

Strutture Aeronautiche
Esercitazione 2
Prof.re Franco Mastroddi

Matteo Hakimi 1455230



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

Indice

1	Introduzione	3
2	Calcolo frequenze naturali e modi di vibrazione	4
2.1	Modo1	5
2.2	Modo2	6
2.3	Modo3	7
2.4	Modo4	8
2.5	Modo5	9
2.6	Modo6	10
2.7	Modo7	11
2.8	Modo8	12
2.9	Modo9	13
2.10	Modo10	14
3	Calcolo frequenze proprie caso acciaio	15
4	Calcolo della matrice delle funzioni di risposta in frequenza	16
5	Calcolo della matrice delle funzioni di risposta in frequenza in presenza di smorzamento	17
6	Modi flessionali attorno a x caso "appoggio-appoggio"	21

1 Introduzione

Si vogliono calcolare i primi 10 modi propri di una struttura costituita da un cassone alare incastrato da un lato, in lega metallica leggera (alluminio $E=68\text{GPa}$ $\nu = 0.3$ $\rho = 2650\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$) di lunghezza longitudinale pari a $L=4\text{m}$, cross section rettangolare di dimensioni $0.6\text{m}\times 0.1\text{m}$ costituita da 4 pannelli di spessore $t=0.003\text{m}$, e da 4 irrigidimenti (longheroni) posti ai vertici della sezione trasversale, che percorrono la struttura nella direzione longitudinale, di sezione pari a $A = 0.0025\text{m}^2$, confrontando le prime tre frequenze associate ai modi flessionali a quelle ottenute per via analitica.

Sostituendo poi l'alluminio con una lega di acciaio si sono calcolati nuovamente le frequenze proprie di vibrazione. Inoltre si è calcolata il termine $H_{ij}(\omega)$ della matrice di risposta in frequenza, prima in assenza di smorzamento e poi ponendo il coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.03$, nel caso in cui: i sia il grado di libertà dello spostamento verticale (T3) del nodo 13 e j il grado di libertà dello spostamento anch'esso verticale (T3) del nodo 8, e nel caso in cui: i sia il grado di libertà dello spostamento verticale (T3) del nodo 13 e j il grado di libertà dello spostamento longitudinale (T1) del nodo 8. Infine si sono cambiate le condizioni al contorno del cassone alle due estremità, cioè ponendo in esse delle cerniere con asse di rotazione parallelo all'asse x, e si sono nuovamente calcolati modi e frequenze proprie confrontandoli con quelli offerti dalla teoria analitica.

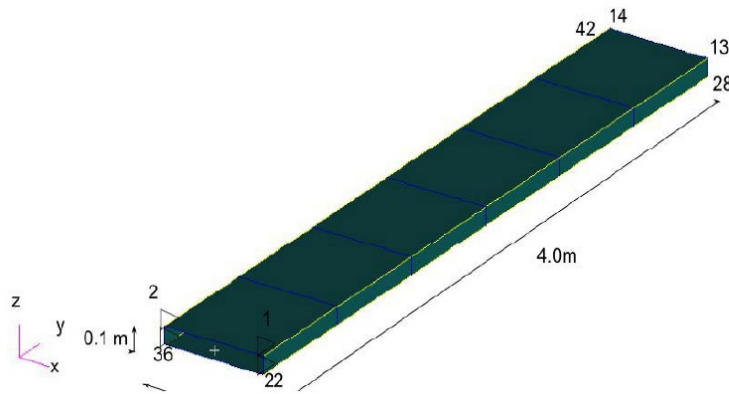


Figura 1: Cassone Alare

2 Calcolo frequenze naturali e modi di vibrazione

In questa parte verranno calcolate le frequenze proprie nonché i modi di vibrazione, della struttura riportata in figura 1.1, attraverso l'uso del solutore FEM SOL 103,normalizzando quest'ultimi rispetto allo spostamento massimo (usando il comando MAX).

Per poter classificare le varie forme modali sono stati selezionati i gradi di libertà dei nodi lungo un longherone,data la simmetria della struttura.

Usando poi uno script, realizzato con MatLab, é stato possibile dare una rappresentazione grafica di tali autovettori normalizzati (nei nodi lungo l'estensione longitudinale), in modo di visualizzare al meglio la deformata modale. Data la simmetria della struttura, ci aspettiamo dei modi flessionali e torsionali puri, cioè totalmente disaccoppiati;tuttavia questo non si é visto nei modi calcolati col solutore FEM (si vedano le tabelle), il motivo é dovuto sostanzialmente a errori numerici commessi nel processo di soluzione.

2.1 Modo1

Il primo modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a x di pulsazione $\omega_1 = 53,11[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0	0	0	0	0	0
3	0.0010	-0.0062	0.0489	0.1299	0.0203	-0.0014
5	0.0005	-0.0110	0.1707	0.2239	0.0091	0.0018
7	0.0004	-0.0142	0.3448	0.2870	0.0071	-0.0008
9	0.0002	-0.0160	0.5513	0.3229	0.0032	0.0009
11	0.0001	-0.0168	0.7736	0.3372	0.0011	-0.0004
13	0.0000	-0.0169	1.0000	0.3392	0.0001	0.0004

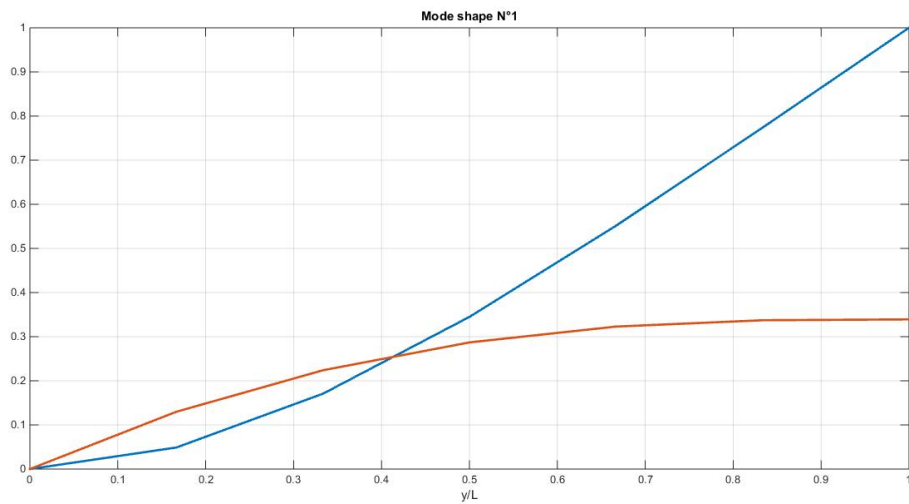


Figura 2: Modo 1 flessionale attorno a x

2.2 Modo2

Il secondo modo di vibrazione é un modo torsionale attorno a y di pulsazione $\omega_2 = 172,18[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0088	0.0109	-0.1275	-0.3363	0.1041	-0.0123
5	0.0033	0.0131	-0.3385	-0.3016	0.2507	0.0247
7	-0.0005	0.0086	-0.5240	-0.2308	0.4006	-0.0086
9	0.0085	0.0003	-0.6090	-0.0252	0.6278	-0.0158
11	0.0339	-0.0077	-0.5679	0.1561	0.9207	-0.0602
13	0.0710	-0.0111	-0.4337	0.2329	1.0000	-0.0414

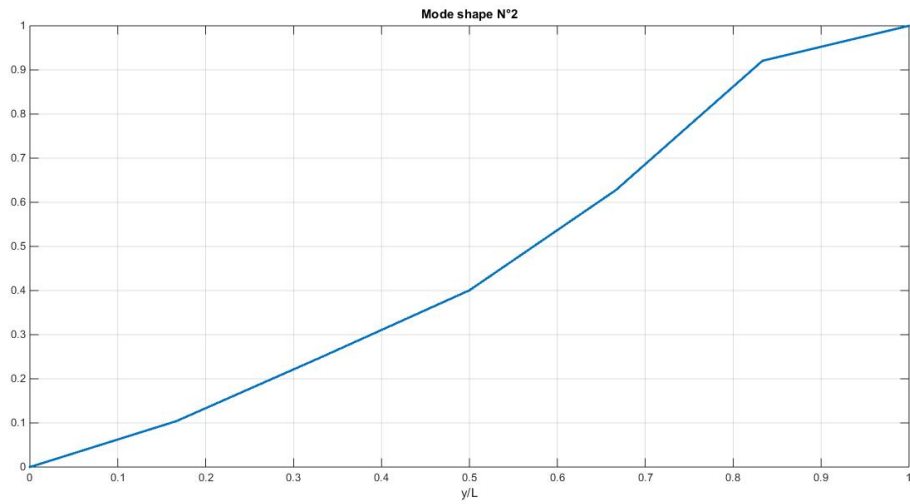


Figura 3: Modo 2 torsionale attorno a y

2.3 Modo3

Il terzo modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a z di pulsazione $\omega_3 = 269,54[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0	0	0	0	0	0
3	0.0701	-0.0334	0.0009	0.0012	-0.0030	-0.1329
5	0.2041	-0.0584	0.0004	-0.0016	-0.0013	-0.2148
7	0.3818	-0.0752	0.0003	0.0007	-0.0010	-0.2684
9	0.5842	-0.0849	0.0001	-0.0008	-0.0004	-0.2966
11	0.7944	-0.0890	0.0000	0.0003	-0.0001	-0.3045
13	1.0000	-0.0900	0.0000	-0.0004	0.0000	-0.3042

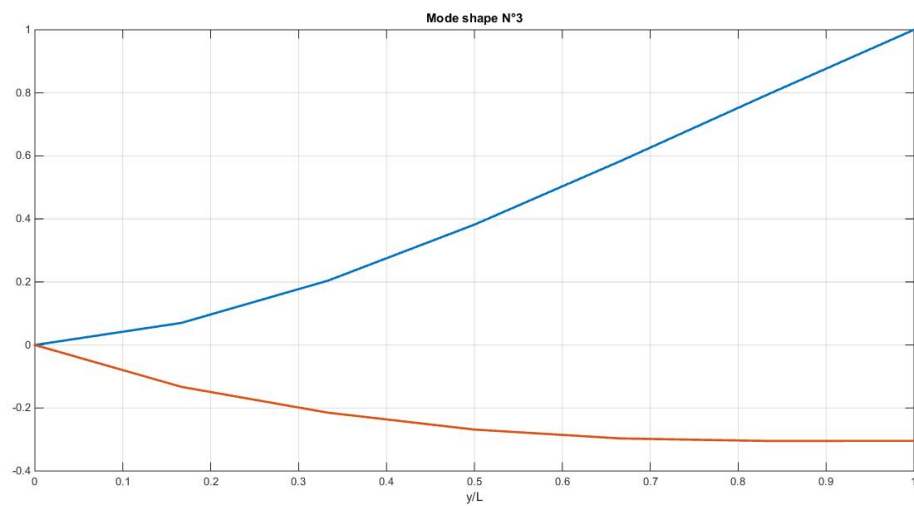


Figura 4: Modo 3 flessionale attorno a z

2.4 Modo4

Il quarto modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a x di pulsazione $\omega_4 = 296,63[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.0021	0.0189	-0.2460	-0.4566	-0.0419	0.0007
5	0.0023	0.0141	-0.5631	-0.3283	0.0470	-0.0087
7	0.0032	-0.0065	-0.6582	0.1210	0.0639	0.0034
9	0.0028	-0.0299	-0.3980	0.6232	0.0568	-0.0006
11	0.0012	-0.0452	0.1576	0.9367	0.0245	0.0041
13	0.0003	-0.0497	0.8307	1.0000	0.0049	-0.0010

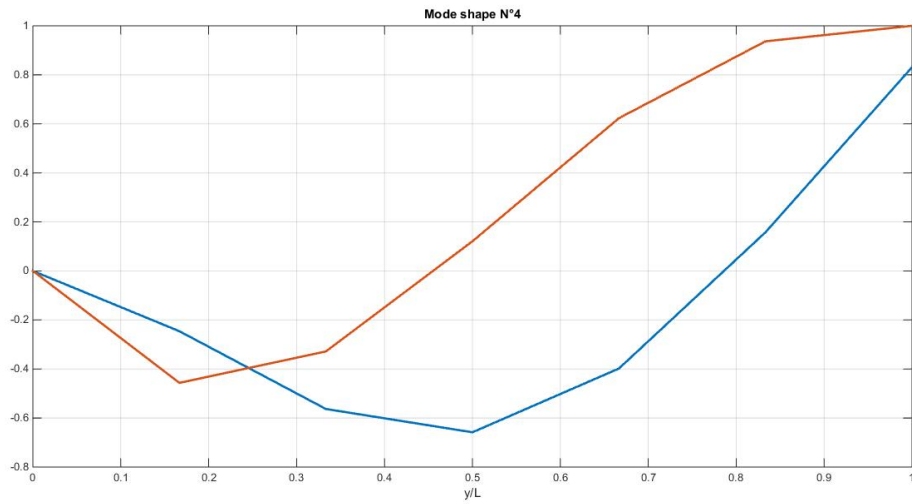


Figura 5: Modo 4 flessionale attorno a x

2.5 Modo5

Il quinto modo di vibrazione é un modo torsionale attorno a y di pulsazione $\omega_5 = 380,44[\text{rad/s}]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0181	-0.0051	0.0514	0.1391	0.2893	-0.0444
5	0.0395	-0.0031	0.1160	0.0569	0.5179	-0.0210
7	0.0524	0.0025	0.1130	-0.0674	0.7060	-0.0142
9	0.0536	0.0074	0.0235	-0.1926	0.8256	0.0122
11	0.0472	0.0088	-0.1106	-0.2004	0.8844	0.0062
13	0.0385	0.0086	-0.2354	-0.1708	1.0000	0.0249

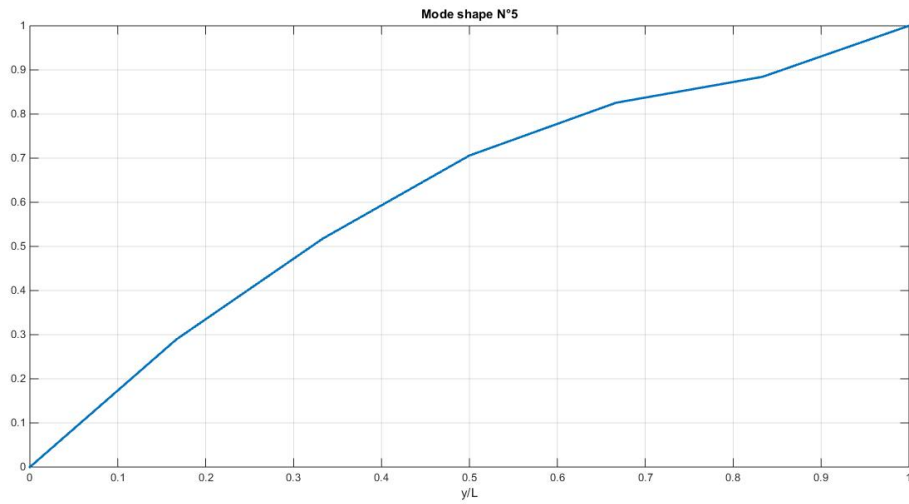


Figura 6: Modo 5 torsionale attorno a y

2.6 Modo6

Il sesto modo di vibrazione é un modo torsionale attorno a y di pulsazione $\omega_6 = 673,54[\text{rad/s}]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0066	0.0047	-0.1245	-0.2855	0.2873	-0.0115
5	0.0177	-0.0049	-0.1568	0.1642	0.5714	-0.0247
7	0.0439	-0.0109	-0.0104	0.2776	0.7144	-0.0483
9	0.0649	-0.0029	0.1283	0.1108	0.7651	-0.0147
11	0.0587	0.0106	0.0634	-0.2956	0.7960	0.0353
13	0.0271	0.0167	-0.1615	-0.3548	1.0000	0.0557

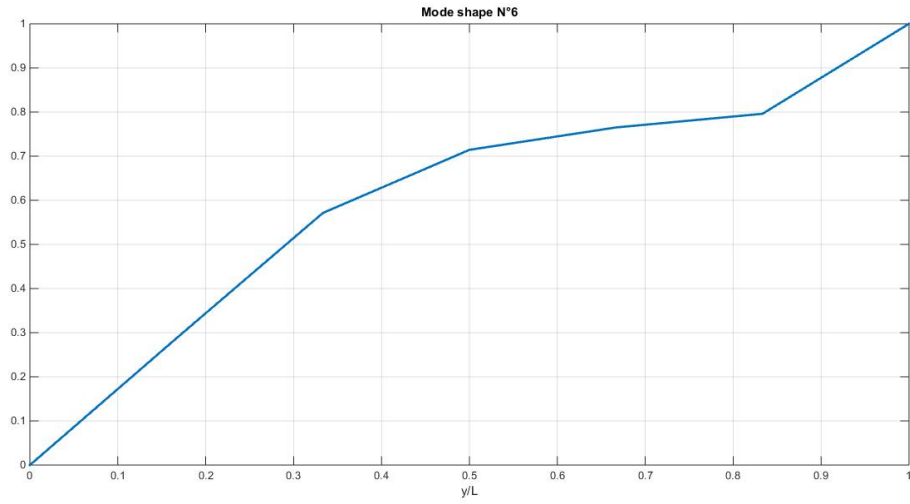


Figura 7: Modo 6 torsionale attorno a y

2.7 Modo7

Il settimo modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a x di pulsazione $\omega_7 = 719,66[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.0001	-0.0136	0.3778	0.4139	-0.0027	0.0046
5	-0.0046	0.0131	0.4599	-0.2993	-0.0928	0.0033
7	0.0006	0.0291	0.0036	-0.7075	0.0124	-0.0146
9	0.0052	0.0056	-0.4049	-0.1574	0.1045	0.0006
11	0.0040	-0.0324	-0.1799	0.7230	0.0799	0.0029
13	0.0012	-0.0490	0.5083	1.0000	0.0225	0.0047

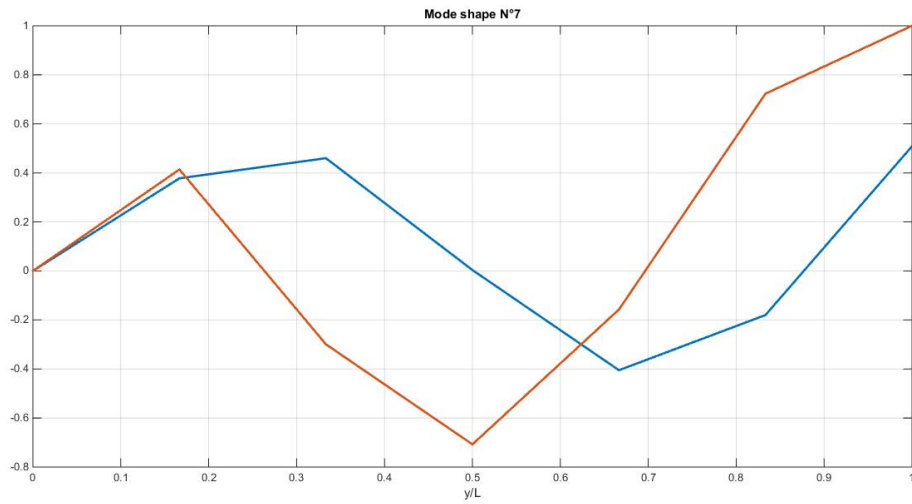


Figura 8: Modo 7 flessionale attorno a x

2.8 Modo8

l'ottavo modo di vibrazione é un modo torsionale attorno a y di pulsazione $\omega_8 = 1118,73[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0280	-0.0026	0.1342	0.2540	0.1830	-0.0614
5	0.0417	0.0085	0.0346	-0.4666	0.5940	0.0131
7	0.0427	0.0011	-0.1356	-0.0312	1.0000	-0.0086
9	0.0530	-0.0087	-0.0111	0.3959	0.8467	-0.0271
11	0.0501	0.0030	0.1165	-0.0804	0.5172	0.0430
13	0.0121	0.0144	-0.0631	-0.3816	0.6525	0.0550

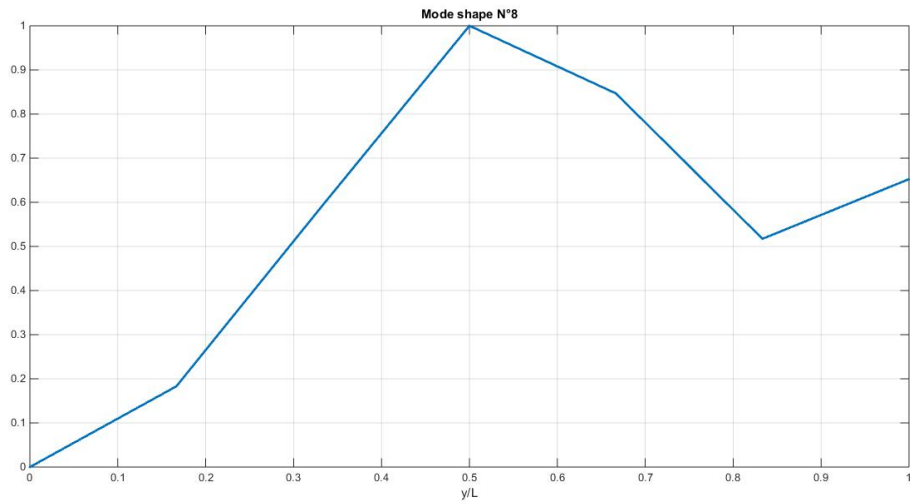


Figura 9: Modo 8 torsionale attorno a y

2.9 Modo9

Il nono modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a z di pulsazione $\omega_9 = 1134,95[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.4580	-0.0481	0.0006	-0.0007	-0.0021	-0.3937
5	0.8150	-0.0034	-0.0020	-0.0045	0.0076	-0.1476
7	0.8260	0.0954	-0.0024	0.0019	0.0091	0.3047
9	0.4259	0.1965	-0.0020	0.0001	0.0073	0.7353
11	-0.2543	0.2599	-0.0009	0.0025	0.0030	0.9587
13	-0.9679	0.2788	-0.0001	-0.0002	0.0005	1.0000

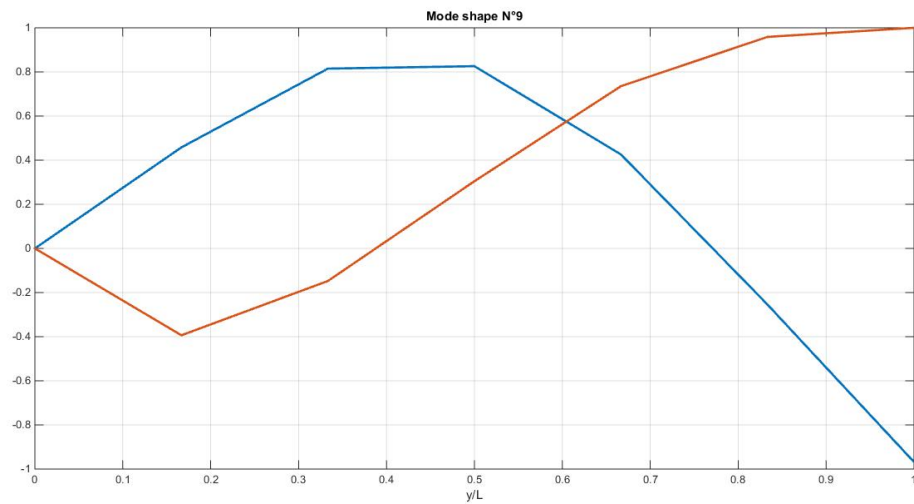


Figura 10: Modo 9 flessionale attorno a z

2.10 Modo10

Il settimo modo di vibrazione é un modo flessionale attorno a x di pulsazione $\omega_{10} = 1177,85[rad/s]$.

Point	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0027	-0.0006	-0.4423	-0.0959	0.0543	-0.0073
5	0.0008	-0.0273	-0.0489	0.7405	0.0165	0.0146
7	-0.0060	0.0004	0.4100	-0.0244	-0.1217	0.0002
9	0.0017	0.0229	-0.0716	-0.6657	0.0338	-0.0178
11	0.0062	-0.0158	-0.3392	0.3535	0.1250	0.0036
13	0.0032	-0.0478	0.3657	1.0000	0.0592	0.0048

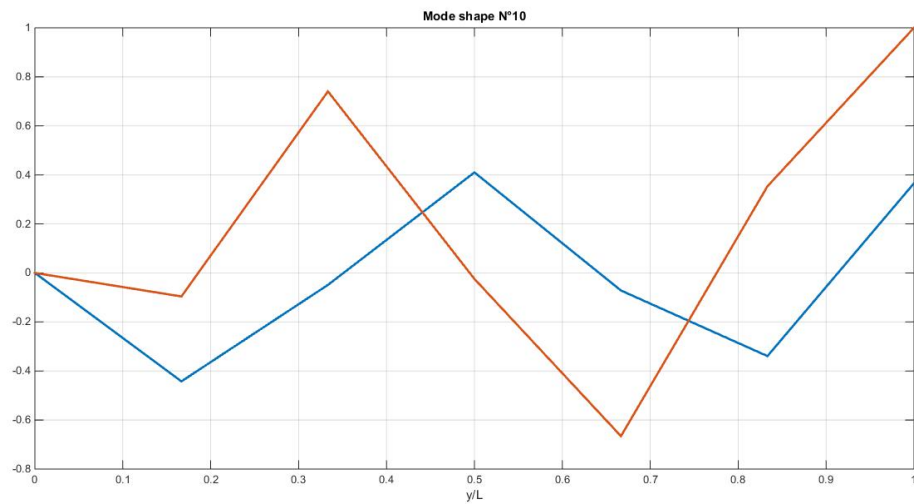


Figura 11: Modo 10 flessionale attorno a x

3 Calcolo frequenze proprie caso acciaio

Nel caso si avesse una lega in acciaio cambierebbero le matrici di massa e di rigidezza e si prevede che gli autovalori varierebbero secondo questa legge:

$$\lambda_{n,ac} = \lambda_{n,al} \frac{\rho_{all} E_{acc}}{\rho_{acc} E_{all}} \quad (1)$$

dove ρ é la densità del materiale ed E il modulo di Young.

Per l'acciaio la densità é pari a $7,87 \frac{g}{cm^3}$ e il modulo di Young pari a 200 Gpa. Si é modificato il materiale del modello e si é visto che gli autovalori (e di conseguenza pulsazioni e frequenze proprie) variano esattamente come previsto. Si riportano gli autovalori del cassone realizzato in acciaio:

Modo	λ FEM	λ_n Analitico
1	2793.2630	2793.2632
2	29361.1700	29361.1740
3	71954.8000	71954.7989
4	87138.3100	87138.3046
5	143340.0000	143340.0628
6	449286.2000	449286.2172
7	512926.3000	512926.3267
8	1239500.0000	1239500.4111
9	1275687.0000	1275687.1029
10	1373956.0000	1373956.3682

Dalla tabella si vede che c'è un buon accordo con gli autovalori λ_{acc} calcolati con solutore FEM e quelli calcolati analiticamente avvalendoci della formula precedente.

Si sono inoltre confrontate le frequenze dei modi flessionali ottenute mediante solutore FEM e quelle analitiche offerte dalla teoria della trave, considerando sempre il cassone in lega di alluminio.

Modo analitico	Modo corrispondente	ω_n Analitica	ω FEM
Modo 1 intorno a x	1	53.2490	53.1080
Modo 1 intorno a z	3	304.1045	269.5465
Modo 2 intorno a x	4	333.7300	296.6255
Modo 3 intorno a x	7	934.5476	719.6666
Modo 2 intorno a z	9	1905.9279	1134.9480

Si può notare come il comportamento sia abbastanza simile inizialmente, tuttavia all'aumentare della pulsazione si vede che si discostano maggiormente.

4 Calcolo della matrice delle funzioni di risposta in frequenza

In questa sezione abbiamo calcolato la matrice di risposta in frequenza, attraverso l'ausilio di uno script realizzato con MatLab, tra il grado di libertà T3 del nodo 8 e il grado di libertà T3 del nodo 13, considerando solo i primi 6 modi nella sommatoria dell'espressione modale di $H_{ij}(\omega)$. In particolare riportiamo il valore del modulo $H_{8,13}(\omega)$ in dB, in assenza di smorzamento, in funzione della pulsazione.

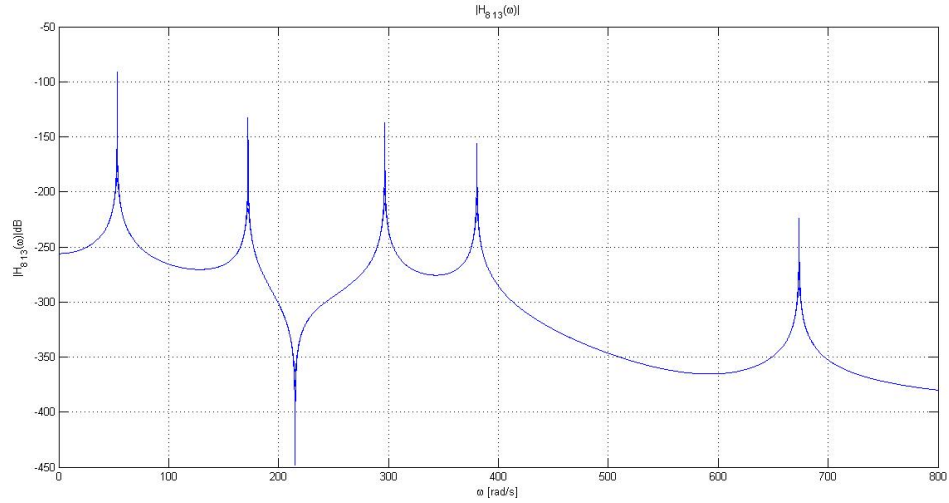


Figura 12: Matrice di risposta in frequenza

Dal grafico si possono osservare diverse cose.

Vediamo innanzitutto che in prossimità delle pulsazioni proprie del sistema il modulo di $H_{8,13}(\omega)$ tende a $+\infty$ (condizione di risonanza), inoltre osserviamo che nonostante abbiamo calcolato $H_{8,13}(\omega)$ considerando un numero pari a 6 modi di vibrare, il diagramma presenta solo 4 picchi che tendono a $+\infty$, in particolare non figurano i picchi corrispondenti al modo 3 e al modo 6, questo perché come ci può vedere dalla figura sotto, che riporta i singoli termini della sommatoria di $H_{8,13}(\omega)$, i termini corrispondenti al modo 3 e 6 contribuiscono molto poco alla definizione di $H(\omega)$.

Un'altra osservazione che si può fare guardando il grafico, è la presenza di un picco che tende a $-\infty$ tra il secondo picco (corrispondente al secondo modo) e il terzo picco (corrispondente al quarto modo), ricordiamo che il modulo di $H(\omega)$ è in dB questo implica che il modulo di $H(\omega)$, tende a 0 in

corrispondenza di quella frequenza, questa condizione é detta condizione di antirisonanza.

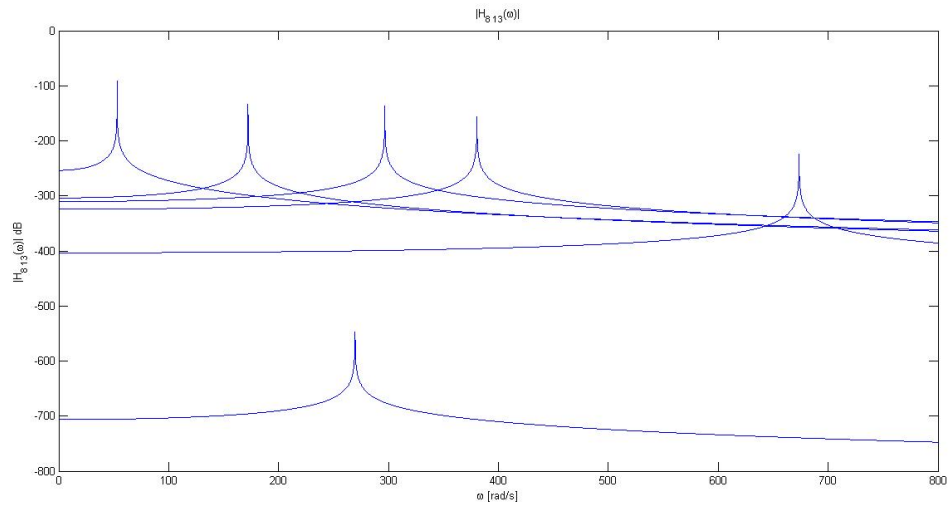


Figura 13: Modulo dei termini sommatoria della matrice di risposta in frequenza in dB

5 Calcolo della matrice delle funzioni di risposta in frequenza in presenza di smorzamento

In questa sezione abbiamo calcolato la matrice di risposta in frequenza, attraverso l'ausilio di uno script realizzato con MatLab, tra il grado di libertà T3 del nodo 8 e il grado di libertà T3 del nodo 13, considerando solo i primi 6 modi nella sommatoria dell'espressione modale di $H_{ij}(\omega)$. In particolare riportiamo il valore del modulo $H_{8,13}(\omega)$ in dB, in presenza di smorzamento modale ζ , in funzione della pulsazione, avendo considerato un unico smorzamento ζ per tutti e 6 i modi di vibrazione, il modulo e la fase di $H_{8,13}(\omega)$. Viene inoltre riportato il grafico dei vari termini della sommatoria in funzione della pulsazione.

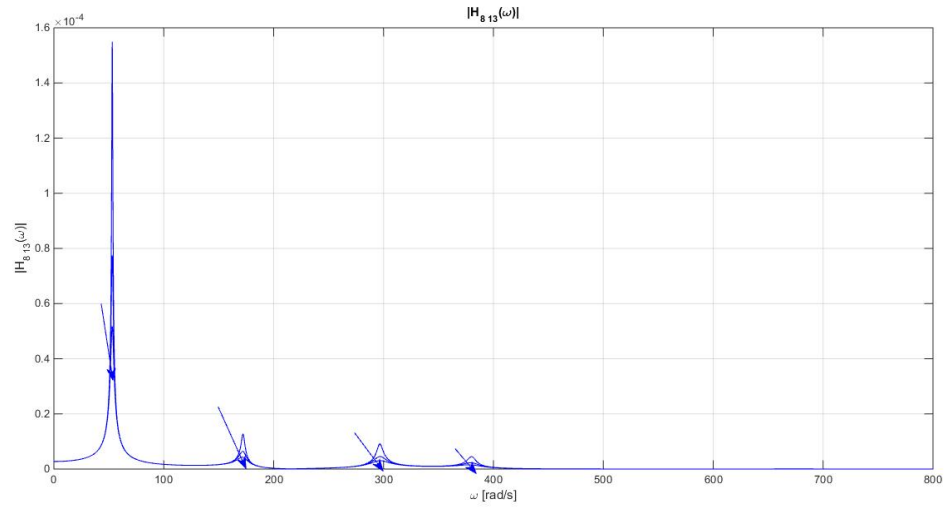


Figura 14: Modulo matrice di risposta

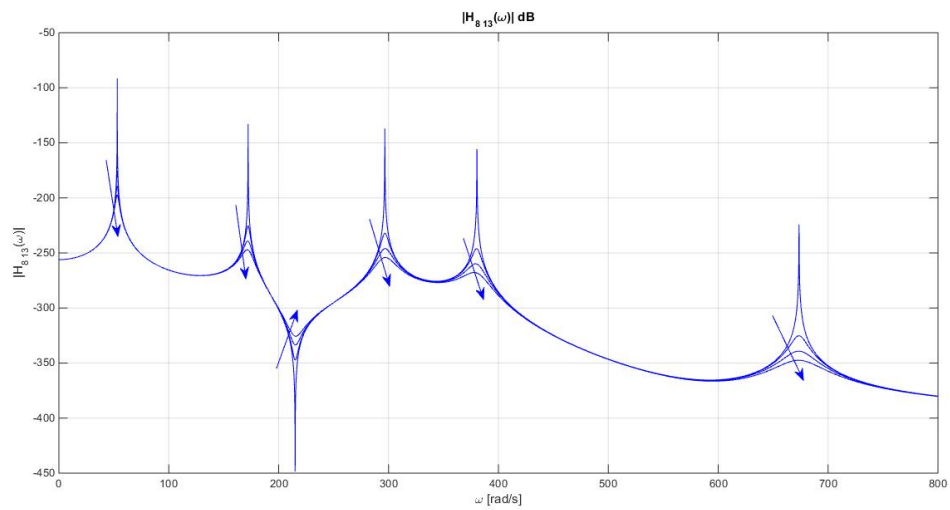


Figura 15: Modulo matrice di risposta in frequenza in dB

Come si può notare dal grafico i picchi diventano sempre meno pronunciati all'aumentare dello smorzamento, (abbiamo fatto variare lo smorzamento da 0 a 0.03), e più larghi. Inoltre si nota che man mano che la pulsazione aumenta, il picco diventa sempre meno pronunciato e più largo, come ci aspettavamo dalla teoria, questo effetto è più visibile nel grafico riportato nella figura sottostante, dove vengono graficati i termini della sommatoria di H . Notiamo anche come la condizione di antirisonanza, diventa sempre meno accentuata.

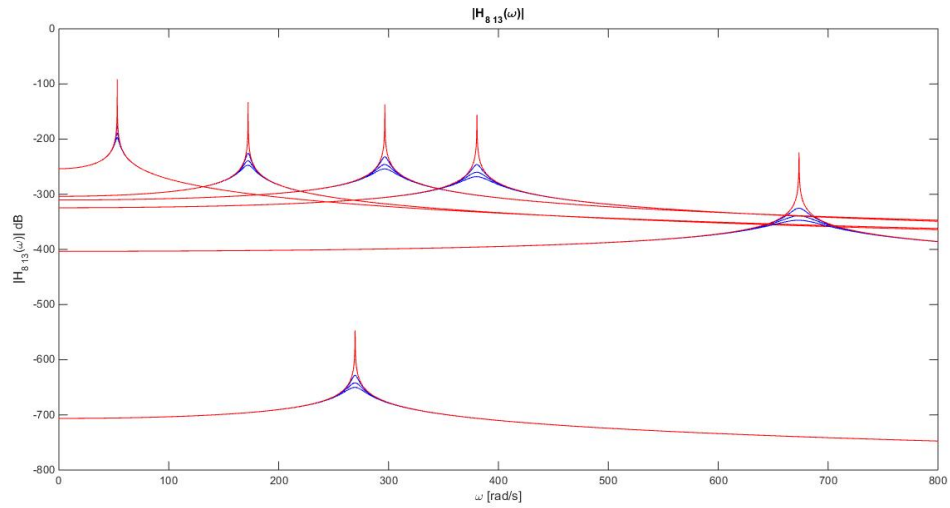


Figura 16: Modulo dei termini sommatoria della matrice di risposta in frequenza in dB

Infine é stata riportata la fase di H , si nota come nel caso di smorzamento nullo l'argomento di H assume valori: $0 + \pi$ e $-\pi$, questo perché H é reale in questo caso. All'umentare dello smorzamento H diventa immaginario e la sua fase assume tutti i valori compresi tra $-\pi$ e $+\pi$. Nel caso smorzato la fase di H é importante per capire quanto é sfasata la risposta del grado di libertà T3 del nodo 8 rispetto al carico che agisce sul grado T3 del nodo 13.

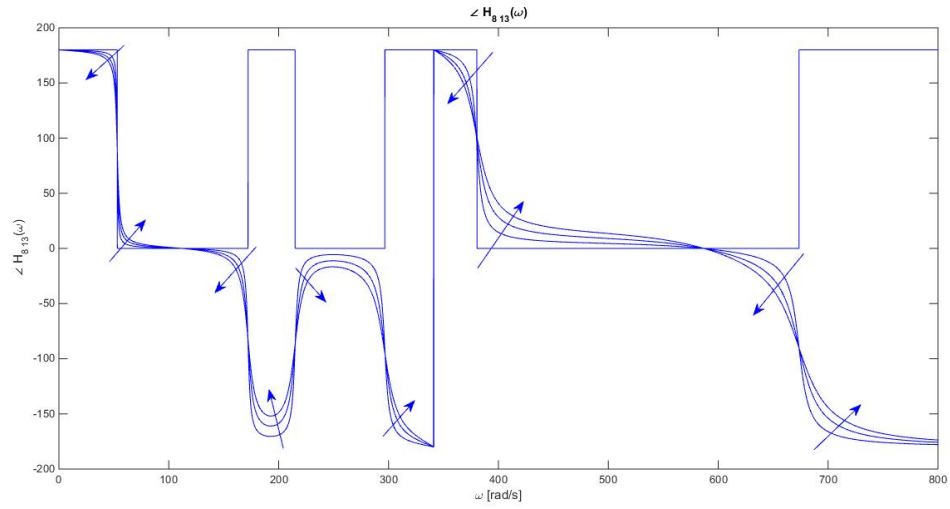
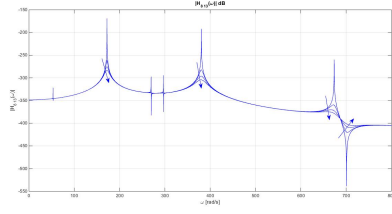
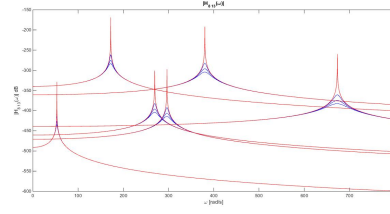


Figura 17: Fase

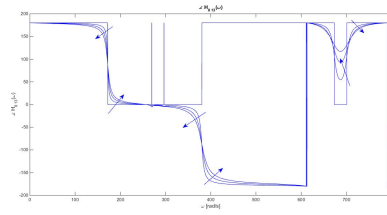
Gli stessi ragionamenti fatti sulla matrice $H_{8,13}(\omega)$ tra il grado di libertà T3 di 8 e il grado di libertà T3 del nodo 13 possono essere fatti considerando $H_{8,13}(\omega)$ tra il grado di libertà T3 di 8 e il grado di libertà T1 del nodo 13. Le stesse considerazioni valgono anche nel caso del termine $H_{8,13}(\omega)$ tra il grado di libertà T1 di 8 e il grado di libertà T3 del nodo 13, di cui si riportano sotto i grafici ottenuti con Matlab.



(a) Matrice di rispostanza in frequenza.



(b) Modulo dei termini sommatoria della matrice di risposta in frequenza in dB.



(c) Fase.

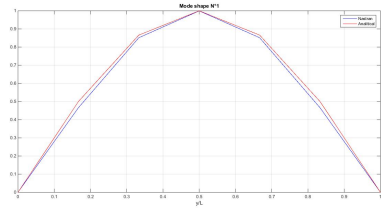
Figura 18

6 Modi flessionali attorno a x caso "appoggio-appoggio"

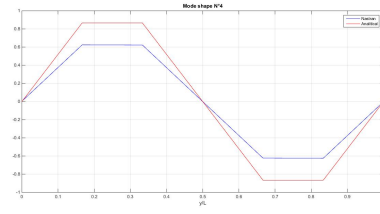
In questa sezione si analizzeranno i modi della stessa struttura in una diversa configurazione, in particolare sono state cambiate le condizioni al contorno: togliendo l'incastro e sostituendolo con un appoggio semplice, e mettendo un appoggio semplice anche dalla parte che prima era libera. Questo é stato possibile cambiando i SPC nel bulk data del file "analisi-modale.dat" inibendo i gradi di libertà T1 T2 T3 R2 R3 (12356) nei nodi 22,36,28 e 42. Sono stati calcolati i modi di questa configurazione e sono stati individuati i modi flessionali attorno a x, quest'ultimi sono stati confrontati, anche con ausilio di plot grafici realizzati con MatLab, con quelli ottenuti analiticamente dalla teoria della trave di cui si riporta la formula.

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \phi(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n = 1, 2, 3... \quad (2)$$

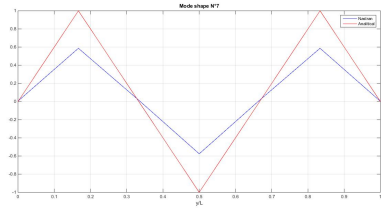
Modo analitico	Modo FEM	ω_n Analitica	ω FEM
1	1	122.1647	189.4735
2	4	488.6589	536.2935
3	7	1099.4825	1056.1150
4	9	1954.6355	1487.5120



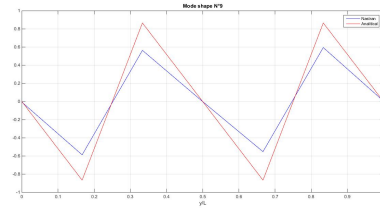
(a) *Modo 1 appoggiato-appoggiato.*



(b) *Modo 2 appoggiato-appoggiato.*



(c) *Modo 3 appoggiato-appoggiato.*



(d) *Modo 4 appoggiato-appoggiato.*

Figura 19