Exponential Family Distributions and Normal Variance-Mean Mixuture variables

Matteo Gardini

8 giugno 2019

Sommario

In visione dello studio del processo Normal Inverse Gaussian è stato approfondito lo studio delle distribuzioni di probabilità appartenenti all'Exponential Family. Le variabili aleatorie Normal Variance-Mean sono brevemente introdotti ed è mostrato come calcolarne la loro funzione caratteristica.

1 Definizione e proprietà

Una distribuzione di probabilità $f_x(X|\theta)$ appartiene all'exponential family se ha la forma seguente:

$$f_x(X|\theta) = h(x)\exp\left(\eta(\theta) T(x) - A(\theta)\right) \tag{1}$$

dove se $\eta(\theta) = \theta$ si dice essere in forma canonica.
Nell' Equazione (1) si ha:

- $T(x)$: è detta sufficient statistics.
- η: è detto natural parameter.
- $A(\eta)$: è detta Log-partition function. Tale funzione è una sorta di "costante" che serve per normalizzare la distribuzione di probabilità.

Example 1.1. Distribuzione Normale
La distribuzione normale appartiene all'exponential family. Consideriamo la normale con parametri $\theta = [\mu, \sigma]$ e con densità di probabilità:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}. \tag{2}$$

Dobbiamo ora mostrare che $f(x;\mu,\sigma)$ può essere scritta come (1).
Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2 + x\mu/\sigma^2 - \mu^2/2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2 + x\mu/\sigma^2 - \mu^2/2\sigma^2 - \log|\sigma|} \end{aligned}$$

e ponendo:

$$T(x) = \left[x, x^2\right] \qquad \eta(\theta) = \left[\mu/\sigma^2, -1/2\sigma^2\right] \qquad A(\eta) = \mu^2/2\sigma^2 + \log|\sigma|$$

e con

$$\eta_1 = \mu/\sigma^2 \quad \eta_2 = -1/2\sigma^2$$

e di conseguenza

$$A(\eta) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2\eta_2}\right)$$

abbiamo mostrato che (2) può essere scritta nella forma (1) e quindi la distribuzione normale fa parte delle exponential family. □

Remark 1.1. Osserviamo che $f(x;\eta) = h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\}$ è una densità e quindi $A(\eta)$ risulta essere univocamente determinata in funzione degli altri parametri. Infatti

$$1 = \int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} \rightarrow A(\eta) = \log\left\{h(x)\exp\left\{\eta^T T(x)\right\}\right\} \quad (3)$$

□

Notiamo che, l'aver semplicemente osservato (3) ci permette di semplificare di molto il calcolo della media e della varianza di una variabile aleatoria la cui legge segue quella di un'exponential family. Proviamo a calcolare la derivata prima e seconda di $A(\eta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{\int h(x)\exp\{\eta^T T(x)\}}\int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x)\right\} T(x) \\
&\overset{(3)}{=} e^{-A(\eta)}\int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x)\right\} T(x) \\
&= \int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} T(x) = \mathbb{E}\left[T(x)\right]
\end{aligned}$$

e quindi $\mathbb{E}\left[T(x)\right] = \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta}$.
Analogamente abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta^2} &= \int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} T(x)\left[T(x) - \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta}\right] \\
&= \int h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} T(x)\left[T(x) - \mathbb{E}[x]\right] \\
&= \int T(x)\, T(x)\, h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} \\
&- \int \mathbb{E}[x]\, h(x)\exp\left\{\eta^T T(x) - A(\eta)\right\} T(x) \\
&\mathbb{E}\left[T(x)^2\right] - \mathbb{E}\left[T(x)\right]^2 = Var\left[T(x)\right]
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo, molto semplicemente, che $Var\left[T(x)\right] = \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta^2}$.

Example 1.2. Distribuzione Normale
Per la distribuzione normale abbiamo che $A(\eta) = -\eta_1^2/4\eta_2 + 1/2 \log\left(-1/2\eta_2^2\right)$. Quindi

$$\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1} = -2\eta_1/4\eta_2 = -2\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{-2\sigma^2}{4} = \mu.$$

e

$$\frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_1^2} = -\frac{2}{4\eta_2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\eta_2} = -\frac{1}{2}\left(-2\sigma^2\right) = \sigma^2.$$

Notiamo che abbiamo derivato rispetto a η_1 perchè la sufficient statistic associata a $\mathbb{E}[x]$ è quella che moltiplica la componenti η_1 del vettore η. $\square$

1.1 Funzione Caratteristica

Siccome avremo a che fare con processi di Lévy è estremamente utile calcolare la funzione caratteristica di una variabile la cui legge appartiere alle exponential family.
Consideriamo $f(x;\theta) = h(x)\, e^{\eta T(x) - A(\eta)}$. La funzione caratteristica associata alla sufficient statistic è:

$$\begin{aligned}
\phi_{T(x)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuT(x)}\right] &= \int e^{iuT(x)} h(x)\, e^{\eta T(x) - A(\eta)} \\
&= \int h(x)\, e^{iuT(x) + \eta T(x) - A(\eta)} = \int h(x)\, e^{(iu+\eta)T(x) - A(\eta)} \\
&= e^{-A(\eta)} \int h(x)\, e^{(iu+\eta)T(x)} e^{A(iu+\eta)} e^{-A(iu+\eta)} = e^{A(iu+\eta) - A(\eta)}
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo che

$$\phi_{T(x)}(u) = e^{A(iu+\eta) - A(\eta)}.$$

Una volta nota l'espressione di $A(\eta)$ la funzione caratteristica di una variabile la cui legge appartiene all'exponential family è facilmente ottenibile. Nota la funzione catatteristica è automaticamente derivabile l'espressione della funzione generatrice dei momenti : questo può essere molto utile per ottenere formule chiuse per l'espressione dei momenti di una variabile aleatoria appartenente all'exponential family.

Example 1.3. Distribuzione Normale
Consideriamo ancora la distribuzione normale per la quale $A(\eta) = -\eta_1^2/4\eta_2 + 1/2 \log\left(-1/2\eta_2^2\right)$. Ricordiamo sempre che $[T(x)]_1 = x$, di cui vogliamo calcolare la funzione caratteristica, è "associata" a η_1 per cui:

$$\begin{aligned}
A(iu + \eta_1, \eta_2) - A(\eta_1, \eta_2) &= -\frac{(\eta_1 + iu)^2}{4\eta_2} + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2} \\
&= -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} - \frac{1}{2}\eta_1 \frac{iu}{4\eta_2} + \frac{u^2}{4\eta_2} + \frac{\eta_1^2}{4\eta_2}
\end{aligned}$$

Ricordando che $\eta_1 = \frac{mu}{\sigma^2}$ e $\eta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
A\left(iu+\eta_1\right)-A\left(\eta_1\right) &= -\frac{1}{2}\eta_1\frac{iu}{4\eta_2}+\frac{u^2}{4\eta_2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{iu}{4}2\sigma^2+\frac{u^2}{4}\left(-2\sigma^2\right)=\mu iu-\frac{u^2\sigma^2}{2}
\end{aligned}
$$

che è l'esponente caratteristico di una variabile aleatoria X con distribuzione $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. □

Example 1.4. Inverse Gaussian
Grazie al risultato precedente, risulta facile calcolare la funzione caratteristica dell'Inverse Gaussia, che sarà la base per la costruzione del processo Normal Inverse Gaussian. Nel corso degli anni sono stati proposti diverse parametrizzazioni equivalenti per la densità della Inverse Gaussian e, per questo motivo, bisogna stare attenti a quella che viene scelta.
Consideriamo la seguente funzione densità:

$$
f\left(x;\mu,\lambda\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\lambda\left(x-\mu\right)^2}{2\mu^2 x}\right\} \tag{4}
$$

e riportiamola nella forma (1).

$$
\begin{aligned}
\log f\left(x\right) &= \frac{1}{2}\log\lambda-\frac{1}{2}\log\left(2\pi x^3\right)-\frac{\lambda x}{2\mu^2}+\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda}{2x} \\
f\left(x\right) &= \exp\left\{\frac{1}{2}\log\lambda-\frac{1}{2}\log\left(2\pi x^3\right)-\frac{\lambda x}{2\mu^2}+\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda}{2x}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left\{-\left(\frac{\lambda x}{2\mu^2}+\frac{\lambda}{2x}\right)+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\log\lambda\right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

da cui possiamo riconoscere che:

$$
\begin{aligned}
\eta\left(\theta\right) &= \left[-\frac{\lambda}{2\mu^2},-\frac{\lambda}{2}\right] \\
T\left(x\right) &= \left[x,\frac{1}{x}\right] \\
A\left(\theta\right) &= -\frac{\lambda}{\mu}-\frac{1}{2}\log\left(\lambda\right)
\end{aligned}
$$

Osservando che

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\lambda}{2\mu^2} \\
\eta_2 &= -\frac{\lambda}{2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

otteniamo che:

$$
A\left(\eta\right)=-2\sqrt{\eta_1\eta_2}-\frac{1}{2}\log\left(-2\eta_2\right)
$$

Utilizzando il risultato precedente otteniamo che:

$$\begin{aligned}
A(\eta + iu) - A(\eta) &= -2\sqrt{(\eta_1 + iu)\,\eta_2} + 2\sqrt{\eta_1\eta_2} \\
&\overset{(6)}{=} -\sqrt{\frac{\lambda^2}{\mu^2} - 2iu\lambda} + \frac{\lambda}{\mu} \\
&= -\frac{\lambda}{\mu}\sqrt{1 - \frac{2iu\mu^2}{\lambda}} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2iu\mu^2}{\lambda}}\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

□

2 Normal Variance-Mean Mixture model

La distribuzione Normal Inverse Gaussian, che servirà per la definizione del corrispondente processo stocastico, è definita come una Normal Variance-Mean Mixutre. Una variabile aleatoria Y del tipo Normal Variance-Mean Mixture è definita come segue:

$$Y = \alpha + \beta V + \sigma\sqrt{V}X$$

con X e V indipendenti, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e V con densità $g(x)$. Se, ad esempio, V fosse $IG(\mu,\lambda)$ che Y è una Normal Inverse Gaussian.
La funzione caratteristica di una variabile Y così definita può essere ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iuY}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iu\left(\alpha+\beta v+\sigma\sqrt{v}X\right)}\right]|V=v\right] \\
&= e^{iu\alpha}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iu\left(\beta v+\sigma\sqrt{v}X\right)}\right]|V=v\right] \\
&= e^{iu\alpha}\mathbb{E}\left[e^{\left(iu\beta-\sigma^2\frac{u^2}{2}\right)V}\right] = e^{iu\alpha}\mathbb{E}\left[e^{iu\left(\beta+\sigma^2 i\frac{u}{2}\right)V}\right] \\
&= e^{iu\alpha}\phi_v\left(u\beta + \sigma^2 i\frac{u^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che, condizionato a $V = v$ la variabile $\beta v + \sigma\sqrt{v}X$ è normale con media βv e deviazione standandard $\sigma\sqrt{v}$. Inoltre, si è posto:

$$\phi_v(u) = \exp\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - 2iu\mu^2}\right)$$

che è la funzione caratteristica di una Inverse Gaussian.

L'aver determinato la funzione caratteristica per il caso Normal Inverse Gaussian ci consentirà, definito il processo di Lévy associato, di ottenere una serie di espressioni esplicite che ci consentiranno di calcolare i momenti della distribuzione, ricavare formule di pricing risk-neutral e di applicare la trasformata di Escher per passare alla misura neutrale al rischio.