UNIVERSITÀ DI PISA

**Dipartimento di Informatica**
**Corso di Laurea Triennale in Informatica**

Corso a Libera Scelta - 6 CFU

# Introduzione all'Intelligenza Artificiale

**Professore:**
Prof. Alessio Micheli
Prof. Claudio Gallicchio

**Autore:**
Matteo Giuntoni Filippo Ghirardini

---

**Anno Accademico 2023/2024**

# Contents

# 1 Punto materiale

Oggetto caratterizzato da una massa [kg] e da un vettore posizione [m] nello spazio 3D. Dimensioni trascurabili, forma irrilevante rispetto ai fenomeni di interesse. Vettore posizione come funzione del tempo t[s].

**Esempio 1.0.1.** Una molecola di ossigeno se sono interessato all'aereodinamica di una vettua. Un satellite attorno alla terra se ignoro le forze di marea.

Un vettore posizione è una funzione del tempo $t[s]$.

$$r\vec{(t)} = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{z} + z(t)\hat{z}$$

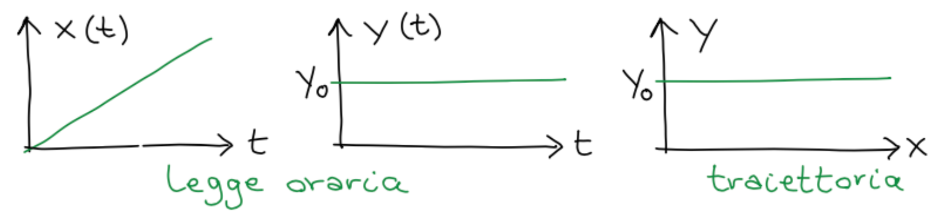
**Osservazione 1.0.1.** I versori cartesiani sono costanti

**Definizione 1.0.1** (Legge oraria)**.** *Si definisce come legge oraria la funzione* $t \to \vec{r}(t)$.

**Definizione 1.0.2** (Traiettoria)**.** *Il lungo geometrico di punti visitati dal punto materiale.*

$$\{\vec{r}(t) \ \ per \ t \in \mathbb{R}\}$$

**Esempio 1.0.2.** $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0)$ e $v_0 = 3m/s, y_o = 5m$




## Vettore velocità

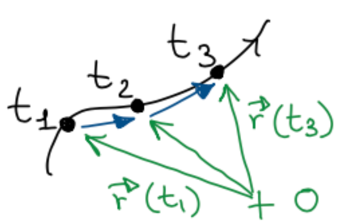
Derivata rispetto al tempo del vettore posizione e si indica come $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\dot{\vec{r}}(t)[m/s]$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}] \\ &= \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \end{aligned} \tag{1}$$

Per ricavare la forma esplicita uso le proprietà delle derivate (**linearità**, **Leibnitz**)

**Esempio 1.0.3.** $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0, 0) = v_0 t\hat{x} + y_0\hat{y}$ abbiamo che $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0, 0) = v_0\hat{x}$

Velocità e spazio percorso ("integrale di linea").




$$\begin{aligned} L &= ||\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|| + ||\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|| + ||\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)|| + \dots \\ &= \sum_i ||\vec{r}(t_{i+1} - \vec{r}(t_i)|| \ \ per \ \ |t_{i+1} - t_i|\text{"piccolo"} \\ &= \sum_i ||\frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}||(t_{i+1} - t_i) = \int_{t_{in}}^{t_{f_{in}}} ||\dot{\vec{r}}(t)|| \end{aligned}$$

**Esempio 1.0.4.** $\vec{r}(t) = (v_0 t, y_0)$ $\dot{\vec{r}}(t) = (v_0, 0)$ $||\dot{\vec{r}}(t)|| = \sqrt{v_0^2 + 0^2} = |v_0|$ $L = |v_0| \cdot (t_{f_{in}} - t_{in})$
Il vettore è costante quindi facendo la derivata torna zero. Con la velocità si calcolo lo spazio percorso ("integrale di linea"). La differenza fra le posizioni e la differenza dei tempi è il rapporto incrementale in caso gli intervalli siano sufficentemente piccoli, da qui si ottiene l'integrale.

## 1.1 Vettore accelerazione

Derivata rispetto al tempo del vettore velocità e si indica con $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt}$ oppure $\ddot{\vec{r}}(t)[m/s^2]$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \;=\; \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \tag{2}$$

**Esempio 1.1.1.** $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2, v_0t, 0) \qquad \dot{\vec{r}}(t) = (a_0t, v_0, 0) \qquad \dot{\vec{r}}(t) = (a_0, 0, 0)$

Serve perché l'equazione "del moto" di Newton che determinata la legge oraria è formulata in termini di accelerazione.

## 1.2 Vettore quantità di moto

Il prodotto di massa [kg] e velocità [m/s]

$$\vec{p}(t) = m \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (m\dot{x}(t), m\dot{y}(t), m\dot{x}(t)) = m\dot{\vec{x}}(t)x + m\dot{\vec{y}}(t)y + m\dot{\vec{z}}(t)z$$

**Esempio 1.2.1.** Prendiamo un punto di massa 2kg e velocità 3m/s lungo $\hat{x}$.
$p_x(t) = 2 \cdot 3kg \cdot m/s = 6kg \cdot m/s \qquad p_y(t) = p_z(t) = 0.$

Serve per generalizzare l'equazione di Newton e per trattare sistemi di piu punti materiali.

## 1.3 Vettore momento angolare rispetto a un polo P

$$\vec{L}_p(t) = m(\vec{r}(t) - \vec{r}_p) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

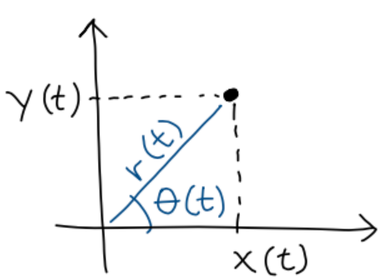
Dove $\vec{r}_p$ è il vettore posizione di p, mentre $\dot{\vec{r}}(t)$ è il prodotto vettoriale.

**Esempio 1.3.1.** $\vec{r}_p = (l_0, 0, 0) \qquad \vec{r}(t) = (v_0t, y_0, 0)$
$\vec{L}_p = m[(v_0t - l_0)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times (v_0\hat{x}) \;=\; m(v_0t - l_0)v_0\hat{x} \times \hat{x} + my_0v_0\hat{y} \times \hat{x} \;=\; my_0v_0(-\hat{z}) = (0, 0, -my_0v_0)$
Ricorda che $\hat{x} \times \hat{x} = 0$ e $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Il momento angolare dice quanta inerzia ha un oggetto in una rotazione (descrizione sommaria).
Il polo P è parte della definizione. È una scelta! Il risultato dipende dal polo. Serve per formulare l'equazione del moto di sistemi di punti materiali e corpi rigidi.

## 1.4 Coordinate polari

Un metodo per rapprensentare delle cordinate x, y andando a misurare prima la distanza dall'origine e poi si va a vedere quanto vale l'angolo fra questo segmento dall'asse x, utilizzando seno e coseno.




$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(\Theta(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(\Theta(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \geq 0 \\ tg(\Theta(t)) = y(t)/x(t) \end{cases}$$

**Esempio 1.4.1.** Esempi di rappresentazione di coordinate in coordinate polari.
$x = 0, y = l_0 > 0 \;\Rightarrow\; r = l_0, \Theta = \pi/2$
$x = 0, y = -l_0 < 0 \;\Rightarrow\; r = l_0, \Theta = -\pi/2$
$x = l_0, y = l_0 > 0 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2}l_0, \Theta = \pi/4$

## 1.5 Versori polari (2D)

Definisco un versore $\hat{r}(t)$ che punta verso il punto materiale e un versore $\hat{\Theta}(t)$ ortogonale. Si esprime facilmente in coordinte polari.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t)\cos\Theta(t), r(t)\sin\Theta(t)) \;\; = \;\; r(t)(\cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y})$$

Ma $||\vec{r}(t)|| = |r(t)| = r(t)$ allora definisco $\hat{r}(t) = \vec{r}(t)/||\vec{r}(t)|| = \cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y}$

Trovo facilmente che un versore ortogonale è:

$$\hat{\Theta(t)} = -\sin\Theta(t)\hat{x} + \cos\Theta(t)\hat{y} \;\; \text{infatti} \;\; \hat{r}\cdot\hat{\Theta} = c\cdot(-s) + s\cdot c = 0$$

*Note* 1.5.1. Non c'è legame fra $\Theta$ e $\hat{\Theta}$ è solo una convenzione.

Le trasformazioni inverse invece si fanno come segue (verifico per sostituzione):

$$\hat{y} = \cos\Theta(t)\hat{r} - \sin\Theta(t)\hat{\Theta} \qquad \hat{y} = \sin\Theta(t)\hat{r} + \cos\Theta(t)\hat{\Theta}$$

Possono quindi scrivere ogni vettore nella forma $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\Theta\hat{\Theta}$ con le componenti polari $a_r, a_\Theta$. Per evitare ambiguità non scriviamo $(a_r, a_\Theta)$ e riserviamo la notazione alle componenti cartesiane.

A differenza dei versori cartesiani quelli polari dipendono dal tempo per costruzioni.

$$\dot{\hat{r}}(t) = \frac{d}{dt}[\cos\Theta(t)\hat{x} + \sin\Theta(t)\hat{y}] \;\; = \;\; -\sin\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)\hat{x} + \cos\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)\hat{y}$$

Dove $\cos\Theta(t)\cdot\dot{\Theta}(t)$ si applica la derivata della somma, Leibnitz, funzione composta.

$$= \dot{\Theta}(t)\cdot\hat{\Theta}(t) \quad \text{(confronto l'espressione di}\hat{\Theta}(t))$$

Similmente $\dot{\hat{\Theta}}(t) = -\dot{\Theta}\hat{r}(t)$.

### Vettori posizione, velocità, accelerazione

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$$

Dove abbiamo che $\vec{r}(t)$ è il vettore, $r(t)$ è una coordinata polare, $\hat{t}(t)$ è il versore polare.

$$\dot{\vec{r}}(r) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\Theta}(t)\hat{\Theta}(t)$$

Dove la parte $\dot{\vec{r}}(r)$ è la velocità radiale.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\Theta}(t)^2]\hat{r} + [r(t)\ddot{\Theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)]\hat{\Theta}$$

Nel quale abbiamo che la parte $r(t)\dot{\Theta}(t)^2$ si chiama **velocità centripeta**, mentre $2\dot{r}(t)\dot{\Theta}(t)$ si dice **accelerazione di Coriolis**.