Proprietà del valore atteso

① $a, b \in \mathbb{R} \implies \mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X]+b \quad (h(t) = at+b)$

② $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$

③ $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \implies \mathbb{E}[X] \geq 0 \quad \left(\nexists\ x_i < 0 \mid p_X(x_i) > 0 \text{ altrimenti } \mathbb{P}(X \geq 0) = \sum_{i: x_i \geq 0} p_X(x_i) < \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1 \right)$

Dimostrazioni

① $\mathbb{E}[aX+b] = \sum_{i=1}^{\infty} (a x_i + b) p_X(x_i) = a \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i)}_{\mathbb{E}[X]} + b \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i)}_{1} = a\mathbb{E}[X] + b$

② $|\mathbb{E}[X]| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_X(x_i) = \mathbb{E}[|X|] \qquad \left(\left|\sum a_i\right| \leq \sum |a_i| \right)$

③ $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i) \geq \sum \emptyset\, p_X(x_i) \geq 0$

↳ perché ogni $x_i \geq 0$ se $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$

Note:

- Da ① abbiamo $VAR(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

DIMOSTRAZIONE: $VAR(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[X])^2 p_X(x_i) = \sum (x_i^2 - 2x_i \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2) p_X(x_i) =$

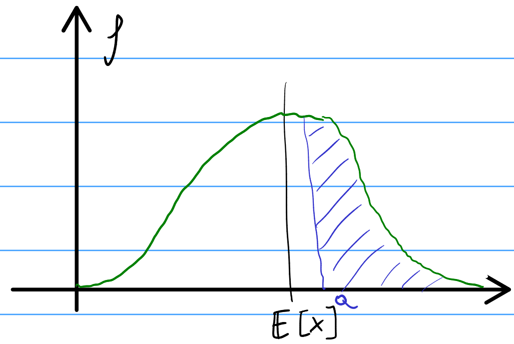
$= \underbrace{\sum x_i^2 p_X(x_i)}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mathbb{E}[X] \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_X(x_i)}_{\mathbb{E}[X]} + \mathbb{E}[X]^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i)}_{1} =$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

- Tutte le DIMOSTRAZIONI precedenti sono per il caso DISCRETO ma si sviluppano analogamente per il caso con densità

ESERCIZIO 1

Mostrare che:



① $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, $a > 0 \implies \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$

② $d > 0 \implies \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > d) \leq \frac{1}{d^2} VAR(X)$

SOLUZIONE:

① - X DISCRETA (tutti gli x_i con $p_X(x_i) > 0$ devono essere $x_i \geq 0$)

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{i: x_i \geq a} p_X(x_i) = \frac{1}{a} \sum a \, p_X(x_i) \leq \frac{1}{a} \sum x_i \, p_X(x_i) \leq \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_X(x_i) = \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$$

- X CON DENSITÀ f_X

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} f_X(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_a^{\infty} a \, f_X(t)\,dt \leq \frac{1}{a}\int_a^{\infty} t \, f_X(t)\,dt \leq \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_X(t)\,dt = \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$$

②