GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 20/06/2022

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2x2, munito del prodotto scalare standard $M \cdot N := tr(M^t N)$. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(i) **(3 pt)** Trovare tutti gli autovalori ed autovettori di f.

(ii) **(3 pt)** Costruire una base ortonormale di V contenente almeno un autovettore di ogni autospazio.

(iii) **(3 pt)** Trovare un esempio di sottospazio $W \neq \{0\}$ di V tale che la restrizione $f_{|W} : W \to W$ sia diagonalizzabile.
Determinare il piu' grande sottospazio avente questa proprieta'.

(iv) **(4 pt)** Sia $W \leq V$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Determinare il sottospazio immagine $f(W)$ e la sua controimmagine $f^{-1}(f(W))$.
Sia $Z := \{M \in V : tr(M + M^t) = 0\}$. Individuare $f^{-1}(Z)$.
Determinare $f^{-1}(Im(f))$.

(v) **(3 pt)** Si ricordi che un sottospazio $W \leq V$ si dice invariante se $f(W) \leq W$. Trovare sottospazi invarianti di dimensione 1,2,3.

SOLUZIONE:

(i) Il modo standard di risolvere questo esercizio e' tramite la matrice associata ad f (per esempio, rispetto alla base canonica $\mathcal{B} := \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$). Un modo alternativo e' di notare che $\lambda = 0$ e' certamente un autovalore, con autospazio $Ker(f) = \mathcal{L}(E_{21})$. Supponiamo ora che $f(M) = \lambda M$ per qualche $\lambda \neq 0$. Allora, iterando f per composizione, otteniamo $f^3(M) = \lambda^3 M$ mentre la definizione di f mostra che

$$f^3(M) = f^3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Confrontando queste due espressioni, troviamo che $\lambda^3 = 1$, dunque $\lambda = 1$. Troviamo inoltre che $c = 0$ e $a = b = d$. L'autospazio e' dunque generato da $E_{11} + E_{12} + E_{22}$.

(ii) Possiamo prendere $e_1 = E_{21}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(E_{11} + E_{12} + E_{22})$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{11} - E_{22})$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(E_{11} - 2E_{12} + E_{22})$.

(iii) Si noti che un vettore di un sottospazio $W \leq V$ e' autovettore per $f_{|W}$ se e solo se e' autovettore per f. E' dunque chiaro che gli autovalori di $f_{|W}$ devono essere un sottoinsieme di quelli di f. Nel nostro caso W e' massimale se e solo gli autovalori sono gli stessi, ossia W e' la somma diretta dei due autospazi trovati sopra.

(iv) M antisimmetrica significa $a = d = 0$, $b = -c$. Da qui si trova $f(W) = \mathcal{L}(E_{11})$. La sua controimmagine e' data dalla somma diretta delle matrici antisimmetriche con Ker(f), ossia $\mathcal{L}(E_{12}, E_{21})$.

Per trovare la controimmagine di Z basta risolvere l'equazione $tr(f(M) + f(M)^t) = 0$, ossia $2b + 2a = 0$, dunque $a + b = 0$.

La controimmagine di Im(f) e' tutto V.

(v) Possiamo scegliere W:=Ker(f) per dim=1, la somma degli autospazi per dim=2, W:=Im(f) per dim=3.

ESERCIZIO 2 (16 pt.)

Si consideri lo spazio V_3 ed una base ortonormale positiva $\mathscr{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, con componenti associate (x, y, z). Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo dato da

$$f(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2y\mathbf{k} + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{i} + \mathbf{j}), \qquad \text{dove} \quad \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

E si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{w}).$$

(i) **(3pt)** Determinare la matrice rappresentativa di φ nella base $\mathscr{B}$.

(ii) **(3 pt)** Classificare φ, e stabilire se il cono isotropo di φ è un sottospazio vettoriale.

(iii) **(4 pt)** Determinare una base di φ in cui φ si esprime in forma normale.

(iv) **(2 pt)** Determinare, se esiste, un sottospazio W di dimensione massima possibile tale che $\varphi : W \times W \to \mathbb{R}$ sia un prodotto scalare.

(v) **(4 pt)** Sia Q la forma quadratica associata a φ. Classificare la conica nel piano xy di equazione

$$Q(x, y, y) - Q(x, y, -y) = 1 - 4x^2$$