## Inviluppo del segnale a radiofrequenza

### Esempio di inviluppo di un segnale modulato in ampiezza

Per comprendere il significato dell’operazione di modulazione/demodulazione di un segnale, si ricorre ad un semplice modello di segnale modulato. Supponiamo di modellare il segnale a radiofrequenza ricevuto , nel modo seguente:



In generale esso è composto da un termine oscillante alla frequenza nominale del trasduttore f0, detto anche portante, da un termine di modulazione , che rappresenta l’informazione contenuta sul bersaglio, e da un termine di fase , che è proporzionale al ritardo tra il bersaglio e l’istante di ricezione del segnale. Per esempio  potrebbe rappresentare il ritardo tra il segnale in entrata ed uscita da un sistema lineare e tempo invariante: il segnale di uscita viene traslato temporalmente rispetto al segnale di ingresso.

In Fig. 6a è riportato un esempio di segnale a radiofrequenza (in alto) e dello stesso ritardato di un valore . Per esempio il segnale in alto potrebbe essere il segnale (sotto forma di onda che si propaga nel mezzo) emesso da un trasduttore ultrasonico, mentre quello in basso potrebbe essere il segnale ricevuto dopo aver interagito con un bersaglio. Nell’ipotesi di linearità del sistema (trasduttore + mezzo di propagazione), la fase è lineare con la frequenza e vale: , dove . Si ricordi che il segnale ha contenuto frequenziale di tipo passa banda.



Fig. 6a

L’inviluppo del segnale, ovvero la componente ottenuta dopo l’operazione di demodulazione che rappresenta l’informazione di interesse per studiare il comportamento del bersaglio, è descritto dal termine a(t) che è un segnale a frequenze molto minori del segnale a frequenza f0.



Fig. 6b

In Fig. 6b è riportato un esempio di come appare un segnale portante con sovrapposto l’inviluppo a(t).

### Schema a blocchi di un’apparecchiatura ecografica

In Fig. 13 è riportato lo schema a blocchi di un’apparecchiatura ecografica.



Fig. 13

Nello schema sopra il blocco denominato ‘Demodulator’ realizza l’operazione di demodulazione che estrae l’inviluppo dal segnale a radiofrequenza.

*Esempio di operazione di demodulazione*

Uno dei rivelatori di inviluppo utile a scopo didattico è quello di Fig. 14.

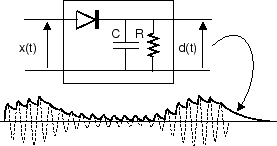


Fig. 14

Il principio di funzionamento è semplice: quando il segnale in ingresso è positivo il condensatore si carica inseguendo l’andamento dell’ingresso. Quando il segnale d’ingresso diventa inferiore alla tensione di uscita, il condensatore si scarica sulla resistenza, con una costante di tempo abbastanza grande rispetto al periodo del segnale d’ingresso (essendo elevato il valore di R), in modo da permettere la ricostruzione, seppur approssimata, dell’inviluppo.

### Inviluppo complesso

Il segnale a radiofrequenza rivelato dal trasduttore è reale (come tutti i segnali misurati) e convenzionalmente viene denominato componente in fase. Tale denominazione deriva dal linguaggio utilizzato nella rappresentazione del segnale sul piano complesso. Sappiamo che la rappresentazione complessa di un segnale si basa sulla conoscenza, oltre che della componente in fase, anche della componente in quadratura.

La componente in quadratura di un segnale reale è la componente che possiede tutte le componenti frequenziali che costituiscono il segnale reale, ma sfasate di 90°. Il nuovo segnale è ancora un segnale reale. Quindi la componente in quadratura non aggiunge informazioni sul fenomeno in studio, ma serve per rappresentare il segnale sul piano complesso al variare del tempo. Mediante la rappresentazione sul piano complesso è possibile calcolare il modulo e la fase in modo analitico. Il modulo è proprio l’inviluppo complesso del segnale. Pertanto, volendo calcolare l’inviluppo esatto di un segnale, si ricorre alla rappresentazione complessa, dalla quale si ricava l’inviluppo, detto appunto complesso.

Partendo dal segnale reale è possibile calcolare la componente in quadratura mediante l’impiego del filtro di Hilbert.

#### Il filtro di Hilbert

Si definisce la trasformata di Hilbert di un segnale reale  la seguente convoluzione:



dove  è ancora un segnale reale e rappresenta la componente in quadratura di . La precedente trasformazione può essere descritta simbolicamente mediante la seguente operazione di convoluzione:



In frequenza si può scrivere:



Pertanto:  è la trasformata della componente in quadratura , quando il segnale misurato è .

Si definisce filtro di Hilbert in frequenza la seguente trasformata di Fourier: .

La parte reale è nulla, mentre la parte immaginaria vale - /2 per  > 0 e + /2 per  < 0. In Fig. 15a è riportato il grafico della risposta in frequenza del filtro di Hilbert.

Fd[1/t]

-/2

f

/2

Fig. 15a

Nel seguito si prende in considerazione la realizzabilità di tale filtro, discutendo i problemi che ne derivano. A questo proposito si calcoli la risposta impulsiva hd(n) del filtro di Hilbert partendo dalla funzione che descrive l’andamento in frequenza, utilizzando la definizione di serie di Fourier di un segnale periodico. Utilizzando tale definizione, data la risposta ideale in frequenza del filtro di Hilbert che chiameremo Hd(ej), si può scrivere una relazione tempo-frequenza diretta e una inversa:

; 

Le precedenti relazioni possono essere interpretate come la rappresentazione in serie di Fourier della risposta in frequenza Hd(ej) periodica, dove la sequenza hd(n) rappresenta i coefficienti di Fourier. Utilizzando la relazione frequenziale del filtro di Hilbert, si può scrivere:



In Fig. 15b sono rappresentati in modo grafico i primi coefficienti del filtro.

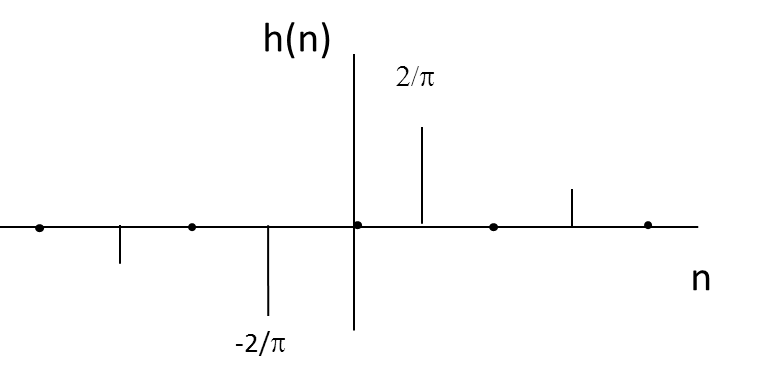


Fig. 15b

Affinché il filtro sia implementabile, oltre a soddisfare l’ipotesi di causalità, è necessario che sia costituito da un numero finito di coefficienti (nella formula precedente il numero di coefficienti è infinito).

Un modo per ottenere una risposta all'impulso di durata finita è quello di troncare hd(n), cioè definire:



In generale la risposta hd(n) può essere rappresentata come il prodotto della risposta desiderata e di una finestra w(n) di durata finita, cioè: h(n) = hd(n)w(n), essendo w(n) definito nel modo seguente:



Utilizzando il teorema della convoluzione complessa si vede che:



dove W(ej) è la trasformata di fourier di w(n). Si può intuire che minore è la banda di W(ej) rispetto a Hd(ej), maggiore è la vicinanza di H(ej) a Hd(ej). Ciò avviene quando la durata della finestra è infinita.

Quindi i criteri di scelta della finestra sono un compromesso tra l’esigenza di ottenere una risposta impulsiva la cui risposta in frequenza W(ej) approssimi una delta di dirac, e l’esigenza di avere un numero non troppo elevato di coefficienti del filtro.

A causa del troncamento, la risposta in fase del filtro di Hilbert subirà una modifica rispetto al caso ideale (Fig. 15a), come riportato in Fig. 15c, dove si osserva lo smussamento della transizione rapida nel passare da + /2 a - /2.

f

F[1/t]

Fig. 15c

Naturalmente la pendenza della fase (ovvero le frequenze in cui l’angolo di fase assume valori intermedi tra + /2 e - /2) diminuisce con il diminuire del numero di coefficienti. Ciò implica che lo sfasamento alle basse frequenze non è più di │/2│, ma assume valori intermedi per un intervallo di frequenze che cresce con il diminuire del numero di coefficienti del filtro. Per tali valori di frequenze il filtro non si comporta come sfasatore ideale.

Dato che il ruolo del filtro di Hilbert è quello di sfasare di 90° tutte le componenti frequenziali di un segnale che lo attraversa, esso può essere utilizzato per determinare la componente in quadratura di un qualsiasi segnale con banda frequenziale finita (non solo monocromatico). Pertanto, mediante il filtro di Hilbert è possibile calcolare la componente in quadratura, e quindi l’inviluppo, di un qualunque segnale reale.

Quanto finora discusso non ha preso in considerazione la realizzabilità fisica del filtro, e quindi le operazioni introdotte possono essere effettuate solo con un calcolatore.

Per rendere fisicamente realizzabile il filtro di Hilbert, è necessario renderlo causale. Ciò si ottiene traslando (ritardando) i coefficienti del filtro di una quantità pari a metà del numero dei suoi coefficienti. In questo modo il filtro è definito sul semiasse positivo e quindi viene detto ‘causale’. Sappiamo anche che il ritardo introdotto in conseguenza della traslazione produce nel dominio delle frequenze uno sfasamento lineare con la frequenza.

Pertanto, il filtro causale di Hilbert agisce sul segnale introducendo, non solo uno sfasamento di /2 ma, per la causalità, anche un ritardo nella risposta pari al numero di coefficienti traslati. Pertanto il segnale in uscita dal filtro risente sia della risposta impulsiva del filtro, sia del ritardo dovuto alla causalità del filtro.

##### Esercitazione n. 1.3: filtro di Hilbert

* Realizzare un filtro di Hilbert discreto non causale e uno causale; in ambedue i casi utilizzare un numero elevato di coefficienti, per esempio 500 (in modo da poter trascurare l’effetto del troncamento); calcolare la risposta in frequenza e rappresentare la parte reale e immaginaria. Valutare e interpretare il ritardo dovuto alla causalità.
* Ripetere il punto precedente con un basso numero di campioni (es. 16, 8) in modo da simulare l’operazione di troncamento. Verificare l’effetto del troncamento sull’andamento della parte immaginaria.

Alcuni grafici:

Filtro di Hilbert non causale (\*) Parte immaginaria non causale (\*\*)

(\*) questo tipo di rappresentazione è solo grafica, in quanto in matlab il vettore che contiene il filtro di Hilbert può essere definito solo per valori temporali (n > 0) positivi e quindi è causale.

Modulo e fase non causale (\*\*) Modulo e fase causale

(\*) ottenuta eliminando il ritardo nel dominio della frequenza mediante moltiplicazione per il termine di fase: exp(i\*2\*pi\*f\*n/fc)

#### Calcolo dell’inviluppo complesso

Le componenti in fase e in quadratura possono essere rappresentate come segue:



L’ampiezza del segnale , detta anche inviluppo, calcolata come modulo del segnale complesso è data da:



#### Significato della componente in quadratura

La precedente descrizione richiede alcuni approfondimenti per meglio comprendere il significato della componente immaginaria nell’operazione di demodulazione.

Il segnale rivelato dal trasduttore è reale e quindi, nella classica rappresentazione ampiezza-tempo, viene rappresentato con la sola componente in fase.

Quando si utilizza anche la componente in quadratura del segnale, che ricordo essere la componente reale sfasata di 90°, questa non aggiunge informazioni effettive sul fenomeno in studio, ma serve per utilizzare il piano complesso per calcolare in modo analitico l’inviluppo del segnale.

Se invece la modalità di imaging fosse in grado di acquisire realmente anche una componente sfasata di 90° rispetto al segnale reale, questa contribuirebbe realmente ad aumentare la conoscenza sul processo in studio. In questo caso non servirebbe calcolare la componente in quadratura utilizzando il filtro di Hilbert.

In Fig. 16 si è ipotizzato di utilizzare due bobine riceventi, anziché una sola, poste in modo tale acquisire due segnali FID sfasati di 90°. Tale configurazione, peraltro complicata da realizzare, ma presente nei primi apparecchi di risonanza magnetica, sarebbe in grado di ricevere un segnale in fase lungo l’asse x e un segnale in quadratura lungo l’asse y. Quindi la potenza del segnale misurato sarebbe doppia, con evidente miglioramento del rapporto segnale rumore (SNR).

**y**



**z**

-/2

**x**

Fig. 16

Nel caso invece si utilizzi il filtro di Hilbert per generare il segnale in quadratura, la potenza del segnale misurato è quella che compete ad un solo canale e quindi non si hanno miglioramenti dell’SNR.

##### Esercitazione n. 1.4: Rivelazione dell’inviluppo

1° parte

* Simulare un segnale a radiofrequenza partendo dal modello di segnale esponenziale e modularlo con una frequenza centrata nella banda del filtro di Hilbert (lontano dal transitorio posto nell’intorno dell’origine).

Segnale temporale a radiofrequenza In rosso è sovrapposto lo spettro di ampiezza del segnale a radiofrequenza

* Utilizzando il filtro di Hilbert della precedente esercitazione, simulare l’inviluppo del segnale a radiofrequenza.



Segnale in fase e in quadratura Inviluppo complesso

* Ripetere i punti sopra con la variante che la frequenza della portante deve essere scelta in modo da essere parzialmente sovrapposta alla risposta del filtro in prossimità dell’origine delle frequenze, dove la fase decresce linearmente. In questo caso si ottiene una versione distorta dell’inviluppo.

2° parte

Lo scopo di questa esercitazione è simulare alcune fasi dell’elaborazione dei segnali ecografici.

* Simulare il segnale di ritorno da una successione di discontinuità in impedenza acustica:
  1. Realizzare un vettore di funzioni delta di dirac distanziate utilizzando la funzione randn, scegliendo il valore medio minore pari alla durata dell’impulso a rf.
  2. Convolvere il vettore di dirac con il segnale a rf di cui sopra per ottenere una sequenza di segnali a radiofrequenza.
* Applicare il procedimento per la rivelazione di inviluppo, cioè calcolare la componente in quadratura e l’inviluppo complesso, simulando così la risposta di un ecografo lungo una singola linea di vista.
* Ripetere i punti sopra aumentando la banda del segnale rf (riducendo la durata temporale): si dovrebbe osservare un miglioramento della risoluzione assiale, cioè i singoli segnali a rf dovrebbero essere mediamente non sovrapposti.