



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Corso a Libera Scelta - 6 CFU

Introduzione all'Intelligenza Artificiale

Professore:

Prof. Alessio Micheli
Prof. Claudio Gallicchio

Autore:

Matteo Giuntoni Filippo Ghirardini

Anno Accademico 2023/2024

Contents

1	Punto materiale	2
1.1	Vettore accelerazione	3
1.2	Vettore quantità di moto	3
1.3	Vettore momento angolare rispetto a un polo P	3
1.4	Coordinate polari	3
1.5	Versori polari (2D)	4
2	Forze	5
2.1	Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$	5
2.2	Forza peso $\vec{F} = -mg \hat{z}$	5
2.3	Forza elastica $\vec{F} = -k(\ \vec{r} - \vec{r}_v\ - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{\ \vec{r} - \vec{r}_v\ }$	6
2.4	Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma \dot{\vec{r}}(t)$	7
2.5	Data la legge oraria, trovare la forza	7
2.6	Discretizzare la variabile temporale	7
3	Reazioni vincolari	8
4	Energia	10
4.1	Energia cinetica	10
4.2	Energia meccanica	11

1 Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D. Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse. Vettore posizione come funzione del tempo $t[s]$.

Esempio 1.0.1. Una molecola di ossigeno se sono interessato all'aerodinamica di una vettura. Un satellite attorno alla terra se ignoro le forze di marea.

Un **vettore posizione** è una funzione del tempo $t[s]$.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

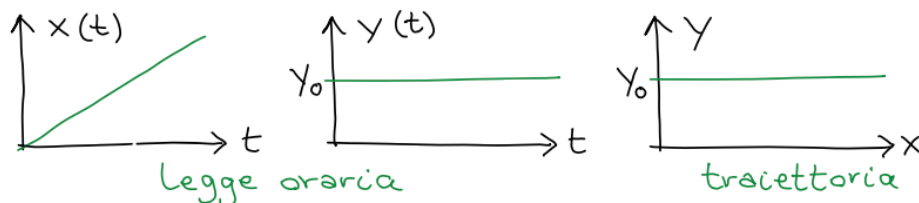
Osservazione 1.0.1. I versori cartesiani sono costanti

Definizione 1.0.1 (Legge oraria). Si definisce come legge oraria la funzione $t \mapsto \vec{r}(t)$.

Definizione 1.0.2 (Traiettoria). Il luogo geometrico di punti visitati dal punto materiale.

$$\{\vec{r}(t) \text{ per } t \in \mathbb{R}\}$$

Esempio 1.0.2. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ e $v_0 = 3m/s$, $y_0 = 5m$



Definizione 1.0.3. La **velocità istantanea** è la derivata della posizione rispetto al tempo.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Definizione 1.0.4. La **velocità media** è definita come il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo necessario per effettuarlo.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

In parole povere è una grandezza che ci dice con quale rapidità cambia la posizione di un punto rispetto al tempo nell'istante t .

Vettore velocità

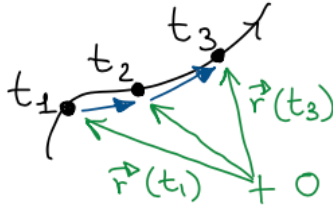
Derivata rispetto al tempo del vettore posizione e si indica come $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)[m/s]$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \end{aligned} \tag{1}$$

Per ricavare la forma esplicita uso le proprietà delle derivate (**linearità, Leibnitz**)

Esempio 1.0.3. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t\hat{x} + y_0\hat{y}$ abbiamo che $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0\hat{x}$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea").



$$\begin{aligned}
 L &= ||\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|| + ||\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|| + ||\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)|| + \dots \\
 &= \sum_i ||\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)|| \text{ per } |t_{i+1} - t_i| \text{ "piccolo"} \\
 &= \sum_i \left\| \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} ||\dot{\vec{r}}(t)||
 \end{aligned}$$

Esempio 1.0.4. $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$ $||\dot{\vec{r}}(t)|| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0|$ $L = |v_0| \cdot (t_{fin} - t_{in})$
 Il vettore è costante quindi facendo la derivata torna zero. Con la velocità si calcola lo spazio percorso ("integrale di linea"). La differenza fra le posizioni e la differenza dei tempi è il rapporto incrementale in caso gli intervalli siano sufficientemente piccoli, da qui si ottiene l'integrale.

1.1 Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità e si indica con $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t)[m/s^2]$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \quad (2)$$

Esempio 1.1.1. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0 t^2, v_0 t, 0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (a_0 t, v_0, 0)$ $\ddot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$

Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determinata la legge oraria è formulata in termini di accelerazione.

1.2 Vettore quantità di moto

Il prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (m\dot{x}(t), m\dot{y}(t), m\dot{z}(t)) = m\dot{x}(t)\hat{x} + m\dot{y}(t)\hat{y} + m\dot{z}(t)\hat{z}$$

Esempio 1.2.1. Prendiamo un punto di massa 2kg e velocità 3m/s lungo \hat{x} .
 $p_x(t) = 2 \cdot 3kg \cdot m/s = 6kg \cdot m/s$ $p_y(t) = p_z(t) = 0$.

Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di più punti materiali.

1.3 Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_p(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

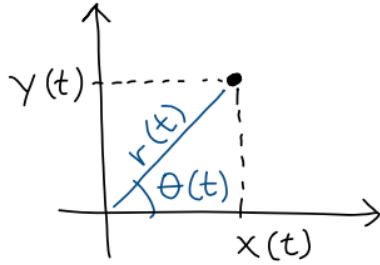
Dove \vec{r}_p è il vettore posizione di p, mentre $\dot{\vec{r}}(t)$ è il prodotto vettoriale.

Esempio 1.3.1. $\vec{r}_p = (l_0, 0, 0)$ $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$
 $\vec{L}_p = m[(v_0 t - l_0)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times (v_0\hat{x}) = m(v_0 t - l_0)v_0\hat{x} \times \hat{x} + my_0 v_0 \hat{y} \times \hat{x} = my_0 v_0 (-\hat{z}) = (0, 0, -my_0 v_0)$
 Ricorda che $\hat{x} \times \hat{x} = 0$ e $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Il momento angolare dice quanta inerzia ha un oggetto in una rotazione (descrizione sommaria).
 Il polo P è parte della definizione. È una scelta! Il risultato dipende dal polo. Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

1.4 Coordinate polari

Un metodo per rappresentare delle coordinate x, y andando a misurare prima la distanza dall'origine e poi si va a vedere quanto vale l'angolo fra questo segmento dall'asse x, utilizzando seno e coseno.



$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ \text{tg}(\Theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$

Esempio 1.4.1. Esempi di rappresentazione di coordinate in coordinate polari.

$$x = 0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = \pi/2$$

$$x = 0, y = -l_0 < 0 \Rightarrow r = l_0, \Theta = -\pi/2$$

$$x = l_0, y = l_0 > 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}l_0, \Theta = \pi/4$$

1.5 Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\Theta}(t)$ ortogonale. Si esprime facilmente in coordinate polari.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \Theta(t), r(t) \sin \Theta(t)) = r(t)(\cos \Theta(t) \hat{x} + \sin \Theta(t) \hat{y})$$

Ma $\|\vec{r}(t)\| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco $\hat{r}(t) = \vec{r}(t)/\|\vec{r}(t)\| = \cos \Theta(t) \hat{x} + \sin \Theta(t) \hat{y}$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è:

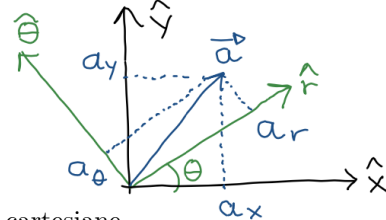
$$\hat{\Theta}(t) = -\sin \Theta(t) \hat{x} + \cos \Theta(t) \hat{y} \quad \text{infatti} \quad \hat{r} \cdot \hat{\Theta} = c \cdot (-s) + s \cdot c = 0$$

Note 1.5.1. Non c'è legame fra Θ e $\hat{\Theta}$ è solo una convenzione.

Le trasformazioni inverse invece si fanno come segue (verifico per sostituzione):

$$\hat{y} = \cos \Theta(t) \hat{r} - \sin \Theta(t) \hat{\Theta} \quad \hat{y} = \sin \Theta(t) \hat{r} + \cos \Theta(t) \hat{\Theta}$$

Possono quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\Theta \hat{\Theta}$ con le componenti polari a_r, a_Θ . Per evitare ambiguità non scriviamo (a_r, a_Θ) e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.



A differenza dei versori cartesiani quelli polari dipendono dal tempo per costruzioni.

$$\dot{\hat{r}}(t) = \frac{d}{dt}[\cos \Theta(t) \hat{x} + \sin \Theta(t) \hat{y}] = -\sin \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t) \hat{x} + \cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t) \hat{y}$$

Dove $\cos \Theta(t) \cdot \dot{\Theta}(t)$ si applica la derivata della somma, Leibnitz, funzione composta.

$$= \dot{\Theta}(t) \cdot \hat{\Theta}(t) \quad (\text{confronto l'espressione di } \hat{\Theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\dot{\Theta}(t) \hat{r}(t)$.

Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t)$$

Dove abbiamo che $\vec{r}(t)$ è il vettore, $r(t)$ è una coordinata polare, $\hat{r}(t)$ è il versore polare.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\hat{r}}(t)$$

Dove la parte $\dot{\vec{r}}(t)$ è la velocità radiale.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\Theta}(t)^2] \hat{r} + [r(t) \ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}(t) \dot{\Theta}(t)] \hat{\Theta}$$

Nel quale abbiamo che la parte $r(t) \dot{\Theta}(t)^2$ si chiama **velocità centripeta**, mentre $2\dot{r}(t) \dot{\Theta}(t)$ si dice **accelerazione di Coriolis**.

2 Forze

La legge oraria $\vec{F}(t)$ di un punto materiale di massa m è determinata dalla soluzione di una equazione del moto detta **seconda legge di Newton**

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

\vec{F}_1 sono le **forze** [$kg \cdot m/s^2 \equiv N$] (N è l'unità di misura, Newton) agenti sul punto materiale: sono determinate empiricamente. L'equazione differenziale è del **secondo ordine** (derivata seconda) quindi servono due **condizioni al bordo** (si chiamano così perché indicano le condizioni ai bordi del dominio), ad esempio $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ (con questa cosa stiamo dicendo che per descrivere un moto di un sistema dobbiamo sapere in un tempo dove il sistema si trova e la sua velocità).

Questa è un'equazione che va a descrivere fenomeni da dimensioni incredibilmente piccole a incredibilmente grandi.

Se la somma (detta **risultante** delle forze)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad \text{allora} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) \equiv \vec{v}_0$$

cioè il moto ha velocità costante (**rettilineo uniforme**). Questo è in particolare vero se tutte $\vec{F}_i = 0$ (**prima legge di Newton** o "principio di inerzia di Galileo"). Se un corpo non è soggetto a forze esterne mantiene il suo moto rettilineo uniforme. Questa cosa collega la proprietà di simmetria degli oggetti alla traslazione dello spazio.

2.1 Forza costante $\vec{F} = F_0 \hat{x}$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} & \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \\ m\ddot{\vec{r}}(t) &= F_0 \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proiettato su una base per ottenere 3 equazioni scalari. Mi servono $2 \times 3 = 6$ **condizioni al bordo** per risolvere. Ad esempio condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) & \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t \\ z(t) = z_0 + v_{0z}t \end{cases} \end{aligned}$$

Con t che rappresenta il **moto uniformemente accelerato**

2.2 Forza peso $\vec{F} = -mg\hat{z}$

Usata per esempio in prossimità della superficie terrestre. Con m massa del punto materiale dell'oggetto in cui si applica, mentre \hat{z} ortogonale alla superficie. $g \equiv 9,8 m/s^2$, dipende da M_T , variazioni locali.

Esempio 2.2.1. Grave che cade da altezza h .

$$m\ddot{\vec{r}}(r) = -mg\hat{z} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = h \cdot \hat{z}, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 \text{ (oggetto parte da fermo)}$$

$$\text{Proietto } m\ddot{z}(t) = -mg \quad \dot{z}(t) = -g(t - t_0) \quad z(t) = h - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Si sostituisce le costanti della soluzione per verificare che siano verificate le condizioni ai bordi.

Esempio 2.2.2. Problema del proiettile.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mgh\hat{z} \text{ (equazione del moto)} \quad \text{con} \quad \vec{r}(t_0) = 0$$

$$\text{e } \dot{\vec{r}}(t_0) = v_0 \cdot \cos \Theta \hat{x} + v_0 \cdot \sin \Theta \hat{z} \quad \text{ovvero} \quad \vec{v}_0 = v_0(\cos \Theta, \sin \Theta) \quad ||\vec{v}_0|| = v_0$$

Proiezione lungo \hat{y} banale: $\ddot{y}(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & \dot{x}(t) = v_0 \cos \Theta \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \cos \Theta & x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -g & \dot{z}(t) = v_0 \sin \Theta - g(t - t_0) \\ \dot{z}(t_0) = v_0 \sin \Theta & z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

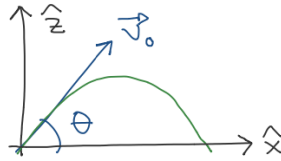
Dalla legge oraria alla traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \Theta (t - t_0) \\ z(t) = v_0 \sin \Theta (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

$$t - t_0 = x(t) / (v_0 \cos \Theta) \quad z = v_0 \sin \Theta x / (v_0 \cos \Theta) - \frac{1}{2}gx^2 / (v_0 \cos \Theta)^2 \quad z = v_0 \tan \Theta x - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \Theta}$$

Osservazione 2.2.1. $\frac{1}{\cos^2 \Theta} = \frac{\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} = 1 + \tan^2 \Theta$
 $z = x \tan \Theta - x^2 \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \Theta)$ (Parabola)

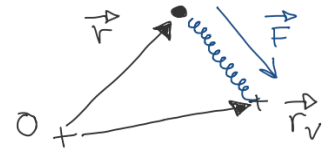
Punto di atterraggio: sistema con $z = 0, x = 0$ (banale) $x = \frac{2v_0^2}{g} \tan \Theta / (1 + \tan^2 \Theta)$



Esempio proiettile

2.3 Forza elastica $\vec{F} = -k(|\vec{r} - \vec{r}_v| - l_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$

Chiamata anche **legge di hooke**. k è la costante elastica espressa in $[N/m]$ del materiale. $l_0[m]$ lunghezza a riposo della "molla", dipende dal vettore posizione \vec{r} ("posizionale"). Altro estremoi / vincolo \vec{r}_v . $-\frac{\vec{r} - \vec{r}_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$ è il versore parallelo alla molla, cioè la distanza fra il punto di destinazione ed il vincolo. La forza elastica è tanto più intensa quanto è estesa la molla, e questa relazione fondamentale è lineare.



Esempio 2.3.1. Oscillatore unidimensionale $\vec{r}_v = 0$.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}, x(t) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F} = -k(|x - 0| - l_0) \frac{x - 0}{|x - 0|} \hat{x} &= -k(|x| - l_0) \frac{x}{|x|} \hat{x} \Rightarrow F_x = -k(x - l_0) \\ m\ddot{x}(t) &= -k[x(t) - l_0] \end{aligned}$$

Soluzione generale (verifico per sostituzione)

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t) \quad \text{con } \Omega \equiv \sqrt{k/m}$$

$\Omega[\text{rad/s}]$ la **frequenza angolare** $\Omega/2\pi[\frac{1}{s} = \text{Hz}]$ è la **frequenza** $T = 2\pi/\Omega[\text{s}]$ è il **periodo**, infatti $\Omega \cdot T = 2\pi$

Trovo A e B imponendo che la soluzione rispetti le condizioni al bordo, es: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Dalla soluzione generale ho

$$\dot{x}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t) \Rightarrow 0 = -\Omega A \sin(\Omega \cdot 0) + B \Omega \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow 0 = 0 + B \Omega \Rightarrow B = 0$$

$$x(t) = l_0 + A \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow x_0 = l_0 + A \cdot \cos(\Omega \cdot 0) \Rightarrow x_0 = l_0 + A$$

La soluzione completa è quindi

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0) \cos(\Omega t)$$

2.4 Forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\gamma\dot{\vec{r}}(t)$

Modello approssimato per le basse velocità. Abbiamo che $-\gamma[N/(m/s)]$ è costante. Il meno è dato perché è una forza che si oppone linearmente ad una velocità.

Esempio 2.4.1. Proiettile in gel balistico.

$$m\ddot{x}(t) = \gamma t \dot{x}(t) \text{ con } \dot{x}(0) = v_0$$

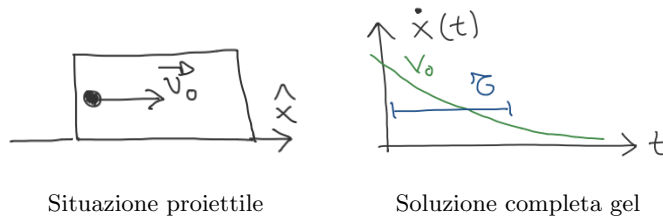
Pongo poi $u(t) \equiv \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{u}t = -\frac{1}{\tau}u(t)$ con $u(0) = v_0$ e $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m} [\frac{1}{s}]$

Soluzione generale $u(t) = Ae^{-t/\tau} \Rightarrow v_0 = A \cdot e^0 \Rightarrow v_0 = A$.

Quindi la soluzione completa è

$$u(t) = v_0 e^{-t/\tau} \text{ ovvero } \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

rallentamento esponenziale.



2.5 Data la legge oraria, trovare la forza

$r(t) = R, \Theta(t) = \Omega t$ **moto circolare uniforme**

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} \quad \hat{r} = \cos(\Theta(t))\hat{x} + \sin(\Theta(t))\hat{t}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [r\ddot{t} - r(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Dalla legge oraria ho: $\dot{r}(t) = 0, \ddot{r}(t) = 0, \dot{\Theta} = \Omega, \ddot{\Theta}(t) = 0 \Rightarrow$ in questo caso $\ddot{\vec{r}}(t) = -R\Omega^2\hat{r}$.

La risultante \vec{F} delle forze deve essere tale che $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \Rightarrow -mR\Omega^2\hat{r} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = -mR\Omega^2\hat{r}$.

La forza è costante e sempre diretta verso lo stesso punto (**forza centrale** o **forza centripeta**).

Otengo \vec{F} solo per questa legge oraria.

Integrazione numerica delle equazioni del moto.

2.6 Discretizzare la variabile temporale

Calcolo al "primo ordine" ("metodo di eulero"), ci sono anche molti altri algoritmi come per esempio Runge-Kutta, la scelta dipende dal problema.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_n \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t \quad \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} \simeq \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} \simeq \frac{\frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\delta t} - \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{i+1} - 2\vec{r}_i + \vec{r}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

L'equazione di Newton diventa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \vec{F}_{i-1}/n \quad \vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

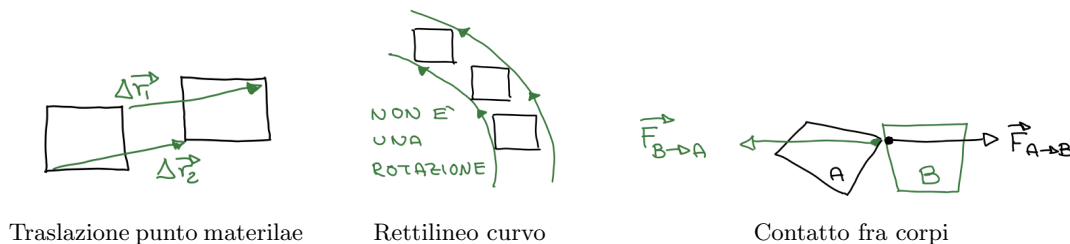
Servono 2 condizioni al bordo \vec{F}_i può dipendere da $t_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i$

3 Reazioni vincolari

Estendiamo il modello del "punto materiale" all'interazione di corpi estesi in moto traslatorio $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_2$ per ogni punto posso studiare una qualsiasi $\vec{r}(t)$

- La **traslazione** può avvenire su una traiettoria curva, parleremo di **rotazione** più avanti.
- Consideriamo il **contatto** tra punti materiali, corpi estesi, superfici.

Le forze di contatto ("reazioni vincolari") non sempre hanno una espressione esplicita e vengono determinate imponendo dei vincoli alle equazioni del moto, ad esempio che un punto segua una data traiettoria.



Esempio 3.0.1. $x(t) \equiv x_0$

La "terza legge di Newton" ("azione e reazione") stabilisce che $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$

Esempio 3.0.2. Massa su una bilancia in presenza di forza peso.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

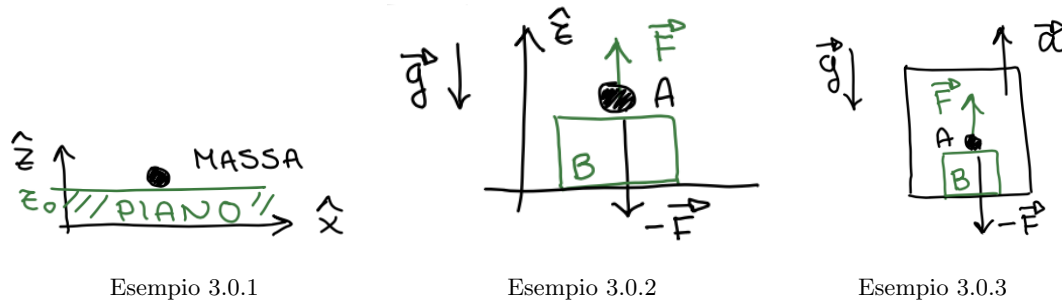
In questo caso il **Vincolo** è: $\dot{\vec{r}}(t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = +mg\hat{z}$. La bilancia misura $\|-\vec{F}\| = mg$ (che noi chiamiamo comunemente peso).

Esempio 3.0.3. Massa su bilancia in ascensore accelerato.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{F}$$

Ciò che cambia ora è il suo **Vincolo** visto che si sta accelerando verso l'alto: $\ddot{\vec{r}}(t) \equiv a \cdot \hat{z} \Rightarrow \vec{F} = m(a + g)\hat{z}$. La bilancia misura $\|-\vec{F}\| = m(a + g)$. La bilancia allora misura una forza peso maggiore in un ascensore (stiamo usando l'equazione "al contrario").

Note 3.0.1. Un punto materiale si "solleva", si "distacca" da una superficie quando la reazione vincolare va a zero.



Scomponiamo la reazione vincolare nella direzione

- ortogonale: "reazione normale" \vec{N} .
- parallelo: "forza di attrito" \vec{F}_a

ad una superficie. Con una superfisce **liscia** abbiamo $\vec{F}_a = 0$, non c'è movimento relativo al punto di contatto. **Attrito statico**, \vec{F}_a da determinare con vincoli. Condizione: $||\vec{F}_a|| \leq \mu_s ||\vec{N}||$. Differenza di velocità \vec{v} al punto di contatto. **Attrito dinamico**, $\vec{F}_a = -\mu_d ||\vec{N}|| \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$, μ_s, μ_d : coeff. di attrito, numeri primi. $-\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ diretto in versione opposta alla velocità.

Esempio 3.0.4. Massa su un piano inclinato liscio e fisso.

$$\hat{x}' = \cos \alpha \cdot \hat{x} - \sin \alpha \cdot \hat{z} \quad \hat{z}' = \sin \alpha \cdot \hat{x} + \cos \alpha \cdot \hat{z} \quad m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\hat{z} + \vec{N}$$

Proietto lungo \hat{z}' : $m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N$

Proietto lungo \hat{x}' : $m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha$

Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \quad \ddot{x}'(t) = g \cdot \sin \alpha$

Visto che $\sin \alpha < 1$ quindi l'accelerazione lungo il piano è $< g$.

Esempio 3.0.5. Massa ferma su piano inclinato scabro.

$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

La scelta fra $-F_a$ o $+F_a$ è indifferente, l'unica cosa che cambia è nel risultato poi sarà diverso il segno di F_a , la coerenza da tenere è riguardante il disegno, se si disegna in una determinata direzione, si cerca di mettere il segno uguale.

Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$.

Vincolo: $x'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{x}'(t) = 0 \Rightarrow F_a = mg \sin \alpha$

Qual'è il massimo valore di α ?

$$||\vec{F}_a|| \leq \mu_s ||\vec{N}|| \Rightarrow mg \sin \alpha \leq \mu_s \cdot mg \cos \alpha \quad tg \alpha \leq \mu_s \quad \alpha \leq \arctan(\mu_s)$$

Esempio 3.0.6. Massa scivola su piano inclinato scabro.

$$m\ddot{z}'(t) = -mg \cos \alpha + N \quad m\ddot{x}'(t) = +mg \sin \alpha - F_a$$

Vincolo: $z'(t) = \cos t \Rightarrow \ddot{z}'(t) = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

Forza di attrito dinamico: $F_a = \mu_d N \Rightarrow m\ddot{x}'(t) = mg \sin \alpha - \mu_d \cdot mg \cos \alpha$

$\ddot{x}'(t) = g(\sin \alpha - \mu_d \cdot \cos \alpha)$. Accelerazione costante, minore che senza attrito.

4 Energia

4.1 Energia cinetica

Definiamo **energia cinetica** di un punto materiale come:

$$k(t) = \frac{1}{2}m||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \quad [k] = kg \cdot m^2/s^2 \equiv J \text{ "Joule"}$$

La parte di $\frac{1}{2}$ sta per convenzione/comodità, le prime definizioni nel 900 infatti non lo aveva.

Esempio 4.1.1. $\vec{r}(t) = v_0 t \hat{x}$ $k = \frac{1}{2}mv_0^2$

Definiamo **lavoro** di una forza $\vec{F}(t)$ applicata nella posizione $\vec{r}(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad [L] = s \cdot N \cdot \frac{m}{s} = J$$

Esempio 4.1.2. $\vec{r} = v_0 \hat{x}$ $\vec{F}(t) = \alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}$ $L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt (\alpha t \hat{x} + \beta \hat{y}) \cdot v_0 \hat{x} = \alpha v_0 \frac{t_1^2 - t_0^2}{2}$

Teorema 4.1.1 (Delle forze vive). Per un punto materiale, la variazione di energia cinetica è pari al lavoro delle forze.

$$K(t_1) - K(t_0) = L_1(t_0, t_1) + L_2(t_0, t_1) + \dots$$

Segue dalla seconda legge di Newton:

$$\begin{aligned} \sum_i d\alpha_i(t) &= \sum_i dt \cdot \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \left(\sum_i \vec{F}_1(t) \right) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= dt \cdot m \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = dt \cdot m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \\ &= \frac{1}{2} m d ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 \text{ e integro membro a membro.} \end{aligned}$$

Se la forza dipende solo dalla posizione di applicazione $\vec{r}(t)$, ma non esplicitamente dal tempo t , si dice **posizionale**. Questo vuol dire che, se immaginiamo un punto materiale che fa un determinata legge oraria, man mano che il punto materiale si muove il suo valore cambia, ed anche la forza cambia, quindi cambia in base alla posizione.

Esempio 4.1.3. $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \alpha x(t) \hat{x} + \beta y(t) \hat{y}$

La dipendenza dal tempo è determinata dall'eventuale movimento della posizione di applicazione. È ben definita $\vec{F}(\vec{r}) \forall t$.

Per una forza posizione il lavoro si semplifica e diventa:

$$\begin{aligned} L(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \\ &= \sum_i \Delta t_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t_i} = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = L_e \text{ "integrale di linea"} \end{aligned}$$

Dipende dalla traiettoria, non dalla legge oraria.

Esempio 4.1.4. $\vec{F}(x) = -kx \hat{x}$ $\vec{r}(t) = v_0 \cdot \cos(\Omega t) \hat{x}$

$$t_0 = 0, \vec{r}(t_0) = x_0 \hat{x}, \quad t_1 = \frac{\pi}{\Omega}, \quad \vec{r}(t_1) = x_0 \cdot (-1) \hat{x}$$

$$L(t_0, t_1) = \int_{x_0}^{-x_0} dx \hat{x} \cdot (-kx \hat{x}) = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^{-x_0} = -kx_0^2 \text{ non dipende da } \Omega$$

Osservazione 4.1.1. Per calcolare l'integrale di linea può comunque convenire la formula $\int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ eventualmente usando una legge oraria più semplice con medesima traiettoria.

Esempio 4.1.5. $\vec{F}(\vec{r}) = -kx\hat{x}$ $\vec{r}(t) = R\vec{r}, \Theta(t) = \Omega t \Rightarrow x(t) = R \cos(\Omega t)$
 $t_0 = 0, \Theta(t_0) = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}, \Theta(t_1) = \frac{\pi}{2} \quad \dots d\vec{r} \dots \quad \dot{\vec{r}}(t) = R\Omega\hat{\Theta} = -R\Omega \sin(\Omega t)\hat{x} + R\Omega \cos(\Omega t)\hat{y}$

$$\begin{aligned} L(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_0^{\pi/2\Omega} [-kR \cos(\Omega t)\hat{x}] \cdot [-R\Omega \sin(\Omega t)\hat{x} + R\Omega \cos(\Omega t)\hat{y}] \\ &= \int_0^{\pi/2\Omega} kR^2\Omega \frac{1}{2} \sin(2\Omega t) (\equiv \alpha) = kR^2\Omega \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{2\Omega} \sin \alpha = \frac{1}{4}kR^2[-\cos \alpha] = \frac{1}{2}kR^2 \end{aligned}$$

Se la forza è **uniforme** lungo il percorso abbiamo

$$L(t_0, t_1) = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t_1)} d\vec{r} = \vec{F} \cdot [\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)] \text{ (spostamento)}$$

Esempio 4.1.6. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(z) = -mg\hat{z}$ (uniforme ovunque).

$$\vec{r}(t) = v_0 t \hat{z} \quad t_0 = 0 \vec{r}(t_0) = 0 \quad t_1 = \frac{h}{v_0} \vec{r}(t_1) = h\hat{z} \quad L(t_0, t_1) = \int_0^{hat} dz \hat{z} \cdot (-mg\hat{z}) = -mgh$$

Una forza posizione si dice **conservativa** e il lavoro non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni iniziali e finali. Questo accade se e solo se esiste una funzione $u(\vec{r})$ detta **potenziale** tale che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}u(\vec{r}) \equiv \left(-\frac{d}{dx}u(\vec{r}), -\frac{d}{dy}u(\vec{r}), -\frac{d}{dz}u(\vec{r})\right)$$

In tal caso $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = u(\vec{r}_0) - u(\vec{r}_1)$

- Forza peso: $u(\vec{r}) = mgz$ $\frac{d}{dx}u(\vec{r}) = \frac{d}{dy}u(\vec{r}) = 0$ $\frac{d}{dz}u(\vec{r}) = mg \Rightarrow \vec{\nabla}u(\vec{r}) = (0, 0, mg) = mg\hat{z} \Rightarrow \vec{F} = -kx\hat{z}$
- Oscillatore unidimensionale: $u(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2$ $\frac{d}{dy}u(\vec{r}) = \frac{d}{dz}u(\vec{r}) = 0$ $\frac{d}{dx}u(\vec{r}) = kx \Rightarrow \vec{\nabla}u(\vec{r}) = (kx, 0, 0) = kx\hat{x} \Rightarrow \vec{F} = -kx\hat{x}$

Osservazione 4.1.2. Una forza non posizionale (es. reazioni vincolari) non può essere conservativa.

4.2 Energia meccanica

Il potenziale è definito "a meno di una costante" perché $-\vec{\nabla}[u(\vec{r}) + u_0] = -\vec{\nabla}u(\vec{r})$. Es: $mg(z - z_0)$ Per un punto materiale, la somma di energia cinetica e dei potenziali delle forze (conservative) alle quali è soggetto (calcolati nella sua posizione) si dice **energia meccanica**.

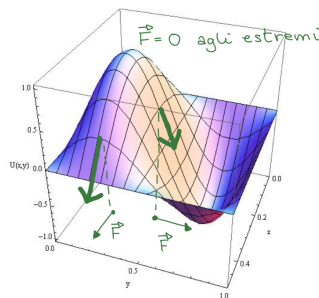
$$E(t) = K(t) + u_1(\vec{r}(t)) + u_2(\vec{r}(t)) + \dots$$

Dal teorema delle forze vive segue che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze **non conservative**

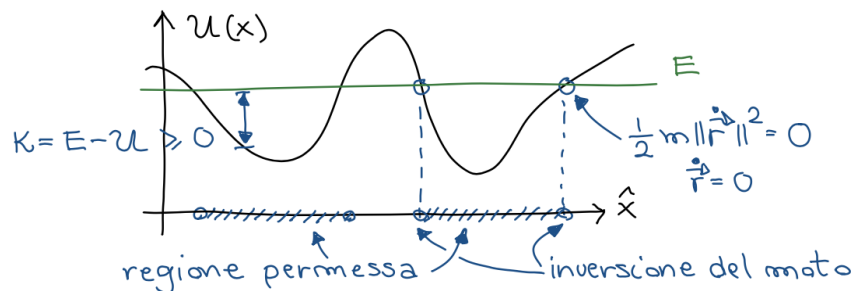
$$E(t_1) - E(t_0) = L_1^{NC}(t_0, t_1) + L_2^{NC}(t_0, t_1) + \dots$$

Se $L_i^{NC} = 0$ l'energia meccanica è **costante** nel tempo ("conservata").

Il profilo del potenziale visualizza le forze.



Il profilo di potenziale visualizza le regioni dove il moto è permesso se l'energia è conservata.



Osservazione 4.2.1. Il "tunneling" tra regioni permesse disgiunte è possibile per atomi e particelle subatomiche secondo le leggi della **meccanica quantistica**.

