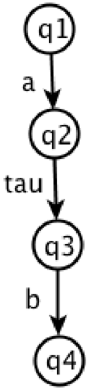
$p_1 = a.b.Nil \qquad q_1 = a.\tau.b.Nil$

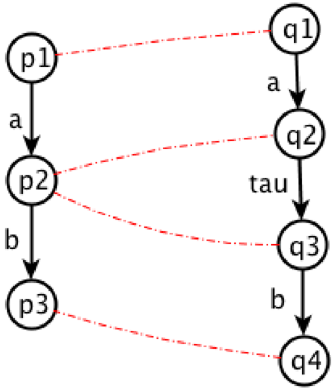


$p_1 \not\sim^{T} q_1$ e quindi, a maggior ragione, $p_1 \not\sim^{Bis} q_1$

relazione di transizione debole: $\Rightarrow^{\alpha}, \alpha \in Act$ ($\Rightarrow^{w}, w \in Act^*$)

$p_1 \approx^{T} q_1$

$p_1 = a.b.Nil \qquad q_1 = a.\tau.b.Nil$



$p_1 \not\sim^T q_1$ e quindi, a maggior ragione, $p_1 \not\sim^{Bis} q_1$

relazione di transizione debole: $\Rightarrow^\alpha, \alpha \in Act$ ($\Rightarrow^w, w \in Act^*$)

$p_1 \approx^T q_1$ e anche $p_1 \approx^{Bis} q_1$

relazione di transizione debole $\Rightarrow^{\alpha}$ e $\Rightarrow^{w}$

Siano $p, p' \in Proc_{CCS}$ e $\alpha \in Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\},\ w \in Act^*$

$p \Rightarrow^{\alpha} p'$ se e solo se:

- $p \rightarrow^{\tau *} \rightarrow^{\alpha} \rightarrow^{\tau *} p'$, se $\alpha \neq \tau$
- $p \rightarrow^{\tau *} p'$, se $\alpha = \tau$.

$p \Rightarrow^{w} p'$ se e solo se:

- $p \rightarrow^{\tau *} p'$, se $w = \epsilon \vee w = \tau^*$
- $p \Rightarrow^{a_1} \cdots \Rightarrow^{a_n} p'$, se $w = a_1 \dots a_n$, con $a_i \in A \cup \bar{A}$, $i \geq 1$.

equivalenza rispetto alle Tracce debole $\approx^T$

Siano $p, q \in Proc_{CCS}$

$$p \approx^T q \quad \text{sse} \quad Tracce_{\Rightarrow}(p) = Tracce_{\Rightarrow}(q)$$

dove $Tracce_{\Rightarrow}(p) = \{w \in (A \cup \bar{A})^* \mid p \Rightarrow^w p', p' \in Proc_{CCS}\}$

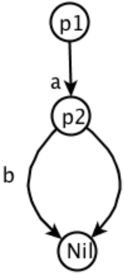
oppure, in modo equivalente

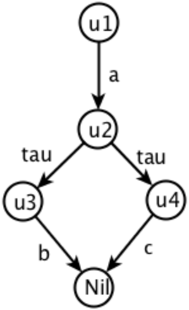
$$p \approx^T q \quad \text{sse}$$

$$\forall w \in (A \cup \bar{A})^* : \quad p \Rightarrow^w \Leftrightarrow \; q \Rightarrow^w$$

dove $p \Rightarrow^w \Leftrightarrow \; \exists p' : \; p \Rightarrow^w p'$

$$p_1 = a.(b.Nil + c.Nil) \qquad u_1 = a.(\tau.b.Nil + \tau.c.Nil)$$





$$p_1 \not\sim^{T} u_1 \text{ e quindi anche } p_1 \not\sim^{Bis} u_1$$

$$\text{inoltre } p_1 \approx^{T} u_1$$

ma p_1 e u_1 hanno *"diversa possibilitá di generare deadlock"* e allora si introduce la relazione di Bisimulazione debole:

$$p_1 \not\approx^{Bis} u_1$$

Bisimulazione debole: definizione

$\mathcal{R} \subseteq Proc_{CCS} \times Proc_{CCS}$ é una bisimulazione debole **sse**

$\forall p, q \in Proc_{CCS}$: $p \; \mathcal{R} \; q$ vale che: $\forall \alpha \in Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$

- se $p \rightarrow^{\alpha} p_1$, allora esiste q_1 tale che: $q \Rightarrow^{\alpha} q_1$ e $p_1 \mathcal{R} q_1$

(e viceversa)

- se $q \rightarrow^{\alpha} q_1$, allora esiste p_1 tale che: $p \Rightarrow^{\alpha} p_1$ e $p_1 \mathcal{R} q_1$

Due processi p e q sono *debolmente bisimili* ($p \approx^{Bis} q$) se e solo se esiste una relazione di bisimulazione debole $\mathcal{R}$ tale che: $p \mathcal{R} q$.

$$\approx^{Bis} = \cup \; \{\mathcal{R} : \mathcal{R} \text{ bisimulazione debole}\}$$

Bisimulazione (debole) come Gioco

Per confrontare p e q un *gioco* $G(p,q)$ con 2 *giocatori*:

- *Attaccante*: cerca di dimostrare $p \not\approx^{Bis} q$
- *Difensore*: cerca di dimostrare $p \approx^{Bis} q$

Un gioco $G(p,q)$: piú *partite*.

Una *partita* di un gioco $G(p,q)$ é una sequenza finita o infinita di configurazioni: $(p_0, q_0), (p_1, q_1), ..., (p_i, q_i), ...,$

con $(p, q) = (p_0, q_0)$.

In ogni *mano* si passa dalla configurazione corrente (p_i, q_i) alla successiva (p_{i+1}, q_{i+1}) con le seguenti regole.

Regole del gioco

- l'Attaccante sceglie uno dei due processi della configurazione corrente (p_i, q_i) e fa una $\rightarrow^{\alpha}$ mossa $(\alpha \in Act)$
- il Difensore deve rispondere con una $\Rightarrow^{\alpha}$ mossa nell'altro processo.

La coppia di processi (p_{i+1}, q_{i+1}) cosí ottenuta diventa la nuova configurazione corrente.

La partita continua con un'altra mano.

Risultato di una partita

- se un giocatore non puó muovere, l'altro vince.
- se la partita é *infinita*, vince il *difensore*.

Diverse partite possono concludersi con vincitori diversi;

ma per ogni gioco, un solo giocatore puó vincere ogni partita.

Una strategia per un giocatore é un insieme di regole che indicano di volta in volta che mossa fare. Tali regole dipendono solo dalla configurazione corrente.

Un giocatore ha una strategia vincente per un gioco $G(p, q)$ se seguendo quella strategia é in grado di vincere **tutte** le partite del gioco.

Teorema 1
Per ogni gioco $G(p, q)$, **solo uno** dei due giocatori ha una strategia vincente.

Teorema 2

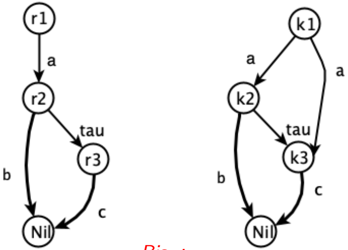
- L'Attaccante ha una *strategia vincente* per $G(p, q)$ se e solo se $p \not\approx^{Bis} q$.
- Il Difensore ha una *strategia vincente* per $G(p, q)$ se e solo se $p \approx^{Bis} q$.

Nota
Il gioco della bisimulazione puó essere usato sia per dimostrare che due processi sono bisimili, che per dimostrare che non lo sono.

Per dimostrare che i processi **sono Bisimili**, bisogna mostrare che *il Difensore ha una strategia vincente*, cioé che, **per ogni mossa** dell'Attaccante, il Difensore ha almeno una mossa che lo porterá a vincere.

Per dimostrare che i processi **non sono Bisimili**, bisogna mostrare che *l'Attaccante ha una strategia vincente*, cioé che, in ogni configurazione, l'Attaccante é in grado di scegliere su quale processo operare e con quale azione, in modo che **per ogni** successiva mossa del Difensore, l'Attaccante ha almeno una mossa che lo porterá a vincere.

Esempio 1 $\quad r_1 = a.(b.Nil + \tau.c.Nil) \quad k_1 = a.(b.Nil + \tau.c.Nil) + a.c.Nil$

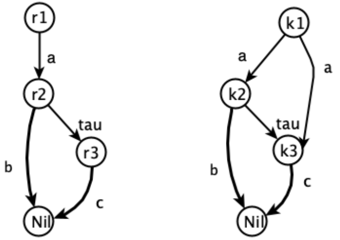


$r_1 \approx^{Bis} k_1$

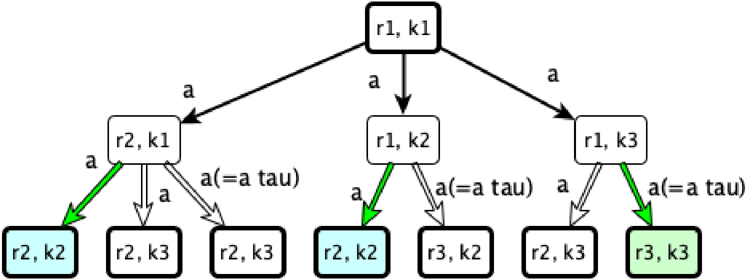
Il Difensore ha infatti una strategia vincente:

- - Attaccante: $r_1 \rightarrow^a r_2$,
  - Difensore: (3 possibilitá, tra cui) $k_1 \Rightarrow^a k_2$ e vince (r_2 iso k_2)
- - Attaccante: $k_1 \rightarrow^a k_2$,
  - Difensore: (2 possibilitá, tra cui) $r_1 \Rightarrow^a r_2$ e vince (r_2 iso k_2)
- - Attaccante: $k_1 \rightarrow^a k_3$,
  - Difensore: (2 possibilitá, tra cui) $r_1 \Rightarrow^a r_3$ e vince (r_3 iso k_3)

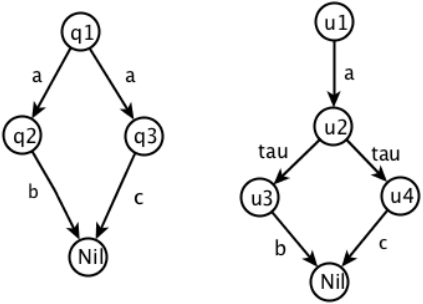
Es.1 l'albero di tutte le partite del gioco $G(r_1, k_1)$



$$\mathcal{R} = \{(r_1, k_1), (r_2, k_2), (r_3, k_3), (Nil, Nil)\}$$



Esempio 2 $\quad q_1 = a.b.Nil + a.c.Nil \quad u_1 = a.(\tau.b.Nil + \tau.c.Nil)$



$$q_1 \not\approx^{Bis} u_1$$

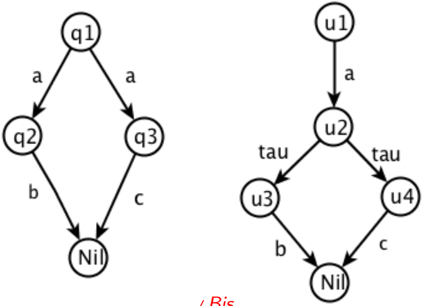
L'Attaccante ha infatti una strategia vincente:

- Attaccante: $u_1 \rightarrow^a u_2$,

- Difensore: 2 possibilitá:

- $q_1 \Rightarrow^a q_2$ - configurazione (q_2, u_2):
  * Attaccante $u_2 \rightarrow^\tau u_4$
  * Difensore : $q_2 \Rightarrow^\tau q_2$ - configurazione (q_2, u_4):
    Difensore perde $(q_2 \not\approx^{Bis} u_4)$

Esempio 2 $\quad q_1 = a.b.Nil + a.c.Nil \quad u_1 = a.(\tau.b.Nil + \tau.c.Nil)$



$q_1 \not\approx^{Bis} u_1$

L'Attaccante ha infatti una strategia vincente:

- Attaccante: $u_1 \rightarrow^a u_2$,
- Difensore: 2 possibilitá:
  - $q_1 \Rightarrow^a q_2$ - .... Difensore perde
  - $q_1 \Rightarrow^a q_3$ - configurazione (q_3, u_2) (in modo analogo al caso precedente)
    - * Attaccante $u_2 \rightarrow^\tau u_3$
    - * Difensore : $q_3 \Rightarrow^\tau q_3$ - configurazione (q_3, u_3):
      Difensore perde $(q_3 \not\approx^{Bis} u_3)$

Es.2 l'albero di tutte le partite del gioco $G(q_1, u_1)$