

Un sistema lineare di due variabili x e y è un sistema di equazioni della seguente forma

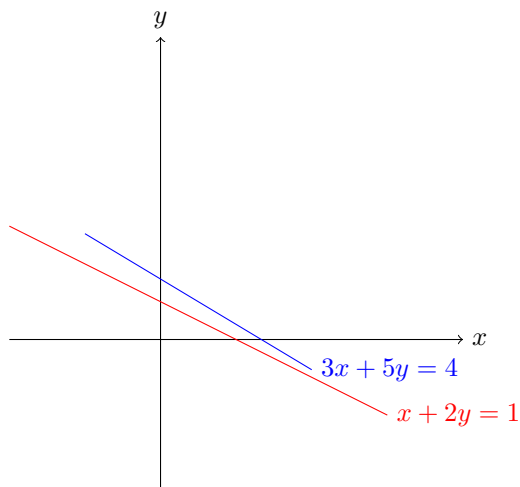
$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = l \\ c \cdot x + d \cdot y = m \end{cases}$$

dove a, b, c, d, l, m sono numeri reali qualsiasi e x e y sono le incognite.

Esempio

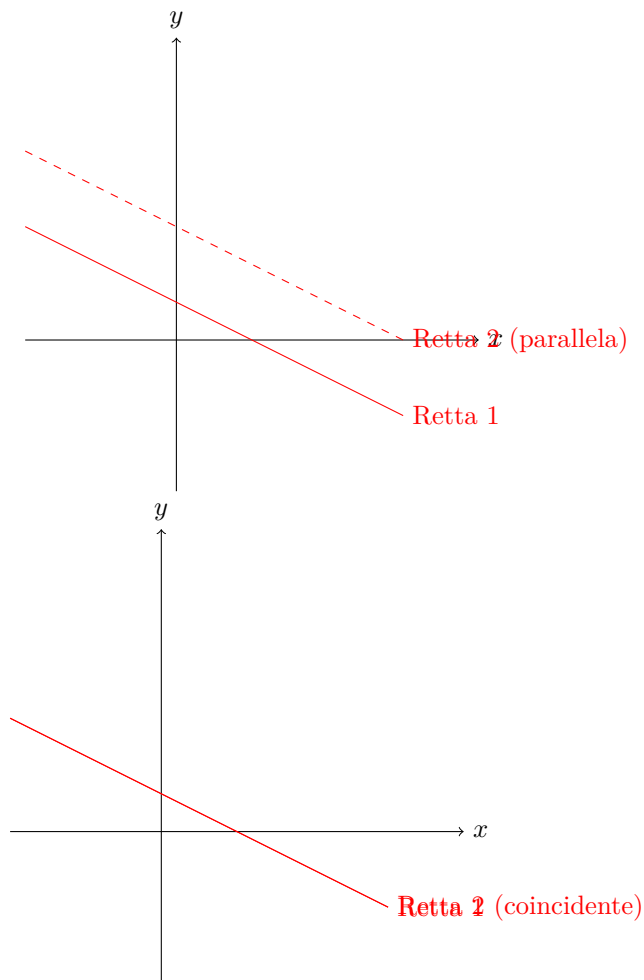
$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 1 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y = 4 \end{cases} \quad .$$

I sistemi di due variabili hanno una interessante interpretazione geometrica. Infatti, è noto che $ax + by = l$ è l'equazione di una retta nel piano, mettendo due equazioni a sistema si sta cercando l'eventuale intersezione di queste due rette del piano.



Immaginare geometricamente il sistema può aiutare a ricordare meglio i tre casi a cui ci si trova di fronte risolvendo un sistema: - impossibile - unica soluzione - infinite soluzioni o indeterminato.

Infatti, il sistema è impossibile quando le rette corrispondenti sono parallele; è indeterminato quando le rette sono coincidenti.



Gli strumenti principali per capire in quali dei tre casi ci si trova in due variabili sono tre:

1. Verificare se le rette corrispondenti alle equazioni sono parallele.
2. Il criterio del determinante per essere in grado di usare Rouché-Capelli.
3. Applicare correttamente il metodo di sostituzione, del confronto o di Gauss. Se durante il procedimento hai ottenuto una uguaglianza non vera come $-1 = 0$ allora il sistema è impossibile. Se hai trovato un'equazione $0 = 0$, allora il sistema è indeterminato. Se invece hai trovato un'unica soluzione, il sistema è risolvibile.

Osservazione 1: Per controllare se due rette sono parallele o coincidenti è di aiuto questo trucco provare a ricondursi alla stessa equazione. Penso che

risulteranno più chiari due esempi anziché usare lettere e distinguere in casi. Esempio rette coincidenti, sistema indeterminato:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Raccogliendo 2 nella prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} 2 \cdot (x + 3y) = 2 \cdot 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Ci siamo accorti che la prima equazione è equivalente alla seconda! Detto altrimenti, la prima e la seconda equazione rappresentano la stessa retta, di conseguenza siamo nel caso di due rette coincidenti, ossia sistema indeterminato

Esempio rette parallele, sistema impossibile:

$$\text{Raccogliendo 3 nella prima equazione si ottiene } \begin{cases} 3x + 9y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{dividendo}$$

per 3 la prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} x + 3y = \frac{1}{3} \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{abbiamo ottenuto le equazioni di due rette parallele. Infatti,}$$

dall'ultimo sistema è facile verificare che le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare ma intercette diverse.

NB: Potreste avere noto che i passaggi nell'osservazione sopra sono passaggi che possono essere inclusi nel metodo di Gauss. Questo è un piccolo spoiler su quello che viene dopo: si potrebbe dire, esagerando un pochino, che tutti i metodi più moderni per la determinazione dei sistemi lineari sono una variante migliorata del metodo di Gauss.

Osservazione 2: Per i casi con più variabili in genere si utilizza il criterio del determinante per applicare il teorema Rouché-Capelli.

Curiosità: Tutte le tecniche più avanzate nate per la risoluzione dei sistemi lineari sono raccolte sotto il nome di Algebra Lineare, una delle teorie matematiche più di successo di sempre. Applicata dalla fisica all'informatica e al centro della moderna rivoluzione delle reti neurali!

Di seguito ho spiegato i metodi di risoluzione dei sistemi lineari dando per scontato che il sistema fosse risolubile. Per adattare i metodi di sostituzione, del confronto e di Gauss agli altri casi, seguire le indicazioni sopra.

Risoluzione di un sistema lineare con il metodo di sostituzione

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Passaggi

1. Isoliamo una variabile in un'equazione (scegliamo la prima):

$$2y = 5 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5 - 2x}{2}$$

2. Sostituiamo nella seconda equazione:

$$3x - 4\left(\frac{5 - 2x}{2}\right) = 1$$

3. Moltiplichiamo per semplificare:

$$3x - \frac{20 - 8x}{2} = 1$$

4. Moltiplichiamo tutto per 2 per eliminare i denominatori:

$$6x - (20 - 8x) = 2$$

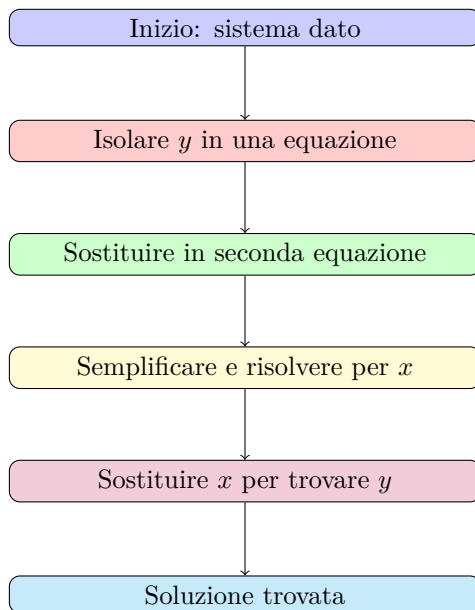
5. Semplifichiamo:

$$6x - 20 + 8x = 2 \quad \Rightarrow \quad 14x = 22 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{7}$$

6. Sostituiamo x nella prima equazione per trovare y :

$$y = \frac{5 - 2(\frac{11}{7})}{2} = \frac{35 - 22}{14} = \frac{13}{14}$$

Risultato: $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{13}{14}$



Metodo del Confronto

1. Esplicitiamo y in entrambe le equazioni:

$$y = \frac{5 - 2x}{2}, \quad y = \frac{3x - 1}{4}$$

2. Confrontiamo le due espressioni:

$$\frac{5 - 2x}{2} = \frac{3x - 1}{4}$$

3. Risolviamo per x :

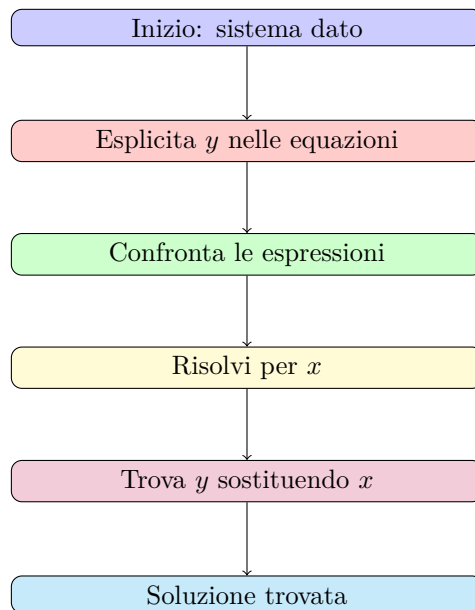
$$4(5 - 2x) = 2(3x - 1)$$

$$20 - 8x = 6x - 2$$

$$20 + 2 = 6x + 8x \Rightarrow 22 = 14x \Rightarrow x = \frac{11}{7}$$

4. Sostituiamo in una delle equazioni:

$$y = \frac{5 - 2(\frac{11}{7})}{2} = \frac{13}{14}$$



Metodo di Gauss

1. Scriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

2. Effettuiamo il pivoting sulla prima colonna dividendo la prima riga per 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

3. Eliminazione: sottraiamo 3 volte la prima riga alla seconda:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.5 \\ 0 & -7 & -6.5 \end{array} \right]$$

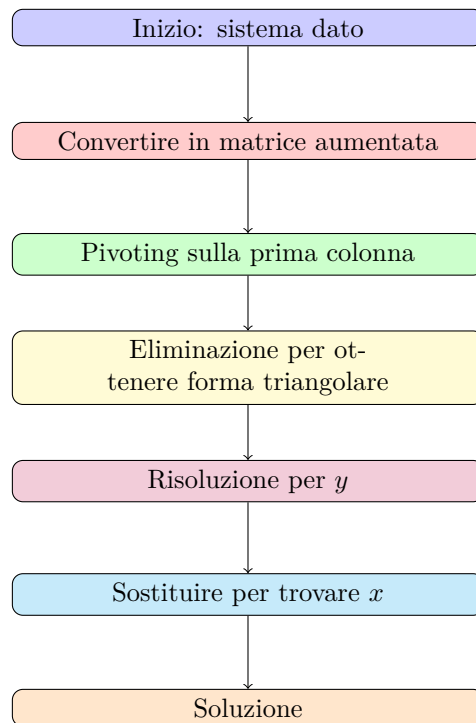
4. Risolviamo per y dalla seconda equazione:

$$y = \frac{-6.5}{-7} = \frac{13}{14}$$

5. Sostituiamo il valore di y nella prima equazione:

$$x + \frac{13}{14} = 2.5$$

$$x = 2.5 - \frac{13}{14} = \frac{11}{7}$$



Metodo di Cramer

1. Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (2)(3) = -8 - 6 = -14$$

2. Calcoliamo i determinanti delle matrici con le colonne sostituite:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (5)(-4) - (2)(1) = -20 - 2 = -22$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (5)(3) = 2 - 15 = -13$$

3. Calcoliamo le soluzioni:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-14} = \frac{11}{7}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-14} = \frac{13}{14}$$

