Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 31 agosto 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \log|x+1|$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Determinare inoltre il numero degli zeri della funzione. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione non è definita per $x = -1$, il suo dominio quindi è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Si può esplicitare il valore assoluto nella funzione ottenendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \log(x+1) & \text{per } x > -1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \log(-x-1) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

Abbiamo che $f(0) = 0$. Poiché $\log(-x-1) > 0$ per $x < -2$ e tende a $-\infty$ per $x \to -1^-$, si può concludere che la funzione $f(x)$ ha almeno un altro zero per $x \in (-2, -1)$. La funzione inoltre è sicuramente positiva per $x > 0$ e per $x < -2$. Valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty.$$

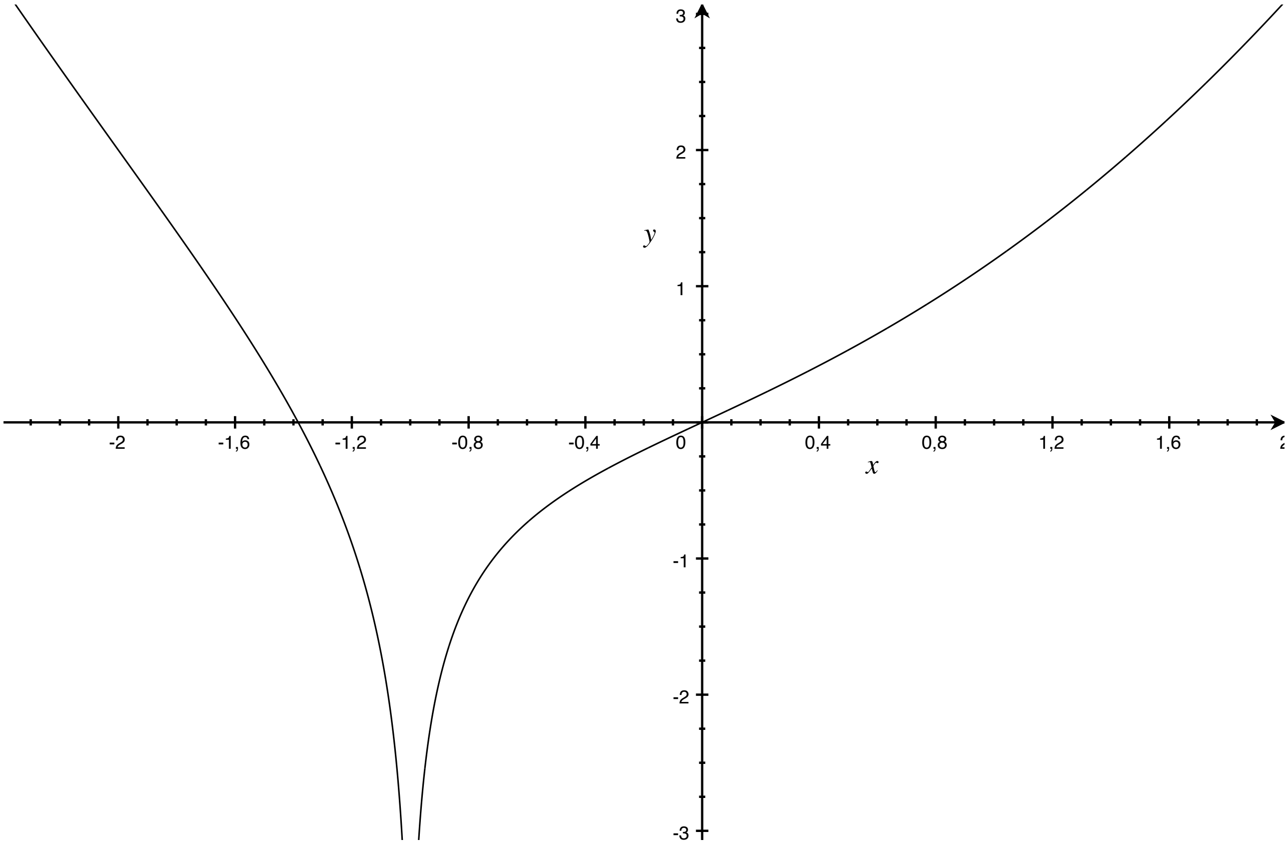
La derivata della funzione è

$$f'(x) = x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Per studiare il segno della derivata prima osserviamo che il numeratore è sempre positivo, quindi il segno dipende solo dal denominatore. La derivata risulta sempre positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$. Possiamo concludere allora che la funzione ha solo i due zeri trovati precedentemente. La derivata seconda vale

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

ed è positiva per $x < -2$ e per $x > 0$, negativa per $-2 < x < -1$ e per $-1 < x < 0$. La funzione presenta due flessi in $x = -2$ e in $x = 0$.



Esercizio 2 Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx.$$

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(1, +\infty)$ e non limitata in un intorno di 1. Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 2$. Osserviamo che

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)\right| \leq 1$$

quindi

$$\int_1^2 \left|\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)\right| dx$$

converge assolutamente, quindi converge. Invece, per ogni $\varepsilon > 0$, utilizzando la sostituzione $x = 1 + t$, risulta

$$\int_{1+\varepsilon}^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_\varepsilon^1 -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt$$

quindi

$$\int_1^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_0^1 -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt$$

Dato che

$$\log(1+t) = t + o(t), \qquad t \to 0$$

si ha che

$$\lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{\log(1+t)}}{-\frac{1}{t}} = 1.$$

Poiché

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = -\infty$$

per il criterio del confronto asintotico otteniamo che

$$\int_1^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = -\infty$$

quindi

$$\int_1^2 \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx = -\infty.$$

Per $x \to +\infty$, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $\sin t$ con $t = \frac{1}{\log x}$, risulta che

$$\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{6\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)$$

quindi

$$\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x} = -\frac{1}{6\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^4 x}\right).$$

Dato che

$$\int_2^{+\infty} -\frac{1}{6\log^3 x}\, dx = -\infty,$$

per il criterio del confronto asintotico abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx = -\infty.$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx$$

diverge negativamente.

Esercizio 3 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha n}}{n!}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Utilizziamo il criterio del rapporto ponendo

$$a_n = \frac{n^{\alpha n}}{n!}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{\alpha n}}(n+1)^{\alpha-1}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{\alpha n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha = e^\alpha$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<1\\ e & \text{se } \alpha=1\\ +\infty & \text{se } \alpha>1.\end{cases}$$

Dal criterio del rapporto otteniamo quindi che la serie converge se $\alpha<1$ e diverge positivamente se $\alpha\geq 1$.