

Sistema di Valutazione Prestiti

Formalizzazione del sistema in Z3

Matteo Barel

Prefazione

Questo documento presenta la formalizzazione logica completa di un sistema automatizzato per la valutazione delle richieste di prestito bancario. Il sistema utilizza il solver SMT Z3 per verificare la soddisfabilità di un insieme di vincoli logici e aritmetici che determinano l'approvazione della richiesta e il calcolo del tasso di interesse personalizzato. Ogni regola del dominio applicativo viene espressa mediante formule della logica proposizionale e della logica del primo ordine, permettendo una verifica formale della correttezza del sistema.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Dominio delle Variabili	3
1.2	Notazione logica	3
2	Codifica delle Variabili Categoriche	4
2.1	Tipo di Lavoro	4
2.2	Tipo di Prestito	4
3	Vincoli di Approvazione	6
3.1	Vincoli sull'Età	6
3.2	Vincoli sul Tipo di Impiego	7
3.3	Vincoli sul Tipo di Prestito	8
3.4	Vincoli Patrimoniali	9
3.5	Combinazioni Rischiose	9
3.6	Blacklist	10
4	Calcolo del Tasso di Interesse	10
4.1	Tasso Base	10
4.2	Aggiustamento per Tipo di Prestito	11
4.3	Beneficio del Cofirmatario	12
4.4	Aggiustamento per Reddito	12
4.5	Aggiustamento DTI (Debt-to-Income)	13
5	Sostenibilità della Rata Mensile	14
5.1	Calcolo della Rata Mensile	14
5.2	Vincoli di Sostenibilità	14
5.3	Formula Finale per l'approvazione	14
5.4	Calcolo degli Interessi Totali	15
6	Esempio Completo	16
6.1	Calcolo del Tasso	16
6.2	Calcolo della Rata	17
6.3	Verifica Sostenibilità	17
6.4	Interessi Totali	18
7	Verifica Formale con Z3	18
7.1	Processo di Verifica	18

1 Introduzione

Il sistema di valutazione prestiti analizza le richieste attraverso un insieme di regole che considerano diversi fattori: età del richiedente, situazione lavorativa, reddito, patrimonio netto, punteggio creditizio, presenza di cofirmatari, tipo e importo del prestito richiesto, e durata del finanziamento. Il sistema ha tre obiettivi :

1. **Determinare l'approvabilità:** verificare se una richiesta di prestito soddisfa tutti i vincoli normativi e di rischio.
2. **Calcolare il tasso di interesse:** determinare un tasso personalizzato basato sul profilo di rischio del richiedente.
3. **Garantire sostenibilità:** assicurare che la rata mensile sia compatibile con il reddito del richiedente.

1.1 Dominio delle Variabili

Definiamo formalmente il dominio di tutte le variabili utilizzate nel sistema:

Dominio delle Variabili

Variabili booleane: approved, cosigner, blacklisted $\in \{\text{true}, \text{false}\}$

Variabili categoriche: work $\in \{\text{permanent}, \text{temporary}, \text{unemployed}\}$
typeloan $\in \{\text{personal}, \text{car}, \text{house}\}$

Variabili numeriche: age $\in \mathbb{N}$, $0 \leq \text{age} \leq 120$
credit_score $\in \mathbb{N}$, $0 \leq \text{credit_score} \leq 1000$
income $\in \mathbb{R}^+$, networth $\in \mathbb{R}$
requested $\in \mathbb{R}^+$, months $\in \mathbb{N}^+$
rate $\in \mathbb{R}^+$

1.2 Notazione logica

In questo documento utilizziamo la seguente notazione logica:

- \wedge Congiunzione logica (AND)
- \vee Disgiunzione logica (OR)
- \neg Negazione logica (NOT)
- \rightarrow Implicazione logica (IMPLIES)
- \leftrightarrow Doppia implicazione (IF AND ONLY IF)
- \oplus OR esclusivo (XOR)

2 Codifica delle Variabili Categoriche

Prima di esprimere i vincoli, è necessario codificare le variabili categoriche (tipo di lavoro e tipo di prestito) in variabili booleane riconoscibili da z3.

2.1 Tipo di Lavoro

Ogni richiedente può avere esattamente un tipo di impiego. Definiamo tre variabili booleane:

Codifica Tipo di Lavoro

$$\begin{aligned} \text{is_permanent} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{permanent}) \\ \text{is_temporary} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{temporary}) \\ \text{is_unemployed} &\leftrightarrow (\text{work} = \text{unemployed}) \end{aligned}$$

Vincolo di mutua esclusività (esattamente uno deve essere vero):

Mutua Esclusività Tipo Lavoro - Almeno Uno

$$\text{is_permanent} \vee \text{is_temporary} \vee \text{is_unemployed} \quad (1)$$

Mutua Esclusività Tipo Lavoro - Al Più Uno

$$\begin{aligned} (\neg \text{is_permanent} \vee \neg \text{is_temporary}) \wedge \\ (\neg \text{is_permanent} \vee \neg \text{is_unemployed}) \wedge \\ (\neg \text{is_temporary} \vee \neg \text{is_unemployed}) \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Tipo di Prestito

Analogamente, ogni richiesta può riguardare esattamente un tipo di prestito:

Codifica Tipo di Prestito

$$\begin{aligned} \text{is_personal} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{personal}) \\ \text{is_car} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{car}) \\ \text{is_house} &\leftrightarrow (\text{typeloan} = \text{house}) \end{aligned}$$

Vincolo di mutua esclusività:

Mutua Esclusività Tipo Prestito - Almeno Uno

$$\text{is_personal} \vee \text{is_car} \vee \text{is_house} \quad (3)$$

Mutua Esclusività Tipo Prestito - Al Più Uno

$$\begin{aligned} & (\neg \text{is_personal} \vee \neg \text{is_car}) \wedge \\ & (\neg \text{is_personal} \vee \neg \text{is_house}) \wedge \\ & (\neg \text{is_car} \vee \neg \text{is_house}) \end{aligned} \quad (4)$$

3 Vincoli di Approvazione

Formalizziamo tutti i vincoli che determinano l'approvazione di una richiesta di prestito.

3.1 Vincoli sull'Età

L'età del richiedente è un centrale per la valutazione del rischio. Definiamo dei vincoli:

Età Massima: il sistema non approva prestiti a richiedenti di età superiore a 75 anni:

Vincolo Età Massima

$$(\text{age} \geq 75) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (5)$$

Età Minima: il sistema richiede che il richiedente sia maggiorenne:

Vincolo Età Minima

$$(\text{age} \leq 18) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (6)$$

Richiedenti Giovani: per richiedenti di età pari o inferiore a 25 anni, è obbligatoria la presenza di un cofirmatario:

Vincolo Richiedenti Giovani

$$(\text{age} \leq 25 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (7)$$

Età al Termine del Prestito: l'età del richiedente al momento della scadenza del prestito non deve superare 85 anni. Questo vincolo considera la durata del prestito:

Vincolo Età al Termine

$$\text{approved} \rightarrow \left(\text{age} + \frac{\text{months}}{12} \leq 85 \right) \quad (8)$$

Vincolo Complessivo sull'Età: possiamo esprimere tutti i vincoli sull'età come un'unica formula:

Vincolo Complessivo Età

$$\text{approved} \rightarrow \left(\begin{array}{l} (18 < \text{age} < 75) \wedge \\ (\text{age} \leq 25 \rightarrow \text{cosigner}) \wedge \\ \left(\text{age} + \frac{\text{months}}{12} \leq 85 \right) \end{array} \right) \quad (9)$$

3.2 Vincoli sul Tipo di Impiego

La situazione lavorativa del richiedente influenza significativamente la valutazione del rischio. Il sistema impone requisiti diversi in base al tipo di impiego.

Richiedenti Disoccupati o con Impiego Temporaneo

I richiedenti disoccupati o con impiego temporaneo devono avere un cofirmatario. Questo vincolo è espresso usando l'OR esclusivo (XOR):

Vincolo Impiego Non Permanente (XOR)

$$(\text{is_unemployed} \oplus \text{is_temporary}) \rightarrow \text{cosigner} \quad (10)$$

Nota: Nel codice originale si usa XOR (per ribadire che può essere valida solo una delle due), ma logicamente l'OR è più appropriato poiché entrambe le condizioni richiedono un cofirmatario.

Richiedenti Disoccupati e Patrimonio Netto

Per i richiedenti disoccupati, il patrimonio netto deve essere almeno pari all'importo richiesto:

Vincolo Patrimonio Disoccupati

$$\text{is_unemployed} \rightarrow (\text{networth} \geq \text{requested}) \quad (11)$$

Questo garantisce che il richiedente disoccupato abbia risorse sufficienti per coprire l'intero importo del prestito.

3.3 Vincoli sul Tipo di Prestito

Ogni tipologia di prestito ha requisiti specifici riguardo all'importo, alla durata e all'età del richiedente.

Limiti sull'Importo

I prestiti personali e auto hanno un limite massimo, i mutui casa hanno un limite minimo:

Limite Importo Prestiti Personalari/Auto (XOR)

$$(\text{is_car} \oplus \text{is_personal}) \rightarrow (\text{requested} \leq 200000) \quad (12)$$

Limite Minimo Mutui Casa

$$\text{is_house} \rightarrow (\text{requested} \geq 30000) \quad (13)$$

Requisiti di Età per Prestiti Auto

Per i prestiti auto è richiesta un'età superiore a 25 anni:

Vincolo Età Prestiti Auto

$$\text{is_car} \rightarrow (\text{age} > 25) \quad (14)$$

Vincoli sulla Durata

Ogni tipo di prestito ha limiti specifici sulla durata:

Mutuo Casa:

Durata Mutuo Casa

$$\text{is_house} \rightarrow (60 \leq \text{months} \leq 360) \quad (15)$$

Prestito Auto:

Durata Prestito Auto

$$\text{is_car} \rightarrow (12 \leq \text{months} \leq 120) \quad (16)$$

Prestito Personale:

Durata Prestito Personale

$$\text{is_personal} \rightarrow (\text{months} \leq 180) \quad (17)$$

3.4 Vincoli Patrimoniali

Prestiti Superiori a €100.000

Per prestiti superiori a €100.000 che non siano mutui:

Vincolo Prestiti sopra i €100.000

$$\begin{aligned} & (\text{requested} > 100000 \wedge \neg \text{is_house}) \rightarrow \\ & ((\text{networth} \geq 0.5 \times \text{requested}) \wedge \text{is_permanent}) \end{aligned} \quad (18)$$

Questo vincolo garantisce che:

- Il patrimonio netto sia almeno il 50% dell'importo richiesto
- Il richiedente abbia un impiego permanente

3.5 Combinazioni Rischiose

Anziani con Mutui a Lunga Durata

Richiedenti sopra i 65 anni non possono ottenere mutui casa con durata superiore a 15 anni (180 mesi):

Vincolo Anziani con Mutui Lunghi

$$(\text{age} > 65 \wedge \text{is_house} \wedge \text{months} > 180) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (19)$$

Lavoratori Temporanei con Prestiti Elevati

Richiedenti con impiego temporaneo non possono ottenere prestiti superiori a €30.000 senza cofirmatario:

Vincolo Lavoratori Temporanei

$$(\text{is_temporary} \wedge \text{requested} > 30000 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \neg \text{approved} \quad (20)$$

Profilo di Rischio Elevato

La combinazione di credit score basso, reddito basso e assenza di cofirmatario porta al rifiuto automatico:

Vincolo Profilo Alto Rischio

$$\begin{aligned} & (\text{credit_score} < 600 \wedge \text{income} < 2500 \wedge \neg \text{cosigner}) \rightarrow \\ & \neg \text{approved} \end{aligned} \quad (21)$$

3.6 Blacklist

I clienti presenti nella blacklist vengono automaticamente rifiutati:

Vincolo Blacklist

$$\text{blacklisted} \rightarrow \neg\text{approved} \quad (22)$$

4 Calcolo del Tasso di Interesse

Il tasso di interesse personalizzato viene calcolato sommando diverse componenti che riflettono il profilo di rischio del richiedente. Il tasso finale è dato da:

Formula Tasso di Interesse

$$\text{rate} = \text{base_rate} + \text{type_adj} + \text{cosigner_benefit} + \text{income_adj} + \text{dti_adj} \quad (23)$$

4.1 Tasso Base

Il tasso base dipende dal credit score e dall'età del richiedente. I giovani (età ≤ 35) sono penalizzati con un tasso aggiuntivo.

Formula per Richiedenti Giovani

Per richiedenti con età ≤ 35 anni:

Tasso Base - Richiedenti Giovani

$$\text{age} \leq 35 \rightarrow \text{base_rate} = 1 + (1000 - \text{credit_score}) \times 0.007 + 0.2 \times \sqrt{35 - \text{age}} \quad (24)$$

La componente $0.2 \times \sqrt{35 - \text{age}}$ introduce una penalizzazione che decresce con l'età:

- A 18 anni: $0.2 \times \sqrt{17} \approx 0.825\%$
- A 25 anni: $0.2 \times \sqrt{10} \approx 0.632\%$
- A 35 anni: $0.2 \times \sqrt{0} = 0\%$

Formula per Richiedenti Maturi

Per richiedenti con età > 35 anni:

Tasso Base - Richiedenti Maturi

$$\text{age} > 35 \rightarrow \text{base_rate} = 1 + (1000 - \text{credit_score}) \times 0.007 \quad (25)$$

Impatto del Credit Score

La componente $(1000 - \text{credit_score}) \times 0.007$ determina l'impatto del credit score:

- Credit score 1000 (perfetto): 0% di penalità
- Credit score 850: $(1000 - 850) \times 0.007 = 1.05\%$
- Credit score 700: $(1000 - 700) \times 0.007 = 2.1\%$

Il termine costante +1 rappresenta un tasso base minimo dell'1%.

4.2 Aggiustamento per Tipo di Prestito

Il tipo di prestito influenza il tasso applicato:

Aggiustamento Tipo Prestito

$$\text{type_adj} = \begin{cases} 0.0 & \text{se } \text{is_house} \\ 4.5 & \text{se } \neg \text{is_house} \end{cases} \quad (26)$$

Formalmente:

Aggiustamento Tipo - Formule

$$\text{is_house} \rightarrow (\text{type_adj} = 0.0) \quad (27)$$

$$\neg \text{is_house} \rightarrow (\text{type_adj} = 4.5) \quad (28)$$

I mutui casa beneficiano di un tasso ridotto (aggiustamento nullo), mentre prestiti personali e auto hanno un incremento del 4.5%.

4.3 Beneficio del Cofirmatario

La presenza di un cofirmatario riduce il tasso, con uno sconto maggiore per i più giovani:

Beneficio Cofirmatario

$$\text{cosigner_benefit} = \begin{cases} -0.5 & \text{se cosigner} \wedge (\text{age} \leq 30) \\ -0.3 & \text{se cosigner} \wedge (\text{age} > 30) \\ 0.0 & \text{se } \neg\text{cosigner} \end{cases} \quad (29)$$

Formalmente:

Beneficio Cofirmatario - Formule

$$(\text{cosigner} \wedge \text{age} \leq 30) \rightarrow (\text{cosigner_benefit} = -0.5) \quad (30)$$

$$(\text{cosigner} \wedge \text{age} > 30) \rightarrow (\text{cosigner_benefit} = -0.3) \quad (31)$$

$$\neg\text{cosigner} \rightarrow (\text{cosigner_benefit} = 0.0) \quad (32)$$

4.4 Aggiustamento per Reddito

Il reddito mensile del richiedente influenza il tasso attraverso una funzione a scalini:

Aggiustamento Reddito

$$\text{income_adj} = \begin{cases} 0.0 & \text{se income} \geq 4500 \\ 0.05 & \text{se } 3500 \leq \text{income} < 4500 \\ 0.1 & \text{se } 2500 \leq \text{income} < 3500 \\ 0.15 & \text{se } 2000 \leq \text{income} < 2500 \\ 0.2 & \text{se income} < 2000 \end{cases} \quad (33)$$

Formalmente:

Aggiustamento Reddito - Formule

$$\text{income} \geq 4500 \rightarrow (\text{income_adj} = 0.0) \quad (34)$$

$$(3500 \leq \text{income} < 4500) \rightarrow (\text{income_adj} = 0.05) \quad (35)$$

$$(2500 \leq \text{income} < 3500) \rightarrow (\text{income_adj} = 0.1) \quad (36)$$

$$(2000 \leq \text{income} < 2500) \rightarrow (\text{income_adj} = 0.15) \quad (37)$$

$$\text{income} < 2000 \rightarrow (\text{income_adj} = 0.2) \quad (38)$$

4.5 Aggiustamento DTI (Debt-to-Income)

L'aggiustamento DTI considera il rapporto tra l'importo richiesto e la capacità di reddito nel tempo:

Aggiustamento DTI

$$dti_adj = \begin{cases} 0.0 & \text{se is_permanent} \\ \frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}} & \text{se is_temporary} \\ 1 & \text{se is_unemployed} \end{cases} \quad (39)$$

Formalmente:

Aggiustamento DTI - Formule

$$\text{is_permanent} \rightarrow (dti_adj = 0.0) \quad (40)$$

$$\text{is_temporary} \rightarrow \left(dti_adj = \frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}} \right) \quad (41)$$

$$\text{is_unemployed} \rightarrow (dti_adj = 1) \quad (42)$$

Il termine $\frac{\text{requested}}{\text{income} \times \text{months}}$ rappresenta la frazione del reddito totale nel periodo che viene assorbita dal prestito.

5 Sostenibilità della Rata Mensile

Il criterio finale di approvazione è la sostenibilità della rata mensile rispetto al reddito del richiedente. Questo vincolo garantisce che il richiedente possa ragionevolmente ripagare il prestito.

5.1 Calcolo della Rata Mensile

La rata mensile è calcolata come somma di due componenti:

Calcolo Rata Mensile

$$\text{monthly_payment} = \frac{\text{requested}}{\text{months}} + \frac{\text{rate}}{100} \times \frac{\text{requested}}{12} \quad (43)$$

Dove:

- $\frac{\text{requested}}{\text{months}}$ è la quota capitale mensile
- $\frac{\text{rate}}{100} \times \frac{\text{requested}}{12}$ è la quota interessi mensile

5.2 Vincoli di Sostenibilità

La rata mensile non deve superare una certa percentuale del reddito, differenziata per tipo di prestito:

Mutuo Casa

Per i mutui casa, la rata può arrivare fino al 50% del reddito mensile:

Sostenibilità Mutuo Casa

$$\text{is_house} \rightarrow (\text{approved} \leftrightarrow (\text{monthly_payment} \leq 0.5 \times \text{income})) \quad (44)$$

Altri Prestiti

Per prestiti personali e auto, la rata non può superare il 20% del reddito mensile:

Sostenibilità Altri Prestiti

$$\neg \text{is_house} \rightarrow (\text{approved} \leftrightarrow (\text{monthly_payment} \leq 0.2 \times \text{income})) \quad (45)$$

5.3 Formula Finale per l'approvazione

Combinando il vincolo di sostenibilità con tutti i vincoli precedenti, otteniamo la condizione completa di approvazione:

Formula Finale

$$\text{approved} \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \neg \text{blacklisted} \wedge \\ [\text{vincoli su età e durata}] \wedge \\ [\text{vincoli su lavoro, prestito, patrimonio}] \wedge \\ \neg [\text{combinazioni rischiose}] \wedge \\ [\text{sostenibilità della rata}] \wedge \end{array} \right) \quad (46)$$

5.4 Calcolo degli Interessi Totali

Gli interessi totali pagati nel corso dell'intero prestito sono:

Interessi Totali

$$\text{total_interest} = \text{monthly_payment} \times \text{months} - \text{requested} \quad (47)$$

E il totale dovuto è:

Totale Dovuto

$$\text{total_due} = \text{monthly_payment} \times \text{months} = \text{requested} + \text{total_interest} \quad (48)$$

6 Esempio Completo

Consideriamo il richiedente Mario con i seguenti parametri:

Dati del Richiedente

```
name = "Mario"  
age = 45  
work = permanent  
income = 3500  
networth = 1000  
credit_score = 850  
requested = 200000  
cosigner = false  
typeloan = house  
months = 360  
blacklisted = false
```

6.1 Calcolo del Tasso

Tasso Base

Poiché age = 45 > 35:

Calcolo Tasso Base

$$\text{base_rate} = 1 + (1000 - 850) \times 0.007 = 1 + 150 \times 0.007 = 1 + 1.05 = 2.05\%$$

Aggiustamento Tipo

Essendo un mutuo casa:

Calcolo Aggiustamento Tipo

$$\text{type_adj} = 0.0\%$$

Beneficio Cofirmatario

Nessun cofirmatario:

Calcolo Beneficio Cofirmatario

$$\text{cosigner_benefit} = 0.0\%$$

Aggiustamento Reddito

Con income = 3500 (nell'intervallo $3500 \leq \text{income} < 4500$):

Calcolo Aggiustamento Reddito

$$\text{income_adj} = 0.05\%$$

Aggiustamento DTI

Impiego permanente:

Calcolo Aggiustamento DTI

$$\text{dti_adj} = 0.5\%$$

Tasso Finale

Tasso Finale

$$\text{rate} = 2.05 + 0.0 + 0.0 + 0.05 + 0.5 = 2.6\%$$

Nota: Il valore esatto calcolato da Z3 potrebbe differire leggermente a causa di arrotondamenti e della precisione numerica del solver.

6.2 Calcolo della Rata

Calcolo Rata Mensile - Esempio

$$\begin{aligned}\text{monthly_payment} &= \frac{200000}{360} + \frac{2.6}{100} \times \frac{200000}{12} \\ &= 555.56 + 0.026 \times 16666.67 \\ &= 555.56 + 433.33 \\ &= 988.89 \text{ €}\end{aligned}$$

6.3 Verifica Sostenibilità

Per un mutuo casa:

Verifica Sostenibilità - Esempio

$$\text{monthly_payment} \leq 0.5 \times \text{income} \Rightarrow 988.89 \leq 0.5 \times 3500 = 1750$$

Il vincolo è soddisfatto, quindi la richiesta è **APPROVATA**.

6.4 Interessi Totali

Interessi Totali - Esempio

$$\begin{aligned} \text{total_interest} &= 988.89 \times 360 - 200000 \\ &= 356000.40 - 200000 \\ &= 156000.40 \text{ €} \end{aligned}$$

Totale Dovuto - Esempio

$$\text{total_due} = 200000 + 156000.40 = 356000.40 \text{ €}$$

7 Verifica Formale con Z3

Il sistema utilizza il solver SMT (Satisfiability Modulo Theories) Z3 per verificare la soddisfabilità dei vincoli. Il processo è il seguente:

7.1 Processo di Verifica

1. **Codifica:** Tutte le variabili e i vincoli vengono tradotti in formule Z3
2. **Asserzione:** Si assume approved = true
3. **Risoluzione:** Z3 cerca un modello che soddisfi tutti i vincoli
4. **Risultato:**
 - Se **sat** (soddisfacibile): la richiesta è approvata, Z3 fornisce i valori delle variabili (rate, monthly_payment, ecc.)
 - Se **unsat** (insoddisfacibile): la richiesta è rifiutata