

Ipersonica  
Esercitazione 7  
Prof.re Renato Paciorri

Matteo Hakimi 1455230



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

*Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulazione del problema</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ottimizzazione della forma</b>	<b>7</b>

# 1 Introduzione

Si vogliono ottimizzare le prestazioni aerodinamiche di un velivolo da crociera ipersonico, attraverso la riduzione della resistenza aerodinamica. In particolare si cerca la forma ottima del velivolo tale che il coefficiente di resistenza a portanza nulla del velivolo risulti minimo.

## 2 Formulazione del problema

Mentre nel problema del rientro la necessità di frenare la capsula e di limitare lo scambio termico sono in accordo tra loro, in termini di geometria, nella crociera ipersonica il problema termico e aerodinamico entrano in conflitto. Si ricordi infatti come il flusso termico decada con l'inverso del raggio di curvatura. Supponiamo ora di considerare solo la parte aerodinamica.

Uno dei parametri caratterizzanti le prestazioni del velivolo da crociera in termini di aerodinamica, è l'efficienza aerodinamica  $E = \frac{L}{D}$ .

In particolare quello che si cerca di fare, nel caso di velivoli da crociera è quello di aumentare l'efficienza massima  $E_{MAX}$ .

Partendo dalla polare del velivolo (si veda figura ), dalla definizione di efficienza aerodinamica risulta chiaro come l'efficienza massima sia legata al coefficiente angolare della retta tangente alla polare stessa.

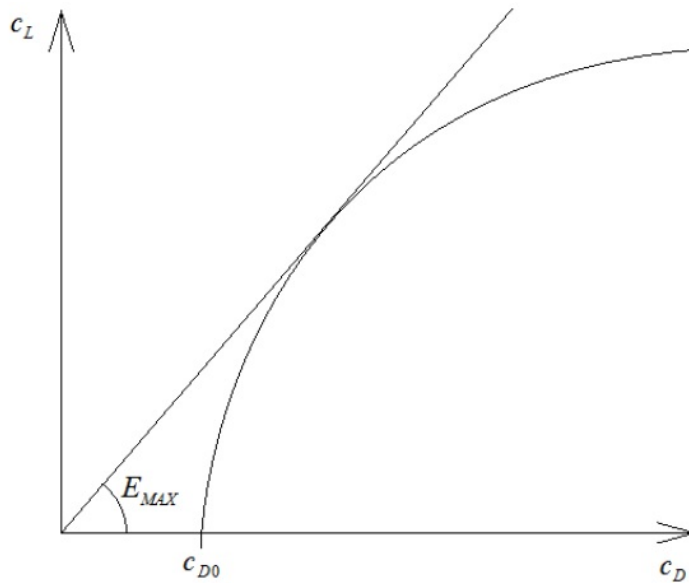


Figura 1: Polare

Nel contributo alla resistenza aerodinamica totale  $D$ , si considerano:

- resistenza di pressione  $D_p$
- resistenza viscosa  $D_v$

Inoltre si ha:

$$D_p = D_L + D_s$$

dove  $D_L$  è la resistenza dovuta alla generazione di portanza e  $D_s$  è quella di forma.

Si ricava quindi:

$$D = D_v + D_s + D_L = D_0 + D_L$$

avendo indicato con  $D_0 = D_s + D_v$  la resistenza a portanza nulla.

Adimensionalizzando si ha:

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_L}$$

ovvero:

$$C_D = C_{D_0} + k\alpha^2$$

Osservando la polare di figura 1 si nota come per aumentare l'efficienza massima un modo può essere minimizzare la resistenza (coefficiente di resistenza) di portanza nulla.

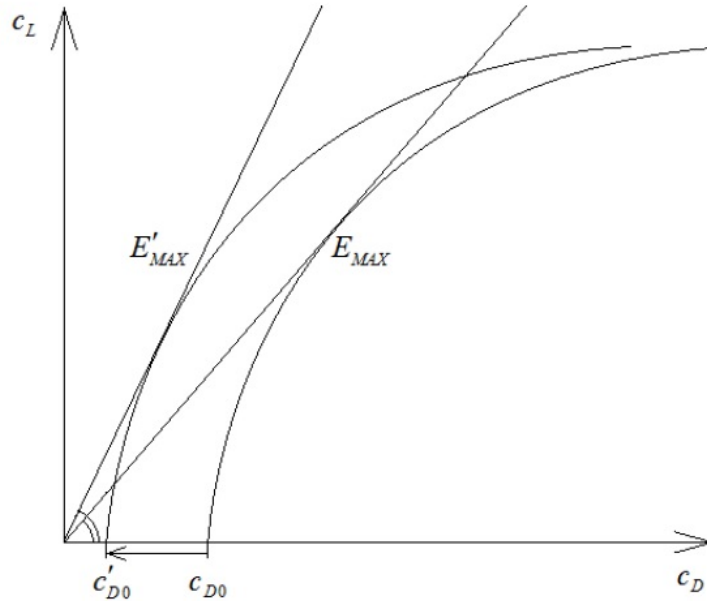


Figura 2: Aumento dell'efficienza massima

Al fine di diminuire il  $C_{D_0}$ , si potrebbe intervenire sul solo termine viscoso, ad esempio facendo lavorare il corpo di interesse in campo laminare a parità di numero di Reynolds, agendo sulla finitura superficiale o minimizzando la superficie bagnata ed abbassando così il coefficiente di attrito  $c_f$ . Oppure si potrebbe pensare di ridurre la resistenza di forma, facendo un corpo più allungato nella direzione di efflusso a parità di volume. Bisogna osservare come entrambi i metodi entrano in disaccordo, poichè diminuire il coefficiente di attrito cercando di far lavorare il corpo in campo laminare potrebbe essere sconveniente in termini di resistenza di forma; infatti il passaggio a regime turbolento, favorisce il ritardo della separazione del flusso sul corpo, riducendo la scia a valle dello stesso. Allo stesso modo cercare di diminuire il coefficiente di attrito diminuendo la superficie bagnata, avendo fissato il volume del corpo, da origini a corpi di natura tozza e quindi soggetti a maggior resistenza di forma. Viceversa, favorendo l'allungamento del velivolo, a parità di volume, al fine di diminuire la resistenza di forma, ha il duplice effetto di aumentare la resistenza di attrito a causa dell'aumento della superficie bagnata.

Da quanto detto sopra si evince che bisogna trovare un compromesso per cercare di non estremizzare i due effetti e minimizzare globalmente il coefficiente di resistenza a portanza nulla. Si parte dal concetto di lastra piana, che rappresenta la forma più aerodinamica possibile, e ci si allontana da questa al fine di realizzare un corpo con un certo volume interno.

Si parte con un semplice diedro visto in sezione.

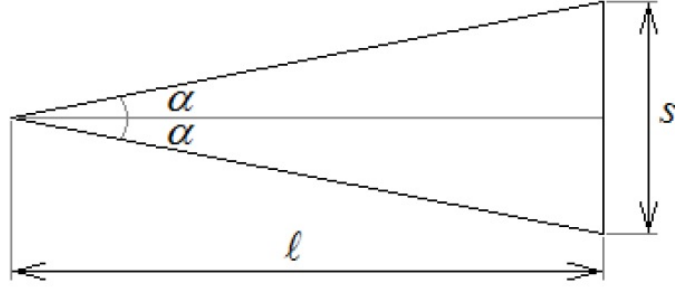


Figura 3: Corpo diedro visto in sezione

Cerchiamo ora di stimare gli andamenti del coefficiente di resistenza di forma e viscoso al variare del rapporto delle lunghezze caratteristiche del corpo  $s$  e  $l$ .

Fissando come vincolo di volume  $s \cdot l = 0.1 m^2$  (caso 2D), si ha:

- **Resistenza di forma** Il flusso tipico che si viene a creare in prossimità del corpo per  $M > 1$  è il seguente:

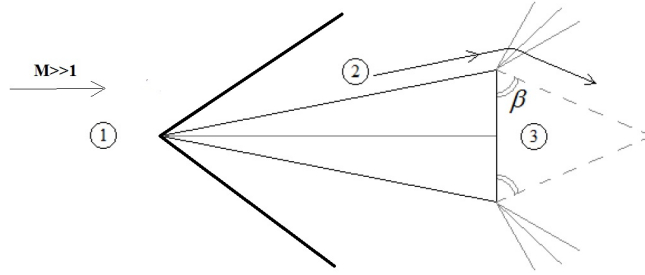


Figura 4: Flusso 2D attorno a diedro

In particolare si ha:

$$D_s = (p_2 - p_3) \cdot s \approx p_2 \cdot s$$

Dove la pressione  $p_3$  è stata trascurata rispetto a  $p_2$  poichè l'espansione a valle del corpo sarà molto violenta. In particolare se avessimo stimato la resistenza di forma con la teoria Newtoniana avremo trovato che  $p_3 = p_1 \ll p_2$  per  $M_1 \gg 1$ .

Dall'espressione del coefficiente di resistenza di forma si ricava:

$$C_{D_s} = \frac{D_s}{\frac{1}{2} \rho_1 U_\infty^2 s} = \frac{\frac{p_2}{p_1}}{\frac{1}{2} \gamma M_1^2}$$

Attraverso il parametro di similitudine ipersonica  $k = \alpha M$ , con  $\alpha \approx \frac{s}{2l} = \frac{1}{2} \frac{l}{s}$  tangente locale, si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma k^2 \left[ \frac{\gamma + 1}{4} + \sqrt{\left( \frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 + \frac{1}{k^2}} \right]$$

ovvero:

$$C_{D_s} = f\left(\frac{l}{s}\right)$$

- **Resistenza viscosa** Supponendo  $\alpha$  sufficientemente piccolo, possiamo trattare il corpo come una doppia lastra piana.

Possiamo quindi scrivere:

$$D_v = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \rho_1 U_\infty^2 c_f l \right]$$

Dove  $c_f$  è il coefficiente di attrito, dipendente dal regime dal numero di Reynolds e dal regime di moto. Nell'ipotesi che il flusso sia laminare possiamo scrivere:

$$c_f = \frac{1.24}{\sqrt{Re_l}}$$

avendo indicato con  $Re_l = \frac{\rho_1 U_\infty l}{\mu_1}$ . Da cui si ricava:

$$C_{D_v} = \frac{D_v}{\frac{1}{2} \rho_1 U_\infty^2 s}$$

Si noti come l'adimensionalizzazione è stata fatta rispetto a  $s$  e non a  $l$ , questo perchè così è possibile confrontare il  $C_{D_s}$  con il  $C_{D_v}$ . Sapendo che  $l = \sqrt{0.1 \frac{l}{s}}$ , si ricava:

$$C_{D_v} = 2 \frac{1.24}{\sqrt{\frac{\rho_1 U_\infty}{\mu_1}} \sqrt[4]{0.1}} \left( \frac{l}{s} \right)^{3/4}$$

• **Resistenza a portanza nulla** Come visto nella sezione precedente, la resistenza in assenza di portanza è la somma dei contributi di resistenza di forma e viscosa rispettivamente. In particolare, in termini di  $C_D$  si ha:

$$C_{D_0} = C_{D_v} + C_{D_s} = f\left(\frac{l}{s}\right)$$

In particolare si riporta l'andamento del coefficiente di resistenza al variare di  $\frac{l}{s}$ .

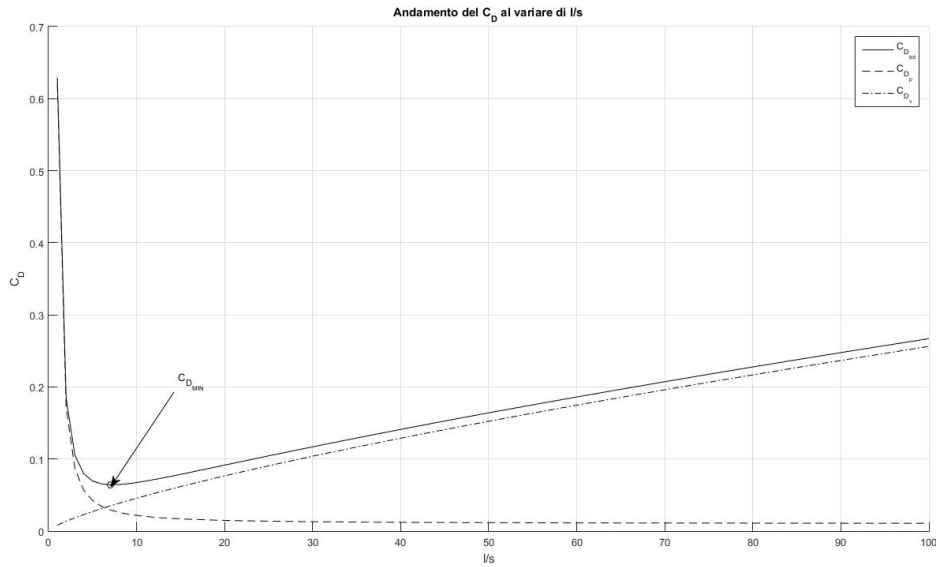


Figura 5: Andamento del  $C_{D_0}$  al variare del rapporto  $l/s$

Si nota come in tale andamento si abbia la presenza di un minimo. Chiaramente quello è il punto di ottimo.

### 3 Ottimizzazione della forma

Nella sezione precedente si è fatto uno studio su come minimizzare il coefficiente di resistenza, in assenza di portanza, al fine di aumentare l'efficienza massima del velivolo ipersonico da crociera. Tuttavia nello studio precedente sono state assunte diverse ipotesi; prima tra tutte, si è detto che la forma di minima resistenza aerodinamica è quella data dal diedro, questo è vero in condizioni di problemi bidimensionali. In realtà si dimostrerà che la forma ottima nel caso 3D è data dalla geometria assial-simmetrica dell'Ogiva.

In generale, si può prendere un profilo con legge  $y = y(x)$  con un vincolo sul volume, oppure un vincolo che fissi i punti iniziale e finale del profilo. Si otterrà una famiglia di curve che potrà essere riscalata in base al volume necessario.

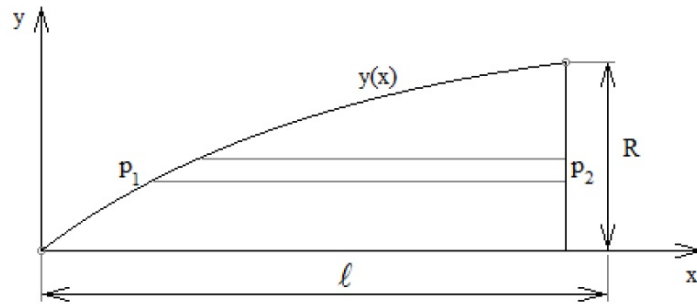


Figura 6: Profilo generico  $y = y(x)$

Per calcolare la resistenza per unità di profondità si prende il contributo elementare di una porzione orizzontale del profilo, come in figura.

Si ricava che nel caso 2D.

$$D = \int_0^R (p_1 - p_2) dy$$

ovvero:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_1 U_\infty^2 R} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{2}{M_\infty^2 \gamma} \left( \frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) dy$$

Se  $M_\infty \gg 1$  allora potendo utilizzare la teoria Newtoniana si ha  $p_2 = p_\infty$  da cui si ricava:

$$C_D = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{2}{M_\infty^2 \gamma} \left( \frac{p_1}{p_\infty} - 1 \right) dy$$

Si riconosce come il termine integrando sia il coefficiente di pressione  $C_p$ . Sempre dalla teoria Newtoniana si ha:

$$C_p = 2 \sin^2(\delta)$$

Sappiamo inoltre che:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan(\delta)$$

ovvero:

$$\sin^2(\delta) = \frac{y'^2}{1 + y'^2}$$

Da cui si ha che:

$$C_D = \frac{2}{R} \int_0^L \frac{y'^3}{1 + y'^2} dx$$

avendo posto  $dy = y'dx$

Nel caso assialsimmetrico si ha invece

$$C_D = 4 \int_0^L \frac{y'^3 y}{1 + y'^2} dx$$

Per risolvere il problema della ricerca del minimo si imposta un problema variazionale attraverso la definizione del funzionale  $V$ .

$$V = V[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

Nel caso generale usando i moltiplicatori di Lagrange si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} y'' = 0$$

Per quanto riguarda il caso piano si ha:

$$F = \frac{y'^3}{1 + y'^2} = F(y')$$

e il problema si riduce a:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} y'' = 0$$

ovvero:

$$y'' = 0$$

da cui si ha:

$$y = Ax + B$$

con  $A$  e  $B$  dipendenti dalle condizioni al contorno che nel nostro caso sono:

$$y(0) = 0, \quad y(L) = R$$

Si osserva come nel caso piano abbiamo ottenuto una legge lineare, questo corrisponde al fatto che per minimizzare la resistenza nel caso piano bisogna adottare la forma del diedro.

Per quanto riguarda il caso assialsimmetrico le cose cambiano.

In particolare si ha:

$$F = F(y, y')$$

che sostituita nella formula ottenuta dal problema di minimo variazionale si può dimostrare che:

$$\frac{yy'^3}{(1 + y'^2)^2} = \text{cost}$$

Provando una soluzione del tipo  $y = kx^{3/4}$  si ha:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\left[1 + \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\right]^2}$$

Osserviamo come tale soluzione non soddisfi la relazione ottenuta precedentemente.

Tuttavia sufficientemente lontano dall'origine approssima molto bene la soluzione.

Un altro modo di procedere è derivare la relazione ottenuta rispetto a  $x$ . In particolare si ha:

$$y'' = \frac{y'^2(1 + y'^2)}{y(y'^2 - 3)}$$



Ponendo  $A = y'$  si ottiene il seguente sistema del primo ordine:

$$y' = AA' = \frac{A^2(1 + A^2)}{y(A^2 - 3)}$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$y(0) = 0, \quad y(L) = R$$

Al fine di implementare il sistema differenziale, in ambiente Matlab, il problema ai limiti viene ricondotto ad un problema ai valori iniziali iterando sul valore di  $A(0) = A_{it}$ . In realtà bisogna osservare come nel sistema di equazioni sia presente una singolarità in  $y(0) = 0$ , per cui ponendo  $y(0) = 0.0001$  e scegliendo  $L = 1$  e  $R = 0.1$  si ha che  $A_{it} = 0.3795$ .

Vengono riportati i risultati in forma grafica confrontati con l'approssimazione  $y = x^{3/4}$ .

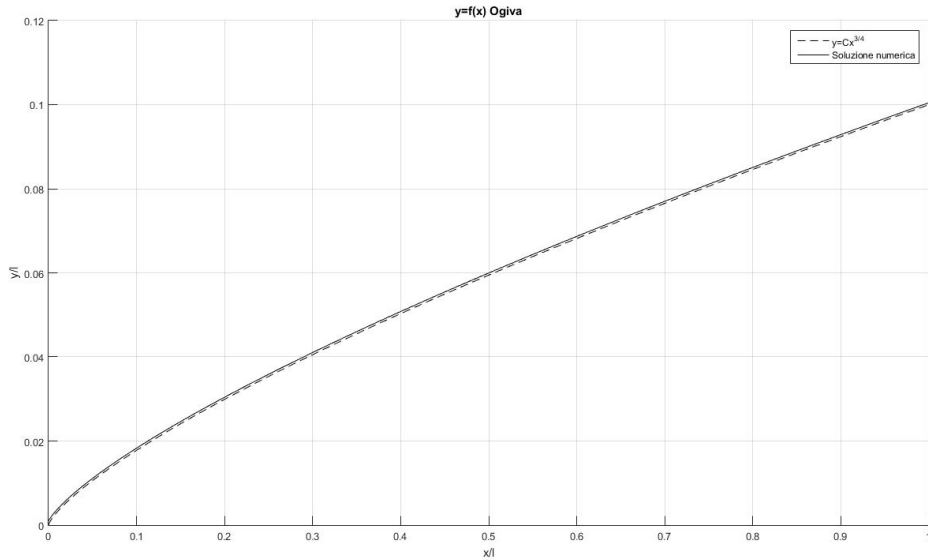


Figura 7: Profilo ogiva soluzione numerica e  $y = cx^{3/4}$

Il motivo fisico per cui l'ogiva risulta più vantaggiosa rispetto ad un semplice cono sta nel fatto che nell'ogiva la pressione diminuisce lungo la direzione del flusso. Infatti, dato che la pressione a valle dipende dall'inclinazione della superficie, per il cono la pressione si mantiene costante lungo le sue generatrici, mentre per l'ogiva la pendenza scende gradualmente. Inoltre si può affermare che, nonostante il cono occupi meno volume a parità di larghezza, esso presenta maggiore resistenza. Infatti sul cono un contributo  $dp$  alle alte  $x$  contribuisce molto alla resistenza totale, sia perché la corona circolare ivi è grande, sia perché il  $dp$  insiste su una  $dy$  grande. L'ogiva, invece, ha pendenze alte dove la corona è piccola e dà più bassi contributi a valle a parità di ascissa con il cono.