la Bisimulazione debole $\approx^{Bis}$ è una congruenza ?

TEOREMA
Se $p, q \in P_{CCS}$: $p \approx^{Bis} q$, allora

- $\alpha.p \approx^{Bis} \alpha.q \qquad \forall \alpha \in \mathcal{A}_{CSS} = A \cup \overline{A} \cup \tau$
- $p|r \approx^{Bis} q|r \;\; \wedge \;\; r|p \approx^{Bis} r|q \qquad \forall r \in P_{CCS}$
- $p[f] \approx^{Bis} q[f] \qquad \forall f$ funzione di rietichettatura
- $p_{\backslash L} \approx^{Bis} q_{\backslash L} \qquad \forall L \subseteq A$

- e rispetto all'operatore $+$ (scelta) **?**

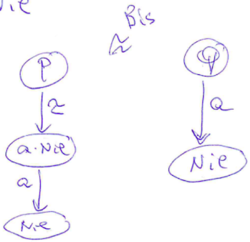
$\tau.a.Nil \;\approx^{Bis} a.Nil$ **ma** $\tau.a.Nil + b.Nil \;\not\approx^{Bis} a.Nil + b.Nil$

la Bisimulazione debole non è una congruenza per il CCS

la Bisimulazione debole $\approx^{Bis}$ è una congruenza ?

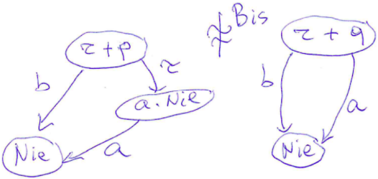
$r = b.Nil$

$p = \tau.a.Nil \approx^{Bis} q = a.Nil$



$r + p \not\approx^{Bis} r + q$

$\Rightarrow \approx^{Bis}$ <u>NON</u> è una CONGRUENZA rispetto a $+$ e <u>ricorsione</u>



La Bisimulazione debole è una *congruenza* rispetto agli operatori del CCS **diversi** da $+$ e ricorsione

Congruenza $\approx^C$

$$\approx^C \ \subseteq \ \approx^{Bis} \ \subseteq \ P_{CCS} \times P_{CCS}$$

per CCS puro, senza ricorsione, agenti finiti

insieme finito di Assiomi Ax :

- Ax <u>corretto</u> (Ax $\vdash p = q \quad \Rightarrow \quad p \approx^C q$)

- Ax <u>completo</u> ($p \approx^C q \quad \Rightarrow \quad Ax \vdash p = q$)

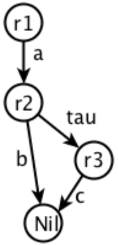
Si definisce quindi, tramite assiomi, **la più grande** relazione di congruenza $\approx^C$ (per il CCS puro e senza ricorsione, con agenti finiti) che è contenuta nella relazione di Bisimulazione $\approx^{Bis}$ ($\approx^C \subseteq \approx^{Bis}$).

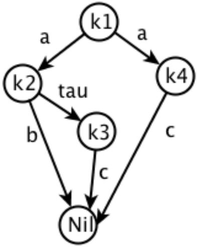
Congruenza $\approx^C$ tramite assiomi

- 1) $p + (q + r) \approx^C (p + q) + r$ e $p|(q|r) \approx^C (p|q)|r$
- 2) $p + q \approx^C q + p$ e $p|q \approx^C q|p$
- 3) $p + p \approx^C p$ (ma $p|p \not\approx^C p$)
- 4) $p + Nil \approx^C p$ e $p|Nil \approx^C p$
- 5) $p + \tau.p \approx^C \tau.p$
- 6) $\mu.\tau.p \approx^C \mu.p$
- 7) $\mu.(p + \tau.q) \approx^C \mu.(p + \tau.q) + \mu.q$

(es: $r_1 = a.(b.Nil + \tau.c.Nil)$; $k_1 = a.(b.Nil + \tau.c.Nil) + a.c.Nil$)

$r_1 \approx^C k_1$





Congruenza $\approx^C$ tramite assiomi

Se p e q sono delle somme: $p = \Sigma_i \alpha_i.p_i$ e $q = \Sigma_j \beta_j.q_j$ $\alpha,\beta \in Act$

- 8) $p \mid q \approx^C \Sigma_i\ \alpha_i.(p_i|q) + \Sigma_j \beta_j.(p|q_j) + \Sigma_{\alpha_i=\overline{\beta_j}} \tau.(p_i|q_j)$

  (teorema di espansione di R. Milner) (si veda prossima slide con esempio)
- 9) $p[f] \approx^C \Sigma_i f(\alpha_i).(p_i[f])$ $\forall f$ funzione di etichettatura
- 10) $p \backslash L \approx^C \Sigma_{\alpha_i, \overline{\alpha_i} \notin L}\ \alpha_i.(p_i \backslash L)$ $\forall L \subseteq A$

Congruenza $\approx^C$ tramite assiomi

Se p e q sono delle somme: $p = \Sigma_i \alpha_i.p_i$ e $q = \Sigma_j \beta_j.q_j$, $\alpha, \beta \in Act$

- 8) $p \mid q \approx^C \Sigma_i\ \alpha_i.(p_i|q) + \Sigma_j \beta_j.(p|q_j) + \Sigma_{\alpha_i = \overline{\beta_j}} \tau.(p_i|q_j)$
  (teorema di espansione di R. Milner)

$$\frac{P_1 \xrightarrow{\alpha} P_1'}{P_1|P_2 \xrightarrow{\alpha} P_1'|P_2}, \qquad \frac{P_2 \xrightarrow{\alpha} P_2'}{P_1|P_2 \xrightarrow{\alpha} P_1|P_2'}$$

$$\frac{P_1 \xrightarrow{a} P_1' \wedge P_2 \xrightarrow{\bar{a}} P_2'}{P_1|P_2 \xrightarrow{\tau} P_1'|P_2'}$$

(qui si assume che le azioni siano atomiche)

Congruenza $\approx^C$ tramite assiomi

Se p e q sono delle somme: $p = \Sigma_i \alpha_i.p_i$ e $q = \Sigma_j \beta_j.q_j$, $\alpha, \beta \in Act$

- 8) $p \mid q \approx^C \Sigma_i\ \alpha_i.(p_i|q) + \Sigma_j \beta_j.(p|q_j) + \Sigma_{\alpha_i = \overline{\beta_j}} \tau.(p_i|q_j)$
  (teorema di espansione di R. Milner)

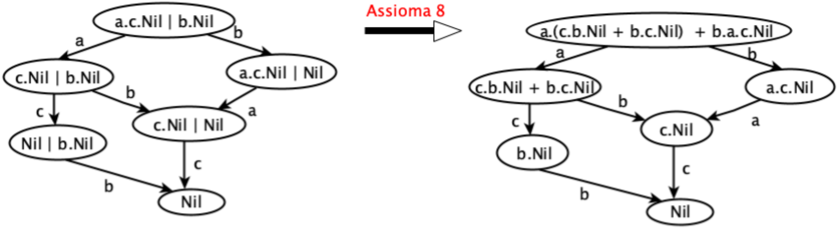
Es.: $a.c.Nil \mid b.Nil \ \approx^C$

$$a.(c.Nil \mid b.Nil) \ + \ b.(a.c.Nil \mid Nil) \ \approx^C$$

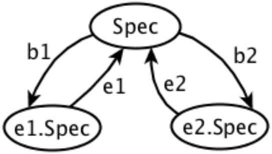
$$a.(c.(Nil|b.Nil) + b.(c.Nil|Nil)) + b.(a.(c.Nil|Nil)) \approx^C$$

$$a.(c.b.(Nil|Nil) + b.c.(Nil|Nil)) + b.(a.c.(Nil|Nil)) \approx^C$$

$$a.(c.b.Nil + b.c.Nil) + b.a.c.Nil$$

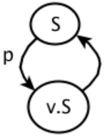


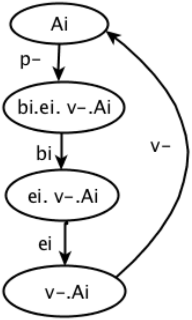
es.: mutua esclusione



$$Spec = b_1.e_1.Spec + b_2.e_2.Spec$$

$$Sys = (A_1|S|A_2)\backslash_{\{p,v\}}$$



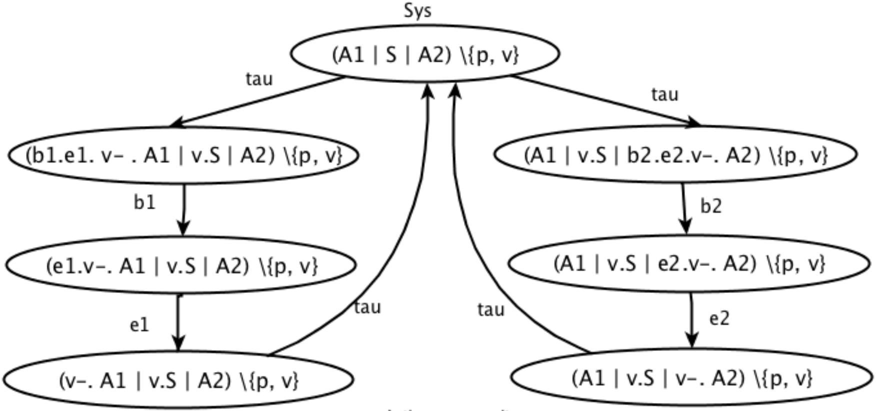


v– è il conome di v
p– è il conome di p

$$S = p.v.S \qquad A_1 = \overline{p}.b_1.e_1.\overline{v}.A_1 \qquad A_2 = \overline{p}.b_2.e_2.\overline{v}.A_2$$

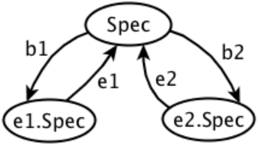
es.: Sys (mutua esclusione)

$$Sys = (A_1|S|A_2)\backslash_{\{p,v\}} \quad S = p.v.S \quad A_1 = \overline{p}.b_1.e_1.\overline{v}.A_1 \quad A_2 = \overline{p}.b_2.e_2.\overline{v}.A_2$$

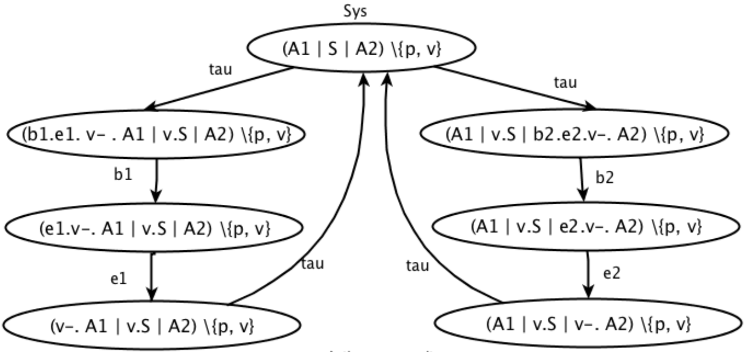


v– è il conome di v

es.



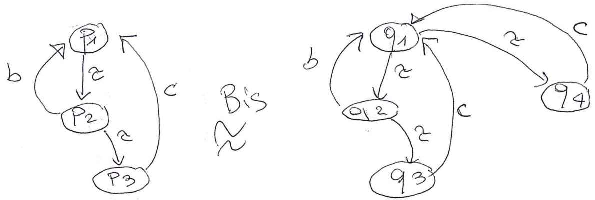
$$Spec \ ? \approx^{Bis} SyS$$



v– è il conome di v

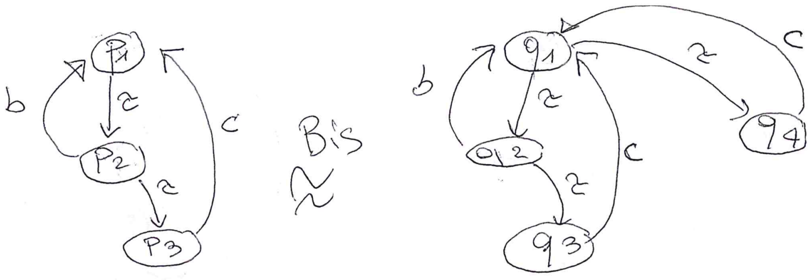
$$Spec \not\approx^{Bis} SyS$$

es. bisimulazione - processi ciclici



(p_1, q_1) 1	A	$p_1 \xrightarrow{\tau} p_2$	D $q_1 \overset{\tau}{\Rightarrow} q_2$	2a (p_2, q_2)
		$q_1 \xrightarrow{\tau} q_2$	$p_1 \overset{\tau}{\Rightarrow} p_2$	
		$q_1 \xrightarrow{\tau} q_4$	$p_1 \overset{\tau}{\Rightarrow} p_3$	(p_3, q_4) 2b
2a (p_2, q_2)	A	$p_2 \overset{b}{\Rightarrow} p_1$	$q_2 \overset{b}{\Rightarrow} q_1$	(p_1, q_1) 1
		$p_2 \overset{\tau}{\Rightarrow} p_3$	$q_2 \overset{\tau}{\Rightarrow} q_3$	(p_3, q_3)
		$q_2 \xrightarrow{b} q_1$	$p_2 \overset{b}{\Rightarrow} p_1$	1
		$q_2 \xrightarrow{\tau} q_3$	$p_2 \overset{\tau}{\Rightarrow} p_3$	(p_3, q_3)
2b (p_3, q_4)	A	$p_3 \overset{c}{\Rightarrow} p_1$ ⟷	D $q_4 \overset{c}{\Rightarrow} q_1$	1
(p_3, q_3)	A	$p_3 \overset{c}{\Rightarrow} p_1$	D $q_3 \overset{c}{\Rightarrow} q_1$	1

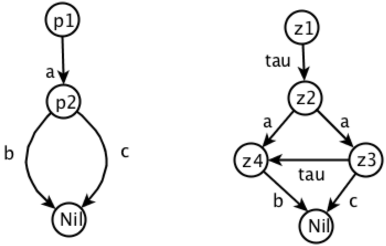
es. bisimulazione - processi ciclici



i processi p_1 e q_1 sono Bisimili $p_1 \approx^{Bis} q_1$,

con relazione di bisimulazione $\mathcal{R} = \{(p_1, q_1); (p_2, q_2); (p_3, q_3); (p_3, q_4)\}$

Esempio $\quad p_1 = a.(b.Nil + c.Nil) \quad z_1 = \tau.(a.b.Nil + a.(\tau.b.Nil + c.Nil))$



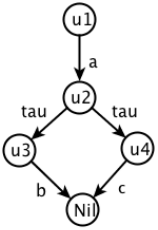
$$p_1 \not\approx^{Bis} z_1$$

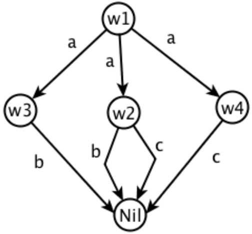
L'Attaccante ha infatti una strategia vincente: ad es.

- Attaccante: $p_1 \rightarrow^a p_2$,
- Difensore: 2 possibilitá:
  - $z_1 \Rightarrow^a z_3$ - configurazione (p_2, z_3):
    - * Attaccante $z_3 \rightarrow^\tau z_4$
    - * Difensore : $p_2 \Rightarrow^\tau p_2$ - configurazione (p_2, z_4):
      - * Attaccante $p_2 \rightarrow^c Nil$
      - * Difensore perde $z_4 \not\Rightarrow^c$
  - $z_1 \Rightarrow^a z_4$ - configurazione (p_2, z_4):

    Difensore perde $(p_2 \not\approx^{Bis} z_4)$ come prima.

Esempio $\quad u_1 = a.(\tau.b.Nil + \tau.c.Nil) \quad w_1 = a.b.Nil + a.(b.Nil + c.Nil) + a.c.Nil$





$u_1 \not\approx^{Bis} w_1$

L'Attaccante ha infatti una strategia vincente: ad es.

- Attaccante: $w_1 \to^a w_2$,
- Difensore: 3 possibilitá:
  - $u_1 \Rightarrow^a u_2$ - configurazione (u_2, w_2):
    - * Attaccante $u_2 \to^\tau u_4$
    - * Difensore : $w_2 \Rightarrow^\tau w_2$ - configurazione (u_4, w_2):
      - * Attaccante $w_2 \to^b Nil$
      - * Difensore perde $u_4 \not\Rightarrow^b$
  - $u_1 \Rightarrow^a u_3$ - configurazione (u_3, w_2): Difensore perde ...
  - $u_1 \Rightarrow^a u_4$ - configurazione (u_4, w_2): Difensore perde come prima