Un sistema lineare di due variabili x e y è un sistema di equazioni della seguente forma

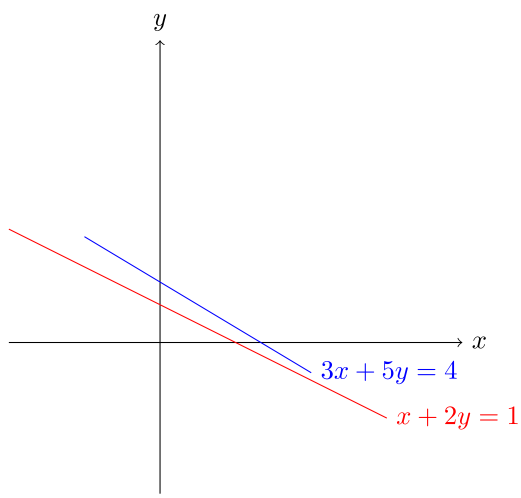
$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = l \\ c \cdot x + d \cdot y = m \end{cases}$$

dove a, b, c, d, l, m sono numeri reali qualsiasi e x e y sono le incognite.

Esempio

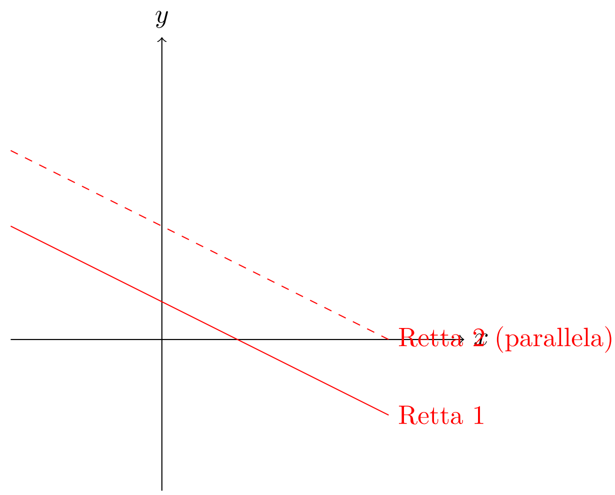
$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 1 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y = 4 \end{cases} \quad .$$

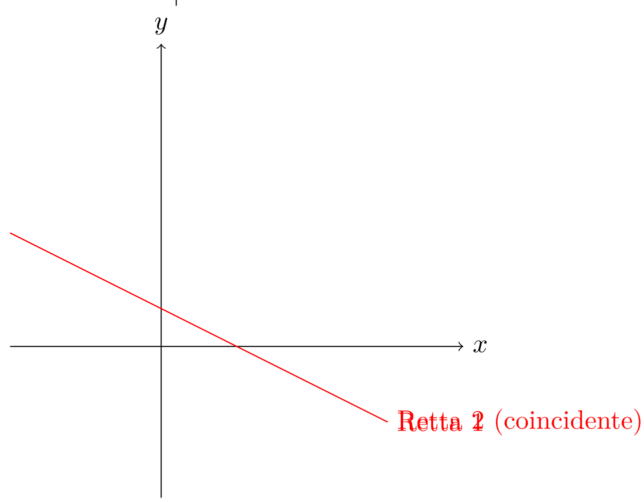
I sistemi di due variabili hanno una interessante interpretazione geometrica. Infatti, è noto che $ax + by = l$ è l'equazione di una retta nel piano, mettendo due equazioni a sistema si sta cercando l'eventuale intersezione di queste due rette del piano.



Immaginare geometricamente il sistema può aiutare a ricordare meglio i tre casi a cui ci si trova di fronte risolvendo un sistema: - impossibile - unica soluzione - infinite soluzioni o indeterminato.

Infatti, il sistema è impossibile quando le rette corrispondenti sono parallele; è indeterminato quando le rette sono coincidenti; ha un'unica soluzione quando le rette sono incidenti.





Gli strumenti principali per capire in quali dei tre casi ci si trova in due variabili sono tre:

1. Verificare se le rette corrispondenti alle equazioni sono parallele o coincidenti.
2. Il criterio del determinante per essere in grado di usare Rouche-Capelli.
3. Applicare correttamente il metodo di sostituzione, del confronto o di Gauss. Se durante il procedimento hai ottenuto una uguaglianza non vera come $-1 = 0$ allora il sistema è impossibile. Se hai trovato un'equazione $0 = 0$, allora il sistema è indeterminato. Se invece hai trovato un'unica soluzione, il sistema è risolvibile.

Osservazione 1: Per controllare se due rette sono parallele o coincidenti è di aiuto questo trucco: provare a ricondursi alla stessa equazione. Penso che

risulteranno più chiari due esempi anziché usare lettere e distinguere in casi.
Esempio rette coincincidenti, sistema indeterminato:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Raccogliendo 2 nella prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} 2 \cdot (x + 3y) = 2 \cdot 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Ci siamo accorti che la prima equazione è equivalente alla seconda! Detto altrimenti, la prima e la seconda equazione rappresentano la stessa retta, di conseguenza siamo nel caso di due rette coincidenti, ossia sistema indeterminato

Esempio rette parallele, sistema impossibile
Raccogliendo 3 nella prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} 3 \cdot (x + 3y) = 1 \\ x + 3y = 1, \end{cases}$$

dividendo per 3 la prima equazione si ottiene

$$\begin{cases} x + 3y = \frac{1}{3} \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema che rappresenta due rette parallele. Infatti, osservando l'ultimo sistema, si nota che le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare ma intercette diverse.

Nota: Arrivati a questo punto, potreste aver notato che i passaggi fatti negli esempi sopra possono essere ricondotti al metodo di Gauss. Questo è un piccolo "spoiler" su ciò che seguirà se continuerete a studiare una materia scientifica: si potrebbe, esagerando un po', affermare che tutti i moderni metodi diretti per la risoluzione dei sistemi lineari sono varianti migliorate del metodo di Gauss.

Osservazione 2: Nei casi con più variabili, generalmente si utilizza il criterio del determinante per applicare il teorema di Rouché-Capelli.
Curiosità: Tutte le tecniche avanzate per la risoluzione dei sistemi lineari fanno parte dell'Algebra Lineare, una delle teorie matematiche di maggior successo. Applicata in fisica, statistica, e al centro della moderna rivoluzione delle reti neurali!

Di seguito sono spiegati metodi di risoluzione dei sistemi lineari dando per scontato che il sistema sia risolubile. Per adattare i metodi di sostituzione, del confronto e di Gauss agli altri casi, seguite le indicazioni date sopra.

Risoluzione di un sistema lineare con il metodo di sostituzione

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Passaggi

1. Isoliamo una variabile in un'equazione (scegliamo la prima):

$$2y = 5 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5 - 2x}{2}$$

2. Sostituiamo nella seconda equazione:

$$3x - 4\left(\frac{5 - 2x}{2}\right) = 1$$

3. Moltiplichiamo per semplificare:

$$3x - \frac{20 - 8x}{2} = 1$$

4. Moltiplichiamo tutto per 2 per eliminare i denominatori:

$$6x - (20 - 8x) = 2$$

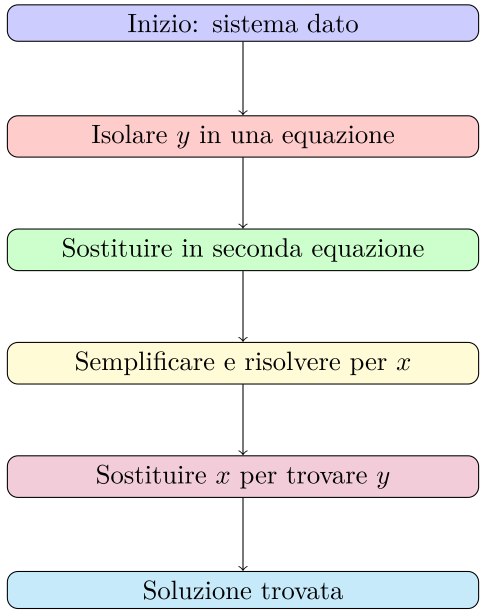
5. Semplifichiamo:

$$6x - 20 + 8x = 2 \quad \Rightarrow \quad 14x = 22 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{7}$$

6. Sostituiamo x nella prima equazione per trovare y:

$$y = \frac{5 - 2(\frac{11}{7})}{2} = \frac{35 - 22}{14} = \frac{13}{14}$$

Risultato: $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{13}{14}$



Metodo del Confronto

1. Esplicitiamo y in entrambe le equazioni:

$$y = \frac{5-2x}{2}, \quad y = \frac{3x-1}{4}$$

2. Confrontiamo le due espressioni:

$$\frac{5-2x}{2} = \frac{3x-1}{4}$$

3. Risolviamo per x:

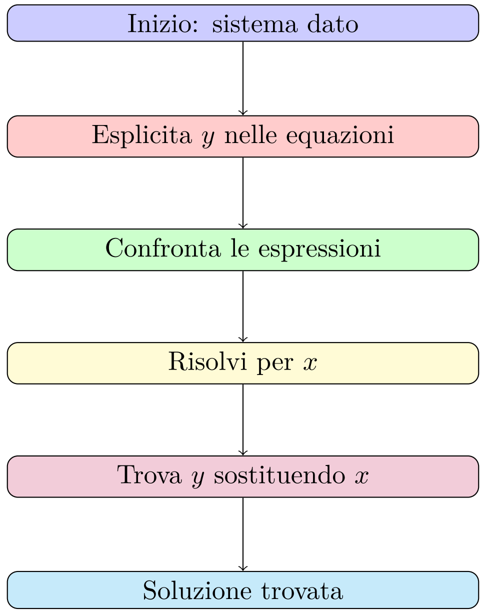
$$4(5-2x) = 2(3x-1)$$

$$20 - 8x = 6x - 2$$

$$20 + 2 = 6x + 8x \Rightarrow 22 = 14x \Rightarrow x = \frac{11}{7}$$

4. Sostituiamo in una delle equazioni:

$$y = \frac{5 - 2(\frac{11}{7})}{2} = \frac{13}{14}$$



Metodo di Gauss

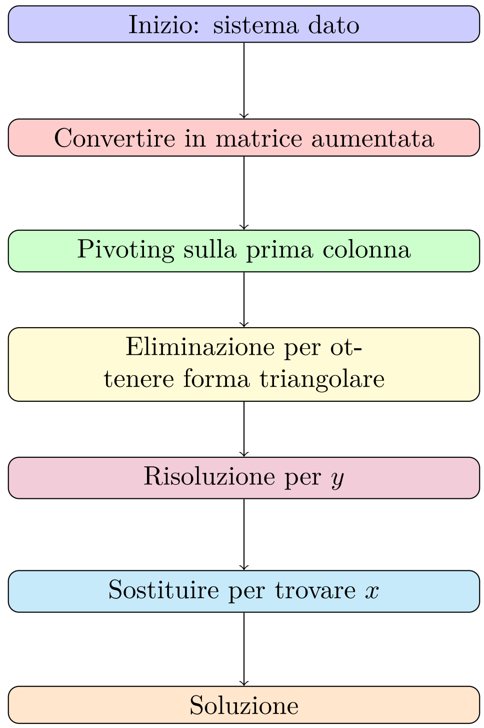
1. Scriviamo il sistema in forma matriciale:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

2. Effettuiamo il pivoting sulla prima colonna dividendo la prima riga per 2:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

3. Eliminazione: sottraiamo 3 volte la prima riga alla seconda:
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2.5 \\ 0 & -7 & -6.5 \end{array}\right]$$

4. Risolviamo per y dalla seconda equazione:
$$y = \frac{-6.5}{-7} = \frac{13}{14}$$

5. Sostituiamo il valore di y nella prima equazione:
$$x + \frac{13}{14} = 2.5$$
$$x = 2.5 - \frac{13}{14} = \frac{11}{7}$$



Metodo di Cramer

1. Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (2)(3) = -8 - 6 = -14$$

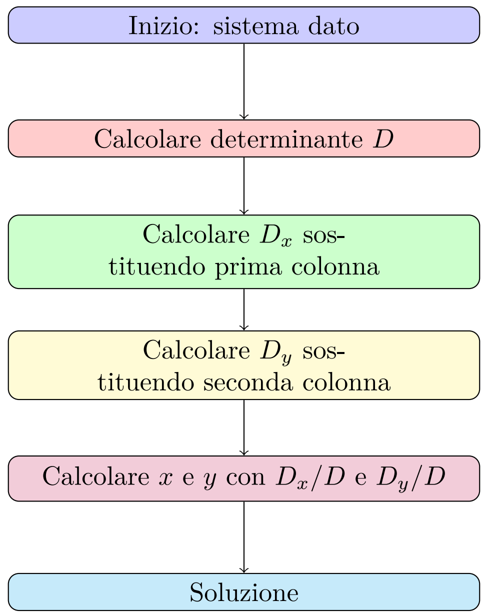
2. Calcoliamo i determinanti delle matrici con le colonne sostituite:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (5)(-4) - (2)(1) = -20 - 2 = -22$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (5)(3) = 2 - 15 = -13$$

3. Calcoliamo le soluzioni:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-14} = \frac{11}{7}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-14} = \frac{13}{14}$$


Inizio: sistema dato
Calcolare determinante D
Calcolare D_x sostituendo prima colonna
Calcolare D_y sostituendo seconda colonna
Calcolare x e y con D_x/D e D_y/D
Soluzione