

# Sistema di Valutazione Prestiti

Formalizzazione del sistema in Z3

Matteo Barel

## **Prefazione**

Questo documento presenta la formalizzazione logica completa di un sistema automatizzato per la valutazione delle richieste di prestito bancario e la soddisfacibilità di un certo profitto dato un budget. Il sistema utilizza il solver SMT Z3 per verificare la soddisfacibilità di un insieme di vincoli logici e aritmetici che determinano l'approvazione della richiesta e il calcolo del tasso di interesse personalizzato con un secondo sistema che cerca una combinazione di richiedenti per soddisfare il profitto richiesto dalla banca. Ogni regola del dominio applicativo viene espressa mediante formule della logica proposizionale e della logica del primo ordine, permettendo una verifica formale della correttezza del sistema.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Dominio delle Variabili . . . . .	4
1.2	Notazione logica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Codifica delle Variabili Categoriche</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Vincoli di Approvazione</b>	<b>6</b>
3.1	Vincoli sull'Età . . . . .	6
3.2	Vincoli sul Tipo di Impiego . . . . .	7
3.3	Vincoli sul Tipo di Prestito . . . . .	8
3.4	Vincoli Patrimoniali . . . . .	9
3.5	Combinazioni Rischiose . . . . .	9
3.6	Blacklist . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Calcolo del Tasso di Interesse</b>	<b>10</b>
4.1	Tasso Base . . . . .	10
4.2	Aggiustamento per Tipo di Prestito . . . . .	11
4.3	Beneficio del Cofirmatario . . . . .	12
4.4	Aggiustamento per Reddito . . . . .	12
4.5	Aggiustamento DTI (Debt-to-Income) . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Sostenibilità della Rata Mensile</b>	<b>14</b>
5.1	Calcolo della Rata Mensile . . . . .	14
5.2	Vincoli di Sostenibilità . . . . .	14
5.3	Formula Finale per l'approvazione . . . . .	14
5.4	Calcolo degli Interessi Totali . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Esempio</b>	<b>16</b>
6.1	Calcolo del Tasso . . . . .	16
6.2	Calcolo della Rata . . . . .	17
6.3	Verifica Sostenibilità . . . . .	17
6.4	Interessi Totali . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Verifica con Z3</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Selezione dei richiedenti</b>	<b>19</b>
8.1	Definizione del Problema . . . . .	19
8.2	Dominio delle Variabili . . . . .	19
8.3	Valutazione Preliminare dei Richiedenti . . . . .	19
8.4	Vincoli di Selezione . . . . .	20
8.5	Vincoli Aggregati . . . . .	21
8.6	Formulazione Completa del Problema . . . . .	22
8.7	Risultati . . . . .	23

<b>9</b>	<b>Esempio</b>	<b>24</b>
9.1	Dati dei Richiedenti . . . . .	24
9.2	Parametri del Portfolio . . . . .	24
9.3	Valutazione Individuale . . . . .	24
9.4	Formulazione dei Vincoli . . . . .	25
9.5	Soluzione . . . . .	26
<b>10</b>	<b>NP-Completezza</b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Il Problema dello Zaino</b>	<b>28</b>
<b>12</b>	<b>Dimostrazione di NP-Completezza</b>	<b>29</b>
12.1	Il Problema è in NP . . . . .	29
12.2	Il problema dello Zaino può essere ridotto al problema . . . . .	29

# 1 Introduzione

Il sistema di valutazione dei prestiti analizza le richieste attraverso un insieme di regole che considerano diversi fattori: età del richiedente, situazione lavorativa, reddito, patrimonio netto, punteggio creditizio, presenza di cofirmatari, tipo e importo del prestito richiesto, e durata del finanziamento. Il sistema ha tre obiettivi :

1. **Determinare l'approvabilità:** verificare se una richiesta di prestito soddisfa tutti i vincoli normativi e di rischio.
2. **Calcolare il tasso di interesse:** determinare un tasso personalizzato basato sul profilo di rischio del richiedente.
3. **Garantire sostenibilità:** assicurare che la rata mensile sia compatibile con il reddito del richiedente.

Il secondo sistema cerca una combinazione di richiedenti per raggiungere il target di profitto rimanendo nel budget.

## 1.1 Dominio delle Variabili

Definiamo formalmente il dominio di tutte le variabili utilizzate nel sistema:

### Dominio delle Variabili

Variabili booleane:  $\text{approved, cosigner, blacklisted} \in \{\text{true, false}\}$   
Variabili categoriche:  $\text{work} \in \{\text{permanent, temporary, unemployed}\}$   
 $\text{typeloan} \in \{\text{personal, car, house}\}$   
Variabili numeriche:  $\text{age} \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \text{age} \leq 120$   
 $\text{credit\_score} \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \text{credit\_score} \leq 1000$   
 $\text{income} \in \mathbb{R}^+, \quad \text{networth} \in \mathbb{R}$   
 $\text{requested} \in \mathbb{R}^+, \quad \text{months} \in \mathbb{N}^+$   
 $\text{rate} \in \mathbb{R}^+$

## 1.2 Notazione logica

In questo documento utilizziamo la seguente notazione logica:

- $\wedge$  Congiunzione logica (AND)
- $\vee$  Disgiunzione logica (OR)
- $\neg$  Negazione logica (NOT)
- $\rightarrow$  Implicazione logica (IMPLIES)
- $\leftrightarrow$  Doppia implicazione (IF AND ONLY IF)
- $\oplus$  OR esclusivo (XOR)

## 2 Codifica delle Variabili Categoricali

Prima di esprimere i vincoli, è necessario codificare le variabili categoriche (tipo di lavoro e tipo di prestito) in variabili booleane riconoscibili da z3.

**Tipo di Lavoro:** Ogni richiedente può avere esattamente un tipo di impiego:

### Codifica Tipo di Lavoro

$$\begin{aligned} \text{is\_permanent} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{permanent}) \\ \text{is\_temporary} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{temporary}) \\ \text{is\_unemployed} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{unemployed}) \end{aligned}$$

**Vincolo di mutua esclusività** (esattamente uno deve essere vero):

### Mutua Esclusività Tipo Lavoro - Almeno Uno

$$\text{is\_permanent} \vee \text{is\_temporary} \vee \text{is\_unemployed} \quad (1)$$

### Mutua Esclusività Tipo Lavoro - Al Più Uno

$$\begin{aligned} &(\neg \text{is\_permanent} \vee \neg \text{is\_temporary}) \wedge \\ &(\neg \text{is\_permanent} \vee \neg \text{is\_unemployed}) \wedge \\ &(\neg \text{is\_temporary} \vee \neg \text{is\_unemployed}) \end{aligned} \quad (2)$$

**Tipo di Prestito:** ogni richiesta può riguardare esattamente un tipo di prestito:

### Codifica Tipo di Prestito

$$\begin{aligned} \text{is\_personal} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{personal}) \\ \text{is\_car} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{car}) \\ \text{is\_house} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{house}) \end{aligned}$$

### Mutua Esclusività Tipo Prestito

$$\begin{aligned} \text{is\_personal} \vee \text{is\_car} \vee \text{is\_house} & \quad (\neg \text{is\_personal} \vee \neg \text{is\_car}) \wedge \\ & (\neg \text{is\_personal} \vee \neg \text{is\_house}) \wedge \\ & (\neg \text{is\_car} \vee \neg \text{is\_house}) \end{aligned}$$

### 3 Vincoli di Approvazione

Formalizziamo tutti i vincoli che determinano l'approvazione di una richiesta di prestito.

#### 3.1 Vincoli sull'Età

L'età del richiedente è un centrale per la valutazione del rischio. Definiamo dei vincoli:

**Età Massima:** il sistema non approva prestiti a richiedenti di età superiore a 75 anni:

Vincolo Età Massima

$$(\text{age} \geq 75) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (4)$$

**Età Minima:** il sistema richiede che il richiedente sia maggiorenne:

Vincolo Età Minima

$$(\text{age} \leq 18) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (5)$$

**Richiedenti Giovani:** per richiedenti di età pari o inferiore a 25 anni, è obbligatoria la presenza di un cofirmatario:

Vincolo Richiedenti Giovani

$$(\text{age} \leq 25 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (6)$$

**Età al Termine del Prestito:** l'età del richiedente al momento della scadenza del prestito non deve superare 85 anni. Questo vincolo considera la durata del prestito:

Vincolo Età al Termine

$$\text{approved} \rightarrow \left( \text{age} + \frac{\text{months}}{12} \leq 85 \right) \quad (7)$$

**Vincolo Complessivo sull'Età:** possiamo esprimere tutti i vincoli sull'età come un'unica formula:

Vincolo Complessivo Età

$$\text{approved} \rightarrow \left( (18 < \text{age} < 75) \wedge \left( (\text{age} \leq 25 \rightarrow \text{cosigner}) \wedge \left( \text{age} + \frac{\text{months}}{12} \leq 85 \right) \right) \right) \quad (8)$$

## 3.2 Vincoli sul Tipo di Impiego

La situazione lavorativa del richiedente influenza significativamente la valutazione del rischio. Il sistema impone requisiti diversi in base al tipo di impiego.

### Richiedenti Disoccupati o con Impiego Temporaneo

I richiedenti disoccupati o con impiego temporaneo devono avere un cofirmatario. Questo vincolo è espresso usando l'OR esclusivo (XOR):

Vincolo Impiego Non Permanente (XOR)

$$(\text{is\_unemployed} \oplus \text{is\_temporary}) \rightarrow \text{cosigner} \quad (9)$$

**Nota:** Nel codice originale si usa XOR (per ribadire che può essere valida solo una delle due), ma logicamente l'OR è più appropriato poiché entrambe le condizioni richiedono un cofirmatario.

### Richiedenti Disoccupati e Patrimonio Netto

Per i richiedenti disoccupati, il patrimonio netto deve essere almeno pari all'importo richiesto:

Vincolo Patrimonio Disoccupati

$$\text{is\_unemployed} \rightarrow (\text{networth} \geq \text{requested}) \quad (10)$$

Questo garantisce che il richiedente disoccupato abbia risorse sufficienti per coprire l'intero importo del prestito.



### 3.3 Vincoli sul Tipo di Prestito

Ogni tipologia di prestito ha requisiti specifici riguardo all'importo, alla durata e all'età del richiedente.

#### Limiti sull'Importo

I prestiti personali e auto hanno un limite massimo, i mutui casa hanno un limite minimo:

##### Limite Importo Prestiti Personali/Auto (XOR)

$$(is\_car \oplus is\_personal) \rightarrow (requested \leq 200000) \quad (11)$$

##### Limite Minimo Mutui Casa

$$is\_house \rightarrow (requested \geq 30000) \quad (12)$$

#### Requisiti di Età per Prestiti Auto

Per i prestiti auto è richiesta un'età superiore a 25 anni:

##### Vincolo Età Prestiti Auto

$$is\_car \rightarrow (age > 25) \quad (13)$$

#### Vincoli sulla Durata

Ogni tipo di prestito ha limiti specifici sulla durata:

##### Mutuo Casa:

##### Durata Mutuo Casa

$$is\_house \rightarrow (60 \leq months \leq 360) \quad (14)$$

##### Prestito Auto:

##### Durata Prestito Auto

$$is\_car \rightarrow (12 \leq months \leq 120) \quad (15)$$

##### Prestito Personale:

##### Durata Prestito Personale

$$is\_personal \rightarrow (months \leq 180) \quad (16)$$

### 3.4 Vincoli Patrimoniali

#### Prestiti Superiori a €100.000

Per prestiti superiori a €100.000 che non siano mutui:

Vincolo Prestiti sopra i €100.000

$$(\text{requested} > 100000 \wedge \neg \text{is\_house}) \rightarrow ((\text{networth} \geq 0.5 \times \text{requested}) \wedge \text{is\_permanent}) \quad (17)$$

Questo vincolo garantisce che:

- Il patrimonio netto sia almeno il 50% dell'importo richiesto
- Il richiedente abbia un impiego permanente

### 3.5 Combinazioni Rischiose

#### Anziani con Mutui a Lunga Durata

Richiedenti sopra i 65 anni non possono ottenere mutui casa con durata superiore a 15 anni (180 mesi):

Vincolo Anziani con Mutui Lunghi

$$(\text{age} > 65 \wedge \text{is\_house} \wedge \text{months} > 180) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (18)$$

#### Lavoratori Temporanei con Prestiti Elevati

Richiedenti con impiego temporaneo non possono ottenere prestiti superiori a €30.000 senza cofirmatario:

Vincolo Lavoratori Temporanei

$$(\text{is\_temporary} \wedge \text{requested} > 30000 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (19)$$

#### Profilo di Rischio Elevato

La combinazione di credit score basso, reddito basso e assenza di cofirmatario porta al rifiuto automatico:

Vincolo Profilo Alto Rischio

$$(\text{credit\_score} < 600 \wedge \text{income} < 2500 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (20)$$

### 3.6 Blacklist

I clienti presenti nella blacklist vengono automaticamente rifiutati:

Vincolo Blacklist	
$\text{blacklisted} \rightarrow \neg \text{approved}$	(21)

## 4 Calcolo del Tasso di Interesse

Il tasso di interesse personalizzato viene calcolato sommando diverse componenti che riflettono il profilo di rischio del richiedente. Il tasso finale è dato da:

Formula Tasso di Interesse	
$\text{rate} = \text{base\_rate} + \text{type\_adj} + \text{cosigner\_benefit} + \text{income\_adj} + \text{dti\_adj}$	(22)

### 4.1 Tasso Base

Il tasso base dipende dal credit score e dall'età del richiedente. I giovani (età  $\leq 35$ ) sono penalizzati con un tasso aggiuntivo.

#### Formula per Richiedenti Giovani

Per richiedenti con età  $\leq 35$  anni:

Tasso Base - Richiedenti Giovani	
$\text{age} \leq 35 \rightarrow \text{base\_rate} = 1 + (1000 - \text{credit\_score}) \times 0.007 + 0.2 \times \sqrt{35 - \text{age}}$	(23)

La componente  $0.2 \times \sqrt{35 - \text{age}}$  introduce una penalizzazione che decresce con l'età:

- A 18 anni:  $0.2 \times \sqrt{17} \approx 0.825\%$
- A 25 anni:  $0.2 \times \sqrt{10} \approx 0.632\%$
- A 35 anni:  $0.2 \times \sqrt{0} = 0\%$

## Formula per Richiedenti Maturi

Per richiedenti con età  $> 35$  anni:

Tasso Base - Richiedenti Maturi

$$\text{age} > 35 \rightarrow \text{base\_rate} = 1 + (1000 - \text{credit\_score}) \times 0.007 \quad (24)$$

## Impatto del Credit Score

La componente  $(1000 - \text{credit\_score}) \times 0.007$  determina l'impatto del credit score:

- Credit score 1000 (perfetto): 0% di penalità
- Credit score 850:  $(1000 - 850) \times 0.007 = 1.05\%$
- Credit score 700:  $(1000 - 700) \times 0.007 = 2.1\%$

Il termine costante  $+1$  rappresenta un tasso base minimo dell'1%.

## 4.2 Aggiustamento per Tipo di Prestito

Il tipo di prestito influenza il tasso applicato:

Aggiustamento Tipo Prestito

$$\text{type\_adj} = \begin{cases} 0.0 & \text{se } \text{is\_house} \\ 4.5 & \text{se } \neg \text{is\_house} \end{cases} \quad (25)$$

Formalmente:

Aggiustamento Tipo - Formule

$$\text{is\_house} \rightarrow (\text{type\_adj} = 0.0) \quad (26)$$

$$\neg \text{is\_house} \rightarrow (\text{type\_adj} = 4.5) \quad (27)$$

I mutui casa beneficiano di un tasso ridotto (aggiustamento nullo), mentre prestiti personali e auto hanno un incremento del 4.5%.

### 4.3 Beneficio del Cofirmatario

La presenza di un cofirmatario riduce il tasso, con uno sconto maggiore per i più giovani:

#### Beneficio Cofirmatario

$$\text{cosigner\_benefit} = \begin{cases} -0.5 & \text{se } \text{cosigner} \wedge (\text{age} \leq 30) \\ -0.3 & \text{se } \text{cosigner} \wedge (\text{age} > 30) \\ 0.0 & \text{se } \neg \text{cosigner} \end{cases} \quad (28)$$

Formalmente:

#### Beneficio Cofirmatario - Formule

$$(\text{cosigner} \wedge \text{age} \leq 30) \rightarrow (\text{cosigner\_benefit} = -0.5) \quad (29)$$

$$(\text{cosigner} \wedge \text{age} > 30) \rightarrow (\text{cosigner\_benefit} = -0.3) \quad (30)$$

$$\neg \text{cosigner} \rightarrow (\text{cosigner\_benefit} = 0.0) \quad (31)$$

### 4.4 Aggiustamento per Reddito

Il reddito mensile del richiedente influenza il tasso attraverso una funzione a scalini:

#### Aggiustamento Reddito

$$\text{income\_adj} = \begin{cases} 0.0 & \text{se } \text{income} \geq 4500 \\ 0.05 & \text{se } 3500 \leq \text{income} < 4500 \\ 0.1 & \text{se } 2500 \leq \text{income} < 3500 \\ 0.15 & \text{se } 2000 \leq \text{income} < 2500 \\ 0.2 & \text{se } \text{income} < 2000 \end{cases} \quad (32)$$

Formalmente:

#### Aggiustamento Reddito - Formule

$$\text{income} \geq 4500 \rightarrow (\text{income\_adj} = 0.0) \quad (33)$$

$$(3500 \leq \text{income} < 4500) \rightarrow (\text{income\_adj} = 0.05) \quad (34)$$

$$(2500 \leq \text{income} < 3500) \rightarrow (\text{income\_adj} = 0.1) \quad (35)$$

$$(2000 \leq \text{income} < 2500) \rightarrow (\text{income\_adj} = 0.15) \quad (36)$$

$$\text{income} < 2000 \rightarrow (\text{income\_adj} = 0.2) \quad (37)$$

## 4.5 Aggiustamento DTI (Debt-to-Income)

L'aggiustamento DTI considera il rapporto tra l'importo richiesto e la capacità di reddito nel tempo:

### Aggiustamento DTI

$$\text{dti\_adj} = \begin{cases} 0.0 & \text{se is\_permanent} \\ \frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}} & \text{se is\_temporary} \\ 1 & \text{se is\_unemployed} \end{cases} \quad (38)$$

Formalmente:

### Aggiustamento DTI - Formule

$$\text{is\_permanent} \rightarrow (\text{dti\_adj} = 0.0) \quad (39)$$

$$\text{is\_temporary} \rightarrow \left( \text{dti\_adj} = \frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}} \right) \quad (40)$$

$$\text{is\_unemployed} \rightarrow (\text{dti\_adj} = 1) \quad (41)$$

Il termine  $\frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}}$  rappresenta la frazione del reddito totale nel periodo che viene assorbita dal prestito.

## 5 Sostenibilità della Rata Mensile

Il criterio finale di approvazione è la sostenibilità della rata mensile rispetto al reddito del richiedente. Questo vincolo garantisce che il richiedente possa ragionevolmente ripagare il prestito.

### 5.1 Calcolo della Rata Mensile

La rata mensile è calcolata come somma di due componenti:

#### Calcolo Rata Mensile

$$\text{monthly\_payment} = \frac{\text{requested}}{\text{months}} + \frac{\text{rate}}{100} \times \frac{\text{requested}}{12} \quad (42)$$

Dove:

- $\frac{\text{requested}}{\text{months}}$  è la quota capitale mensile
- $\frac{\text{rate}}{100} \times \frac{\text{requested}}{12}$  è la quota interessi mensile

### 5.2 Vincoli di Sostenibilità

La rata mensile non deve superare una certa percentuale del reddito, differenziata per tipo di prestito:

#### Mutuo Casa

Per i mutui casa, la rata può arrivare fino al 50% del reddito mensile:

#### Sostenibilità Mutuo Casa

$$\text{is\_house} \rightarrow (\text{approved} \leftrightarrow (\text{monthly\_payment} \leq 0.5 \times \text{income})) \quad (43)$$

#### Altri Prestiti

Per prestiti personali e auto, la rata non può superare il 20% del reddito mensile:

#### Sostenibilità Altri Prestiti

$$\neg \text{is\_house} \rightarrow (\text{approved} \leftrightarrow (\text{monthly\_payment} \leq 0.2 \times \text{income})) \quad (44)$$

### 5.3 Formula Finale per l'approvazione

Combinando il vincolo di sostenibilità con tutti i vincoli precedenti, otteniamo la condizione completa di approvazione:

#### Formula Finale

$$\text{approved} \leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \neg \text{blacklisted} \wedge \\ [\text{vincoli su età e durata}] \wedge \\ [\text{vincoli su lavoro, prestito, patrimonio}] \wedge \\ \neg [\text{combinazioni rischiose}] \wedge \\ [\text{sostenibilità della rata}] \wedge \end{array} \right) \quad (45)$$

## 5.4 Calcolo degli Interessi Totali

Gli interessi totali pagati nel corso dell'intero prestito sono:

#### Interessi Totali

$$\text{total\_interest} = \text{monthly\_payment} \times \text{months} - \text{requested} \quad (46)$$

E il totale dovuto è:

#### Totale Dovuto

$$\text{total\_due} = \text{monthly\_payment} \times \text{months} = \text{requested} + \text{total\_interest} \quad (47)$$



## 6 Esempio

Consideriamo il richiedente Mario con i seguenti parametri:

### Dati del Richiedente

```
name = "Mario"
age = 45
work = permanent
income = 3500
networth = 1000
credit_score = 850
requested = 200000
cosigner = false
typeloan = house
months = 360
blacklisted = false
```

### 6.1 Calcolo del Tasso

#### Tasso Base

Poiché  $\text{age} = 45 > 35$ :

#### Calcolo Tasso Base

$$\text{base\_rate} = 1 + (1000 - 850) \times 0.007 = 1 + 150 \times 0.007 = 1 + 1.05 = 2.05\%$$

#### Aggiustamento Tipo

Essendo un mutuo casa:

#### Calcolo Aggiustamento Tipo

$$\text{type\_adj} = 0.0\%$$

#### Beneficio Cofirmatario

Nessun cofirmatario:

#### Calcolo Beneficio Cofirmatario

$$\text{cosigner\_benefit} = 0.0\%$$

### Aggiustamento Reddito

Con  $\text{income} = 3500$  (nell'intervallo  $3500 \leq \text{income} < 4500$ ):

#### Calcolo Aggiustamento Reddito

$$\text{income\_adj} = 0.05\%$$

### Aggiustamento DTI

Impiego permanente:

#### Calcolo Aggiustamento DTI

$$\text{dti\_adj} = 0.5\%$$

### Tasso Finale

#### Tasso Finale

$$\text{rate} = 2.05 + 0.0 + 0.0 + 0.05 + 0.5 = 2.6\%$$

**Nota:** Il valore esatto calcolato da Z3 potrebbe differire leggermente a causa di arrotondamenti e della precisione numerica del solver.

## 6.2 Calcolo della Rata

#### Calcolo Rata Mensile - Esempio

$$\begin{aligned}\text{monthly\_payment} &= \frac{200000}{360} + \frac{2.6}{100} \times \frac{200000}{12} \\ &= 555.56 + 0.026 \times 16666.67 \\ &= 555.56 + 433.33 \\ &= 988.89 \text{ €}\end{aligned}$$

## 6.3 Verifica Sostenibilità

Per un mutuo casa:

#### Verifica Sostenibilità - Esempio

$$\text{monthly\_payment} \leq 0.5 \times \text{income} \quad \Rightarrow \quad 988.89 \leq 0.5 \times 3500 = 1750$$

Il vincolo è soddisfatto, quindi la richiesta è **APPROVATA**.

## 6.4 Interessi Totali

### Interessi Totali - Esempio

$$\begin{aligned}\text{total\_interest} &= 988.89 \times 360 - 200000 \\ &= 356000.40 - 200000 \\ &= 156000.40 \text{ €}\end{aligned}$$

### Totale Dovuto - Esempio

$$\text{total\_due} = 200000 + 156000.40 = 356000.40 \text{ €}$$

## 7 Verifica con Z3

Il sistema utilizza il solver SMT (Satisfiability Modulo Theories) Z3 per verificare la soddisfacibilità dei vincoli. Il processo è il seguente:

1. **Codifica:** Tutte le variabili e i vincoli vengono tradotti in formule Z3
2. **Asserzione:** Si assume `approved = true`
3. **Risoluzione:** Z3 cerca un modello che soddisfi tutti i vincoli
4. **Risultato:**
  - Se **sat** (soddisfacibile): la richiesta è approvata, Z3 fornisce i valori delle variabili (`rate`, `monthly_payment`, ecc.)
  - Se **unsat** (insoddisfacibile): la richiesta è rifiutata

## 8 Selezione dei richiedenti

Il problema selezione di un insieme di richiedenti da un pool più ampio, rispettando vincoli di budget e obiettivi di profitto.

### 8.1 Definizione del Problema

Dato un insieme di  $n$  richiedenti e definiti un budget massimo  $B$  e un profitto target  $P_{\text{target}}$ , il problema consiste nel determinare un sottoinsieme di richiedenti da approvare tale che:

#### Obiettivi

1. Ogni richiedente selezionato soddisfi tutti i vincoli di approvazione individuali
2. Il capitale totale investito non superi il budget disponibile
3. Il profitto totale atteso soddisfi o superi l'obiettivo prefissato

### 8.2 Dominio delle Variabili

Introduciamo nuove variabili per modellare il problema di selezione del portafoglio:

#### Variabili

Per ogni richiedente  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$\text{selected}_i \in \{\text{true}, \text{false}\}$  (selezione del richiedente)

$\text{cost}_i \in \mathbb{R}^+$  (costo del prestito)

$\text{profit}_i \in \mathbb{R}^+$  (profitto del prestito)

Parametri globali:

$B \in \mathbb{R}^+$  (budget totale disponibile)

$P_{\text{target}} \in \mathbb{R}^+$  (profitto target minimo)

### 8.3 Valutazione Preliminare dei Richiedenti

Prima di formulare il problema di ottimizzazione del portafoglio, ogni richiedente viene valutato individualmente utilizzando la funzione `loan_application`. Questa fase produce, per ogni richiedente  $i$ :

#### Risultato Valutazione Individuale

$$\text{loan\_result}_i = \begin{cases} \{\text{approved}_i, \text{rate}_i, \text{monthly\_payment}_i, \text{total\_interests}_i\} & \text{se approvabile} \\ \text{null} & \text{se non approvabile} \end{cases} \quad (48)$$

## 8.4 Vincoli di Selezione

### Vincolo di Approvabilità

Un richiedente può essere selezionato solo se è stato preventivamente approvato dalla valutazione individuale:

#### Vincolo Approvabilità

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \text{loan\_result}_i = \text{null} \rightarrow \neg \text{selected}_i \quad (49)$$

Formalmente in Z3:

#### Implementazione Vincolo Approvabilità

$$\text{loan\_result}_i = \text{null} \rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{selected}_i = \text{false} \wedge \\ \text{cost}_i = 0 \wedge \\ \text{profit}_i = 0 \end{array} \right) \quad (50)$$

### Definizione Costo

Il costo associato a ciascun richiedente dipende dalla sua selezione:

#### Definizione Costo

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad \text{cost}_i = \begin{cases} \text{requested}_i & \text{se } \text{selected}_i \\ 0 & \text{se } \neg \text{selected}_i \end{cases} \quad (51)$$

In forma logica:

#### Vincoli Costo

$$\text{selected}_i \rightarrow (\text{cost}_i = \text{requested}_i) \quad (52)$$

$$\neg \text{selected}_i \rightarrow (\text{cost}_i = 0) \quad (53)$$

### Definizione Profitto

Analogamente, il profitto è definito condizionatamente alla selezione:

#### Definizione Profitto

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \text{profit}_i = \begin{cases} \text{total\_interests}_i & \text{se } \text{selected}_i \\ 0 & \text{se } \neg \text{selected}_i \end{cases} \quad (54)$$

In forma logica:

#### Vincoli Profitto

$$\text{selected}_i \rightarrow (\text{profit}_i = \text{total\_interests}_i) \quad (55)$$

$$\neg \text{selected}_i \rightarrow (\text{profit}_i = 0) \quad (56)$$

Dove  $\text{total\_interests}_i$  è calcolato come:

#### Calcolo Interessi Totali

$$\text{total\_interests}_i = \text{monthly\_payment}_i \times \text{months}_i - \text{requested}_i \quad (57)$$

## 8.5 Vincoli Aggregati

### Vincolo di Budget

Il capitale totale investito non deve superare il budget disponibile:

#### Vincolo Budget

$$\text{total\_cost} = \sum_{i=1}^n \text{cost}_i \leq B \quad (58)$$

Espandendo la definizione di  $\text{cost}_i$ :

#### Vincolo Budget Espanso

$$\sum_{i=1}^n (\text{selected}_i \cdot \text{requested}_i) \leq B \quad (59)$$

### Vincolo di Profitto

Il profitto totale atteso deve raggiungere o superare l'obiettivo:

#### Vincolo Profitto Target

$$\text{total\_profit} = \sum_{i=1}^n \text{profit}_i \geq P_{\text{target}} \quad (60)$$

Espandendo la definizione di  $\text{profit}_i$ :

#### Vincolo Profitto Espanso

$$\sum_{i=1}^n (\text{selected}_i \cdot \text{total\_interests}_i) \geq P_{\text{target}} \quad (61)$$

## 8.6 Formulazione Completa del Problema

Il Portfolio Decision Problem può essere formulato come un problema di soddisfacibilità con i seguenti vincoli:

#### Formulazione Completa

Trovare:  $\text{selected}_1, \dots, \text{selected}_n \in \{\text{true}, \text{false}\}$

Tale che:

$$\forall i : \text{loan\_result}_i = \text{null} \rightarrow \neg \text{selected}_i$$

$$\forall i : \text{selected}_i \rightarrow (\text{cost}_i = \text{requested}_i)$$

$$\forall i : \neg \text{selected}_i \rightarrow (\text{cost}_i = 0)$$

$$\forall i : \text{selected}_i \rightarrow (\text{profit}_i = \text{total\_interests}_i) \quad (62)$$

$$\forall i : \neg \text{selected}_i \rightarrow (\text{profit}_i = 0)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{cost}_i \leq B$$

$$\sum_{i=1}^n \text{profit}_i \geq P_{\text{target}}$$

## 8.7 Risultati

Il solver Z3 può produrre due tipi di risultati:

### Caso SAT (Soddisfacibile)

Esiste una selezione di richiedenti che soddisfa tutti i vincoli. Il modello fornisce:

#### Output in Caso di Soluzione

- $\text{selected}_i$  per ogni  $i$ : quali richiedenti approvare
- $\text{total\_cost} = \sum_i \text{cost}_i$ : capitale totale investito
- $\text{total\_profit} = \sum_i \text{profit}_i$ : profitto totale atteso
- Per ogni richiedente selezionato: importo, tasso, rata mensile, profitto individuale

### Caso UNSAT (Insoddisfacibile)

Non esiste alcuna selezione valida che soddisfi i vincoli. Questo può accadere quando:

#### Cause di Insoddisfacibilità

- Il budget è insufficiente per raggiungere il profitto target
- Troppo pochi richiedenti sono approvabili individualmente
- I richiedenti approvabili non generano abbastanza profitto
- Il profitto target è irrealisticamente alto dato il pool di richiedenti



## 9 Esempio

Consideriamo un pool di tre richiedenti e analizziamo il problema di selezione del portafoglio.

### 9.1 Dati dei Richiedenti

#### Pool di Richiedenti

##### Richiedente 1 - Mario:

age = 40, work = permanent, income = 1500  
networth = 80000, credit\_score = 750  
requested = 50000, cosigner = false  
typeloan = house, months = 180

##### Richiedente 2 - Luigi:

age = 30, work = permanent, income = 4000  
networth = 50000, credit\_score = 800  
requested = 30000, cosigner = false  
typeloan = car, months = 60

##### Richiedente 3 - Anna:

age = 35, work = permanent, income = 1800  
networth = 20000, credit\_score = 780  
requested = 30000, cosigner = true  
typeloan = personal, months = 180

### 9.2 Parametri del Portfolio

#### Vincoli del Portfolio

$B = 120000$  € (budget massimo)  
 $P_{\text{target}} = 50000$  € (profitto target minimo)

### 9.3 Valutazione Individuale

Prima di risolvere il problema del portafoglio, ogni richiedente viene valutato:

#### Risultati Valutazioni Individuali (Esempio)

**Mario:** Approvato

- Tasso: 2.8%
- Rata mensile: 394.44 €
- Interessi totali: 21,000 €

**Luigi:** Approvato

- Tasso: 6.2%
- Rata mensile: 655 €
- Interessi totali: 9,300 €

**Anna:** Approvata

- Tasso: 5.8%
- Rata mensile: 311.67 €
- Interessi totali: 26,100 €

## 9.4 Formulazione dei Vincoli

#### Vincoli Specifici dell'Esempio

**Vincolo Budget:**

$$\text{selected}_1 \cdot 50000 + \text{selected}_2 \cdot 30000 + \text{selected}_3 \cdot 30000 \leq 120000$$

**Vincolo Profitto:**

$$\text{selected}_1 \cdot 21000 + \text{selected}_2 \cdot 9300 + \text{selected}_3 \cdot 26100 \geq 50000$$

## 9.5 Soluzione

### Soluzione

Il solver Z3 determina la seguente selezione:

**Selezionati:**

- **Mario:** €50,000 → Profitto: €21,000
- **Luigi:** €30,000 → Profitto: €9,300
- **Anna:** €30,000 → Profitto: €26,100

**Totali:**

$$\text{Capitale investito} = 50000 + 30000 + 30000 = 110000 \text{ €} \leq 120000 \text{ €}$$

$$\text{Profitto totale} = 21000 + 9300 + 26100 = 56400 \text{ €} \geq 50000 \text{ €}$$

Entrambi i vincoli sono soddisfatti.

## 10 NP-Completezza

**Problemi in classe P:**

- Si possono risolvere velocemente
- Crescita del tempo:  $n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ , ecc.

**Problemi NP-completi:**

- NON si conosce un modo veloce per risolverli
- Possiamo solo verificare velocemente se una soluzione è corretta

### Il Problema

**Dati:**

- $n$  richiedenti, ognuno con:
  - Importo richiesto  $r_i$  (quanto costa)
  - Profitto atteso  $p_i$  (quanto guadagniamo)
- Budget massimo  $B$  (quanto possiamo spendere)
- Profitto target  $P$  (quanto vogliamo guadagnare)

**Domanda:** Possiamo scegliere un gruppo di richiedenti tale che:

1. Il costo totale  $\leq B$
2. Il profitto totale  $\geq P$

## 11 Il Problema dello Zaino

Per dimostrare che il problema è NP-completo, va confrontato con un problema già noto per essere NP-completo: il problema dello Zaino.

### Problema dello Zaino

Il problema dello zaino consiste nell'avere uno zaino con una capacità limitata e vari oggetti, ognuno con un peso e un valore.

Bisogna riempire lo zaino in modo che:

- Il peso totale non superi la capacità
- Il valore totale sia almeno quanto desiderato

#### Esempio:

- Zaino: capacità 10 kg
- Oggetti:
  - Laptop: 3 kg, valore 500€
  - Tablet: 1 kg, valore 300€
  - Fotocamera: 2 kg, valore 400€
  - Libri: 5 kg, valore 100€
- Valore desiderato: 900€

## 12 Dimostrazione di NP-Completezza

Per dimostrare che il problema è NP-completo, bisogna dimostrare due cose:

### 12.1 Il Problema è in NP

Data una possibile soluzione può essere verificata in tempo polinomiale da una macchina deterministica.

1. Somma i costi dei richiedenti selezionati  $\rightarrow$  controlla se  $\leq B$
2. Somma i profitti dei richiedenti selezionati  $\rightarrow$  controlla se  $\geq P$

Queste operazioni richiedono solo di scorrere la lista una volta  $\rightarrow$  tempo lineare  $O(n)$

### 12.2 Il problema dello Zaino può essere ridotto al problema

#### Idea della Riduzione

##### Trasformazione:

Dato un problema dello Zaino con:

- Oggetti: peso  $w_i$ , valore  $v_i$
- Capacità:  $W$
- Valore target:  $V$

Creiamo un problema Portfolio con:

- Richiedenti: costo  $r_i = w_i$ , profitto  $p_i = v_i$
- Budget:  $B = W$
- Profitto target:  $P = V$

**Risultato:** I due problemi hanno esattamente le stesse soluzioni!