CONVOLUTION

$f(x), g(x)$

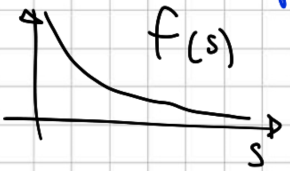
$$g * f = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-s)\, f(s)\, ds$$

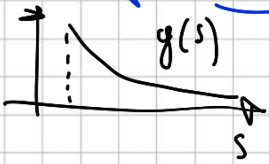
INTEGRALE RISPETTO AD S

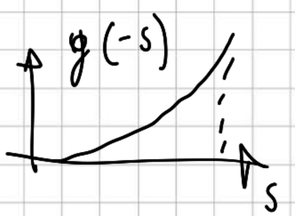
COS'È S?

RIMANE UGUALE

1) DEVE ESSERE SPECCHIATA PERCHÉ È -S







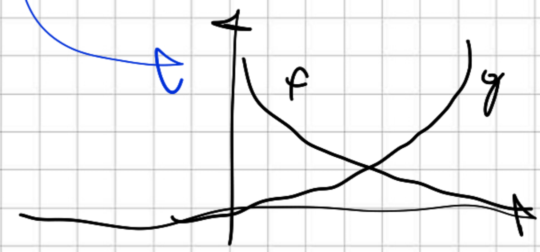
2) IL SEGNALE INVERTITO VIENE POI TRASLATO TRA $-\infty$ E $+\infty$ MAN MANO

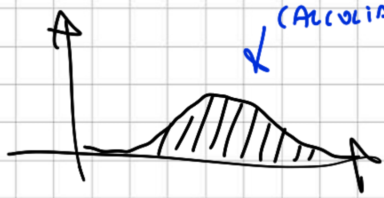
X È LO SHIFTING

3) PER OGNI TRASLAZIONE SI CALCOLA IL PRODOTTO TRA IL SEGNALE TRASLATO E L'ALTRO NON TRASLATO

4) E QUINDI SI CALCOLA L'AREA DEL PRODOTTO

RAPPRESENTAZIONE DELLA CONVOLUZIONE NEL PUNTO X:





CALCOLIAMO QUEST'AREA

NON HO CAPITO SE QUESTO È GIÀ IL RISULTATO DELL'INTEGRALE O SE È UNA CONVOLUZIONE RISPETTO AD UN X

PENSO LA PRIMA

NELL'INTEGRALE SI MUOVE LA FUNZIONE g, CAMBIANDO LA X, PROVANDOLI TUTTI

VERSIONE DISCRETA:

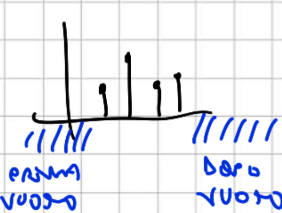
FILTER / KERNEL — SIGNAL

$$g * f = \sum_{s} g(x-s)\, f(s)$$

NON ABBIAMO GLI ESTREMI $\pm\infty$ PERCHÉ I SEGNALI DISCRETI HANNO UN INIZIO E UNA FINE

PRIMA NON C'È NIENTE

DOPO NON C'È NIENTE



LA CONVOLUZIONE È L'OPERATORE CON CUI SONO DESCRITTI: FILTRAGGI LINEARI NEL DOMINIO SPAZIALE

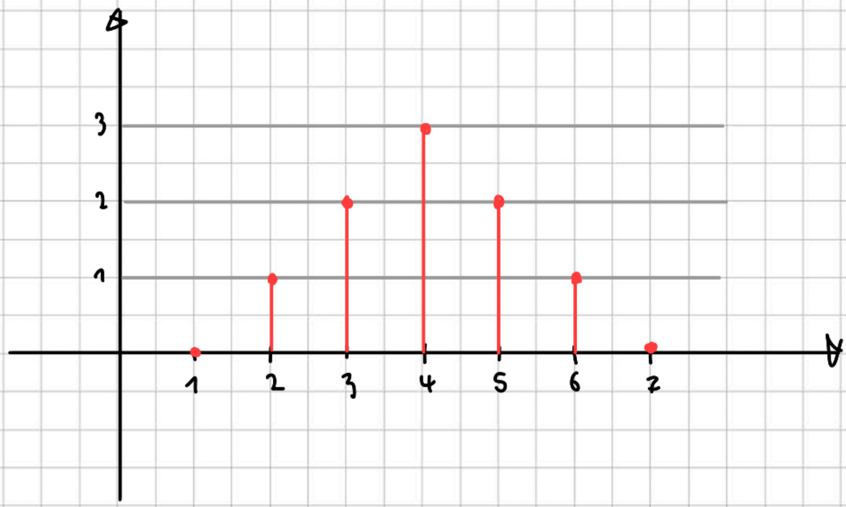
LA CONVOLUZIONE È L'APPLICAZIONE AD UNA FUNZIONE f DI UNA FUNZIONE h CHIAMATO FILTRO (O FILTER KERNEL). NEL DOMINIO DISCRETO È DATA DA UNA SOMMA DI PRODOTTI TRA GLI ELEMENTI DI f E I COEFFICIENTI DI h

ESEMPIO REALE

7 ELEMENTI

$$SIGNAL = [\,0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0\,]$$

$$FILTER_1 = \left[\,\frac{1}{3} \;\; \frac{1}{3} \;\; \frac{1}{3}\,\right] \rightarrow 3 \text{ ELEMENTI}$$



1. SPECCHIAMO IL FILTRO (IN QUESTO CASO NON CAMBIA NIENTE)
2. SHIFTIAMO

SIGNAL:

0	1	2	3	2	1	0

FILTER:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3. MOLTIPLICAZIONE ELEMENTO · ELEMENTO $\quad 0\cdot\frac{1}{3} \quad 1\cdot\frac{1}{3} \quad 2\cdot\frac{1}{3} = 1$

4. SOMMA

POSIZIONIAMO IL RISULTATO NEL CENTRO DEL KERNEL

CONV => $\boxed{1}$

SIGNAL:

0	1	2	3	2	1	0

5. SHIFTIAMO IL FILTRO E CALCOLIAMO IL PROSSIMO VALORE DELLA CONVOLUZIONE

FILTER:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$= 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} = 2$$

↳ CONV =>

1	2

CALCOLIAMO NELLE POSIZIONI VALIDE, OVVERO DOVE IL FILTRO È INTERAMENTE CONTENUTO NEL SEGNALE

RIPETI FINCHÉ ARRIVI AL RISULTATO:

CONV =>

1	2	$2.\bar{3}$	2	1

in alcune applicazioni, vogliamo come output lo stesso numero di valori in output e non da 7 a 5 come nell'esempio

PADDING →

?	0	1	2	3	2	1	0	?

Si può fare in modi diversi:

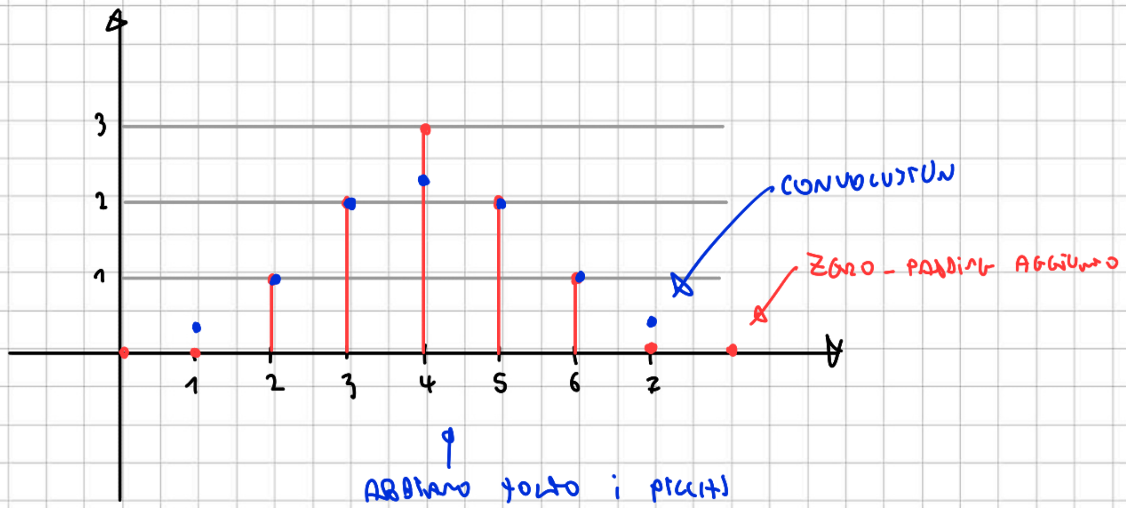
Zero-padding: aggiungi zeri

Mirror-padding: specchia rispetto ai valori precedenti

Cyclic-padding: ricomincia dall'inizio

Con zero padding arriviamo a:

CONV ⇒ $0.\overline{3} \mid 1 \mid 2 \mid 2.\overline{3} \mid 2 \mid 1 \mid 0.\overline{3}$



$\text{Filter}_1 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right]$ ← smoothing filter (moving average)

cambiamo il filtro

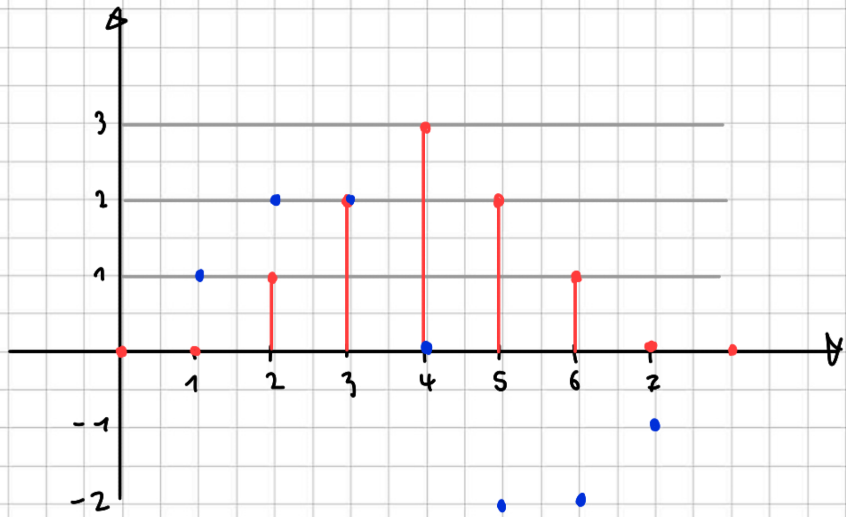
SIGNAL = [0 1 2 3 2 1 0]   NON BISOGNA FARE MIRRORING

$FILTER_2 = [-1 \ 0 \ 1]$ (È GIÀ NELL'ORDINE CORRETTO)

CALCOLIAMO LA CONVOLUZIONE CON ZERO PADDING

CONV =>

1	2	2	0	-2	-2	1



$FILTER_2 = [-1 \ 0 \ 1]$ ← DERIVATIVE FILTER

DOVE LA FUNZIONE AUMENTA, LA DERIVATA È POSITIVA
DOVE DIMINUISCE, È NEGATIVO
DOVE C'È IL PICCO, È ZERO

ESERCIZIO PER CASA:

SIGNAL: [0 0 0 1 0 0 0]

$FILTER_1: [\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}]$

$FILTER_2: [-1 \ 0 \ 1]$

RISCRIVIAMO LA CONVOLUZIONE COSÌ E CHIAMIAMO L'OUTPUT $g(x)$

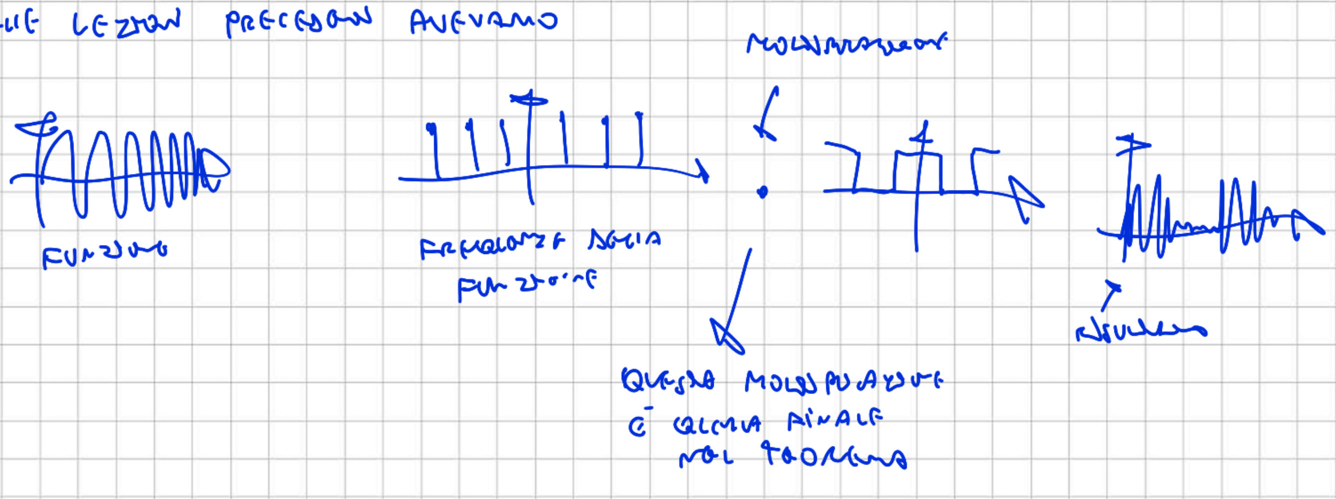
$$g(x) = f * h = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)\, h(s)\, ds$$

CONVOLUTION THEOREM

$$G(u) = \underbrace{\mathbb{F}}_{\text{FOURIER TRANSFORM}}[\underbrace{g(x)}_{\text{CONVOLUZIONE}}] = \mathbb{F}[f(x) * g(x)] = \underbrace{F(u)}_{\text{FOURIER TRANSFORM DELLA FUNZIONE}} \cdot \underbrace{H(u)}_{\text{FOURIER TRANSFORM DEL FILTRO}}$$

? CALCOLARE LA FOURIER TRANSFORM DELLA CONVOLUZIONE È COME MOLTIPLICARE LE FOURIER TRANSFORMS DELLE DUE FUNZIONI

NELLE LEZIONI PRECEDENTI AVEVAMO



SPATIAL/TIME DOMAIN — FREQUENCY DOMAIN

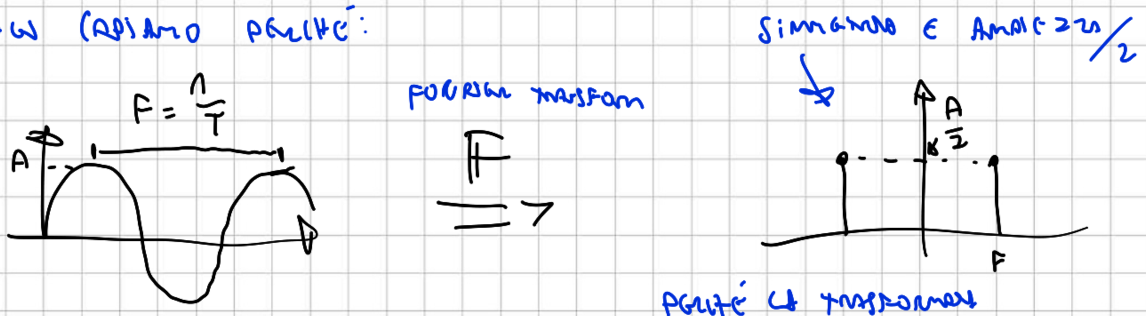
$$g(x) = f(x) \underbrace{*}_{\text{CONVOLUZIONE}} h(x) \longrightarrow G(u) = F(u) \underbrace{\cdot}_{\text{MOLTIPLICAZIONE}} H(u)$$

$$g(x) = f(x) \overbrace{\cdot}^{\text{MOLTIPLICAZIONE}} h(x) \xrightarrow[\text{CORRISPONDENZE}]{} G(u) = F(u) \overbrace{*}^{\text{CONVOLUZIONE}} H(u)$$

POSSIAMO POI FARE LA INVERSE FOURIER TRANSFORM PER TORNARE A $g(x)$

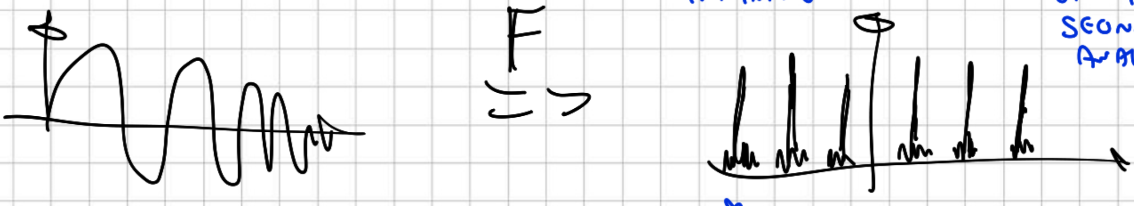
- È difficile creare dei filtri per fare un'azione specifica
  però è facile farlo nel dominio delle frequenze

Oggi capiamo perché:



Perché la trasformata di Fourier si aspetta un segnale infinito

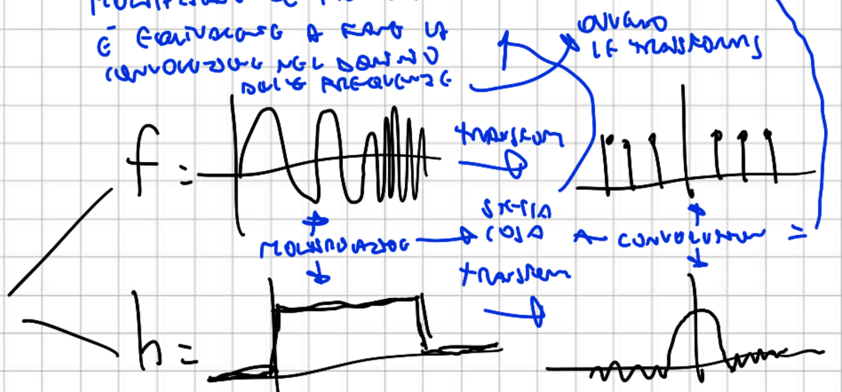
Arriva dal fatto che abbiamo tagliato una parte del segnale per analizzarlo



informazione extra - artifacts

Analizziamo solo questa parte del segnale, escludiamo il resto

Moltiplicare le parti due è equivalente a fare la convoluzione nel dominio delle frequenze



Quindi l'informazione extra arriva dalla convoluzione delle due transforms

che è la stessa cosa di fare la moltiplicazione delle due funzioni originali

La cosa importante è che possiamo trasformare il segnale in uno spazio diverso, per poter applicare tecniche di quello spazio