ESERCIZI CONDIZIONAMENTO / INDIPENDENZA

Nota: nel CONDIZIONAMENTO RIPETUTO

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_m|A_1 \cap \dots A_{m-1})$$

necessita di $A_1 \cap \dots \cap A_m$ NON TRASCURABILE

Lancio di 2 monete

$\Omega = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$ con PROBABILITÀ UNIFORME $\mathbb{P}(T,T) = \dots = \mathbb{P}(C,C) = 1/4$

Gli eventi "primo lancio T" $A = \{(T,C),(T,T)\}$ sono INDIPENDENTI $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(T,T) = \frac{1}{4}$

e "secondo lancio T" $B = \{(C,T),(T,T)\}$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

n LANCI di una MONETA con probabilità $p \in [0,1]$ (caso GENERALE)

$$\Omega = \{(T,T,\dots,T),(C,T\dots T),\dots\} = \{(a_1,\dots a_n) : a_i = T, C\}$$

Se $p = 1/2$, scegliamo la probabilità uniforme su Ω

$$\mathbb{P}(a_1,\dots a_n) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{2^n} \quad \forall (a_1 \dots a_n) \in \Omega$$

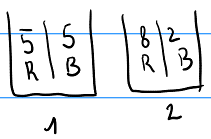
CASO GENERALE: $\mathbb{P}(a_1 \dots a_n) = p^{\#\{i : a_i = T\}}(1-p)^{\#\{i : a_i = C\}}$

FATTO: gli eventi A_K del tipo "Il K-esimo lancio è T" sono INDIPENDENTI CONGIUNTAMENTE

$\mathbb{P}(A_{K_1} \cap \dots \cap A_{K_m}) = \mathbb{P}(A_{K_1}) \dots \mathbb{P}(A_{K_m})$ per ogni scelta degli A_{K_i}

ESERCIZIO 1

Ci sono due urne con biglie rosse e blu



Si sceglie U_1 o U_2 a caso uniformemente e si pesca una biglia

$\Omega = \{(U_1,R),(U_1,B),(U_2,R),(U_2,B)\}$

dove la probabilità NON è UNIFORME

$\mathbb{P}(U_1,R) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

$\mathbb{P}(U_1,B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

$\mathbb{P}(U_2,R) = 1/2 \cdot 0.8 = 0.4$

$\mathbb{P}(U_2,B) = 1/2 \cdot 0.2 = 0.1$

La somma fa 1 quindi l'INDIPENDENZA FUNZIONA

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \mid U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(R \mid U_2)\mathbb{P}(U_2) =$$
$$= 0.5 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5 = 0.25 + 0.4 = 0.65$$

$$\mathbb{P}(U_1 \mid R) = \frac{\mathbb{P}(R \mid U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.65} = \frac{0.25}{0.65} = 0.3\overline{84615}$$

(Formula di Bayes)

ESERCIZIO 2

Se in una famiglia ci sono 2 figli $\Omega = \{(M,M),(M,F),(F,M),(F,F)\}$ con probabilità uniforme e uno dei due sia femmina, qual'è la prob. che lo siano entrambe?

$$\mathbb{P}((F,F) \mid \{(M,F),(F,M),(F,F)\}) = \frac{\mathbb{P}((F,F) \cap (\{(M,F),(F,M),(F,F)\}))}{\mathbb{P}(\{(M,F),(F,M),(F,F)\})} = \frac{\mathbb{P}(F,F)}{\mathbb{P}(\{(M,F),(F,M),(F,F)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

N.B. Se l'esercizio fosse partito dal presupposto che il PRIMO fosse femmina

$$\mathbb{P}((F,F) \mid \{(F,M),(F,F)\}) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 3

Un test per una malattia ha una sensibilità del 99% (un malato é positivo con prob. 99%) e ha specificità 97% (un sano é negativo con prob. 97%).
I sani sono il 99% della popolazione.

$$\Omega = \{(M,P),(M,N),(S,P),(S,N)\}$$

$$\mathbb{P}(P \mid M) = 99\%$$
$$\mathbb{P}(N \mid S) = 97\%$$
$$\mathbb{P}(S) = 99\%$$
$$\mathbb{P}(M) = 1 - \mathbb{P}(S) = 1\%$$

Qual é la probabilità che il test risulti positivo? $\mathbb{P}(P) = 1 - \mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(N \mid S)\mathbb{P}(S) = 1 - 0.97 \cdot 0.99 = 0.0397$

Qual è la probabilità che se il test è positivo la persona sia malato? $\mathbb{P}(M \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.0397} = 0.2494$

ESERCIZIO 4

Il 20% dei passeggeri non paga il biglietto $\mathbb{P}(N) \quad 0.2$

Il 70% di chi non paga il biglietto ha meno di 15 anni $\mathbb{P}(M|N) = 0.7$

Il 40% di chi paga ha meno di 15 anni $\mathbb{P}(M|P) = 0.4$

N.B. Il prof dice di essere un pó dissociato

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(Q|N)\,\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(M|P)\,\mathbb{P}(P) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot (1-0.2) = 0.14 + 0.32 = 0.46$$

$$\mathbb{P}(P|M) = \frac{\mathbb{P}(M|P)\,\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0.4 \cdot (1-0.2)}{0.46} = \frac{0.4 \cdot 0.8}{0.46} = 0.70$$

NOTA $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$

$$\mathbb{P}(N|Q) = \frac{\mathbb{P}(Q|N)\,\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(Q)} = \frac{(1-\mathbb{P}(M|N))\,\mathbb{P}(N)}{1-\mathbb{P}(M)} = \frac{(1-0.7)\,0.2}{1-0.46} = \frac{0.06}{0.54} = 0.\bar{1}$$

$$\frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$$

ESERCIZIO 5

3 turisti, 5 alberghi, ogni turista sceglie l'albergo indipendentemente e uniformemente a caso

Q_1 : Prob tutti nello stesso albergo? (B) $\quad \Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 = 1 \dots 5\}$ con prob. uniforme

Q_2 : Prob. tutti in albergo diverso? (A) $\quad \#\Omega = 5^3 = 125$

Q_2 $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$

Q_1 $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$