GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta dell' 11/07/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (8 pt.)

Nello spazio vettoriale V_3, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dato $a \in \mathbb{R}$ si considerino i vettori

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - a\mathbf{j} + a\mathbf{k},$$

ed il vettore $\mathbf{z} = a\mathbf{i} - \mathbf{j} - a\mathbf{k}$.

(i) **(3 pt)** Determinare i valori di a per cui $\mathbf{z}$ non appartiene a $\pi = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

(ii) **(1 pt)** Per tali valori di a, determinare il coseno dell'angolo che $\mathbf{z}$ forma con il vettore $\mathbf{v}$ definito dalle seguenti proprietà: (a) $\mathbf{v}$ sia perpendicolare al piano vettoriale π, (b) posto $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}\}$, $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ abbia determinante positivo.

(iii) **(2 pt)** Sempre per tali valori di a, trovare una base ortonormale di π contenente un multiplo di $\mathbf{v}_1$, e completarla ad una base ortonormale positiva di V_3.

(iv) **(2 pt)** Esistono dei valori di a per cui i parallelepipedi generati da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{z}\}$ hanno entrambi volume nullo?

ESERCIZIO 2 (11 pt.)

Nello spazio delle matrici $\mathbb{R}^{2,2}$, si consideri l'endomorfismo f dato da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$

che "ruota" le componenti in senso orario.

(i) **(2 pt)** Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(ii) **(4 pt)** Determinare gli autovalori e gli autospazi di f, e stabilire se f è diagonalizzabile.

(iii) **(3 pt)** Sia $g : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $g(A) = (\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(f(A)))$. Si consideri l'insieme

$$W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \ : \ g(A) = g(f(A))\right\}.$$

L'insieme W è un sottospazio vettoriale? In caso positivo, determinare la sua dimensione ed una base. È un sottospazio invariante per f?

(iv) **(2 pt)** Sia H il sottospazio dato dalla somma degli autospazi di f. Determinare la dimensione di $H \cap W$.

ESERCIZIO 3 (8 pt.)

Nel piano, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y)$, si consideri la conica

$$\mathcal{C}: \ 4x^2 + 4x - y = 0.$$

(i) **(3 pt)** Si scriva l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica classificandola come ellisse/iperbole/parabola/conica degenere e si espliciti il cambiamento di riferimento $\mathcal{R}'(O', \xi, \eta)$ usato.

Disegnare il grafico di tale figura nel modo più accurato possibile, sia nel riferimento originale sia nel riferimento da voi trovato.

(ii) **(2 pt)** Lasciando invariati i termini già presenti nell'equazione, che termine aggiungereste per ottenere (a) un'ellisse, (b) un'iperbole?

(iii) **(3 pt)** Eliminando, uno alla volta, ciascuno dei tre termini che compaiono nell'equazione, che figura ne risulta?

ESERCIZIO 4 (5 pt.)

Sia dato uno spazio vettoriale V di dimensione 4. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (giustificando la risposta. **1 punto** per ogni risposta corretta):

(1) Da 5 vettori distinti non nulli è sempre possibile estrarre una base di V.
(2) Due sottospazi distinti di dimensione 2 sono sempre supplementari.
(3) Due sottospazi di dimensione 3 hanno sempre intersezione non banale.
(4) Un'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^3$ ha sempre nucleo non banale.
(5) Un'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^3$ è sempre suriettiva.

SOLUZIONI ESERCIZIO 1:

1) Il sistema ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & -a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -a \\ 0 & 2 & 0 & -1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a+a^2 \end{array}\right)$$

Ne segue che per $a \in \{1, -1\}$ il sottospazio π non coincide con V_3, ed il sistema è impossibile per $a = 1$, compatibile con infinite soluzioni per $a = -1$. Quindi, $a = 1$ è l'unica soluzione.

2) $a = 1$, $\pi = \mathscr{L}\{(1, -1, 1), (1, 1, 1)\}$ quindi $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{i}$ e viene

$$\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

3) Base

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)\right\}$$

4) $a = -1$, ragionamento su cosa vuol dire il sistema in 1).

SOLUZIONI ESERCIZIO 2:

1) f è isomorfismo 2) La matrice associata ad f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico viene $(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$V_1 = \mathscr{L}(1, 1, 1, 1), \qquad V_{-1} = \mathscr{L}(1, -1, -1, 1)$$

3) Usando

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Si ha $g(A) = (a + d, b + c)$ e $g(f(A)) = (b + c, a + d)$, quindi W è dato dalle equazioni $a + d = b + c$, ha dimensione 3 e base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè $g(f^2(A)) = g(A)$, W è sottospazio invariante.

4) Abbiamo

$$H = \mathscr{L}\Big(\mathscr{L}(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1)\Big), \qquad W = \mathscr{L}\Big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\Big).$$

Si trova che $\dim(H \cap W) = 1$.

SOLUZIONI ESERCIZIO 3:

1) Rispetto alla base $v_1 := 2e_1$, $v_2 := e_2$, la conica ha equazione $\zeta^2 + 2\zeta - \eta = 0$, ossia $(\zeta + 1)^2 - (\eta + 1) = 0$. Operando una traslazione $\mathcal{O}' := \mathcal{O} + (1, 1)$, la conica assume forma $\zeta^2 - \eta = 0$ ed è quindi una parabola.

2) Per ottenere un'ellisse possiamo aggiungere $-y^2$, per ottenere un'iperbole possiamo aggiungere y^2.

3) $4x - y = 0$ è una retta, $4x^2 - y = 0$ è una parabola, $4x^2 + 4x = 0$ è una coppia di rette parallele all'asse delle ordinate.

SOLUZIONI ESERCIZIO 4:

F,F,V per la formula di Grassmann,V perchè dim(Im)+dim(Ker)=4,F.