Normal Inverse Gaussian Lévy Process

Matteo Gardini*

14 giugno 2019

Sommario

In questo documento introduciamo il processo Normal Inverse Gaussian, ne presentiamo due parametrizzazioni e ne studiamo le proprietà matematiche. Seguiremo prevalentemente quanto esposto in [2].

1 La distribuzione Normal Inverse Gaussian

Esistono vari modi per definire la distribuzione Normal Inverse Gaussian.

1.1 Normal Inverse Gaussian as Exponential Family distribution

In [2] essa viene definita a partire dalla sua densità $g(x;\alpha,\beta,\mu,\delta)$ che ha la forma:

$$g(x;\alpha,\beta,\mu,\delta) = a(\alpha,\beta,\mu,\delta)\, q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{-1} K_1\left\{\delta\alpha q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}\exp\{\beta x\} \quad (1)$$

dove

$$\begin{aligned} a(\alpha,\beta,\mu,\delta) &= \pi^{-1}\alpha \exp\left\{\delta\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)} - \beta\mu\right\} \\ q(x) &= \sqrt{1+x^2} \\ K_\lambda(z) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1}{2}z\left(u+u^{-1}\right)\right)du \end{aligned}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$, $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ e $\delta > 0$.

I parametri del NIG hanno le seguenti interpretazioni:

- α: tail heaviness of speepness
- β: simmetry

*ERG Spa, Genoa and Mathematical Departement University of Genoa. For comments and suggestions write to gardini@dima.unige.it

- δ: scale
- μ: location

Osserviamo da (1) che la Normal Inverse Gaussian fa parte dell'exponential family, una volta fissati α,μ e δ. Infatti una distribuzione di probabilità appartiene all'exponential family se ha la forma:

$$f_x(X|\theta) = h(x) \exp(\theta T(x) - A(\theta)) \tag{2}$$

Riconosciamo allora che:

$$\begin{aligned}
\eta(\theta) &= \theta = \beta \\
T(x) &= x \\
h(x) &= q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^{-1} K_1\left\{\delta\alpha q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\} \\
A(\theta) &= -\log(a(\alpha,\beta,\mu,\delta)) = -\log\left(\pi^{-1}\alpha \exp\left\{\delta\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)} - \beta\mu\right\}\right) \\
&= -\log\left(\pi^{-1}\alpha\right) - \left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \beta\mu\right)
\end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\phi_{T(x)}(u) = e^{A(iu+\eta)-A(\eta)}.$$

otteniamo la funzione caratteristica del $NIG(\alpha,\beta,\mu,\delta)$:

$$\phi_X(u) = \exp\left\{\delta\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-(\beta+iu)^2}\right) + i\mu u\right\}$$

da cui è ricavabile la funzione generatrice dei momenti $M_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX}\right]$ ricordando la relazione:

$$\phi_X(-iu) = M_X(u)$$

e quindi

$$M_X(u) = \exp\left\{\delta\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2}\right) + \mu u\right\} \tag{3}$$

1.2 Normal Inverse Gaussian as Normal Mean-Variance Mixture Model

Allo stesso risultato è possibile arrivare definendo la variabile Normal Inverse Gaussian come

$$X = \mu + \beta Z + \sqrt{Z}W$$

dove $Z \sim IG\left(\delta, \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)$ e $W \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Usando la parametrizzazione per $IG\left(a,b\right)$ seguente:

$$f_Z\left(x;a,b\right)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(ab\right)x^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(a^2x^{-1}+b^2x\right)\right) \tag{4}$$

confrontiamola con

$$f_Z\left(x;\mu,\lambda\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\lambda\left(x-\mu\right)^2}{2\mu^2x}\right\} \tag{5}$$

per la quale avevamo ricavato che la funzione caratteristica era:

$$\phi_Z\left(u\right)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2iu\mu^2}{\lambda}}\right].\right\} \tag{6}$$

Confrontando le parametrizzazioni equivalenti della distribuzione Inverse Gaussian (4) e (5) otteniamo le relazioni:

$$\mu=\frac{a}{b}$$
$$\lambda=a^2$$

che, inserite in (6), portano a:

$$\phi_Z\left(u\right)=\exp\left\{-a\left(\sqrt{-2iu+b^2}-b\right)\right\} \tag{7}$$

Avendo posto per la definizione del processo $NIG\left(\alpha,\beta,\delta,\mu\right)$, $Z\sim IG\left(\delta,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)$ e quindi $a=\delta$ e $b=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ otteniamo che la funzione caratteristica è data da:

$$\phi_Z\left(u\right)=\exp\left\{-\delta\left(\sqrt{-2iu+\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\right\} \tag{8}$$

Ricordando che $\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]=e^{i\mu u}\phi_Z\left(u\beta+\frac{iu^2}{2}\right)$, usando (8), otteniamo che

$$\begin{aligned}\phi_X\left(u\right)&=\exp\left\{-\delta\left(\sqrt{\alpha^2-\left(\beta+iu\right)^2}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)+i\mu u\right\}\\&=\exp\left\{\delta\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-\left(\beta+iu\right)^2}\right)+i\mu u\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

1.3 Convolution of NIG

Dalla funzione caratteristica possiamo osservare che due variabili aleatorie $X\sim NIG\left(\alpha,\beta,\delta_1,\mu_1\right)$ e $Y\sim NIG\left(\alpha,\beta,\delta_2,\mu_2\right)$ abbiamo che X+Y soddisfa:

$$NIG\left(\alpha,\beta,\delta_1,\mu_1\right)*NIG\left(\alpha,\beta,\delta_2,\mu_2\right)=NIG\left(\alpha,\beta,\delta_1+\delta_2,\mu_1+\mu_2\right)$$

Ponendo per semplicità $\mu=0$ osserviamo che il la distribuzione $NIG\left(\alpha,\beta,\delta\right)$ è infinitamente divisibile e quindi posso definire un processo di Lévy ad essa associata definendo la distribuzione del processo al tempo t come $NIG\left(\alpha,\beta,\delta t\right)$

2 NIG Lévy Process

Possiamo definire il processo di Lévy Normal Inverse Gaussian a partire dalla distribuzione $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$. Ricordando come abbiamo definito la variabile aleatoria di tipo Normal Inverse Gaussian otteniamo che il processo di Lévy $NIG(\alpha, \beta, \mu t, \delta t)$ può essere definito tramite subordinazione del moto browniano $W(t)$ con drift β e diffusione 1 e dove z_t è $IG\left(\delta t, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$ come:

$$X_t = W(Z_t) + \mu t.$$

Un altro modo analogo di definire il processo $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ è il seguente:

$$X_t = \mu t + \delta^2 \beta G(t) + \delta B(G(t)) \tag{10}$$

dove $G(t) \sim IG\left(1, \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$ e $B(t)$ è il moto browniano standard.
Infatti osservando che $\delta^2 G(t) \sim IG\left(\delta t, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] &= e^{iu\mu t}\mathbb{E}\left[e^{iu\beta\delta^2 G(t) + \delta^2 B(G(t))}\right] \\
&= e^{iu\mu t}\mathbb{E}\left[e^{iu\beta\delta^2 G(t) + B\left(\delta^2 G(t)\right)}\right] \\
&= \exp\left\{\delta t\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}\right) + i\mu t u\right\}
\end{aligned}$$

che è la funzione caratteristica del processo $NIG(\alpha, \beta, \mu t, \delta t)$. La scrittura (10) può essere molto utile per l'algoritmo di simulazione delle traiettorie di un processo Normal Inverse Gaussian.

2.1 Lévy decomposition and Lévy measure

Siccome il processo Normal Inverse Gaussian è un processo di Lévy esso è caratterizzato dalla sua tripletta caratteristica. Inoltre per tale processo è possibile trovare la formula di Lévy-Khintchine associata.
Il metodo più rapido per ottenere la misura di Lévy è mostrato in [3] e fa uso di un interessante risultato proposto in [1].
E' possibile quindi dimostrare che la tripletta caratteristica del processo Normal Inverse Gaussian è data da:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{2\alpha\delta}{\pi}\int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\alpha x)\, dx \\
\nu(dx) &= \frac{\alpha\delta}{\pi}\frac{\exp(\beta x) K_1(\alpha|x|)}{|x|} dx
\end{aligned}$$

dove

$$K_\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1}{2}z\left(u + u^{-1}\right)\right) du$$

Da qui possiamo dedurre che il processo NIG è un processo di puro salto.

3 Esscher Transform Framework for Risk Neutral Pricing

In questa sezione introduciamo brevemente la Trasformata di Esscher che permette di spostarsi dalla misura storica di probabilità $\mathbb{P}$ alla misura di probabilità risk-neutral $\mathbb{Q}$. Consideriamo il prezzo del sottostante $S = \{S_t, t \geq 0\}$ modellizzato come un exponential Lévy tramite un processo $NIG\left(\alpha, \beta, \delta t\right)$. Esso ha quindi la forma:

$$S_t = S_0 e^{X_t^{(NIG)}}$$

In un mercato completo possiamo definire una misura di martingala equivalente sotto la misura neutrale al rischio utilizzando il teorema di Girsanov. Utilizzando i modelli di Lévy cadiamo nei casi in cui non esiste un'unica misura risk neutral. Dobbiamo quindi determinare un criterio o un metodo per trovare la misura ottima con cui prezzare le nostre opzioni.
La trasformata di Esscher tenta di farlo scelgiendo la misura di martingala equivalente con entropia minima massimizzando una certa funzione di utilità.

Consideriamo il processo stocastico X_t e sia $f_t\left(x\right)$ la densità sotto la misura fisica $\mathbb{P}$.
Per un certo numero $\theta \in \mathbb{R} | \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\theta y\right) f_t\left(y\right) dy \leq \infty$ possiamo definire una nuova densità:

$$f_t^{\theta}\left(x\right) = \frac{\exp\left(\theta x\right) f_t\left(x\right)}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\theta y\right) f_t\left(y\right) dy}$$

Si nota facilmente che quella definita è una nuova misura di probabilità il cui integrale è unitario. L'idea è quindi quella di scegliere θ tale che il processo S_t scontato sia una martingala dove il valore atteso è fatto rispetto alla nuova densità $f_t^{\theta}\left(x\right)$. Richiediamo quindi che:

$$\mathbb{E}\left[e^{X_t}\right] = e^{rt}$$

Poniamo per semplicità $C = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\theta y\right) f_t\left(y\right) dy$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} e^{\theta x} f_t\left(x\right)/C = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}} e^{(iu+\theta)x} f_t\left(x\right) \\ &= \frac{1}{C} \int \mathbb{R} e^{i(u-i\theta)x} f_t\left(x\right) = \frac{1}{C} \phi_X\left(u - i\theta\right) \end{aligned}$$

Osservando poi che:

$$C = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} f_t\left(y\right) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{i(-i\theta)y} f_t\left(y\right) dy = \phi_X\left(-i\theta\right)$$

otteniamo

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = \frac{\phi\left(u - i\theta\right)}{\phi\left(-i\theta\right)} \tag{11}$$

Volendo calcolare $\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right]$ è sufficiente valutare l'espressione (11) in $u = -i$ ed ottenere:

$$\mathbb{E}\left[e^{X_t}\right] = \frac{\phi\left(-i - i\theta\right)}{\phi\left(-i\theta\right)} = \frac{\phi_X\left(-i\left(\theta + 1\right)\right)}{\phi\left(-i\theta\right)}$$

Ponendo $\mathbb{E}\left[e^{X_t}\right] = e^{rt}$ e risolvendo per θ otteniamo il valore di theta tale per cui il nostro processo S_t scontato è una martingala.

3.1 Esscher Transform for Normal Inverse Gaussian Process

Nel caso di Normal Inverse Gaussian process si può dimostrare che, posto $\tilde{\beta} = \theta * + \beta$ si ottiene che

$$\tilde{\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\delta^2\left(\delta^2 + r^2\right) + r\sqrt{-\delta^2\left(\delta^2 + r^2\right)\left(r^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2\alpha^2\right)}}{\delta^2\left(\delta^2 + r^2\right)}$$

4 NIG Process Simulation

In questa sezione presentiamo un algoritmo per la simulazione di un processo Normal Inverse Gaussian. L'idea dell'algoritmo è prima di tutto simulare un processo di tipo Inverse aussian e poi di utilizzarlo come tempo stocastico per subordiare un moto browniano. Algoritmi di simulazione possono essere trovati in [?]. Qui ne presentiamo uno coerente con la parametrizzazione scelta nelle precedenti sezioni.
Il primo passo è essere in grado di generare variabili di tipo Inverse Gaussian per le quali può essere utilizzato l'Algortimo 1.

Algorithm 1 Inverse Gaussian Simulation $IG\left(a, b\right)$

Genera un numero casuale v con distribuzione $\mathcal{N}\left(0, 1\right)$.
Poni $y = v^2$
Poni $x = \left(a/b\right) + y/\left(2b^2\right) + \sqrt{4aby + y^2}/\left(2b^2\right)$
Genera un numero casuale u con distribuzione $\mathcal{U}\left[0, 1\right]$
if $u \leq a/\left(a + xb\right)$ **then**
    return x as $IG\left(a, b\right)$
else
    return $a^2/\left(b^2 x\right)$ as $IG\left(a, b\right)$

Ora che sappiamo simulare variabili aleatorie con distribuzione $IG\left(a, b\right)$ simuliamo il processo $X^{IG} = \left\{X_t^{IG}, t \geq 0\right\}$ con legge $IG\left(at, b\right)$. Per simulare il processo ai tempi $\{n\Delta t, n = 0, 1, \cdots\}$ usiamo l'Algoritmo 2.
Il processo che abbiamo simulato servirà come subordinatore del moto Browniano e servirà per generare il processo Normal Inverse Gaussian di nostro interesse.

Presentiamo ora l'algoritmo per misurare un processo Normal Inverse Gaussian $X^{NIG} = \left\{X_t^{IG}, t \geq 0\right\}$ con legge $NIG\left(\alpha, \beta, \delta t\right)$ negli istanti temporali $\{n\Delta t, n = 0, 1, \cdots\}$.

Algorithm 2 Inverse Gaussian Process Simulation

Genera n variabili aleatorie i_n distribuite secondo $IG\left(a\Delta t, b\right)$

Setta il punto iniziale del processo a zero, ovvero $X_0^{IG} = 0$.

Costruisci la traiettoria in maniera iterativa ponendo:

$$X_{n\Delta t}^{IG} = X_{(n-1)\Delta t}^{IG} + i_n$$

Algorithm 3 Normal Inverse Gaussian Process Simulation

Simula il processo X_t^{IG} Inverse Gaussian agli istanti temporali $\{n\Delta t, n = 0, 1, \cdots\}$ usando l'Algoritmo 2.

Poni: $dt_{n\Delta t} = X_{n\Delta t}^{IG} - X_{(n-1)\Delta t}^{IG}$

Simula il moto Browniano standard subordianto $W = \{W_t, t \geq 0\}$ tramite:

Simula n v.a. $\nu_n \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$

Poni $W_0 = W_{X_0^{IG}} = 0$

$W_{n\Delta t} = W_{(n-1)\Delta t} + \sqrt{dt_{n\Delta t}}\nu_n$

Crea la traiettoria del NIG: $X_{n\Delta t}^{(NIG)} = \beta\delta^2 X_{n\Delta t}^{(IG)} + \delta W_{n\Delta t}$

5 Matlab Codes

In questa sezione alleghiamo i codici *MATLAB* necessari per la simulazione di un processo Normal Inverse Gaussian.

5.1 Simulazione di Variabili Inverse Gaussian

L'algoritmo seguente simula variabili distribuite secondo una $IG\,(a, b)$ utilizzando l'Algoritmo 1

```
function igVariables = IGrandEfficient(a,b,nSim,nDates)
% igVariables = IGrandEfficient(a,b,nSim,nDates)
% genera nSim variabili aleatorie Inverse Gaussian con parametri ...
    a e b
% Genera una matrice di dimensione nSim x nDates di variabili ...
    indipendenti
% distribuite secondo una Inverse Gaussian
% a,b parametri della Inverse Gaussian
% nSim: numero di simulazioni
% nDates: numero di date
%
% MG 03maggio2019

% inizializzazione
igVariables = zeros(nSim*nDates,1);

v = randn(nSim*nDates,1);

y = v.^2;
x = (a/b) + 0.5.*y./(b^2) + 0.5.*sqrt(4*a*b.*y + y.^2)./b^2;
u = rand(nSim*nDates,1);

idx = u ≤ a./(a + x.*b);

igVariables(idx) = x(idx);
igVariables(¬idx) = a^2./(b^2.*x(¬idx));

% Rendile nel formato matrice con un reshape
igVariables = reshape(igVariables,nSim,nDates);


end
```

5.2 Simulazione del processo Normal Inverse Gaussian

L'algoritmo seguente simula le traiettorie di un processo Normal Inverse Gaussian $NIG\,(\alpha, \beta, \delta t)$ utilizzando l'Algoritmo 3

```
function XNIG = NIGProcessSim(alpha,beta,Δ,dt,nSim,nDates)
% function XNIG = NIGProcessSim(alpha,beta,Δ,dt,nSim,nDates)
% Simula un processo Normal Inverse Gaussian con parametri ...
    alpha, beta,
% Δ.
% alpha: steepness of Tails
% beta: asimmetry Index
% Δ: scale parameters
% dt: intervallo temporale
```

```
% nDates: numero di date
% nSim: numero di simulazioni
%
% MG 09giugno2019

% Simula il processo IG
a = 1;
b = Δ*sqrt(alpha^2-beta^2);
XIG = IGProcessSim(a,b,dt,nSim,nDates);

% Trova gli incrementi
ΔT = diff(XIG,[],2);

% Simula la parte Browniana
nu = randn(nSim,nDates-1);

% Inizializza
W = zeros(nSim,nDates);

% Scrivi il browniano
W(:,2:end) = cumsum(sqrt(ΔT).*nu,2);

% Crea il processo NIG
XNIG = beta*Δ^2.*XIG + Δ*W;

end
```

Riferimenti bibliografici

[1] S.K. Bar-Lev, D. Bshouty, and G. Letac. Natural exponential families and self-decomposability. *Statistics Probab. Lett.*, 13:147–152, 1992.

[2] Ole E. Barndorff-Nielsen. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24(1):1–13, 1997.

[3] Ole E. Barndorff-Nielsen. Processes of normal inverse gaussian type. *Finance Stochast.*, 2:41–68, 1998.