

Strutture Aeronautiche
Esercitazione 4
Prof.re Franco Mastroddi

Matteo Hakimi 1455230



Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

Indice

1	Introduzione	3
2	Cilindro infinito pressurizzato	3
2.1	Cilindro finito pressurizzato	4
2.2	Cilindro finito caricato sul bordo	5
3	Calotta sferica pressurizzata soggetta al peso proprio	6
3.1	Calotta sferica pressurizzata	7
3.2	Calotta sferica soggetta al peso proprio	8
3.3	Modi	10
4	Calotta sferica con apertura polare soggetta a carico anulare sulla sommitá e peso proprio	13
4.1	Modi	15

1 Introduzione

Si vogliono calcolare gli stress indotti, attraverso un codice agli elementi finiti, delle seguenti strutture:

- Cilindro infinito pressurizzato
- Calotta sferica pressurizzata soggetta al proprio peso
- Calotta sferica con apertura polare soggetta a carico anulare sulla sommità e peso proprio

Si effettuerá inoltre il confronto con la soluzione ottenuta per via analitica.

Infine saranno calcolati, sempre con l'utilizzo di un solutore Fem, i modi propri di vibrazione della calotta con e senza apertura polare.

2 Cilindro infinito pressurizzato

Il primo caso analizzato é quello del cilindro infinito cavo in lega leggera (alluminio), di raggio $r = 2.5m$ e spessore $t = 2.5mm$ chiuso alle estremitá, pressurizzato con pressione $p = 150kPa$.

Dalla teoria analitica dei gusci sottili, avendo definito un sistema di coordi-



Figura 1: Cilindro pressurizzato

nate cilindriche ($r \theta x$), gli stress normali σ_θ e σ_x sono dati da:

- $\sigma_\theta = \frac{pr_0}{t} = 150Mpa$
- $\sigma_x = \frac{pr_0}{2t} = 75Mpa$

Data l'impossibilitá di implementare su software una struttura "infinita", in prima approssimazione il problema puó essere diviso in due sottoproblemi di natura piú semplice, poiché, il caso analizzato presenta particolari simmetrie a meno di effetti di bordo.

Si procederà quindi con l'implementazione e lo studio dei due sottocasi:

- Cilindro finito aperto con pressione interna libero-libero
- Cilindro finito aperto soggetto a carico di trazione sul bordo incastrato-libero

Bisogna notare che un modo alternativo di procedere, al fine di ottenere una soluzione più simile possibile a quella analitica, è quello di considerare un cilindro finito chiuso pressurizzato e controllare lo stress in prossimità della sezione centrale.

2.1 Cilindro finito pressurizzato

Il cilindro viene modellato finito aperto alle estremità, soggetto a una pressione interna, avendolo opportunamente discretizzato con 40 elementi in direzione circonferenziale e 30 in direzione longitudinale, per un totale di 1200 elementi SHELL.

Imponendo come condizioni al contorno uno spostamento di estremità in direzione longitudinale uguale e contrario a quello della faccia opposta, si ha che la σ_θ ottenuta con solutore FEM è pari a:

- $\sigma_\theta = 1.495376E + 08Pa$

costante in tutte le sezioni e nello spessore.

Si ottiene cioè una soluzione molto prossima a quella ottenuta per via analitica ipotizzando uno sforzo solamente di natura membranale.

Data l'assenza di σ_x si prevede una deformazione $\epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} = 2.143 \cdot 10^{-3}$ ovvero uno spostamento in direzione radiale $\Delta r = 5.357 \cdot 10^{-3}m$, in buon accordo con quello attenuto con solutore $\Delta r_{FEM} = 5.340630E - 03m$

Per completezza si riporta la deformata ottenuta tramite codice FEM.

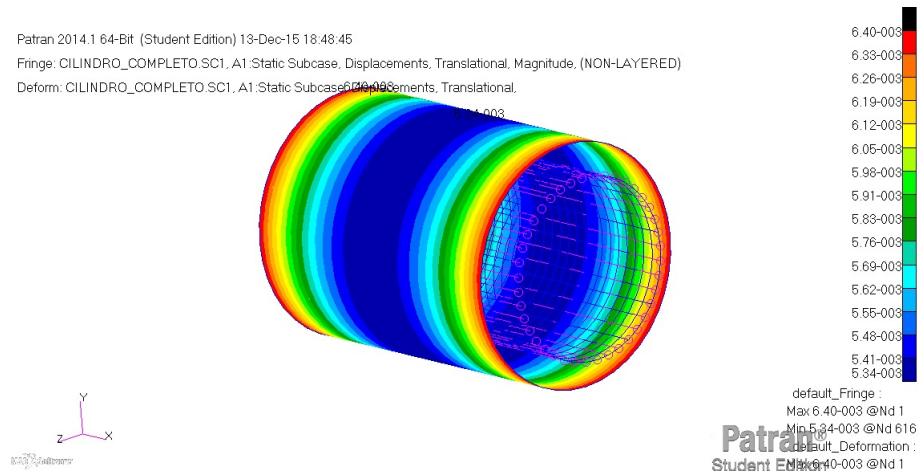


Figura 2: Deformata cilindro

2.2 Cilindro finito caricato sul bordo

Al fine di considerare gli effetti membranali dovuti alla pressione agente sulle basi del cilindro, mantenendo la stessa discretizzazione del caso precedente (40×30 elementi SHELL), viene incastrata una delle estremità e viene applicato un carico di trazione uniformemente distribuito sull'altra; caricando direttamente ogni nodo della faccia con una forza di intensità pari a $F = \frac{p\pi r^2}{2\pi r N_{Nodi}}$ dove N_{Nodi} è il numero di nodi sulla faccia stessa .

Si noti che in questo caso non si sta modellizzando il coperchio che chiude la faccia d'estremità, ma piuttosto l'effetto del coperchio stesso, che induce uno stato di stress σ_x in direzione assiale.

Procedendo con il calcolo si ottiene:

- $\sigma_x = 7.507616E + 07 Pa$

Anche in questo caso si nota un buon accordo con la soluzione ottenuta analiticamente; inoltre si ha $\Delta r = -\nu \sigma_x r_0 - 0.803 10^{-3} m$ mentre quella ottenuta tramite software è $\Delta r_{FEM} = -0.786635E - 03$; si noti come la somma dei spostamenti complessivi in direzione radiale, ottenuti analiticamente, siano in buon accordo con quelli ottenuti tramite codice FEM: $\Delta r_{tot} = 4.554 10^{-3} m$ $\Delta r_{FEMtot} = 4.554 10^{-3} m$.

Infine, anche in questo caso, si riporta la deformata ottenuta tramite solutore.

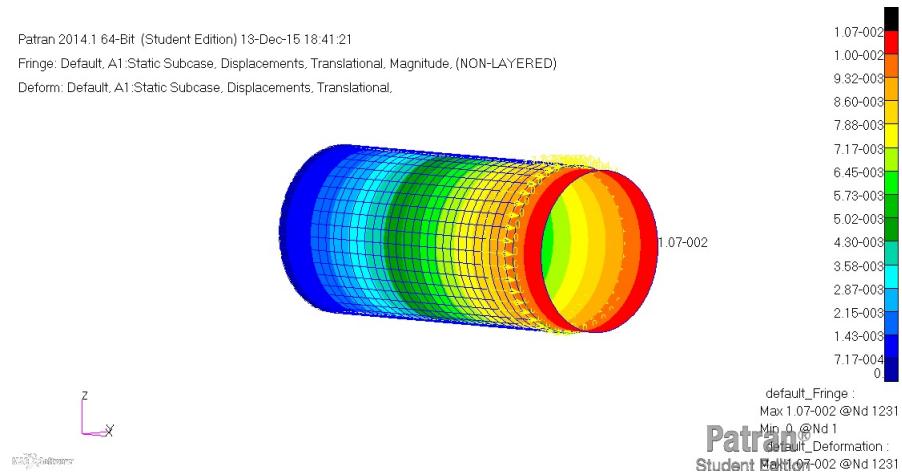


Figura 3: Deformata cilindro

3 Calotta sferica pressurizzata soggetta al peso proprio

Il caso successivo riguarda la determinazione della risposta statica di una cupola sferica, appoggiata sul bordo, troncata ($\alpha = 60^\circ$ si veda figura) in alluminio, di spessore $t = 2.0 \cdot 10^{-3} m$ e raggio $r = 1m$ pressurizzata $p = 75kPa$ e soggetta al proprio peso.

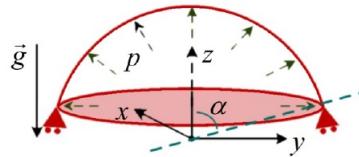


Figura 4: Calotta

Per la cupola pesante pressurizzata la soluzione analitica fornisce i seguenti risultati:

- Pressione interna: $\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t}$
- Gravitá: $\sigma_\phi = \frac{\bar{p}r}{t(1 + \cos \phi)}$, $\sigma_\theta = \frac{\bar{p}r}{t} \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right)$

dove \bar{p} é la forza peso per unitá di superficie della calotta, $\bar{p} = \rho \cdot g \cdot t$.

Al fine di calcolare la soluzione mediante solutore FEM si é proceduto con la discretizzazione della struttura come segue:

- Suddivisione di ogni parallelo con 30 elementi SHELL
- Suddivisione di ogni meridiano con 120 elementi SHELL

In particolare gli elementi scelti al fine di eseguire la mesh sono di tipo eterogeneo (CQUAD4, CTRIA3).

Si noti come gli elementi di tipo CTRIA3 sono stati collocati in prossimitá del polo, e come questi risultino essere di dimensione minore rispetto a quelli di tipo CQUAD4, questo perché, data la particolare geometria di questi elementi si riesce a ricoprire perfettamente la superficie in prossimitá del polo. Tuttavia gli elementi di tipo CTRIA3 forniscono un campo di deformazione (e quindi di stress) costante all'interno dell'elemento, per questo motivo si é proceduto con l'infittimento locale nell'intorno del polo.

Inoltre é stato creato un elemento RBE3 che vincola il nodo all'apice della cupola a muoversi solidarmente ai nodi del parallelo adiacente, questo perché sempre in prossimitá del polo si verifica un affossamento della cupola che nella realtá non si verifica.

Si procede ora con il calcolo della soluzione, analizzando separatamente i diversi contributi del carico (solamente gravitá e solamente pressione) e poi globalmente.

3.1 Calotta sferica pressurizzata

Il primo sottocaso analizzato é quello inherente alla struttura solamente pressurizzata.

Ricordiamo che la teoria analitica dei gusci sottili, avendo considerato un campo di sforzo puramente membranale é dato da:

$$\bullet \quad \sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t} = 18.75 MPa$$

Si riportano i risultati ottenuti per l'elemento 413 della struttura

$\sigma_{\theta+}$	$1.874015E + 07 Pa$
$\sigma_{\theta-}$	$1.874026E + 07 Pa$
$\sigma_{\phi+}$	$1.873922E + 07 Pa$
$\sigma_{\phi-}$	$1.873958E + 07 Pa$

Avendo indicato con + lo sforzo sulle fibre superiori dello spessore e con - quello inferiore. Si osserva una variazione di stress nello spessore pari a $\Delta\sigma_\theta = 0.000011 Pa$ e $\Delta\sigma_\phi = 0.00036 Pa$.

Si nota come i risultati ottenuti attraverso solutore FEM siano in ottimo accordo con quelli ottenuti analiticamente, avendo considerato solamente uno sforzo puramente membranale.

3.2 Calotta sferica soggetta al peso proprio

Si passa ora al calcolo del campo di stress della struttura soggetto al peso proprio.

Dalla teoria analitica dei gusci sottili si ha che:

- $\sigma_\phi = \frac{\bar{p}r}{t(1 + \cos \phi)}$
- $\sigma_\theta = \frac{\bar{p}r}{t} \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right)$

Si osserva come in questo caso la tensione meridiana e quella parallela varino in funzione della colatitudine ϕ .

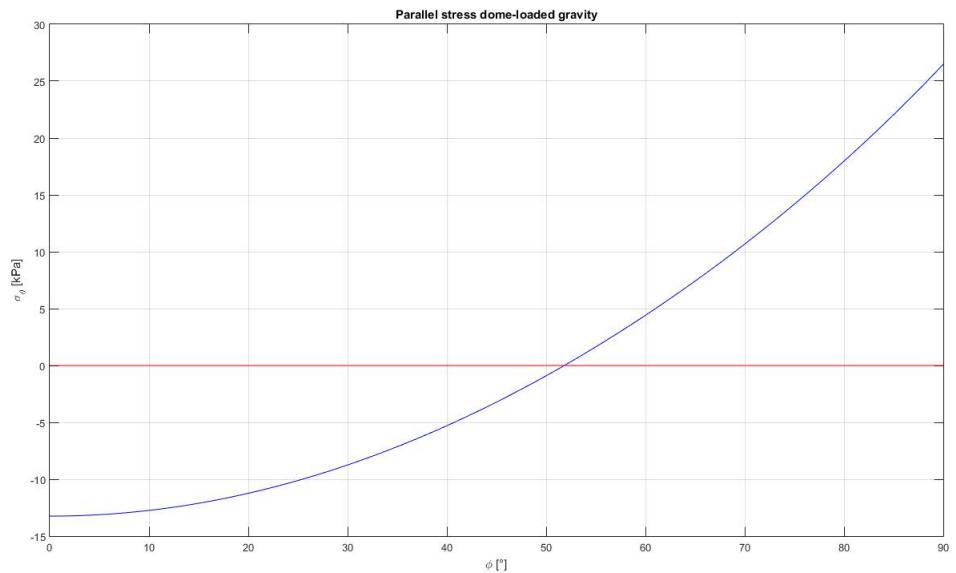


Figura 5: σ_θ al variare di ϕ

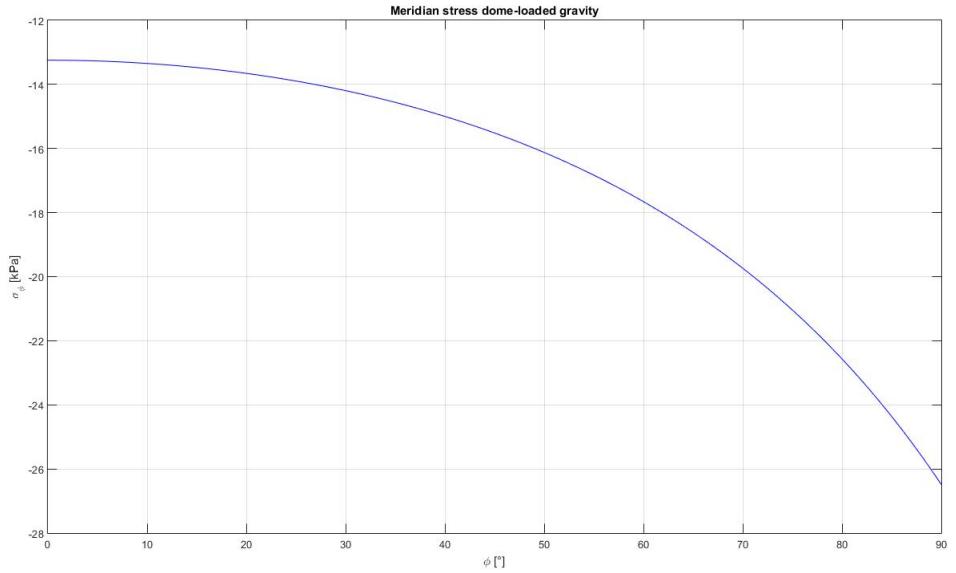


Figura 6: σ_ϕ al variare di ϕ

Si puó notare come la tensione parallela σ_θ cambi segno al variare della colatitudine ϕ passando da uno stato stress di compressione ad uno di trazione, annullandosi per una $\phi = 51.7^\circ$, infatti per l'elemento 418 ($56^\circ < \phi < 58^\circ$) si ha una $\sigma_\theta = 1.831168E + 03 Pa$.

Si riportano i risultati sempre in corrispondenza dell'elemento 413, avente come nodi:

Nodo	Colatitudine ϕ
413	46.00°
414	44.00°
443	46.00°
444	44.00°

$\sigma_{\theta+}$	$-3.266092E + 03 Pa$
$\sigma_{\theta-}$	$-3.144493E + 03 Pa$
$\sigma_{\phi+}$	$-1.557026E + 04 Pa$
$\sigma_{\phi-}$	$-1.545168E + 04 Pa$

In perfetto accordo con la teoria analitica; infatti considerando una $\bar{\phi} = 45^\circ$ ovvero la media delle colatitudini dei nodi adiacenti lungo il meridiano, si ottiene $\sigma_\theta = -3.213 kPa$ e $\sigma_\phi = -15.52 kPa$. Considerando il caso globale, peso piú pressurizzazione si ha:

Analitico	FEM
$\sigma_\theta = 1.8747 MPa$	$\sigma_\theta = 1.873688391E + 07 Pa$
$\sigma_\phi = 1.8734 MPa$	$\sigma_\phi = 1.872457974E + 07 Pa$

Si noti come il carico di gravità influenzi molto poco la soluzione in termini globali.

Per completezza si riporta la deformata della struttura.

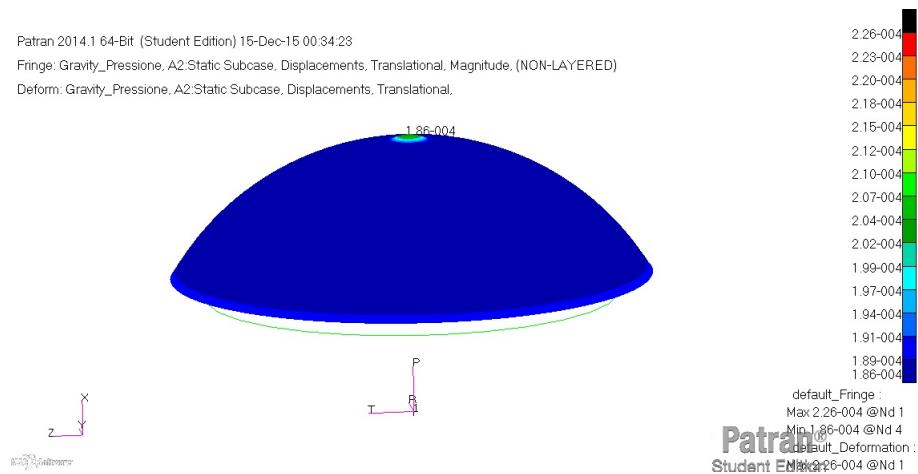


Figura 7: Deformata cupola pressurizzata e sotto azione di gravità

3.3 Modi

Sempre con riferimento alla cupola, si vogliono calcolare i primi 10 modi propri di vibrare; quest'ultimi e le rispettive frequenze sono stati calcolati usando un solutore FEM (SOL 103), normalizzando tali modi rispetto allo spostamento massimo (MAX) in modo da ottenere uno spostamento massimo pari a 1.

Si riportano in tabella i valori delle pulsazioni ottenute tramime Nastran.

Modo	f [Hz]
1	698.609500
2	698.609500
3	718.430952
4	772.469800
5	772.469800
6	776.658800
7	776.658800
8	780.307100
9	788.243000
10	788.243100

Vengono riportate le prime 10 deformate.

Si noti come le frequenze proprie risultano essere le stesse a coppie, es 1 e 2, e le rispettive deformate modali risultano essere coincidenti ma ruotate spazialmente di un angolo di 90° , questo è dovuto alla simmetria della struttura, che in quanto tale non predilige una direzione specifica, questo conduce ad avere delle armoniche trasversali coincidenti.

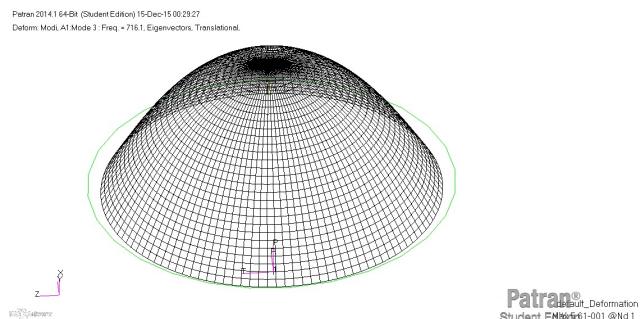
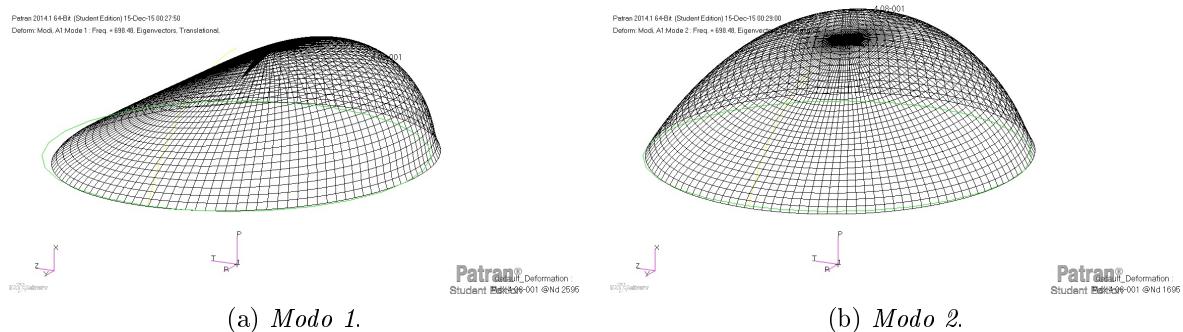
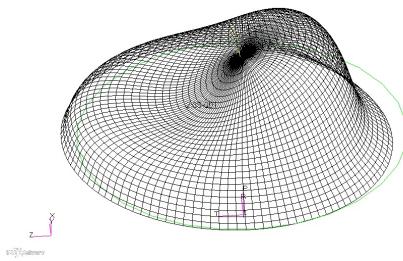


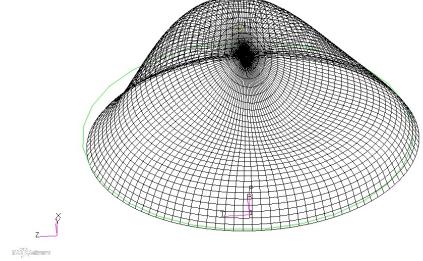
Figura 8: Modo 3

Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:30:32
Deform Mod: A1Mode 4: Freq = 772.94, Eigenvectors, Translational.



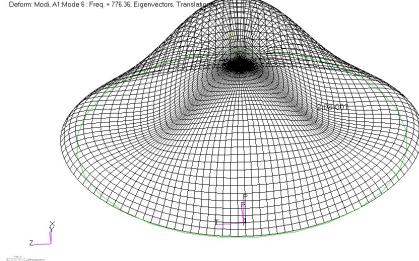
(a) *Modo 4*.

Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:30:58
Deform Mod: A1Mode 5: Freq = 772.94, Eigenvectors, Translational.



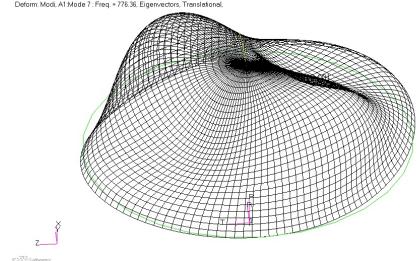
(b) *Modo 5*.

Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:31:23
Deform Mod: A1Mode 6: Freq = 776.36, Eigenvectors, Translational.



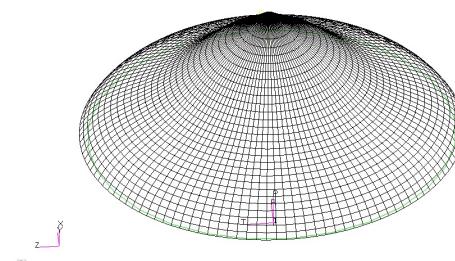
(a) *Modo 6*.

Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:31:58
Deform Mod: A1Mode 7: Freq = 776.36, Eigenvectors, Translational.



(b) *Modo 7*.

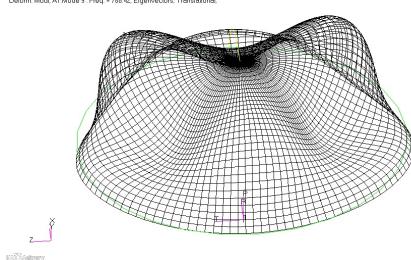
Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:32:31
Deform Mod: A1Mode 8: Freq = 780.33, Eigenvectors, Translational.



Patran®
Student Edition 68-001 @Nd 1

Figura 9: *Modo 8*

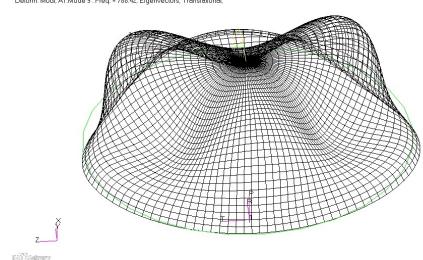
Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:32:53
Deform Mod: A1Mode 9: Freq = 788.42, Eigenvectors, Translational.



Patran®
Student Edition 68-001 @Nd 648

(a) *Modo 9*.

Patran 2014.1 64bit (Student Edition) 15-Dec-15 00:32:53
Deform Mod: A1Mode 9: Freq = 788.42, Eigenvectors, Translational.



Patran®
Student Edition 68-001 @Nd 648

(b) *Modo 10*.

4 Calotta sferica con apertura polare soggetta a carico anulare sulla sommitá e peso proprio

Si vuole determinare la risposta statica della cupola precedentemente trattata, con l'aggiunta di un'apertura polare pari a $\phi_0 = 30^\circ$ (si veda figura), caricata sulla sommitá con un carico uniformemente distribuito sul bordo di intensitá $P = 8000 \frac{N}{m}$ e soggetta al proprio peso.

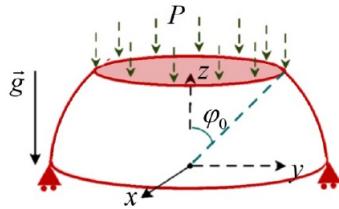


Figura 10: Cupola forata

La soluzione analitica fornisce i seguenti risultati:

- $\sigma_\phi = -\frac{\bar{p} \cdot r}{t} \cdot \left(\frac{\cos \phi_0 - \cos \phi}{\sin^2 \phi} \right) - \frac{P \cdot \sin \phi_0}{t \cdot \sin^2 \phi}$
- $\sigma_\theta = \frac{\bar{p} \cdot r}{t} \cdot \left(\frac{\cos \phi_0 - \cos \phi}{\sin^2 \phi} - \cos \phi \right) - \frac{P \cdot \sin \phi_0}{t \cdot \sin^2 \phi}$

La struttura é stata discretizzata con 120 elementi lungo ogni parallelo e 30 elementi lungo ogni meridiano (elementi di tipo SHELL).

Inoltre si é sostituita la distribuzione di carico P sul bordo, con un carico equivalente $\bar{F} = P \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0$, dove $r_0 = r \cdot \sin(30^\circ)$, ovvero un carico $F = 25.133kN$, applicando quindi un carico concentrato pari a $f = 209.44N$ su ognuno dei 120 nodi distribuiti sul bordo della sommitá.

Scegliendo come elemento da analizzare il 405 avente nodi:

Nodo	Colatitudine ϕ
418	44.00°
419	46.00°
449	44.00°
450	46.00°

si ha che:

$$\begin{array}{ll} \sigma_\theta & -3.797657E + 06 Pa \\ \sigma_\phi & -3.964583E + 06 Pa \end{array}$$

Al solito, prendendo una $\bar{\phi} = 45.5^\circ$ media tra le due colatitudini dei nodi dell'elemento sul meridiano, la soluzione analitica fornisce $\sigma_\theta = -3.9401 MPa$ e $\sigma_\phi = -3.9414 MPa$; in buon accordo con la teoria analitica.

Valutando, invece, lo stress su un elemento (elemento 150) in prossimità della sommità, e indicando con + la fibra superiore dello spessore e con - quella inferiore si ha:

σ_{θ_-}	$4.865439E + 07 Pa$
σ_{θ_+}	$-5.732001E + 07 Pa$
σ_{ϕ_-}	$1.339110E + 08 Pa$
σ_{ϕ_+}	$1.493172E + 08 Pa$

Mentre la soluzione analitica fornisce, per $\bar{\phi} = 31.5^\circ$ una $\sigma_\theta = -7.3272 MPa$ e $\sigma_\phi = -7.3472 MPa$, si vede un forte disaccordo con le due soluzioni, si passa da un ordine di grandezza di 10^6 a uno di 10^8 , questo perché localmente gli effetti flessionali, dovuti alle forte variazioni di curvatura a causa del carico applicato, diventano molto importanti: si noti infatti addirittura il cambio di segno della σ_θ nello spessore, si deduce quindi che il range di applicabilità della soluzione analitica ottenuta con la teoria dei gusci sottili sia limitato, per questo tipo di problema.

Si riporta infine la deformata.

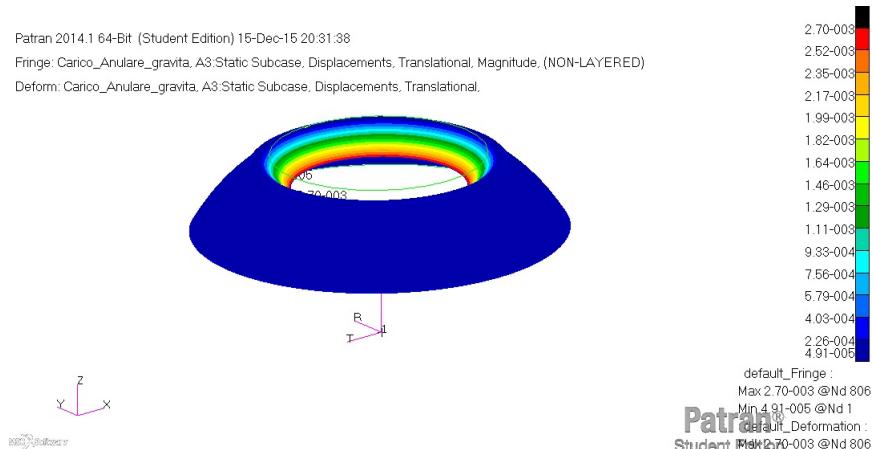


Figura 11: Deformata cilindro

4.1 Modi

L'ultimo caso prevede il calcolo dei modi propri di vibrare; quest'ultimi e le rispettive frequenze sono state calcolate tramite solutore FEM (SOL 103), normalizzando tali modi rispetto allo spostamento massimo (MAX) in modo da ottenere uno spostamento massimo pari a 1.

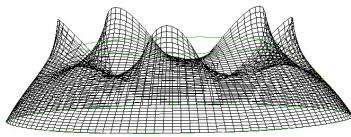
Si riportano in tabella i valori delle frequenze ottenute tramime Nastran.

Modo	f [Hz]
1	88.813420
2	88.813450
3	103.431200
4	103.431300
5	123.111500
6	123.111600
7	134.664800
8	134.665100
9	171.755100
10	171.755100

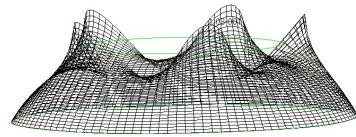
Vengono riportate le prime 10 deformate.

Analogamente a quanto visto precedentemente per i modi e le frequenze proprie della cupola sferica, anche qui si osserva il fatto che le frequenze coincidano a coppie e che le deformate corrispondenti concidano a meno di una rotazione di 90° .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 16-Dec-15 00:17:10
Deform: Mod. A1 Mode 1 - Freq. = 88.896, Eigenvectors, Translational.



Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 16-Dec-15 00:20:31
Deform: Mod. A1 Mode 2 - Freq. = 88.896, Eigenvectors, Translational.



Nastran

(a) *Modo 1.*

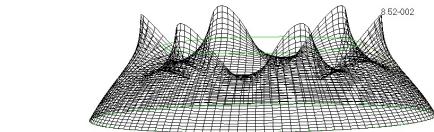
Patran® Deformation :
Student Edition 001 @Nd 775

Nastran

(b) *Modo 2.*

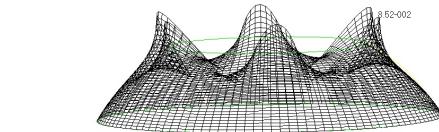
Patran® Deformation :
Student Edition 001 @Nd 2821

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 21 22
Deform: Mod. A1 Mode 3 : Freq. = 103.63, Eigenvectors, Translational.



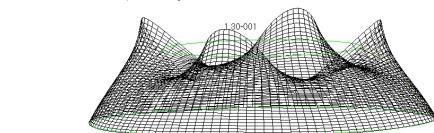
(a) Modo 3.

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 21 48
Deform: Mod. A1 Mode 4 : Freq. = 103.63, Eigenvectors, Translational.



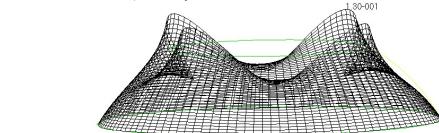
(b) Modo 4.

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 22 06
Deform: Mod. A1 Mode 5 : Freq. = 123.13, Eigenvectors, Translational.



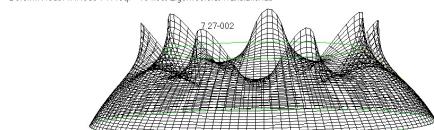
(a) Modo 5 .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 22 29
Deform: Mod. A1 Mode 6 : Freq. = 123.13, Eigenvectors, Translational.



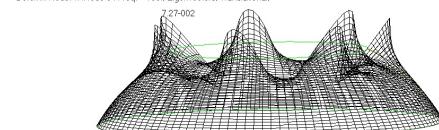
(b) Modo 6 .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 22 56
Deform: Mod. A1 Mode 7 : Freq. = 134.99, Eigenvectors, Translational.



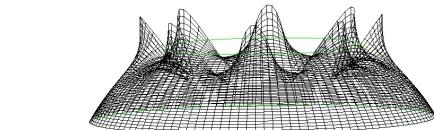
(a) Modo 7 .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 23 54
Deform: Mod. A1 Mode 8 : Freq. = 135. Eigenvalues, Translational.



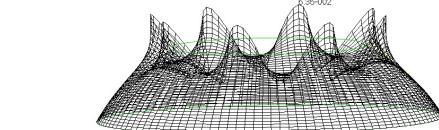
(b) Modo 8 .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 24 14
Deform: Mod. A1 Mode 9 : Freq. = 172.25, Eigenvectors, Translational.



(a) Modo 9 .

Patran 2014.1 64-Bit (Student Edition) 15-Dec-15 00 24 38
Deform: Mod. A1 Mode 10 : Freq. = 172.25, Eigenvectors, Translational.



(b) Modo 10 .