Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 720906 13 dicembre 2022

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 2| < 3\}$ è

(a) superiormente ma non inferiormente limitato

(b) inferiormente ma non superiormente limitato

(c) né inferiormente né superiormente limitato

► (d) limitato

Soluzione:

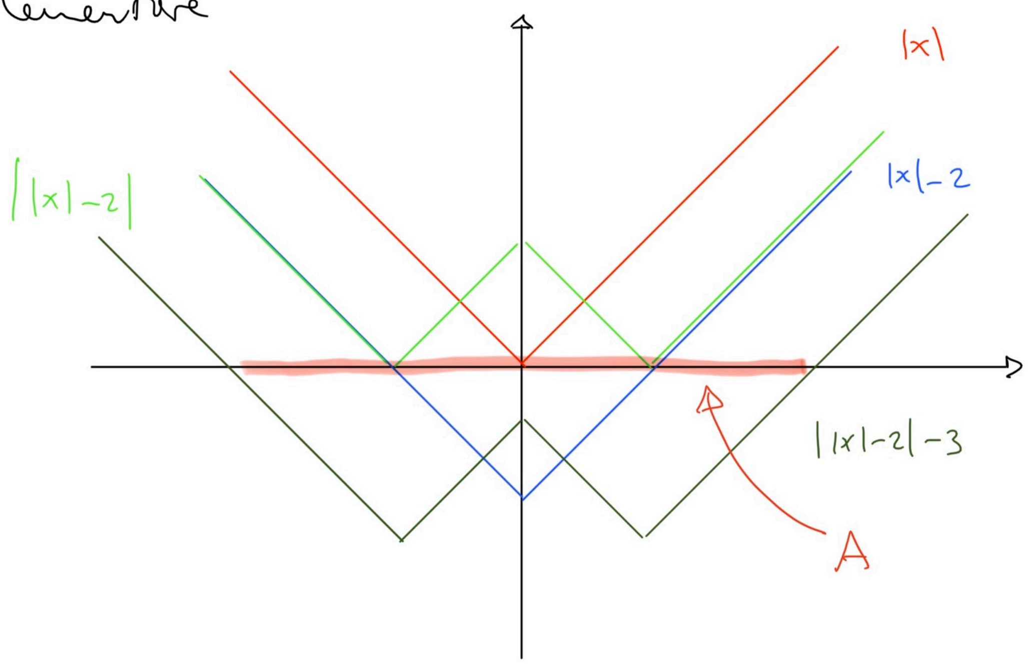
Sia $f(x) = ||x|-2| - 3$, quindi $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ||+\infty|-2| - 3 = +\infty - 3 = +\infty$

e che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (f è pari), ne segue che

$f(x) > 0$ sia in un intorno di $+\infty$ che in un intorno di $-\infty$. Come conseguenza otteniamo che A è limitato.

Senza uso dei limiti, il grafico di f si ottiene per via elementare



2. La funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, nel suo insieme di definizione

(a) è debolmente crescente

(b) ha massimo ma non ha minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

► (d) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Soluzione:

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

f è definita $\forall x \neq 0$, inoltre $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

quindi $\inf(f) = 0$ ma non esiste nessun $x \neq 0$ t.c. $f(x) = 0 \Rightarrow f$ non ha minimo.

3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2)\, dx =$

(a) $\dfrac{\pi^2\sqrt{3}}{72}$

(b) $\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

► (c) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\sin\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} + \sqrt{3}\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} - \sqrt{3}\right)$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$$x^2 = t \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad \frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx = \int x^2 \cos(x^2)\, x\,dx = \int t \cos t \,\frac{dt}{2}$$

ora integriamo per parti derivando t e integrando $\cos t$

$$= \frac{1}{2}\left(t \sin t - \int 1 \cdot \sin t \,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t \sin t + \cos t\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)\right) + c$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo che

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - 0 - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx =$

► (a) $e^3 + e - 2$ (b) $e^3 - \frac{1}{e}$ (c) 0 (d) $e^3 - e$

Soluzione:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\,dx = \int_{-2}^{-1} e^{-x-1}\,dx + \int_{-1}^{2} e^{x+1}\,dx = \left[-e^{-x-1}\right]_{-2}^{-1} + \left[e^{x+1}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\left(e^{1-1} - e^{2-1}\right) + \left(e^{2+1} - e^{-1+1}\right) = -(1-e) + e^3 - 1 =$$

$$= e^3 + e - 2$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_{2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t} =$

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) $\dfrac{7}{2}$ ► (d) 2

Soluzione:

Poniamo $F(x) = \int_2^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$. Risulta che

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t} = +\infty. \quad \text{Infatti,}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{t} + \sin t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = 1$$

, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico tenendo conto che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

Poniamo ora $g(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Dato che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

abbiamo che $\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Proviamo ad

applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$F'(x) = 3x^2 \frac{1}{\sqrt{x^3} + \sin(x^3)} = \frac{3x^2}{x^{3/2} + \sin(x^3)}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^{3/2} + \sin(x^3)}}{\frac{3}{2} x^{1/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{3}x^2 \cdot 2}{\cancel{3}x^{1/2}(x^{3/2} + \sin(x^3))} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{3/2}}{x^{3/2} + \sin(x^3)} = 2.$$

Quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 2$.

6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

(a) converge (b) diverge negativamente ► (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$.

Osserviamo che $\cos x \geq 0$ se $x \in [0, \pi/2]$ quindi $f(x) \geq 0$ in un intorno destro di 0.

Poniamo ora $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Risulta che
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$ quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche

$$\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty.$$

Se invece $x \in [1, +\infty)$ consideriamo la convergenza assoluta. Dato che

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, dal criterio del confronto otteniamo che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente, quindi converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

7. La successione $a_n = \dfrac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n}$, $\quad n \geq 2$

► (a) ha minimo (b) non è limitata inferiormente

(c) ha massimo (d) è debolmente decrescente

Soluzione:

$$a_n = \frac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n}.$$

Dato che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 2$, possiamo applicare il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{(\log n)^{(n^2)}}{(\log(n^n))^n} \right)^{1/n} = \frac{(\log n)^n}{\log(n^n)} = \frac{(\log n)^n}{n \log n}$$

Poniamo $b_n = \frac{(\log n)^n}{n \log n}$ e applichiamo il criterio della radice a b_n ottenendo

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\log n}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\log n}} \longrightarrow \frac{+\infty}{1 \cdot 1} = +\infty > 1$$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

quindi la successione (a_n) ha minimo.

8. La successione $a_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{2n^2 + n + 3}$

(a) tende a $\dfrac{1}{2}$ (b) è debolmente crescente

► (c) tende a 0 (d) non ha limite

Soluzione:

$$a_n = \frac{n + \sin(n^2)}{2n^2+n+3} = \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{\sin(n^2)}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2n+1+\frac{3}{n}\right)} \longrightarrow \frac{1 + \frac{\text{limitata}}{\infty}}{+\infty + 1 + 0} = \frac{1+0}{+\infty} = 0$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n(1+\log^2 n)}$

(a) diverge positivamente (b) è indeterminata

► (c) converge assolutamente (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n(1+\log^2 n)}$ e osserviamo che la serie è a termini di segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{|(\sin n)^n|}{|n(1+\log^2 n)|} \leq \frac{1}{n(1+\log^2 n)} \leq \frac{1}{n\log^2 n} \quad \forall\, n \geq 2$$

Sia ora $b_n = \frac{1}{n\log^2 n}$. Ricordiamo che $\sum b_n$ converge perché è una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ con $\alpha = 1$ e $\beta = 2 > 1$.

Quindi, per il criterio del confronto $\sum a_n$ converge assolutamente.

10. La serie $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{e^2} + \frac{2}{\sqrt[n]{e}} - 3 \right)$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) diverge negativamente

(c) diverge positivamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \left(\sqrt[n]{e^2} + \frac{2}{\sqrt[n]{e}} - 3 \right)$$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$
$t = \frac{2}{n}$, $t = -\frac{1}{n}$.

$$a_n = e^{\frac{2}{n}} + 2e^{-\frac{1}{n}} - 3 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ 2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3 =$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{2}{n^2} + \cancel{2} - \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2} \cancel{-3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{3}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{3}{n^2}} = 1 \Rightarrow a_n \sim b_n$$

$\sum b_n = \sum \frac{3}{n^2}$ converge (armonica di potenza 2).

$\Rightarrow \sum a_n$ converge (anche assolutamente perché $a_n \geq 0$).

11. La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$, nel suo insieme di definizione

(a) è limitata

► (b) non è limitata né superiormente né inferiormente

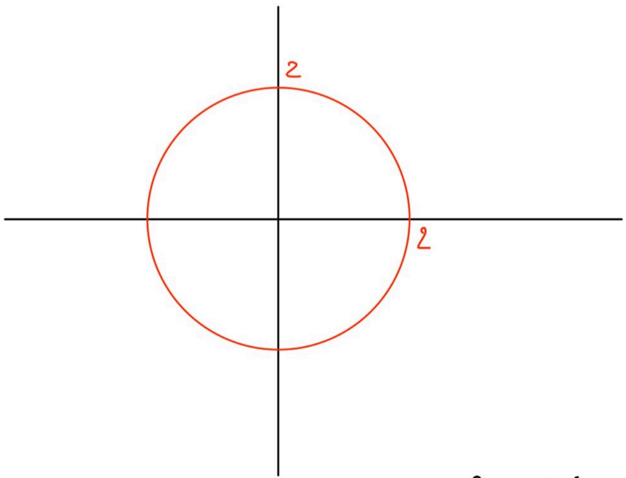
(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

La funzione è definita in tutti i punti (x,y) t.c.

$x^2+y^2 \neq 4$, quindi in tutto $\mathbb{R}^2$ privato della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2



Consideriamo la restrizione di f all'asse x

$$g(x) = f(x,0) = \frac{1}{x^2-4}$$

e osserviamo che

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente limitata.

12. Dati $A,B \subset \mathbb{R}^3$ non limitati, risulta che

(a) $A \cap B$ non è mai limitato

► (b) $A \cup B$ non è mai limitato

(c) $A \cup B$ è sempre limitato

(d) $A \cap B$ è sempre limitato

Soluzione:

Se $A \cup B$ fosse limitato allora esisterebbe $R > 0$ t.c.

$(A \cup B) \subset B_R(0)$ (palla di centro l'origine e raggio R).

Allora $A \subset (A \cup B) \subset B_R(0)$ e anche A sarebbe limitato,

contrariamente alle ipotesi.

Quindi $A \cup B$ non è mai limitato.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

codice 720906, 13 dicembre 2022

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0. Compilare e consegnare solo il presente foglio. Riportare le risposte sull'altro foglio che deve essere conservato per calcolare il punteggio ottenuto. Per accedere alla prova scritta è necessario un punteggio maggiore o uguale a 6.

1	d
2	d
3	c
4	a
5	d
6	c
7	a
8	c
9	c
10	d
11	b
12	b