Université de Tours

L3 - Mathématiques - Année 2022-2023

Mémoire de fin d'études

Marches Aléatoires

Mattéo **DAVID** - Adrien **DIDIER** - Guillaume **BOULAND**

Tuteur : Marc **PEIGNÉ**

Sommaire

1 Introduction

"A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever." Nous allons voir que cette déclaration familière , prononcée par Shizuo Kakutani, un mathématicien nippo-américain, contient en réalité tout un raisonnement sur les convergences de marches aléatoires.

L'idée de marche aléatoire a été introduite en 1905 par le biostatisticien Karl Pearson pour rendre compte des migrations d'une population de moustiques dans une forêt.
Suite à une discussion entre ce dernier et Lord Rayleigh, qui apportera une réponse a son problème, il conclura :
La leçon de la solution de Lord Rayleigh est que, dans un pays ouvert, l'endroit le plus probable pour trouver un ivrogne encore capable de tenir sur ses pieds se trouve quelque part dans le voisinage de son point de départ. On comprend dès lors le cheminement de pensée de Kakutani.

D'une manière formelle, une marche aléatoire est donc un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires. Ces pas aléatoires sont de plus totalement décorrélés les uns des autres ; cette dernière propriété, fondamentale, est appelée caractère markovien du processus, du nom du mathématicien Markov.

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser tout particulièrement à la récurrence des marches aléatoire dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$.

2 La marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

2.1 Introduction à la marche aléatoire

Soit $(X_n)_{n\in N^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées), on note $S_n = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Soit t_0 l'instant initial, où l'homme se trouve au point d'origine. On pose $t_0 = 0$ car l'homme se situe à l'origine au départ de l'expérience. On définit t_1 comme l'instant où l'homme retourne au point d'origine pour la première fois, et on a $t_1 = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 0\}$. On peut alors définir par induction t_i comme l'instant où l'homme retourne pour la i-ème fois en 0, tel que $t_i = \inf\{n \geq t_{i-1} \mid S_n = 0\}$, pour $i \in \mathbb{N}^*$. On a la convention $\inf \emptyset = +\infty$.
Notons N le nombre de "retours en 0", alors $N = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1_0(S_k)}$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit τ_i tels que $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. En effet, pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$, τ_i correspond aux déplacements possibles entre le (i-1)-ème retour en 0 et le i-ème retour en 0. Il ne prend donc pas en compte les i-1 premiers retours en 0 déjà effectués à ce stade.

Notations 2.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, k et l deux entiers naturels. On note:* $\{X = k\} \cap \{Y = l\} = (X = k,\ Y = l)$

Proposition 2.2 *La suite* $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de variables i.i.d.*

<u>Démonstration</u> :
Soient $k_1 < \ldots < k_l$ des entiers naturels non nuls tels que pour tout entier naturel non nul l, on a $a_l = \sum_{i=1}^{l} k_i$. Montrons dans un premier temps que les τ_i sont indépendants. Soit k un entier naturel non nul, l'événement $\{\tau_i = k\}$ est l'ensemble des trajectoires qui

reviennent en 0 pour la i-ème fois à l'instant k, on a donc nécessairement $k \geq i$.
Montrons dans un premier temps l'indépendance des τ_i, $\forall i \in \{1, \ldots, l\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_l = k_l) &= \mathbb{P}(\tau_1 = a_1, \ldots, \tau_l = a_l - a_{l-1}) \\
&= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{a_1-1} \neq 0, S_{a_1} = 0, S_{a_1+1} \neq 0, \ldots, \\
&\quad S_{a_2-1} \neq 0, S_{a_2} = 0, \ldots, S_{a_{l-1}+1} \neq 0, \ldots, S_{a_l-1} \neq 0, S_{a_l} = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{a_1-1} \neq 0, S_{a_1} = 0, S_{a_1+1} - S_{a_1} \neq 0, \ldots, \\
&\quad S_{a_2-1} - S_{a_1} \neq 0, S_{a_2} - S_{a_1} = 0, \ldots, S_{a_{l-1}+1} - S_{k_{l-1}} \neq 0, \ldots, \\
&\qquad S_{a_l-1} - S_{k_{l-1}} \neq 0, S_{a_l} - Sk_{l-1} = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{a_1-1} \neq 0, X_1 + \ldots + X_{a_1} = 0, \\
&\quad X_{a_1+1} \neq 0, \ldots, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2-1} \neq 0, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2} = 0, \\
&\qquad \ldots, X_{a_{l-1}+1} \neq 0, \ldots, X_{a_{l-1}+1} + \ldots + X_{a_l-1} \neq 0, X_{a_{l-1}+1} + \\
&\qquad\quad \ldots + X_{a_l} = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{a_1-1} \neq 0, X_1 + \ldots + X_{a_1} = 0) \times \\
&\quad \mathbb{P}(X_{a_1+1} \neq 0, \ldots, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2-1} \neq 0, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2} = 0) \times \\
&\qquad \ldots \times \mathbb{P}(X_{a_{l-1}+1} \neq 0, \ldots, X_{a_{l-1}+1} + \ldots + X_{a_l-1} \neq 0, X_{a_{l-1}+1} + \\
&\qquad\quad \ldots + X_{a_l} = 0) \qquad\qquad (\Gamma) \\
&\qquad\qquad \text{par indépendance des } X_1, \ldots, X_l \ , \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \mathbb{P}(\tau_2 = k_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_l = k_l) \qquad (\Delta)
\end{aligned}
$$

Remarque. 2.3 *On peut réécrire* (Γ) *comme:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_l = k_l) &= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{a_1-1} \neq 0, X_1 + \ldots + X_{a_1} = 0) \times \\
&\quad \mathbb{P}(X_{a_1+1} \neq 0, \ldots, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2-1} \neq 0, X_{a_1+1} + \ldots + X_{a_2} = 0) \times \\
&\qquad \ldots \times \mathbb{P}(X_{a_{l-1}+1} \neq 0, \ldots, X_{a_{l-1}+1} + \ldots + X_{a_l-1} \neq 0, X_{a_{l-1}+1} + \\
&\qquad\quad \ldots + X_{a_l} = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{a_1} = 0) \times \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + \\
&\quad X_{a_2-a_1} = 0) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{a_l-a_{l-1}-1} \neq 0, X_1 + \\
&\qquad \ldots + X_{a_l-a_{l-1}} = 0) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = a_1) \times \mathbb{P}(\tau_1 = a_2 - a_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_1 = a_l - a_{l-1}) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_l)
\end{aligned}
$$

Remarque. 2.4 *On a, par ailleurs,* $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\tau_l = k_l) = \mathbb{P}(\tau_1 = k_l)$. *En effet, soit* $l \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_l = k_l) &= \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1}} \mathbb{P}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_l = k_l) \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1}} \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_l = k_l) \qquad \textit{par } (\Delta), \\
&\quad \textit{car } \{(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_{l-1} = k_{l-1}) \mid k_1, \ldots, k_{l-1}\} \textit{ est un système complet} \\
&\qquad \textit{d'événement puisque les variables aléatoires } \tau \textit{ sont finies } \mathbb{P}\textit{-p.s.}, \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1}} \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_l) \qquad \textit{par la remarque 2.3}, \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = k_l) \times \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1} \geq 1} \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_{l-1}) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = k_l) \times \underbrace{\sum_{k_1 \geq 1} \mathbb{P}(\tau_1 = k_1)}_{=1} \times \ldots \times \underbrace{\sum_{k_{l-1} \geq 1} \mathbb{P}(\tau_1 = k_{l-1})}_{=1} \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 = k_l)
\end{aligned}
$$

On a alors montré que, pour tout $k_1 < \ldots < k_l$, pour $l \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_l = k_l) = \mathbb{P}(\tau_1 = k_1) \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(\tau_1 = k_l),$$

et ainsi, la suite de variables aléatoires $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante et de même loi.

□

Remarque. 2.5 *On peut remarquer que le fait de retourner en 0 à l'instant k fini revient à ce que le nombre de retours en 0 soit supérieur ou égal à un nombre k. Autrement dit, on a :* $\{t_k < \infty\} = \{N \geq k\}$. *Et on a la proposition suivante.*

Proposition 2.6 *La variable aléatoire N suit une loi géométrique de paramètre* $p = \mathbb{P}(\tau_1 = +\infty)$.

Démonstration : D'après la remarque et la démonstration précédente, on a :

$$\mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{P}(t_k < +\infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty)^k = q^k$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(N \geq k-1) - \mathbb{P}(N \geq k)\\ &= q^{k-1} - q^k\\ &= q^{k-1} \times (1-q)\\ &= q^{k-1} \times p\end{aligned}$$

Donc N suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q = 1 - \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \mathbb{P}(\tau_1 = +\infty)$.

□

Lemme 2.7 *Puisque N suit une loi géométrique de paramètre p, on a :* $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{p}$, $\forall p \in [0, 1]$.

Remarque. 2.8 *On a l'équivalence suivante :* $\mathbb{E}(N) = +\infty \Leftrightarrow p = 0 \overset{\Lambda}{\Leftrightarrow} N = +\infty$ $\mathbb{P}$*-p.s.*

Démonstration de Λ :
- On suppose $p = \mathbb{P}(\tau_1 = +\infty) = 0$, alors $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$. Ainsi, l'évènement $\{\tau_1 < +\infty\}$ est l'ensemble des trajectoires qui reviennent en 0 à un instant fini est certain. On a vu plus tôt que: $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\tau_i < +\infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$.
Alors le nombre de retours en 0 est infini et on a $N = +\infty$, $\mathbb{P} - p.s.$.

- Réciproquement, on suppose que le nombre de retours en 0 est infini $\mathbb{P}-p.s.$, alors l'ensemble des trajectoires qui permettent de retourner en 0 à un instant fini est un évènement certain. Ainsi, $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$, alors $p = \mathbb{P}(\tau_1 = +\infty) = 0$. Donc, $p = 0$.

On peut dès lors s'intéresser à la probabilité pour le marcheur de revenir à son origine une infinité de fois, ou au moins savoir si sa marche est récurrente ou ne l'est pas, c'est à dire si la probabilité de revenir en 0 une infinité de fois est, ou n'est pas, de probabilité égale à 1.

2.2 Combinatoire

Proposition 2.9 *Sur* $\mathbb{Z}$, *la marche aléatoire est récurrente.*

Démonstration : Pour le prouver, deux méthodes sont fréquemment utilisées. La première méthode est la plus intuitive : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, et on cherche, pour $r \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S_r = 0)$.
On remarque que -1 et 1 sont des nombres impairs, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est impair. Ainsi, S_{2p+1} est impair comme somme impaire de nombres impairs. Or, 0 est pair donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \neq 0$, et on a finalement $\mathbb{P}(S_{2p+1} = 0) = 0$.

Regardons maintenant $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On introduit A_{2n}, l'ensemble des suites $(Y_n)_{n\in[\![1;2n]\!]}$ de $\{-1,1\}^{2n}$ telles que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i = 0$, et B_{2n}, l'ensemble des suites $(Z_n)_{n\in[\![1;2n]\!]}$ de $\{-1,1\}^{2n}$ telles que :

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = 1\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = -1\}) = n$$

Montrons l'égalité entre A_{2n} et B_{2n} :
Soit $(Z_n)_{n\in[\![1;2n]\!]}$ un élément de B_{2n}. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{2n} Y_i = Card(\{Z_i \mid Z_i = 1\}) \times 1 + Card(\{Z_i \mid Z_i = -1\}) \times (-1) = n - n = 0.$$

Donc $Z_{2n} \in A_{2n}$, et on a $B_{2n} \subset A_{2n}$.
Réciproquement, soit $(Y_n)_{n\in[1;2n]}$ un élément de A_{2n}. On pose p $= Card(\{Y_i \mid Y_i = 1\})$ et q $= Card(\{Y_i \mid Y_i = -1\})$. Comme on sait que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i$ vaut 0, on a alors :

$$\begin{cases} p + q = n \\ p - q = 0 \end{cases}$$

On a donc finalement $p = q = \frac{n}{2}$, $(Y_n)_{n\in[1,2n]} \in B_{2n}$, soit $A_{2n} \subset B_{2n}$ d'où $A_{2n} = B_{2n}$.

Or le cardinal de B_{2n} est connu : il s'agit du nombre de combinaisons de n éléments parmi 2n : en effet, pour construire une suite de B_{2n}, on doit placer n fois la valeur -1 parmi les 2n valeurs possibles. On en déduit : $Card(A_{2n}) = \binom{2n}{n}$.

Comme on sait que Ω est l'ensemble des suites de $\{-1,1\}^{2n}$, et que l'on travaille sur la probabilité uniforme, on en déduit :

$$\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \frac{Card(A_{2n})}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

Finalement, on vérifie que $\mathbb{P}(S_k = 0)$: $\begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p+1 \\ \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} & \text{si } k = 2p \end{cases}$

En particulier, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k}$.
On utilise la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(\frac{n}{e})^{2n}2\pi n 2^{2n}}\\ &= \frac{2^{2n}2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}2\pi n}\\ &= \frac{C}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Finalement, comme la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemman divergente, la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=0)$ aussi. Donc la valeur de la série $\sum_{n\geq 0}P(S_n=0)$ est infinie, ce qui implique que E_N est infinie, où E_N est l'espérance de la variable comptant les N retours en 0.

On en déduit, d'après la remarque 2.8, que la probabilité pour le marcheur de revenir en 0 une infinité de fois est 1.

□

Cette méthode peut être indigeste en raison de nombreuses notations. Il existe un autre moyen de montrer le résultat, de manière plus élégante et sans utiliser la proposition 2.4. Le voici :

2.3 Équations fonctionnelles

Soit $(X_n)_{n\in N^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, définies sur une espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que $\forall i\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\{X_i=1\})=\mathbb{P}(\{X_i:-1\})=\frac{1}{2}$$

On introduira de plus l'évènement $\{a\rightsquigarrow b\}=\{\exists N\in\mathbb{N}^*,\ a+X_1+...+X_N=b\}$, défini pour a et b des éléments de $\mathbb{Z}$. On notera x = $\mathbb{P}(\{0\rightsquigarrow 0\})$ et y = $\mathbb{P}(\{1\rightsquigarrow 0\})$.

Montrons dans un premier temps que $\mathbb{P}(\{k+n\rightsquigarrow k+p\})=\mathbb{P}(\{n\rightsquigarrow p\})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{k+n\rightsquigarrow k+p\}) &= \mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*\ ,\ (k+n)+X_1+...+X_N=k+p\})\\ &= \mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*\ ,\ n+X_1+...+X_N=p\})\\ &= \mathbb{P}(\{n\rightsquigarrow p\}).\end{aligned}$$

On peut également montrer que : $\mathbb{P}(\{k,0\})=\mathbb{P}(\{-k\rightsquigarrow 0\})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{-k\rightsquigarrow 0\}) &= \mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*,-k+X_1+...+X_N=0\})\\ &= \mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*,k-X_1-...-X_N=0\}).\end{aligned}$$

Or on observe que $\forall i\in\mathbb{N}$;

$$\mathbb{P}(\{-X_i=1\})=\mathbb{P}(\{-X_i:-1\})=\frac{1}{2}$$

Donc $\forall i\in\mathbb{N}$, X_i et $-X_i$ sont deux variables de même loi, et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*,k-X_1-...-X_N=0\}) &= \mathbb{P}(\{\exists N\in\mathbb{N}^*,k+X_1+...+X_N=0\})\\ &= \mathbb{P}(\{k\rightsquigarrow 0\}).\end{aligned}$$

On peut utiliser ces informations pour prouver l'égalité entre x et y. En effet, en utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
x &= \mathbb{P}(\{0 \rightsquigarrow 0\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) \times \mathbb{P}(\{\exists N \in \mathbb{N}^*, 1 + X_2 + ... + X_N = 0\}) \\
&+ \mathbb{P}(\{X_1 = -1\}) \times \mathbb{P}(\{\exists N \in \mathbb{N}^*, -1 + X_2 + ... + X_N = 0\}).
\end{aligned}$$

Comme on sait que les X_n sont i.i.d, $\forall i \in \mathbb{N}$; X_{i-1} et X_i suivent la même loi, et donc, en posant m = N - 1, on a bien :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\exists N \in \mathbb{N}^*, -1 + X_2 + ... + X_N = 0\}) &= \mathbb{P}(\{\exists m \in \mathbb{N}^*, -1 + X_1 + ... + X_m = 0\}) \\
&= \mathbb{P}(\{-1 \rightsquigarrow 0\})
\end{aligned}$$

Or on a vu qu'en particulier, on a $\mathbb{P}(\{-1, 0\}) = \mathbb{P}(\{1, 0\}) = y$. Cela implique que :

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y$$

On peut dès lors calculer la valeur de x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{2 \rightsquigarrow 0\}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{\exists m \in \mathbb{N}^*, 2 + X_1 + ... + X_m = 0\}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\Big(\{\exists m, l \in \mathbb{N}^{*2}, 2 + X_1 + ... + X_m = 1 \bigcap 1 + X_{m+1} + ... + X_l = 0\}\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{2 \rightsquigarrow 1\}) \times \mathbb{P}(\{1 \rightsquigarrow 0\}) \text{ par indépendance des variables} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{1 \rightsquigarrow 0\}) \times \mathbb{P}(\{1 \rightsquigarrow 0\}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{1 \rightsquigarrow 0\})^2 \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^2).
\end{aligned}$$

Donc comme on sait que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - x = 0$, en utilisant les identités remarquablees on trouve $\frac{1}{2}(1 - x)^2 = 0$, ce qui implique $x = 1$, et conclut la démonstration.

Remarque. 2.10 *Le gros désavantage de cette méthode par rapport à celle présentée précédemment est la difficulté de réplicabilité : en effet, en gardant un squelette très similaire, il est possible d'adapter la première méthode à $\mathbb{Z}^n$, et ce pour tout entier naturel n, ce qui n'est pas le cas de cette méthode.*

□

3 La marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$

Soit $(M_n)_{n \in N^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(M_i = (1, 0)) = \mathbb{P}(M_i = (-1, 0)) = \mathbb{P}(M_i = (0, 1)) = \mathbb{P}(M_i = (0, -1)) = \frac{1}{4}$$

On note $S_i = M_1 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$, et on cherche, pour $r \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S_r = (0, 0))$.

-1 et 1 étant des nombres impairs, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, M_i a une coordonnée paire et l'autre impaire. Ainsi, S_{2p+1} a au moins une coordonnée impaire comme somme impaire de doublets avec une coordonnée impaire. Or, le doublet (0,0) a ses deux coordonnées paires donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \neq (0,0)$, et on a finalement $\mathbb{P}(S_{2p+1} = (0,0)) = 0$.

Regardons maintenant $\mathbb{P}\left(S_{2n} = (0,0)\right)$. On introduit A_{2n}, l'ensemble des suites $(Y_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ de $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}^{2n}$ telles que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i = (0{,}0)$, et B_{2n}, l'ensemble des suites $(Z_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ de $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}^{2n}$ telles que :

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = (1,0)\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = (-1,0)\}) = k, \qquad k \in [\![0;n]\!]$$

$$et$$

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,1)\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,-1)\}) = n-k$$

Montrons l'égalité entre A_{2n} et B_{2n} :
Soit $(Z_n)_{n \in [1;2n]}$ un élément de B_{2n}. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} Y_i = {} & Card(\{Z_i \mid Z_i = (1,0)\}) \times (1,0) \\
& + Card(\{Z_i \mid Z_i = (-1,0)\}) \times (-1,0) \\
& + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,1)\}) \times (0,1) \\
& + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,-1)\}) \times (0,-1) \\
= {} & (k,0) + (-k,0) + (0,n-k) + (0,-n+k) = (0,0).
\end{aligned}$$

Donc $Z_{2n} \in A_{2n}$, et on a $B_{2n} \subset A_{2n}$.
Réciproquement, soit $(Y_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ un élément de A_{2n}. On pose p = $Card(\{Y_i \mid Y_i = (1,0)\})$, q = $Card(\{Y_i \mid Y_i = (-1,0)\})$, l = $Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,1)\})$ et m = $Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,-1)\})$.
Comme on sait que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i = (0{,}0)$ on a alors :

$$\begin{cases} p+q+l+m = 2n \\ l-m = 0 \\ p-q = 0 \end{cases}$$

On a donc finalement $p = q$, $l = m$ et $p + l = n$, $(Y_n)_{n \in [\![1,2n]\!]} \in B_{2n}$, soit $A_{2n} \subset B_{2n}$ d'où $A_{2n} = B_{2n}$.

Or le cardinal de B_{2n} est connu: pour k fixé, il s'agit du nombre de combinaisons de k,k,n-k,n-k éléments parmi 2n: en effet, pour construire une suite de B_{2n}, on doit placer k fois le doublet (1,0) et n-k fois le doublet (0,1) parmi les 2n valeurs possibles.

Notations 3.1 *Soient $n, k_1, \dots, k_s$ des nombres naturels avec $n = k_1 + \cdots + k_s$ alors le coefficient multinomial associé est :*

$$\begin{pmatrix} n \\ k_1, \dots, k_s \end{pmatrix} = \frac{n!}{k_1! \dots k_2!}$$

On en déduit :
$Card(A_{2n}) = \begin{pmatrix} 2n \\ k, k, n-k, n-k \end{pmatrix} = \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}$.

Comme on sait que Ω est l'ensemble des suites de $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}^{2n}$, et que l'on travaille sur la probabilité uniforme, on en déduit :

$$\mathbb{P}(S_{2n}=(0,0)) = \frac{Card(A_{2n})}{Card(\Omega)} = \frac{\begin{pmatrix} 2n \\ k,k,n-k,n-k \end{pmatrix}}{4^{2n}}$$

Finalement, on vérifie que $\mathbb{P}(S_p=(0,0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } p=2m+1 \\ \displaystyle\frac{1}{4^p}\sum_{k=0}^{m}\frac{(p)!}{k!k!(m-k)!(m-k)!} & \text{si } p=2m \end{cases}$

En particulier,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n}=(0,0)) &= \frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{1}{4^{2n}}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2\end{aligned}$$

On utilise la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^{2n}}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4^{2n}}\left(\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4^{2n}}\left(\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\frac{n}{e})^{2n}\sqrt{\pi n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4^{2n}}\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi n}\end{aligned}$$

Finalement, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\pi n}$ est une série de Riemann divergente,

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=(0,0)) \text{ aussi. Donc } \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S_n=(0,0)) = +\infty \text{ , } E=+\infty,$$

où E est l'espérance de la variable comptant les retours en 0 ($E=\mathbb{E}(N)$).

On en déduit, d'après la remarque 2.8, que la probabilité pour le marcheur de revenir en 0 une infinité de fois est 1.

□

4 La marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^3$

Soit $(M_n)_{n\in N^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, définies sur une espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que $\forall i\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_i=(1,0,0)) &= \mathbb{P}(M_i=(-1,0,0)) = \mathbb{P}(M_i=(0,1,0)) = \mathbb{P}(M_i=(0,-1,0)) \\ &= \mathbb{P}(M_i=(0,0,1)) = \mathbb{P}(M_i=(0,0-1)) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

On note $S_i = M_1 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$, et on cherche, pour $r \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(S_r = (0,0,0)\right)$.
-1 et 1 étant des nombres impairs, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, M_i a deux coordonnées paires et une impaire. Ainsi, S_{2p+1} a au moins une coordonnée impaire comme somme impaire de triplets avec une coordonnée impaire. Or, le triplet (0,0,0) a ses trois coordonnées paires donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \neq (0,0,0)$, et on a finalement $\mathbb{P}(S_{2p+1} = (0,0,0)) = 0$.

Regardons maintenant $\mathbb{P}\left(S_{2n} = (0,0,0)\right)$. On introduit A_{2n}, l'ensemble des suites $(Y_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ de $\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1)\}^{2n}$ telles que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i =$ (0,0), et B_{2n}, l'ensemble des suites $(Z_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ de $\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1)\}^{2n}$ telles que :

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = (1,0,0)\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = (-1,0,0)\}) = i, i \in [\![0;n]\!]$$

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,1,0)\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,-1,0)\}) = j, j \in [\![0;n]\!]$$

$$Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,0,1)\}) = Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,0,-1)\}) = k, k \in [\![0;n]\!]$$

avec i + j + k = n.

Montrons l'égalité entre A_{2n} et B_{2n} :
Soit $(Z_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ un élément de B_{2n}. Alors on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} Y_i = {} & Card(\{Z_i \mid Z_i = (1,0,0)\}) \times (1,0,0) + Card(\{Z_i \mid Z_i = (-1,0,0)\}) \times (-1,0,0) \\
& + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,1,0)\}) \times (0,1,0) + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,-1,0)\}) \times (0,-1,0) \\
& + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,0,1)\}) \times (0,0,1) + Card(\{Z_i \mid Z_i = (0,0,-1)\}) \times (0,0,-1) \\
& = (k,0,0) + (-k,0,0) + (0,q,0) + (0,-q,0) + (0,0,l) + (0,0,-l) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Donc $Z_{2n} \in A_{2n}$, et on a $B_{2n} \subset A_{2n}$.
Réciproquement, soit $(Y_n)_{n \in [\![1;2n]\!]}$ un élément de A_{2n}. On pose :

$i_1 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (1,0,0)\})$, $\quad i_2 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (-1,0,0)\})$,
$j_1 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,1,0)\})$, $\quad j_2 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,-1,0)\})$,
$k_1 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,0,1)\})$, $\quad k_2 = Card(\{Y_i \mid Y_i = (0,0,-1)\})$.

Comme on sait que $\sum_{i=1}^{2n} Y_i =$ (0,0,0) on a alors :

$$\begin{cases} i_1 + j_1 + k_1 + i_2 + j_2 + k_2 = 2n \\ i_1 - i_2 = 0 \\ j_1 - j_2 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$$

On a donc finalement $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$, $k_1 = k_2$ et $i_1 + j_1 + k_1 + i_2 + j_2 + k_2 = 2n$, $(Y_n)_{n \in [\![1,2n]\!]} \in B_{2n}$, soit $A_{2n} \subset B_{2n}$ d'où $A_{2n} = B_{2n}$.

Or le cardinal de B_{2n} est connu : pour i, j et k fixés, il s'agit du nombre de combinaisons de i, i, j, j, k, k éléments parmi 2n : en effet, pour construire une suite de B_{2n}, on doit placer i fois le triplet (1,0,0), parmi les 2n valeurs possibles, placer i fois le triplet (-1,0,0), parmi les 2n-i valeurs restantes, placer j fois le triplet (0,1,0), parmi les 2n-2i valeurs restantes, placer j fois le triplet (0,-1,0), parmi les 2n-2i-j valeurs restantes, et placer k fois le triplet (0,0,1), parmi les 2n-2i-2j valeurs restantes.

Remarque. **4.1** *Les propriétés du coefficient binomial font qu'en plaçant les triplets dans n'importe quel ordre , le cardinal de l'ensemble reste le même.*

On introduit désormais la notation des coefficients multinomiaux suivante : Soient $n, k_1, \dots, k_s$ des nombres naturels avec $n = k_1 + \cdots + k_s$ alors le coefficient multinomial associé est :

$$\begin{pmatrix} n \\ k_1, \dots, k_s \end{pmatrix} = \frac{n!}{k_1! \dots k_2!}$$

On en déduit :

$$Card(A_{2n}) = \begin{pmatrix} 2n \\ i, i, j, j, k, k \end{pmatrix} = \tfrac{(2n)!}{i!i!j!j!k!k!}.$$

Comme on sait que Ω est l'ensemble des suites de $\{(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1)\}^{2n}$ et que l'on travaille sur la probabilité uniforme, on en déduit, si on fixe k, l et m :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) = \frac{Card(A_{2n})}{Card(\Omega)} = \frac{\begin{pmatrix} 2n \\ i, i, j, j, k, k \end{pmatrix}}{4^{2n}}$$

Finalement, on vérifie que $\mathbb{P}\left(S_p = (0,0,0)\right)$: $\begin{cases} 0 & \text{si } p = 2m+1 \\ \dfrac{1}{6^{2p}} \displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=m \\ k,l,q>0}} \dfrac{(p)!}{i!i!j!j!k!k!} & \text{si } p = 2m \end{cases}$

Remarque. **4.2** *On trouve la somme grâce aux équations précédentes qui imposent les contraintes de parité et de somme valant m.*

En particulier, $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) = \dfrac{1}{6^{2p}} \displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k>0}} \dfrac{(p)!}{i!i!j!j!k!k!} = \dfrac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k>0}} \begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix}^2 \dfrac{1}{3^{2m}}$

$$= \frac{1}{3^{2n}} \binom{2m}{m} \frac{1}{3^m} \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k>0}} \begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix}^2 \frac{1}{3^{i+j+k}} \qquad \text{car } i+j+k = m.$$

Donc si on utilise les propriétés de coefficient binomial, on a, en posant $m = 3l$;

$$\begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} m \\ l, l, l \end{pmatrix}$$

et de là on peut en déduire, si on a $m = 3l$:

$$\frac{1}{3^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k\geq 0}} \begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix}^2 \frac{1}{2^{2m}} \leq \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \begin{pmatrix} m \\ l, l, l \end{pmatrix} \frac{1}{3^m} \sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k\geq 0}} \begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix} \frac{1}{3^{i+j+k}}$$

Or d'après la formule du trinôme de Newton :

$$\sum_{\substack{i+j+k=m \\ i,j,k\geq 0}} \begin{pmatrix} m \\ i, j, k \end{pmatrix} \frac{1}{3^{i+j+k}} = 1$$

Et on a une simplification de l'expression :
$\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0)) \leq \dfrac{1}{2^{6l}} \dbinom{2m}{m} \begin{pmatrix} m \\ l, l, l \end{pmatrix} \dfrac{1}{3^{3l}}$

Il ne reste plus qu'à développer le terme de gauche, puis utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$.

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{2n}}\binom{6l}{3l}\binom{3l}{l,l,l}\frac{1}{3^n} &= \frac{1}{2^{6l}}\frac{1}{3^{3l}}\frac{(6l)!}{(3l)!^2}\frac{(3l)!}{l!^3} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{3l}}\frac{1}{2^{6l}}\frac{6l^{6l}e^{6l}\sqrt{12\pi l}}{3l^{6l}e^{6l}6\pi l}\frac{3l^{3l}\sqrt{6\pi l}e^{3l}}{l^{3l}(2\pi l)^{3/2}e^{3l}} \\
&= \frac{(6/3)^{6l}}{\sqrt{3\pi l}}\frac{3^{3l}}{\sqrt{3/2\pi l}}\frac{1}{2^{6l}}\frac{1}{3^{3l}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3(\pi n)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\sqrt{2}}{3(\pi n)^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\left(S_n=(0,0,0)\right)$ aussi, par théorème de comparaison. Donc $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\left(S_n=(0,0,0)\right)$ est finie, E est finie, où E est l'espérance de la variable comptant les retours en 0 ($E=\mathbb{E}(N)$). D'après la réciproque de la remarque 2.8, la probabilité de revenir en 0 en un temps infini n'est plus égale à 1. La marche n'est donc pas récurrente.

□

5 Bibliographie