

Relazione 1 - Misure di Resistenza

Università degli Studi di Trento - Laboratorio di Fisica II

Matteo Zortea, Elena Acinapura - Gruppo B01

Anno Accademico 2019-2020 - 2 dicembre 2019

Sommario

In questa esperienza viene presentato lo studio del comportamento di un circuito RLC passa banda a diverse frequenze e per diversi fattori di merito. Il modello teorico utilizzato tiene conto di diversi aspetti di non idealità dei componenti, richiedendo in particolare uno studio approfondito delle caratteristiche dell'induttore utilizzato nel filtro. Viene quindi presentata una tecnica di misura per stimare il valore di un'induttanza e della sua capacità parassita, osservandone il fenomeno di autorisonanza.

BEN FATTA E ORGANIZZATA

Interessante lo sforzo interpretativo delle incongruenze sperimentali

30/30

Introduzione

I circuiti RL, RC, RLC trovano svariate applicazioni nel campo dell'elettronica e della fisica sperimentale: essi si rivelano particolarmente utili, ad esempio, quando ci si pone come obiettivo quello di filtrare o estrarre solamente alcune determinate bande di frequenza di un segnale. Ne sono esempi tipici i circuiti RLC serie e parallelo (filtri passa banda), circuiti RL e RC in configurazione passa-basso (particolarmente utili nel filtraggio di rumore indesiderato o tensioni di ripple), o ancora circuiti RL e RC in configurazione passa-alto. Nella prima parte di questa relazione viene sfruttato il comportamento di un filtro RL passa basso per effettuare delle stime sul valore di induttanza di una bobina, successivamente usato per studiare il comportamento di un filtro RLC per diverse frequenze e diversi fattori di merito.

Strumenti e materiali utilizzati

- Generatore di funzioni d'onda
- Oscilloscopio a due canali
- Multimetro digitale da banco (DMM)
- Condensatore di capacità nota
- Bobina di rame con induttanza incognita
- Breadboard
- Resistenze di diversi valori
- Connettori e cavetti elettrici

Parte 1 Circuito RL

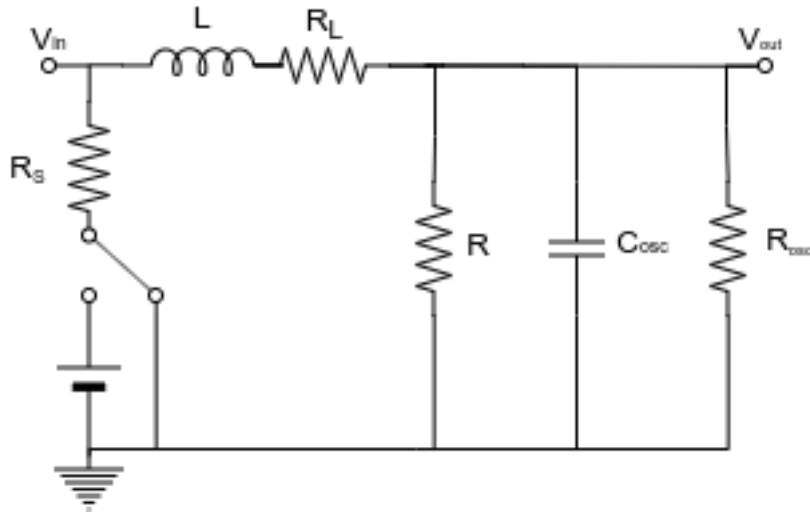


Figura 1: **Schema circuito RL**

Circuito RL in configurazione passa-alto. Analizzando la scarica di un induttore attraverso questo modello è stato possibile risalire ad un valore dell'induttanza L .

Misura del valore di induttanza

La prima parte di quest'esperienza, incentrata sull'analisi in corrente continua del circuito in figura 1, si è rivelata necessaria per poter progettare correttamente la procedura di misurazione della seconda fase. Infatti, attraverso l'analisi della scarica dell'induttore, è stato possibile risalire al valore dell'induttanza incognita L , essendo a conoscenza di tutte le altre grandezze nel circuito. Un'analisi del circuito per mezzo delle equazioni di Kirchhoff permette di affermare che, se si alimenta il circuito con un'onda quadra, nella fase di scarica la tensione V_{out} varia con la legge

$$V_{out}(t) = V_{in}e^{-t/\tau} \quad (1)$$

dove $\tau = L/(R + R_s + R_L)$. Si si vuole quindi sfruttare tale legge per ricavare il valore di τ e quindi di L , conosciuto R .

Il circuito è stato alimentato con un'onda quadra di $V_{pp} = 3\text{ V}$ e offset 1.5 V con frequenza calcolata appositamente a partire dai valori di resistenza R scelti, imponendo la condizione

$$\frac{T}{2} > 5\tau \quad \text{cioè} \quad f < \frac{R}{10L}$$

Sarebbe utile spiegare il perchè di questa scelta

In realtà la frequenza utilizzata è stata ulteriormente ridotta in quanto in fase di misura si era già conoscenza del comportamento reale dell'induttore (presentato nella prossima sezione) e quindi l'utilizzo di una frequenza relativamente bassa ha garantito una miglior approssimazione ad un induttore ideale.

Per avere un valore numerico di L da utilizzare per calcolare la frequenza massima, si è effettuata una stima approssimativa valutando tramite l'oscilloscopio l'intervallo temporale per cui V_{in} risulta ridotto di un fattore e ; tale intervallo temporale corrisponde infatti a τ .

Sono stati scelti 5 valori di resistenza nell'intervallo $20\ \Omega - 200\ \Omega$: per ciascuna resistenza sono state registrate 5 misure ripetute tramite oscilloscopio, ciascuna composta da 20000 campionamenti durante la fase di scarica.

	1	2	3	4	5
R	99.50 Ω	46.750 Ω	146.26 Ω	130.94 Ω	198.63 Ω
δR	0.01 Ω	0.009 Ω	0.01 Ω	0.01 Ω	0.01 Ω

Tabella 1: **Resistenze circuito RL**

Sono riportati i valori delle resistenze utilizzate per l'analisi della scarica dell'induttore, misurate con il DMM. A partire da questi valori si sono calcolate di conseguenza le frequenze massime per l'onda in ingresso al circuito.

È possibile ricavare τ per regressione su una singola scarica per mezzo di una regressione lineare; tuttavia, osservando i dati, si è osservato che l'oscilloscopio utilizzato risulta avere un errore di offset nella misura, e quindi, si è rivelato necessario ovviare al problema: la via scelta è stata quella di calcolare numericamente la quantità $\frac{dV_{out}}{dt}$ ed eseguire quindi un fit lineare basato sul modello

$$\frac{dV_{out}}{dt} = -\frac{1}{\tau} (V_{out} + \delta V_{out}) = \alpha V_{out} + \beta$$

Si noti che, a partire dall'ultima relazione scritta, sia la grandezza $\frac{dV_{out}}{dt}$, che la grandezza cercata, $1/\tau$, non risultano affetti dall'errore di offset δV , il quale rientra solamente nel valore β , non rilevante ai fini della misura di τ . Il compromesso da accettare seguendo questo metodo è quello dell'approssimazione della funzione derivata $\frac{dV_{out}}{dt}$ con la quantità calcolata a partire dai dati $\frac{\Delta V_{out}}{\Delta t}$ costituita da intervalli di valori finiti e non infinitesimi. Una volta ricavati i valori corretti $V'_{out} = V_{out} - \delta V$, per ciascun set di dati, è stata operata una regressione lineare a partire dal modello descritto dall'equazione 1. In questo modo si sono ottenuti 5 valori $(\frac{1}{\tau})_{i,R}$ per ogni resistenza scelta, e quindi il valore definitivo $(\frac{1}{\tau})_R$ per ciascun componente è stato ricavato come valor medio di essi, e l'incertezza come deviazione standard sulle medie.

Infine, è stato eseguito un fit lineare tra le grandezze $(\frac{1}{\tau})_R$ e $\frac{1}{R}$ riferendosi al modello estratto dall'analisi del circuito 1:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R_L + R_s}{L} + \frac{R}{L} = \gamma + \lambda R$$

da cui sono state ricavate le grandezze cercate

$$\begin{aligned} R_L + R_s &= \frac{\gamma}{\lambda} = (47.34 \pm 0.2)\ \Omega \\ L &= 1/\lambda = (2.222 \pm 0.004)\ mH \end{aligned} \tag{2}$$

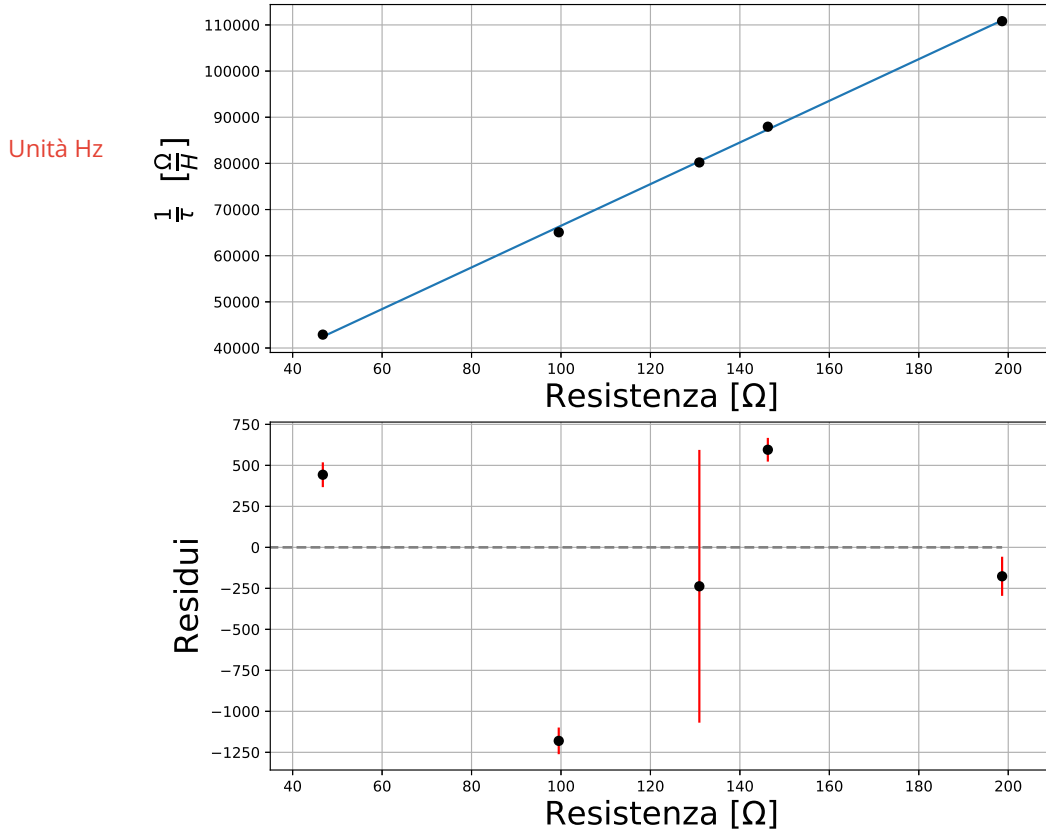


Figura 2: **Misura di induttanza**

Nel primo grafico è riportata la retta risultante dal fit $1/\tau - R$, mentre, nel secondo, il relativo grafico dei residui rispetto alle misure osservate. Dai parametri estratti dal fit si è calcolato il valore dell'induttanza L

Analisi del modello di induttore reale

La bobina di rame utilizzata come induttore per realizzare il circuito RL, ed in seguito il circuito RLC, non è di certo un componente ideale, e questo comporta di dover considerare anche gli effetti resistivi e capacitivi del componente stesso. Gli effetti resistivi possono essere sintetizzati come una resistenza R_L in serie con l'induttore, mentre gli effetti capacitivi possono essere sintetizzati come un condensatore in parallelo con la serie di L e R_L . Per quanto riguarda R_L , il valore è già stato ricavato nella scorsa esperienza, e risulta essere

$$R_L = (0.606 \pm 0.004) \, \Omega$$

Invece, da misure precedentemente ed appositamente eseguite (dettagli in Appendice), si è calcolato che $C_{osc} = (128.63 \pm 0.02) \, pF$. Per avere una misura di C_L , invece, si è scelto di sfruttare tale descrizione dell'induttore reale, mettendo questo in serie con una resistenza nota e realizzando di fatto il circuito RLC rappresentato in figura 3, di cui sono noti tutti i dati, eccetto C_L . Alimentando tale circuito in corrente alternata, il valore di C_L si può ottenere trovando sperimentalmente il valore della frequenza di risonanza,

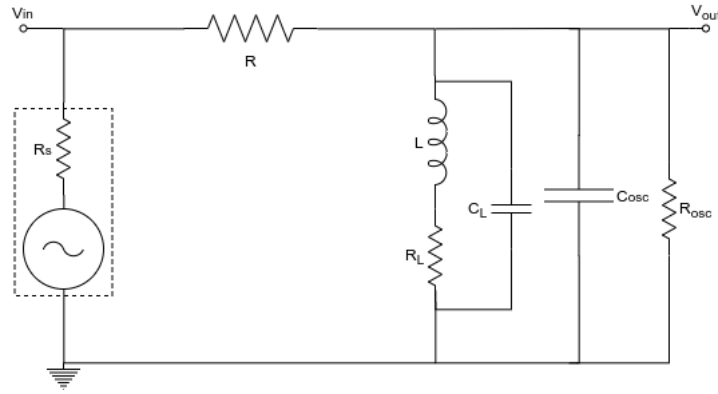


Figura 3: **Misura di C_L**

Lo schema in figura è stato utilizzato per l'analisi delle misure della capacità C_L presente nella bobina di rame

sapendo che esso vale

$$f_{ris} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_L + C_{osc})}}$$

Dunque il valore di C_L ottenuto è

$$C_L = (396.6 \pm 0.7) \mu F$$

Parte 2 Circuito RLC passa banda

Circuito e modalità di misura

In questa sezione viene presentato lo studio di un circuito RLC "passa banda", realizzato collegando una resistenza R in serie con il parallelo formato da un induttore e un condensatore. Per formulare un modello teorico per il comportamento di tale circuito si è deciso di tenere in considerazione le caratteristiche di non idealità dei componenti e della strumentazione, che influenzano in modo non indifferente le previsioni teoriche. In particolare, quindi, si sono considerati gli effetti resistivi e capacitivi interni della bobina e dell'oscilloscopio, introducendo i parametri R_L , C_L , R_{osc} e C_{osc} , il cui valore usato è quello ottenuto tramite le procedure spiegate nella sezione 1 e in Appendice. Il modello di circuito così ottenuto è illustrato in figura 4

Lo studio del circuito consiste nel valutarne il comportamento in regime di corrente alternata, misurando le differenze di potenziale all'ingresso e in uscita, $V_{in}(t)$ e $V_{out}(t)$, e studiandone la relazione al variare della frequenza f della tensione applicata, e per valori diversi di R . In questo contesto risulta utile pensare ai segnali sinusoidali misurati come parti reali di numeri complessi, ovvero come

$$V_{in}(t) = Re\{\tilde{V}_{in}(t)\} = Re\left\{\frac{V_{in}}{2} e^{j\phi_{in}} e^{j2\pi ft}\right\}$$

$$V_{out}(t) = Re\{\tilde{V}_{out}(t)\} = Re\left\{\frac{V_{out}}{2} e^{j\phi_{out}} e^{j2\pi ft}\right\}$$

dove i simboli contrassegnati da \sim sono intesi come numeri complessi. In questo modo, V_{out} e V_{in} rappresentano l'ampiezza picco-picco dei segnali sinusoidali reali, che è possibile misurare con l'oscilloscopio per diversi valori di f .

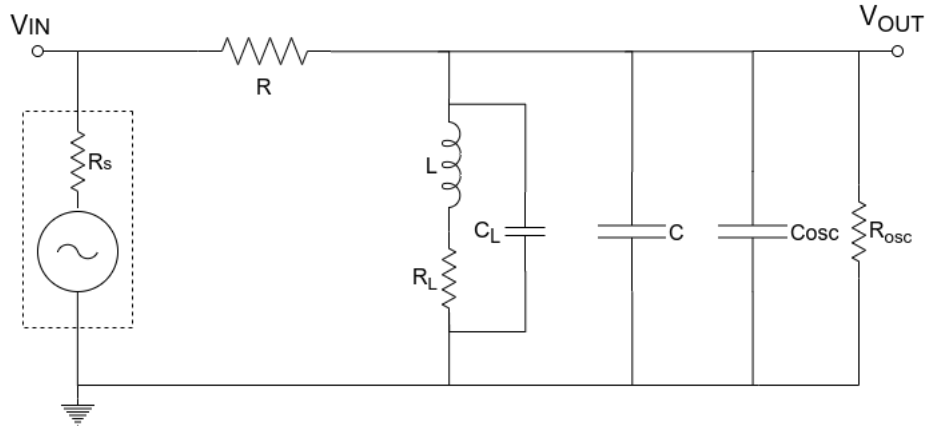


Figura 4: **Circuito RLC passa banda**

Schema del circuito RLC utilizzato, comprensivo degli effetti non ideali dei componenti e degli strumenti.

Per studiare la relazione tra tensione in ingresso e in uscita, si analizza la *funzione di trasferimento* caratteristica del circuito, vale a dire il rapporto

$$H(\omega) := \frac{\tilde{V}_{out}(t)}{\tilde{V}_{in}(t)} = \frac{V_{out}}{V_{in}} e^{j(\phi_{out}-\phi_{in})} \quad (3)$$

I valori misurati attraverso l'oscilloscopio, dunque, sono la frequenza f , le ampiezze picco-picco V_{in} e V_{out} , e lo sfasamento $\Delta\phi = \phi_{out} - \phi_{in}$. Sono state effettuate misure di queste grandezze per 3 diversi valori di R , di cui si è misurato il valore con il multimetro digitale. Per ciascuna resistenza sono state prese circa 30 misure, partendo dalle più basse frequenze per cui l'oscilloscopio era in grado di fornire misure, e arrivando fino a un massimo di $50kHz$. Per V_{out} , V_{in} e f si è usata l'incertezza dell'oscilloscopio come indicato sul manuale tecnico, mentre per l'incertezza di $\Delta\phi$ si è considerato che essa viene calcolata internamente come $\Delta\phi = 2\pi f \delta T$, propagando quindi l'incertezza sui tempi riportata nel manuale dell'oscilloscopio.

Modello teorico

Per modellizzare il comportamento del circuito è stata calcolata l'impedenza di ciascun componente del circuito, in modo da poterlo sintetizzare come nello schema rappresentato in figura 5. In questo modo è facile calcolare, attraverso le leggi di Kirchoff, che

$$\tilde{V}_{out}(t) = \tilde{V}_{in}(t) \frac{Z_{tot}}{R + Z_{tot}} \Rightarrow H(\omega) = \frac{Z_{tot}}{R + Z_{tot}}$$

La funzione di trasferimento è stata così calcolata via software, e la si è rappresentata in un grafico. A livello analitico, inoltre, si calcola che la frequenza f_0 teorica per cui $|H|$ risulta massimo, e contemporaneamente $\Delta\phi = 0$, vale

$$f_{0,teo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_L + C_{osc})}} = (17.16 \pm 0.2) kHz \quad (4)$$

Il filtro RLC passa banda può essere approssimato a un filtro passa-alto RL per $f \ll f_0$, con frequenza 3dB $f_{3dB,RL}$, mentre a un filtro passa-basso RC per $f \gg f_0$, con frequenza

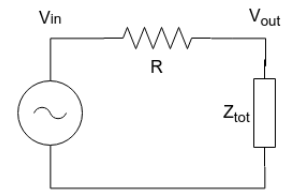


Figura 5: **RLC sintetico**

3dB $f_{3dB,RC}$. Si definisce larghezza del picco del passa banda la differenza tra queste due frequenze

$$\Delta f = f_{3dB,RC} - f_{3dB,RL}$$

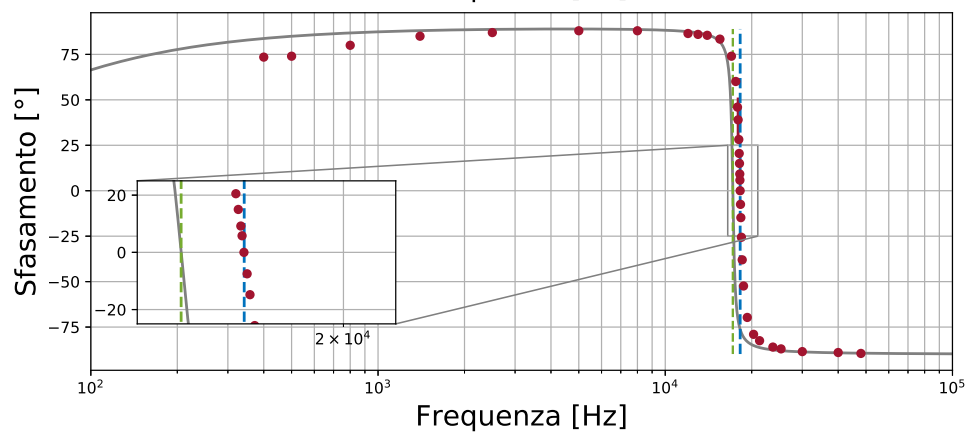
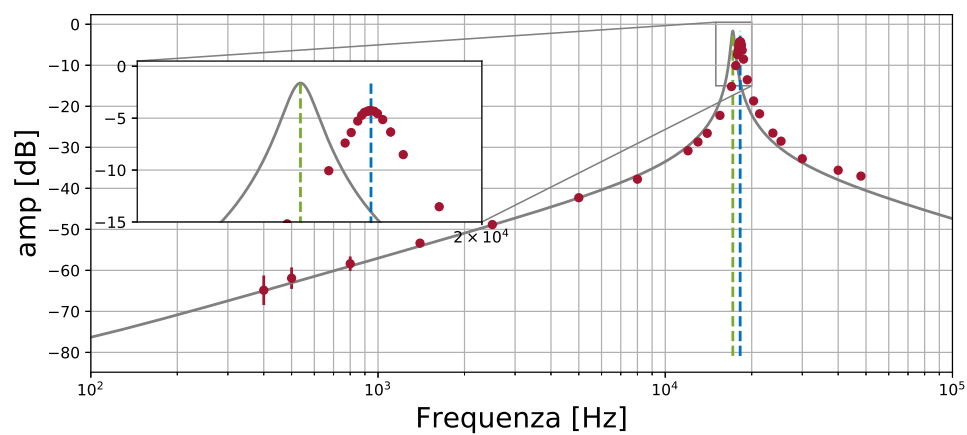
Si è quindi calcolato anche il valore teorico atteso per Δf , trovando nei dati teorici della funzione di trasferimento per quali frequenze $|H|$ risultava $1/\sqrt{2}$ il valore di picco.

Analisi delle misure

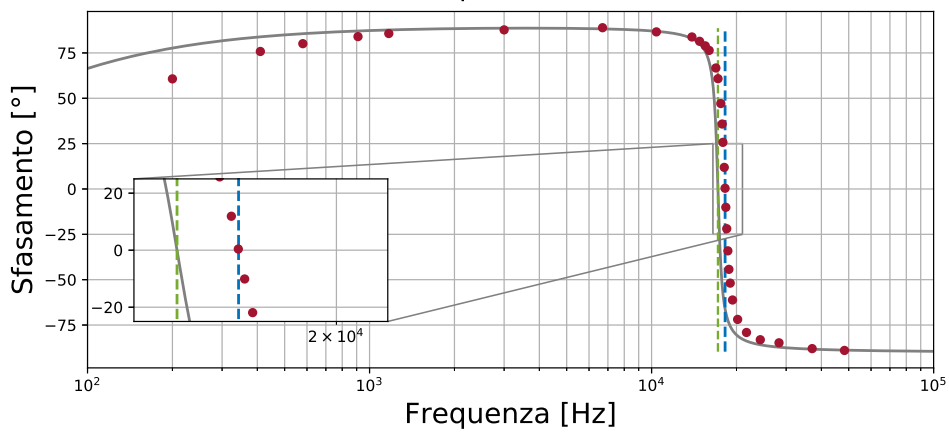
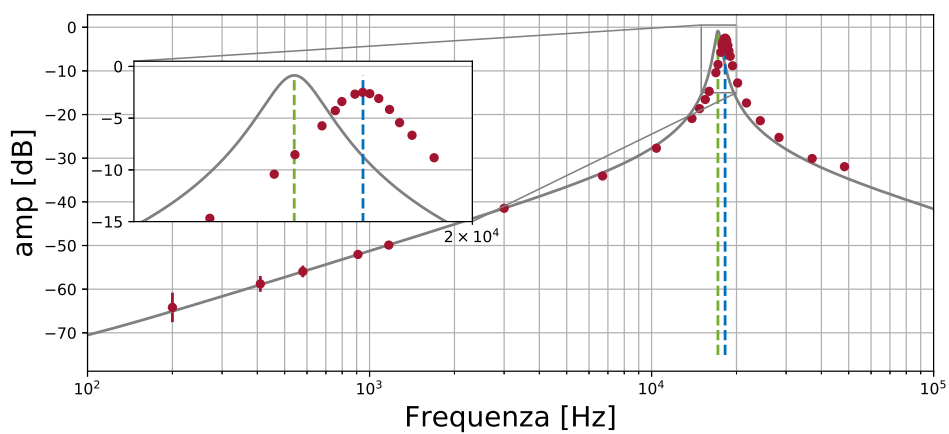
Con i valori misurati si è calcolata H attraverso l'equazione 3 per ogni valore di frequenza impostato, e successivamente sono stati rappresentati i valori di $|H|$ e di $\Delta\phi$ in funzione della frequenza attraverso i *diagrammi di Bode*. In entrambi i grafici è stata usata una scala logaritmica per la frequenza, mentre $|H|$ è stato rappresentato in dB, vale a dire che si è rappresentato il valore $20\log_{10}(V_{out}/V_{in})$, propagando le incertezze per indicare le barre d'errore. Ai dati sperimentali si è inoltre affiancata la linea teorica, calcolata come descritto nel paragrafo precedente.

Ai grafici è stata aggiunta una linea per indicare la frequenza di picco f_0 teorica, calcolata secondo l'equazione 4. L'intenzione è quella di confrontarla con la frequenza di picco ottenuta sperimentalmente, ma non possedendo una misura precisamente al picco, si è deciso di ricavare il valore di $f_{0,exp}$ effettuando una regressione lineare nel grafico $f-\Delta\phi$ per dati con uno sfasamento piccolo, trovando, sulla retta così ottenuta, il valore di frequenza per il quale $\Delta\phi = 0$. La regressione è stata effettuata attraverso un metodo dei minimi quadrati selezionando i dati per quali $|\Delta\phi| < 20$. Questa scelta è stata dettata dalla necessità di avere sufficienti dati tra cui interpolare, e allo stesso tempo non allontanarsi troppo dal punto di interesse, dove la bontà dell'approssimazione lineare della curva dello sfasamento peggiora. Il risultato così trovato è stato aggiunto al grafico per ogni insieme di misure, così da confrontarlo con il valore teorico. Nella figura 6 è possibile osservare quindi, per le tre resistenze diverse utilizzate, il grafici teorici, i dati sperimentali, e le frequenze di picco teoriche e sperimentali. Per facilitare la lettura è stato aggiunto uno zoom attorno alla frequenza di picco.

$$R = 9939 \, \Omega \pm 2 \, \Omega$$



$$R = 5105 \, \Omega \pm 2 \, \Omega$$



$$R = 467.3 \, \Omega \pm 0.2 \, \Omega$$

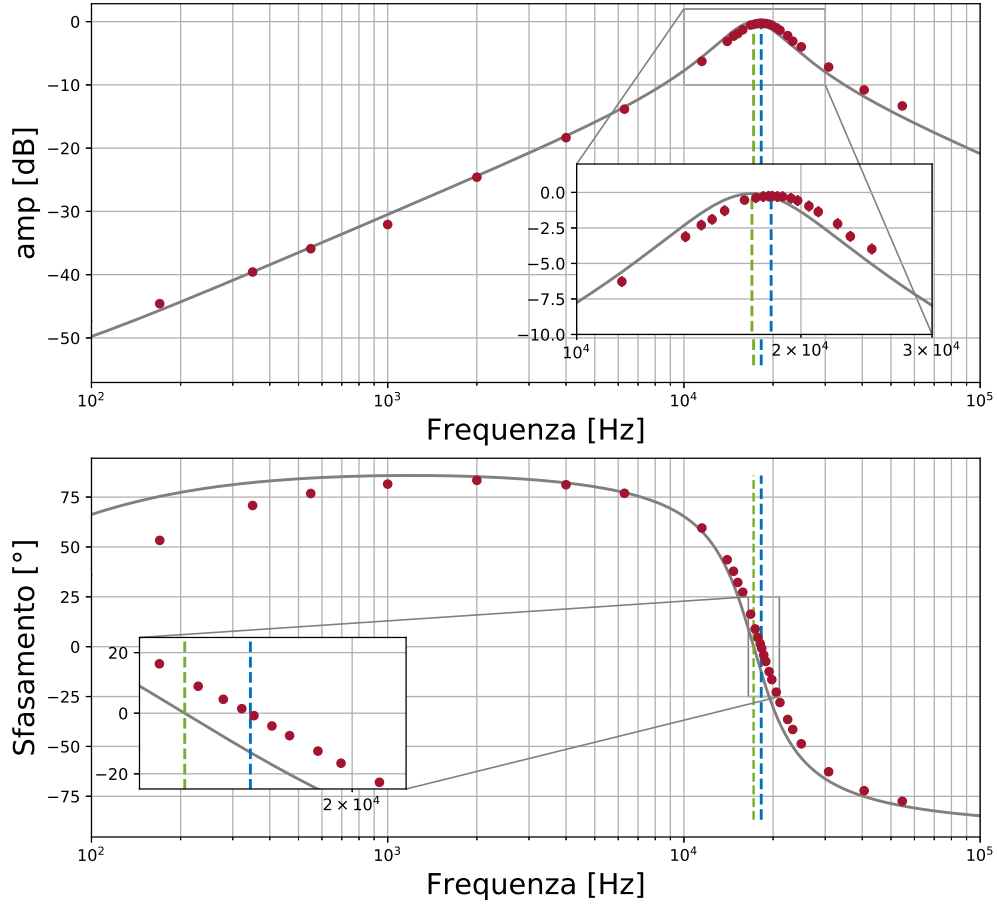


Figura 6: **Diagrammi di Bode**

Sono riportati: in grigio la linea teorica della funzione di trasferimento; in rosso i dati sperimentali; in verde la frequenza di picco teorica, in verde la frequenza di picco sperimentale.

Oltre ai parametri già citati, è stata calcolata anche la larghezza del picco per i dati sperimentali, $(\Delta f)_{exp}$. Per trovare, attraverso i dati sperimentali, la f_{3dB} del circuito quando si comporta come un passa-alto e come un passa-basso, si è innanzitutto calcolato il valore che l'ampiezza dovrebbe assumere in loro corrispondenza, ovvero $|H|_{3dB} = \max(|H|_{exp})/\sqrt{2}$. Sono poi stati selezionati i due dati, nel diagramma dell'ampiezza, tra i quali si trova il valore numerico esatto $|H|_{3dB}$. Si sono trovati coefficiente angolare e intercetta della retta passante per questi due punti, e si è poi trovata la frequenza su questo segmento per cui l'ampiezza vale $|H|_{3dB}$. Questa procedura è stata effettuata per trovare entrambe le f_{3dB} separatamente. Come incertezza su tale frequenza, date le difficoltà nello stimare un'incertezza statisticamente valida, si è preso il massimo scarto della frequenza trovata dai due punti tra i quali si è fatta l'interpolazione.

Nella tabella 2 sono sintetizzati tutti i dati rilevanti per la descrizione dei dati ottenuti e per il loro confronto con il modello teorico.

Resistenza [Ω]	$f_{0,teo}$ [kHz]	$f_{0,exp}$ [Hz]	Picco di $ H _{exp}$	$(\Delta f)_{teo}$ [Hz]	$(\Delta f)_{exp}$ [Hz]
9939 ± 2	17.16 ± 0.02	18.23 ± 0.02	0.61 ± 0.03	649 ± 7	730 ± 60
5105 ± 2	17.16 ± 0.02	18.22 ± 0.04	0.75 ± 0.03	862 ± 8	1330 ± 70
467.3 ± 0.2	17.16 ± 0.02	18.24 ± 0.03	1.00 ± 0.04	8866 ± 8	9800 ± 800

Tabella 2: **Sintesi dei dati sul circuito RLC**

Osservazioni sui risultati

Si può osservare come nel complesso i dati siano in accordo con l'andamento in funzione della frequenza previsto dal modello teorico, e come la larghezza del diagramma dell'ampiezza aumenti al diminuire della resistenza utilizzata, come previsto dal modello. Tuttavia, si notano delle differenze sistematiche tra il modello e i dati sperimentali per quanto riguarda la frequenza di picco, la larghezza del picco, e il valore assunto dal modulo dell'ampiezza al picco. In modo particolare la frequenza di picco e il valore al picco non sono giustificabili in termini di errori statistici, essendo la deviazione $> 5\sigma$, ed è quindi necessario trovare delle giustificazioni.

Per quanto riguarda la deviazione tra le frequenze di picco, essa è della stessa entità per tutte e tre le resistenze utilizzate, e quindi non sembra che l'errore dipenda in alcun modo da R , l'unico parametro che varia tra i tre insiemi di misure. Dal momento che il valore di $f_{0,teo}$ dipende dal valore di L , C , C_L e C_{osc} , è ragionevole supporre che la differenza tra il valore teorico e sperimentale possa essere dovuta ad una misura imprecisa di una di queste grandezze, o alla sottovalutazione delle loro incertezze. Variando anche di poco il valore di una di queste grandezze, infatti, si può notare che il valore di $f_{0,teo}$ si può spostare abbastanza da combaciare con il valore di $f_{0,exp}$, fatto che supporta tale ipotesi.

Per quanto riguarda invece la deviazione sistematica del valore di picco sperimentale dal valore di picco teorico, si osserva che tale deviazione aumenta per resistenze maggiori, mentre è inferiore per i dati relativi alla resistenza più piccola. Si può spiegare questo fatto tenendo conto che l'induttore può presentare effetti resistivi non-ohmici, e correggendo il modello teorico ipotizzando che L abbia anche una parte complessa, sostituendo quindi $L \mapsto L(1 - j\delta)$, dove δ è un numero $\ll 1$ il cui valore dipende principalmente dal tipo di anima magnetica inserita nell'induttore, ed è difficilmente calcolabile a priori. Facendo dei tentativi, in questo caso il valore di picco teorico risulta coerente con i dati sperimentali effettuando la correzione per $\delta \simeq 0.01$. In figura 7 sono rappresentati i grafici dell'ampiezza della funzione di trasferimento attorno alla frequenza di picco, una volta corretto il modello teorico. Questa correzione inoltre migliora leggermente anche il confronto tra la larghezza del picco. Nella tabella 3 sono riportati i valori della larghezza del picco Δf dopo la correzione.

Resistenza [Ω]	$(\Delta f_0)_{teo}$ [Hz]	$(\Delta f_0)_{exp}$ [Hz]
9939 ± 2	650 ± 6	730 ± 60
5105.0 ± 2	1054 ± 6	1330 ± 70
467.34 ± 0.2	9030 ± 7	9800 ± 800

Tabella 3: **Valori di ampiezza dopo la correzione**

Restano tuttavia una incompatibilità abbastanza evidenti tra dati e modello teorico per basse frequenze, che non viene risolta dalla correzione sulla resistenza non-ohmica. Questa incompatibilità riguarda in particolare il diagramma della fase, come si osserva

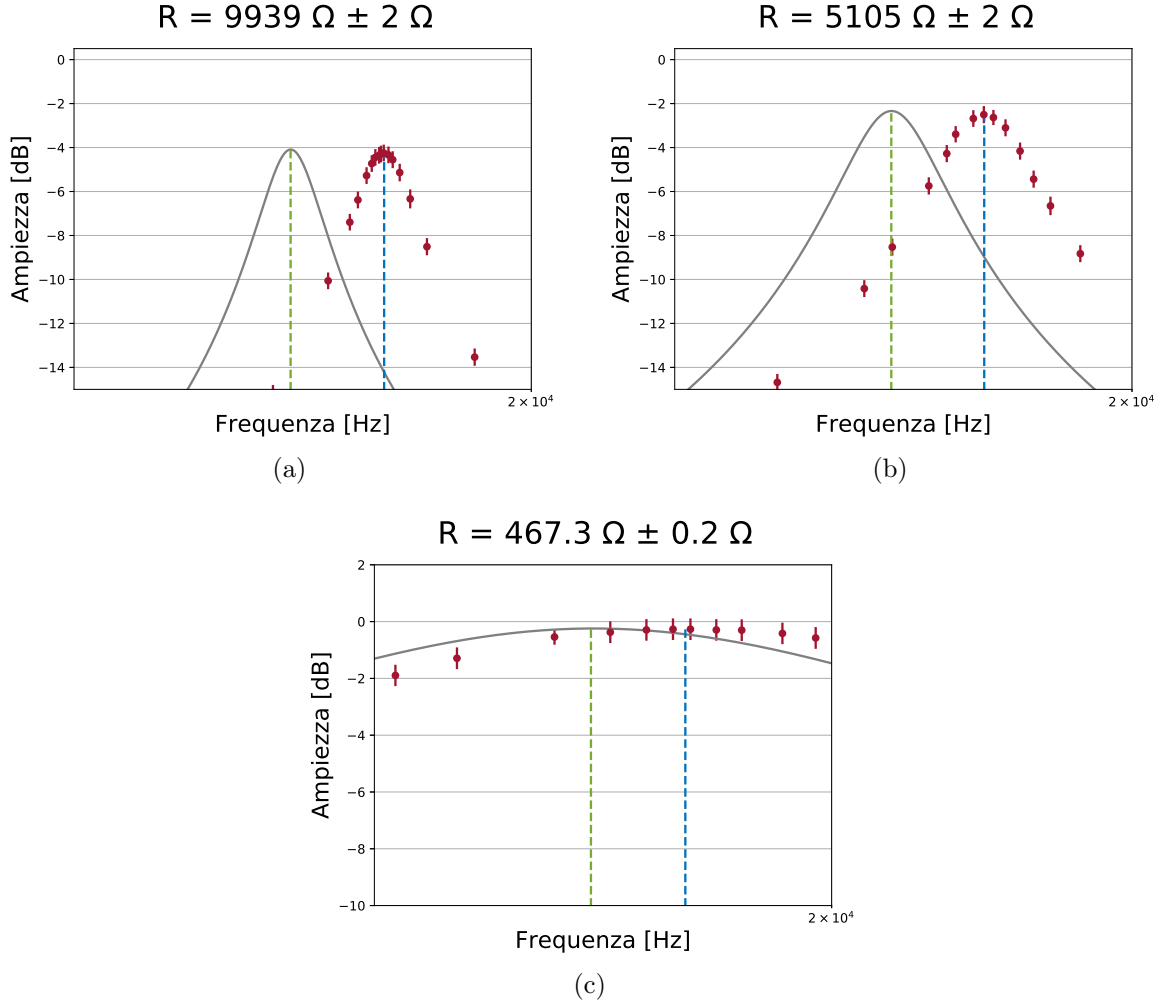


Figura 7: **Correzione effetti resistivi non ohmici**

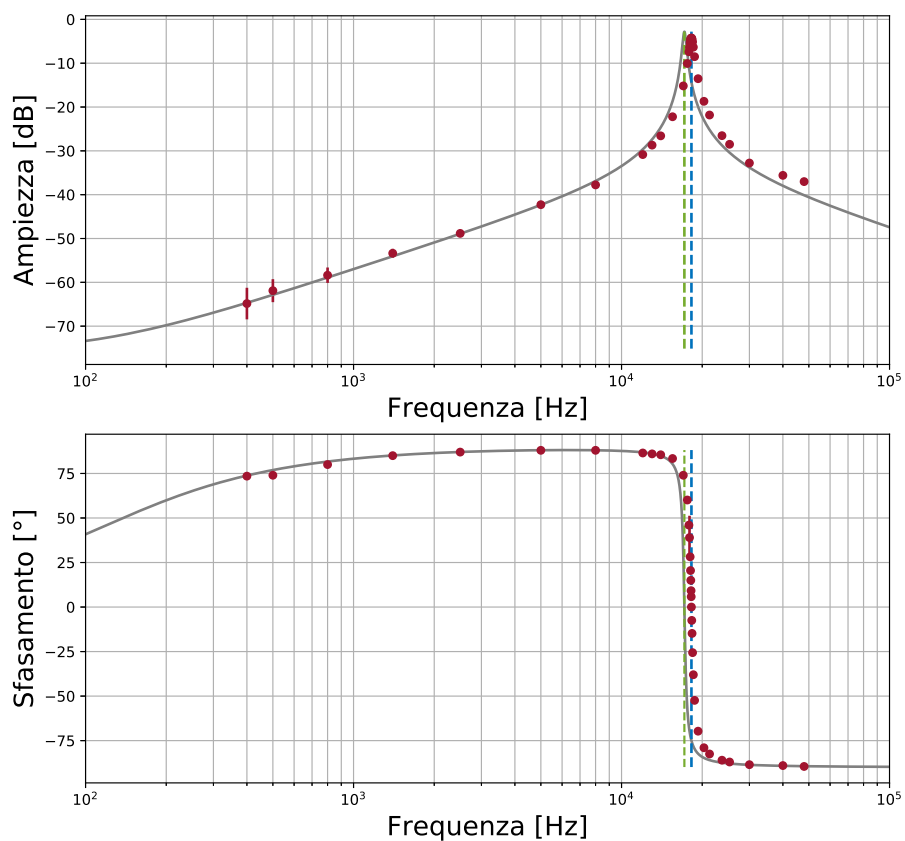
Diagramma dell'ampiezza, una volta corretto il modello teorico tenendo conto degli effetti resistivi non-ohmici. Si può notare come l'altezza del picco sia coerente tra modello e dati sperimentali. Per la legenda, riferirsi alla figura 6.

nella figura 6: lo sfasamento risulta inferiore a quanto atteso. Supponiamo che questo possa essere spiegato tenendo in considerazione il fatto che, effettuando l'oscilloscopio delle misure anche all'ingresso del circuito, lo schema in figura 4 non sia in realtà completo: bisognerebbe aggiungere una capacità C_{osc} e una resistenza R_{osc} in parallelo con il resto del circuito, in corrispondenza del terminale IN. Inoltre, ulteriori effetti resistivi dei cavi che non sono stati considerati, potrebbero aggiungere una parte reale all'impedenza Z_{tot} , riducendo così sfasamento di H . Si è tentato quindi di stimare un possibile valore di resistenza che riassume questi effetti resistivi a partire dalla misure della resistenza dovuta ad un cavetto e al relativo contatto con la breadboard già riportata nella precedente esperienza. In particolare risultano esserci due contatti tra puntali dell'oscilloscopio e cavetti, e due contatti tra cavetti e bobina di rame, per un totale di resistenza stimata di circa

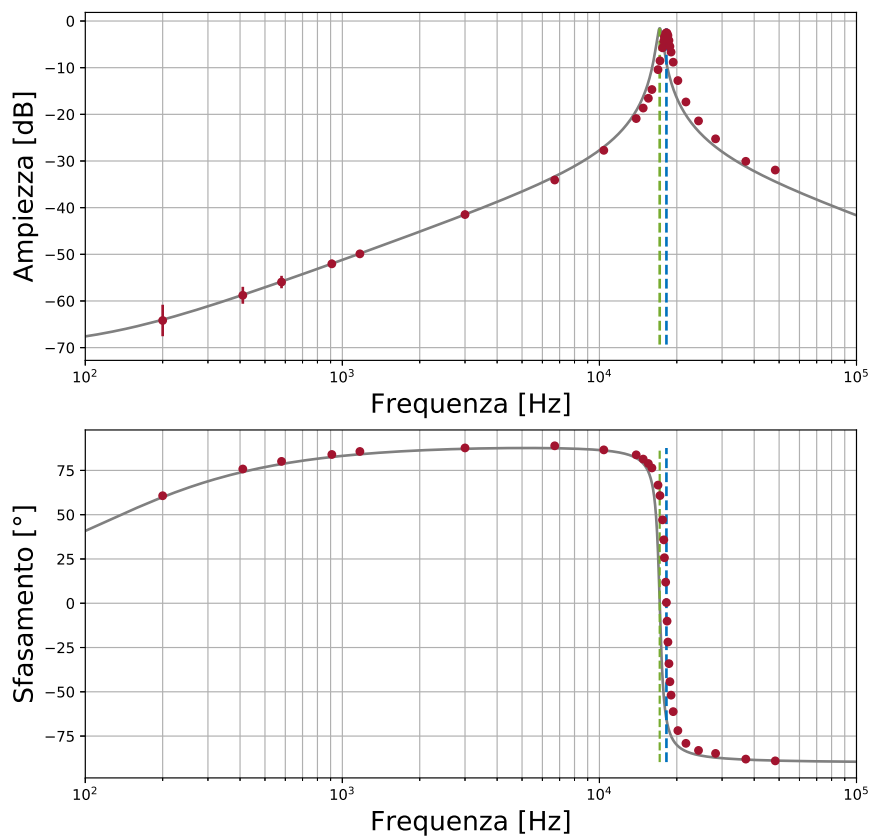
$$R_c = (1.004 \pm 0.006) \, \Omega$$

I grafici dopo questa correzione mostrano che l'ipotesi era corretta, e l'aderenza tra dati e modello teorico è decisamente migliorata. Il risultato è visibile in figura 8.

$$R = 9939 \, \Omega \pm 2 \, \Omega$$



$$R = 5105 \, \Omega \pm 2 \, \Omega$$



$$R = 467.3 \, \Omega \pm 0.2 \, \Omega$$

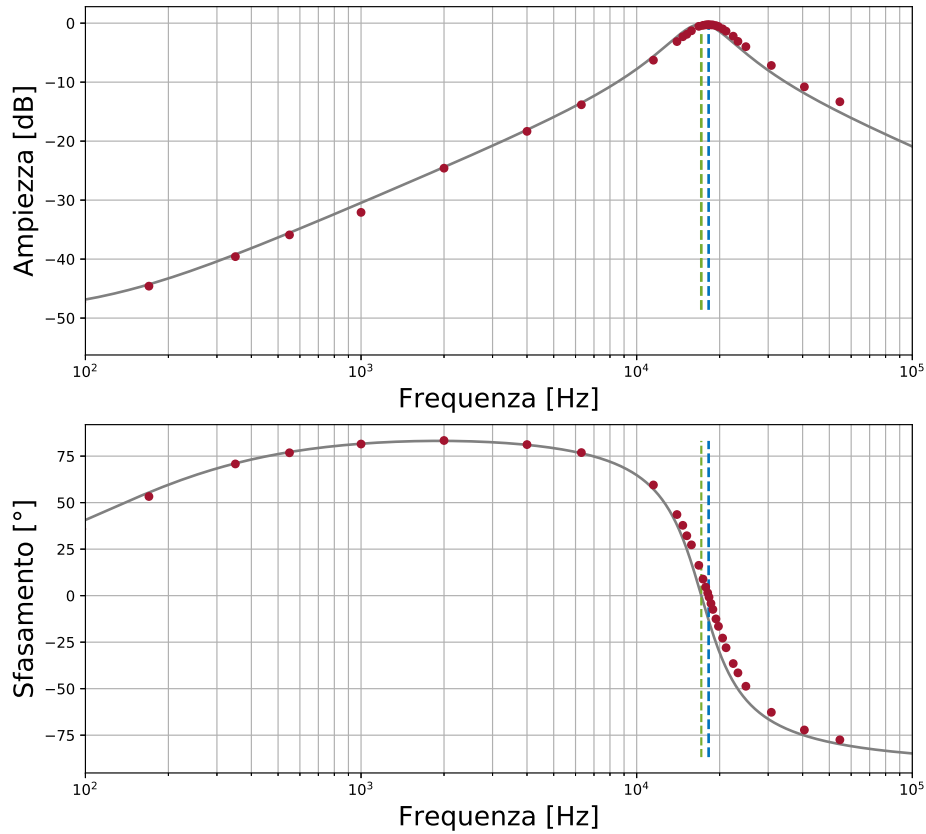


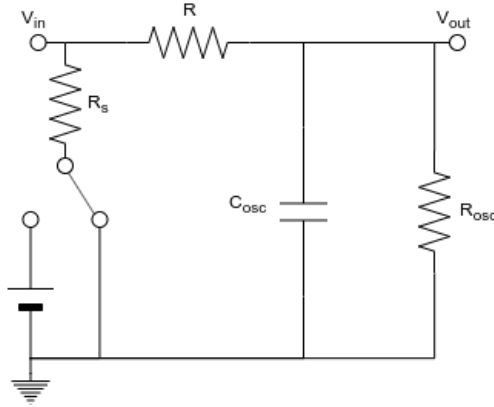
Figura 8: **Correzione resistenze parassite**
Grafici di Bode dopo la considerazione di resistenze parassite.

Parte 3 Conclusioni

La prima parte dell'esperienza ha permesso di mostrare alcune tecniche utili per stimare delle grandezze fisiche, come l'induttanza e una capacità parassita, sfruttando le caratteristiche di un circuito passivo. Per quanto riguarda invece lo studio del filtro RLC, i risultati dell'analisi mettono in luce quanto gli effetti non idealità possano influenzare i dati sperimentali in modo sia qualitativo che quantitativo, e l'esperienza ha mostrato quindi delle tecniche per cercare di migliorare il più possibile un modello teorico, evidenziando però allo stesso tempo la difficoltà di creare un modello che tenga conto di ogni effetto parassita.

Appendice

Misura di C_{osc} e R_{osc}



	$R \pm \delta R$
1	$(1001 \pm 0.2) \Omega$
2	$(99570 \pm 11) \Omega$
3	$(21730 \pm 3) \Omega$
4	$(39360 \pm 5) \Omega$
5	$(9940 \pm 1) \Omega$

Figura 9: **Scarica RL**

La'analisi del circuito in figura ha permesso di risalire ai valori C_{osc} e R_{osc} dovuti ai cavi coassiali dell'oscilloscopio, necessari per le misure nel circuito RLC

Tabella 4: **Resistenze circuito RC**

Nella tabella sono riportati i valori delle resistenze utilizzate per l'analisi della scarica della capacit  dovuta alla presenza dei cavi coassiali. I valori sono stati misurati con il multimetro digitale.

Per risalire ai valori di C_{osc} e R_{osc} si   seguita una procedura simile a quella mostrata nella misura dell'induttanza; tutta via si   scelto di operare in maniera differente per la correzione dell'offset delle misure, ricavando, in questo caso, il valore di offset δV e correggendo tutte le misure prima di procedere con l'analisi.

- Cinque valori di resistenza sono stati scelti e misurati con il DMM. I valori sono riportati nella tabella 4
- Per ciascuna resistenza sono state prese 5 misure da 10'000 campionamenti ciascuna, durante la fase di scarica.
- Le misure di ciascuna scarica sono state corrette per gli effetti dell'offset: a partire dal modello che descrive la scarica in presenza dell'offset $V_{out} = V_{in}e^{-t/\tau} + \delta V$ si   ricavata la relazione $\ln(V_{out}) \simeq \ln(V_{in}) - t/\tau + \ln(\delta V/V_{out})$, la quale ha permesso di estrapolare il valore di δV per regressione lineare multivariata ¹. Il valore   stato quindi sommato alle misure della tensione in uscita.
- Con le misure corrette   stato possibile eseguire un fit lineare basato sul modello $\ln V_{out} = \ln V_{in} - t/\tau$ per risalire ai valori $(\frac{1}{\tau})_{i,R}$.
- per ogni valore di resistenza si   quindi ricavato un valore $(\frac{1}{\tau})_R$ mediando i 5 valori, con incertezza calcolata tramite deviazione standard.
- Infine, basandosi sul modello $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{C_{osc}} \left(\frac{1}{R_{tot}} + \frac{1}{R_{osc}} \right) = \gamma + \lambda \frac{1}{R_{tot}}$ si sono potuti calcolare i valori di R_{osc} e C_{osc} a partire dai valori di γ e λ per regressione lineare

$$C_{osc} = \frac{1}{\lambda} = (128.69 \pm 0.02) \text{ pF} \quad \text{e} \quad R_{osc} = \frac{\lambda}{\gamma} = (961 \pm 2) \text{ k}\Omega$$

¹Dettagli nel paragrafo successivo

Regressione multivariata

Il problema generale dei minimi quadrati per ricostruire una relazione lineare tra m grandezze, avendo a disposizione n misure, può essere formalizzato attraverso un'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

dove \mathbf{y} è un vettore di dimensione n contenente i valori sperimentali osservati, \mathbf{x} è un vettore di dimensione m contenente i parametri cercati, e A è una matrice $n \times m$ in cui si hanno le n misure delle m grandezze tra loro in relazione lineare.

Si dimostra che il vettore di parametri \mathbf{x} che minimizza la funzione costo associata al problema

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n (y_i - A_i\mathbf{x})^2 = \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|^2$$

è dato da

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{y}$$

dove $A^+ = (AA^T)^{-1}A^T$ è la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose.

In particolare questo vale quando al posto della funzione costo \mathcal{C} si considera il valore del χ^2

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - A_i\mathbf{x}}{\sigma_{yi}} \right)^2$$

semplicemente ponendo $\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y}}{\sigma_y}$ e $A' = \frac{A}{\sigma_y}$ e rifacendosi al caso sopra riportato. Si ottiene così un procedimento per la soluzione del problema generale dei minimi quadrati, con dati affetti da errori.