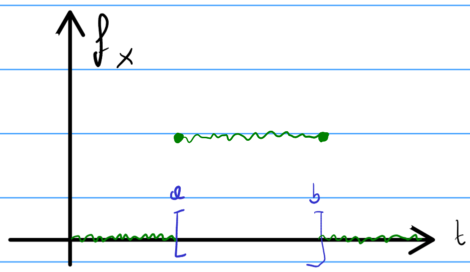
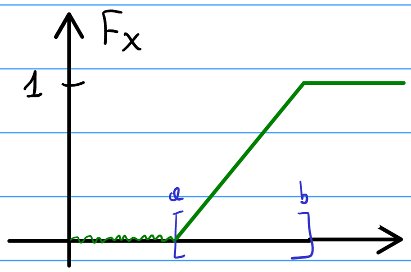
Variabili Aleatorie con Densità Notevoli

Variabile uniforme su un intervallo finito $[a,b]$

Si considera la densità

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a,b] \\ \emptyset & t \notin [a,b] \end{cases} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1$$





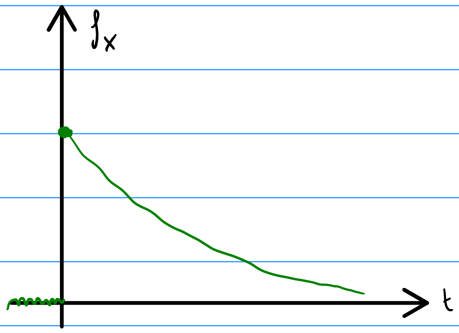
$$F_X(t) = \begin{cases} \emptyset & t \leq a \\ \frac{t}{b-a} & a < t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I F_X(t)\,dt = \frac{\text{lunghezza}([a,b] \cap I)}{b-a}$$

Variabili Esponenziali

$\lambda > 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ \emptyset & t < 0 \end{cases} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \left[\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda s}\right]_0^{\infty} = 1$$



Osservazione: $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$

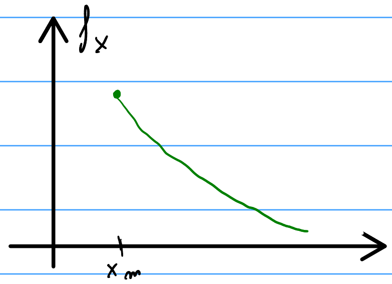
perché la probabilità che sia $\emptyset$ è $\emptyset$

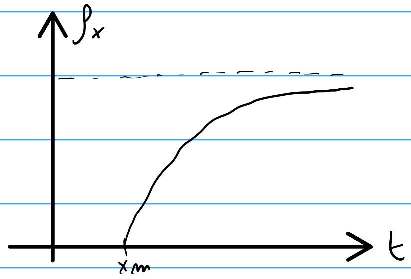
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq \emptyset \\ \emptyset & t < \emptyset \end{cases}$$

VARIABILI di PARETO

$X_m \geq 0$ $\quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha X_m^{\alpha}}{t^{1+\alpha}} & t \geq X_m \\ 0 & t < X_m \end{cases} \longrightarrow \displaystyle\int_{X_m}^{+\infty} \frac{\alpha X_m^{\alpha}}{t^{1+\alpha}}\, dt = 1$

$\alpha > 0$



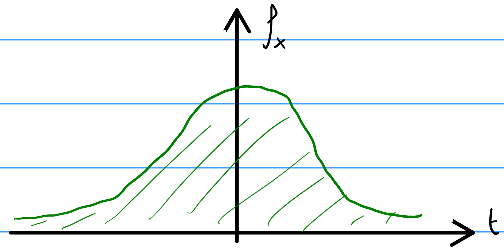


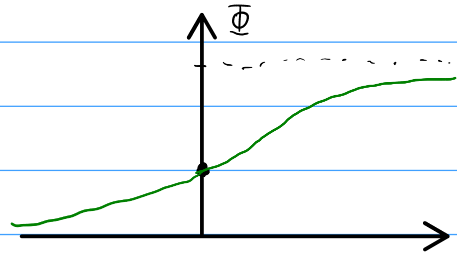
Oss. simile alle esponenziali ma polinomiale

VARIABILI GAUSSIANE STANDARD

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t)$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} ds = \Phi(t)$$





OSS. • $\phi(t) = \phi(-t)$ $\rightarrow$ è PARI

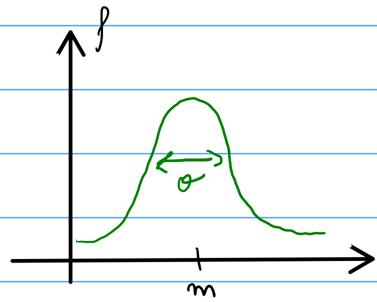
• $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t) \quad \forall t$

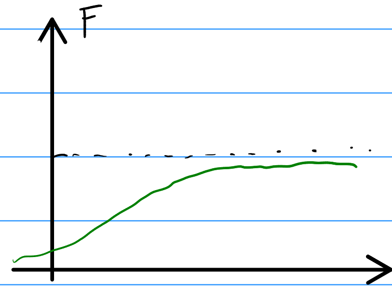
• $P(-t \leq X \leq t) = \int_{-t}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\,\Phi(t) - 1$

VARIABILI GAUSSIANE $N(m, \sigma^2)$

$m \in \mathbb{R}$ $\quad f_X\, t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma}} = \phi(t)$

$\sigma > 0$





$$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s/2} ds = \int_{-1}^{1} \phi(s)\, ds = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0.68$$

$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx 0.94$ $\qquad P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) = 0.997$

OSS. se $m = 0$, $\sigma = 1$ $\rightarrow N(0,1)$ è STANDARD

MOMENTI

VALORE ATTESO: se X VARIABILE ALEATORIA DISCRETA con FUNZIONE di MASSA p_X allora il suo VALORE ATTESO $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_X(x_i)$ (DISCRETO)

$\int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_X(t) \, dt$ (CON DENSITÀ)

OSS. CONVERGENZA della SERIE

Se $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, p_X(x_i) < \infty$

e.g. X è BERNOULLI $(\mathbb{P}(X=1)=p \, , \, \mathbb{P}(X=0)=1-p)$

$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \, (1-p) = p$

e.g. X VARIABILE ALEATORIA con DENSITÀ f_X

$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \, f_X(t) \, dt$ se $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| \, f_X(t) \, dt < \infty$

e.g. X VARIABILE ALEATORIA ESPONENZIALE

$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} t \, \lambda e^{-\lambda t} \, dt$

Oss. se $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

allora $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ è una VARIABILE ALEATORIA

MOMENTO N-esimo: se $n \geq 1$, il MOMENTO N-ESIMO di X è $\mathbb{E}[X^n] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \, p_X(x_i)$ (DISCRETO)

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t) \, dt$ (CON DENSITÀ)

VARIANZA di una VARIABILE ALEATORIA: $VAR(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$ se è ben definito

$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \, p_X(x_i)$ (DISCRETO)

$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 f_X(t) \, dt$ (CON DENSITÀ)

DEVIAZIONE STANDARD

di una VARIABILE ALEATORIA : $\sigma(X) = \sqrt{VAR(x)}$