

2.1 Sumatorias

Imaginemos la siguiente situación: vamos a arrendar una casa durante dos años y el primer mes nos cobrarán \$190.000, pero en el contrato está estipulado que cada mes el arriendo aumenta en \$3.500. ¿Cuánto terminaremos pagando en total?

Si simbolizamos por a_i el valor del arriendo en el mes i, entonces

```
a_1 = \$190.000
a_2 = \$193.500
a_3 = \$197.000
\vdots
a_{23} = \$267.000
a_{24} = \$270.500
```

Pero, ¿cuánto es el total? A mano o en calculadora, es una suma tediosa. Con el computador, quizás un poco menos. Por ejemplo, dado nuestro conocimiento de sucesiones, ya nos hemos dado cuenta que el valor del arriendo forma una sucesión aritmética. Esta sucesión aritmética tiene un valor inicial de 190.000 y una diferencia constante entre términos consecutivos de 3.500. Podemos usar eso para escribir un código que lleve a cabo la suma por nosotros.

Ejemplo 0

```
a=[]
suma = 0
for i in range (24):
    a.append(190000+3500*i)
    suma=a[i]+suma
    print (f'a({i})={a[i]}')
print (f'total = {suma}')
Con este código, el total es $5.526.000.
```

Actividad 2.1 Reescribe el ejemplo anterior, de manera de no usar bucles para calcular la suma, pero puedes usarlos para definir la sucesión (Hint: investiga sobre la función sum).

¿Qué pasa si necesitáramos sumar sólo los montos que pagaríamos el segundo año de arriendo? Podríamos hacer un código similar, pero que sólo tuviera en cuenta los elementos que corresponden de la sucesión.

Otro problema es cómo podemos *comunicar* esta suma. Si tuviéramos que escribirla, podríamos hacer algo como

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{22} + a_{23} + a_{24}$$

con los puntos suspensivos indicando que sumamos todos los términos omitidos.

Notación Σ

Una notación más resumida que se usa comúnmente es

$$\sum_{i=1}^{24} a_i$$

en que i es un índice que recorre la suma, entre el primer término que se suma y el último, de la misma forma que en sucesiones o en los ciclos for. En este caso, se inicia en i = 1, el primer mes, y termina cuando i = 24, es decir el mes 24 o dos años.

La notación Σ (o notación de sumatoria) es una manera de escribir una sumatoria de forma abreviada

Variables "mudas"

La variable del índice de la suma es completamente irrelevante para el resultado. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

mientras la variable defina tanto los índices de la suma y los de la sucesión.

Sigma $\sum_{i=1}^{ ext{Posición final}} a_i$ Sucesión a sumar i=1 Índice Posición inicial

2.1 Sumatorias

Si quisieramos expresar la suma de los arriendos en el segundo año, es decir, desde el mes 13 al mes 24, podríamos hacer lo siguiente

$$a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{24}$$

pero ocupando la notación anterior, podemos escribirlo como

$$a_{13} + a_{14} + \dots + a_{24} = \sum_{i=13}^{24} a_i$$

Para recapitular, una *sumatoria* es una suma de los términos de una sucesión comprendidos entre dos términos. Durante este capítulo desarrollaremos algunas técnicas para trabajar con estas sumas de manera más rápida.

Ejemplo 1

Consideremos las sucesiones

$$a_n = 3n - 5$$

$$b_n = 7n^2$$

$$c_n = 900 \cdot 0.6^n$$

Calcular las siguientes sumatorias

- 1. $\sum_{m=23}^{27} a_m$
- 2. $\sum_{k=5}^{9} b_k$
- 3. $\sum_{h=8}^{11} c_h$

Ejemplo 1

```
1. a=[]
    suma = 0
    for i in range (5):
        m=i+23
        a.append(3*m-5)
        suma=a[i]+suma
        print (f'a({m})={a[i]}')
    print (f'sumatoria ={suma}')

2. b=[]
    suma = 0
    for i in range (5):
        k=i+5
        b.append(7*k**2)
```

Ejemplo 1 en Google Colab

```
suma=b[i]+suma
  print (f'b({k})={b[i]}')
print (f'sumatoria ={suma}')

3. c=[]
  suma = 0
  for i in range (4):
    h=i+8
    c.append(900*0.6**h)
    suma=c[i]+suma
    print (f'c({k})={c[i]}')
  print (f'sumatoria ={suma}')
```

Guía 2.1

P1. Utilizando notación de sumatorias, exprese las siguientes sumas

```
a) a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}
b) b_{38} + b_{39} + b_{40} + b_{41} + b_{42} + b_{43} + b_{44} + b_{45} + b_{46} + b_{47} + b_{48}
c) c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + \dots + c_{91} + c_{92} + c_{93}
```

- **P2.** Considere la sucesión $a_n = 3n^2 + 7$. Determine
 - a) La suma de los 12 primeros términos. En el código Python, utilice listas para almacenar los términos de la sucesión a_n considerados en la suma.
 - b) La suma desde el decimotercer al vigésimocuarto término. En este caso, idear un código Python que sume valores con ciclos for o while pero sin acumularlos en una lista.
- **P3.** Sean (S_n) y (T_n) las sucesiones de los múltiplos de 6 y 13, respectivamente. Se pide
 - a) Escribir la expresión algebraica del término de lugar n para cada sucesión.
 - b) Calcular las siguientes sumas, usando Python pero sin necesidad de listas
 - *i*. La suma de los términos de (S_n) desde el de posición 35 hasta el de posición 61, inclusive.
 - ii. La suma de los términos de (T_n) desde el de posición 15 hasta el de posición 36, inclusive.
- **P4.** Para el cálculo de la nota de presentación de una asignatura se debe tomar encuentra las tres pruebas parciales, que tienen la misma ponderación. Ximena obtuvo en estas pruebas notas modeladas por la sucesión cuyo término genérico es $x_n = -1.5n^2 + 6n$. Para calcular el promedio, debemos calcular la expresión

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3}.$$

Determine el valor de la expresión anterior mediante un código Python e interprete este resultado.

Guía 2.1 21

Sumas aritméticas y geométricas

Previamente vimos que existen dos subtipos de sucesiones, las aritméticas y las geométricas, que siguen las regularidades que se muestran a continuación

Sucesión aritmética es aquella en que obtenemos el siguiente término sumándole un valor constante, llamado diferencia o distancia, al anterior.

Sucesión geométrica es aquella en que obtenemos el siguiente término multiplicando un valor constante, llamado razón, al anterior.

Sumas aritméticas

Para una sucesión aritmética, con el término de lugar i dado por

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$
,

la suma de los primeros n términos viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

Sumas geométricas

Para una sucesión geométricas, con el término de lugar i dado por

$$a_i = a_1 r^{i-1},$$

la suma de los primeros n términos viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo 2

Considere la sucesión $a_i = 18,5 + 2,5i$.

- a) Determine si la sucesión es aritmética o geométrica. Justifique matemáticamente su respuesta.
- b) Determine la sumatoria $\sum_{i=120}^{450} a_i$, calculando los respectivos términos a_i cada ciclo del código Python con la fórmula que define la sucesión. Además, determine el tiempo de ejecución de este código.
- c) Determine la sumatoria $\sum_{i=120}^{450} a_i$, calculando los respectivos términos a_i cada ciclo del código Python con alguna expresión recursiva según el tipo de sucesión al que corresponde. No olvide calcular el tiempo de ejecución del código.

d) Determine la sumatoria $\sum_{i=120}^{450} a_i$, utilizando la fórmula de suma aritmética o geométrica, según sea el caso. No olvide calcular el tiempo de ejecución de las instrucciones de este código también y compare con los tiempos de ejecución de los procedimientos de las partes b) y c).

Ejemplo 2 en Google Colab

Ejemplo 2

```
a) a = []
  for j in range(3):
    i=j+1
    a.append(18.5+2.5*i)
  print (f'a(2)-a(1)=\{a[1]-a[0]\}')
  print (f'a(3)-a(2)=\{a[2]-a[1]\}')
  print (f'a(2)/a(1)=\{a[1]/a[0]\}')
  print (f'a(3)/a(2)=\{a[2]/a[1]\}')
b) from time import time
  t1=time()
  suma_b=0
  # la variable i va desde 120 hasta 450
  for i in range(120,451):
    suma_b=suma_b + 18.5+2.5*i
  print (f'La suma ={suma_b}')
  t2=time()
  print (f'Con un tiempo de ejecución de {t2-t1} segundos')
c) from time import time
  t3=time()
  suma c=0
  termino = 18.5+2.5*119
  # la variable i va desde 120 hasta 450
  for i in range(120,451):
    termino=termino+2.5
    suma_c=suma_c + termino
  print (f'La suma ={suma_c}')
  t4=time()
  print (f'Con un tiempo de ejecución de {t4-t3} segundos')
```

Guía 2.1 23

```
d) from time import time
    t5=time()
    a1=18.5+2.5*1
    d=2.5

sum_may=(450/2)*(2*a1+(450-1)*d)
sum_men=(119/2)*(2*a1+(119-1)*d)
suma_d=sum_may-sum_men

print (f'La suma ={suma_d}')
t6=time()
print (f'Con un tiempo de ejecución de {t6-t5} segundos')
```

Ejemplo 3

Considere la sucesión $b_i = 5000 \cdot 1,06^i$.

- a) Determine si la sucesión es aritmética o geométrica. Justifique matemáticamente su respuesta.
- b) Determine la sumatoria $\sum_{i=11}^{40} b_i$, calculando los respectivos términos b_i cada ciclo del código Python con la fórmula que define la sucesión. Además, determine el tiempo de ejecución de este código.
- c) Determine la sumatoria $\sum_{i=11}^{40} b_i$, calculando los respectivos términos b_i cada ciclo del código Python con alguna expresión recursiva según el tipo de sucesión al que corresponde. No olvide calcular el tiempo de ejecución del código.
- d) Determine la sumatoria $\sum_{i=11}^{40} b_i$, utilizando la fórmula de suma aritmética o geométrica, según sea el caso. No olvide calcular el tiempo de ejecución de las instrucciones de este código también y compare con los tiempos de ejecución de los procedimientos de las partes b) y c).

Ejemplo 3

```
a) b=[]

for j in range(3):
    i=j+1
    b.append(5000*1.06**i)

print (f'b(2)-b(1)={b[1]-b[0]}')
print (f'b(3)-b(2)={b[2]-b[1]}')
print (f'b(2)/b(1)={b[1]/b[0]}')
print (f'b(3)/b(2)={b[2]/b[1]}')
```

Ejemplo 3 en Google Colab

```
b) from time import time
  t1=time()
  suma_b=0
  # la variable i va desde 11 hasta 40
  for i in range (11,41):
    suma_b = suma_b + 5000*1.06**i
  print (f'La suma ={suma_b}')
  t2=time()
  print (f'Con un tiempo de ejecución de {t2-t1} segundos')
c) from time import time
  t3=time()
  suma_c=0
  termino = 5000*1.06**10
  # la variable i va desde 11 hasta 41
  for i in range(11,41):
    termino=termino*1.06
    suma_c=suma_c + termino
  print (f'La suma ={suma_c}')
  t4=time()
  print (f'Con un tiempo de ejecución de {t4-t3} segundos')
d) from time import time
  t5=time()
  a1=5000*1.06**1
  r=1.06
  sum_may=a1*(r**40-1)/(r-1)
  sum_men=a1*(r**10-1)/(r-1)
  suma_d=sum_may-sum_men
  print (f'La suma ={suma_d}')
  t6=time()
  print (f'Con un tiempo de ejecución de {t6-t5} segundos')
```

Guía 2.2 25

Guía 2.2

P5. Para cada una de las siguientes sumatorias

$$\sum_{i=1}^{560} (61+7i), \sum_{i=22}^{650} (45+4i), \sum_{i=1}^{54} 9300 \cdot 0,82^{i}, \sum_{i=21}^{80} 7500 \cdot 0,97^{i}$$

- a) Calcule su valor determinando en cada bucle el valor del término con la expresión de la sucesión.
- b) Calcule su valor determinando en cada bucle el valor del término con alguna expresión recursiva.
- c) Calcule su valor, esta vez aplicando fórmula de suma aritmética o geométrica.

Actividad 2.2 ¿Qué pasa si calculas $\sum_{i=1}^{560} 61$ y $\sum_{i=1}^{560} 7i$ por separado? ¿Qué pasa si calculas $\sum_{i=1}^{560} i$ y luego multiplicas ese resultado por 7? Como última pregunta, ¿cuánto es $61 \cdot 560$?

- **P6.** Un nuevo canal de YouTube registra 50 visitas la primera semana de funcionamiento, registra 66 visitas la segunda, 82 la tercera y así sucesivamente. Representando por v_i la cantidad de visitas en la semana i,
 - a) Escriba la expresión algebraica para el término v_i .
 - *b*) Escriba la expresión algebraica para el número total de visitas durante las *n* primeras semanas.
 - c) Determine $\sum_{i=1}^{40} v_i$ mediante la expresión anterior e interprételo.
 - d) Determine $\sum_{i=120}^{320} v_i$ usando bucles en interprételo.
 - e) Determine usando código el valor de n para el que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 2.430$.
 - f) Usando bucles, determine la cantidad de visitas registradas desde la semana 41 a la semana 190. Presente este resultado en notación de sumatoria.
- **P7.** Diego decide ahorrar en dólares para un viaje durante dos años y medio. El primer mes ahorra 900 dólares, el segundo mes 810 dólares, el tercer mes 729 dólares, y así sucesivamente. Represente por d_i la cantidad de dólares que ahorra Diego en el mes i.
 - a) Escriba la expresión algebraica para el término d_i .
 - b) Escriba la expresión algebraica que calcula el total de dinero ahorrado por Diego durante los primeros n meses.
 - c) Determine e interprete $\sum_{i=1}^{12} d_i$.
 - d) Determine e interprete $\sum_{i=25}^{30} d_i$.
 - *e*) Exprese en notación de sumatoria y determine el total ahorrado por Diego durante el segundo año.
 - f) Exprese en notación de sumatoria y determine el total ahorrado por Diego para el viaje que tiene programado hacer.

- **P8.** Un electricista tiene un contrato, en donde se especifica que el primer mes el sueldo será de \$500.000 y le ofrecen \$2.000 de aumento mensual a modo de incentivo para que no se cambie de empresa. Si s_i representa el sueldo que recibe el electricista en el mes i,
 - a) Escriba la expresión algebraica para el término s_i .
 - b) Escriba la expresión algebraica que calcula el total de dinero que percibe el electricista por concepto de sueldo, durante los *n* primeros meses de contrato.
 - c) Escriba un código Python, que involucre bucles, y que calcule el total de dinero recibido por el electricista durante los meses de su tercer año de contrato.
 - d) Exprese en notación de sumatoria el total aludido en la parte c). Determine este resultado en un código Python aplicando fórmulas de suma aritmética o geométrica, según sea el caso.
 - e) Determine e interprete $\sum_{i=13}^{24} s_i$.
- **P9.** Una casa se arrienda por 2 años, considerando que durante este periodo el arriendo se incrementará todos los meses en un 2 %. Considere que a_i representa el valor a pagar por el arriendo del mes i. Si para el primer mes de arriendo se debe pagar \$180.000, entonces:
 - a) Escribir la expresión algebraica para el término a_i .
 - *b*) Escriba la expresión algebraica que calcula el total cancelado por el arriendo correspondiente a los *n* primeros meses.
 - c) Escriba un código Python, que involucre bucles, y que calcule el total de dinero cancelado por el arriendo correspondiente a los meses del primer semestre del segundo año. Al redactar su respuesta, fuera del código, utilice notación de sumatoria.
 - d) Exprese en notación de sumatoria el total aludido en la parte c). Determine este resultado en un código Python aplicando fórmulas de suma aritmética o geométrica, según sea el caso.
 - e) Determine e interprete $\sum_{i=19}^{24} a_i$.

Problemas de la sección 🗹

P1. Un vehículo se desplaza por una autopista a una velocidad de 33 m/s (equivalente a 118,8 km/h). El conductor, al observar a otro automóvil que se encuentra detenido en su misma pista y sin posibilidad de esquivarlo, comienza a reducir uniformemente la velocidad hasta detenerse detrás de él.

En ese contexto se definen dos sucesiones:

$$d_i = 37,125 - 8,25i$$
$$v_j = 33 - 8,25j$$

donde

 v_i es la velocidad del vehículo, en m/s, al cabo de j segundos a partir del instante en que comienza a frenar.

 d_i es la distancia, medida en metros, que recorre el automóvil durante el i-ésimo segundo desde que comienza a frenar.

- a) Determine al cabo de cuántos segundos el vehículo logra detenerse.
- b) Exprese en notación sumatoria la distancia total recorrida desde que el vehículo comienza a frenar hasta que se detiene por completo.
- c) Escriba un código que calcule la distancia total recorrida por el vehículo hasta que se detiene.
- **P2.** Un cohete artesanal es disparado hacia arriba por unos alumnos de un instituto durante una exhibición. El ascenso del cohete sólo dura 8 segundos, momento a partir del cual comienza a caer. Considere que m_k representa los metros que sube el cohete durante el ascenso del k-ésimo segundo.

Se sabe que durante el cuarto segundo el cohete asciende 45 metros, mientras que en el sexto segundo sube 25 metros. Además, la distancia que el cohete asciende en cada intervalo de 1 segundo disminuye en una cantidad constante entre segundos consecutivos. Según esta información, se pide:

- a) Escribir la expresión algebraica del término m_k .
- b) Determine e interprete $\sum_{k=1}^{6} m_k$.
- c) Determine la distancia total recorrida por el cohete mientras dura el ascenso. Exprese este resultado utilizando notación de sumatoria.
- d) Implemente un código que determine el total de metros recorridos por el cohete durante el ascenso de los últimos 4 segundos.
- *e*) Determine los metros que recorre el cohete durante el ascenso de los 4 últimos segundos. Para ello, esta vez utilice fórmulas de suma aritmética o geométricas, según corresponda.
- **P3.** Al llenar un tambor con agua, se registra que durante el minuto 4 el tambor recibe 128 litros y durante el minuto 9 recibe 88 litros. Sabiendo que en cada minuto recibe una cantidad *d* de litros de agua menos que en el minuto anterior, ¿en qué instante el tambor deja de recibir agua? ¿Cuántos litros recibe en total el tambor? Apoye todos sus cálculos con códigos Python.

P4. Una empresa de publicidad ofrece para un puesto de trabajo un salario inicial, y un aumento mensual en una razón constante. Javier se presenta a la entrevista y el encargado del departamento de recursos humanos le explica que en el segundo mes de trabajo su sueldo será de \$402.000 y que en el tercer mes de trabajo será de \$404.010. Determine el salario aproximado que Javier recibiría en el décimo año de trabajo en la empresa y cuánto habría acumulado aproximadamente con los sueldos correspondientes a los meses del tercer año.