Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione 15 novembre 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo). Determinare poi il numero di punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $x^2 - 1 \neq 0$ quindi se $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Calcoliamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty e^{\frac{1}{+\infty}} = -\infty\, e^0 = -\infty\, 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -2e^{\frac{1}{0^+}} = -2e^{+\infty} = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -2e^{\frac{1}{0^-}} = -2e^{-\infty} = -2\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0e^{\frac{1}{0^-}} = 0e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x+1}e^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to1^+}(x^2-1)e^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}e^t = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$$

dove abbiamo eseguito il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty e^0 = +\infty\, 1 = +\infty.$$

La funzione ha quindi due asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 1$. Inoltre $\sup(f) = +\infty$ e $\inf(f) = -\infty$, quindi la funzione non ha né massimo né minimo. Ci potrebbero essere asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1e^{\frac{1}{+\infty}} = 1e^0 = 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\,x = \lim_{x\to\pm\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2-1}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$= \left(\lim_{x\to\pm\infty} x\left(1 + \frac{1}{x^2-1} + o\left(\frac{1}{x^2-1}\right) - 1\right)\right) - e^{\frac{1}{+\infty}} = \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} + o\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\right) - e^0 = 0 - 1 = -1.$$

Ne segue che la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Vediamo ora i massimi e i minimi locali.

- Dal fatto che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di massimo locale nella semiretta $(-\infty, -1)$.
- Dal fatto che $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ e che $f(x) < 0$ nell'intervallo $(-1, 1)$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di minimo locale in tale intervallo.
- Dal fatto che $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di minimo locale nella semiretta $(1, +\infty)$.

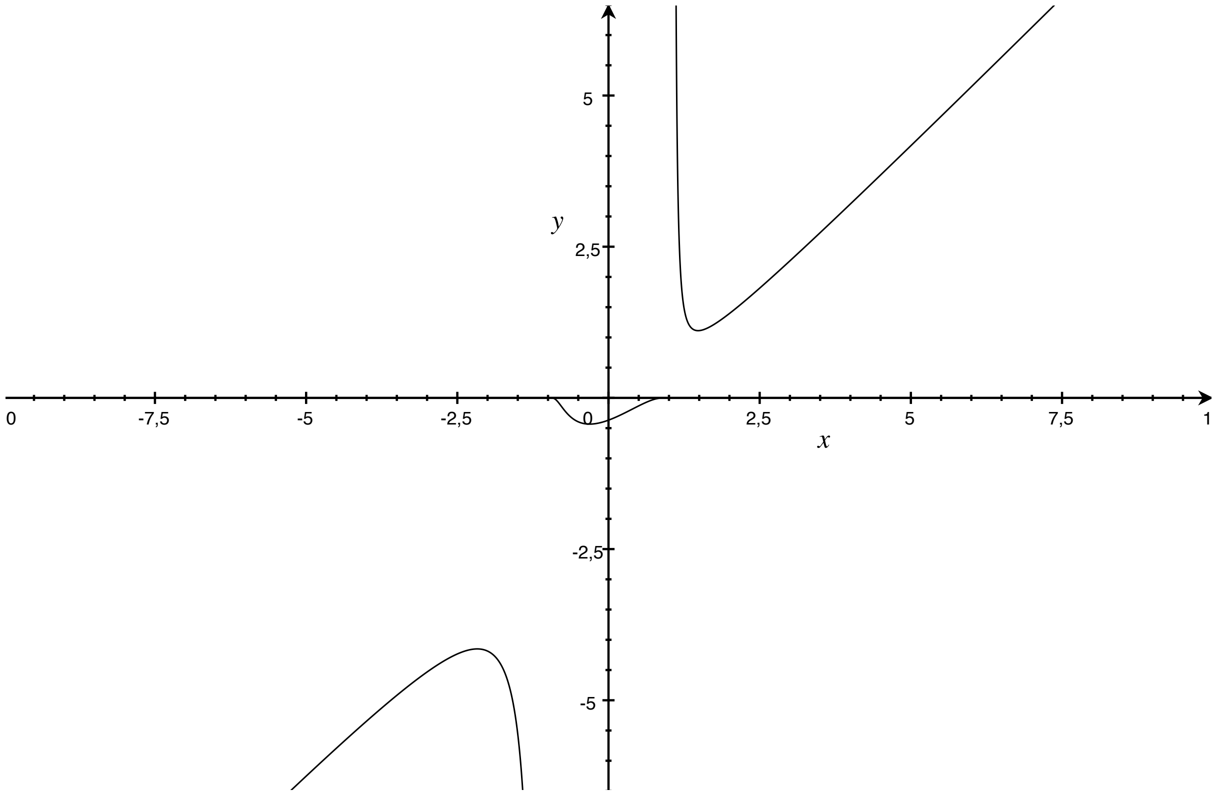
Vediamo ora che questi sono gli unici punti di massimo o di minimo locali. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} + (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = e^{\frac{1}{x^2-1}}\left(1 - \frac{2x(x-1)}{(x+1)^2(x-1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x^2-1}}\left(1 - \frac{2x}{(x+1)^2(x-1)}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{x^2-1}}\frac{(x+1)^2(x-1) - 2x}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Osserviamo ora che la funzione è derivabile in tutto il suo dominio e che tutti i punti del dominio sono interni (il dominio è aperto). Quindi, per il teorema di Fermat, nei punti di massimo o di minimo locali, la derivata si deve annullare. Dato che

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)^2(x-1) - 2x = 0$$

otteniamo che la derivata si annulla al più in tre punti, poiché il polinomio è di terzo grado. Ne segue che i tre punti trovati in precedenza sono gli unici punti di massimo o di minimo locali.



Esercizio 2 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

determinandone continuità, derivabilità, limiti, asintoti, massimi e minimi locali e assoluti, estremi superiore e inferiore, intervalli di monotonia e convessità e flessi.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per verificare la continuità basta osservare che e^{-x^2} è continua in tutto $\mathbb{R}$ quindi a maggior ragione nella semiretta $[0, +\infty)$. Analogamente la funzione $1 + e^{1/x}$ è continua nella semiretta $(-\infty, 0)$. Resta quindi solo da verificare la continuità di f in $x = 0$ che è garantita del fatto che

$$\lim_{x \to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1 + 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2}$$

Per la derivabilità vale un discorso analogo al precedente: basta verificarla in $x = 0$. Calcoliamo $f'(x)$ per $x > 0$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

quindi, essendo f continua in $x = 0$ sarà:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

Per la derivata sinistra utilizziamo invece direttamente il limite del rapporto incrementale:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{-\frac{1}{t}} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

dove abbiamo utilizzato la sostituzione $t = -\frac{1}{x}$. La f è quindi derivabile anche in $x = 0$ e la sua derivata vale 0. Valutiamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} 1 + e^{1/x} = 1 + e^0 = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ per $x \to -\infty$ e un altro asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui. Studiamo ora il segno della derivata. Per $x > 0$ abbiamo già calcolato $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ che risulta strettamente negativa. Per $x < 0$ abbiamo:

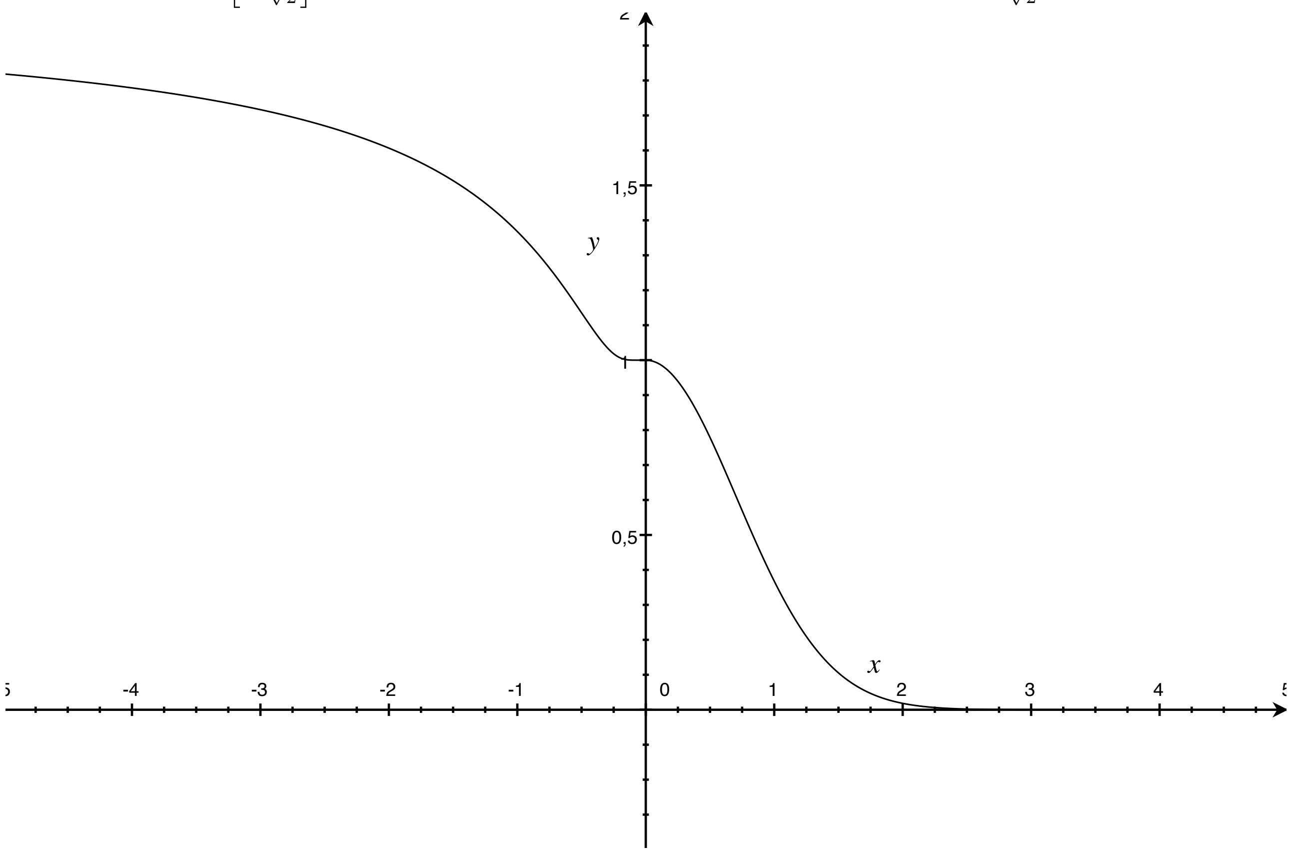
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} < 0$$

quindi la f è sempre decrescente. In $x = 0$ la derivata prima si annulla ma il punto non è né di massimo né di minimo locale. Non ci sono massimi e minimi assoluti (altrimenti sarebbero anche locali). L'estremo superiore vale 2 mentre quello inferiore vale 0 (segue dalla monotonia di f). Valutiamo ora la derivata seconda.

$$f''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \qquad \text{per } x > 0$$

$$f''(x) = e^{1/x}\frac{2x+1}{x^4} \qquad \text{per } x < 0$$

Dallo studio del segno di f'' si ottiene che f è convessa sulla semiretta $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ mentre è concava nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e sulla semiretta $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Ne segue che i punti $-\frac{1}{2}$, 0 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso.



Esercizio 3 Data la funzione $f(x) = xe^{4-x^2}$ determinarne insiemi di definizione, continuità, derivabilità, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi locali e assoluti, estremo superiore e inferiore, asintoti, insiemi di convessità, concavità e punti di flesso. Tracciare poi un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita in tutti i punti di $\mathbb{R}$, dove è anche continua e derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili. Osserviamo subito che $f(-x) = -f(x)$ quindi la funzione è dispari. Osservando che $f(x) = \frac{x}{e^{x^2-4}}$ e applicando il teorema di de l'Hôpital otteniamo che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Il limite per $x \to -\infty$ vale ugualmente 0 perché f è dispari.
La derivata di f è:

$$f'(x) = e^{4-x^2}(1 - 2x^2)$$

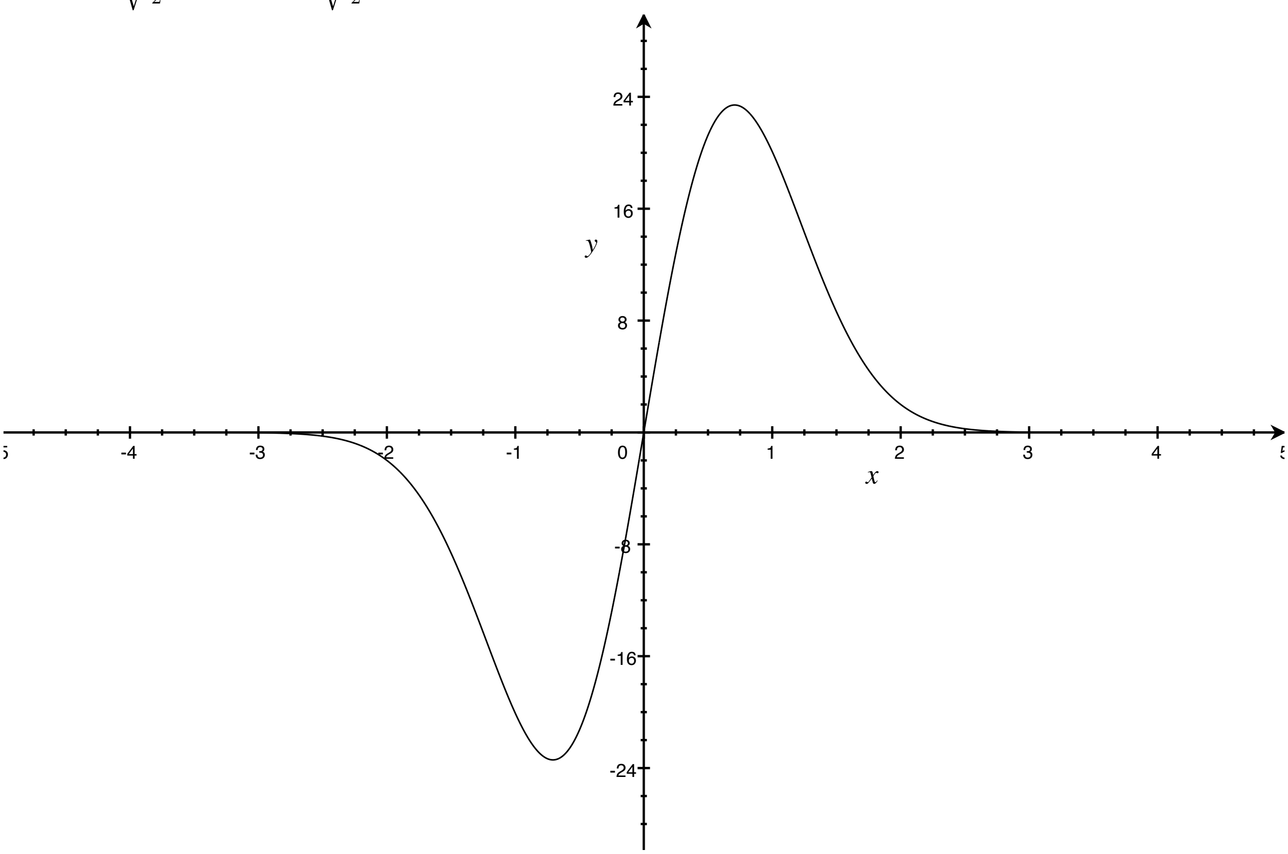
che risulta positiva quando $1 - 2x^2 > 0$ dato che la funzione esponenziale è sempre positiva. Quindi $f'(x) > 0$ se $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che f è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, decrescente nelle semirette $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Il punto $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è quindi di minimo locale mentre $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è di massimo locale. Valutiamo la funzione in tali punti:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{7/2}, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7/2}$$

quindi, in conseguenza dello studio della monotonia di f, si ottiene che $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3/2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3/2}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo assoluto di f (quindi anche estremi inferiore e superiore).
Valutiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = 2xe^{4-x^2}(2x^2 - 3).$$

Per la convessità osserviamo che $f''(x) > 0$ se e solo se $x(2x^2 - 3) > 0$ cioè $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, quindi f è concava in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, convessa in $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$, concava in $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ e convessa in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.
I punti $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di flesso.



Esercizio 4 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 3)^2}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 3$. Osserviamo subito che la funzione assume solo valori strettamente positivi. Valutiamo i limiti.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre abbiamo un asintoto verticale di equazione $x = 3$. Vediamo ora gli intervalli di monotonia calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - (x^2+1)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{-2(3x+1)}{(x-3)^3}.$$

Il numeratore cambia segno per $x = -\frac{1}{3}$ e il denominatore per $x = 3$. Ne segue che

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty).$$

La funzione è quindi decrescente nella semiretta $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, crescente nell'intervallo $[-\frac{1}{3}, 3)$ e di nuovo decrescente nella semiretta $(3, +\infty)$. Il punto $x = -\frac{1}{3}$ è quindi di minimo locale. Non vi sono altri punti di massimo o minimo locali, in quanto la funzione è derivabile in tutto il suo insieme di definizione e la derivata prima non si annulla in altri punti. Dato che la funzione è decrescente in $(3, +\infty)$ e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, si ottiene subito che $f(x) \geq 1$ per ogni $x > 3$. Valutando f nel punto di minimo locale si ottiene che

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{10} < 1$$

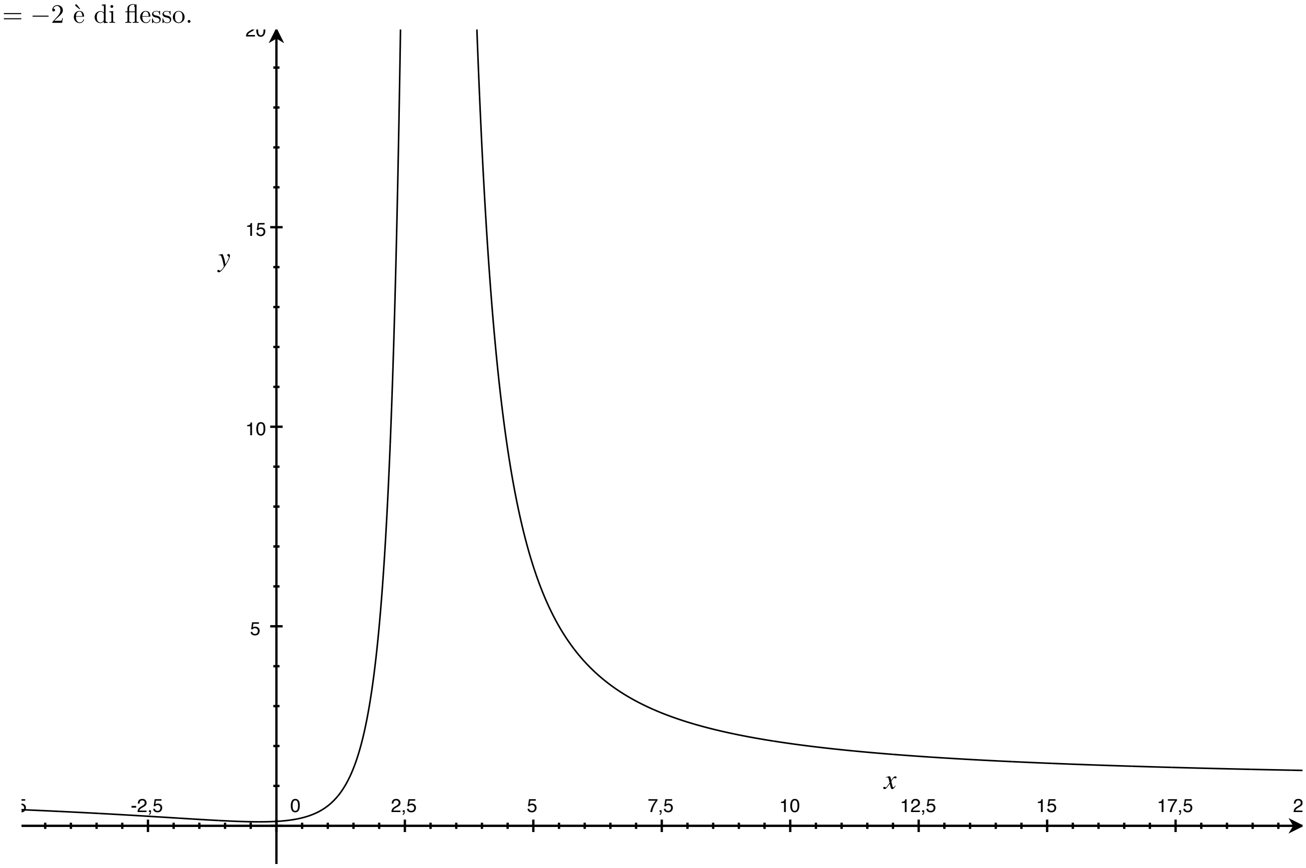
quindi il punto è di minimo assoluto. L'estremo superiore di f è $+\infty$ e il minimo è $\frac{1}{10}$.
Per valutare la convessità calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -2\frac{3(x-3)^3 - (3x+1)3(x-3)^2}{(x-3)^6} = 12\frac{x+2}{(x-3)^4}.$$

Risulta quindi che

$$f''(x) > 0 \quad \forall x > -2, \qquad f''(x) < 0 \quad \forall x < -2.$$

Ne segue che f è concava nella semiretta $(-\infty, -2]$, convessa sull'intervallo $[-2, 3)$ e sulla semiretta $(3, +\infty)$. Il punto $x = -2$ è di flesso.



Esercizio 5 Studiare la funzione $f(x) = \log|x| - \dfrac{x^2-1}{4x}$ determinandone insiemi di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo o minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in tale insieme è continua e derivabile. Valutiamo i limiti. Scrivendo la funzione come

$$f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

si ottiene subito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(\infty) - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{-\infty} = \infty + \infty + 0 = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \log(0^+) - \frac{0}{4} + \frac{1}{0^-} = -\infty - 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{4} + \frac{1}{4x}(1 + 4x\log|x|) = -\frac{0}{4} + \frac{1}{0^+}(1+0) = \infty$$

avendo sfruttato il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = 0$ facilmente ottenibile con il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} = \frac{1}{4x} - \frac{x}{4}\left(1 - \frac{4\log|x|}{x}\right) = \frac{1}{\infty} - \infty(1-0) = 0 - \infty = -\infty$$

dove questa volta abbiamo utilizzato il limite notevole $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ anche questo ottenibile con il teorema di de l'Hôpital. La funzione presenta quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e nessun asintoto orizzontale. Potrebbe avere quelli obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log x}{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{4}\right)x = \lim_{x\to\pm\infty} \log|x| + \frac{1}{4x} = \infty + \frac{1}{\pm\infty} = \infty + 0 = \infty$$

quindi la funzione non ha asintoti obliqui. Dai risultati sui limiti abbiamo anche che la funzione non ha né massimo né minimo e $\sup(f) = \infty$ e $\inf(f) = -\infty$. Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi il segno è determinato dal numeratore.

$$-x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-1}}{-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

quindi

$$f'(x) > 0 \iff x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty).$$

La funzione è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$, nell'intervallo $(0, 2-\sqrt{3}]$, strettamente crescente nell'intervallo $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ e strettamente decrescente sulla semiretta $[2+\sqrt{3}, \infty)$. Il punto $x = 2-\sqrt{3}$ è di minimo locale mentre il punto $x = 2+\sqrt{3}$ è di massimo locale. Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{1-2x}{2x^3}.$$

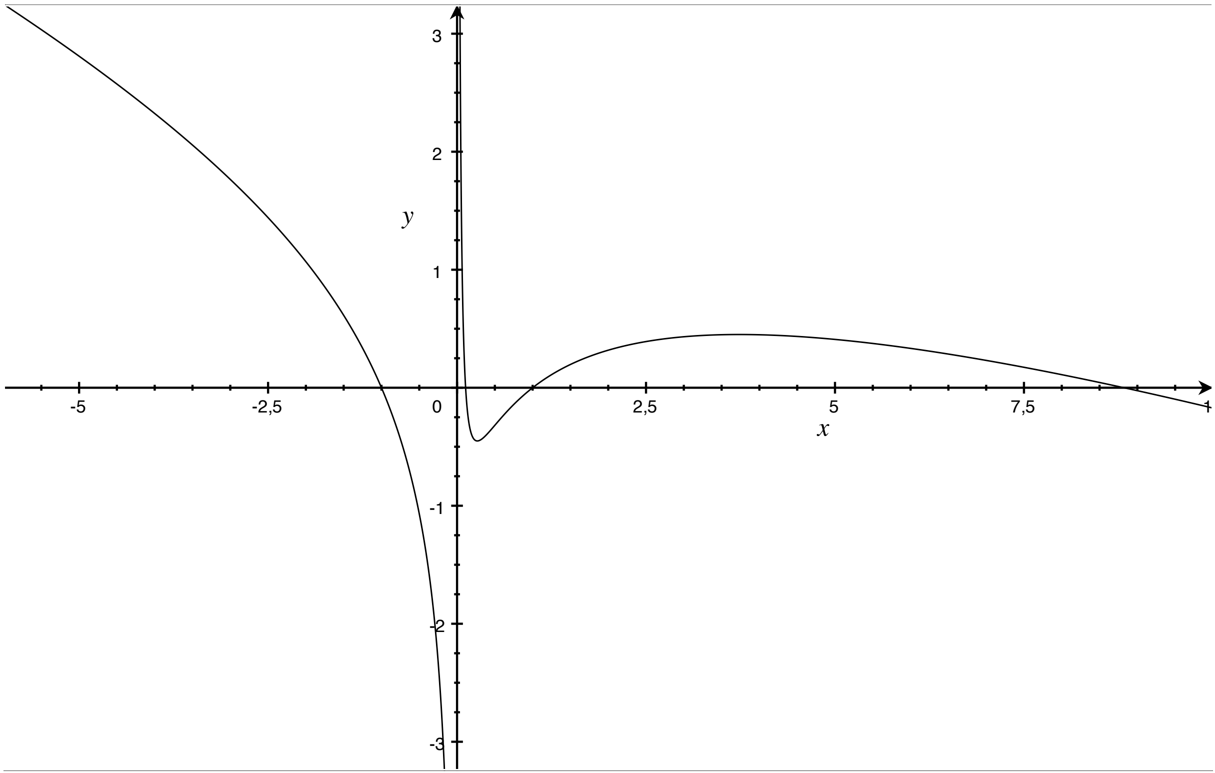
Studiandone il segno si ottiene che

$$1 - 2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}, \quad 2x^3 > 0 \iff x > 0$$

quindi

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

La funzione f è concava sulla semiretta $(-\infty, 0)$, convessa nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ e concava sulla semiretta $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di flesso.



Esercizio 6 Studiare la funzione $f(x) = e^x\left(|x^2-2x|-8\right)$ determinandone insiemi di definizione e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo o minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo.

Soluzione

La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, non ci sono quindi asintoti verticali. Vediamo dove cambia segno l'argomento del valore assoluto.

$$x^2-2x = x(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Risulterà quindi

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2-2x-8) & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ e^x(-x^2+2x-8) & \text{se } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Vediamo ora i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-2x-8) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2+2t-8}{e^t} = 0$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile $t = -x$ e utilizzato il teorema di De L'ôpital nell'ultimo passaggio. La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2-2x-8) = +\infty.$$

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(x-2-\frac{8}{x}\right) = +\infty,$$

non ci sono quindi asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2-2x-8)+e^x(2x-2) = e^x(x^2-10) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ e^x(-x^2+2x-8)+e^x(-2x+2) = e^x(-x^2-6) & \text{se } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Nei punti $x = 0$ e $x = 2$ possiamo calcolare la derivata destra e sinistra passando al limite nella derivata, dato che la funzione è continua:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} e^x(x^2-10) = -10, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} e^x(-x^2-6) = -6,$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} e^x(-x^2 - 6) = -10e^2, \quad f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} e^x(x^2 - 10) = -6e^2.$$

I punti $x = 0$ e $x = 2$ sono quindi punti angolosi. L'insieme di derivabilità della funzione è quindi $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Vediamo ora il segno della derivata. Nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ avremo che

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 10 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt{10}, 0) \cup (2, \sqrt{10}).$$

Nell'insieme $(0, 2)$ risulta $f'(x) = e^x(-x^2 - 6) < 0$ in tutto l'intervallo. La funzione è quindi crescente in $(-\infty, -\sqrt{10}]$, decrescente in $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ e crescente in $[\sqrt{10}, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{10}$ è di massimo locale mentre $x = \sqrt{10}$ è di minimo locale. La funzione non è limitata superiormente quindi non ha massimo e $\sup(f) = +\infty$. Per decidere se la funzione ha minimo dobbiamo confrontare il limite a $-\infty$ con il valore in $x = \sqrt{10}$.

$$f(\sqrt{10}) = e^{\sqrt{10}}(10 - 2\sqrt{10} - 8) = e^{\sqrt{10}}2(1 - \sqrt{10}) < 0$$

quindi la funzione ha minimo e $\min(f) = e^{\sqrt{10}}2(1 - \sqrt{10})$.