Relazione Progetto in Itinere II

Corso di Ingegneria Degli Algoritmi

Matteo Esposito
Matricola: 0238638

Gennaio 2018

Indice

Abstract 1

1.1 Premessa

L'algoritmo presentato vorrebbe tentare di risolvere il problema N.2 il quale chiedeva:

*"Sia dato un grafo non orientato e non pesato G . Data una coppia di nodi (n_1, n_2) in G , la distanza dist(n_1, n_2) é il minor numero di archi necessari a connettere n_1 e n_2. Un nodo é medio di n_1 ed n_2 se e solo se é equidistante da n_1 e n_2, ovvero se dist(n_1, m)= dist(m, n_2) . Progettare e implementare un algoritmo che, dato un grafo non orientato e non pesato G , determini il nodo m * che risulta essere medio per il maggior numero di coppie di nodi ."*

L'approccio risolutivo consta dell'utilizzo di operazioni pre-esistenti, forniteci attraverso le classi e gli snipset presenti sulla pagina di GitHub del Corso, con una classe "GraphExtended" che riporta alcune funzioni il cui scopo é estendere ulteriormente la classe GraphIncidenceList. Il tempo di esecuzione totale nel caso peggiore risulta essere $O(|V| * |E|)$ in quanto l'algoritmo scelto per risolvere il problema consta efettivamente di due loop principali nel quale scandendo il singolo nodo scandisce tutti gli archi del grafo. L'Algoritmo scelto per la risoluzione era un algoritmo pre-esistente frutto della ricerca accademica del prof. Ulrich Brandes della università di Konstanz in Germania, esso nacque per velocizzare la catalogazione dei nodi di un grafo per i rispettivi indici di "Betweennes Centrality". La mia implementazione, nata dallo pseudo-codice presente all'interno del Paper Accademico di Brandes, ha un differente approccio nella gestione del risultato in quanto, mentre lo scopo dell'originale era restituire semplicemente il dizionario, attraverso operazioni più o meno costanti, ho voluto far restituire all'algoritmo una tripla di elementi così costituita:

- int: massimo indice di Betweennes Centrality
- set: tutti i nodi che condividono la Betweennes Centrality
- Dizionario:
  - Chiave: ID Nodo
  - Valore: Indice di Betweennes Centrality del nodo

Il codice é cosí strutturato:

- main.py: contenente essenzialmente le DEMO dell'algoritmo
- la classe "ProjUtilities":contenente le funzioni principali per la genrazione pseudo-randomica dei grafi
- brandes.py: core del progetto contenente l'implementazione in python dello pseudo-codice del prof. Brandes
- la succitata classe GraphExtended contenente uno dei core dell'algoritmo stesso (la funzione *convertToBradesGraphAlgo()*)
- tutte le librerie e classi fornite precedentemente attraverso la pagina di GitHub.

Richiami Teorici 2

2.1 Criterio di Bellman

"Un vertice $v \in V$ giace su un cammino minimo tra i vertici $s, t \in V$ (é centrale nel loro cammino minimo), se e solo se $dist(s,t) = dist(s,v) + dist(v,t)$

2.2 Betweennes Centrality

Nella teoria dei grafi, la *Betweennes Centrality* è una misura della centralità in un grafo basata su cammini minimi. Per ogni coppia di vertici in un grafo connesso, esiste almeno un cammino minimo tra i vertici in modo tale che o il numero degli archi attraversati dal percorso (per i grafi non pesati) o la somma dei pesi dei bordi (per i grafi pesati) è ridotto al minimo. La *Betweennes Centrality* per ciascun vertice è il numero di questi cammini minimi che attraversano il vertice.

2.3 Dipendeza tra nodi

Sia $G = (V, E)$ un *grafo* e siano s,t una coppia fissa di nodi del *grafo*. Sia δ_{st} il numero di cammini minnimi tra s e t e sia $\delta_{sv}(V)$ il numero di cammini minimi che passano per v. Definiamo allora *dipendenza* di un nodo sorgente s su di un vertice v come segue:

$$\delta_s(v) = \sum_{t \in V} \frac{\delta_{st}(v)}{\delta_{st}}$$

Quanto precede riesce a catturare l'importanza di un nodo v rispetto ad un nodo s e t. La Betweennes Centrality di un vertice v allora si può definire come:

$$BC(v) = \sum_{s \neq v \in V} \delta_s(v)$$

L'intuizione di Brandes, partendo da questa relazione, fu proprio rendersi conto che la dipendenza del nodo v soddisfi in realtà la seguente ricorrenza:

$$\delta_s(v) = \sum_{w : v \in pred(s,w)} \frac{\delta_{sv}}{\delta_{sw}} (1 + \delta_s(w))$$

Con *pred(s,v)* l'insieme dei predecessori di w nel cammino minimo da s a w.

L'Algoritmo 3

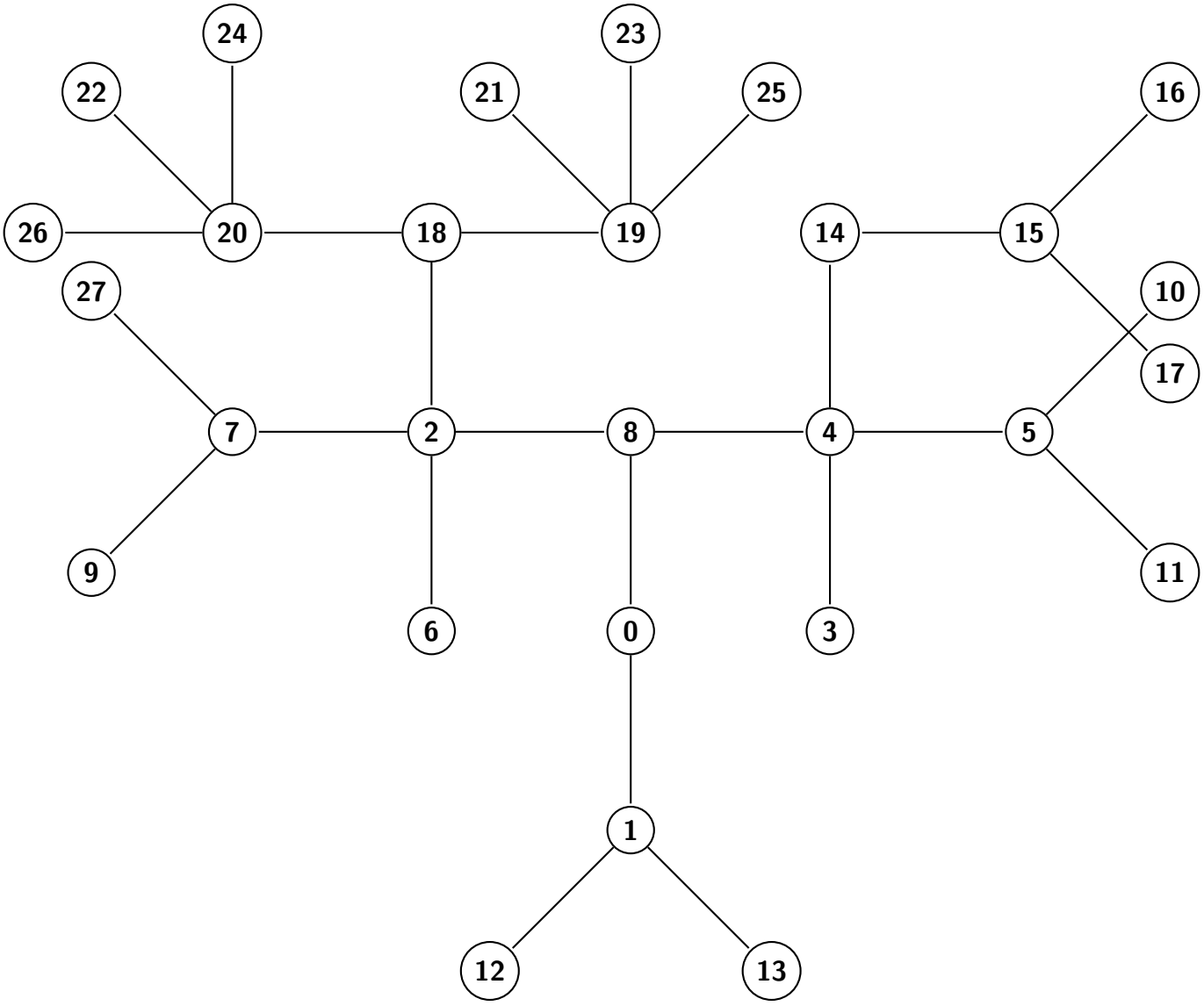
Attenzione: di seguito verrà analizzato l'algoritmo di Brandes nella sua VERSIONE pura ed originale tralasciando le mie personali modifiche comunque commentate nel codice sorgente ed ininfluenti da un punto di vista di Complessità Temporale.

3.1 Fase Preliminare (SOLO VERSIONE DEMO)

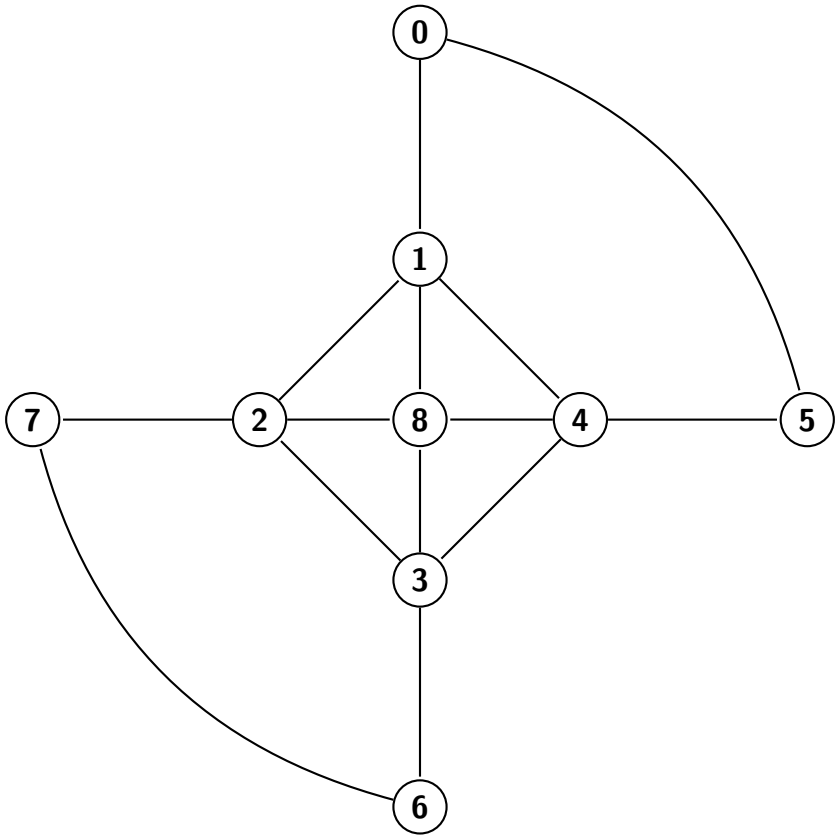
Tempo : $\mathbf{O(n^2)}$

Nella fase preliminare l'algoritmo crea un grafo, in maniera pseudo-randomica, attraverso i metodi *generateAcycleGraph()* o *generateCyclicGraph()* (contenuti in ProjUtilities). Il presente metodo, per quanto veloce possa essere il tempo di esecuzione è pari ad un $O(n^2)$. Chiaramente é un metodo esistente solo nella DEMO dell'algoritmo mentre la sua implementazione pura non prevede affatto questa parte ragion per cui nel calcolo totale ho ignorato tale risultato.

Grafo Generato Aciclico:



Grafo Generato Ciclico



Attenzione: per ragioni di DEBUG o di TESTING fornisco di seguito l'Array ed il Dizionario dei due grafi di cui sopra per permetterne la verifica dei risultati.

Grafo Aciclico:

V = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27]

A = { 0:[1, 8], 1:[0, 12, 13], 2:[7, 18, 8, 6], 3:[4], 4:[8, 14, 5, 3], 5:[4, 10, 11], 6:[2], 7:[27, 2, 9], 8:[2, 4, 0], 9:[7], 10:[5], 11:[5], 12:[1], 13:[1], 14:[4, 15], 15:[14, 16, 17], 16:[15], 17:[15], 18:[20, 19, 2], 19:[18, 21, 23, 25], 20:[26, 22, 24, 18], 21:[19], 22:[20], 23:[19], 24:[20], 25:[19], 26:[20], 27:[7]}

R: (442.0, {2}, {0: 144.0, 1: 102.0, 2: 442.0, 3: 0, 4: 342.0, 5: 102.0, 6: 0, 7: 102.0, 8: 436.0, 9: 0, 10: 0, 11: 0, 12: 0, 13: 0, 14: 144.0, 15: 102.0, 16: 0, 17: 0, 18: 336.0, 19: 150.0, 20: 150.0, 21: 0, 22: 0, 23: 0, 24: 0, 25: 0, 26: 0, 27: 0})

Grafo Ciclico:

V = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

A = { 0:[1, 5], 1:[2, 0, 4, 8], 2:[7, 1, 8, 3], 3:[2, 8, 4, 6], 4:[8, 1, 5, 3], 5:[4, 0], 6:[7, 3], 7:[2, 6], 8:[2, 1, 4, 3] }

R: (17.06666666666667, {1}, {0: 1.9, 1: 17.06666666666667, 2: 17.066666666666666, 3: 17.066666666666666, 4: 17.066666666666666, 5: 1.9, 6: 1.9, 7: 1.9, 8: 4.133333333333334})

Attenzione: Come si può evincere dalla quantità di dati e dal Return dell'algoritmo, a grafi complessi corrispondo valori di Betweennes Centrality più complessi e più raffinati, al fine di semplificarne l'analisi è ovviamente implementabile la *normalizzazione* dei dati come è già di per se fatto all'interno di librerie come la NetworkX (Python).

3.2 Inizializzazione

Tempo : **O(n)**

L'inizializzazione dell'algoritmo consta di alcuni allocamenti preventivi di spazio in memoria, procede quindi ad inizializzare da subito il dizionario "C" ponendo a zero tutti i valori ed indicizzandoli con gli ID dei nodi del grafo. Procede quindi ad iterare su ogni singolo nodo del grafo da cui si evince subito che l'algoritmo si carica di una complessità temporale $O(n)$

3.3 Calcolo dei Cammini Minimi

Tempo : **O(m)**

Esegue una visita del grafo a partire dall'attuale nodo esaminato (praticamente una BFS nel caso di grafi non pesati), la particolarità è il suo tempo di esecuzione che, secondo il Corollario 4 del Paper di Brandes, sia pari ad $O(m)$ Durante questa visita vengono computati l'insieme *pred(s,v)* dei predecessori che giacciono sui cammini mini ed il numero di quest'ultimi tra s e v (δ_{sv})

3.4 Calcolo e somma delle Dipendenze

Tempo : **O(m)**

Terminato il calcolo dei cammini minimi, del loro numero e la popolazione dell'insieme *pred(s,v)* dei predecessori, l'algoritmo infine itera su tutti i nodi presenti nella pila salvati durante il calcolo dei cammini minimi e ne computa le rispettive dipendenze rispetto al nodo in esame. Nel corso del calcolo viene costantemente aggiornato l'indice di *Betweennes Centrality* come valore all'interno del dizionario dei risultati la cui corrispondente chiave è rappresentata dall'ID del nodo esaminato.

3.5 Restituzione del risultato

Al termine del ciclo più esterno avviato con l'inizializzazione dell'algoritmo stesso viene restituito il dizionario contenente tutti gli indici di *Betweennes Centrality* indicizzati proprio dagli ID dei nodi esaminati.

Analisi delle Prestazioni: Caso Peggiore 4

4.1 Analisi Teorica

L'analisi delle prestazioni, nel caso peggiore, consente di fatto di stabilire quanto sia piú o meno performante un dato algoritmo. L'analisi di questo algoritmo in particolare consta di diversi snipset di codice che contengono prevalentemente operazioni il cui tempo di esecuzione sia pari all'$O(m)$ per il Corollario 4 del Paper di Brandes, il resto dell'algoritmo è dominato dal ciclo esterno di Complessità pari ad un O(n).

Codice

```
C = dict((v,0) for v in V)
for s in V:
        S = []
        P = dict((w,[]) for w in V)
        g = dict((t, 0) for t in V); g[s] = 1
        d = dict((t,-1) for t in V); d[s] = 0
        Q = deque([])
        Q.append(s)
```

L'algoritmo di brandes chiede subito di allocare spazio per un dizionario C inizializzando tutte le sue chiavi a 0 ed indicizzandole con gli ID dei nodi del grafo.
L'iterazione principale viene effetuata ponendo come nodo "s" (sorgente) uno dopo l'altro tutti i nodi del grafo, è lecito quindi asserire che ciò aggiunga subito una Complessità Temporale pari ad un O(n).
L'algoritmo prosegue poi ad iniziallizare, in ordine: una Pila S, contenente in ordine non crescente di distanza(s,v); un dizionario P di predecessori composto da quei nodi che giacciono sui cammini minimi; un dizionario sigma (qui "g") contenente il numero di cammini minimi passanti per il nodo v; un dizionario delta (qui "d") contente i valori di "dependency" del nodo v

Codice

```
while Q:
        v = Q.popleft()
        S.append(v)
        for w in A[v]:

                if d[w] < 0:
                        Q.append(w)
                        d[w] = d[v] + 1

                if d[w] == d[v] + 1:
                        g[w] = g[w] + g[v]
                        P[w].append(v)

```

L'algoritmo quindi itera su tutti i nodi presenti nella coda Q (alll'inizio solo il nodo sorgente) quindi appende il nodo attualemnte sotto esame nella lista S. Itera quindi su tutti i nodi adianceti al nodo in esame estratto dalla coda.

Si chiede quindi se un nodo non fosse già stato incontrato ed in caso affermativo lo inserisce in coda a Q e quindi aumenta di 1 il valore di dipendenza nel nodo in esame.

Si chiede inoltre se il nodo v sotto esame giaccia o meno su di un cammino minimo da s quindi in caso affermativo lo aggiunge alla lista dei predecessori del nodo sorgente preso in esame.

Il Ciclo sui nodi adiacenti ad un nodo impiega effettivaemnte O(m) stando iterando essenzialmente su ogni singolo arco

Codice

```
1
2  temp = dict((v, 0) for v in V)
3
4  while S:
5    w = S.pop()
6    for v in P[w]:
7       temp[v] = temp[v] + (g[v]/g[w]) * (1 + temp[w])
8       if w != s:
9          C[w] = C[w] + temp[w]
10
```

```
Usando tutte le informazioni sui
predecessori e sui cammini minimi
del nodo s passiamo alla
"propagazione" della "dependency"
di tali nodi per poi concludere con
il computo della somma di tutti i
valori di dipendenza. Dalla Pila S
viene restituito in ordine non-crescente
di distanza da v un nodo w,
viene quindi calcolata l'importanza
di v rispetto a tutti  i nodi nell'insieme dei
predecessori P, fintanto che vengono
considerati nodi diversi dal nodo in
esame s, viene incrementato il
valore di "importanza" del nodo v
nel grafo, quindi al termine di questo civlo
viene  essenzialmente calcolata la
"Betweennes Centrality"
```

Riepilogo: Il codice così analizzato ha evidenziato il fatto che l'algoritmo indipendentemente dalla tipologia di grafo e dallo scenario della funzione principale *brandes(V,A))* risulta costare un tempo simil-quadratico. L'analisi teorica ci conferma che l'algoritmo asintoticamente, quindi per grandi quantitá di dati, è un $O(n * m) = O(|V| * |E|) \cong O(n * (n-1)) \cong O(n^2)$

4.2 Analisi Reale

Per dare una "dimostrazione" di quanto detto prima, ovvero che il tempo dell'algoritmo è un $O(|V|*|E|)$ ho pensato di realizzare un test, chiedendo al time di python di misurare 100 chiamate (con elementi decrescenti) ed osservarne il tempo di esecuzione.

4.3 Alcuni Dati

Nella tabella a fianco si possono osservare subito alcuni dati rilevanti scelti tra le prime e le ultime iterazioni. Ad ogni iterazione, per cercare di pesudo-randomizzare i dati alcune parti della funzioni *generateCyclic/AcycleGraph* venivano modificate ad-hoc im tempo reale in relazione all'attuale i-esima iterazione. Tutti i dati raccolti durante le simulazioni sono poi stati caricati in due fogli excel pronti per essere elaborati da Matlab per ottenere un grafico che possa mettere a confronto numero di nodi/tempo di esecuzione con il numero di nodi/$|V| * |E|$. Notevole di fatti è il dato del tempo di esecuzione (espresso in secondi) tranne in rare occasioni, da 1050 nodi a 10, si potrebbe dire che è rimasto "costante nel suo andamento simil-quadratico" rispetto alla quantità di nodi nell'input.

Tempo (secondi):	Numero di Nodi
0,859597206	1050
0,839123964	1039
0,812119007	1029
0,807452917	1018
0,782628059	1008
0,764032125	997
0,756317854	987
0,732420921	976
0,721984863	966
0,719624996	955
.....	.....
0,0117771625518798	115
0,00986480712890625	105
0,00811696052551269	94
0,00648427009582519	84
0,00532007217407226	73
0,00411915779113769	63
0,00298309326171875	52
0,00203299522399902	42
0,00125527381896972	31
0,00067305564880371	21
0,000211000442504882	10

Tabella 4.1: Dati presentati in ordine discendente. (Il primo rappresenta la 100-esima iterazione mentre l'ultimo dato la prima) dell'esecuzione su grafi aciclici

4.4 Caratteristiche della Macchina:

I test sono stati effettuati su di un computer notte-tempo aò fine di evitare qualsiasi interferenza da altri processi per l'accesso al disco o alle altre risorse del computer. La macchina su cui ho effettuato i test presenta le seguenti caratteristiche:

- Produttore Apple - Modello: 27"Mid2010
- Processore: 2,8 GHz Intel Core i5
- Memoria: 32 GB DDR3 1333MHz - Disco: SSD Samsung 500 GB
- Sistema Operativo: OS X El Capitain (Versione: 10.11.6 (15G17023))

4.5 Andamenti a Confronto

Attraverso Matlab, ho ottenuto il seguente grafico che evidenzia ancora di più l'andamento temporale dell'algoritmo e del $|V| * |E|$.

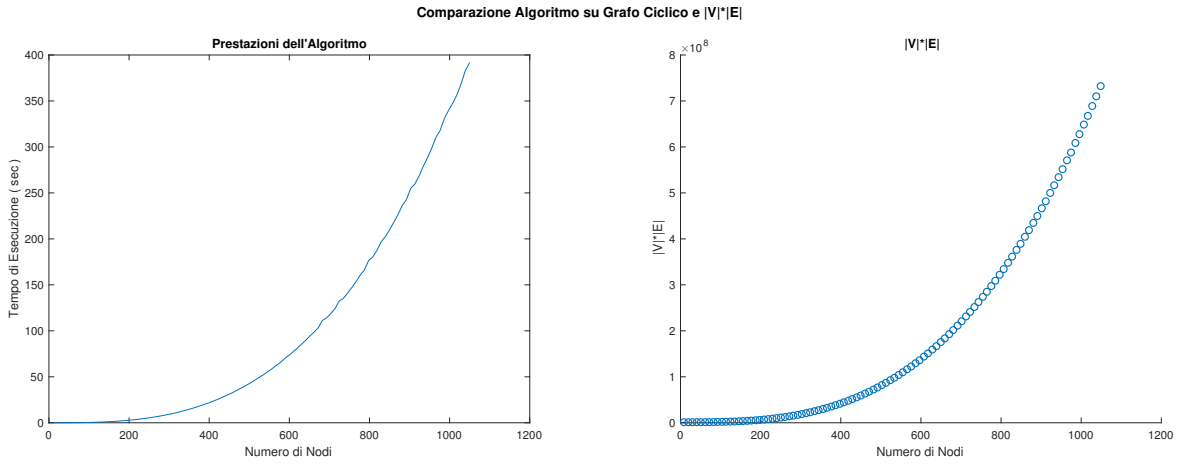


Figura 4.1: Grafico che mette a confronto numero di nodi/tempo di esecuzione e numero di nodi/$|V| * |E|$ per grafi Ciclici

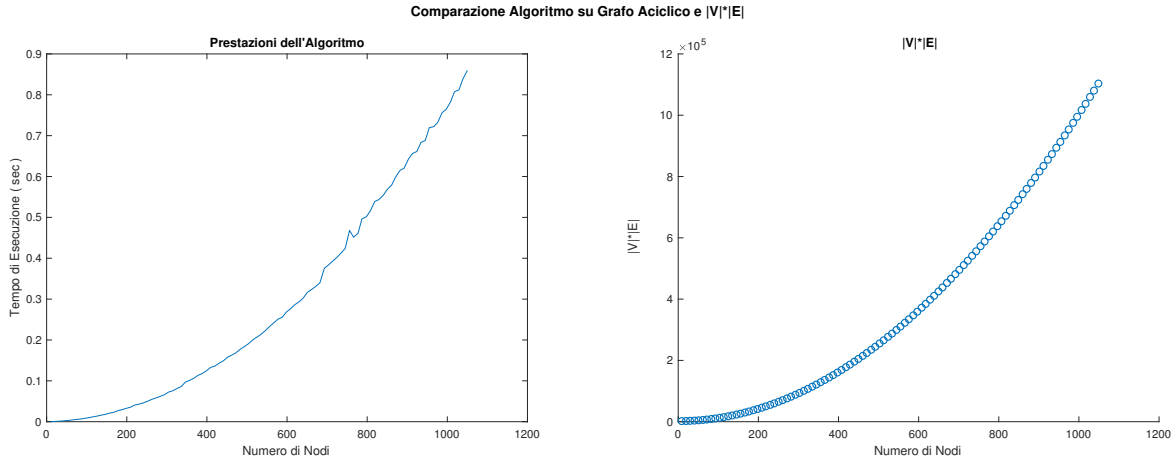


Figura 4.2: Grafico che mette a confronto numero di nodi/tempo di esecuzione e numero di nodi/$|V| * |E|$ per grafi Aciclici

Come si evince dalle Figure 4.1-2, la complessità temporale studiata teoricamente nell'analisi teorica dell'algoritmo è risultata corretta e supportata da evidenze sperimentali. Data una ricerca più approfondita in materia, l'algoritmo di Brandes detiene tutt'ora adesso il "primato" (se pur nel recente periodo sia stato ampliato e ancora più raffinato), pur essendo un algoritmo di carattere statico e avendo validissimi algoritmi di tipologia euristica come avversari. La peculiarità del presente algoritmo è insita nella "intrinseca parallelità". É infatti possibile modificare l'algoritmo e adattarlo ad una tipologia di approccio clusteristico nel quale si può demandare il calcolo dei cammini minimi e delle dipendenze a diversi core di elaborazione e quindi eseguire il tutto in parallelo.

Bibliografia 5

5.1 L'Algoritmo di Brandes

"L'indice di Betweenness Centrality è essenziale nell'analisi dei social network, ma costoso da calcolare. Attualmente, gli algoritmi più veloci richiedono tempo $\Theta(n^3)$ e spazio $\Theta(n^2)$, dove n è il numero di attori nella rete. Motivati dalla crescente necessità di calcolare gli indici di Betweenness Centrality su reti grandi ma molto sparse, in questo articolo vengono introdotti nuovi algoritmi per le relazioni interpersonali. Richiedono spazio $O(n+m)$ ed eseguono la richiesta in tempo $O(nm)$ e $O(nm+n^2log(n))$ su grafi pesati e non, rispettivamente, dove m è il numero di collegamenti "

-Abstract, A Faster Algorithm for Betweenness Centrality, Ulrik Brandes

Avendo identificato nel problema postoci la possibilità che tale argomento fosse di largo interesse, mi sono tuffato nella ricerca di paper accademici e dopo un po di *"digging"* nella rete ho scoperto questo Paper Accademico dal titolo *A Faster Algorithm for Betweenness Centrality* del prof. Ulrik Brandes.Nel suo approfondire lo stesso, mi sono reso conto della rilevanza di tale algoritmo e dei risultati sperimentali e reali che questo algoritmo ha registrato nonché della sua stessa incidenza sull'analisi di grafi più complessi dato il ridotto "time" di esecuzione. Il Paper, liberamente fruibile dalla rete, è stato comunque inserito nella cartella "Papers" del progetto al fine di fornire subito la reference in "locale" inoltre, sono stati accennati difatti alcuni risultati come l'ormai "famoso" Corollario 4, che dimostra senza alcun dubbio come il calcolo delle dipendenze e dei cammini minimi possa essere portato a termine con una Complessità Temporale pari a $O(m)$
Il Paper è stato pubblicato per la prima volta in *Journal of Mathematical Sociology 25(2):163-177, (2001).*

Conclusione 6

6.1 Riflessioni Finali

L'interezza dell'algoritmo è stata così presentata in questa "breve" relazione. Al fine di aiutare nella comprensione del codice e della relazione stessa ho scritto effettivamente alcune funzioni sovrabbondati rispetto al codice fornitoci dai tutor, magari sprecato memoria nella creazione di un grafo temporaneo od omesso alcuni passaggi di secondaria importanza dell'algoritmo in questa stessa relazione, tali scelte però sono state dettate da una criterio puramente "didattico" per aiutare nella migliore comprensione del codice. Lavorare su questo progetto è stato davvero un piacere non solo di carattere puramente esercitativo bensì scientifico. Per risolvere il problema di Betweennes Centrality ho avuto la possibilità di ricercare nei Papers Accademici e ciò è stato davvero edificante. Molto curioso ed interessante, quindi degno di nota, è il differente Tempo di Esecuzione tra grafi Ciclici ed Aciclici, tale divario poteva essere stimato come marginale invece è stato davvero rilevante (0.85 per 1050 nodi aciclici mentre circa circa 4 minuti per i ciclici).
Tutto il codice è rilasciato sotto la MIT License.

Matteo Esposito