

Tesina Modelli Matematici per la Finanza

Ghizzi Matteo

13 luglio 2022

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Opzioni	2
1.2	Opzioni Barriera	2
1.2.1	IN-OUT Parity	2
1.3	Option pricing con metodo Monte Carlo	2
1.3.1	Traiettoria del sottostante	3
1.3.2	Prezzo dell'opzione	3
1.4	Metodo Monte Carlo	4
1.5	Variabili Antitetiche	4
1.6	Brownian Bridge	5
2	Opzioni Barriera monodimensionali	6
2.0.1	Correzione alla barriera	7
2.1	Risultati	7
2.1.1	Prezzo dell'opzione in funzione del numero di <i>path</i> generati: N	9
2.1.2	Prezzo dell'opzione in funzione del numero di intervalli temporali: M	11
2.1.3	Simulazioni MonteCarlo con il metodo delle Variabili Antitetiche	13
2.1.4	Correzione alla barriera	14
2.1.5	Brownian Bridge	16
2.2	Osservazione discreta del sottostante	17
3	Double barrier option	20
4	Two assets double barrier option	26
5	Programmi	29
5.1	Barrier option	29
5.2	Double barrier option	31
5.3	Double barrier basket option	35
6	Bibliografia	41

1 Introduzione

L'obiettivo della tesina è l'implementazione del metodo MonteCarlo per il *Pricing* di opzioni barriera e l'estensione dello stesso al caso bidimensionale, cioè quando l'opzione è iscritta su due sottostanti.

1.1 Opzioni

In ambito finanziario, un'opzione è un contratto che garantisce al possessore il diritto ma non l'obbligo di acquistare (*CALL*) o vendere (*PUT*) l'asset finanziario sul quale è iscritto il contratto ad uno *Strike Price* stabilito (K) entro una determinata scadenza in cambio di un premio.

L'asset finanziario è tipicamente costituito da azioni o altri titoli finanziari e il suo valore è indicato da S .

Il premio o prezzo dell'opzione dipende dalla funzione di *Payoff* che rappresenta il valore finale dell'opzione in funzione del valore dell'asset sottostante.

1.2 Opzioni Barriera

Le opzioni Barriera sono un particolare tipo di opzioni esotiche, si tratta, infatti, di opzioni *Path Dependent*.

In un'opzione *Path Dependent* il *payoff* dipende dalla traiettoria del sottostante.

Le opzioni Barriera sono simili alle opzioni *Vanilla* con la condizione di attivarsi o scadere se il prezzo del sottostante impatta la barriera. Esistono diverse tipologie di opzioni barriera e sono regolarmente commerciate nel mercato *Over The Counter* (OTC) e risultano essere interessanti poiché meno costose rispetto alle opzioni standard corrispondenti.

Esistono due tipi di opzioni Barriera:

- **KNOCK-IN**: l'opzione acquista valore, quindi può essere esercitata, quando il valore del sottostante raggiunge la barriera. In particolare se la barriera viene raggiunta dall'alto avremo un'opzione di tipo *DOWN-and-IN*, se viene raggiunta dal basso sarà una *UP-and-IN*.
- **KNOCK-OUT**: l'opzione perde valore, quindi il contratto si annulla, quando il valore del sottostante impatta la barriera. Se la barriera viene raggiunta dall'alto si tratterà di un'opzione *DOWN-and-OUT*, se viene raggiunta dal basso sarà una *UP-and-OUT*.

1.2.1 IN-OUT Parity

Esiste una relazione analoga alla *Put-Call parity* anche per le opzioni barriera:

$$(\text{KNOCK-OUT option}) + (\text{KNOCK-IN option}) = \text{Vanilla option} \quad (1)$$

La relazione è valida solo se le due opzioni barriera hanno le stesse caratteristiche :

- entrambe le opzioni hanno gli stessi parametri finanziari ($\sigma, r, K, B, \text{ecc...}$)
- le opzioni sono entrambe *put* o *call*
- entrambe le opzioni hanno lo stesso tipo di barriera (*UP*, *DOWN*)

1.3 Option pricing con metodo Monte Carlo

La simulazione Monte Carlo è un metodo numerico che può essere utilizzato per approssimare un'ampia gamma di processi stocastici.

In questo caso il metodo Monte Carlo verrà utilizzato per simulare le possibili realizzazioni delle traiettorie del sottostante o dei sottostanti sui quali verranno iscritte le opzioni Barriera.

1.3.1 Traiettorie del sottostante

Nel modello di Black-Scholes il prezzo di un asset finanziario sottostante segue un moto Browniano Geometrico:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

con le seguenti proprietà:

- $W_0 = 0$
- $W_t \sim N(0, t) \quad \forall t > 0$
- tutti gli elementi $\Delta W_t \equiv W_{t+\Delta t} - W_t$ su intervalli temporali disgiunti sono indipendenti
- W_t dipende in modo continuo da t

Le traiettorie utilizzate per studiare il prezzo delle opzioni verranno generate considerando la soluzione dell'equazione (2):

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot dW\right) \quad (3)$$

discretizzandola:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot w\right) \quad \text{con } w \sim N(0, 1) \quad (4)$$

Il tempo di vita del contratto derivato T è stato suddiviso in M sottointervalli temporali di ampiezza $\Delta t = \frac{T}{M}$, w è un numero casuale estratto da una distribuzione normale, r e σ sono rispettivamente il tasso di interesse privo di rischio e la volatilità.

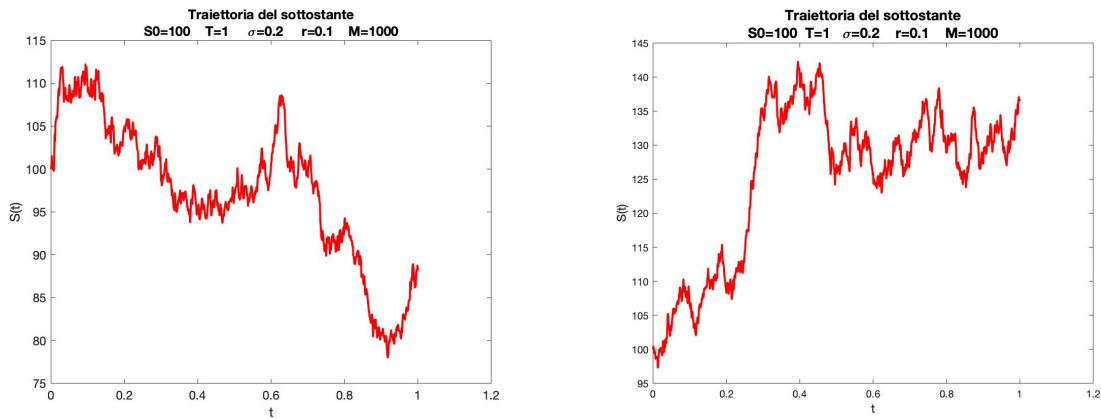


Figura 1: Esempi di traiettorie del sottostante

1.3.2 Prezzo dell'opzione

Partendo dalla dinamica di un sottostante è possibile ricavare la formula fondamentale di valutazione dei titoli derivati o *Risk-neutral Valuation*[2]

$$V_t = e^{-r \cdot (T-t)} E[g(S_T)] \quad (5)$$

Questa formula è l'attualizzazione del *payoff* atteso. La funzione $g(S_T)$ è la funzione di payoff, cioè la funzione che indica il guadagno. Il payoff dipende dal tipo di contratto e dal prezzo del sottostante all'istante in cui si esercita (solo opzioni americane) o scade l'opzione ($t = T$).

1.4 Metodo Monte Carlo

L'obiettivo è calcolare il valore atteso di una variabile aleatoria X con densità di probabilità nota $f(x)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (6)$$

Il metodo Monte Carlo permette di generare una successione di variabili aleatorie indipendenti ($X_i, i \geq 1$), aventi tutte la medesima densità di probabilità $f(x)$, in modo che si possa approssimare il valore atteso della variabile aleatoria con la sua media empirica:

$$E[X] \simeq \bar{E}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \bar{E}_N \quad (7)$$

Nel programma implementato si genereranno N traiettorie del sottostante indipendenti tra loro e per ognuna di esse verrà calcolato il payoff, la media di tutti i payoff sarà il valore atteso che verrà sostituito nell'equazione (6) per calcolare il prezzo dell'opzione.

Inoltre è possibile stimare la varianza di X utilizzando la varianza empirica:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{E}_N)^2 \quad (8)$$

ciò è utile al fine di calcolare l'errore standard ($\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}$) e l'intervallo di confidenza al 95%:

$$E[X] \in \left[\bar{E}_N - 1.96 \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}, \bar{E}_N + 1.96 \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} \right]$$

Al crescere della numerosità del campione N , l'intervallo di confidenza si stringe. Tuttavia la convergenza è dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ciò implica che per raddoppiare l'accuratezza è necessario quadruplicare il numero di simulazioni e di conseguenza per ridurre di un fattore 10 l'errore è necessario aumentare di un fattore 100 i tentativi.

Nelle successive tabelle, nella colonna indicata come *errore*, sarà riportata la semiampiezza dell'intervallo di confidenza al 95%

$$\mathbf{errore} = 1.96 \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

Nei casi in cui verrà riportato l'errore relativo si intenderà il modulo della differenza tra la soluzione analitica (se disponibile) e la soluzione prodotta dall'algoritmo, il tutto fratto il valore della soluzione analitica:

$$\mathbf{errore\ relativo} = \frac{|\text{sol. analitica} - \text{sol. algoritmo}|}{\text{sol. analitica}} \quad (10)$$

1.5 Variabili Antitetiche

Utilizzare il metodo delle variabili Antitetiche è uno dei modi per ridurre la varianza e dunque accrescere l'accuratezza delle simulazioni.

Il metodo si basa sul fatto che se la variabile aleatoria generata è distribuita normalmente ($w \sim N(0, 1)$) anche il suo opposto sarà una variabile aleatoria distribuita normalmente ($-w \sim N(0, 1)$). Si simuleranno contemporaneamente due traiettorie del sottostante, in un caso si userà la variabile aleatoria w e nell'altro il suo opposto $-w$. Dato che w e $-w$ hanno la stessa legge possiamo scrivere:

$$E[f(w)] = E\left[\frac{f(w) + f(-w)}{2}\right] \quad (11)$$

Di conseguenza per *Cauchy-Schwarz*:

$$\text{Var} \left[\frac{f(w) + f(-w)}{2} \right] = \frac{1}{2} \text{Var} [f(w)] + \frac{1}{2} \text{Cov} (f(w), f(-w)) \leq \text{Var} [f(w)] \quad (12)$$

Una riduzione della varianza è garantita nel caso in cui la correlazione sia negativa.

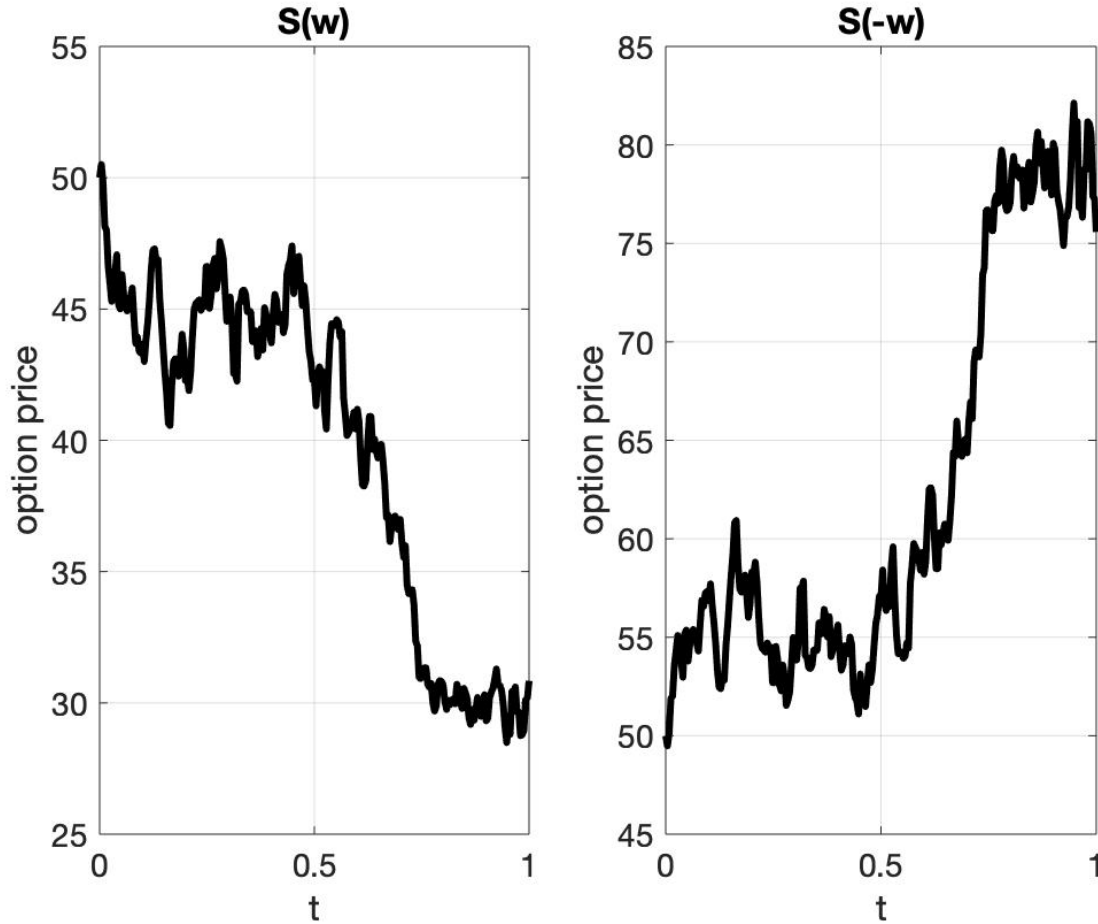


Figura 2: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 250$, $K = S_0 = 50$, $B = 40$

1.6 Brownian Bridge

Il Brownian Bridge è un processo stocastico continuo la cui distribuzione di probabilità è quella di un processo di Wiener standard "W(t)" condizionata da avere, nel caso standard, gli estremi fissati all'origine: $W(t=0) = 0$ e $W(t=T) = 0$.

Il metodo Brownian Bridge prevede di applicare un *hitting test* dopo ogni time step utilizzando la distribuzione del Brownian Bridge da $S(t_n) = S_n$ a $S(t_{n+1}) = S_{n+1}$.

Il prezzo dell'opzione da $S_t \in [t_n, t_{n+1}]$ viene stimato da un Brownian Bridge con drift μ costante con gli estremi fissati in $S(t_n) = S_n$ e $S(t_{n+1}) = S_{n+1}$.

Per determinare se il sottostante abbia impattato la barriera, si genererà una variabile aleatoria con distribuzione normale $u_n \sim U(0, 1)$, che verrà confrontata con la probabilità che nel medesimo intervallo temporale la barriera sia stata superata P_n . Se $u_n < P_n$ si assumerà che il sottostante abbia impattato la barriera.

Nel nostro caso, non verrà applicato il Brownian Bridge in modo classico ma si applicherà una correzione al payoff dell'opzione, pari alla probabilità che il sottostante impatti la barriera durante la vita del contratto.

La probabilità che il valore del sottostante impatti la barriera è definita come:

$$p = \begin{cases} 1 - \zeta(B) & \text{se } B > \max(S(t)) \quad \forall t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (13)$$

con $\zeta(B)$:

$$\zeta(B) = \exp \left\{ -\frac{2 \cdot \ln\left(\frac{B}{S(0)}\right) \cdot \ln\left(\frac{B}{S(T)}\right)}{\sigma^2 T} \right\} \quad (14)$$

Il vantaggio di applicare il metodo Brownian Bridge è quello di rendere l'accuratezza del metodo Monte Carlo dipendente solamente dal numero di path generati N . [6] [7]

2 Opzioni Barriera monodimensionali

In questa sezione si studia il *pricing* di un'opzione barriera su un singolo sottostante.

Il programma è stato implementato per prezzare una *Put DOWN-OUT* europea: l'opzione presa in considerazione perde valore se il prezzo del sottostante scende al di sotto del valore della barriera durante il periodo di vita del contratto derivato e può essere esercita solo alla scadenza del contratto.

Nel caso in cui la barriera B sia minore dello *Strike Price* K il payoff di una *DOWN-OUT put* sarà:

$$B < K \Rightarrow \text{payoff} \begin{cases} V(T) = \max[K - S(T), 0] & \text{se } \forall t \in [0, T], \quad S(t) \in (B, +\infty) \\ V(T) = 0 & \text{se } \forall t \in [0, T], \quad S(t) \in [0, B] \end{cases} \quad (15)$$

al contrario, se $B \geq K$, il valore dell'opzione sarà nullo: $V(T) = 0$.

I risultati ottenuti dalle simulazioni Monte Carlo sono stati confrontati con i risultati forniti dalla soluzione analitica presente in letteratura [2].

Utilizzando la *IN-OUT parity* possiamo esprimere il prezzo di un'opzione *put DOWN-OUT* come:

$$Put_{d-o} = Put - Put_{d-i} \quad (16)$$

$$Put = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Put_{d-i} = & -S_0 e^{-qT} N(-x_1) + Ke^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)] \\ & - Ke^{-rT} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})] \end{aligned} \quad (18)$$

Con B =valore della barriera, S_0 =valore del sottostante a $t = 0$ e $N(\cdot)$ =distribuzione normale cumulata ,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ \lambda &= \frac{r - q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \\ x_1 &= \frac{\ln(S_0/B)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \\ y &= \frac{\ln(B^2/(S_0K))}{\sigma T} + \lambda\sigma\sqrt{T} \\ y_1 &= \frac{\ln(B/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \end{aligned} \quad (19)$$

Queste formule forniscono il prezzo di un'opzione barriera con *Rebate* e considerano la possibilità che il sottostante paghi un dividendo durante la vita del contratto, tuttavia, il contratto preso in considerazione per realizzare le simulazioni non avrà né *Rebate* e sarà stipulato su un sottostante che non pagherà dividendi durante la vita del contratto: $q = 0$.

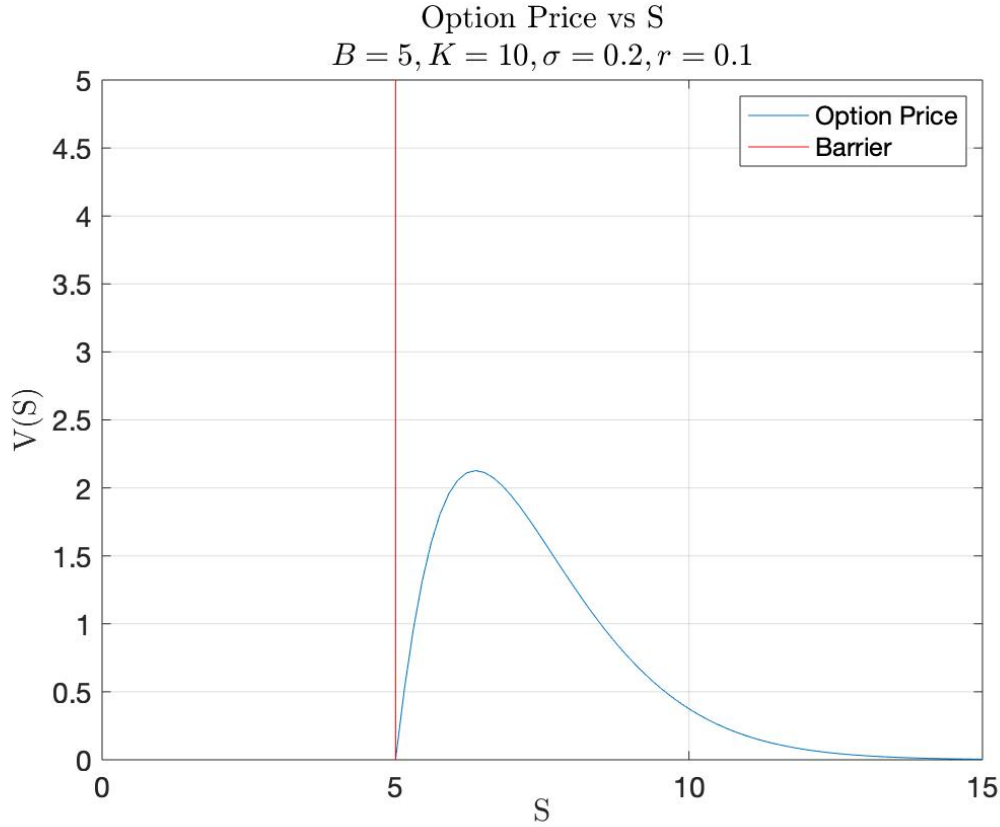


Figura 3: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $K = 10$, $B = 5$

2.0.1 Correzione alla barriera

Un ulteriore aspetto non trascurabile di una *Barrier Option* è la frequenza d'osservazione del prezzo del sottostante. La formula analitica utilizzata è stata sviluppata assumendo che S sia osservato continuamente, ciò rende opportuno inserire un termine di correzione nel caso in cui il contratto preveda un'osservazione periodica della barriera (ad esempio ogni 10 giorni).

Il metodo Monte Carlo tuttavia è un metodo che simula traiettorie discrete dunque si effettueranno simulazioni applicando questa correzione alle barriere utilizzate.

La barriera B , da [2] e [4], nel caso discreto diventa:

$$B' = B * \exp \left\{ \pm 0.5826 \sigma \sqrt{T/M} \right\} \quad (20)$$

L'argomento dell'esponenziale è positivo nel caso in cui l'opzione sia *UP-IN* o *UP-OUT*, o negativo se l'opzione sarà una *DOWN-OUT* o *DOWN-IN*.

2.1 Risultati

Innanzitutto si è proceduto verificando che i risultati forniti dal programma, dalla funzione di MATLAB e dalla formula (13-16) fossero coerenti con quanto presente in letteratura.

Tabella 1: $K = 50$, $M = 100$, $N = 10000$, $\sigma = 0.2$ e $r = 0.1$

S_0	B	sol.analitica confronto[2]	Monte Carlo [3]	Monte Carlo implementato
50	30	1.8136	1.8689	1.8074
50	35	1.4404	1.5063	1.4911
50	40	0.6264	0.7101	0.7111
50	45	0.0629	0.0899	0.0911
45	40	0.6054	0.7306	0.7389
55	40	0.4192	0.4607	0.4651

In cui:

- *sol.analitica confronto [2]* si riferisce ai valori ottenuti dalla formula (17), verrà utilizzata come confronto con i risultati delle simulazioni
- *Monte Carlo [3]* sono i valori delle simulazioni MonteCarlo presenti in letteratura:[3]
- *Monte Carlo implementato* indica i risultati ottenuti dall'implementazione del metodo Monte Carlo sviluppata in questo elaborato

La figura 4 mostra il prezzo dell'opzione al variare del prezzo del sottostante e l'errore relativo rispetto alla soluzione analitica 17.

L'errore relativo è stato calcolato come il valore assoluto della differenza tra il volare simulato e il valore della soluzione analitica, fratto il valore della soluzione analitica.

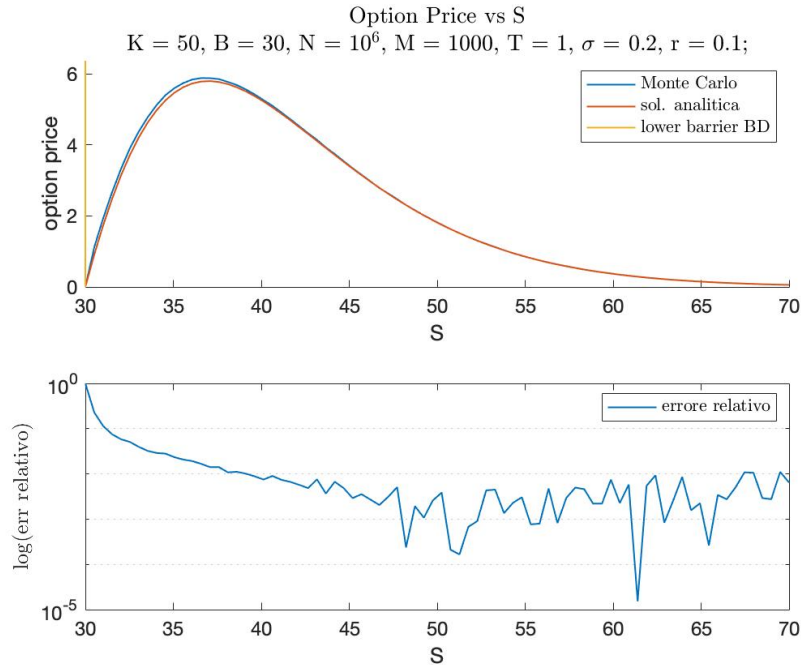


Figura 4: $N = 1000000$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 1000$, $K = 50$, $B = 30$

2.1.1 Prezzo dell'opzione in funzione del numero di *path* generati: N

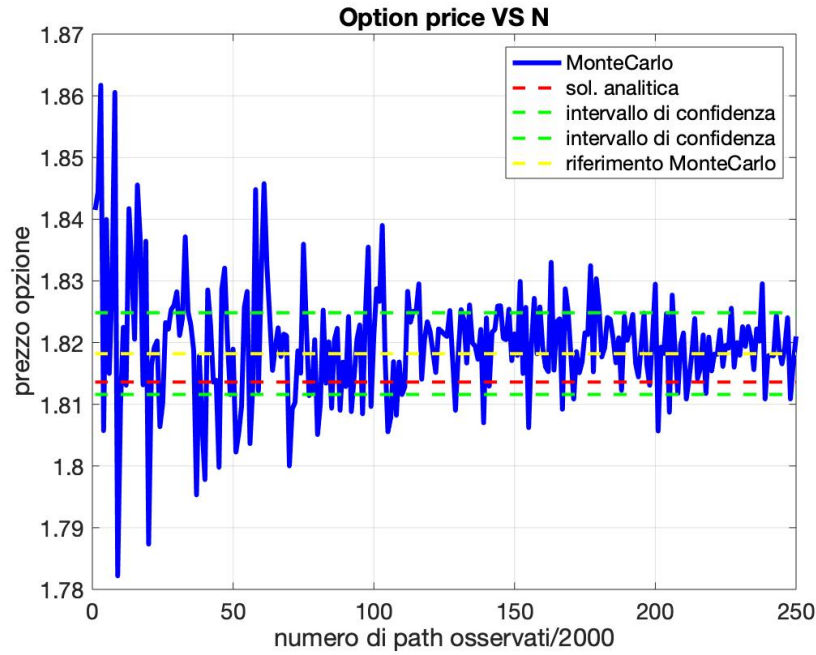


Figura 5: $N \in [2000, 500000]$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 250$, $K = S_0 = 50$, $B = 30$

In figura 5 è stato graficato l'andamento del prezzo dell'opzione in funzione del numero delle traiettorie utilizzate durante la simulazione e messo a confronto con il risultato della soluzione analitica e con una simulazione Monte Carlo eseguita con $N = 1 \cdot 10^6$ (*riferimento Monte Carlo*) e gli intervalli di confidenza da quest'ultima ricavati.

Il valore dell'opzione si colloca nel giusto ordine di grandezza del prezzo 'analitico' già per le prime misure, le fluttuazioni del prezzo si collocano attorno al valore della simulazione di riferimento e tendono a diminuire di ampiezza con l'aumentare di N .

In figura 6 si studia l'errore standard calcolato al variare del numero di simulazioni e come previsto dalla teoria tende a 0 come $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

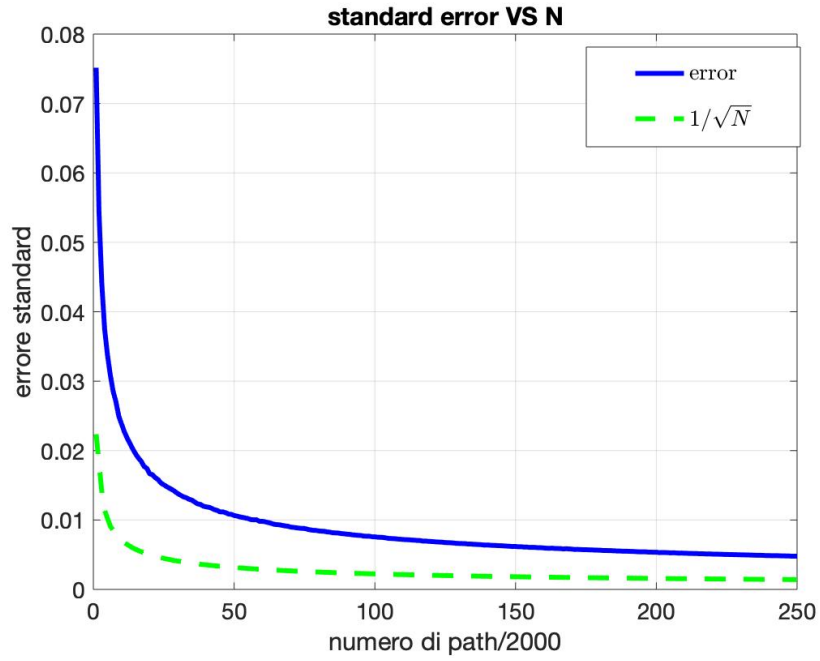


Figura 6: $N \in [2000, 500000]$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 250$, $K = S_0 = 50$, $B = 30$

Un'altra simulazione è stata realizzata per osservare come varia l'errore relativo l'errore della simulazione Monte Carlo rispetto alla soluzione analitica.

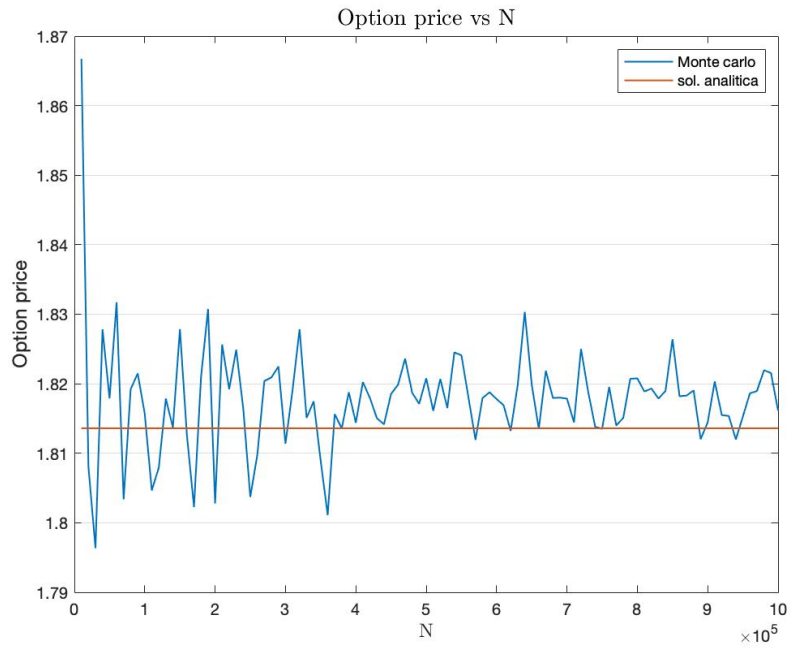


Figura 7: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 500$, $K = S_0 = 50$, $B = 30$

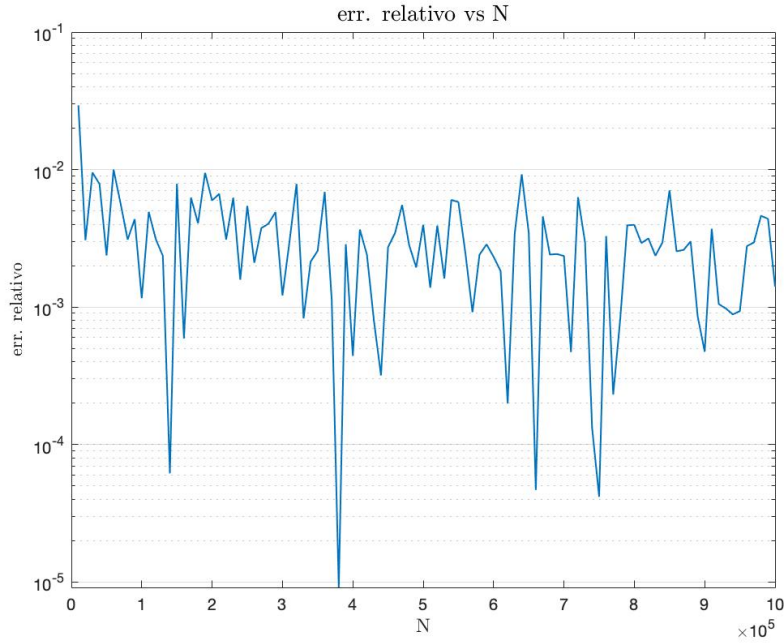


Figura 8: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $M = 500$, $K = S_0 = 50$, $B = 30$

Dal grafico si può osservare come per N maggiori di 10^5 l'errore relativo sia dell'ordine di 10^{-2} .

2.1.2 Prezzo dell'opzione in funzione del numero di intervalli temporali: M

Il prezzo è stato studiato in funzione del numero degli intervalli temporali M in figura 9. M definisce la frequenza di osservazione del valore del sottostante durante la vita del contratto: $\frac{T}{M}$. Tenendo fisso la durata del contratto a 1 anno ($T = 1$) si è proceduto facendo variare il numero di osservazioni da 200 a 12000.

In figura 9 si osserva il confronto con la soluzione analitica per determinare quanto la frequenza d'osservazione possa influenzare l'accuratezza della stima, è stato eseguito un fit con il metodo dei minimi quadrati sui dati per provare a individuare il valore di M tale per cui il prezzo tende al valore della soluzione analitica con un'approssimazione alla terza cifra decimale.

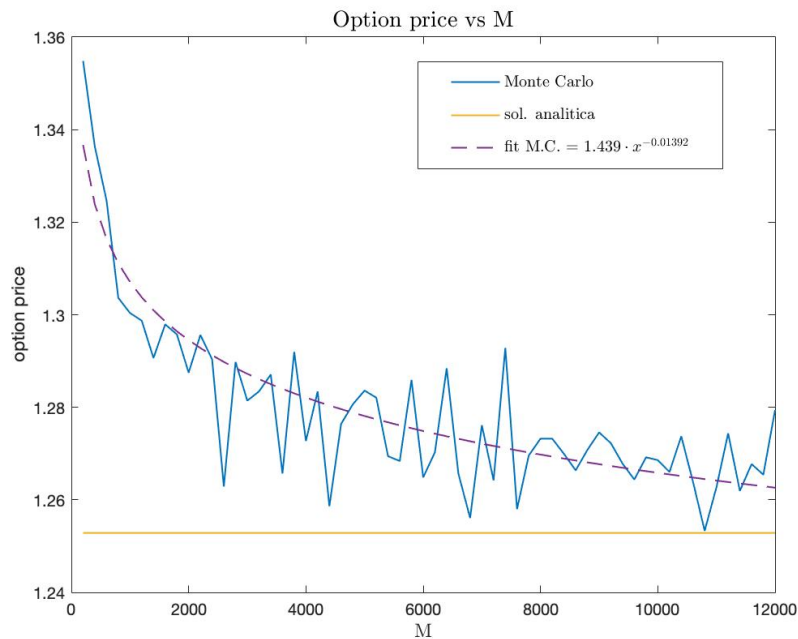


Figura 9: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $N = 200000$, $K = S_0 = 100$, $B = 80$

equazione fit: $f(x) = a \cdot x^b$

coefficienti:

- $a = 1.4390$
- $b = -0.01392$

La soluzione analitica restituisce come prezzo dell'opzione 1.2529, utilizzando il risultato del fit si stima che il numero di osservazioni necessarie a raggiungere un valore con un'approssimazione alla terza cifra decimale sono ≈ 22000 .

In realtà dalla figura 10 sembrerebbe più plausibile che il prezzo dell'azione calcolato attraverso il metodo Monte Carlo tenda al valore di riferimento molto meno velocemente di quanto suggerisca il fit.

In figura 10 è riportato l'errore relativo del metodo Monte Carlo al variare del numero di intervalli temporali. Nonostante qualche picco promettente, l'errore, tende ad essere dell'ordine di 10^{-1} .

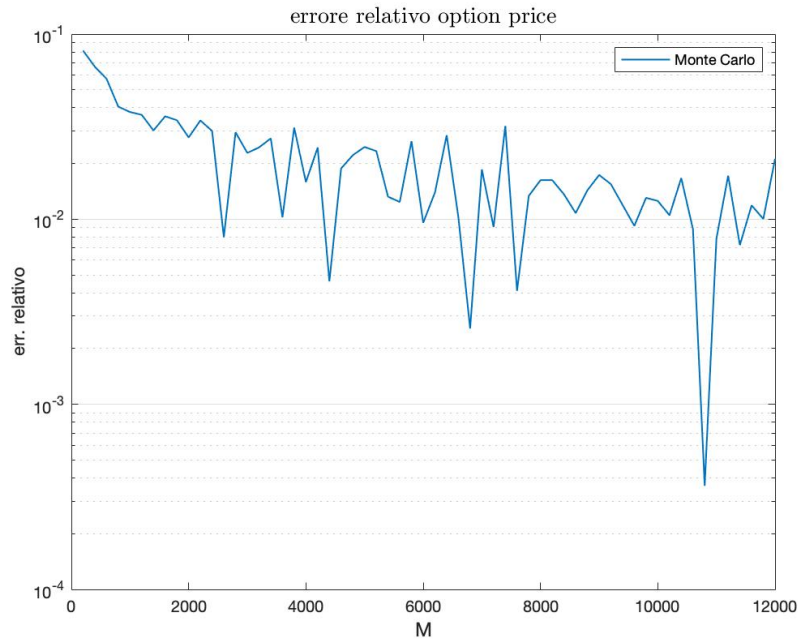


Figura 10: $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $N = 200000$, $K = S_0 = 100$, $B = 80$

In tabella 2 è stato studiato l'andamento del prezzo dell'opzione variando sia N che M , mantenendo invariati gli altri parametri.

prezzo da sol. analitica= 0.6264

Tabella 2: $S_0 = K = 50$, $B=40$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $T=1$

$M \downarrow \setminus N \Rightarrow$	10^4	10^6	10^8
1000	0.6576	0.6532	0.6511
2000	0.6571	0.6446	0.6435
4000	0.6281	0.6386	0.6388
8000	0.6326	0.6376	X
16000	0.6159	0.6353	X

Dalla tabella 2 si nota che, con l'aumentare del numero di percorsi e della frequenza d'osservazione, il prezzo dell'opzione diminuisce e tende al valore della soluzione analitica. Si è notato che il rapporto tra N e M non è trascurabile.

2.1.3 Simulazioni MonteCarlo con il metodo delle Variabili Antitetiche

In questa sezione sono riportati i risultati ottenuti applicando il metodo delle variabili antitetiche al metodo MonteCarlo.

In tabella 3 si osserva, con gli stessi parametri della tabella 1, come l'utilizzo del metodo riduca la varianza.

In tabella 4 sono riportate delle misure in funzione della barriera .

Tabella 3: $N=10000, K = 50, \sigma = 0.2, r = 0.1, M=1500$

S_0	B	sol. analitica	MonteCarlo	MonteCarlo V.A.	errore	errore V.A.
50	30	1.8136	1.7884	1.8115	0.0665	0.0399
50	35	1.4404	1.5170	1.4770	0.0571	0.0336
50	40	0.6264	0.7187	0.7059	0.0341	0.0215
50	45	0.0629	0.0927	0.0903	0.0091	0.0063
45	40	0.6054	0.7124	0.7298	0.0335	0.0222
55	40	0.4192	0.4473	0.4461	0.0274	0.0182

Tabella 4: $N = 10^6, S_0 = K = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1, M=2000$

B	60	65	70	75	80	85	90	95
sol.analitica	3.6272	3.3776	2.8808	2.1240	1.2529	0.5264	0.1258	0.0086
MonteCarlo	3.6389	3.3881	2.9017	2.1445	1.2872	0.5498	0.1370	0.0104
errore	0.0132	0.0124	0.0110	0.0089	0.0063	0.0037	0.0015	0.0003
MC V. Antitetiche	3.6332	3.3885	2.9028	2.1501	1.2863	0.5509	0.1370	0.0103
errore V. Antitetiche	0.0079	0.0074	0.0066	0.0055	0.0041	0.0025	0.0011	0.0002

2.1.4 Correzione alla barriera

Le simulazioni realizzate applicando la correzione alla barriera durante il controllo hanno fornito dei risultati più promettenti.

In figura 11 è riportato il prezzo dell'opzione in funzione del valore dell'asset sottostante. Si può notare come, nonostante tutte e tre le curve siano abbastanza sovrapposte, per $S \simeq 1.4$ è presente un gap tra la simulazione realizzata con il metodo Monte Carlo classico e le curve della soluzione analitica e del metodo Monte Carlo al quale è stata applicata la correzione al valore della barriera (Tabella 5).

Tabella 5

	max	S
sol. analitica	0.3744	1.38
Monte Carlo	0.3789	1.38
M.C. correzione B	0.3742	1.38

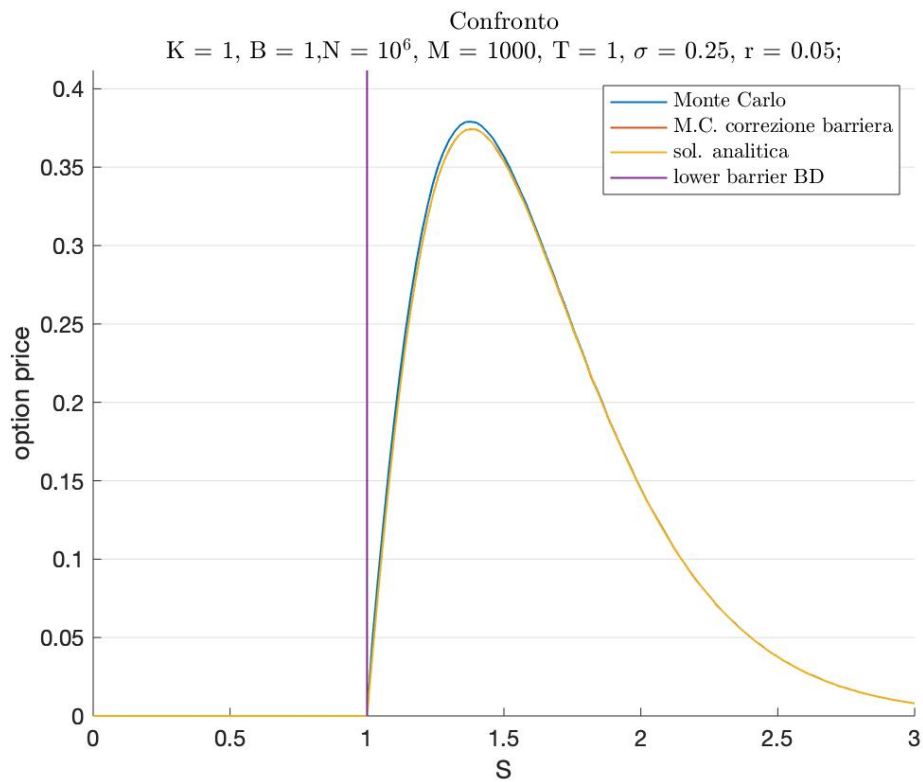


Figura 11

In figura 12 sono riportati, in scala semilogaritmica, gli errori relativi del metodo Monte Carlo e del metodo Monte Carlo con correzione calcolati rispetto alla soluzione analitica. L'errore relativo del metodo Monte Carlo con la correzione alla barriera risulta essere nel complesso minore di quello del Monte Carlo classico, soprattutto per $S \in (1, 2)$.

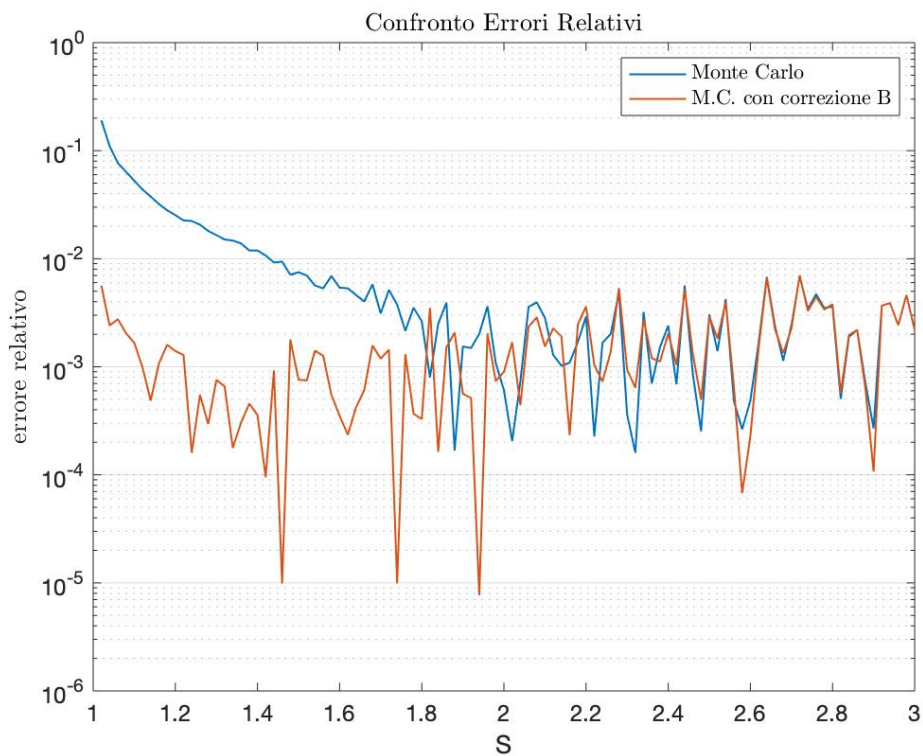


Figura 12

2.1.5 Brownian Bridge

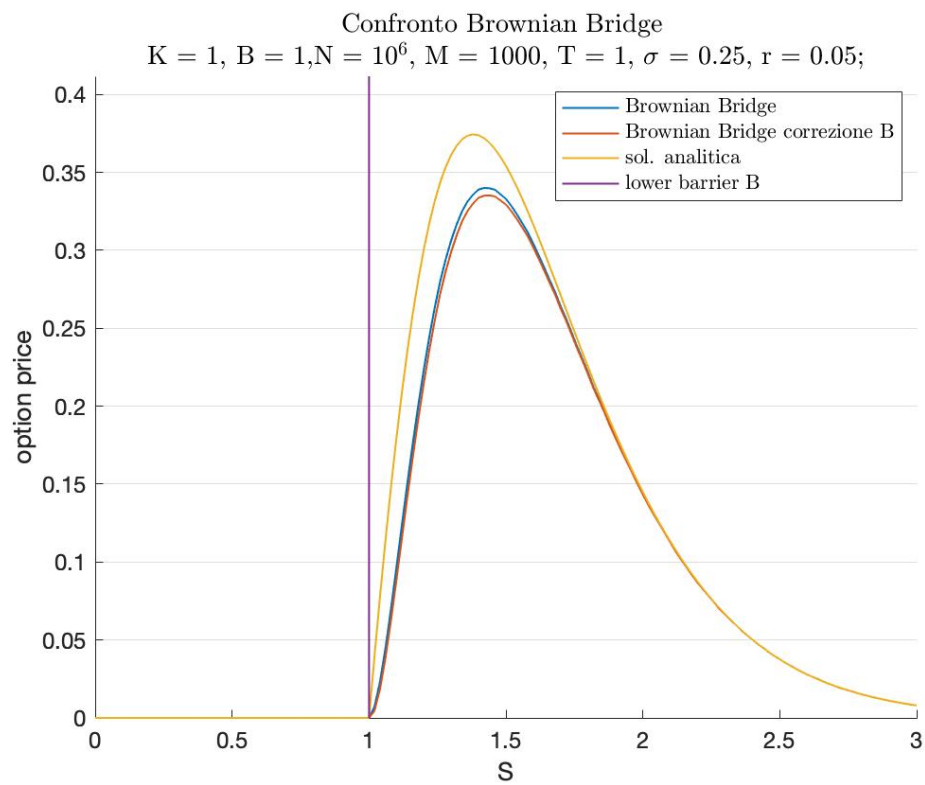


Figura 13

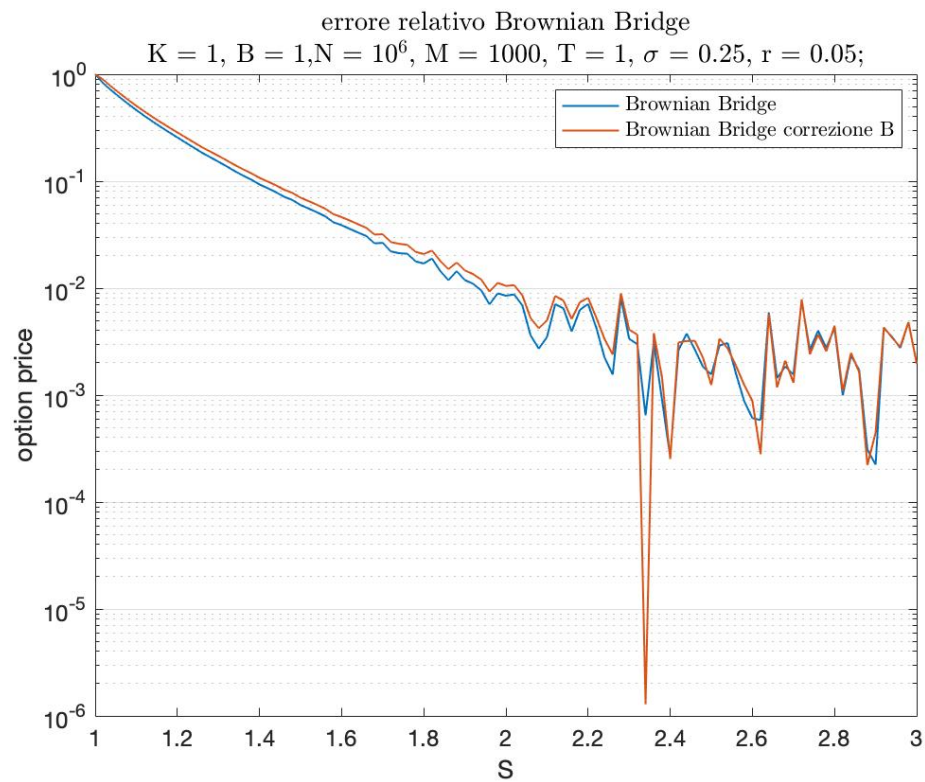


Figura 14

2.2 Osservazione discreta del sottostante

Alcuni tipi di opzioni barriera possono prevedere un'osservazione discreta del valore del sottostante. In questo caso il prezzo dell'opzione varia dunque è necessario introdurre una correzione alla formula analitica: equazione 20.

Per riprodurre questo tipo di contratto si è implementato il programma per il metodo Montecarlo facendo in modo di selezionare da ognuna delle N traiettorie i valori del prezzo del sottostante negli istanti (j) in cui il contratto preveda il monitoraggio del valore del sottostante. Sul vettore che racchiude il prezzo del sottostante per ogni monitoraggio si applicherà la funzione di payoff:

$$B < K \Rightarrow \text{payoff: } \begin{cases} V(T) = \max[K - S(T), 0] & \text{se } \forall j \quad S(j) \in (B, +\infty) \\ V(T) = 0 & \text{se } \exists j \text{ t.c. } S(j) \in [0, B] \end{cases} \quad (21)$$

In figura 15 è riportato un esempio di una possibile traiettoria simulata dal programma.

Sulla traiettoria sono evidenziati gli istanti in cui è stato confrontato il valore del sottostante con la barriera.

La traiettoria rappresentata è quella di una simulazione condotta per un'opzione con scadenza a 1 anno ($T=1$), con $\bar{M}=52$ controlli (≈ 1 controllo a settimana).

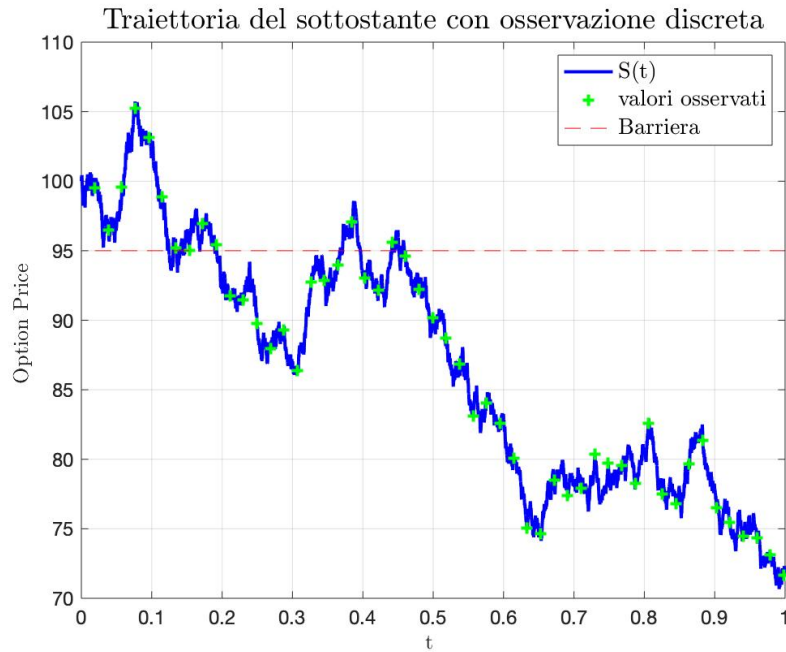


Figura 15: $S_0 = K = 100$, $B=95$, $r=0.1$, $\sigma=0.2$, $T=1$, $M=5000$

La differenza tra l'osservazione continua e quella periodica consiste nel fatto che quando il valore del sottostante impatta la barriera l'opzione perde valore, nel secondo caso, invece, l'opzione perde valore solo se il valore sottostante risulta essere minore della barriera in uno degli istanti in cui si osserva il valore del sottostante.

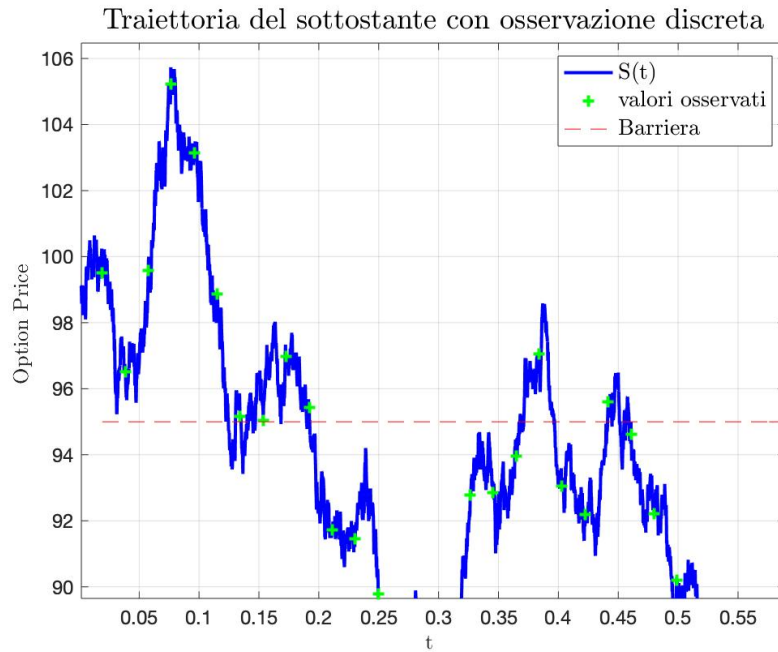


Figura 16: $S_0 = K = 100$, $B=95$, $r=0.1$, $\sigma=0.2$, $N=500000$, $T=1$, $M=5000$

In figura 16 è riportato un ingrandimento della figura 15.

In figura può osservare come, nell'intervallo $[0.1, 0.2]$, nonostante il valore del sottostante vada ad impattare la barriera diverse volte, la prima osservazione che individua un prezzo del sottostante minore del valore di barriera sarà quella effettuata poco dopo l'istante $t = 0.2$.

Un'osservazione discreta tende ad aumentare il prezzo dell'opzione: alcune delle traiettorie scartate durante un'osservazione continua potrebbero invece contribuire al payoff.

Nella tabella 6 sono stati confrontati il prezzo di un'opzione calcolato controllando in $\bar{M}=52$ istanti il valore del sottostante, quello in cui ogni traiettoria è stata calcolata per intero e quello delle soluzioni analitiche di riferimento.

Tabella 6: $N=10^6$, $M=5000$, N° osservazioni=52, $S_0 = K = 50$, $B=40$, $r=0.1$, $\sigma=0.2$, $T=1$

	sol. analitica	MonteCarlo	errore
osservazione continua	0.6264	0.6372	0.0035
osservazione discreta	0.8059	0.7305	0.0034

Tabella 7: $N=500000$, $M=2000$, $S_0 = K = 50$, $r=0.1$, $\sigma = 0.2$, $T=1$

osservazioni/anno	12	24	36	48	60	72	84	96
sol. analitica	0.9853	0.8863	0.8407	0.8130	0.7939	0.7797	0.7687	0.7597
MonteCarlo	0.8358	0.7841	0.7604	0.7567	0.7414	0.7491	0.7508	0.7518
errore	0.0053	0.0051	0.0050	0.0050	0.0049	0.0050	0.0050	0.0050

In tabella 7 sono stati riportati i valori ottenuti da diverse simulazioni variando il numero, quindi la frequenza, delle osservazioni.

Si può osservare come il metodo Monte Carlo tenda alla soluzione analitica all'aumentare del numero delle osservazioni.

Infine, nella tabella 8, sono riportati i valori ottenuti applicando il metodo delle variabili Antitetiche al programma con osservazione discreta del sottostante per diversi valori della barriera con i parametri della tabella 4.

Tabella 8: n° osservazioni=52, $N = 10^6$, $S_0 = K = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$, $M=2000$

B	60	65	70	75	80	85	90	95
sol.analitica	3.6540	3.4493	3.0310	2.3788	1.6119	0.9520	0.5432	0.3158
MonteCarlo	3.6638	3.4513	3.0288	2.3301	1.4885	0.7092	0.2174	0.0287
errore	0.0133	0.0126	0.0113	0.0094	0.0070	0.0044	0.0021	0.0006
MC V. Antitetiche	3.6587	3.4513	3.0281	2.3343	1.4895	0.7112	0.2171	0.0287
errore V. Antitetiche	0.0079	0.0075	0.0068	0.0058	0.0045	0.0029	0.0015	0.0004

IL metodo delle variabili Antitetiche anche in questo caso riduce notevolmente l'errore, ma l'aumento della precisione è minimo.

3 Double barrier option

Una *Double Barrier Option* è un contratto che prevede l'esistenza di due Barriere.

Generalmente sono presenti una *upper barrier* e una *lower barrier* e l'opzione può acquistare o perdere valore impattando le barriere.

In particolare è stata studiata un'opzione *double knock-out barrier*, questa opzione perde valore se il sottostante impatta almeno una delle barriere prima della data di scadenza del contratto.

Il programma realizzato è stato implementato per prezzare una *double KNOCK-OUT call* europea: l'opzione presa in considerazione perde valore se il prezzo del sottostante scende al di sotto del valore della *lower barrier* "BD" o supera il valore della *upper barrier* "BU" durante il periodo di vita del contratto derivato. L'opzione può essere esercita solo alla scadenza del contratto.

Il payoff di una *double KNOCK-OUT call* sarà:

$$\text{payoff: } \begin{cases} V(T) = \max[S(T) - K, 0] & \text{se } \forall t \in [0, T], \quad S(t) \in (L, U) \\ V(T) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (22)$$

U indica il valore della *upper barrier* e L il valore della *lower barrier*

In [1] è riportata una soluzione analitica per una Double Barrier Option monodimensionale, che verrà usata per confrontare i risultati ottenuti dalle varie simulazioni.

Il prezzo di una *Call Up-and-Out-Down-and- Out* può essere ottenuto come:

$$P_{call} = S e^{-rT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{U^n}{L^n} \right)^{\mu_1} \left(\frac{L}{S} \right)^{\mu_2} [N(d_1) - N(d_2)] - \left(\frac{L^{n+1}}{U^n S} \right)^{\mu_3} [N(d_3) - N(d_4)] \right\} \\ - K e^{-rT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{U^n}{L^n} \right)^{\mu_1-2} \left(\frac{L}{S} \right)^{\mu_2} [N(d_1 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_2 - \sigma\sqrt{T})] - \left(\frac{L^{n+1}}{U^n S} \right)^{\mu_3-2} [N(d_3 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_4 - \sigma\sqrt{T})] \right\} \quad (23)$$

$N(\cdot)$ è la distribuzione normale cumulata, δ_1 e δ_2 indicano la curvatura delle barriere ($\delta_1 = \delta_2 = 0$ per due barriere 'piatte') e b tiene conto del dividendo ($b = 0$).

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(SU^{2n}/(KL^{2n})) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(SU^{2n}/(FL^{2n})) + (b + \sigma^2/2)T}{\hat{L}} \\ d_3 &= \frac{\ln(L^{2n+2}/(KSU^{2n})) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_4 &= \frac{\ln(L^{2n+2}/(FSU^{2n})) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \mu_1 &= \frac{2[b - \delta_2 - n(\delta_1 - \delta_2)]}{\sigma^2} + 1 \\ \mu_2 &= 2n \frac{(\delta_1 - \delta_2)}{\sigma^2} \\ \mu_3 &= \frac{2[b - \delta_2 + n(\delta_1 - \delta_2)]}{\sigma^2} + 1 \\ F &= U e^{\delta_1 T} \end{aligned} \quad (24)$$

In figura 17 è riportato il grafico della soluzione analitica utilizzando gli stessi parametri che verranno adottati per le simulazioni successive. L'intervallo di interesse sarà quello dei valori positivi compresi tra le due barriere.

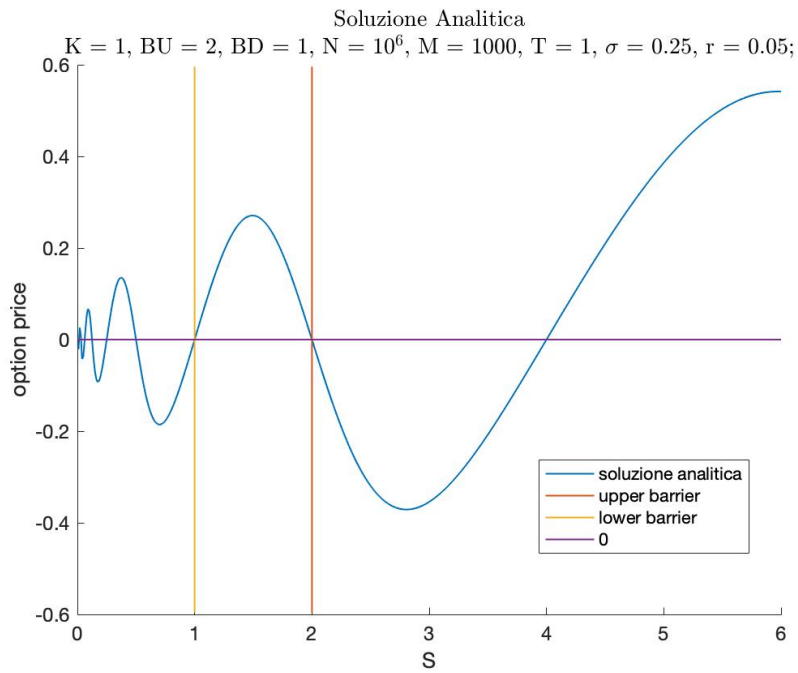


Figura 17

In figura 18 è rappresentato il prezzo dell'opzione in funzione del valore del sottostante. Il prezzo tende a zero in prossimità delle barriere e risulta essere nullo quando il valore del sottostante coincide o è minore dei valori delle barriere, abbastanza in accordo con la soluzione analitica. Il risultato della simulazione

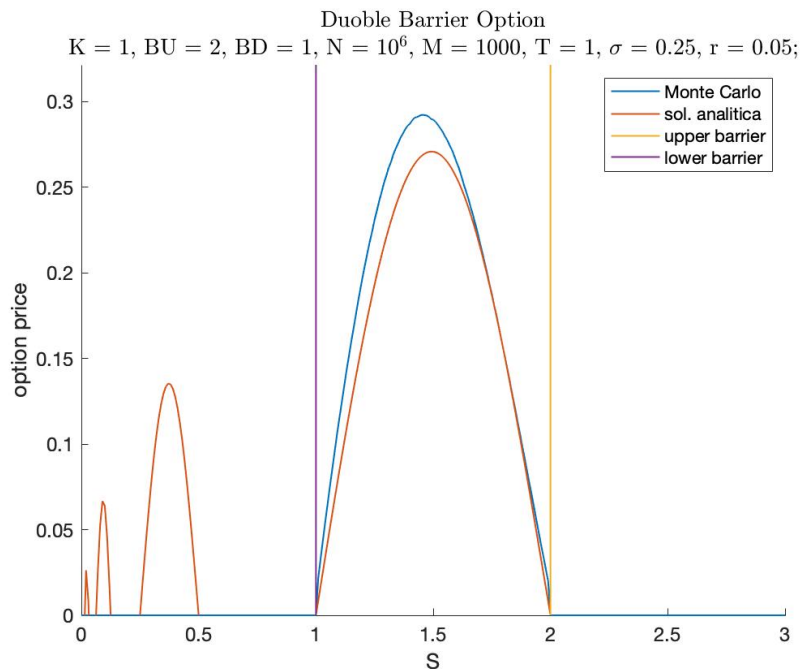


Figura 18

In figura 19 è riportato l'errore relativo della simulazione Monte Carlo rispetto alla soluzione analitica in scala semilogaritmica.

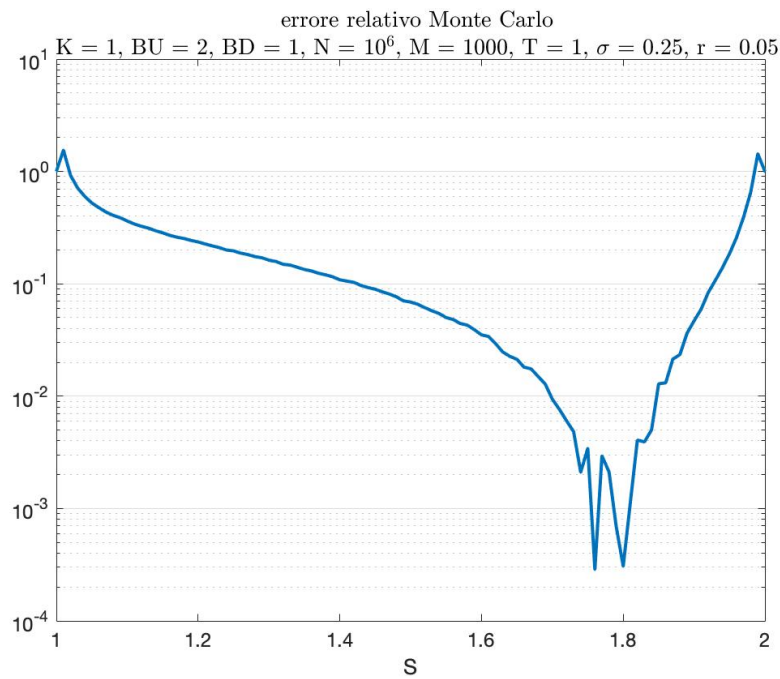


Figura 19

Anche in questo caso sono state realizzate simulazioni utilizzando le correzioni alle barriere dovute ad un'osservazione discreta della traiettoria del sottostante e il metodo Brownian Bridge.

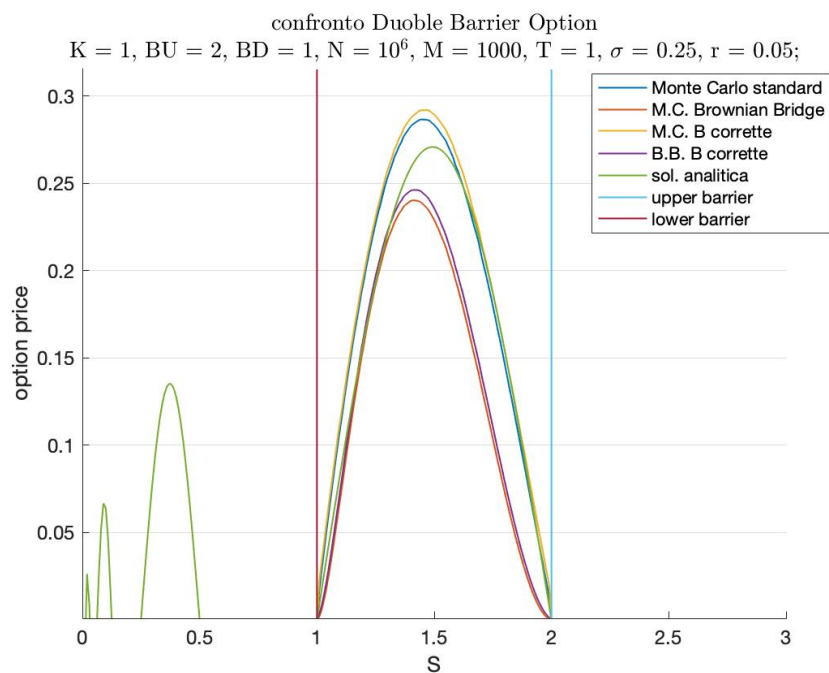


Figura 20

In figura 20 sono riportati i prezzi dell'opzione in funzione del valore dell'asset sottostante calcolati utilizzando:

- metodo Monte Carlo standard
- metodo Monte Carlo con la correzione alle barriere

- metodo Monte Carlo + metodo Brownian Bridge
- metodo Monte Carlo + Brownian Bridge + correzione alle barriere
- soluzione analitica [1]

In figura 21 sono riportati gli errori relativi dei metodi utilizzati per le simulazioni rispetto alla soluzione analitica. Entrambe le figure evidenziano una maggiore aderenza del metodo Monte Carlo standard e con correzione alle barriere alla soluzione analitica nell'intervallo $[1.5, 2]$, mentre le simulazioni in cui è stato usato anche il metodo Brownian Bridge sembrano essere più aderenti nell'intervallo $[1, 1.5]$.

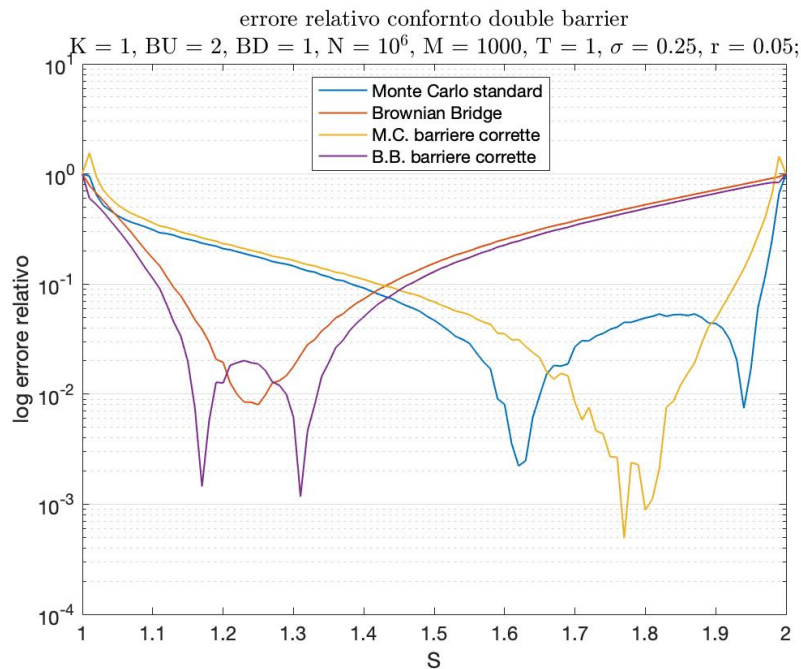


Figura 21

Nelle figure 22 e 23 sono riportati, in funzione del sottostante, i valori di :

- media tra i risultati del metodo Monte Carlo e Monte Carlo + Brownian Bridge
- media tra i risultati del metodo M.C. e M.C. + B.B. con le correzioni alle barriere
- errori relativi rispetto alla soluzione analitica per le due medie

Le medie sono state calcolate per capire se la combinazione dei risultati dei due metodi potesse dare un risultato più aderente alla soluzione analitica con un errore abbastanza costante nell'intervallo di interesse.

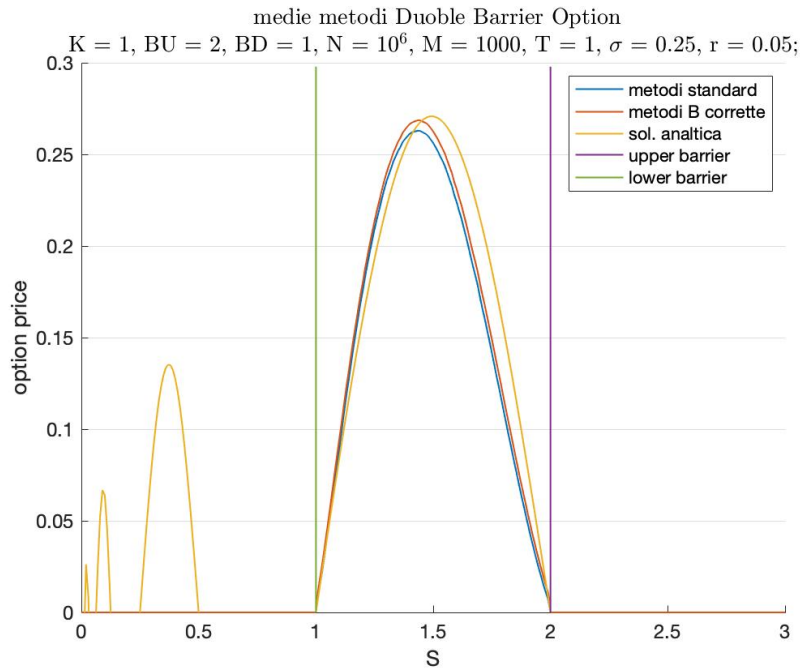


Figura 22

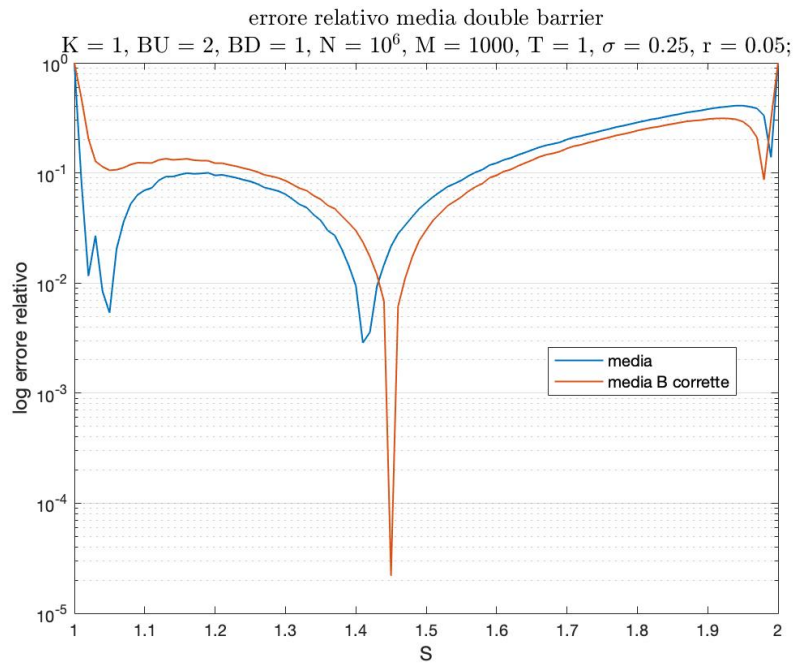


Figura 23

La tabella 9 raccoglie il valore e la posizione del massimo per ogni metodo utilizzato e li mette a confronto con i valori indicati dalla soluzione analitica. Sono indicati l'errore relativo di ogni massimo calcolato rispetto al massimo individuato dalla soluzione analitica e l'errore della 'posizione', intesa come il valore del sottostante per il quale si ha il massimo valore dell'opzione. La tabella evidenzia come il metodo Monte Carlo, standard e con correzione alle barriere, sovrastimi il massimo del prezzo dell'opzione ma lo individui molto più vicino alla posizione corretta intesa come valore del sottostante.

I risultati delle simulazioni con metodo Brownian bridge sono più distanti sia per quanto riguarda l'errore relativo sia sul massimo sia sul valore del sottostante per il quale dovrebbe essere massimo il valore dell'opzione.

Per quanto riguarda le medie si nota una notevole diminuzione dell'errore sul valore di massimo mentre per quanto riguarda la posizione del valore di massimo si ottengono risultati migliori dei Brownian Bridge ma non rispetto a Monte Carlo standard e con barriere corrette.

Tabella 9: $K=1$, $L=1$, $U=2$, $\sigma = 0.25$, $r = 0.05$, $T=1$, $N=10^6$, $M=1000$

	max option price	S	err. rel. max	err. rel. S
sol. analitica	0.2708	1.49	0	0
Monte Carlo standard	0.2865	1.45	0.0579	0.0268
M. C. barriere corrette	0.2919	1.47	0.0779	0.0134
Brownian Bridge	0.2402	1.41	0.1130	0.0537
Brownian Bridge B corrette	0.2462	1.41	0.0908	0.0537
MEDIA	0.2630	1.44	0.0077	0.0336
MEDIA B corrette	0.2687	1.44	0.0004	0.0336

Sono stati studiati i risultati delle simulazioni variando il numero di *path* generati e il numero di intervalli per ogni traiettoria: tabella 10

Tabella 10: sol. analitica = 0.2707, $S_0 = 1.5$, $K=1$, $L=1$, $U=2$, $\sigma = 0.25$, $r = 0.05$, $T=1$

$M \downarrow \setminus N \Rightarrow$	10^4	10^6	10^8
500	0.2880	0.2857	0.2857
1000	0.2896	0.2836	0.2834
2000	0.2801	0.2816	0.2816
4000	0.2800	0.2806	0.2805
8000	0.2787	0.2797	X
16000	0.2779	0.2790	X

A differenza di ciò che ci si potrebbe aspettare non si vede un netto miglioramento quando si aumentano N e M . Sembrerebbe che i risultati migliori si ottengano aumentando considerevolmente il numero degli intervalli temporali nelle traiettorie piuttosto che il numero delle traiettorie generate.

4 Two assets double barrier option

Una *two assets double barrier option* è un'opzione basket Europea, ciò significa che il valore del contratto dipende da più assets finanziari sottostanti, in questo caso due: S_1 e S_2 . Anche in questo caso sono presenti due barriere di tipo *KNOCK-OUT* una *DOWN and OUT* "BD" e una *UP and OUT* "BU". Il contratto preso in considerazione sarà esercitabile solo alla scadenza e perderà valore nel caso la somma del prezzo dei sottostanti impatti una delle due barriere durante la vita del contratto.

Il payoff di una *Two assets Double Barrier Call* sarà:

$$\text{payoff: } \begin{cases} V(T) = \max[S_1(T) + S_2(T) - K, 0] & \text{se } \forall t \in [0, T], \quad L < S_1(t) + S_2(t) < U \\ V(T) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (25)$$

In questo caso è necessario generare contemporaneamente due traiettorie, ognuna riferita ad uno dei singoli sottostanti :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \cdot t + \sigma_1 \cdot dW\right) \\ S_2(t) &= S_2(0) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \cdot t + \sigma_2 \cdot dZ\right) \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando che è necessario introdurre un parametro per tener conto della correlazione tra i due sottostanti(ρ) e discretizzando si ottengono le seguenti equazioni per le traiettorie:

$$\begin{aligned} S_1(t_{i+1}) &= S(t_i) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \cdot \Delta t + \sigma_1 \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot w\right) & \text{con } w \sim N(0, 1) \\ S_2(t_{i+1}) &= S_2(t_i) \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \cdot \Delta t + \sigma_2 \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot (\sqrt{1 - \rho^2} \cdot z + \rho \cdot w)\right) & \text{con } z \sim N(0, 1) \end{aligned} \quad (27)$$

Sono state realizzate quattro simulazioni con metodi diversi:

- Monte Carlo standard
- Monte Carlo + Brownian Bridge
- Monte Carlo con correzioni alle barriere L e U
- Monte Carlo + Brownian Bridge con correzioni alle barriere L e U

La simulazione realizzata con le correzioni alle barriere applicate al metodo Monte Carlo sembrerebbe avere i valori più simili a quelli riportati nella figura di riferimento(figura 24) per quanto riguarda $V(S_1 = 0)$ e $V(S_2 = 0)$. Nessuna delle simulazioni tuttavia riesce a replicare la forma del riferimento in maniera soddisfacente.

$K = 1, T = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.25, \rho = 0.7, r = 0.05, B_1 = 1, B_2 = 2$

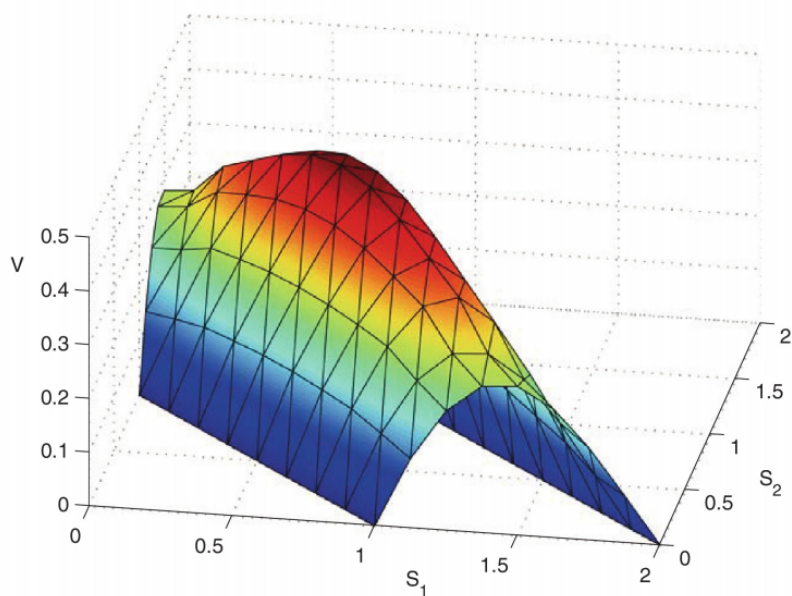


Fig. 5.9. Value function of a basket-barrier call option

Figura 24

Two asset Duoble Barrier option Monte Carlo standard
 $K = 1, BU = 2, BD = 1, N = 2 \cdot 10^5, M = 1000, T = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.25, r = 0.05;$

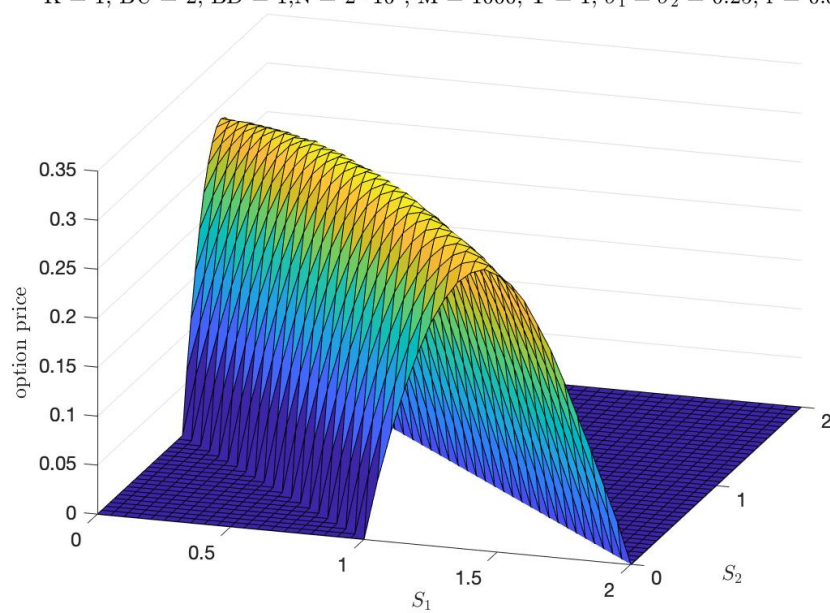


Figura 25

Two asset Duoble Barrier option Monte Carlo barriere corrette
 $K = 1$, $BU = 2$, $BD = 1$, $N = 2 \cdot 10^5$, $M = 1000$, $T = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $r = 0.05$;

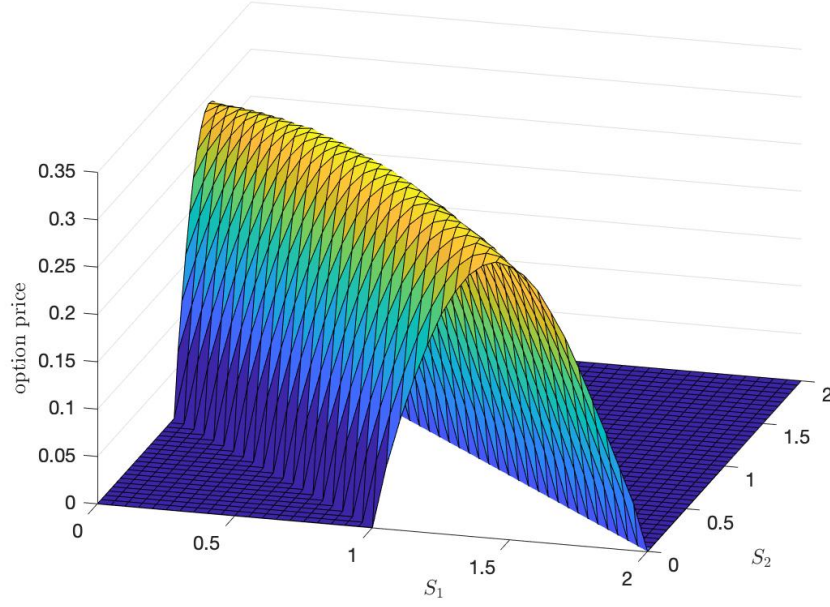


Figura 26

Two asset Duoble Barrier option Brownian Bridge
 $K = 1$, $BU = 2$, $BD = 1$, $N = 2 \cdot 10^5$, $M = 1000$, $T = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $r = 0.05$;

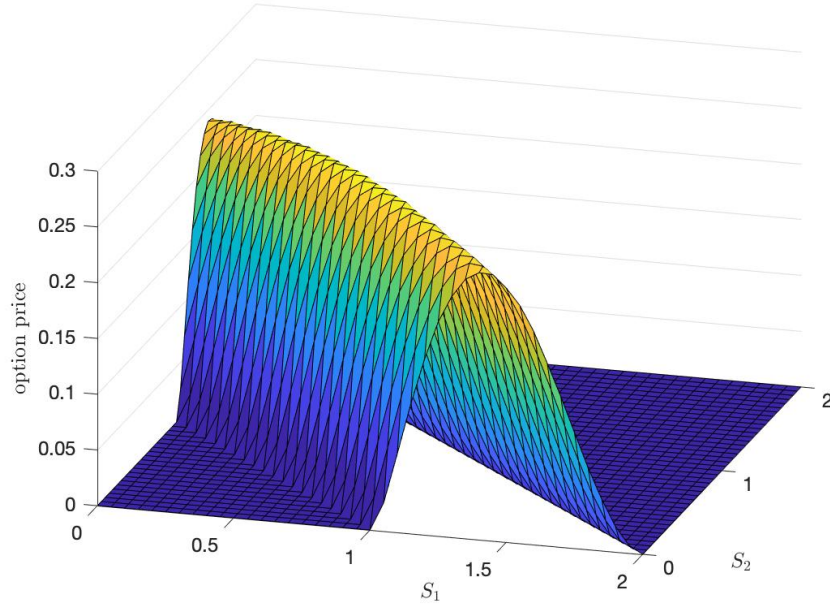


Figura 27

Two asset Duoble Barrier option Brownian Bridge barriere corrette
 $K = 1$, $BU = 2$, $BD = 1$, $N = 2 \cdot 10^5$, $M = 1000$, $T = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $r = 0.05$;

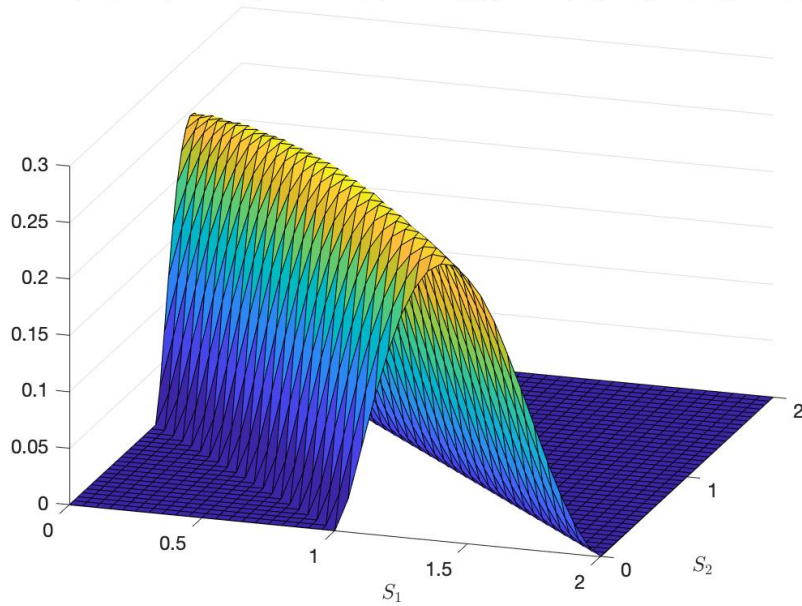


Figura 28

5 Programmi

5.1 Barrier option

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Barrier Option misure
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
tic;

price1=[];
price2=[];
error1=[];
error2=[];

sum_payoff1 = 0;
sum_payoff2 = 0;

for W=1:100

    time_int(W)= 50*W;

    M = time_int(W);
    N = 100000;
    S0 = 50;
    K = 50;
    B = 30;
```

```

T=1;
k=T/M;
sigma=0.2;
r=0.1;

Ba=B*exp(-0.5826*sigma*sqrt(k));

b=0; % da attivare se si considerano dividendi per sol analitica

sum_payoff1 = 0;
sum_payoff2 = 0;

Z1=0;
Z2=0;

parfor j=1:N

Sa=[];
Sa=zeros(1,M+1);
Sb=[];
Sb=zeros(1,M+1);

t=zeros(1,M+1);
Sa(1)=S0;
Pa=0;
% richiamo funzione per generare traiettorie
[Sa,Pa]=traiettorie1_barrier_option_1d(S0,T,sigma,r,M);

    if min(Sa) > B
        Z1=max(K-Pa,0);
    else
        Z1=0;
    end

    if min(Sa) > Ba
        Z2=max(K-Pa,0);
    else
        Z2=0;
    end

    sum_payoff1 = sum_payoff1 + Z1 ;
    sum_payoff2 = sum_payoff2 + Z2 ;

end

price2(W)=exp(-r*T)*(sum_payoff2/(N)); % prezzo con correzione a B
price1(W)=exp(-r*T)*(sum_payoff1/(N)); % prezzo Monte Carlo standard

```

```

% %
% % %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %           %HULL           %
% % %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %
lambda1=(r+0.5*sigma^2)/(sigma^2);
y9=(log((Ba^2)/(K*S0)))/(sigma*sqrt(T))+lambda1*sigma*sqrt(T);

d91=(T*(r+0.5*sigma^2) + log(S0/K))/(sigma*sqrt(T));
d92= d91 -sigma*sqrt(T) ;

x91=(log(S0/Ba))/(sigma*sqrt(T))+(sqrt(T)*sigma*lambda1);
y91=(log(Ba/S0))/(sigma*sqrt(T))+(sqrt(T)*sigma*lambda1);

PUTDI= -S0*(normcdf(-x91)) +(K)*(exp(-r*T))*(normcdf(sigma*sqrt(T)-x91))...
- (K)*(exp(-r*T))*((Ba/S0)^(-2+(lambda1)*2))*(normcdf(...
-sigma*sqrt(T)+y9)-normcdf(-sigma*sqrt(T)+y91))...
+ (S0)*((Ba/S0)^(2*(lambda1)))*(normcdf(y9)-normcdf(y91));

PUT= K*(exp(-r*T))*(normcdf(-d92))-(S0)*(normcdf(-d91));

% prezzo fornito dalla soluzione analitica libro HULL
price9(W) = PUT - PUTDI;

% errori relativi rispetto sol. analitica
error1(W) = abs(1-((price1(W))./ price9(W)));
error2(W) = abs(1-((price2(W))./ price9(W)));

end

toc

```

5.2 Double barrier option

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%   DUOBLE BARRIER OPTION MONTE CARLO MEIHOD
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all

tic;
%% parametri simulazione

S0 = linspace(0,3,301) ;
K = 1;
BU = 2;
BD = 1;
N = 10000;
M = 5000;
T = 1;
sigma = 0.25;

```

```

r = 0.05;
%% inizializzazione variabili
sum_payoff = 0;
sum_payoffVA = 0;
sum_payoffBB = 0;
sum_payoffVABB = 0;
sum_analitica1 = 0;
sum_analitica2 = 0;
Z1 = 0;
Z2 = 0;
Z3 = 0;
Z4 = 0;
k=T/M;
price1= zeros(1,length(S0));% prezzo opzione attualizzato
priceMC_BC = zeros(1,length(S0));
priceBB = zeros(1,length(S0)); % prezzo brownian bridge
priceBB_BC = zeros(1,length(S0)); % prezzo con metodi combinati
PriceA = zeros(1,length(S0));

%% correzione per la barriera da osservazione discreta

B_up = BU*exp(+0.5826*sigma*sqrt(k));
B_down = BD*exp(-0.5826*sigma*sqrt(k));

%% ciclo

for j=1:length(S0)

    sum_payoff = 0;
    sum_payoffVA = 0;
    sum_payoffBB = 0;
    sum_payoffVABB = 0;

    if S0(j) > BD
        if S0(j) < BU
for i=1:N

    ProbUP = 1 ;
    ProbDOWN = 1 ;
    ProbUP1 = 1 ;
    ProbDOWN1 = 1 ;

    [Sa]=traiettoria1_barrier_option_1d(S0(j),T,sigma,r,M);
    % uso r:intensita istantanea, sto facendo pricing
    %P=S(M+1) corrisponde al valore dell'opzione alla scadenza
    Pa = Sa(M+1);
    %Pb = Sb(M+1);

    if min(Sa) > BD %B_down %
        if max(Sa) < BU % B_up %

```



```

        Z1=max(Pa - K, 0);
    else
        Z1=0;
    end
else
    Z1 = 0;
end

%MC barriere corrette

if min(Sa) > B_down %BD
    if max(Sa) < B_up %BU
        Z2=max(Pa - K, 0);
    else
        Z2=0;
    end
else
    Z2 = 0;
end

%brownian bridge
ProbUP = exp( -2.*log(BU./S0(j)).*log(BU./Pa) ./ (T.*(sigma^2)) ) ;
ProbDOWN = exp( -2.*log(BD./S0(j)).*log(BD./Pa) ./ (T.*(sigma^2)) ) ;

zeta1 = 1 - ProbUP ;
zeta2 = 1 - ProbDOWN ;

if min(Sa) > BD %B_down %BD
    if max(Sa) < BU %B_up %BU

        Z3 = zeta1.*zeta2.*max(Pa - K, 0);
    else
        Z3 = 0;
    end
else
    Z3 =0;
end

%brownian bridge + barriere corrette
ProbUP1 = exp( -2.*log(B_up./S0(j)).*log(B_up./Pa) ./ (T.*(sigma^2)) ) ;
ProbDOWN1=exp( -2.*log(B_down./S0(j)).*log(B_down./Pa) ./ (T.*(sigma^2)));

zeta1b = 1 - ProbUP1;

zeta2b = 1- ProbDOWN1 ;

if min(Sa) > B_down %BD
    if max(Sa) < B_up %BU

        Z4=max(Pa - K, 0) * zeta1b * zeta2b;
    
```

```

else
    Z4 = 0;
end
else
    Z4 = 0;
end

sum_payoff = sum_payoff + Z1;
sum_payoffVA = sum_payoffVA + Z2;
sum_payoffBB = sum_payoffBB + Z3;
sum_payoffVABB = sum_payoffVABB + Z4;

```

```

end

```

```

%% SOLUZIONE ANALITICA

```

```

sum_analtical = 0;
sum_analtica2 = 0;
kk1 = 0;
kk2 = 0;
kk3 = 0;
kk4 = 0;
kk5 = 0;
kk6 = 0;
d1=0;
d2=0;
d3=0;
d4=0;
sum_analitica1 = 0;
sum_analitica2 = 0;

```

```

% sol. analitica

```

```

for ww = -12:12
    nn = 0;
    nn = ww;
FF = BU;
d1 = (log((S0(j).*BU.^(2*nn))./(K*BD.^(2*nn))) + T*0.5*sigma.^2)./(...
    sigma*sqrt(T));
d2 = (log((S0(j).*BU.^(2*nn))./(FF*BD.^(2*nn))) + T*0.5*sigma.^2)./(...
    sigma*sqrt(T));
d3 = (log((BD.^(2*nn+2))./(K.*S0(j).*BU.^(2*nn))) + T*0.5*sigma.^2)./(...
    sigma*sqrt(T));
d4 = (log((BD.^(2*nn+2))./(FF.*S0(j).*BU.^(2*nn))) + T*0.5*sigma.^2)./(...
    sigma*sqrt(T)) ;

mul = 1 ;
mu2 = 0 ;

```

```

mu3 = 1 ;

kk1 = ( (BU.^(nn) ) ./ ( BD.^(nn) ) ).^(mu1);
kk2 = (BD./S0(j)).^(mu2);
kk3 = ( ( BD .^ (nn + 1) ) ./ ( (BU .^ (nn) ) .* S0(j) ) ).^(mu3);
kk4 = (( BU.^(nn) ) ./ ( BD.^(nn) )) .^ (mu1 - 2);
kk5 = (( BD./S0(j) ).^(mu2));
kk6 = (( BD.^(nn+1) )./( (BU.^(nn)) .* S0(j) ) ) .^ (mu3 - 2);

SolA = kk1 * kk2 *( normcdf(d1) - normcdf(d2) ) - kk3 *( normcdf(d3) ...
        - normcdf(d4) ) ;
SolB = kk4 * kk5 *( normcdf(d1 - sigma*sqrt(T) ) - normcdf(d2 ...
        - sigma*sqrt(T))) - kk6 *(normcdf(d3 - sigma*sqrt(T)) - normcdf(d4 ...
        - sigma*sqrt(T)));

sum_analitica1 = sum_analitica1 + SolA;
sum_analitica2 = sum_analitica2 + SolB;
end

    else
        sum_analitica1 = 0;
        sum_analitica2 = 0;
    end

else
    sum_analitica1 = 0;
    sum_analitica2 = 0;

end

pricel(j)=exp(-r*T)*(sum_payoff/N);% prezzo opzione attualizzato
priceMC_BC(j)=exp(-r*T)*(sum_payoffVA/(N));
priceBB(j)=exp(-r*T)*(sum_payoffBB/N); % prezzo brownian bridge
priceBB_BC(j)=exp(-r*T)*(sum_payoffVABB/(N)); % prezzo con metodi combinati
PriceA(j) = S0(j)*exp(-r*T)*sum_analitica1 - K*exp(-r*T)*sum_analitica2 ;

end

```

5.3 Double barrier basket option

```

clear all
tic;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MONIE CARLO
% BASKET DOUBLE BARRIER CALL OPTION
% 2 asset sottostanti
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

rho = 0.7; % coefficiente di correlazione asset sottostanti
N = 10000; % numero traiettorie generate
r = 0.05; % interest rate
T = 1; % maturity in anni

```

```

sigma1 = 0.25;% volatilita asset1
sigma2 = 0.25;% volatilita asset2

M = 100;      % numero di intervalli temporali

k = T/M;

K = 1;        % strike price
BD = 1;       % lower barrier L
Bu = 2;       % upper barrier U

B_down = BD * exp(-0.5826*sigma1*sqrt(k)); %correzione barriera
B_up    = BU * exp(+0.5826*sigma1*sqrt(k)); %correzione barriera

sx1 = linspace(0,2,41);
sx2 = linspace(0,2,41);

%matrice della soluzione
prezzoMC = zeros(length(sx2),length(sx1)) ;
prezzoMC_BC = zeros(length(sx2),length(sx1)) ;
prezzoBB = zeros(length(sx2),length(sx1)) ;
prezzoBB_BC = zeros(length(sx2),length(sx1)) ;

for xx = 1:length(sx1)
    for yy = 1:length(sx2)

S1_0 = sx1(xx) ;
S2_0 = sx2(yy) ;

sum_payoffMC = 0;          % MC standard
sum_payoffVA = 0; % MC variabili antitetiche
sum_payoffBB = 0;          % Brownian bridge
sum_payoffVABB = 0; % brownian bridge + VA

Z1=0;
Z2=0;
Z3=0;
Z4=0;

if sx1(xx) + sx2(yy) < BU
    if sx1(xx) + sx2(yy) > BD

for i=1:N

    k=T/M;
    S1a=[];
    S1a=zeros(1,M+1);
    S2a=[];

```

```

S2a=zeros(1,M+1);
S1b=[];
S1b=zeros(1,M+1);
S2b=[];
S2b=zeros(1,M+1);

```

```

t=zeros(1,M+1);

```

```

S1a(1)=S1_0;
S2a(1)=S2_0;
S1b(1)=S1_0;
S2b(1)=S2_0;

```

```

for i=1:M

```

```

    g=randn;
    f=randn;
    S1a(i+1)=S1a(i)*exp( (r - 0.5*(sigma1)^2)*k + sigma1*sqrt(k)*g);
    S1b(i+1)=S1b(i)*exp( (r - 0.5*(sigma1)^2)*k + sigma1*sqrt(k)*(-g));

    S2a(i+1)=S2a(i)*exp( (r - 0.5*(sigma2)^2)*k + sigma2*sqrt(k)*( ...
        (sqrt(1 - (rho)^2))*f + (rho)*g) );
    S2b(i+1)=S2b(i)*exp( (r - 0.5*(sigma2)^2)*k + sigma2*sqrt(k)*( ...
        (sqrt(1 - (rho)^2))*(-f) + (rho)*(-g)) );

```

```

end

```

```

Pa=S1a(M+1);
Pb=S2a(M+1);
Pc=S1b(M+1);
Pd=S2b(M+1);

```

*% CONDIZIONE: la somma del prezzo delle azioni deve rimanere nell'intervallo
% definito dalle 2 barriere*

```

if min(S1a + S2a) > BD
    if max(S1a + S2a) < BU
        Z1 = max((Pa + Pb - K) , 0);
    else
        Z1 = 0;
    end
else
        Z1 = 0;
end

```

```

if min(S1a + S2a) > B_down
    if max(S1a + S2a) < B_up
        Z2 = max((Pa + Pb - K) , 0);
    else
        Z2 = 0;

```

```

    end
else
    Z2 = 0;
end

%brownian bridge
ProbUP = exp( - 2 .* log( BU./ (S1a(1)+S2a(1)) ) .* log(...
    BU./ (Pa+Pb) ) ./ (T.*(sigma1^2)) ) ;
ProbDOWN = exp( -2.*log( BD./ (S1a(1)+S2a(1)) ) .* log(...
    BD./ (Pa+Pb) ) ./ (T.*(sigma1^2)) ) ;

zeta1 = 1 - ProbUP ;
zeta2 = 1 - ProbDOWN ;

if min(S1a + S2a) > BD      %B_down %BD
    if max(S1a + S2a) < BU  %B_up %BU
        Z3 = zeta1.*zeta2.*max(Pa + Pb - K, 0);
    else
        Z3=0;
    end
else
    Z3 = 0;
end

%brownian bridge barriere corrette
ProbUP_meno = exp( -2.*log(B_up./ (S1a(1)+S2a(1))).*log(...
    B_up./ (Pa+Pb)) ./ (T.*(sigma1^2)) ) ;
ProbDOWN_meno = exp( -2.*log(B_down./ (S1a(1)+S2a(1))).*log(...
    B_down./ (Pa+Pb)) ./ (T.*(sigma1^2)) ) ;

zeta1b = 1 - ProbUP_meno ;
zeta2b = 1- ProbDOWN_meno ;

if min(S1a + S2a) > B_down %BD
    if max(S1a + S2a) < B_up %BU
        Z4 = max(Pa + Pb - K, 0) * zeta1b * zeta2b;
    else
        Z4 = 0;
    end
else
    Z4 = 0;
end

sum_payoffMC = sum_payoffMC + Z1;      % MC standard
sum_payoffVA = sum_payoffVA + Z2;      % MC B corrette
sum_payoffBB = sum_payoffBB +Z3;       % Brownian bridge
sum_payoffVABB = sum_payoffVABB + Z4;  % brownian bridge B corrette

```

end

```
prezzoMC(xx,yy) = exp(-r*T)*(sum_payoffMC./N);  
prezzoMC_BC(xx,yy) = exp(-r*T)*(sum_payoffVA./(N));  
prezzoBB(xx,yy) = exp(-r*T)*(sum_payoffBB./N);  
prezzoBB_BC(xx,yy) = exp(-r*T)*(sum_payoffVABB./(N));
```

else

```
prezzoMC(xx,yy) = 0;  
prezzoMC_BC(xx,yy) = 0;  
prezzoBB(xx,yy) = 0;  
prezzoBB_BC(xx,yy) = 0;
```

end

else

```
prezzoMC(xx,yy) = 0;  
prezzoMC_BC(xx,yy) = 0;  
prezzoBB(xx,yy) = 0;  
prezzoBB_BC(xx,yy) = 0;
```

end

end

end

toc

% comandi di plot

% figure

% hold on

% surf(sx1,sx2,prezzoMC)

% title({'Two asset Duoble Barrier option ','K = 1, BU = 2, BD = 1,N = \$5 \cdot 10^5\$

% xlabel({'\$S_1\$'},'interpreter','latex')

% ylabel({'\$S_2\$'},'interpreter','latex')

% zlabel({'option price'},'interpreter','latex')

% hold off

% figure

% hold on

% surf(sx1,sx2,prezzoBB)

% title({'Two asset Duoble Barrier option Brownian Bridge ','K = 1, BU = 2, BD = 1,N = \$5 \cdot 10^5\$

% xlabel({'\$S_1\$'},'interpreter','latex')

% ylabel({'\$S_2\$'},'interpreter','latex')

% zlabel({'option price'},'interpreter','latex')

% hold off

% figure

% hold on

% surf(sx1,sx2,prezzoMC_BC)

% title({'Two asset Duoble Barrier option barriere corrette ','K = 1, BU = 2, BD = 1,N = \$5 \cdot 10^5\$

```
% xlabel({'$S_1$'}, 'interpreter', 'latex')  
% ylabel({'$S_2$'}, 'interpreter', 'latex')  
% zlabel({'option price'}, 'interpreter', 'latex')  
% hold off
```


6 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

- [1] Espen Gaarder Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*
- [2] J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*
- [3] Bing Wang and Ling Wang *Pricing Barrier Options using Monte Carlo Methods*, Project Reports 05/2011.
- [4] M. Broadie, P. Glasserman, and S. G. Kou, *A Continuity Correction for Discrete Barrier Options*, *Mathematical Finance* 7, 4 (October 1997): 325–49.
- [5] Emmanuel Gobet. Advanced Monte Carlo methods for barrier and related exotic options. Bensoussan A., Zhang Q. et Ciarlet P. *Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, Elsevier, pp.497-528, 2009, *Handbook of Numerical Analysis*, ff10.1016/S1570-8659(08)00012-4ff.
- [6] Issac Lee, *Pricing barrier option with Brownian bridge MC simulation*, Apr 27, 2020
- [7] Hasan Alzubaidi, *Efficient Monte Carlo Algorithm Using Antithetic Variate and Brownian Bridge Techniques for Pricing the Barrier Options with Rebate Payments*, *Journal of Mathematics and Statistics*, February 2016