

Momenti di Ordine Superiore e Calibrazione parametri in [1]

Matteo Gardini

31 July 2019

Sommario

In questo documento ricaviamo le formule esplicite per momenti di vario ordine per il processo proposto in [1]. Ricavare una formula esplicita permette di utilizzare il Metodo dei Momenti Generalizzato (GMM) per la calibrazione dei parametri della matrice di correlazione. Per una esposizione completa del modello si rimanda ai documenti precedenti o a [1].

1 Preliminari

Consideriamo il processo stocastico bivariato

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 G_1(t) + \sigma_1 B_1(G_1(t)) \\ \mu_1 G_2(t) + \sigma_1 B_2(G_2(t)) \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B} = (B_1(t), B_2(t))$ indipendente da \mathbf{G} e $B_1(t), B_2(t)$ indipendenti. Consideriamo:

$$G_i(t) = X_i(t) + \alpha_i Z(t)$$

$$X_i(t) \sim \Gamma\left(\left(\frac{b}{\alpha_i} - a\right)t, \frac{b}{\alpha_i}\right)$$

$$Z \sim \Gamma(a, b)$$

Consideriamo la funzione generatrice dei momenti:

$$M_{\mathbf{Y}(t)}(u_1, u_2) = \left(1 - \frac{\alpha_1(\mu_1 u_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 u_1^2)}{b}\right)^{-t\left(\frac{b}{\alpha_1} - a\right)} \left(1 - \frac{\alpha_2(\mu_2 u_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 u_2^2)}{b}\right)^{-t\left(\frac{b}{\alpha_2} - a\right)} \left(1 - \frac{\alpha_1(u_1 \mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 u_1^2) + \alpha_2(u_2 \mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 u_2^2)}{b}\right)^{-ta}$$

che per comodità riscriviamo come:

$$M_{\mathbf{Y}(t)}(u_1, u_2) = (1 - f_1(u_1))^{\gamma_1} (1 - f_2(u_2))^{\gamma_2} (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{\gamma_3}$$

e

$$K_1(u_1, u_2) = \gamma_1 (1 - f_1(u_1))^{-1} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-1}.$$

Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} f_i(u_i) &= \frac{\alpha_i}{b} \left(\mu_i u_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2 u_i^2 \right) \\ f'_i(u_i) &= \frac{\alpha_i}{b} (\mu_i + \sigma_i^2 u_i) \\ f''_i(u_i) &= \frac{\alpha_i}{b} \sigma_i^2 \\ f'''_i &= 0. \end{aligned}$$

Come notazione, nei codici, faremo uso di

1.1 Momenti di un processo di Lévy

Ricordiamo che i momenti di un processo di Lévy scalano come il tempo. Indicata con $\phi_t(u)$ la funzione caratteristica ed indicato con $\psi(u)$ l'esponente caratteristico abbiamo:

$$\begin{aligned} \phi_t(u) &= e^{t\psi(u)} \\ \frac{\partial \phi_t(u)}{\partial u} &= t\phi_t(u) \psi'(u) \\ \frac{\partial^2 \phi_t(u)}{\partial u^2} &= t^2 \phi_t(u) \psi'(u)^2 + t\phi_t(u) \psi''(u) \end{aligned}$$

Le stesse relazioni valgono per la funzione generatrice dei momenti ricordando che:

$$M_t(u) = \phi_t(-iu).$$

2 Calcolo dei momenti

In questa sezione riportiamo le formule esplicite per il calcolo dei momenti. Preferiamo scrivere i momenti in funzione di f_i, K_i ed M_t per ragione di compattezza. Calcoliamo le derivate parziali miste di M_t ricordando che:

$$m_n = \mathbb{E}[X^n(t)] = M_X^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n M_X(u)}{du^n} \right|_{u=0}.$$

e che per i momenti incrociati di ordine $n = l + k$ vale:

$$\mathbb{E}[X^l Y^k(t)] = \left. \frac{d^n M_{(X,Y)}(u, v)}{du^l dv^k} \right|_{u=0, v=0}.$$

2.1 Calcolo delle derivate di $M_{Y(t)}(u_1, u_2)$

$$\frac{\partial M}{\partial u_1} = -f_1'(u_1) M(u_1, u_2) K_1(u_1, u_2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial u_1^2} &= -f_1''(u_1) [M(u_1, u_2) K_1(u_1, u_2)] \\ &\quad - f_1'(u_1) \left[\frac{\partial M}{\partial u_1} K_1(u_1, u_2) + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_1}{\partial u_1} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M}{\partial u_1^3} &= -2f_1''(u_1) \left[\frac{\partial M}{\partial u_1} K_1(u_1, u_2) \right] + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_1}{\partial u_1} \\ &= -f_1'(u_1) \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u_1^2} K_1(u_1, u_2) + 2 \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial K_1}{\partial u_1} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M}{\partial u_1^2 \partial u_2} &= -f_1''(u_1) \left[\frac{\partial M}{\partial u_2} K_1(u_1, u_2) + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_1}{\partial u_2} \right] \\ &= -f_1'(u_1) \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} K_1(u_1, u_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial K_1}{\partial u_2} + \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial K_1}{\partial u_1} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 M}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} &= -f_1''(u_1) \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u_2^2} K_1(u_1, u_2) + 2 \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial K_1}{\partial u_2} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2^2} \right] \\ &\quad - f_1'(u_1) \left[\frac{\partial^3 M}{\partial u_1 \partial u_2^2} K_1(u_1, u_2) + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial K_1}{\partial u_2} + \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_2^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 M}{\partial u_1^3 \partial u_2} &= -2f_1''(u_1) \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} K(u_1, u_2) + \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial K_1}{\partial u_2} + \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \\ &\quad - f_1'(u_1) \left[\frac{\partial^3 M}{\partial u_1^2 \partial u_2} K_1(u_1, u_2) + \frac{\partial^2 M}{\partial u_1^2} \frac{\partial K_1}{\partial u_2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1^2} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^3 K_1}{\partial u_1^2 \partial u_2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} = -f_1'(u_1) \left[\frac{\partial M}{\partial u_2} K_1(u_1, u_2) + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_1}{\partial u_2} \right] \quad (7)$$

2.2 Derivate di $K_i(u_1, u_2)$

$$K_1(u_1, u_2) = \gamma_1 (1 - f_1(u_1))^{-1} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-1}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_1} = \left[\gamma_1 (1 - f(u_1))^{-2} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-2} \right] f_1'(u_1) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1^2} &= \left[\gamma_1 (1 - f(u_1))^{-2} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-2} \right] f_1''(u_1) \\ &\quad + 2f_1'(u_1)^2 \left[\gamma_1 (1 - f(u_1))^{-3} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-3} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_1}{\partial u_1^2 \partial u_2} &= f_1''(u_1) f_2'(u_2) \left[2\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-3} \right] \\ &\quad + 2f_1'(u_1)^2 \left[3\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-4} f_2'(u_2) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial u_1 \partial u_2} = 2f_1'(u_1) f_2'(u_2) \left[\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-3} \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_2} = \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-2} f_2'(u_2) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u_2^2} &= 2\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-3} f_2'(u_2)^2 \\ &\quad + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-2} f_2''(u_2) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_1}{\partial u_1 \partial u_2^2} &= 6\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-4} f_2'(u_2)^2 f_1'(u_1) \\ &\quad + 2\gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-3} f_2''(u_2) f_1'(u_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Grazie a queste espressioni posso ricavare i momenti incrociati seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1 Y_2] &= \left. \frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0} \\ \mathbb{E}[Y_1^2 Y_2] &= \left. \frac{\partial^3 M}{\partial u_1^2 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0} \\ \mathbb{E}[Y_1^3 Y_2] &= \left. \frac{\partial^4 M}{\partial u_1^3 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0} \\ \mathbb{E}[Y_1^2 Y_2^2] &= \left. \frac{\partial^4 M}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} \right|_{u_1=0, u_2=0} \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che i momenti incrociati $\mathbb{E}[Y_1 Y_2^2]$ e $\mathbb{E}[Y_1 Y_2^3]$ posso essere ricavati sfruttando la simmetria del problema e giocando opportunamente coi termini $f_1(u_1), f_2(u_2)$ e $K_1(u_1, u_2)$.

Remark 2.1. Notiamo infatti che posto:

$$K_2(u_1, u_2) = \gamma_2 (1 - f_2(u_2))^{-1} + \gamma_3 (1 - f_1(u_1) - f_2(u_2))^{-1}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial u_2^2} &= -f_2''(u_2) [M(u_1, u_2) K_2(u_1, u_2)] \\ &\quad - f_2'(u_2) \left[\frac{\partial M}{\partial u_2} K_2(u_1, u_2) + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_2}{\partial u_2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M}{\partial u_2^2 \partial u_1} &= -f_2''(u_2) \left[\frac{\partial M}{\partial u_1} K_2(u_1, u_2) + M(u_1, u_2) \frac{\partial K_2}{\partial u_1} \right] \\ &= -f_2'(u_2) \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} K_2(u_1, u_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial M}{\partial u_2} \frac{\partial K_2}{\partial u_1} + \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial K_2}{\partial u_2} + M(u_1, u_2) \frac{\partial^2 K_2}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

3 Risultati Numerici

In questa sezione analizziamo se l'aggiunta di momenti di ordine superiore nel Metodo dei Momenti Generalizzato (GMM) aumenti l'accuratezza della procedura di stima dei parametri.

Per verificare l'efficacia dell'aggiunta dei momenti di ordine superiore procediamo come segue. Generiamo $N_{scen} = 5000$ valori dei parametri $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2, b$ ed a . Indichiamo con $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2, b, a)$ una qualsiasi realizzazione di questo set di parametri. Utilizziamo θ per generare una realizzazione del processo $\mathbf{Y}(t)$ della dimensione N_{dates} con passo temporale $\Delta t = 1$. Eseguiamo su questo set di dati la calibrazione tramite GMM dei parametri di correlazione a e b e poi calcoliamo l'errore ϵ di stima dei parametri:

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \hat{a} - a \\ \epsilon_b &= \hat{b} - b \end{aligned}$$

Tracciamo, quindi, poi la distribuzione di tali errori (Figure 1 e 2). N_{dates} viene scelto con due valori possibili: $N_{dates}^1 = 900$ e $N_{dates}^2 = 510^5$. Il primo set di campioni è della dimensione di un ipotetico reale set di valori di mercato il secondo set di valori ci è utile per verificare se, almeno asintoticamente, il fitting dei parametri migliora all'aumentare del numero dei momenti.

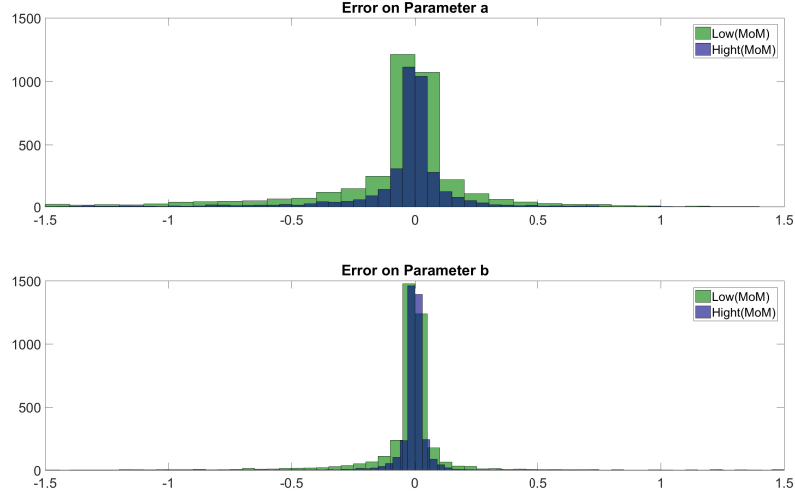


Figura 1: Distribuzione degli errori di stima dei parametri nel caso “asintotico” con N_{dates}^2 . Low indica l'utilizzo dei primi tre momenti incrociati mentre Hight indica l'utilizzo di tutti e sei i momenti incrociati.

Consideriamo i momenti incrociati seguenti:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[Y_1 Y_2] \\ &\mathbb{E}[Y_1^2 Y_2] \\ &\mathbb{E}[Y_1 Y_2^2] \\ &\mathbb{E}[Y_1^2 Y_2^2] \\ &\mathbb{E}[Y_1^3 Y_2] \\ &\mathbb{E}[Y_1 Y_2^3] . \end{aligned}$$

Eseguiamo due tipi di calibrazione: la prima sfruttando i primi tre momenti incrociati (Low) ed una utilizzandoli tutti (Hight).

In Figura 1 è riportata la distribuzione degli errori dei parametri a e b nel caso di campione N_{dates}^2 . Si nota come l'introduzione di momenti di ordine superiore consenta la diminuzione della varianza della distribuzione degli errori.

In Figura 2 invece utilizziamo una dimensione del campione equiparabile a quella del mercato reale, ovvero $N_{dates}^1 = 900$. In questo caso l'aggiunta dei momenti di ordine superiore non sembra comportare un significativo miglioramento nella stima dei parametri, soprattutto per quanto riguarda il parametro a . Per questo motivo riteniamo che in fase di calibrazione dei parametri sul mercato reale ci si possa limitare all'utilizzo dei primi tre momenti incrociati, senza utilizzare i momenti di ordine superiore.

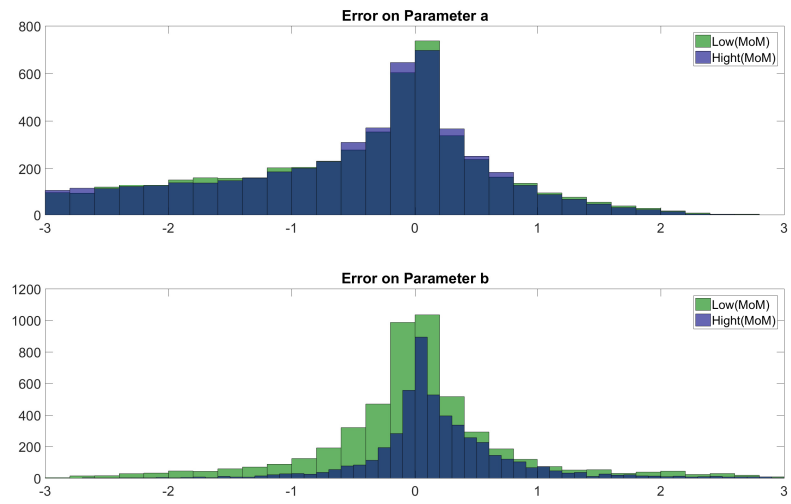


Figura 2: Distribuzione degli errori di stima dei parametri nel caso “asintotico” con N_{dates}^1 . Low indica l’utilizzo dei primi tre momenti incrociati mentre Hight indica l’utilizzo di tutti e sei i momenti incrociati.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Semeraro. A multivariate variance gamma model for financial applications. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, (1):1–18, 2008.