Ipersonica
Esercitazione 5
Prof.re Renato Paciorri

Matteo Hakimi 1455230

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

Indice

1 Introduzione

Si vuole studiare il flusso all'interno dello strato limite in prossimità del punto di ristagno, formatosi su un corpo tozzo con raggio di curvatura in prossimità del punto di ristagno pari a $r = 1$ m, di una miscela reagente in campo ipersonico.

2 Flusso reagente nello strato limite

In questa sezione ci dedicheremo allo studio di una miscela composta da azoto molecolare N_2 e atomico N.
In particolare si supporrà che le temperature all'interno dello strato d'urto siano tali ($T_e = 10000K$) da indurre la dissociazione completa dell'azoto $\alpha = 1$.
Le ipotesi semplificative che verranno adottate sono:

- Nella zona esterna lo strato limite, il flusso è in condizioni di equilibrio chimico.
- I fenomeni vibrazionali non verranno considerati.
- La temperatura di parete del corpo è relativamente bassa ($T_w = 1000K$), tale da indurre la ricombinazione completa dell'azoto (parete completamente catalica $\alpha_w = 0$).

Introducendo le seguenti adimensionalizzazioni:

$$f'(\eta) = \frac{u}{u_e}, \quad g(\eta) = \frac{h}{h_e}, \quad \theta(\eta) = \frac{T}{T_e},$$

con:

$$\eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \iiint_0^y \rho(y)\, dy$$

$$\xi = \int_0^x \rho_e u_e \mu_e, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$$

Possiamo riscivere il sistema di equazioni di Navier Stokes, e la generica equazione della specie i^{-esima} attraverso le variabili appena introdotte, che di fatto semplificano il problema considerato; infatti questo metodo ci permette di riscrivere il sistema di equazioni alle derivate parziali in un sistema alle derivate ordinarie.
In particolare si ha:

$$(lf'')' + ff'' + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_e}{\rho} - (f')^2\right] = 0$$

$$(\frac{l}{P_r}g')' + fg' + \left[\frac{l}{P_r}\sum_i \frac{c_{ei}}{h_e}\left(h_i - \Delta h_i^0\right)(L_e - 1)\, c_i'\right] = 0$$

$$(\frac{l}{P_r}L_e\alpha) + f\alpha' - \frac{\dot{W}_\alpha}{2\frac{du_e}{dx}\rho} = 0$$

dove con P_r si è indicato il numero di Prandtl, $L_e = \frac{\rho D_{12} C_p}{\mu}$ il numero di Lewis e l è definito come:

$$l := \frac{\rho\mu}{\rho_w \mu_w}$$

Mentre il termine $\dot{w}_\alpha$, rappresenta il termine reagente, che ne caso della dissociazione/ricombinazione dell'azoto è definito come:

$$\dot{w}_\alpha = \rho(1+\alpha)^2 \left[k_f(T) \frac{(1-\alpha)p}{(1+\alpha)R_0 T} - 4k_b(T) \left(\frac{\alpha p}{(1+\alpha)R_0 T} \right)^2 \right]$$

Inoltre supponendo che la viscosità e la pressione non varino, è possibile esprimere l in funzione di α e θ, infatti si ha:

$$l = \frac{1+\alpha_w}{1+\alpha} \frac{T_w}{T_e} \frac{1}{\theta}$$

Mentre:

$$g = \frac{h}{h_e} = \frac{C_p T + \alpha \Delta h_N^0}{C_{pe} T_e + \alpha_e \Delta h_N^0}$$

Da cui si ricava:

$$\theta = \frac{h_e g - \alpha \Delta h_N^0}{C_p T_e}$$

con:

$$C_p = \frac{7+3\alpha}{4} \frac{R_0}{PM_N}$$

Inoltre:

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha_e} \theta$$

Assumendo un numero di Lewis e Prandtl pari ad 1, e sapendo che possiamo scrivere:

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2(p_e - p_\infty)}{\rho_e}}$$

Il sistema di equazioni subisce una notevole semplificazione, inoltre al fine di ricondurre il sistema in un sistema di 7 equazioni differenziali al primo ordine, introduciamo le seguanti variabili:

$$F = f', \quad A = lF', \quad B = lg', \quad C = l\alpha'$$

Il sistema di equazioni differenziali in forma normale diventa:

$$f' = F$$

$$F' = \frac{A}{l}$$

$$g' = \frac{B}{l}$$

$$\alpha' = \frac{C}{l}$$

$$A' = -f\frac{A}{l} + \frac{1}{2}F^2 + b_1$$

$$B' = -f\frac{B}{l}$$

$$C' = -f\frac{C}{l} + b_3$$

con le seguenti condizioni al contorno:

- $\eta = 0$

$$f(0) = 0$$
$$F(0) = 0$$
$$g(0) = g_w$$
$$\alpha(0) = 0$$

- $\eta = \infty$

$$F(\infty) = 1$$
$$g(\infty) = 1$$
$$\alpha(\infty) = 1$$

In genere in questo tipo di problemi condizioni al contorno asintotiche, quello che si usa è la tecnica di over-shooting, che consiste di ricondurre le condizioni asintotiche a delle condizione iniziale, assegnando come primi valori dei valori tentativo di $A(0) = A_i$, $B(0) = B_i$ e $C(0) = C_i$ iterando fino a convergenza della F, g e α all'infinito.
Si implementa su codice Matlab il sistema di equazioni e relative condizioni al contorno.
Scegliendo inizialmente come valori tentativo:

$$A(0) = 0.5, \quad B(0) = 0.5, \quad C(0) = 0.5$$

E procedendo, variando dal principio $C(0)$ in modo da avere $\alpha(\infty) = 1$, e successimanvente $B(0)$ e $A(0)$, facendo attenzione ai valori assunti dai valori asintotici, si ottiene:

$$A(0) = 0.23017, \quad B(0) = 0.1780, \quad C(0) = 0.1812$$

rispettivamente con:

$$F(\infty) = 1, \quad g(\infty) = 1, \quad \alpha(\infty) = 1$$

Vengono riportati in figura gli andamenti di $F = F(\eta)$, $g = g(\eta)$ e $\alpha = \alpha(\eta)$ rispettivamente.

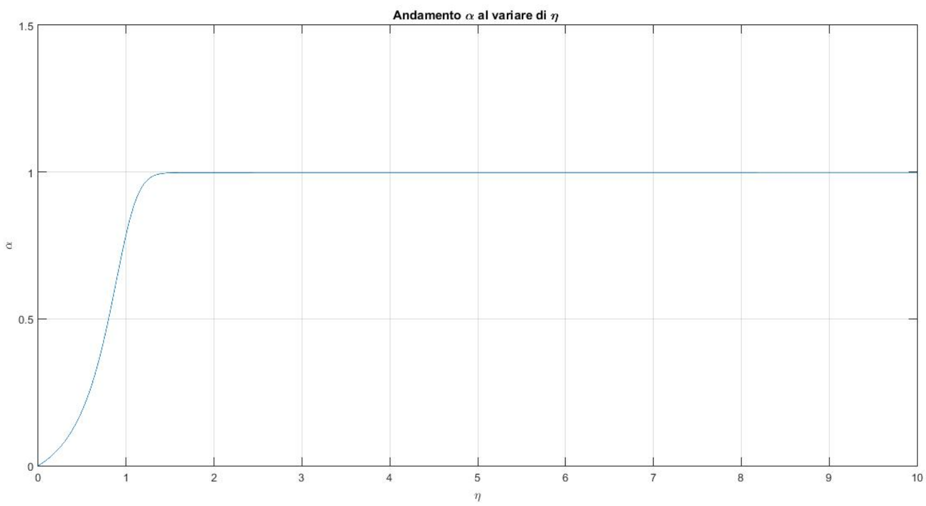

Figura 1: Andamento del grado di dissociazione in funzione di η

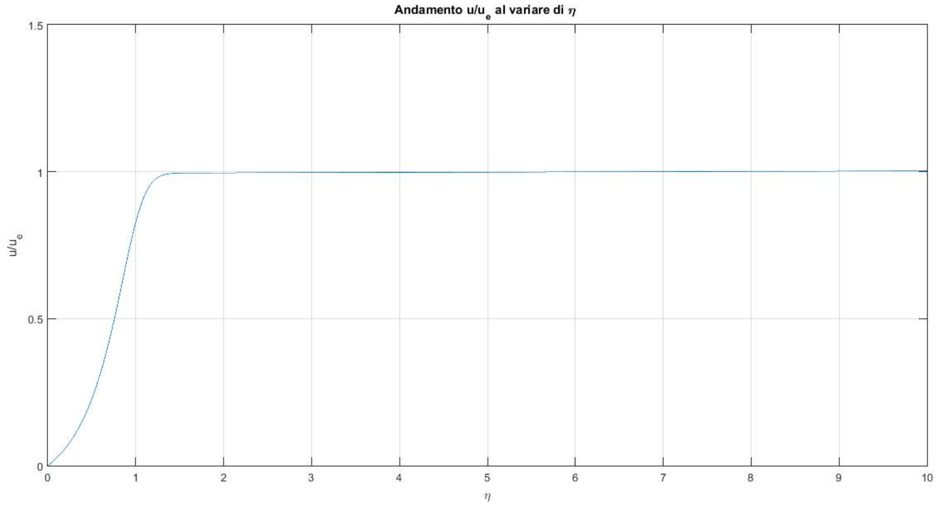

Figura 2: Andamento di u/u_e in funzione di η

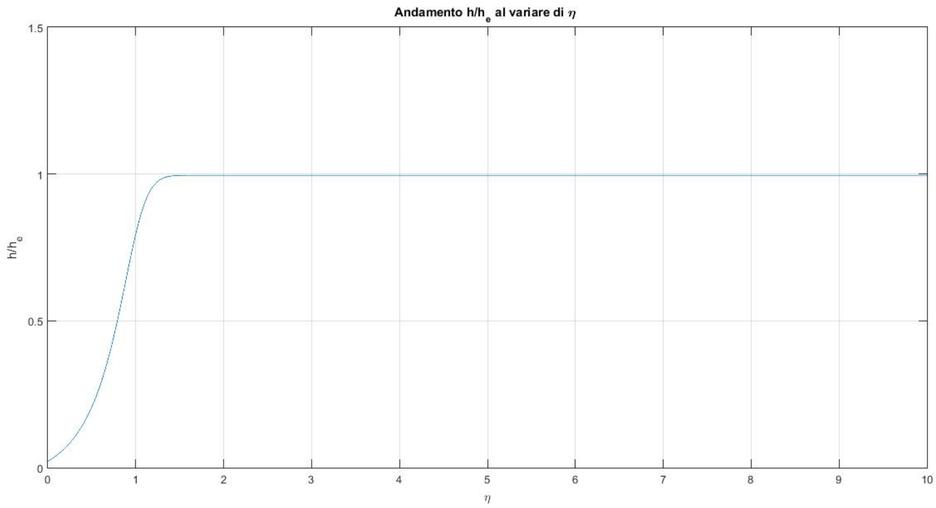

Figura 3: Andamento di h/h_e in funzione di η