

Ipersonica
Esercitazione 4
Prof.re Renato Paciorri

Matteo Hakimi 1455230



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

Indice

1	Introduzione	3
2	Cinetica di dissociazione	3
3	Flusso reagente a valle dell' urto normale	5
4	Flusso reagente in condotto divergente	9

1 Introduzione

Si vuole studiare il flusso di una miscela reagente in campo ipersonico. In particolare nella prima sezione, verrà studiata l'evoluzione temporale della reazione di dissociazione dell'azoto molecolare al variare delle variabili di stato: temperatura e pressione; enfatizzando i tempi di reazione nonché il valore del grado di dissociazione all'equilibrio al variare di dette grandezze.

Si procederà con lo studio dell'evoluzione del flusso unidimensionale stazionario a valle di urto normale, mettendo in evidenza le differenze che si manifestano tra flusso reagente e non.

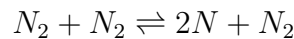
Successivamente, verrà analizzato il caso di un flusso reagente stazionario in un condotto convergente divergente, considerando note le condizioni di flusso nella sezione di gola .

2 Cinetica di dissociazione

In questa sezione ci dedicheremo allo studio di evoluzione temporale di una miscela composta da azoto molecolare N_2 e atomico N avendo fissato le condizioni di temperatura e pressione di reazione.

Bisogna notare come la reazione di dissociazione dell'azoto sia una reazione endotermica, per cui aver assunto che questa avvenga a temperatura costante significa fornire in ogni istante la quantità di calore ΔQ sottratta dalla reazione stessa. Effettuando un confronto col grado di dissociazione all'equilibrio ottenuto analiticamente. Successivamente il calcolo verrà reiterato cambiando le variabili di stato T e p .

Le reazioni di dissociazione che considereremo sono:



L'equazione di conservazione della specie nel caso dell'azoto molecolare diventa

$$\frac{d[N]}{dt} = 2k_f[N_2]^2 - 2k_b[N]^2[N_2] + 2k_f[N][N_2] - 2k_b[N]^3$$

Avendo indicato con k_f la costante di velocità di reazione diretta (*forward*) e con k_b quella inversa (*backward*). In particolare:

$$k_f = C_f T^\alpha e^{\frac{-T_d}{T}}$$

$$k_b = \frac{k_f}{K_c}$$

dove α è un esponente caratteristico della reazione presa in considerazione, e C_f una costante moltiplicativa, in particolare $\alpha = -1.6$ e $C_f = 7 \cdot 10^{15} \frac{m}{mol \cdot s}$

Indicando con ρ la densità e con α il grado di dissociazione, e considerando l'equazione di stato:

$$\rho = \frac{p}{R_{mix}T} = \frac{2pM_N}{(1 + \alpha)R_0T}$$

dove con R_0 si è indicata la costante universale dei gas, $R_0 = 8.314 [JK^{-1}mol^{-1}]$, e sapendo che

$[N] = \frac{\rho\alpha}{PM_N}$ e che $[N_2] = \frac{\rho(1-\alpha)}{2PM_N}$, l'equazione di conservazione della specie, diventa:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{w}_\alpha}{\rho} \quad (1)$$

avendo indicato con \dot{w}_α il termine reagente e pari a:

$$\dot{w}_\alpha = \rho(1+\alpha)^2 \left[k_f(T) \frac{(1-\alpha)p}{(1+\alpha)R_0T} - 4k_b(T) \left(\frac{\alpha p}{(1+\alpha)R_0T} \right)^2 \right] \quad (2)$$

Mentre per quanto riguarda il valore del grado di dissociazione all'equilibrio, ponendo $\frac{d[N]}{dt} = 0$ si ricava:

$$\alpha_{eq} = \sqrt{\frac{k_c R_0 T}{4p + k_c R_0 T}}$$

la costante di equilibrio k_c nel caso di reazione di dissociazione dell'azoto è pari a:

$$k_c(T) = a_1 e^{a_2 + a_3 zp + a_4 zp^2 + a_5 zp^3 + a_6 zp^4} \quad (3)$$

dove $zp = 10^4/T$ e i coefficienti a_i , $i = 1, \dots, 6$, sono ricavati sperimentalmente.

In particolare per la reazione di dissociazione/ricombinazione dell'azoto si ha:

$$a_1 = 10^6 \text{ mol/m}^3 \quad a_2 = 3.898 \quad a_3 = -12.661 \quad a_4 = 0.683 \quad a_5 = -0.118 \quad a_6 = 0.006$$

Viene implementato su codice Matlab l'equazione differenziale sostituendo la (2) nella (1) e tenendo conto della (3). Vengono riportati in figura i risultati ottenuti, nel caso di pressione costante al variare della temperatura di reazione, e viceversa.

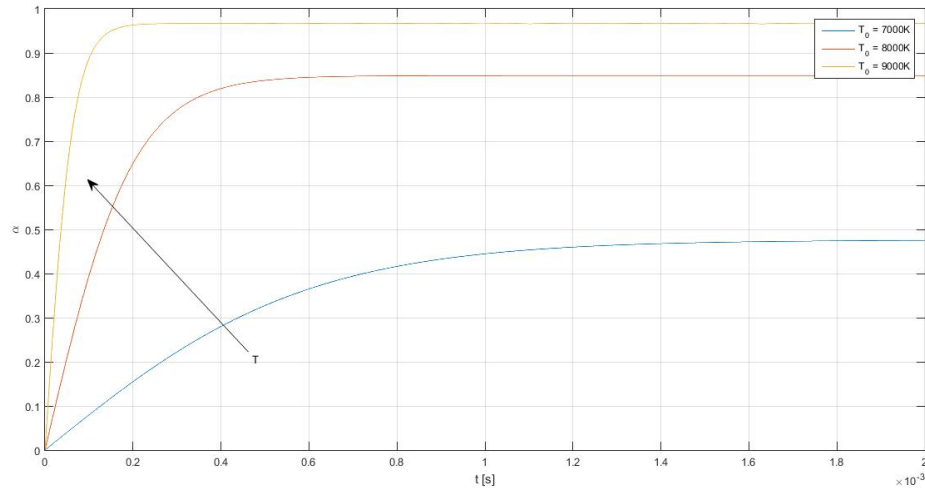


Figura 1: Andamento del grado di dissociazione funzione del tempo, al variare della temperatura

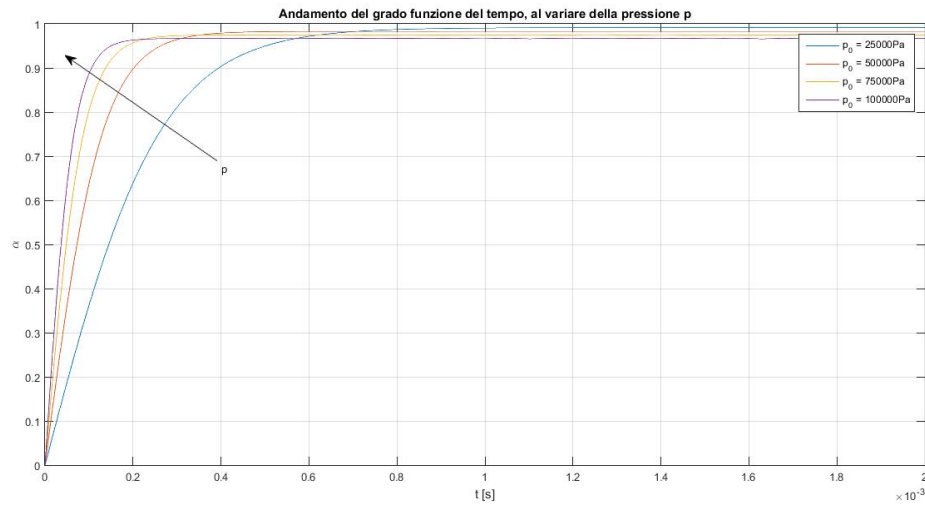


Figura 2: Andamento del grado di dissociazione funzione del tempo, al variare della pressione

Si nota come in entrambi i casi i tempi di reazione siano estremamente brevi. Si nota inoltre come all'aumentare della temperatura il grado di dissociazione all'equilibrio risulta più elevato.

3 Flusso reagente a valle dell' urto normale

In questa sezione si vuole studiare il flusso di un gas formato da azoto molecolare, in campo ipersonico, che attraversa un urto normale. Il modello adottato è quello di flusso reagente (dissociazione/ricombinazione) non viscoso unidimensionale stazionario.

Inoltre poichè lo spessore dell'urto è dell'ordine di 10 cammini medi possiamo assumere per semplicità il modello di *urto parzialmente disperso*, intendendo che il gas non subisce nessuna reazione chimica nell'urto stesso.

In particolare per una miscela binaria possiamo scrivere:

$$u \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{du}{dx} = 0 \quad (4)$$

$$u \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{dH}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$u \frac{d\alpha}{dx} = u \frac{\dot{w}_\alpha}{\rho} \quad (7)$$

A queste si aggiunge:

$$p = \rho R_{mix} T \quad (8)$$

con:

$$R_{mix} = \alpha \frac{R_0}{PM_N} + (1 - \alpha) \frac{R_0}{PM_{N_2}}$$

Tenendo della (8) e dell'espressione di R_{mix} , possiamo riscrivere il sistema in forma normale considerando la temperatura al posto dell'entropia totale H .

In particolare si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} = \dot{p} &= \frac{\left[\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha+7} \left(\frac{3}{4} \frac{R_0 T}{PM_N} + \Delta h_N^0 - \Delta h_{N_2}^0 \right) - \frac{R_0 T}{PM_{N_2}} \right] \frac{\dot{w}_\alpha}{u}}{\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha+7} + \frac{p}{\rho u^2} - 1} \\ \frac{d\rho}{dx} &= \frac{\dot{p}}{u^2} \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{\dot{p}}{\rho u} \\ \frac{dT}{dx} &= \frac{2T}{p} \left(\frac{\alpha+1}{3\alpha+7} \right) \left[\dot{p} - \left(\frac{3}{4} \frac{R_0 T}{PM_N} + \Delta h_N^0 - \Delta h_{N_2}^0 \right) \frac{\dot{w}_\alpha}{u} \right] \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{\dot{w}_\alpha}{\rho u} \end{aligned}$$

dove \dot{w}_α è il termine reagente dato dalla (2), Δh_N^0 e $\Delta h_{N_2}^0$ sono le entalpie di formazione alla temperatura 0 e PM_N , PM_{N_2} sono i pesi molecolari di azoto atomico e molecolare rispettivamente, nel caso dell'azoto atomico N si ha $PM_N = 0.014067 \text{ kg/mol}$ e $PM_{N_2} = 2PM_N$.

Prendendo come condizioni iniziali quelle a valle dell'urto normale, ottenute dalle relazioni di salto, avendo ipotizzando una condizione tipica del rientro a monte dell'urto pari a:

- $M_1 = 25$
- $p_1 = 2$
- $T_1 = 200$

si implementa il sistema di equazioni in ambiente Matlab.

Vengono riportati in figura i risultati ottenuti.

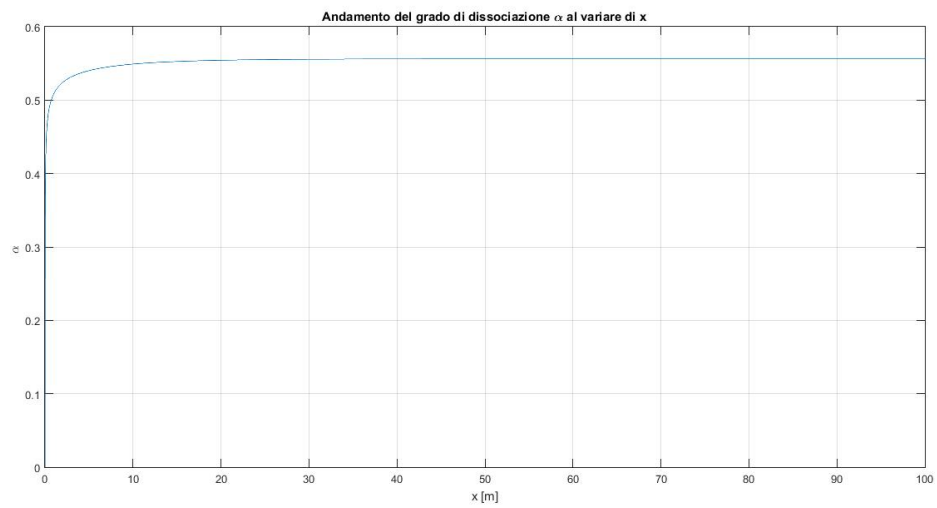


Figura 3: Andamento del grado di dissociazione in funzione dell'ascissa x , a valle dell'urto

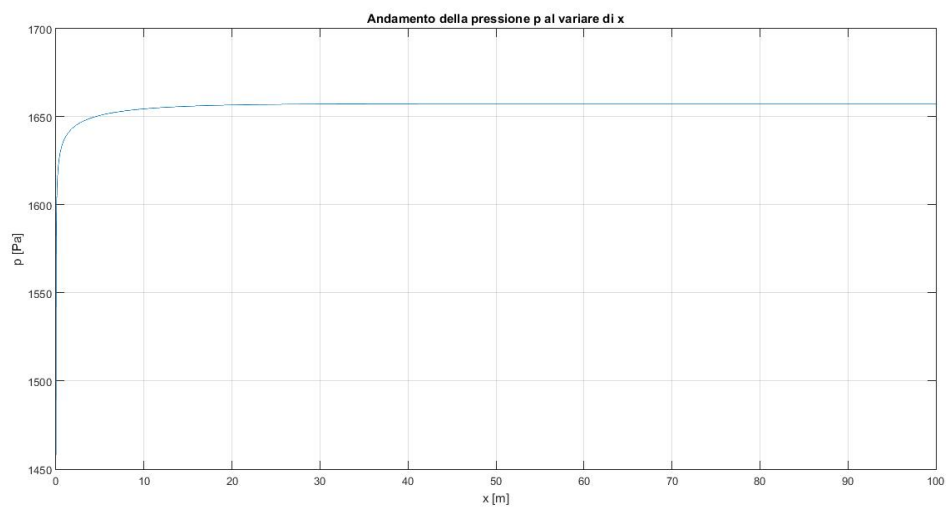


Figura 4: Andamento della pressione in funzione dell'ascissa x , a valle dell'urto

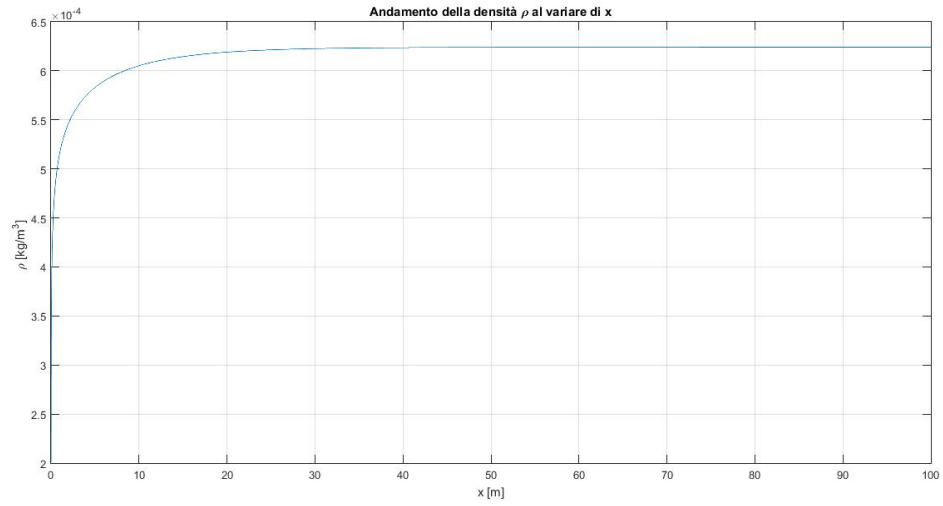


Figura 5: Andamento della densità in funzione dell'ascissa x , a valle dell'urto

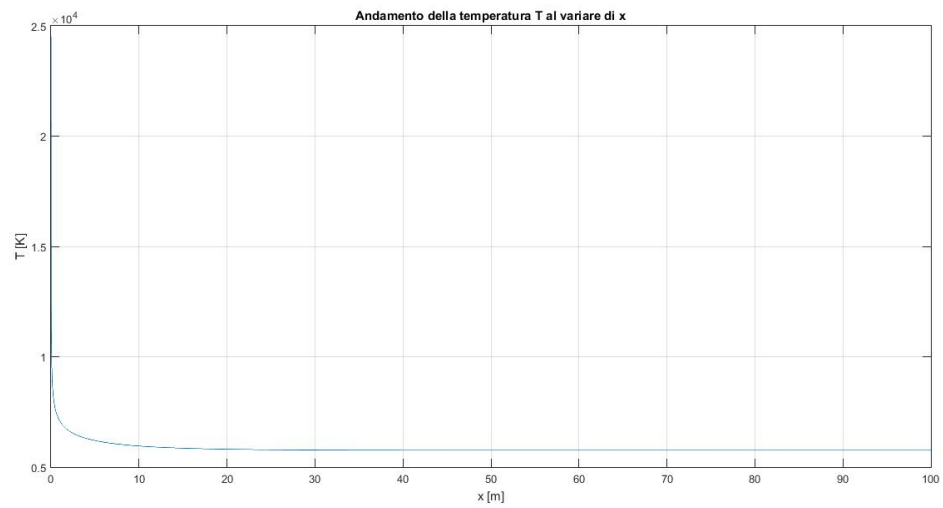


Figura 6: Andamento della temperatura in funzione dell'ascissa x , a valle dell'urto

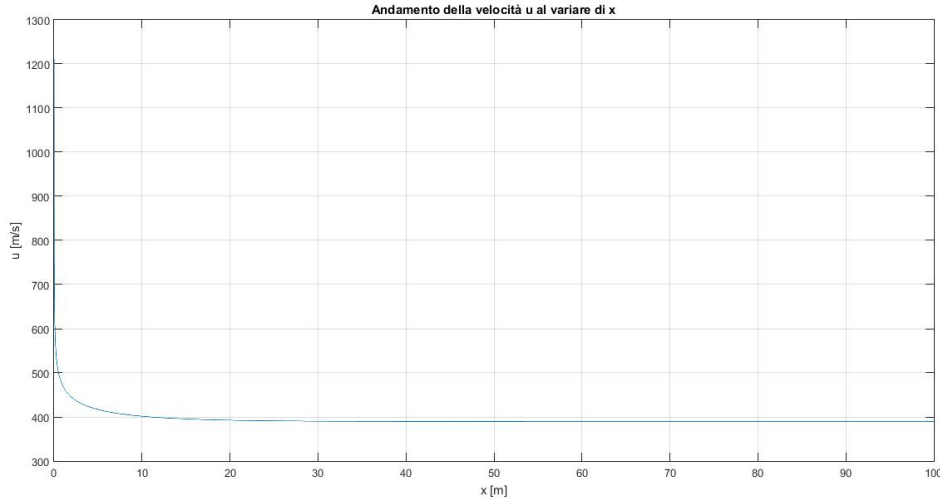


Figura 7: Andamento della velocità in funzione dell'ascissa x , a valle dell'urto

Immediatamente a valle dell'urto, l'azoto N_2 comincia a dissociare, per cui α aumenta; data l'alta temperatura iniziale T_2 , inizialmente il rateo di dissociazione è massimo. Per la conservazione dell'energia, man mano la temperatura, e la velocità diminuiscono, il grado di dissociazione α tende a stabilizzarsi verso una nuova condizione di equilibrio, dove l'azoto non riesce più a dissociare.

La diminuzione di temperatura ha effetto sul campo fluidodinamico, in particolare sulle ρ ed u . La densità aumenta rispetto al valore assunto immediatamente a valle dell'urto. E' noto che questo effetto si risente sullo spessore dello strato d'urto, che in alcuni casi può arrivare anche a dimezzarsi rispetto ad una situazione di flusso non reagente.

Inoltre nel caso considerato sappiamo che per la conservazione della portata, il prodotto $\rho u = \text{cost}$, per cui un'aumento della densità comporta una diminuzione della velocità allo stesso modo.

Si osserva un aumento modesto della pressione ($\approx 14\%$), questo sta ad indicare che a valle dell'urto si ha una ulteriore compressione.

4 Flusso reagente in condotto divergente

In questa sezione si vuole studiare il flusso di una miscela di gas formata da azoto parzialmente dissociata, in un condotto convergente-divergente.

Tuttavia nel nostro modello considereremo note le condizioni di flusso in gola occupandoci quindi di studiare l'evoluzione del flusso nel divergente. Da quanto detto precedentemente le condizioni in gola coincideranno con le condizioni iniziali del nostro problema. Il modello adottato è quello di flusso reagente (dissociazione/ricombinazione) non viscoso unidimensionale stazionario. Il divergente in cui si intende studiare il flusso è assunto di forma conica.

In questo caso il sistema di equazioni scritte per il caso precedente viene modificato con l'aggiunta del termine di variazione d'area $b_1 = -\frac{\rho u}{A(x)} \frac{dA}{dx}$, dove $A(x) = \pi R^2(x)$ è l'andamento dell'area della sezione trasversale del condotto al variare di x e $R(x)$ il raggio della sezione x .

Assumendo il condotto lungo $L = 1 \text{ m}$ e l'angolo di semiapertura β pari a 5° si ha che $R(x) = 0.03 + \tan(\beta)x$. Il sistema di equazioni diventa:

$$\frac{dp}{dx} = \dot{p} = \frac{\left[\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha+7} \left(\frac{3}{4} \frac{R_0 T}{P M_{N_2}} + \Delta h_N^0 - \Delta h_{N_2}^0 \right) - \frac{R_0 T}{P M_{N_2}} \right] \frac{\dot{W}}{u} - \frac{p}{\rho} \frac{b_1}{u}}{\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha+7} + \frac{p}{\rho u^2} - 1}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\dot{p}}{u^2} + \frac{b_1}{u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\dot{p}}{\rho u}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2T}{p} \left(\frac{\alpha + 1}{3\alpha + 7} \right) \left[\dot{p} - \left(\frac{3}{4} \frac{R_0 T}{P M_N} + \Delta h_N^0 - \Delta h_{N_2}^0 \right) \frac{\dot{W}}{u} \right]$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\dot{W}}{\rho u}$$

Supponendo di conoscere i valori di temperatura e pressione in gola, e supponendo che il gas sia in condizioni di equilibrio chimico in tale sezione si ha:

- $T_g = 7000K$
- $p_g = 1.5kPa$
- $\alpha_g = 0.1434$
- $u_g = 1900m/s$

Il sistema di equazione viene implementato in ambiente Matlab. Vengono riportati gli andamenti delle varie grandezze incognite, nonchè del numero di Mach, al variare dell'ascissa longitudinale x.

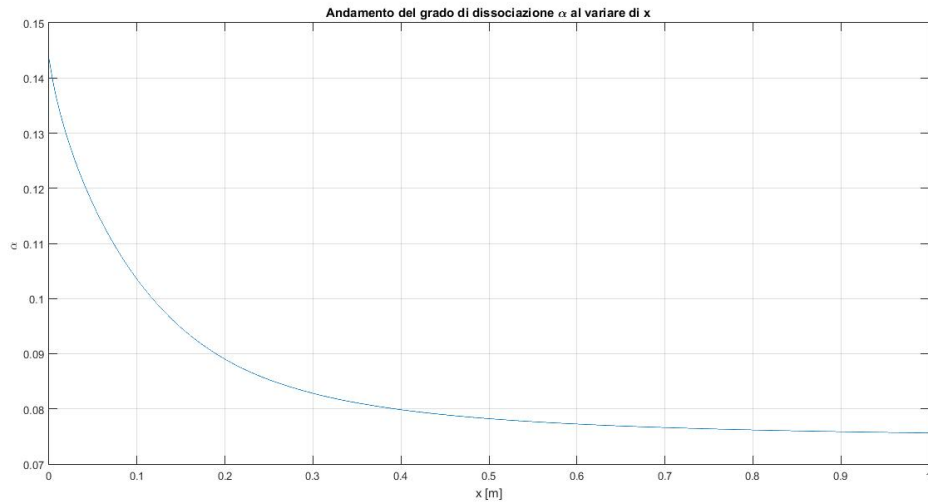


Figura 8: Andamento del grado di dissociazione in funzione dell'ascissa x nel divergente

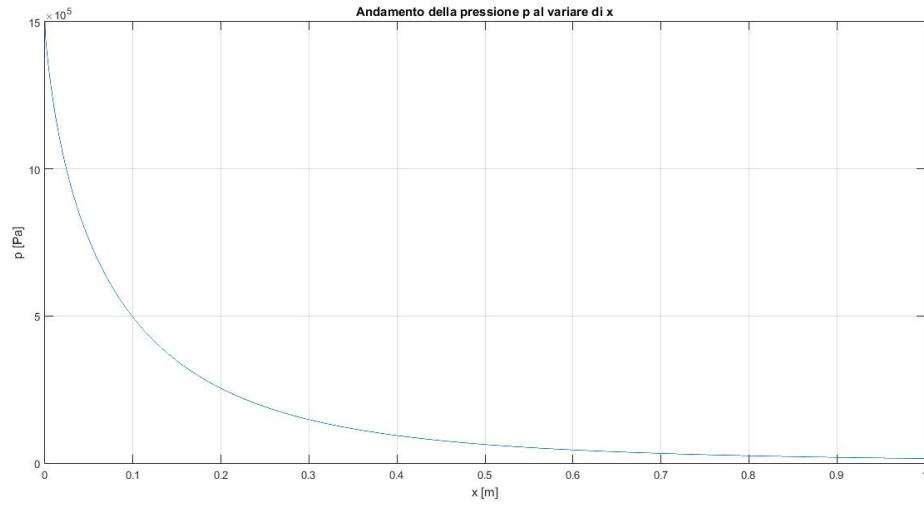


Figura 9: Andamento della pressione in funzione dell'ascissa x nel divergente

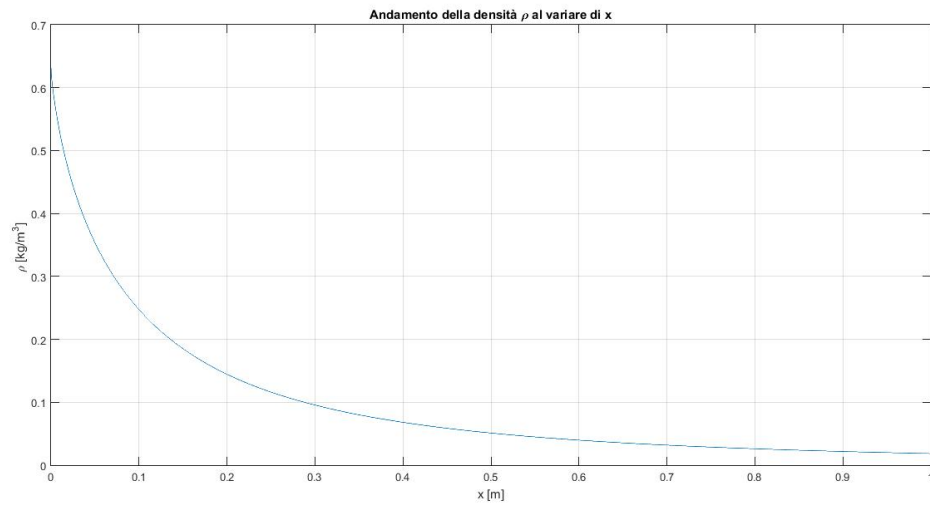


Figura 10: Andamento della densità in funzione dell'ascissa x nel divergente

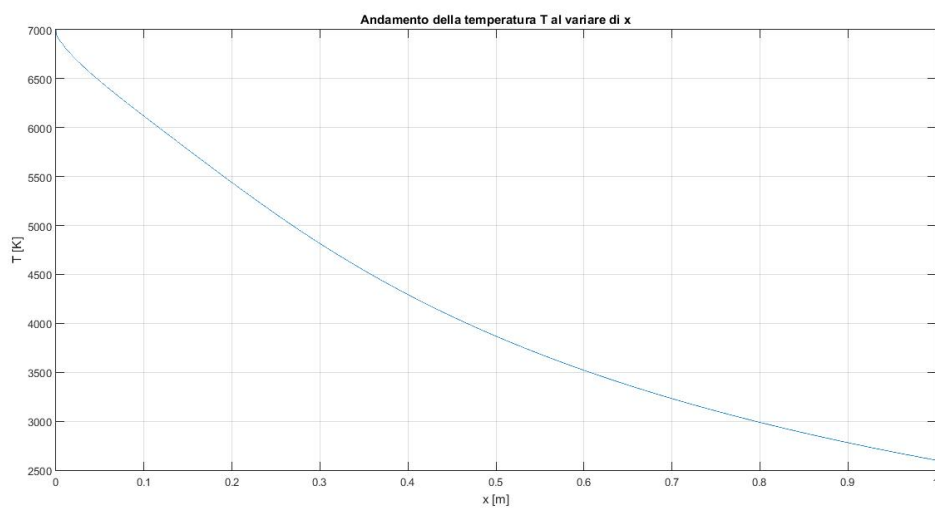


Figura 11: Andamento della temperatura in funzione dell'ascissa x nel divergente

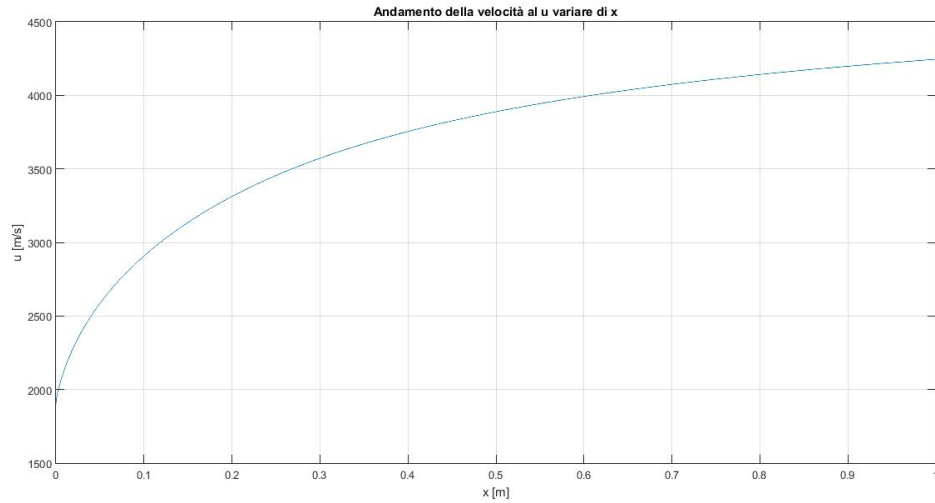


Figura 12: Andamento della velocità in funzione dell'ascissa x nel divergente

Poichè il flusso è supersonico, il fluido subisce un'espansione nel divergente e quindi un calo della temperatura, come si nota dai grafici riportati in figura.

Il calo repentino di temperatura fa sì che le costanti di velocità di reazione k_f e k_b decrescano a loro volta; a questo punto i tempi di reazione diventano confrontabili con quelli chimici, e questo fa sì che la reazione di ricombinazione dell'azoto non avvenga completamente. Si nota infatti come il grado di dissociazione dopo una brusca variazione iniziale si assesta su un valore prossimo a 0.075 per il resto del condotto, si incorre cioè nel fenomeno del congelamento. In sostanza il congelamento ha prodotto un intrappolamento di energia che non può essere riutilizzata.

A causa del fenomeno del congelamento, ci si rende subito conto dell'impossibilità di riprodurre le condizioni di volo di un velivolo ipersonico. Viene riportato in figura l'andamento del numero di Mach al variare l'ascissa longitudinale x .

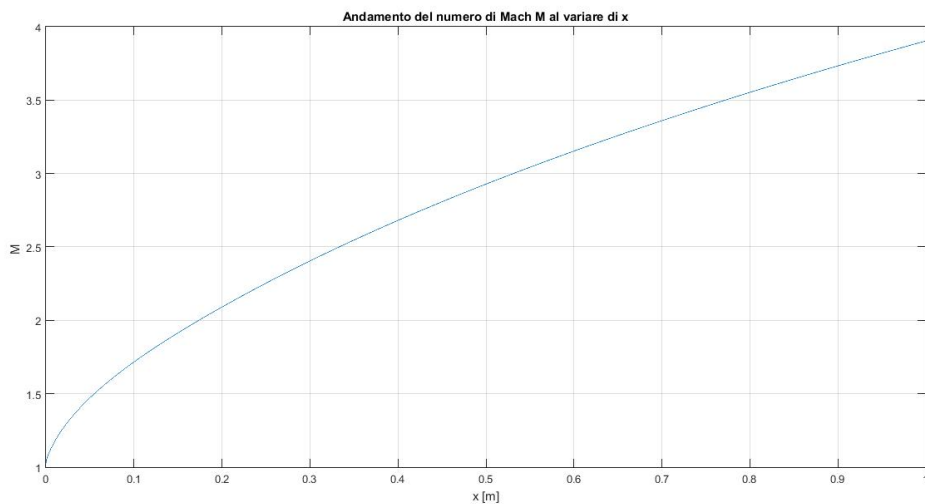


Figura 13: Andamento del numero di Mach in funzione dell'ascissa x nel divergente