



Relazione 1 - Misure di Resistenza

Università degli Studi di Trento - Laboratorio di Fisica II

Matteo Zortea, Elena Acinapura

Anno Accademico 2019-2020 (11 novembre 2019)

Sommario

In questa esperienza vengono effettuate misure di corrente e di differenza di potenziale in un circuito alimentato a corrente continua con diversi valori di tensione, composto da un'unica resistenza di valore incognito. In questo modo si intende verificare sperimentalmente la consistenza della legge di Ohm e stimare, sulla base di essa, il valore di resistenza del componente utilizzato. Inoltre si riporta il risultato della misura della resistenza di una bobina di rame eseguita con la tecnica "4-wire", introdotta al fine di ridurre al minimo l'effetto resistivo spurio dei connettori sulla misura.

Introduzione

Un resistore è un componente di un circuito che, quando sottoposto a una differenza di potenziale, presenta una relazione lineare tra la corrente che vi scorre attraverso, i , e la differenza di potenziale applicata ai suoi capi, ΔV , secondo quella che viene chiamata *legge di Ohm*. Si definisce resistenza del resistore il coefficiente R tale che $\Delta V = iR$.

Scopo di tale esperienza è verificare tale legge e stimare il valore di una resistenza in dotazione. Gli strumenti utilizzati nella prima parte sono un amperometro e un voltmetro analogici; nell'analisi si considera la loro non idealità e quindi la loro influenza sulle misure, proponendo una correzione del valore stimato di R attraverso la semplice regressione. Successivamente il valore di R viene misurato anche per mezzo di un multimetro digitale, così da avere un termine di paragone per il risultato ottenuto con l'analisi. Nella seconda parte viene invece introdotta una tecnica di misura più sensibile attraverso il multimetro digitale, per misurare valori di resistenza piccoli, dell'ordine di grandezza di pochi Ohm.

Strumentazione e materiale

- Due tester ICE: uno in configurazione voltmetro e uno in configurazione amperometro
- Multimetro digitale da banco (DMM)
- Alimentatore in corrente continua stabilizzato
- Resistore dal valore nominale di $6.5\text{ k}\Omega$, con massima potenza nominale sostenuta di 0.5 W
- Due bobine di rame
- Breadboard
- Connettori e cavetti elettrici

1 Misura di una resistenza incognita

Progettazione della misura

L'esperienza prevede di alimentare un circuito composto da un solo resistore con diversi valori di tensione (e quindi di corrente) in modo da verificare la validità della relazione lineare $\Delta V = iR$, risalire al valore della resistenza incognita tramite una regressione lineare dei dati, e per poter analizzare il comportamento degli strumenti di misura analogici utilizzando diversi fondo-scala. Il resistore sopporta al massimo 0.5 W, quindi prima di effettuare la misura è necessario calcolare la massima differenza di potenziale applicabile al circuito e la massima corrente che vi può scorrere, di modo da non apportare danni ai componenti. Trascurando le resistenze interne degli strumenti di misura si calcola che la potenza assorbita dalla resistenza in presenza di una d.d.p. ΔV vale $P = \frac{\Delta V^2}{R} = i^2 R$. Considerando il valore nominale della resistenza indicato dai colori posti sul componente (6.5 k Ω), siamo giunti alla condizione di sicurezza

$$\Delta V_{max} = \sqrt{P_{max}R} \simeq 57 \text{ V}; \quad i_{max} = \sqrt{P_{max}/R} \simeq 8.7 \text{ mA}$$

Tale valore di tensione non è nemmeno raggiungibile dall'alimentatore utilizzato, il quale permette di applicare al massimo una differenza di potenziale di 25V, quindi l'unica precauzione presa è quella di impostare nell'alimentatore un limite alla massima corrente circolante pari a 5mA, utile nel caso in cui vi sia un malfunzionamento del circuito o un errore nella realizzazione dello stesso.

Il circuito può essere montato con due configurazioni differenti: la prima mettendo l'amperometro in serie con il parallelo formato dalla resistenza e dal voltmetro (amperometro a monte), e la seconda mettendo il voltmetro in parallelo con la serie formata dall'amperometro e dalla resistenza (amperometro a valle). Le due configurazioni sono visibili nelle figure 2 e 1. Dal momento che le due configurazioni influiscono diversamente sulla misura, sono state effettuate misure con entrambe, correggendo le stime nei due casi e valutandone infine la compatibilità. Inoltre, dal momento che la resistenza degli strumenti di misura varia a seconda del fondo-scala utilizzato, per ciascuna configurazione sono state fatte misure con due fondo-scala differenti: per il circuito con amperometro a monte sono stati utilizzati i fondo-scala 50 V - 5 mA e 10 V - 5 mA, per il circuito con amperometro a valle 50 V - 5 mA e 10 V - 500 μA . Per ogni fondo-scala sono state prese 12 misure.

Per il calcolo delle incertezze è stata considerata soltanto l'incertezza della risoluzione dell'ICE, che dipende dal fondo-scala. Per ciascuna configurazione quindi si è cercato di eseguire alcune misure con valori vicini al valore di fondo-scala: infatti, essendo l'errore assoluto della misura dipendente unicamente dalla scelta del fondo-scala, l'errore relativo risulta essere inversamente proporzionale al valore misurato, a parità di fondo-scala.

Configurazione amperometro a monte

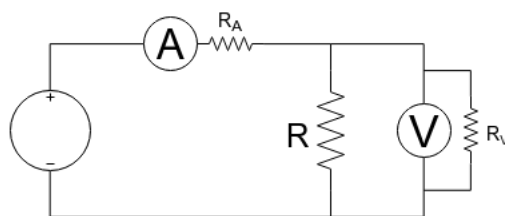


Figura 1: **Amperometro a monte**

Schema del circuito in configurazione "amperometro a monte". I simboli degli strumenti sono da intendersi come strumenti ideali, mentre le loro resistenze reali sono rappresentate da R_A e da R_V

Sono state misurate 12 coppie di valori di tensione e corrente V_m e i_m , e con questi è stata fatta una regressione lineare stimando i coefficienti e la loro incertezza nella relazione $V = a + bi$. Nella regressione è stato considerato anche il contributo dell'incertezza sulla corrente.

Successivamente si è considerata l'influenza della resistenza degli strumenti di misura per correggere i valori stimati con la regressione: se fossero ideali, infatti, l'amperometro possederebbe una resistenza nulla, senza provocare caduta di potenziale, e il voltmetro una resistenza infinita, non facendo scorrere corrente attraverso il suo ramo. In realtà, un amperometro reale presenta una piccola resistenza interna, e il voltmetro presenta una resistenza grande, ma finita. Queste si possono calcolare dai manuali degli strumenti, e attraverso un'analisi circuitale si calcola che il valore effettivo della resistenza R , nella configurazione con amperometro a monte, è dato dalla seguente

relazione:

$$R = \frac{1}{\frac{V_m}{i_m} - \frac{1}{R_V}}$$

dove con R_V si intende la resistenza interna al tester ICE in configurazione voltmetro. Tale valore di resistenza dipende dal fondo-scala usato ed è stata calcolata per i due fondo-scala utilizzati a partire dallo schema circuitale interno dello strumento di misura.

La quantità V_m/i_m coincide proprio con il valore del coefficiente angolare della regressione lineare eseguita sui dati (il valore di resistenza da correggere), quindi, detto R_m il valore di resistenza ottenuto tramite regressione lineare, la formula per la correzione della misura e per la propagazione dell'incertezza risulta essere

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_v}} \implies \delta R = \frac{R_v^2}{(R_v - R_m)^2} \delta R_m$$

Configurazione amperometro a valle

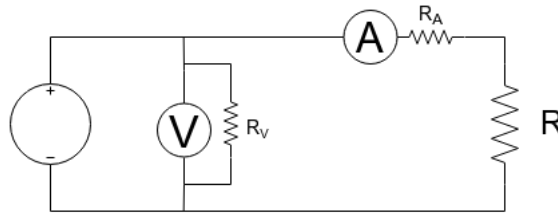


Figura 2: **Amperometro a valle**

Schema del circuito in configurazione "amperometro a valle". I simboli degli strumenti sono da intendersi come strumenti ideali, mentre le loro resistenze reali sono rappresentate da R_A e da R_V

Anche per questa configurazione la regressione lineare è stata eseguita come esposta nel paragrafo precedente, considerando il contributo dell'incertezza sulla corrente e ottenendo una stima della resistenza R_m .

In questo caso l'analisi del circuito, visibile in figura 2, porta a calcolare che

$$R = \frac{V_m}{i_m} - R_a = R_m - R_A \Rightarrow \mathbf{R} = \delta R_m$$

dove R_A è la resistenza del tester ICE in configurazione amperometro.

Analisi dei dati raccolti

In questa sezione vengono presentati i risultati dell'analisi dei dati raccolti. La procedura di analisi, come spiegato nelle sezioni precedenti, consiste in una prima regressione lineare dei dati, e nella successiva correzione della stima di R come coefficiente angolare della regressione, tenendo conto dell'influenza degli strumenti. Nelle figure 3-4 sono rappresentati i dati sperimentali, la retta di regressione e i residui relativi alle configurazioni utilizzate.

Configurazione	A [V]	B [Ω]	R^* [Ω]	δR^* [Ω]	$\chi_r^2 (p)$
Monte (10 V - 50 mA)	$+0.1 \pm 0.1$	6500 ± 100	6700	200	0.96 (0.47)
Monte (50 V - 50 mA)	-0.7 ± 0.2	6900 ± 100	6900	100	1.11 (0.35)
Valle (10 V - 500 μA)	-0.1 ± 0.1	7200 ± 200	6600	200	1.59 (0.10)
Valle (50 V - 50 mA)	-0.6 ± 0.3	7000 ± 100	6900	100	1.12 (0.34)
$R_{nominale}$	$\mathbf{6500 \Omega}$				
R_{DMM}	$(6560 \pm 10) \Omega$				

Tabella 1: **Valori di R**

Sono riportate le stime dei coefficienti A e B ricavati per regressione da un modello $V = A + Bi$, affiancati dai valori successivamente corretti di R tenendo conto della non idealità degli strumenti.

A partire dai valori dei coefficienti angolari trovati, abbiamo corretto le misure di resistenza tenendo conto delle resistenze interne agli strumenti di misura, utilizzando le relazioni precedentemente scritte. I valori di R corretti, indicati con R^* , sono riportati nella tabella 1. L'incertezza sulla misura è stata calcolata attraverso la formula di propagazione di misure statisticamente indipendenti ed è stata arrotondata alla prima cifra significativa come da convenzione. Nella medesima tabella è riportato anche il risultato della misura della resistenza effettuata con il multimetro digitale (DMM), impostato in

configurazione "2 wires". In questo caso l'incertezza è stata fissata tenendo conto del fatto che le cifre meno significative non erano ben chiare nella fase di lettura: vi erano delle fluttuazioni nel valore riportato dallo strumento, probabilmente causate da un contatto non ottimale tra i cavi del multimetro e la resistenza.

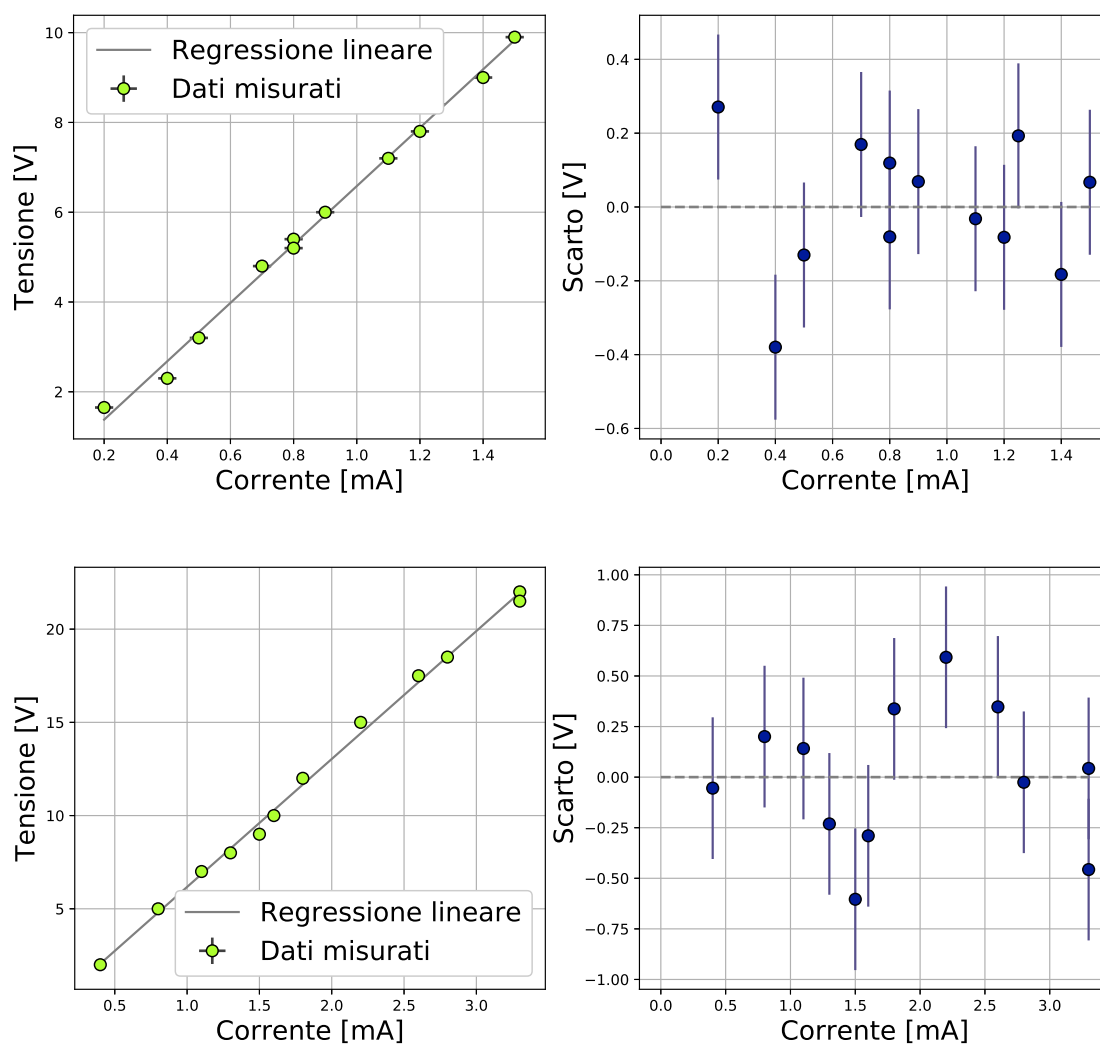


Figura 3: **Amperometro a monte**
Regressione e grafico dei residui della configurazione con amperometro a

monte per f.s. 10V - 5mA (prime due) e 50V - 5mA (seconde due).

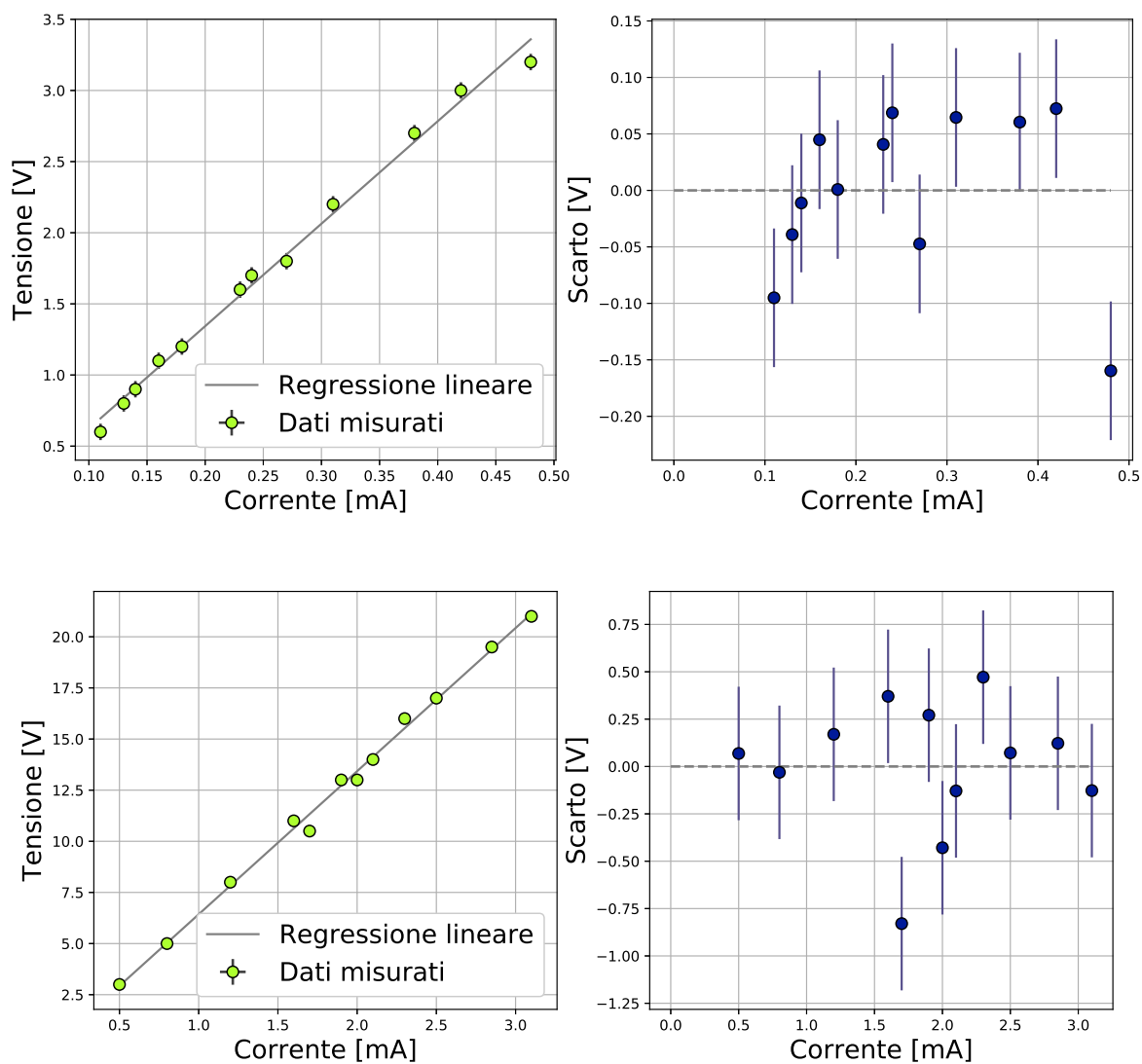


Figura 4: **Amperometro a valle**

Regressione e grafico dei residui della configurazione con amperometro a valle per f.s. 10V - 5 μ A (prime due) e 50V - 5mA (seconde due).

Valutazione dei risultati

I risultati dell'analisi mostrano che la linearità tra tensione e corrente in un resistore, espressa dalla legge di Ohm, è compatibile con i dati sperimentali, e in particolare i valori ottenuti di χ_r^2 sono da considerarsi a supporto di questa tesi. Tuttavia, solo nelle due configurazioni con fondo-scala del voltmetro di 10V la stima finale di R risulta compatibile col valore misurato con il DMM entro un intervallo di incertezza, mentre per le altre due configurazioni, con fondo-scala di 50V, il risultato è compatibile soltanto se si considerano intervalli maggiori di $3 \delta R$. Non siamo riusciti a dare una motivazione sufficientemente solida a questo risultato; certamente le condizioni di misura non erano del tutto ideali (i cavi in dotazione per effettuare i collegamenti non erano stabili e questo può aver influito sulle misure, nonostante i provvedimenti presi per mantenerli il più stabili possibile); un'ulteriore ipotesi è che gli strumenti di misura possano essere stati calibrati male, e un offset lineare abbia potuto influire maggiormente per le misure con fondo-scala maggiore (la eventuale presenza di un offset costante è stata prevenuta riallineando la lancetta dei tester ICE allo 0 prima di effettuare le misure). Eseguire misure ripetute avrebbe potuto dare informazioni in più sul comportamento degli strumenti, oltre che fornire un valore statistico più solido ai dati trovati, ma la necessità di rendere l'esperienza compatibile con i tempi richiesti non l'ha reso possibile.

2 Misura della resistenza delle bobine

Misura a quattro terminali

La misura a quattro terminali (o "4-wire") è una tecnica con la quale è possibile effettuare misure di resistenza riducendo drasticamente eventuali imprecisioni dovute alla non idealità del circuito e a resistenze parassite. Qualora il valore della resistenza incognita, come spesso accade, sia maggiore delle resistenze parassite di diversi ordini di grandezza, allora si può trascurare l'effetto dovuto alla non idealità del circuito. Tuttavia, per misurare la resistenza della bobina di rame a disposizione, ciò non si verifica: la resistenza calcolata teoricamente, come sotto descritto, risulta essere inferiore ad 1Ω , paragonabile a quella dei cavi normalmente utilizzati per collegare gli strumenti, e si è quindi rivelato necessario adottare que-

sta tecnica di misura. Una corrente nota (1 mA) viene fatta scorrere nel circuito, visibile in figura 5, la quale attraversa la resistenza da misurare R .

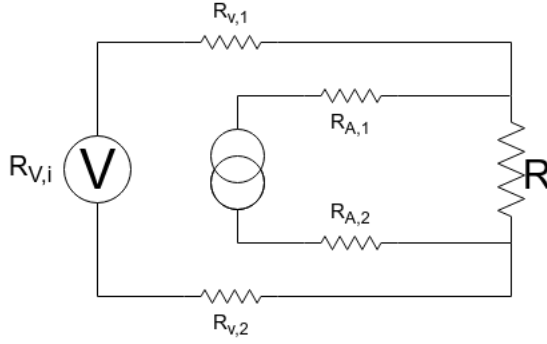


Figura 5: **Schema misura 4 terminali**

La misura a 4 terminali permette di ridurre l'influenza delle resistenze parassite nel circuito e si è rivelata fondamentale nella misura della resistenza della bobina.

Il voltmetro è posto direttamente ai capi della resistenza in modo da escludere dalla misura l'effetto dovuto ai connettori dell'amperometro. Rimane una caduta di potenziale nei connettori del voltmetro, ma questa risulta essere trascurabile quando, come in questo caso, la resistenza interna del voltmetro $R_{V,i}$ risulta essere di gran lunga maggiore della resistenza R , secondo le specifiche dello strumento, e quindi la corrente circolante nel ramo di circuito del voltmetro è davvero minima.

Le due resistenze qui considerate sono state realizzate avvolgendo del filo di rame attorno a un rocchetto. E' stato possibile stimare il valore di resistenza atteso attraverso la relazione $R = \rho_{cu} l/s$, con l lunghezza del filo complessivamente utilizzato, misurato con un metro di risoluzione 1 cm , s sezione del filo, e $\rho_{cu} = 0.0171\text{ }\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ resistività del rame. I valori misurati sono messi a confronto con quelli calcolati, nella seguente tabella

	Valore calcolato	Valore sperimentale
R1	$(0.56 \pm 0.02)\text{ }\Omega$	$(0.580 \pm 0.004)\text{ }\Omega$
R2	$(0.58 \pm 0.01)\text{ }\Omega$	$(0.606 \pm 0.004)\text{ }\Omega$

Tabella 2: **Misura 4-wire**

I valori di resistenza delle bobine in rame sono messi a confronto con i valori calcolati. I valori sperimentali sono stati ottenuti attraverso la tecnica di misura a 4 terminali, la quale permette di ridurre drasticamente l'impatto delle resistenze non desiderate.

Stima di resistenze spurie presenti nel circuito della Sezione 1

Prima di misurare la resistenza delle bobine come sopra descritto, è stato fatto un tentativo utilizzando due ulteriori cavetti per facilitare la misura. Questo semplificava notevolmente la connessione attraverso i cavi del multimetro; tuttavia i due cavetti presentavano valori di resistenza non trascurabili rispetto a quella calcolata della bobina, anzi addirittura di valore simile. Dal confronto tra la misura eseguita con questa configurazione e quella con i connettori del multimetro collegati direttamente al componente da misurare, siamo risaliti ad un valore approssimativo della resistenza di ciascun cavetto

$$R_c \simeq (0.251 \pm 0.003) \, \Omega.$$

Nel circuito utilizzato nella sezione 1 per la misura di R incognita sono stati utilizzati in tutto 3 cavetti di pari lunghezza e sezione, e quindi il contributo totale di essi è pari a circa

$$R_{c,tot} \simeq (0.753 \pm 0.005) \, \Omega$$

Tale valore di resistenza risulta essere circa lo 0.01% del valore della resistenza incognita: questo risultato ci consente chiaramente di trascurare gli effetti resistivi dei cavetti nel circuito di misura utilizzato nella prima parte dell'esperienza.

Conclusioni

L'analisi eseguita in quest'esperienza di laboratorio ci permette di affermare che il metodo voltamperometrico per la misura di resistenza non sempre può rivelarsi la scelta più precisa, seppur relativamente semplice. Infatti, la non idealità degli strumenti (specialmente nella configurazione con amperometro a valle), può risultare critica nella determinazione del valore cercato quando quest'ultimo presenta un valore di resistenza di grandezza confrontabile con quella degli strumenti di misura. Inoltre, in queste misure, vi è un limite alla precisione imposto dalla risoluzione dello strumento che sicuramente domina nella natura dell'errore (le fluttuazioni casuali risultano essere trascurabili). Questo non solo priva della possibilità di utilizzare tecniche per migliorare la precisione sulla misura, quali l'utilizzo di medie statistiche, ma non giustifica neanche a pieno la procedura seguita nei metodi di analisi (es. regressione lineare), i quali richiederebbero una natura gaussiana della fonte d'errore.

Appendice

Nella seguente tabella sono riportati tutti i dati raccolti nel corso dell'esperienza, utilizzando le 4 diverse configurazioni.

Amp. a monte 10V - 5mA		Amp. a monte 50V - 5mA	
V_m [V]	i_m [mA]	V_m [V]	i_m [mA]
$(\delta V_m = 0.06 \text{ V})$	$(\delta i_m = 0.03 \text{ mA})$	$(\delta V_m = 0.3 \text{ V})$	$(\delta i_m = 0.03 \text{ mA})$
1.65	0.2	7	1.1
5.40	0.8	15	2.2
7.20	1.1	17.5	2.6
3.20	0.5	12.0	1.8
4.80	0.7	22	3.3
5.20	0.8	5	0.8
8.40	1.25	21.5	3.3
9.90	1.5	9	1.5
6.0	0.9	18.5	2.8
2.3	0.4	2	0.4
9.0	1.4	10	1.6
7.8	1.2	8	1.3
Amp. a valle 10V - 500 μA		Amp. a valle 50V - 5mA	
V_m [V]	i_m [μ A]	V_m [V]	i_m [mA]
$(\delta V_m = 0.06 \text{ V})$	$(\delta i_m = 10) \mu\text{A}$	$(\delta V_m = 0.3)$	$(\delta i_m = 0.03 \text{ mA})$
1.2	180	19.5	2.85
1.7	240	17.0	2.5
0.9	140	11.0	1.6
0.6	110	13.0	1.9
3.2	480	16.0	2.3
1.8	270	3.0	0.5
1.1	160	21	3.1
2.7	380	5	0.8
2.2	310	14	2.1
1.6	230	13.0	2.0
3.0	420	10.5	1.7
0.8	130	8.0	1.2