

KNASTER-TARSKI

TEOREMA: Sia (L, \leq) un reticolo completo e $f : L \rightarrow L$ una funzione monotona. Allora f ha un minimo ed un massimo punto fisso.

Per semplicità consideriamo il caso $L = 2^A$ per un insieme A . Quindi $f : 2^A \rightarrow 2^A$.

MINIMO

1. Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$
Gli elementi di Z saranno chiamati *punti pre-fissi*; se f ha qualche punto fisso, tutti questi saranno contenuti in Z (per via del \subseteq).

OSSERVAZIONE: L'insieme Z non può essere vuoto poiché $f(A) \subseteq A$

2. Poniamo $m = \bigcap Z$ notando che non è detto che $m \in Z$
Tuttavia, per costruzione di m , abbiamo che $\forall S \in Z \quad m \subseteq S$ e quindi, essendo f monotona, $f(m) \subseteq f(S)$
Siccome $S \in Z$, $f(S) \subseteq S$ e quindi $f(m) \subseteq f(S) \subseteq S \implies f(m) \subseteq S$
3. Sapendo che $f(m)$ è contenuto in tutti gli insiemi S di Z , possiamo dire che $f(m)$ è contenuto anche nell'intersezione di tutti gli elementi di Z , ovvero $f(m) \subseteq \bigcap Z = m$
Ma se $f(m) \subseteq m$ allora $m \in Z$ per costruzione di Z
In particolare, essendo $m = \bigcap Z$, sappiamo anche che $m = \min Z$
Se dimostriamo che m è punto fisso, dimostriamo che è il minimo punto fisso.
4. Partiamo da $f(m) \subseteq m$ e applichiamo f da entrambe le parti $f(f(m)) \subseteq f(m)$
Per definizione di $Z \quad f(m) \in Z$
Essendo però m il più piccolo elemento di Z abbiamo che $m \subseteq f(m)$
 $f(m) \subseteq m \wedge m \subseteq f(m) \iff m = f(m)$, ovvero m è il minimo punto fisso di f .

MASSIMO

1. Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid T \subseteq f(T)\}$
Gli elementi di Z saranno chiamati *punti post-fissi*; se f ha qualche punto fisso, tutti questi saranno contenuti in Z (per via del \subseteq).
2. Poniamo $m = \bigcup Z$ notando che non è detto che $m \in Z$
Tuttavia, per costruzione di m , abbiamo che $\forall S \in Z \quad S \subseteq m$ e quindi, essendo f monotona, $f(S) \subseteq f(m)$
Siccome $S \in Z$, $S \subseteq f(S)$ e quindi $S \subseteq f(S) \subseteq f(m) \implies S \subseteq f(m)$
3. Sapendo che $f(m)$ contiene tutti gli insiemi S di Z , possiamo dire che $f(m)$ contiene anche nell'unione di tutti gli elementi di Z , ovvero $m = \bigcup Z \subseteq f(m)$
Ma se $m \subseteq f(m)$ allora $m \in Z$ per costruzione di Z
In particolare, essendo $m = \bigcup Z$, sappiamo anche che $m = \max Z$
Se dimostriamo che m è punto fisso, dimostriamo che è il massimo punto fisso.
4. Partiamo da $m \subseteq f(m)$ e applichiamo f da entrambe le parti $f(m) \subseteq f(f(m))$
Per definizione di $Z \quad f(m) \in Z$
Essendo però m il più grande elemento di Z abbiamo che $f(m) \subseteq m$
 $m \subseteq f(m) \wedge f(m) \subseteq m \iff m = f(m)$, ovvero m è il massimo punto fisso di f .