

# Elementi di calcolabilità e complessità

 `matteogiorgi.github.io`

*a.a. 2020*

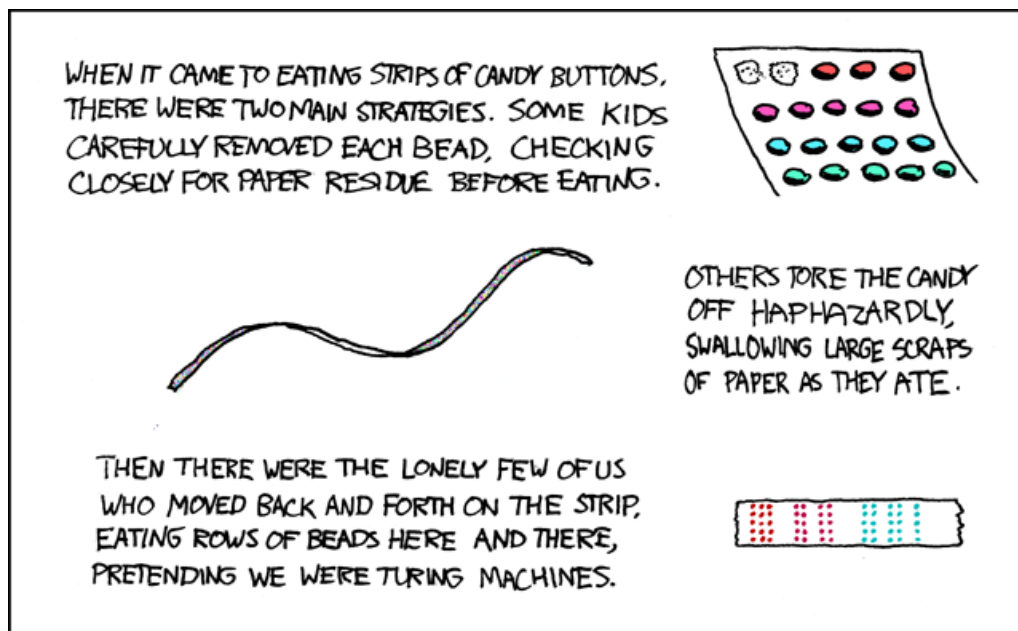
# Note

(. \_ . )

Queste note sono state prese dal sottoscritto durante le lezioni del corso di *Elementi di calcolabilità e complessità* tenuto dal prof. Pierpaolo Degano con l'ausilio del dott. Giulio Masetti durante l'anno accademico 2019-2020.

Il materiale usato per la stesura, oltre alle note distribuite dal professore, comprende, in maniera più o meno estensiva, i seguenti testi:

- M. Sipser - *Introduction to the theory of computation*
- R.G. Taylor - *Models of computation and formal languages*
- N.J. Cutland - *Computability, introduction to recursive function theory*
- A. Bernasconi, B. Codenotti - *Introduzione alla complessità computazionale*
- G. Ausiello, F. D'Amore, G. Gambosi - *Linguaggi, modelli, complessità*



## Idea intuitiva di algoritmo

Il punto di partenza della teoria della calcolabilità è l'esigenza di formalizzare l'idea intuitiva di *funzione calcolabile* da un algoritmo, ovvero di *funzione algoritmica*<sup>1</sup>.

Si può dire che un algoritmo sia un procedimento di calcolo che consente di pervenire alla soluzione di un problema, numerico o simbolico, mediante una sequenza finita di operazioni, completamente e univocamente determinate: una serie di istruzioni la cui esecuzione consente di trasformare l'insieme finito di dati simbolici che descrivono il problema, nella soluzione del problema stesso.

## Caratteristiche distintive<sup>2</sup>

1. l'insieme delle istruzioni che definisce l'algoritmo è finito
2. l'insieme delle informazioni che rappresentano il problema
  - ha cardinalità finita
  - ha un effetto limitato su dati discreti
  - è descritta da dati finiti
3. il procedimento di calcolo (o *computazione*) è suddiviso in passi discreti e non fa uso di dispositivi analogici
4. ogni passo di computazione dipende solo dai precedenti e da una porzione finita dei dati in modo deterministico (è determinato senza ambiguità - non è soggetto ad alcuna distribuzione probabilistica non banale)
5. non c'è limite al numero di passi necessari all'esecuzione di un algoritmo, nè alla memoria richiesta per contenere i dati iniziali, intermedi e finali

In conclusione, una procedura algoritmica riceve in ingresso una descrizione finita dei dati del problema e restituisce, dopo un tempo finito, una descrizione finita del

---

<sup>1</sup>la nozione di funzione algoritmica sarà poi formalizzata dal concetto di *funzione ricorsiva*

<sup>2</sup>può essere utile aggiungere una ulteriore caratteristica a quelle elencate dal prof: *esiste un agente di calcolo in grado di eseguire le istruzioni (un calcolatore)*

risultato. La sua natura deterministica fa sì che l'algoritmo fornisca sempre lo stesso risultato ogni volta che riceve in ingresso gli stessi dati: così facendo l'algoritmo stabilisce una relazione funzionale tra l'insieme dei dati e quello dei risultati.

## Macchina di Turing

Esattamente come *funzioni ricorsive* e  $\lambda$ -calcolo, le Macchine di Turing sono un modello di calcolo. Nella sua versione più tradizionale una *MdT* si presenta come un dispositivo che accede ad un nastro potenzialmente illimitato diviso in celle, ciascuna contenente un simbolo appartenente ad un dato alfabeto  $\Sigma$  (alfabeto della macchina), comprendente i simboli  $\#$  e  $\triangleright$  che denotano rispettivamente l'assenza di informazione nella cella e la marca di inizio stringa.

- la MdT opera tramite un  *cursore*, che può scorrere sul nastro in entrambe le direzioni e scrivere i caratteri  $\sigma_i$  appartenenti all'alfabeto  $\Sigma$
- gli *stati*  $q_i$  della macchina appartengono all'insieme finito degli stati  $Q$  e identificano istante per istante le informazioni contenute nella computazione

$\triangleright a b \dots a \underline{a} b \# \#$

- il meccanismo che fa evolvere la computazione della macchina è detta *funzione di transizione*<sup>3</sup>  $\delta$  e consente, partendo dallo stato  $q_x$  e dal carattere  $\sigma_x$  presente sulla cella puntata dalla testina, di portare la macchina in un altro stato  $q_y$ , scrivere un carattere  $\sigma_y$  su tale cella precedentemente occupata da  $\sigma_x$  ed eventualmente spostare la testina ( $\Leftarrow, \Rightarrow, \equiv$ )

**Def.** una Macchina di Turing è definita formalmente come la quadrupla

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0)$$

- $Q$  è l'insieme finito degli stati  $q_i$  che non contiene lo stato di accettazione  $h$
- $\Sigma$  è l'insieme finito dei simboli (alfabeto della macchina) al quale non appartengono i simboli di spostamento  $\Leftarrow, \Rightarrow, \equiv$
- $\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times (Q \cup h) \times \Sigma \times \{\Leftarrow, \Rightarrow, \equiv\}$  è la relazione di transizione, tale che il carattere puntato dal cursore non possa mai trovarsi a sinistra di  $\triangleright$
- $q_0 \in Q$  è lo stato iniziale

*Potrebbe essere conveniente modificare la definizione di MdT estendendo la quadrupla ad una quintupla togliendo gli stati di accettazione e rifiuto dall'insieme  $Q$ , aggiungendoli in un insieme a parte:  $M = (Q \setminus \{q_A, q_R\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_A, q_R\})$ .*

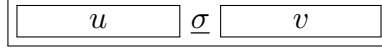
---

<sup>3</sup> fintanto che verranno trattate MdT deterministiche non è errato considerare  $\delta$  una funzione piuttosto che una relazione come invece è specificato nella definizione formale

## Configurazione, transizione e computazione

**Def.** Una configurazione (istantanea)  $C$  di una MdT è definita dalla quadrupla

$$(q, u, \sigma, v) \in (Q \cup \{h\}) \times \Sigma^* \times \Sigma \times \Sigma^F$$



- $q$  è lo stato corrente
- $\sigma$  è il simbolo corrente
- $u$  è la stringa di caratteri a sinistra del simbolo corrente
- $v$  è la stringa di caratteri a destra del simbolo corrente

Ne viene intuitivo dedurre che  $\Sigma^*$  rappresenti l'insieme di cardinalità infinita delle stringhe generabili dalla *giustapposizione* ( $\circ$ ) dei caratteri dell'alfabeto della macchina  $\Sigma$ , mentre  $\Sigma^F$  è più facile a scriversi che a dirsi:  $\Sigma^* \circ (\Sigma \setminus \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ <sup>4</sup>.

*In generale una configurazione di una MdT non è altro che la coppia formata dallo stato corrente della macchina più la stringa<sup>5</sup> rappresentante la situazione sul nastro.*

### $\delta$ come funzione

Alla luce delle definizioni di MdT e configurazione, è importante analizzare meglio la relazione di transizione  $\delta$ , definita prima come la quadrupla

$$((q_x, \sigma_x), q_y, \sigma_y, D)$$

- $(q_x, \sigma_x)$  è la coppia stato di partenza, carattere puntato dal cursore
- $q_y$  è lo stato di arrivo
- $\sigma_y$  è il carattere scritto nella cella precedentemente occupata da  $\sigma_x$
- $D$  è lo spostamento del cursore ( $\Leftarrow, \Rightarrow, \equiv$ )

Adesso è facilmete intuibile che, una macchina nella medesima configurazione di partenza che compie il medesimo spostamento del cursore, si troverà nella medesima configurazione di arrivo.

Questa constatazione permette di restringere la relazione  $\delta$  in modo che sia una funzione rispetto al suo primo argomento (la coppia stato corrente, carattere letto):

$$\delta(q_x, \sigma_x) = (q_y, \sigma_y, D)$$

<sup>4</sup>quando definiremo meglio cos'è un linguaggio accettato da una MdT (o da un automa a stati finiti) sarà più chiaro come costruire un insieme di stringhe

<sup>5</sup>quando verranno trattate macchine a  $k$  nastri, si parlerà di una  $k$ -upla di stringhe, ciascuna delle quali riferita ad un nastro della macchina

## Passo di computazione e computazione

Lorem. Nunc non mauris. Nam accumsan tortor gravida elit. Cras porttitor. Praesent vel enim sed eros luctus imperdiet. Mauris neque ante, placerat at, mollis vitae, faucibus quis, leo. Ut feugiat. Vivamus urna quam, congue vulputate, convallis non, cursus cursus, risus. Quisque aliquet. Donec vulputate egestas elit. Morbi dictum, sem sit amet aliquam euismod, odio tortor pellentesque odio, ac ultrices enim nibh sed quam. Integer tortor velit, condimentum a, vestibulum eget, sagittis nec, neque. Aenean est urna, bibendum et, imperdiet at, rhoncus in, arcu. In hac habitasse platea dictumst. Vestibulum blandit dignissim dui. Maecenas vitae magna non felis ornare consectetur. Sed lorem. Nam.

**Def.** Una computazione di una MdT è una successione di configurazioni, ogniuna ottenuta dalla precedente in accordo con la definizione di funzione di transizione  $\delta$