Dimostrazioni

Teorema di Knaster-Tarski

Sia $(L, \leq)$ un reticolo completo, e $f : L \to L$ sia una funzione monotòna. Allora f ha un minimo e un massimo punto fisso.

Dimostriamo il teorema nel caso particolare,

$$L = 2^A \qquad f : 2^A \longrightarrow 2^A, \text{ monotòna}$$

Dominio e codominio sono gli insiemi delle parti di A.

Dimostrazione minimo

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Costruiamo l'insieme Z che contiene tutti i sottoinsiemi di A per cui l'immagine di T rispetto alla funzione f è compresa in T. Questi punti si chiamano pre-fissi.

Fissato il reticolo L come insieme delle parti di A, e f che è monotona, Z non può essere vuoto. Se T è un punto fisso, allora sicuramente sta in Z. Quindi se ci sono punti fissi, sono tutti contenuti in Z.

Poniamo $m = \bigcap Z$

Formiamo l'intersezione di tutti i sottoinsiemi di A che sono nella famiglia Z.
m è un particolare sottoinsieme di A.

Per ogni S in Z, $m \subseteq S$, quindi

$$f(m) \subseteq f(S) \subseteq S$$

m è contenuto in ogni elemento S che sta in Z.

Quindi la sua immagine è contenuta in S.

Per ogni S in Z, $f(m) \subseteq S$

quindi $f(m) \subseteq \bigcap Z = m$

quindi $m \in Z$

Osservazione: $m = \min Z$

Z contiene anche m. Per come è costruito, m è anche il minimo in Z, perché è contenuto in tutti gli altri elementi.

Se riuscissimo a dimostrare che m costruito in questo modo è un punto fisso di f allora avremmo dimostrato che è il minimo punto fisso. Avremmo dimostrato il teorema.

Ora vogliamo dimostrare che m è un punto fisso di f.

$$f(m) \subseteq m$$

f è monotòna, quindi

$$f(f(m)) \subseteq f(m)$$

Allora, $f(m) \in Z$, quindi $m \subseteq f(m)$

Dato che f è monotona, deduciamo che applicando f ai due membri della disuguaglianza, la disuguaglianza è conservata.

Dimostrazione massimo

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid T \subseteq f(T)\}$

I punti fissi di f saranno contenuti in Z.

Gli elementi di Z saranno chiamati punti post-fissi

Fissato il reticolo L come insieme delle parti di A, e f che è monotona, Z non può essere vuoto. Se T è un punto fisso, allora sicuramente sta in Z. Quindi se ci sono punti fissi, sono tutti contenuti in Z.

$$\text{Poniamo} \quad m = \cup Z$$

Per ogni S in Z, $S \subseteq m$, quindi

$$S \subseteq f(S) \subseteq f(m)$$

Perchè f è monotona.

Sapendo che $f(m)$ contiene tutti gli insiemi S di Z, possiamo dire che $f(m)$ contiene anche nell'unione di tutti gli elementi di Z, ovvero $m = \bigcup Z \subseteq f(m)$

Ma se $m \subseteq f(m)$ allora $m \in Z$ per costruzione di Z

In particolare, essendo $m = \bigcup Z$, sappiamo anche che $m = \max Z$

Se dimostriamo che m è punto fisso, dimostriamo che è il massimo punto fisso.

Ora vogliamo dimostrare che m è un punto fisso di f.

Partiamo da $m \subseteq f(m)$ e applichiamo f da entrambe le parti $f(m) \subseteq f(f(m))$

Per definizione di Z $\quad f(m) \in Z$

Essendo però m il più grande elemento di Z abbiamo che $f(m) \subseteq m$

$m \subseteq f(m) \wedge f(m) \subseteq m \iff m = f(m)$, ovvero m è il massimo punto fisso di f.

Dato che f è monotona, deduciamo che applicando f ai due membri della disuguaglianza, la disuguaglianza è conservata.