

I modelli di Black-Scholes-Merton ed il modello di Black76

Matteo Gardini*

23 Maggio 2019

Sommario

Lo scopo di questo documento è introdurre il modello proposto da Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton [11],[12] e di mostrare come il modello di Black76 ne derivi immediatamente [9]. Malgrado i numerosi limiti evidenziati negli anni a venire, il modello di Black è ancora ampiamente utilizzato nei mercati, soprattutto per quanto riguarda opzioni su futures o su obbligazioni. Infatti, sebbene molte ipotesi su cui si basa il modello di Black possano essere considerate troppo semplificative, la sua semplicità e la sua trattabilità analitica gli consentono di rivestire ancora un ruolo cardine nella finanza quantitativa.

1 Introduzione

1.1 Il mondo di Black-Scholes-Merton

Il modello di Black-Scholes si basa su alcune ipotesi. La prima è che esista un titolo rischioso, chiamato generalmente stock, ed un titolo privo di rischio, chiamato money-market o bond. Le assunzioni sugli asset sono le seguenti:

- Il tasso di interesse del titolo non rischioso è costante ed è chiamato risk-free rate.
- La dinamica dei log-return del titolo rischioso è considerata di tipo moto browniano con drift: più precisamente la dinamica del titolo rischioso segue un moto browniano geometrico.
- Il titolo rischioso non paga dividendi.

Vengono fatte anche alcune assunzioni sul mercato

- Non è ammesso arbitraggio
- E' possibile prendere/dare in prestito al tasso risk-free una qualsiasi quantità di denaro.

*PhD Report: Maggio 2019, ERG Spa, Genova. per commenti e suggerimenti scrivere a gardini@dima.unige.it

- E' possibile comprare/vendere una qualsiasi quantità di stock.
- Non ci sono costi di transazione.

Da ultimo, si suppone che ci sia un derivato che abbia come sottostante lo stock. Quello che è sorprendente è che viene dimostrato che il valore di tale derivato, è completamente determinato al tempo corrente, indipendentemente dalla traiettoria che prenderà il sottostante su cui è scritto. Inoltre, per contratti Europei standard, Black e Scholes hanno dimostrato che è possibile costruire una strategia di hedging che si basa su una posizione corta dell'opzione e lunga sul sottostante (Δ -hedging).

1.2 Notazione

Introduciamo qui della notazione che ci servirà nel corso della trattazione.

- S_t valore dello stock al tempo t .
- $V(t, S_t)$ valore dell'opzione scritta sul sottostante S al tempo t .
- K strike price dell'opzione.
- r tasso di interesse risk-free annualizzato (continuously-compound).
- μ drift dello stock annualizzato.
- σ volatilità dello stock annualizzata.
- t tempo in anni. $t = 0$ ora, $t = T$ expiry-date dell'opzione.
- Π : valore del portafoglio.

2 Derivazione della Formula di Black-Scholes-Merton

In questa sessione deriviamo l'equazione di Black-Scholes utilizzando l'approccio originale proposto dagli autori.

Consideriamo la seguente dinamica per lo stock:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1)$$

dove W_t è un moto browniano: intuitivamente è un processo che va su e giù di modo che la media sia zero e la varianza al tempo T sia esattamente pari a T . E' fondamentale osservare che il moto browniano è la sola fonte di incertezza nell'intera economia.

Consideriamo ora il titolo scritto sul sottostante che abbiamo indicato con $V(t, S_t)$ e, utilizzando il lemma di Ito e separando le componenti in dt e dW , scriviamone la dinamica:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (2)$$

Consideriamo ora un portafoglio, chiamato *delta-hedgeportafoglio* che consiste nell'essere corti nell'opzione e lunghi di $\frac{\partial V}{\partial S}$ unità di sottostante al temp t . Il valore risulta pari a

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S. \quad (3)$$

Se consideriamo l'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ la variazione di valore del portafoglio è data da:

$$\Delta \Pi = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S. \quad (4)$$

Discretizzando (1) e (2) otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W \\ \Delta V &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W \end{aligned}$$

e sostituendole in (4) otteniamo:

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (5)$$

Osserviamo che la componenti in ΔW , ovvero quella aleatoria, è sparita ed il portafoglio è quindi privo di rischio. Per evitare che ci sia arbitraggio il rendimento di questo portafoglio deve essere pari a quello di qualunque altro strumento privo di rischio. Nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ deve quindi valere:

$$r \Pi \Delta t = \Delta \Pi \quad (6)$$

Eguagliando (5) e (6) e usando (3) otteniamo che:

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t = r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right) \Delta t$$

Semplificando l'eguaglianza otteniamo l'equazione di Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0. \quad (7)$$

Abbianando questa equazione alle derivate parziali a differenti payoff è possibile ottenere il prezzo di un qualsiasi derivato Europeo, nel modello di Black-Scholes. Per derivati particolarmente semplici è possibile ottenere delle formule di pricing esatte, come vedremo nella prossima sessione.

Esiste un altro modo di derivare l'equazione di Black-Scholes utilizzando un approccio più astratto basato sulla misura neutrale al rischio e sull'utilizzo del teorema di Girsanov. Questo approccio, sebbene più moderno e versatile, richiede conoscenze avanzate di teoria della misura e non ha un significato economico ben definito: il riferimento per l'interessato è [1]. Per questa ragione si è preferito derivare l'equazione di Black-Scholes basandosi sull'approccio proposto in [10].

3 Formule analitiche di Pricing

La risoluzione dell'equazione (7), abbinata ad opportune condizioni al contorno, consente di determinare il prezzo di un derivato sotto le ipotesi su cui verte il modello di Black-Scholes.

Consideriamo, ad esempio, il pricing di una Call. Per tale contratto le condizioni al contorno sono:

$$C(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (8)$$

$$C(t, +\infty) = S \quad \forall t > 0 \quad (9)$$

$$C(T, S) = (S - K)^+ \quad (10)$$

La condizione (8) sta affermando che per valori del sottostante prossimi allo zero, il valore del contratto è nullo. La condizione (9) afferma che, per valori molto grandi del sottostante, deterrere la Call o il sottostante è sostanzialmente la stessa cosa. L'ultima condizione (10) è la condizione di payoff ben nota per le Call.

Nulla vieta di risolvere l'equazione alle derivate parziali (7) tramite tecniche numeriche (differenze finite o elementi finiti). Tuttavia, in questo semplice caso, è possibile dimostrare che, tramite un opportuno cambio di variabili, è possibile ridurre l'equazione di Black-Scholes all'equazione del calore ed ottenere una formula chiusa per il pricing di una Call scritta sul sottostante S_t . La derivazione della soluzione è semplice ma lunga, per cui viene omessa. A solo titolo informativo è possibile dimostrare che il valore dell'opzione Call può essere calcolato più semplicemente tramite:

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_T - K)^+ \right] \quad (11)$$

dove \mathbb{Q} è la misura neutrale al rischio. Sebbene i due approcci conducano al medesimo risultato, la derivazione della formula esatta per una Call europea è più semplice risolvendo il valore atteso in (11) che l'equazione (7). Si osservi, da ultimo, che l'equazione (11) è la base per il pricing tramite algoritmi Monte Carlo. L'uguaglianza dei risultati tra i due approcci proposti è garantita formalmente dal teorema di Feynman-Kac.

3.1 Formule Esatte

In questa sessione riportiamo, senza dimostrazione, le formule esatte per il calcolo di opzioni Put e Call Europee scritte su un sottostante la cui dinamica è descritta da (1). Il valore di una Call Europea è dato da:

$$C(S_t, t) = N(d_1) S_t - N(d_2) K e^{-r(T-t)},$$

mentre il valore della Put corrispondente è dato da:

$$P(S_t, t) = N(-d_2) K e^{-r(T-t)} - N(-d_1) S_t.$$

Nelle precedenti equazioni si è posto:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right] \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\
N(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy
\end{aligned}$$

3.2 Modello di Black76

Il modello di Black76 è un caso particolare del modello di Black-Scholes. In questo caso il prezzo del sottostante S_t è sostituito dal prezzo future scontato $F_t e^{-r(T-t)}$. Inserendo tale espressione nelle espressioni per d_1 e d_2 e in $C(S_t, t)$ e $P(S_t, t)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
C(F_t, t) &= (N(d_1) F_t - N(d_2) K) e^{-r(T-t)}, \\
P(F_t, t) &= (N(-d_2) K - N(-d_1) F_t) e^{-r(T-t)}. \\
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \frac{F_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right] \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

Osserviamo anche un fatto che ci sarà utile per le simulazioni Monte Carlo. Si può dimostrare che, sotto la misura neutrale al rischio \mathbb{Q} la dinamica del Forward è data da:

$$dF_t = F_t \sigma dW_t. \quad (12)$$

Discretizzando la dinamica sovrastante o ottenendo una formula chiusa per la dinamica del sottostante è possibile eseguire le simulazioni Monte Carlo necessarie, ad esempio, per il pricing di derivati esotici.

3.2.1 Dinamica future sotto la misura risk-neutral \mathbb{Q}

Dimostriamo, per completezza, che la dinamica del prezzo future sotto la misura risk-neutral è data da (12).

Sotto \mathbb{Q} la dinamica del sottostante S_t è data da:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

mentre il prezzo future, per tematiche di non arbitraggio, è dato da

$$F_t = S_t e^{r(T-t)} \quad (13)$$

Utilizziamo la formula di Ito per il processo in (13) considerando la funzione $f(x, t) = x e^{r(T-t)}$ che ammette derivate pari a:

$$\begin{aligned}
f_t(x, t) &= -r x e^{r(T-t)} \\
f_x(x, t) &= e^{r(T-t)} \\
f_{xx}(x, t) &= 0,
\end{aligned}$$

otteniamo che:

$$dF_t = -rS_te^{r(T-t)}dt + e^{r(T-t)}(rS_tdt + \sigma S_t dW_t)$$

che, semplificando e ricordando $F_t = S_te^{r(T-t)}$, si riduce a

$$dF_t = F_t \sigma dW_t.$$

4 Formule analitiche per le Greche

Una delle comodità del modello di Black-Scholes sta nel fatto che, oltre ad ammettere formule esatte per il calcolo dei prezzi di alcuni semplici derivati, consente di derivare formule analitiche per il calcolo delle greche di questi derivati. Le greche sono fondamentali in fase di hedging per rendere neutrale al rischio un determinato portafoglio.

Inoltre esse possono essere utilizzate per rendere il calcolo del VaR più rapido di quanto si avrebbe ricorrendo a tecniche di Full-Valuation. In questa sezione deriviamo le formule per le greche di maggiore interesse ovvero θ , Δ e Γ .

4.1 Un risultato preliminare

Per poter calcolare le greche è necessario appellarsi alla così detta *Leibniz's rule for differentiation*, la quale afferma che, dato $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$, differenziando rispetto ad x vale la formula seguente.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (14)$$

4.2 Derivazione del Δ

Calcoliamo il Δ per un'opzione Call Europea il cui prezzo è dato da:

$$C(S, t) = S\mathcal{N}(d_1) - e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

Il Δ , applicando (14), è dato da:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) + S \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K \frac{\partial \mathcal{N}(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})}{\partial S} \quad (15)$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{K}{S} \frac{1}{K} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \quad (16)$$

Osserviamo, inoltre, che:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{y^2/2} dy \right) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_1}{\partial S} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1 - \sigma\sqrt{T-t}} e^{y^2/2} dy \right) = \frac{e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_2}{\partial S} \quad (18)$$

Usando (16), (17) e (18) in (15) otteniamo:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) + \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \left[S \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} - e^{r(T-t)} K \frac{e^{-(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right] \quad (19)$$

Analizziamo solo il termine tra parentesi sviluppando il quadrato e ricordando che $d_1\sigma\sqrt{T-t} = \log S/K + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$, otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[S - K e^{-r(T-t) + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2} \right] \\ &= \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[S - K e^{-r(T-t) + \log(S/K) + r(T-t) - \sigma^2/2(T-t) + \sigma^2/2(T-t)} \right] \\ &= \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[S - K e^{\log(S/K)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Segue quindi che

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1)$$

4.3 Derivazione del Γ

Il calcolo del Γ è molto più semplice. Applicando ancora la regola di derivazione di Leibnitz (14) ed utilizzando (16) otteniamo:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{d_1^2/2} \frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= \phi(d_1) \frac{K}{S} \frac{1}{K} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} = \phi(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

dove $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

4.4 Derivazione del θ

Calcoliamo ora il $\theta = \frac{\partial C}{\partial t}$ dell'opzione, servendoci sempre di (14).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t} - K r e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) - K e^{-r(T-t)} \phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t} \quad (20)$$

Poniamo $\tau = T - t$ ed osserviamo che, procedendo come nella Sezione 4.2:

$$K e^{-r\tau} \phi(d_2) = K e^{-r\tau} \frac{e^{-d_2^2/2 + d_1\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau/2}}{\sqrt{2\pi}} = K \phi(d_1) e^{\log(S/K)} = \phi(d_1) S.$$

e che

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$$

le quali, inserite in (20), portano a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \phi(d_1) \left[S \frac{\partial d_1}{\partial t} - S \left(\frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] - rK e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_2) \\ &= -\phi(d_1) S \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rK e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_2) \\ &= -\phi(d_1) S \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rK e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

Ulteriori greche posso essere ricavate in modo analogo.

5 Approccio Monte Carlo per il pricing di Opzioni

Il metodo Monte Carlo nacque nella prima metà degli anni 40 nell'ambito del progetto Manhattan. Una delle sue principali applicazioni è il calcolo di integrali ed su questa che ci focalizziamo dato che ci verrà utile per derivare le tecniche di Pricing Monte Carlo delle opzioni.

5.1 Il metodo Monte Carlo

Supponiamo di avere una qualsiasi funzione in una variabile $f(x)$ e di volerne calcolare $\int_a^b f(x)$. L'idea del metodo Monte Carlo è osservare che:

$$\mathbb{E}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

dove $g(x)$ è una funzione di densità (ovvero tale che il suo integrale sulla retta \mathbb{R} sia pari a 1. Osserviamo che, ponendo $D = [a, b]$, $g(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_D$ otteniamo

$$\mathbb{E}[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = \mathbb{E}[f] (b-a) \quad (21)$$

Quello che resta da calcolare per ottenere una stima dell'integrale in (23) è $\mathbb{E}[f]$. Utilizzando il teorema centrale del limite ponendo $x_i \sim U[a, b]$ i.i.d. abbiamo che una stima di $\mathbb{E}[f]$ è data da

$$\mathbb{E}[f] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (22)$$

Risulta allora che

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (23)$$

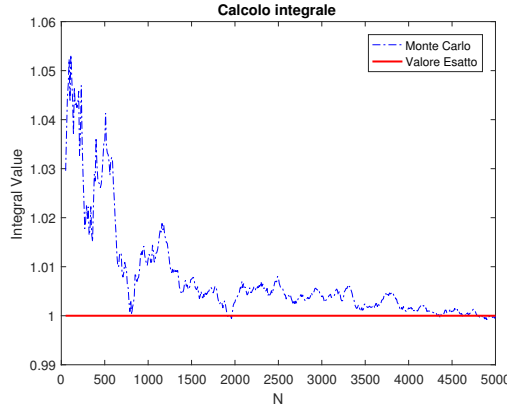


Figura 1: Convergenza del metodo Monte Carlo per il calcolo di $\int_0^\pi \sin(x) dx$

Quindi, generando numeri casuali x_i distribuiti uniformemente nell'intervallo $[a, b]$ è possibile calcolare l'integrale desiderato.

E' ovvio che all'aumentare nel numero di campioni casuali N si ha un'aumento della precisione di calcolo. Tuttavia, il maggior difetto del metodo Monte Carlo è la velocità di convergenza dell'errore. Si può dimostrare che la deviazione dell'errore tende a 0 con l'ordine $O(N^{-1/2})$. Quindi se voglio aumentare la precisione del calcolo di un fattore 10 le simulazioni vanno aumentate di un fattore 100.

5.1.1 Un semplice esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(x)$ e calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = 1 \quad (24)$$

Utilizzando il metodo Monte Carlo per N che va da 10 a 5000 otteniamo quanto mostrato in Figura 1.

5.1.2 Applicazioni al Pricing di Opzioni

Come abbiamo visto nella sezione precedente, il metodo Monte Carlo è un metodo molto utile per il calcolo di integrali, anche in spazi multidimensionali. In questa sessione, seguendo quanto proposto in [4], usiamo il metodo Monte Carlo per il pricing di un contratto Europeo. Ponendoci nel mondo Risk-neutral, consideriamo la dinamica dello stock:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (25)$$

Le simulazioni Monte Carlo possono essere in due modi: o dinamicamente, come un processo di cui si misurano numerose traiettorie di prezzo S_t a cui segue una valutazione appropriata del payoff, o come un'approssimazione formale dell'integrale tramite MC. Ricordiamo che la distribuzione del processo S_t è log-normale con densità

$$f_{GBM}(S, t; S_0, r, \sigma) = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{\left(\log(S/S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \right)^2}{2\sigma^2 t} \right\} \quad (26)$$

Entrambe i metodi sono equivalenti e l'approccio simulativo può essere visto semplicemente come implementazione della procedura Monte Carlo di calcolo dell'integrale.

5.1.3 Rappresentazione integrale

Seguendo l'approccio di valutazione risk-neutral di un contratto Europeo $V(t, S_t)$ è possibile affermare che il valore al tempo $t = 0$ di tale contratto può essere calcolato come

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(S_T, T)] \quad (27)$$

dove \mathbb{Q} è la misura di probabilità Risk-neutral. Utilizzando (26) possiamo scrivere:

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \int_0^\infty (K - S_T)^+ f_{GBM}(S_T, T; S_0, r, \sigma) \quad (28)$$

5.1.4 Versione basica per Opzioni Europee

L'idea della versione simulativa è semplice: si calcola un numero sufficientemente grande di traiettorie N sempre a partire dal punto iniziale S_0 e poi si media sui valori del payoff $\Phi(S_T)_k$ per $k = 1, \dots, N$. Questa procedura è identica a calcolare l'integrale (28) tramite la procedura descritta nella Sezione 5.1. L'equivalenza tra i due metodi (simulativo e Monte Carlo formale) è garantita dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi((S_T)) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(S_T) f_{GBM}(S_T) dS_T = \mathbb{E}(\Phi(S_T))$$

Grazie a questa relazione, possiamo definire l'algoritmo Monte Carlo per opzioni Europee come in 1.

Il valore \hat{V} è l'approssimazione cercata per il valore del contratto e $\hat{V} \approx V(S_0, 0)$. La trattazione generale del metodo Monte Carlo è lunga e complessa. Per ulteriori approfondimenti ci si può riferire a [4].

5.2 Metodi di simulazione - Formule Esatte vs Metodo di Eulero

Per poter applicare il metodo Monte Carlo presentato nella Sezione 5.1.4 è necessario essere in grado di simulare l'Equazione (25). In questa sezione si è scelto di vedere il metodo Monte Carlo nella sua versione finanziariamente più intuitiva, ovvero come simulazione di numerosi percorsi possibili del sottostante

Algorithm 1 Monte Carlo per Opzioni Europee

- 1: Per $k = 1, \dots, N$ scegli un metodo per integrare la SDE (25) per $0 \leq t \leq T$.
Sia il risultato finale pari a $(S_T)_k$.
- 2: Valutando la funzione payoff Φ si ottengono i valori:

$$(V(S_T, T))_k = \Phi((S_T)_k) \quad k = 1, \dots, N.$$

- 3: Una stima del valore atteso sotto la densità risk-neutral è dato da:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V(T, S_T)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (V(T, S_T))_k$$

- 4: La variabile scontata

$$\hat{V} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V(T, S_T))$$

è una variabile aleatoria tale che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\hat{V}) = V(S_0, 0)$.

per i quali si valuterà un payoff che, mediato ed attualizzato, fornirà un'approssimazione del valore del contratto.

In generale esistono due metodologie per la simulazione dei processi stocastici a partire da una dinamica data: la discretizzazione di Eulero e le simulazioni tramite formule esatte. Il vantaggio della prima metodologia è che tale metodo è applicabile nella maggioranza dei casi. Data una equazione differenziale stocastica che descrive l'andamento di un processo, l'idea è di passare dal continuo al discreto e poi di simulare. Il principale svantaggio di questa tecnica è che viene introdotto un errore di discretizzazione che va gestito.

La seconda tecnica non introduce un errore di discretizzazione: tuttavia essa richiede una soluzione in forma chiusa per l'equazione alle derivate stocastiche, forma chiusa che spesso non è ricavabile. Vediamo, nel caso del modello di Black-Scholes cosa vuol dire applicare i due metodo. Per la trattazione completa ci si può riferire a [4].

5.2.1 Metodo di Eulero

Consideriamo la dinamica risk-neutral del modello di Black-Scholes per il sottostante.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (29)$$

e consideriamone la sua dinamica discretizzata, dove l'intervallo infinitesimo dt viene sostituito dall'intervallo finito Δt . L'equazione, allora, diventa.

$$\Delta S_t = rS_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \quad (30)$$

dove si ricordi che $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$. Otteniamo quindi l'equazione induttiva seguente

$$S_{t+1} = S_t (1 + r\Delta t + \sigma \Delta W_t) \quad (31)$$

che, a partire dal un valore dato S_0 ci permette di simulare la dinamica del sottostante. Per una dettagliata analisi dell'errore di discretizzazione si veda [4].

5.2.2 Formula Esatta

E' possibile dimostrare abbastanza facilmente, usando il lemma di Ito, che l'Equazione (30) ammette la seguente soluzione esatta:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \quad (32)$$

dove $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Il pregio dell'Equazione (33) è che non è stato introdotto nessun errore di discretizzazione. E' possibile quindi generare le traiettorie del sottostante tramite l'equazione ricorsiva seguente:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma W_{\Delta t} \right\} \quad (33)$$

Osserviamo anche che, tramite l'equazione (33), è possibile simulare il sottostante ad un generico istante di tempo T , senza simulare tutti i punti intermedi in $[t, T]$. Questo rendere le simulazioni per il pricing di opzioni Europee tramite questo metodo molto più efficiente, siccome i valori intermedi (ininfluenti per il pricing di un'opzione non path-dependent) non vengono simulati.

5.2.3 Simulazioni Forward

I metodi di simulazioni appena illustrati posso essere applicati anche per la simulazione delle traiettorie del prezzo forward. Si ha che, come osservato in precedenza, la dinamica risk-neutral del prezzo forward è data da:

$$dF_t = \sigma F_t dW_t$$

L'applicazione della discretizzazione di Eulero ci porta a:

$$F_{t+1} = F_t (1 + \sigma W_{\Delta t})$$

mentre la soluzione esatta ci porta alla seguente equazione ricorsiva:

$$F_{t+\Delta t} = F_t \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \Delta t + \sigma W_{\Delta t} \right\}$$

6 Alcuni risultati numerici

In questa sezione produciamo alcuni risultati numerici. In una prima fase verifichiamo che i metodi Monte Carlo proposti per il framework Black-Scholes producano gli stessi risultati mentre, in una seconda fase, spieghiamo il procedimento generare per il pricing di contratti con il metodo Monte Carlo.

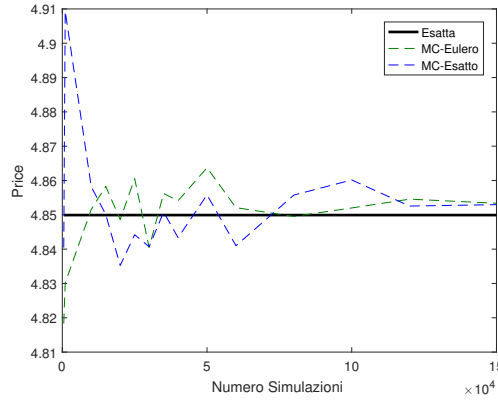


Figura 2: Verifica di convergenza al prezzo esatto all'aumentare del numero di simulazioni

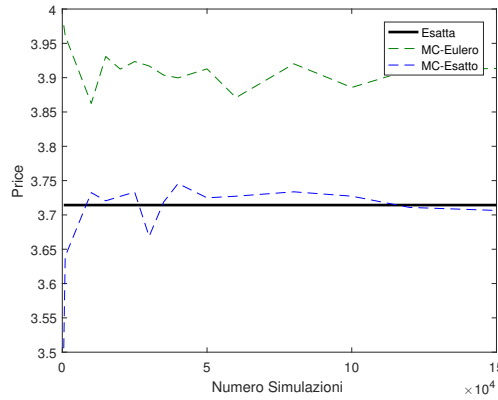


Figura 3: Confronto tra metodo Monte Carlo con schema di Eulero e con soluzione esatta all'aumentare delle simulazioni. $\Delta t = 0.1$

6.1 Confronto numerico dei metodi di Pricing Monte Carlo

In questa sezione confrontiamo i tre metodi di pricing applicati per determinare il premio di un'opzione Put nel modello di Black-Scholes. Consideriamo il seguente set di parametri: $S_0 = 5$, $K = 10$, $r = 0.016$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ e $\Delta t = 0.01$ [4]. In Figura 2 si può notare come il prezzo dell'opzione calcolato con entrambe i metodi (Eulero e Soluzione esatta) converge al prezzo dato dalla formula esplicita al crescere delle simulazioni.

Per dimostrare che, quando è disponibile, è meglio usare la soluzione esatta consideriamo il seguente set di parametri: $S_0 = 9$, $K = 10$, $r = 0.015$, $\sigma = 0.9$, $T = 1$ e $\Delta t = 0.2$. I risultati sono riportati in Figura 3.

Si può osservare come il metodo di Eulero produca un pricing che si discosta molto dal corretto dell'opzione. Questo è dovuto al fatto che l'intervallo di discretizzazione è piuttosto grande $\Delta t = 0.2$, la volatilità del log-rendimenti è abbastanza grande $\sigma = 0.9$ mentre il tasso di interesse risk-free è molto "piccolo" $r = 0.015$. Questo comportamento non si verifica riducendo il valore di Δt

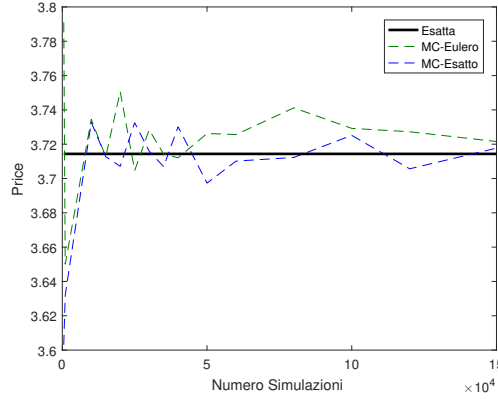


Figura 4: Confronto tra metodo Monte Carlo con schema di Eulero e con soluzione esatta all'aumentare delle simulazioni. $\Delta t = 0.01$

(Figura 4).

6.2 Metodo generale per il pricing di contratti

Una volta che siamo in grado di generare le traiettorie è possibile prezzare un qualsiasi tipo di contratto che sia “abbastanza” standard. Date le simulazioni è possibile costruire molti tipi di payoff, anche di azioni path-dependent. Posso essere facilmente determinati, ad esempio, i valori dei contratti che hanno i seguenti payoff $\Phi(S_T, T)$.

$$\Phi(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$$

$$\Phi(S_T, T) = \max(A_T - K, 0), \quad A_T = \frac{\int_t^T S_u du}{T}$$

$$\Phi(S_T, T) = \max\left(\max_{t \leq u \leq T} S_u - K, 0\right)$$

$$\Phi(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) \mathbb{1}_{\inf_{u \in [t, T]} S_u \leq B}$$

mentre non è possibile usare questo metodo per prezzare opzioni che prevedano l'esercizio anticipato (Americane o Bermuda ad esempio).

Si noti che, sebbene il metodo Monte Carlo presentato possa essere usato per prezzare opzioni sul massimo o sul minimo del sottostante, dette Lookback o opzioni Barriera per questi tipi di opzioni, generalmente, si ricorre a tecniche più avanzate (ad esempio tramite utilizzo di Brownian Bridge). Riteniamo sia prematuro presentare in questa sezione tali tecniche, dato che richiedono una trattazione matematica rigorosa e ben più complessa.

7 Punti forza e criticità del modello di Black-Scholes

Il modello di Black-Scholes venne presentato per la prima volta in un articolo del 1973 [11]. Molte delle assunzioni su cui si basa sono state considerate eccessivamente rigide. Tra di esse, ad esempio, l'ipotesi di normalità dei log-rendimenti,

la assunzione della volatilità σ costante nel tempo, il tasso fisso di interesse risk-free r fisso, l'assenza di costi di transazione e così via [2]. Per questo motivo, al fine di superare i limiti del modello di Black-Scholes, molti modelli più evoluti sono stati proposti. Per superare l'ipotesi di normalità dei log-rendimenti sono stati sviluppati modelli di Lévy (ad esempio Variance Gamma o Normal Inverse Gaussia): per oltrepassare l'ipotesi di volatilità costante sono stati sviluppati modelli a volatilità stocastica (SABR, Heston, Bates). Analogamente, sono stati proposti modelli che considerassero il tasso di interesse privo di rischio time-dependent $r = r(t)$ o addirittura stocastico.

Sebbene questi modelli siano di grande utilità e superino brillantemente i limiti del modello di Black-Scholes, consentendo una migliore modellizzazione del mercato, perdono notevolmente in trattabilità matematica e, alcune volte, computazionale. Basti pensare al calcolo delle greche che, per modelli diversi da Black-Scholes, non ammetta generalmente forme chiuse. L'esistenza di forme chiuse agevola di molto i calcoli in tutte le fasi tipiche della modellistica finanziaria. Il pricing degli strumenti è molto veloce e questo fa sì che la fase di calibrazione dei modelli, che consiste nel trovare quel set di parametri del modello che replica il più possibile i prezzi osservati a mercato mediante risoluzione di problemi di ottimo, sia "piuttosto agevole". Inoltre il calcolo delle greche, fondamentali per rendere un portafoglio neutrale ai movimenti di mercato, può essere fatto in maniera esatta, senza introdurre errori di discretizzazione. Da ultimo, le formule esatte non introducono errori di alcun tipo che si avrebbero con un qualsiasi metodo numerico, sia esso Monte Carlo, risoluzione di PDE o pricing tramite algoritmi di tipo FFT.

Questi sono i motivi principali per cui, seppur nella sua semplicità, il modello di Black-Scholes sia ancora largamente utilizzato in ambito industriale.

Riferimenti bibliografici

- [1] Shreve, Steven E., *Stochastic Calculus for Finance II: continuous-time model*. New York; London & Springer 2004
- [2] Tankov, P. and Cont, R. *Financial Modelling for Jump Processes*. Paris & Chapman& Hall CLC
- [3] <https://it.mathworks.com/help/fininst/examples/simulating-electricity-prices-with-mean-reversion-and-jump-diffusion.html>
- [4] Seydel, Rufiger U., *Tools for Computational Finance* New York; London & Springer 2009
- [5] Brigo, D. and Dalessandro, A. and Neugebauer, M. and Triki, F. *A Stochastic Process Toolkit for Risk Management*. 2007
- [6] Villaplana, P. *Pricing Power Derivatives: A Two-Factor Jump-Diffusion Approach*. Universidad Carlos III de Madrid, Working Paper 03-18, 2003.
- [7] Schwartz, E. and Smith, J.E. *Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices*. MANAGEMENT SCIENCE, Vol. 46, No. 7, July 2000 pp. 893-911.
- [8] Merton, R. C. *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics. 3: 125–144.
- [9] Black, F. *The Pricing of Commodity Contracts*. Journal of Financial Economics. 3: 167–179.
- [10] Hull, J. *Option, Futures and Other Derivatives* Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ u.a., 6. ed., Pearson internat. ed edition, (2006)
- [11] Black, F. and Scholes, M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* Journal of Political Economy 81 (3), 637-654;
- [12] Merton, R. *Theory of Rational Option Pricing* Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1), 141-183.