Appunti di Metodi Variazionali

Matteo Scarcella

Maggio 2024

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono soltanto un riordionamento dei risultati esposti nel libro di "Metodi variazionali per il controllo ottimo" di Bruni, Di Pillo.

2 Spazi normati e minimi di funzionali

Sia $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^\nu$ lo spazio ambiente, con $z \in \mathcal{Z}$. Sia $\mathcal{D} \subset \mathcal{Z}$ un sotto-insieme dello spazio ambiente detto insieme ammissibile, se necessario descritto da $\mu < \nu$[1] vincoli di uguaglianza $h(z) = 0$ e σ vincoli di disuguaglianza $g(z) \leq 0$, dove con σ_a e $g_a(z)$ si fa riferimento ai soli vincoli di disuguaglianza attivi, ovvero verificati all'uguaglianza. Sia $[t_i, t_f]$ un intervallo di tempo. Siano

$$\|z\| = \sup_{t\in[t_i,t_f]} \|z(t)\| \tag{1}$$

$$\|z\| = \sup_{t\in[t_i,t_f]} \|z(t)\| + \sup_t \|\dot{z}(t)\| \tag{2}$$

Rispettivamente norma forte e norma debole, scelte a priori sullo spazio ambiente. Sia $J : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale di costo. L'obiettivo è trovare il controllo che permetta di minimizzare il valore del funzionale J, ovvero risolvere il problema

$$\begin{cases} \min J(z) \\ z \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{3}$$

□

Definizione 1.29 - z^* è un punto di minimo locale (forte o debole, in base alla norma scelta) se vale

$$J(z^*) \leq J(z) \quad \forall z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}(z^*, \varepsilon) \tag{4}$$

□

Definizione 2.5 - Definita la matrice Jacobiana dei vincoli attivi in un punto ammissibile $\bar{z}$

$$\left.\frac{\partial(h, g_a)}{\partial z}\right|_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} \frac{dh}{dz} \\ \\ \frac{dg_a}{dz} \end{pmatrix}_{\bar{z}} \tag{5}$$

Allora $\bar{z}$ si dice punto di regolarità dei vincoli se la matrice Jacobiana dei vincoli attivi ha rango pieno, ovvero se

$$rank\left\{ \left.\frac{\partial(h, g_a)}{\partial z}\right|_{\bar{z}} \right\} = \mu + \sigma_a \tag{6}$$

□

Definizione 2.6 - Si definisce la funzione Lagrangiana

$$L(z, \lambda_0, \lambda, \eta) = \lambda_0 J(z) + \lambda^T h(z) + \eta^T g(z) \tag{7}$$

Con λ_0, λ, η moltiplicatori opportuni □

Teorema 2.7 - (Condizioni necessarie di minimo) In riferimento al problema di minimo vincolato con opportuni vincoli $h(z)$ e $g(z)$, sia z^* un punto di minimo locale. Allora esistono moltiplicatori $\lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*$ non tutti simultaneamente nulli tali che:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial L}{\partial z}\right|^* = 0^T \\ \eta_i^* g_i(z^*) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma_a \\ \lambda_0^* \geq 0 \\ \eta_i^* \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma_a \end{cases} \tag{8}$$

□

[1]Nel caso $\mu = \nu$ si avrebbe un insieme di vincoli finito e verrebbe meno il concetto di minimizzazione. Ad esempio se $\mu = \nu = 2$, i due vincoli potrebbero essere due rette che si intersecano in un punto, e tale punto risulterebbe l'unico punto ammissibile

Teorema 2.8 - (Condizioni di Kuhn-Tucker) In riferimento al problema di minimo vincolato con opportuni vincoli $h(z)$ e $g(z)$, sia z^* un punto di minimo locale e di regolarità dei vincoli. Allora valgono le stesse condizioni del teorema (2.7), con l'aggiunta di

$$\lambda_0^* = 1 \tag{9}$$

Dimostrazione - Si supponga per assurdo $\lambda_0^* = 0$. Allora nella funzione lagrangiana sparirebbe il termine dipendente dal funzionale di costo $J(z)$ e la prima condizione delle (8) diventerebbe

$$0^T = \frac{\partial L}{\partial z}\Big|^* = 0 + \lambda^{*T}\frac{\partial h(z)}{\partial z} + \eta^{*T}\frac{\partial g(z)}{\partial z} \tag{10}$$

Che in forma vettoriale diventa

$$0^T = \begin{pmatrix} \lambda^{*T} & \eta^{*T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h(z)}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial g(z)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dove l'ultimo vettore è proprio la matrice jacobiana dei vincoli attivi. Per ipotesi z^* è un punto di regolarità dei vincoli e quindi tale matrice ha rango pieno. Dunque l'unica possibilità per cui il prodotto con i moltiplicatori valga 0^T è che i moltiplicatori siano tutti nulli, il che è assurdo perchè contraddice l'ipotesi. Pertanto, siccome $\lambda_0^* \neq 0$, sarà sempre possibile dividere tutti i moltiplicatori per λ_0^*, ottenendo così dei nuovi moltiplicatori $\bar{\lambda}_0^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\eta}^*$, con $\bar{\lambda}_0^* = 1$ □ Le due condizioni sono dei precedenti teoremi sono necessarie e quindi non danno direttamente luogo a dei punti di minimo, ma a dei punti candidati ad essere di minimo, che vengono definiti estremali. Gli estremali possono essere

- normali, se $\lambda_0^* \neq 0$ (e quindi conseguentemente $\lambda_0^* = 1$)
- non normali, se $\lambda_0^* = 0$

Il teorema (2.7) offre delle condizioni meno stringenti rispetto al (2.8), che fissando $\lambda_0^* = 1$ esclude gli estremali non normali, e pertanto fornisce un numero maggiore di candidati.

Esempio 2.1 □

Le condizioni necessarie appena viste diventano anche sufficienti nel caso in cui il funzionale di costo $J(z)$ e l'insieme ammissibile $\mathcal{D}$ siano convessi. La particolarizzazione dell'insieme di ammissibilità al caso convesso può essere effettuata sulla base del seguente lemma

Lemma 2.13 - Sia $\mathcal{D}$ un insieme definito da vincoli di uguaglianza $h(z) = 0$ e di disuguaglianza $g(z) \leq 0$. Se

- $g(z)$ è dato da tutte funzioni convesse
- $h(z)$ è dato da funzioni lineari (o affini) del tipo $h_j(z) = c_j^T z_j + b_j$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$

Allora $\mathcal{D}$ è convesso. □

Teorema 2.14 - In riferimento al problema di minimo vincolato con un funzionale di costo $J(z)$ convesso e con opportuni vincoli $h(z)$ affini e $g(z)$ convessi, di modo che l'insieme $\mathcal{D}$ sia convesso. Se z^0 è un punto ammissibile ed esistono moltiplicatori λ^0 e η^0 tali che valgano

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dz} + \lambda^{0T}\frac{dh}{dz} + \eta^{0T}\frac{dg}{gz} = 0^T \\ \eta_i^0 g_i(z^0) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma_a \\ \eta_i^0 \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma_a \end{cases} \tag{12}$$

Allora z^0 è un punto di minimo globale. Inoltre, se J è strettamente convessa, z^0 è l'unico punto di minimo globale.

Dimostrazione - Posto z un qualunque punto ammissibile, allora valgono i vincoli e quindi si può scrivere

$$J(z) \geq J(z) + \underbrace{\lambda^{0T}h(z)}_{=0} + \underbrace{\eta^{0T}g(z)}_{\leq 0} \tag{13}$$

Siccome per ipotesi le funzioni J e g sono convesse e le funzioni h sono affini, allora si ha

$$J(z) \geq J(z^0) + \frac{dJ}{dz}(z - z^0) + \lambda^{0T}\left[h(z^0) + \frac{dh}{dz}(z - z^0)\right] + \eta^{0T}\left[g(z^0) + \frac{dg}{dz}(z - z^0)\right] \tag{14}$$

Per le ipotesi del teorema, nel punto z^0 si ha $\eta^{0T} g(z^0) = 0$, inoltre poichè, sempre per ipotesi, z^0 è un punto ammissibile, allora valgono i vincoli, ovvero $h(z^0) = 0$. Quindi raccogliendo $(z - z^0)$ si ottiene

$$J(z) \geq J(z^0) + \underbrace{\left[\frac{dJ}{dz} + \lambda^{0T}\frac{dh}{dz} + \eta^{0T}\frac{dg}{dz}\right]}_{=0^T}(z - z^0) \tag{15}$$

E di nuovo, per le ipotesi (la prima delle (12)), si può scrivere

$$J(z) \geq J(z^0) \tag{16}$$

Ovvero z^0 è un punto di minimo globale. Se inoltre J fosse strettamente convessa, allora le stesse relazioni varrebbero strettamente, giungendo quindi a

$$J(z) > J(z^0) \tag{17}$$

Che implica l'unicità del minimo. $\square$