

### 1.1.1 Involuppo complesso in presenza di rumore

Le componenti in fase e in quadratura sono influenzate dal rumore di misura, modellabile con una componente di rumore additivo gaussiano bianco sui due canali (sinonimo di segnali).

Per rendere realistico il modello di ricezione del segnale reale  $s(t)$ , ai termini in fase e quadratura deterministici,  $s(t) = s_r(t) + js_i(t)$ , si somma una componente aleatoria di rumore, per simulare il rumore termico (per esempio rumore gaussiano a valor medio nullo e con varianza  $\sigma_n^2$ , incorrelato e quindi bianco in frequenza). Il modello di segnale più rumore è di tipo additivo.

Pertanto il segnale complesso  $s(t)$  risulta essere:

$$s(t) = (s_r(t) + n_r(t)) + j(s_i(t) + n_i(t))$$

L'ampiezza del segnale  $|s(t)|$ , o involuppo, calcolata come modulo del segnale complesso è data da:

$$|s(t)| = \sqrt{[s_r(t) + n_r(t)]^2 + [s_i(t) + n_i(t)]^2}$$

Esplicitando i termini sotto radice e raccogliendo le componenti del segnale si ottiene:

$$|s(t)| = \sqrt{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]} \sqrt{1 + \frac{2s_r(t)n_r(t) + 2s_i(t)n_i(t)}{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]} + \frac{n_r(t)^2 + n_i(t)^2}{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]}}$$

#### 1.1.1 Caso di SNR elevato.

Nel caso di SNR elevato, il termine  $\frac{n_r(t)^2 + n_i(t)^2}{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]}$  nella precedente formula tende a zero. Quindi la formula per il calcolo del modulo del segnale complesso, può essere ulteriormente semplificata:

$$|s(t)| = x(t) \sqrt{1 + \frac{n_z(t)}{x(t)^2}}$$

dove:  $x(t) = \sqrt{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]}$ ,  $n_z(t) = 2s_r(t)n_r(t) + 2s_i(t)n_i(t)$ . Quest'ultimo termine è a tutti gli effetti un termine di rumore. Infatti,  $n_r(t)$  e  $n_i(t)$  sono per ipotesi le due componenti di rumore, mentre i termini moltiplicativi ( $2s_r(t)$  e  $2s_i(t)$  rispettivamente) rappresentano le componenti deterministiche del segnale misurato e quindi, fissato un istante temporale, il loro valore (incognito) non varia se si procede con prove ripetute nelle medesime condizioni.

Ciò premesso, si può applicare lo sviluppo in serie della radice quadrata concentrandoci sul primo termine dello sviluppo, per ottenere la seguente relazione semplificata:

$$|s(t)| = x(t) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{n_z(t)}{x(t)^2} \right] = x(t) + \frac{1}{2} \frac{n_z(t)}{x(t)}$$

Pertanto in presenza di SNR elevato il modello del segnale rivelato, calcolato mediante le componenti in fase e quadratura del segnale, è ancora additivo.

Dato che la componente additiva include un termine aleatorio di rumore, si comprende perché, effettuando la media su un numero elevato di realizzazioni, sia possibile ricavare il valore vero del segnale. Notare che la normalizzazione per il segnale deterministico, rappresentata dal valore che assume il segnale in ciascun pixel dell'immagine, non modifica l'aleatorietà in quanto nelle prove ripetute si comporta come un coefficiente moltiplicativo costante.

Quindi nelle ipotesi di elevato SNR, il rumore non costituisce un problema in quanto può essere rimosso senza deteriorare il segnale, con una semplice operazione di media.

### 1.1.2 Caso di SNR basso

Quando l'SNR è basso, cioè quando la potenza associata al segnale è confrontabile con la varianza del rumore, le semplificazioni dei termini quadratici di rumore  $\frac{n_r(t)^2 + n_i(t)^2}{[s_r(t)^2 + s_i(t)^2]}$  all'interno della radice quadrata nell'espressione del modulo del segnale, non sono più applicabili e il modello di segnale e rumore non è più additivo.

Quindi i contributi dei termini quadratici di rumore si sommano al segnale producendo un termine di polarizzazione che modifica il valore vero dell'involuppo del segnale.

Pertanto l'involuppo non rappresenta solo il risultato dell'interazione tra sorgente e tessuto, ma risente anche del contributo del rumore.

### 1.1.3 Proprietà statistiche dell'involuppo complesso

Per analizzare in modo statistico il comportamento del rumore nel processo di rivelazione dell'involuppo del segnale si può fare ricorso alle proprietà di seguito richiamate.

Si rammenta che l'operazione di estrazione dell'involuppo di un segnale si effettua calcolando la radice quadrata della somma quadratica di due variabili gaussiane indipendenti. Date due variabili gaussiane indipendenti a valor medio nullo,  $X \approx N(0, \sigma^2)$  e  $Y \approx N(0, \sigma^2)$ , l'ampiezza ottenuta mediante l'operazione di rivelazione di involuppo  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  segue la distribuzione di Rayleigh la cui legge è data da:

$$p(R/\sigma) = \frac{R}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

Al variare del parametro  $\sigma^2$  si ottengono le curve riportate in Fig. 17a. Dato che le variabili gaussiane rappresentano il rumore di misura, possiamo concludere che il rumore gaussiano dopo l'operazione di rivelazione di involuppo assume una distribuzione di Rayleigh.

Quando invece le due variabili gaussiane indipendenti sono a valor medio diverso da zero,  $X \approx N(\nu, \sigma^2)$  e  $Y \approx N(\nu, \sigma^2)$ , l'ampiezza  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  segue la distribuzione di Rice descritta dalla seguente legge:

$$p(R/\nu, \sigma) = \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2 + \nu^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{R\nu}{\sigma^2}\right)$$

Si può facilmente verificare che quando  $v = 0$ , la distribuzione di Rice si riduce a quella di Rayleigh, mentre per  $v$  elevato, la distribuzione di Rice tende alla distribuzione di Gauss (Fig. 17b).

L'assunzione di variabile aleatoria a valor medio diverso da zero si applica ad un modello di segnale più rumore del tipo:  $[s_r(t) + n_r(t)]$  e  $[s_i(t) + n_i(t)]$ , dove la componente di rumore si suppone distribuita in modo gaussiano a valore medio nullo, mentre il valore medio diverso da zero è proprio la parte deterministica  $s_r(t)$  e  $s_i(t)$  che contiene l'informazione vera dell'immagine.

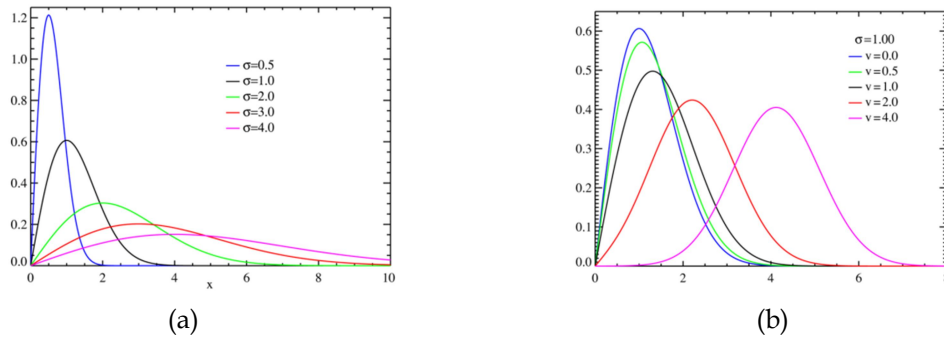


Fig. 17

Pertanto, nella rivelazione di inviluppo la variabile ampiezza  $|s(t)|$  seguirà una o l'altra legge di distribuzione sulla base dell'ampiezza delle componenti in fase e quadratura. Nel caso in cui i termini  $s_r(t)$  e  $s_i(t)$  sono apprezzabilmente maggiori di  $n_r(t)$  e  $n_i(t)$ , allora ci si aspetterà una distribuzione di Rice tendente al modello gaussiano per il segnale rivelato; viceversa per bassi valori di  $s_r(t)$  e  $s_i(t)$  la distribuzione dell'inviluppo seguirà la legge di Rayleigh.

**Quindi per valori di SNR elevati il modello di segnale + rumore è di tipo additivo e segue la distribuzione di gauss. Inoltre l'operazione di media aritmetica riduce il rumore e il valore medio tende al valore vero del segnale.**

Come regola mnemonica, basata su evidenze sperimentali, si assume che quando l'SNR è sotto il valore 3 - 5 ( $\cong 5$  in dB di potenza), la distribuzione di Rice tenda ad approssimare quella di Rayleigh, mentre per SNR maggiori, la distribuzione di Rice tenda ad approssimare la distribuzione di Gauss.

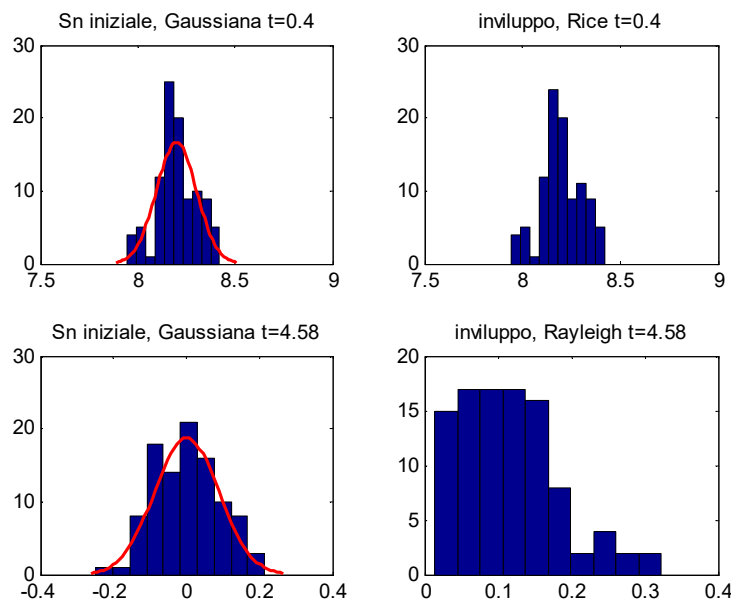
E' utile definire la seguente relazione per l'SNR stimato su un'immagine di inviluppo: l'ampiezza dell'inviluppo  $R$  e la deviazione standard  $\sigma_{|s|}$  del rumore calcolati nell'immagine di inviluppo, nell'ipotesi che sia valido il modello gaussiano (SNR elevato), vengono corretti per un fattore costante (0.5264) nel modo seguente:

$$SNR \approx \frac{R}{\sigma_{|s|} \cdot 0.5264}$$

dove:  $\sigma_{|s|} \cdot 0.5264 = \sigma_n$  ; dove  $\sigma_n$  è la deviazione standard del rumore di gauss.

#### 1.1.1.1.1 Esercitazione n. 1.5: inviluppo con rumore

- Generare un segnale a radiofrequenza smorzato con un'esponenziale decrescente (inviluppo) al quale viene sommato rumore gaussiano bianco. L'andamento esponenziale permette di definire diversi livelli di SNR. Per esempio nella parte dove il segnale esponenziale è più elevato, l'SNR sarà maggiore rispetto a quello che compete alla parte bassa. Generare un numero elevato di realizzazioni.
- Sul segnale a radiofrequenza individuare una colonna del processo in cui l'SNR è elevato e su tale colonna stimare l'istogramma: dovrebbe risultare un istogramma con distribuzione di Gauss il cui valore medio è sensibilmente diverso da zero.
- Sul segnale a radiofrequenza individuare un'altra colonna in cui l'SNR è basso e su tale colonna stimare l'istogramma: dovrebbe risultare un istogramma con distribuzione gaussiana il cui valore medio è pressochè nullo.
- Applicare la rivelazione dell'inviluppo e ripetere i punti precedenti: nella prima colonna ci aspettiamo un inviluppo che segue la legge di Rice, mentre nella seconda colonna la legge dovrebbe essere quella di Rayleigh.



## 1.1.2 Demodulazione di segnali doppler

### 1.1.4 Richiami di demodulazione in fase e quadratura

Nella demodulazione il segnale  $s(t)$  viene traslato a frequenze intermedie  $f_i = f_0 - f_1$  tramite un'operazione descritta nello schema di Fig. 8. Partendo da una frequenza  $f_0$ , la traslazione del segnale alle frequenze intermedie richiede una frequenza inferiore  $f_1$  rispetto alla portante in modo da calcolare  $f_i$ .

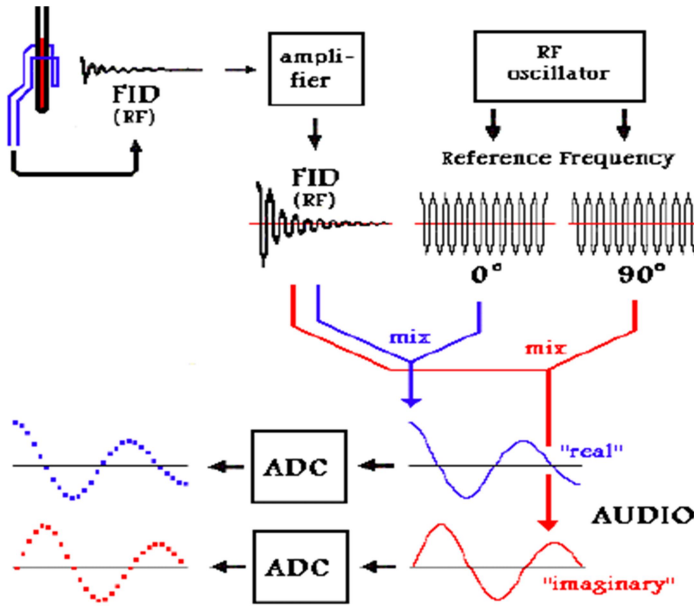


Fig. 8

Si parte dalla generazione di due oscillazioni alla medesima frequenza  $f_1$ , prossima ad  $f_0$ , ma sfasate tra loro di  $90^\circ$ . Le due oscillazioni sfasate di  $90^\circ$  sono le funzioni seno e coseno nella figura.

Il segnale  $s(t)$  a frequenza portante  $f_0$  viene diviso in due canali, di cui uno viene moltiplicato per la componente cosinusoidale e l'altro per la componente sinusoidale.

Per ciascun canale, dopo l'operazione di moltiplicazione si generano due componenti di cui una è la somma e l'altra è la differenza tra le componenti a frequenza  $f_0$  e  $f_1$  (vedi formule di Prostaferesi valide per ciascun canale:

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)); \quad \sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

La componente ottenuta dal prodotto del segnale per la funzione coseno è detta componente in fase (o componente reale  $s_r(t)$ ), mentre la componente ottenuta tramite il prodotto con il seno è detta componente in quadratura (o componente immaginaria  $s_i(t)$ ).

Si ottengono quindi due componenti a bassa frequenza del tipo:

$$s_r(t) = -\frac{1}{2}a(t)\cos(2\pi t_i t - \varphi)$$

$$s_i(t) = \frac{1}{2}a(t)\sin(2\pi t_i t - \varphi)$$

E' immediato verificare che, tramite l'operazione di modulo calcolato sulle componenti in fase e quadratura, si ricava l'involuppo complesso del segnale  $|s(t)|$  come segue:

$$|s(t)| = \sqrt{s_r(t)^2 + s_i(t)^2} = \frac{1}{2}a(t)$$

La condizione per applicare questo tipo di demodulazione è che la banda del segnale  $s(t)$  sia molto minore della frequenza portante. Tale condizione è rispettata nei sistemi di comunicazione wireless, come per esempio nei sistemi telemetrici nelle terapie intensive. Non viene invece rispettata nella demodulazione dei segnali ecografici, per i quali abbiamo introdotto il filtro di Hilbert per calcolare la componente in quadratura e quindi l'involuppo complesso.

### 1.1.5 Esempio di demodulazione di segnali doppler

Negli apparecchi doppler a ultrasuoni viene applicata la rivelazione basata sulla traslazione della frequenza portante verso frequenze intermedie utilizzando la sola componente in fase. Infatti, nei sistemi doppler non siamo interessati al calcolo dell'involuppo del segnale a rf, bensì alla misura dello shift in frequenza e quindi al segnale doppler. Questo è il motivo per cui non si usa la componente in quadratura e non sono così stringenti le condizioni di banda richieste invece per calcolare l'involuppo (vedi Fig. 47).

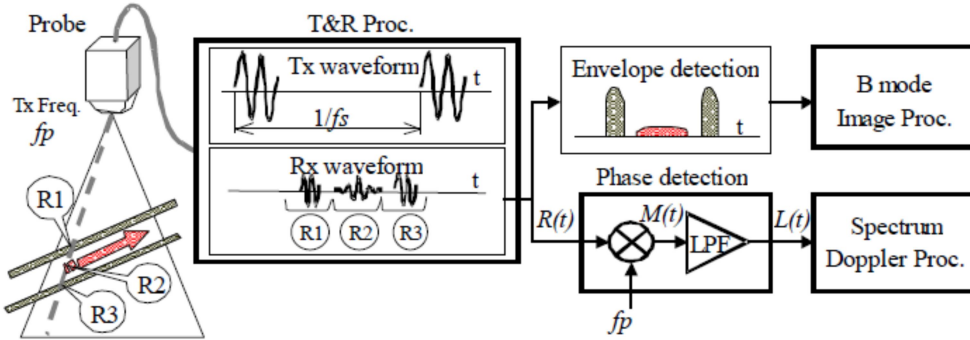


Fig. 47

Un'ulteriore semplificazione valida per i sistemi doppler è che non è necessario generare una oscillazione a frequenza prossima alla frequenza portante per creare la componente a frequenza intermedia. Ciò è possibile in quanto il segnale di ritorno, per effetto del movimento del bersaglio, ha già frequenza diversa da quella trasmessa, la quale funziona da frequenza intermedia.

#### Esempio

The transmitted signal is of the form

$$x_t(t) = \xi_t \cos(\omega_s t)$$

The corresponding received signal from a single target will be

$$x_r(t) = \xi_r \cos([\omega_s + \omega_d]t + \phi),$$

where  $\phi$  - phase term dependent on the distance to the target (rad),

$$\omega_s = 2\pi f_s \text{ (rad/s),}$$

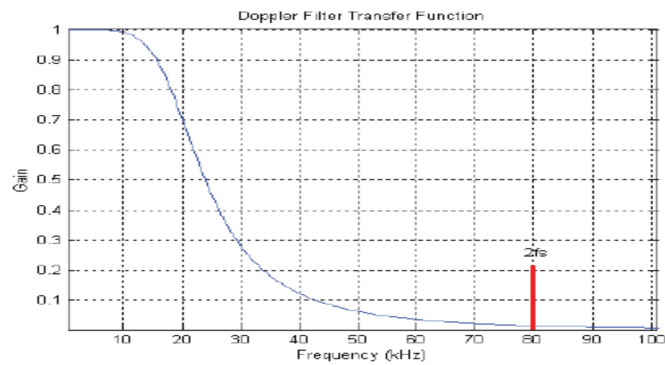
$$\omega_d = 2\pi f_d \text{ (rad/s).}$$

The two signals are mixed (multiplied together) to produce

$$\begin{aligned} x_t(t)x_r(t) &= \xi_t \xi_r \cos(\omega_s t) \cos([\omega_s + \omega_d]t + \phi) \\ &= \frac{\xi_t \xi_r}{2} \{ \cos(\omega_d t + \phi) + \cos([2\omega_s + \omega_d]t + \phi) \} \end{aligned}$$

Il segnale risultante dopo l'operazione di moltiplicazione e di filtraggio passa basso è proprio il seguente segnale doppler:

$$x_d(t) = \frac{\xi_t \xi_r}{2} \cos(\omega_d t + \phi) .$$



Esempio di filtro passa-basso

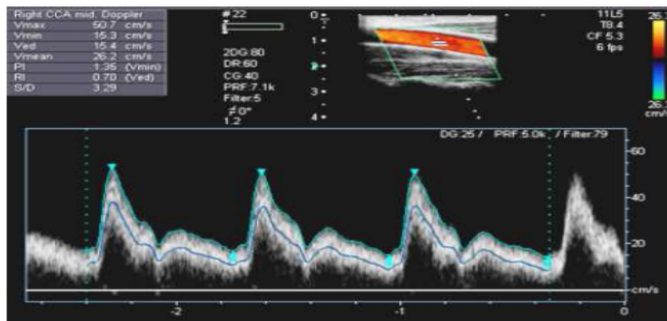


Fig. 48

In Fig. 48 è riportato l'andamento della velocità (direttamente proporzionale alla frequenza) doppler nel tempo del sangue all'interno della carotide (in basso), mentre in alto è riportata la rappresentazione pittorica della velocità del sangue (le velocità sono espresse con il colore la cui scala è in alto a destra) sovrapposta ad un'immagine ecografica anatomica.