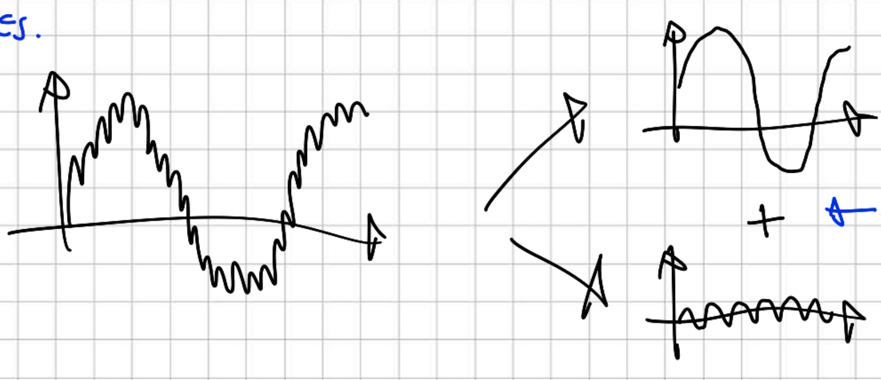
FOURIER ANALYSIS

→ DECOMPOSIZIONE DEL SEGNALE IN COSTITUENTI SINUSOIDALI DI FREQUENZE DIFFERENTI

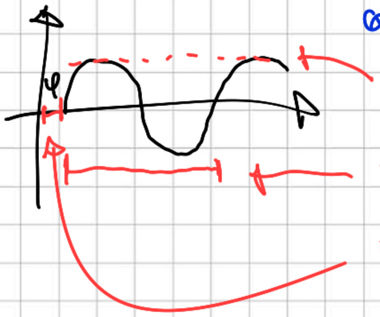
ES.



+ ← SOMMA DELLE DUE

PERCHÉ ALCUNI PROBLEMI SONO PIÙ SEMPLICI DA RISOLVERE NEL <u>DOMINIO DELLE FREQUENZE</u>

PROPRIETÀ



QUANTI PARAMETRI ABBIAMO BISOGNO PER DESCRIVERLA?

AMPLITUDE: VALORE MASSIMO DI AMPIEZZA CHE RAGGIUNGE

PERIOD: OGNI QUANTO IL SEGNALE SI RIPETE

PHASE: SFASAMENTO, SHIFT

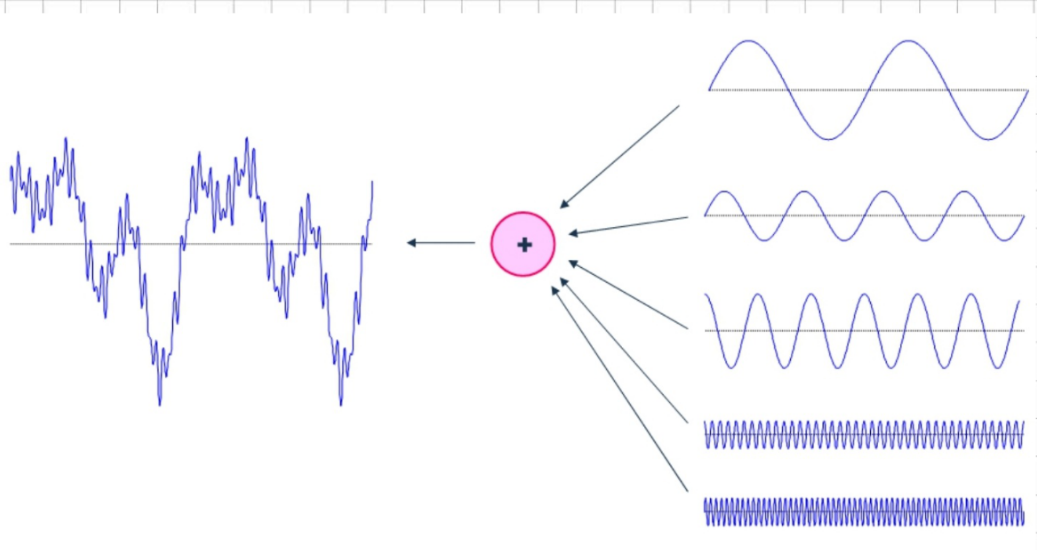
FUNZIONE ARMONICA:

$$y = \overset{\text{AMPIEZZA}}{A} \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} x + \overset{\text{FASE}}{\varphi}\right)$$

PULSAZIONE → $\omega x + \varphi$

QUEL TERMINE PUÒ ESSERE SOSTITUITO

SI POTREBBE ANCHE USARE COSIN, CON UNA FASE φ DIVERSA



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{N} kx\right)} + b_k \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{N} kx\right)} \right]$$

COEFFICIENTI FUNZIONI

N = PERIODO

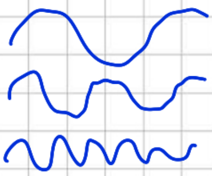
IL TEOREMA DICE CHE LA FUNZIONE PUÓ ESSERE SCOMPOSTA IN SINUSOIDI

PERÓ VOGLIAMO SAPERE COME TROVARE QUESTI COEFFICIENTI

FORSE? P AUMENTA QUINDI LA PRIMA:

LA SECONDA:

LA TERZA:



...

INTEGRALE = AREA SOTTO ALLA CURVA

$$a_k = \frac{2}{N} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) \cdot \cos(2\pi f_0 k x)\, dx \quad \text{con } f_0 = \frac{1}{N}$$

COEFFICIENTE → PERIODO

SEGNALE ORIGINALE

FONDAMENTAL FREQUENCY

$$b_k = \frac{2}{N} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) \cdot \sin(2\pi f_0 k x)\, dx$$

Recap NUMERI COMPLESSI

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

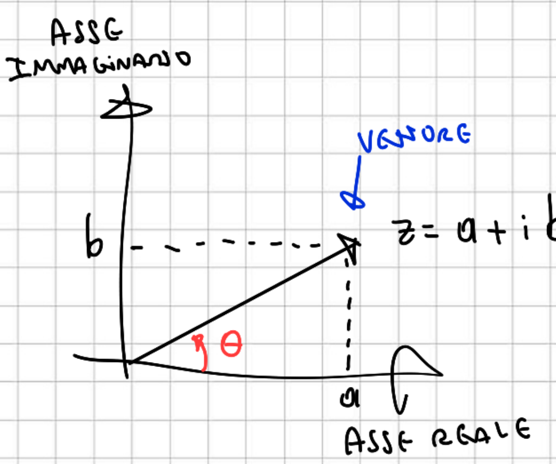
$x^2=0 \Rightarrow x=0$

$x^2=-1 \Rightarrow x=i$ ← IDENTITÀ IMMAGINARIA $i^2=-1$

UNA PARTE REALE E UNA COMPLESSA

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

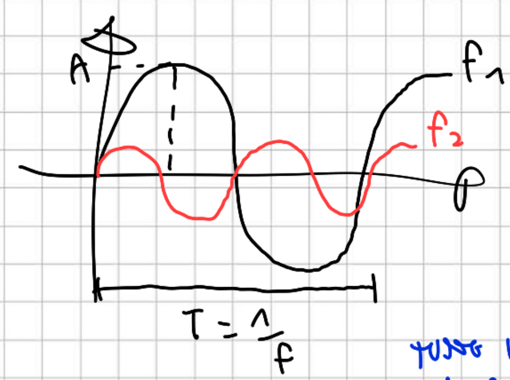
IN GENERALE UN NUMERO COMPLESSO $z \in \mathbb{C}$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME $z = a + ib$

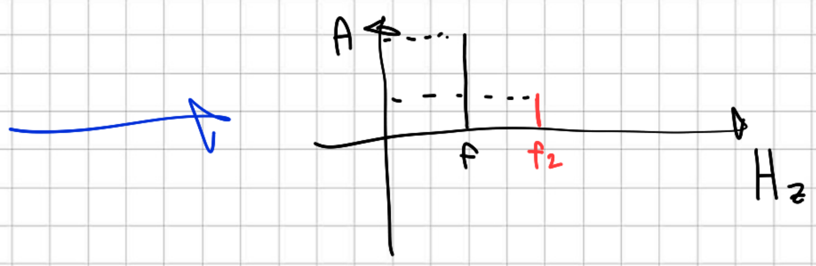


LUNGHEZZA VETTORE → $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho$ ← "RO"

ANGOLO VETTORE → $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

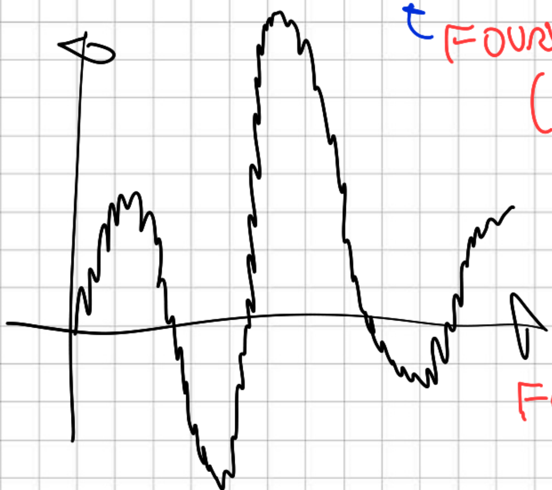
$z = \rho e^{i\theta}$ ← "POLAR FORM" DI $z = a + ib$





TUTTE LE SINUSOIDI POSSONO ESSERE RAPPRESENTATE COME UNA BARRA NEL GRAFICO DELLE FREQUENZE

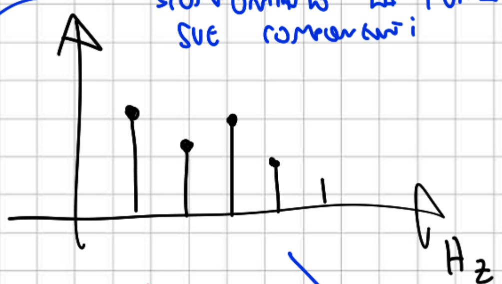
OGNI FUNZIONE $f(x)$ ANCHE SE NON PERIODICA (PURCHÉ ABBIA AREA FINITA) PUÒ ESSERE ESPRESSA COME INTEGRALE DI FUNZIONI COMPLESSE OPPORTUNAMENTE PESATE



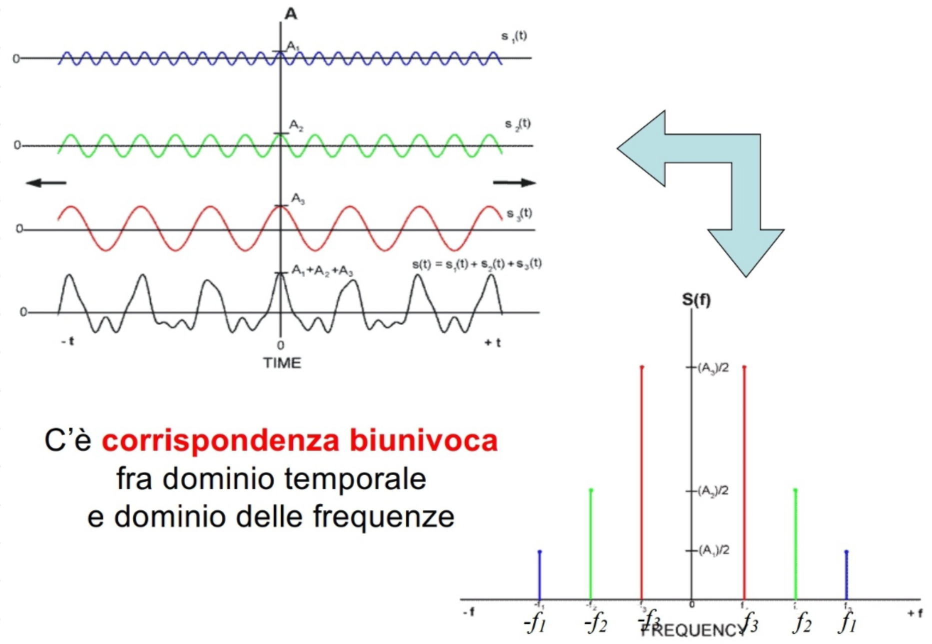
FOURIER TRANSFORM (ANALYSIS) $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ FOURIER ANTI-TRANSFORM (SYNTESIS)

USANDO L'ANALISI DI FOURIER SCOMPONIAMO LA FUNZIONE NELLE SUE COMPONENTI



DAL DOMINIO DELLE FREQUENZE POSSIAMO ANCHE RECUPERARE LA FUNZIONE ORIGINALE



C'È UNA SOLA RAPPRESENTAZIONE POSSIBILE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

DI SOLITO IL PLOT È ANCHE NEGATIVO, DIVIDENDO L'AMPIEZZA IN 2 TRA LA FREQUENZA POSITIVA E QUELLA NEGATIVA

FOURIER TRANSFORM

COMPLESSO → IL RISULTATO SARÀ COMPLESSO

FREQUENZA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i 2\pi u x} \, dx$$

INTEGRALE SULL'INTERO SPAZIO TEMPORALE

FOURIER ANTI-TRANSFORM

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{i 2\pi u x} \, du$$

APPLICAZIONE DELLA TRASFORMATA ALLA FUNZIONE ORIGINALE

$$F(u) = \mathbb{F}[f(x)]$$

TRASFORMATA INVERSA

$$f(x) = \mathbb{F}^{-1}[F(u)]$$

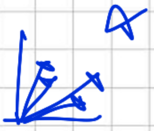
NO LOSS NELLE TRASFORMAZIONI

PARTE REALE   PARTE IMMAGINARIA

$$F(u) = \mathcal{F}[f(x)] = Re(u) + i\, Im(u) = |F(u)| \cdot e^{i\phi(u)}$$

CONTIENE LA MAGGIOR PARTE DELL'INFORMAZIONE

SPECTRUM : $|F(u)| = \sqrt{Re^2(u) + Im^2(u)}$



PHASE : $\phi = \arctan \dfrac{Im(u)}{Re(u)}$

CONTIENE INFORMAZIONI NON STRUTTURATE

→ ci dice l'offset per ciascuna sinusoide

TRASFORMATA DI FOURIER 2D

FIN ORA LE FUNZIONI SONO STATE SEGNALI SINGOLI COME AUDIO, ORA ESPANDIAMO IL CONCETTO VERSO SEGNALI MULTIPLI COME LE IMMAGINI

SIGNAL $f(x,y)$ ← 2 DIMENSIONI

TRANSFORM $= F(u,v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$

ANTI-TRANSFORM $= f(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) \cdot e^{i2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$

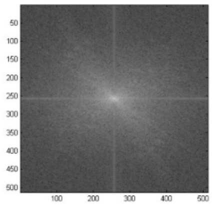
SPECTRUM : $|F(u,v)| = \sqrt{Re^2(u,v) + Im^2(u,v)}$

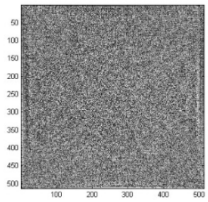
FASE : $\phi = \arctan \dfrac{Im(u,v)}{Re(u,v)}$

ANALISI-SINTESI

$|F(u,v)|$ $\qquad$ $\phi(u,v)$

DFT





$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$$

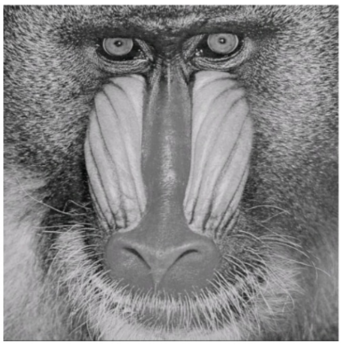
DFT^{-1}

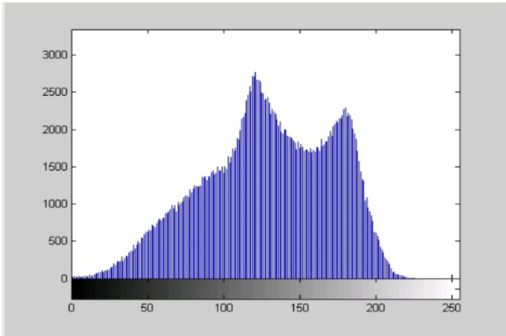
ISTOGRAMMA

L'istogramma di un'immagine a livelli di grigio è una funzione discreta

$$h(r_k) = n_k$$

ove r_k è il livello di grigio k-esimo, n_k è il numero di pixel nell'immagine con intensità r_k

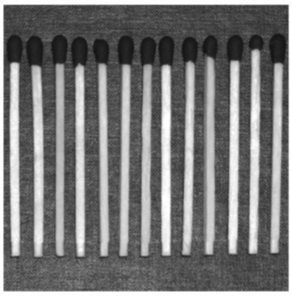




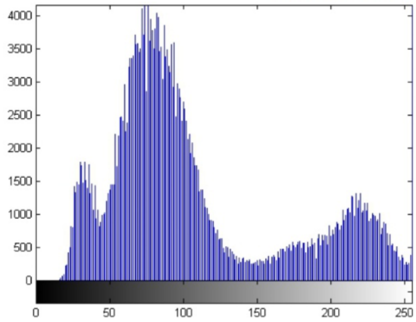
L'asse orizzontale X rappresenta i valori dei grigi. L'asse verticale Y rappresenta il numero di pixel per ogni livello.

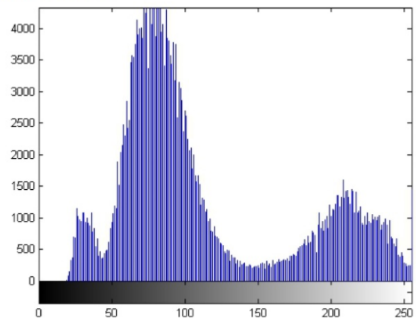
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D

VOGLIAMO CAPIRE SE I FIAMMIFERI NELL'IMMAGINE SONO VERTICALI

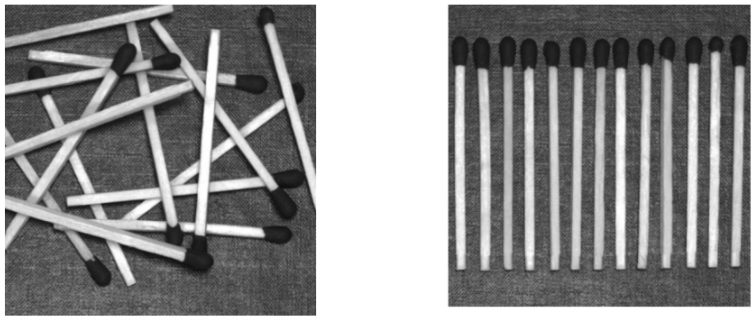


ANALISI ISTOGRAMMA



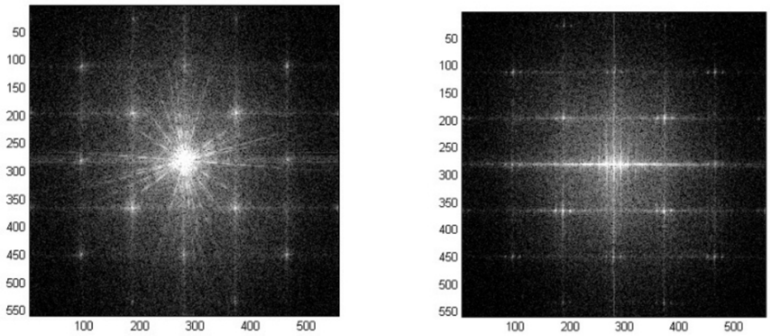


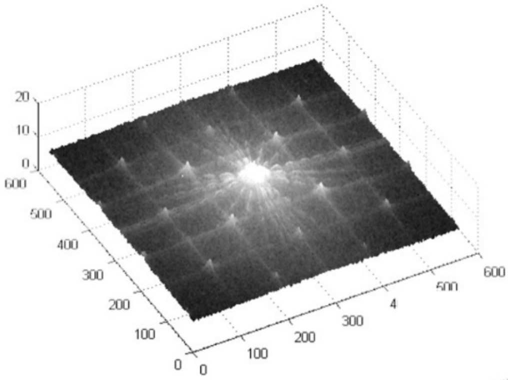
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D

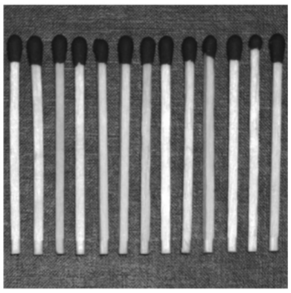


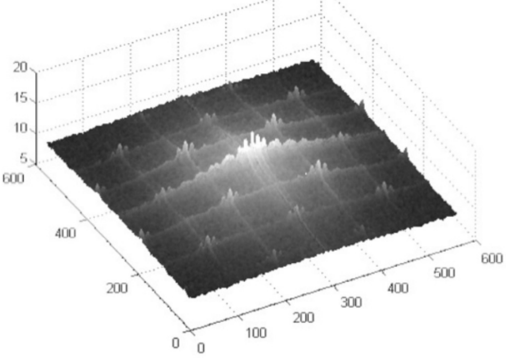
NEL MODULO DELLA TRASFORMATA A SINISTRA POSSO VEDERE DELLE LINEE DIAGONALI PERCHÉ NELL'IMMAGINE CI SONO DEI BORDI E ANGOLI OBLIQUI, NON VERTICALI

MODULO DELLA TRASFORMATA

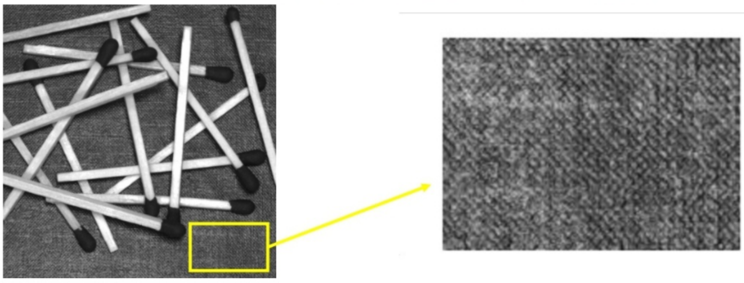








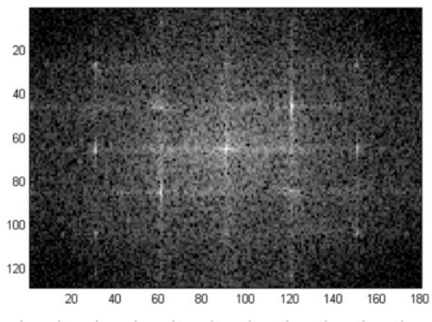
TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D



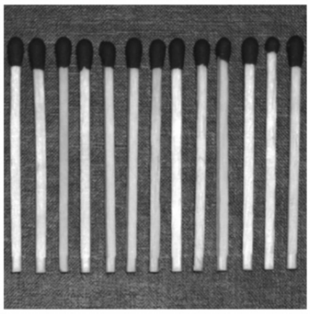
TROVA IL PATTERN DEL BACKGROUND CHE È AD ALTA FREQUENZA

SI RIPETE REGOLARMENTE

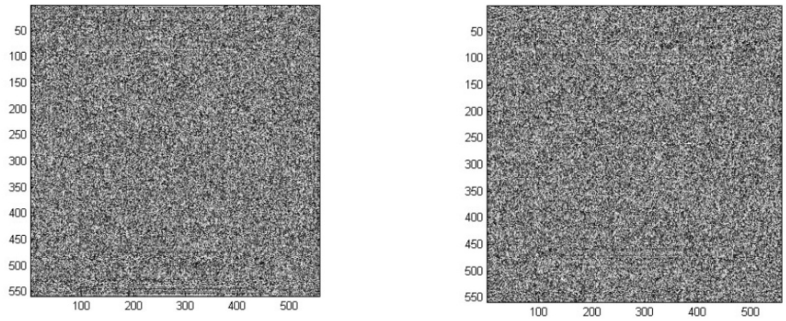
MODULO DELLA TRASFORMATA



TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA 2D



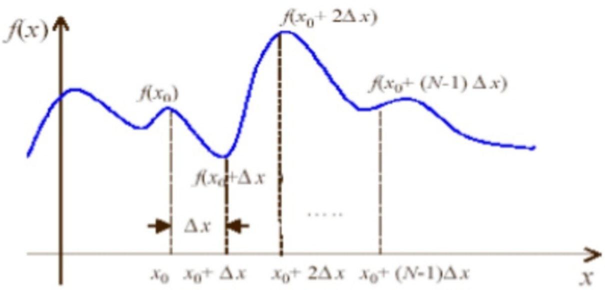
FASE DELLA TRASFORMATA



EXTRA CHE C'ERA NELLE SLIDES MA NON HA SPIEGATO:

TRASFORMATA DI FOURIER (DTFT)

di una funzione discreta (*campionata*) e limitata spazialmente

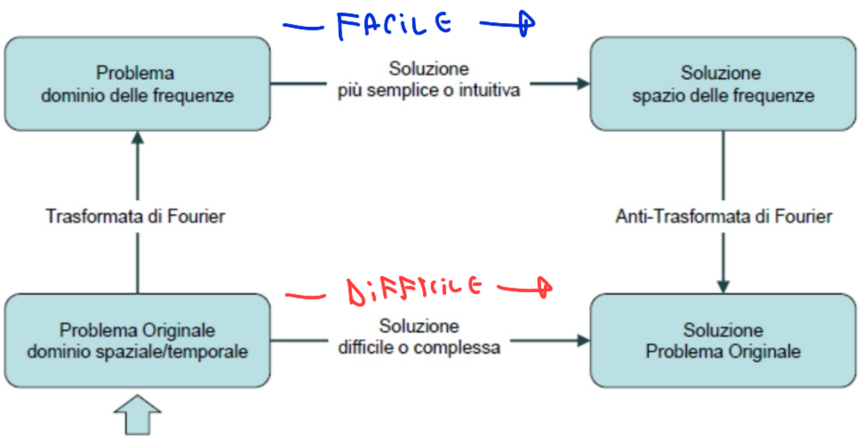


$$\boxed{F(u)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j2\pi u\frac{1}{N}i}}$$

CONCETTO FONDAMENTALE
↓
PER MOLTI PROBLEMI È PIÙ FACILE TROVARE LA SOLUZIONE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE E POI APPLICARE L'ANTI TRASFORMATA DI FOURIER

Trasformata di Fourier

- Dominio Spaziale/Temporale vs. Frequenze

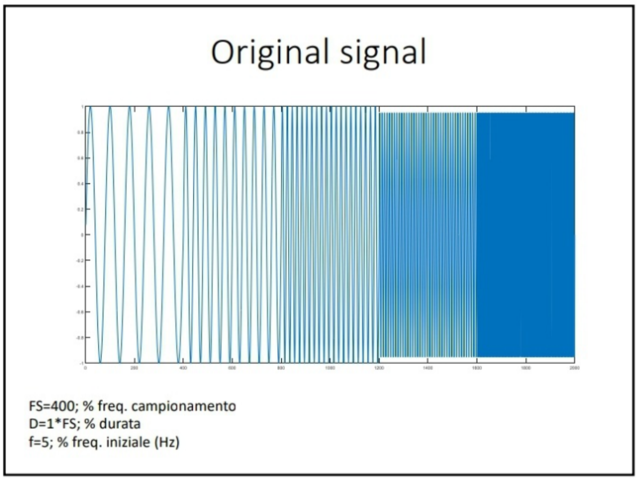


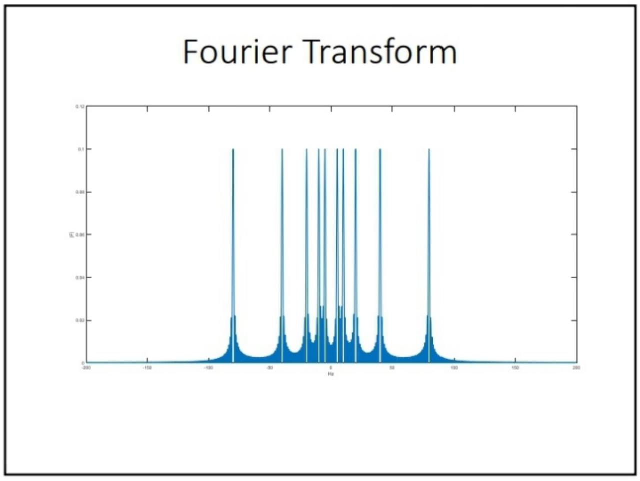
Filtri 0-1

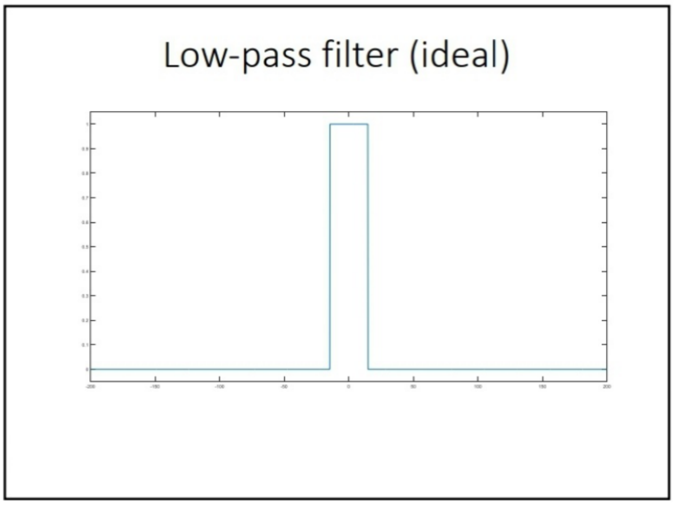
Per eliminare delle caratteristiche non volute da un segnale, basta applicare un filtro, ovvero moltiplicare per un segnale che é interamente 1, tranne nel punto della feature che vogliamo eliminare, dove il filtro vale 0.

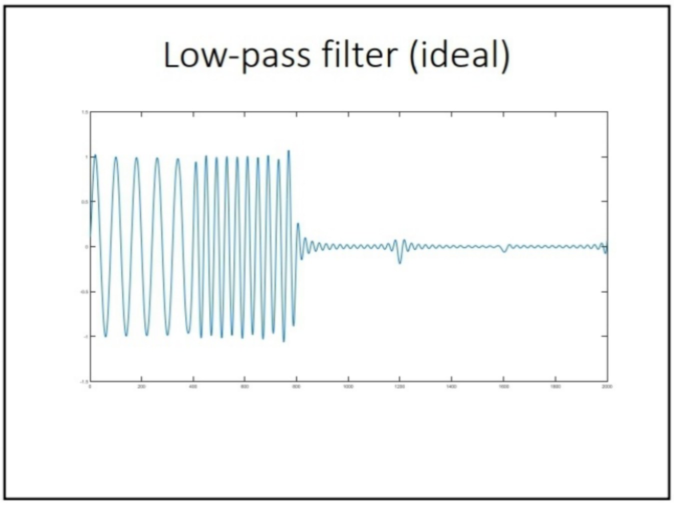
Utilizzare questo tipo di filtri porta ad avere residui all'interno dell'immagine filtrata (le "ondine")

Filtro passa-basso





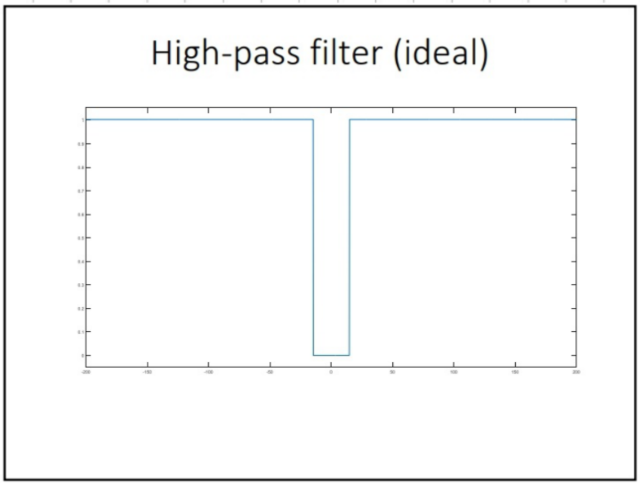




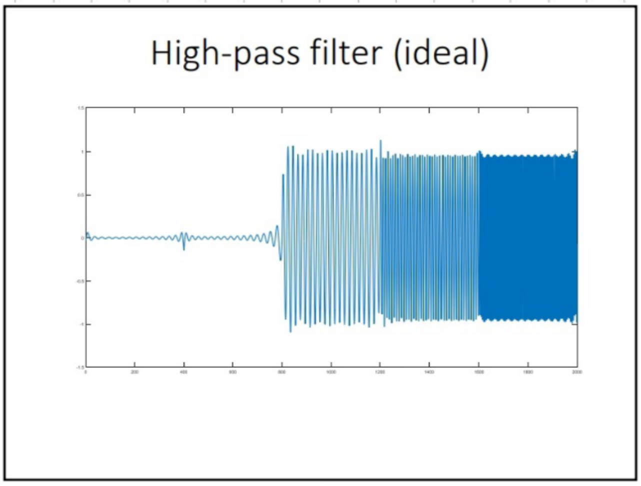
Mantiene solo le 2 frequenze più basse nell'esempio

Sfoca l'immagine

FILTRO PASSA-ALTO



5



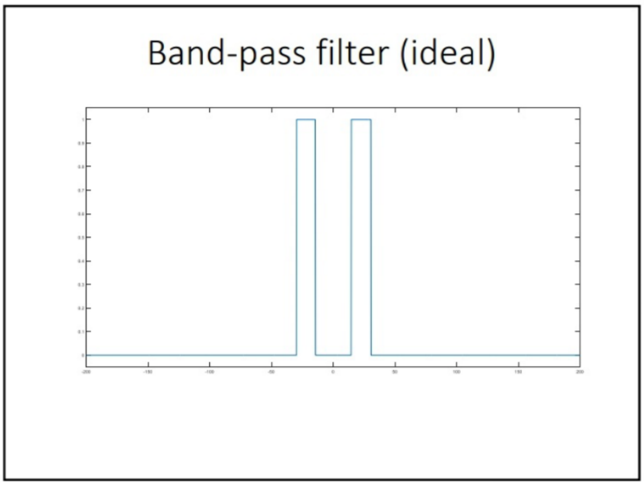
6

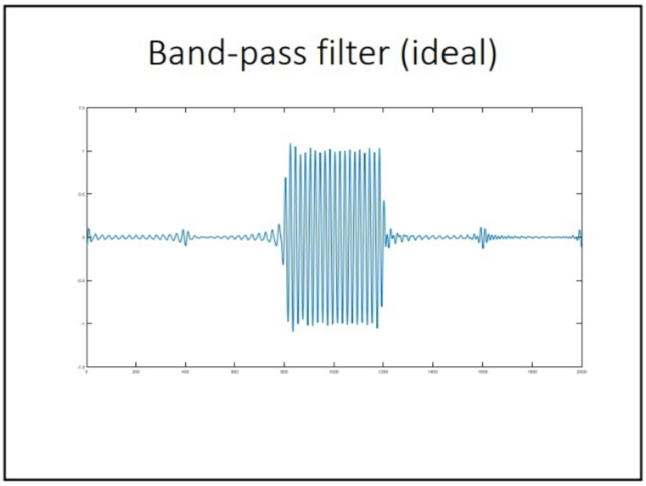
NELL'ESEMPIO MANTIENE SOLO LE 3 FREQUENZE PIÙ ALTE

CONSERVA I DETTAGLI DOVE SI VERIFICANO LE TRANSIZIONI DI NITIDEZZA DEL COLORE

MANTIENE QUINDI I BORDI E SOPPRIME IL RESTO DELL'IMMAGINE

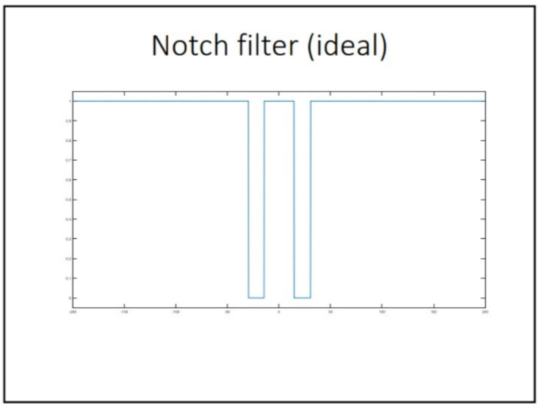
FILTRO PASSA-BANDA

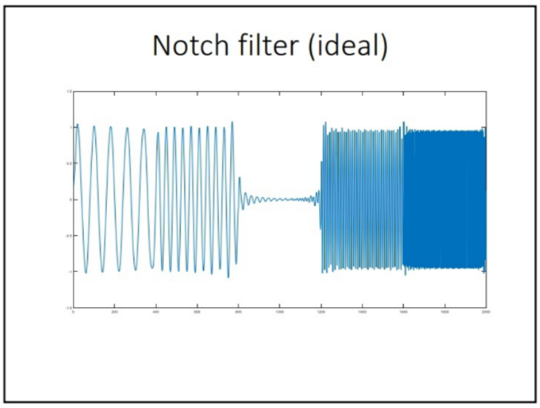




NELL'ESEMPIO TOGLIAMO LE PRIME 2 COMPONENTI E LE ULTIME 2, MANTENENDO SOLO LA TERZA

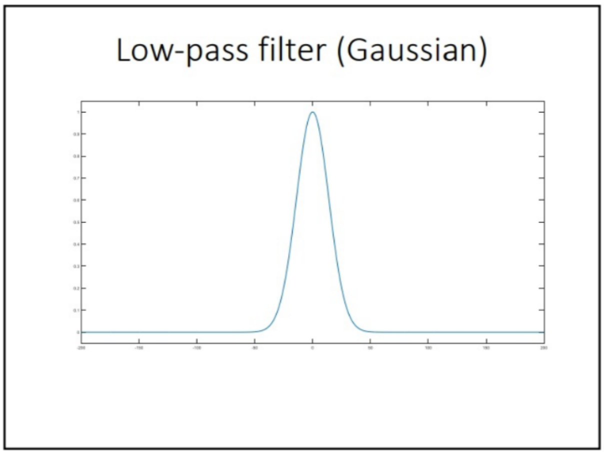
FILTRO DI NOTCH

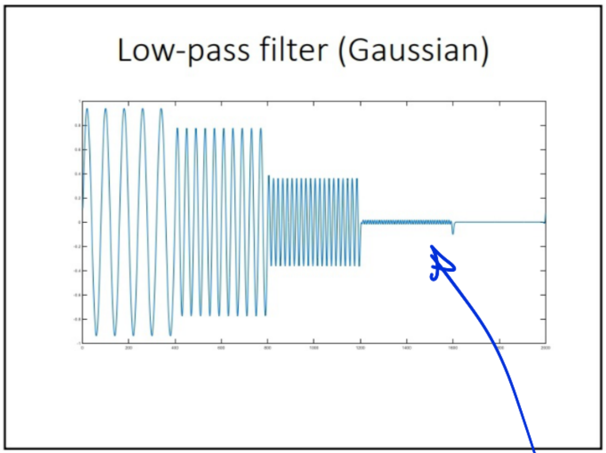




OPPOSTO DEL FILTRO PASSA BANDA, VIENE ELIMINATA SOLO LA TERZA COMPONENTE

Filtri gaussiani



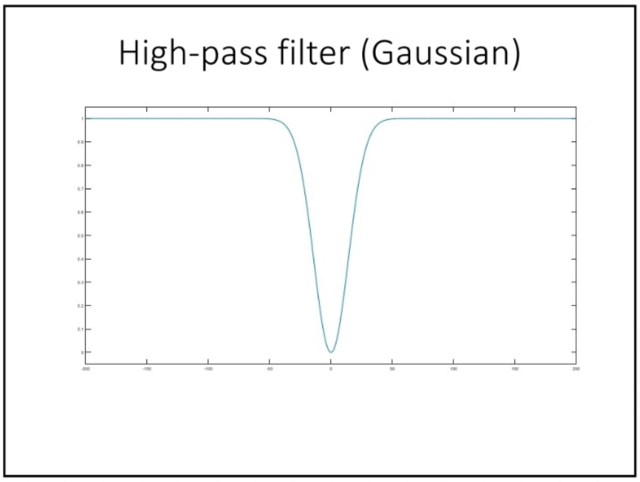


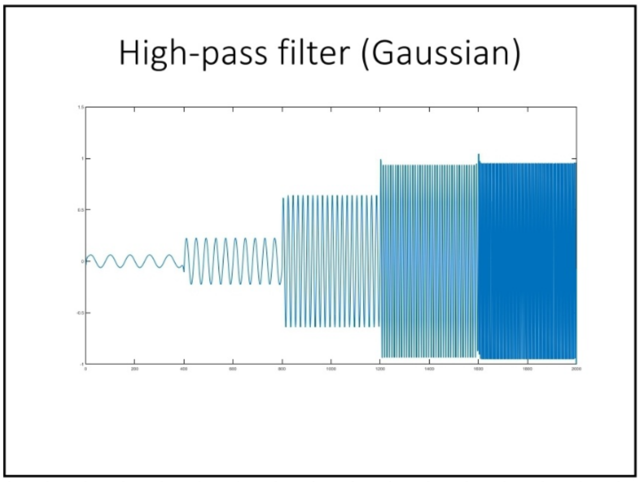
Gaussiana al posto dell'onda quadrata

Le componenti + sono ridotte progressivamente

c'è pochissimo noise

Usare una gaussiana porta ad avere molto meno rumore nell'immagine ricostruita ma è computazionalmente più difficile e si perde del contorno, perché non ho più i tagli netti





Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

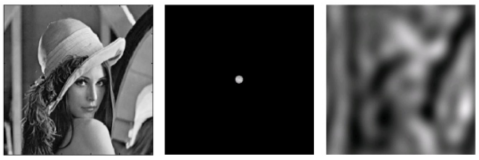
$$P(u) = |F(u)|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2$$ Potenza spettrale

- Le circonferenze (dal centro) racchiudono il 90, 93, 95, 99, 99.5% della potenza spettrale totale

20

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

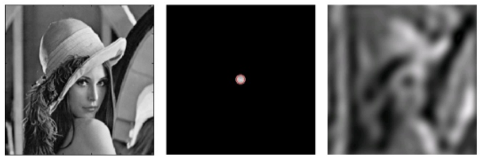


Originale Spettro (90%) Ricostruita

21

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

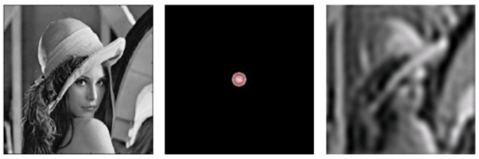


Originale Spettro (93%) Ricostruita

22

Trasformata di Fourier: Immagini

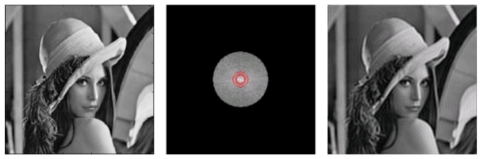
- Manipolazione dello spettro



Originale Spettro (95%) Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

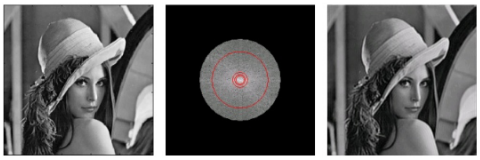
- Manipolazione dello spettro



Originale Spettro (99%) Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

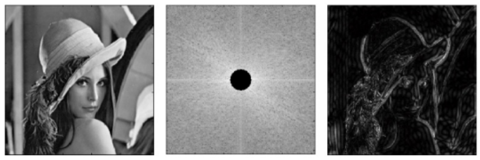


Originale Spettro (99.5%) Ricostruita

25

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro

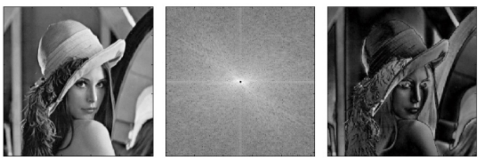


Originale Spettro Ricostruita

26

Trasformata di Fourier: Immagini

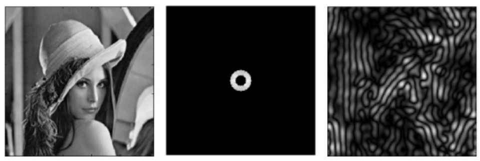
- Manipolazione dello spettro



Originale Spettro Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

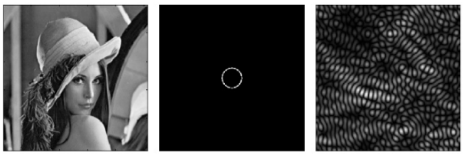
- Manipolazione dello spettro



Originale Spettro Ricostruita

Trasformata di Fourier: Immagini

- Manipolazione dello spettro



Originale Spettro Ricostruita

29

Trasformata di Fourier: Immagini

- Ringing → ARTIFACTS

STIAMO USANDO FILTRI IDEALI E NON GAUSSIANI

30

Filtri ideali