conclusione, la serie data diverge positivamente.