Lezione 7 (06/10)

Limiti

Ricordo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall \text{ intorno } I(\ell) \ \exists \text{ intorno } I(x_0) \text{ t.c. } x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$$

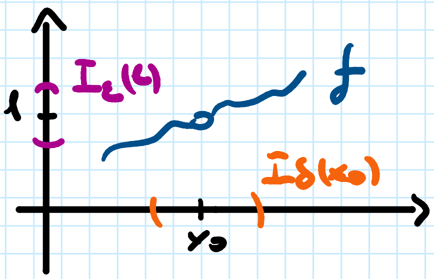
$(x_0, \ell \in \bar{\mathbb{R}})$

Ricordo anche che

$$\begin{cases} x_0 = +\infty \rightsquigarrow I(x_0) = (M, +\infty) & \text{con } M > 0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \rightsquigarrow I(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) & \text{con } r > 0 \\ x_0 = -\infty \rightsquigarrow I(x_0) = (-\infty, -M) & \text{con } M > 0 \end{cases}$$

Ora studiamo i vari casi a seconda che x_0 e ℓ siano finiti o infiniti

① $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$



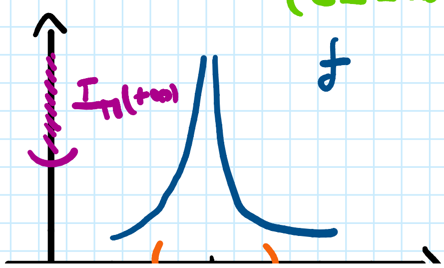
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$\underbrace{\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in I_\delta(x_0)}, x \neq x_0}_{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in I_\varepsilon(\ell)}$$

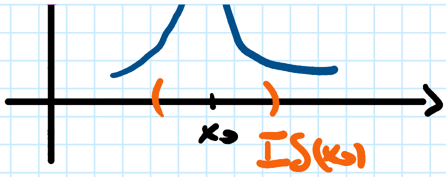
② $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ $(\ell = -\infty)$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $(f(x) < -M)$

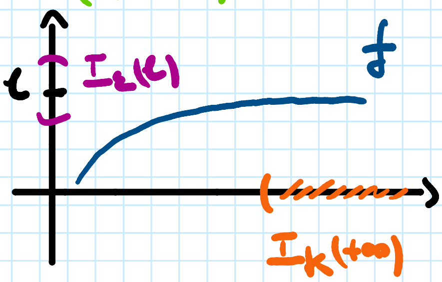


$\forall M>0 \ \exists \delta>0$ t.c.

$|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0 \Rightarrow \underbrace{f(x)>M}_{f(x)\in I_M(+\infty)}$ $\quad (f(x)<-M)$

La retta $x=x_0$ si dice asintoto verticale

3) $x_0=+\infty,\ \ell\in\mathbb{R}$ $\quad (x_0=-\infty)$



$$\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x)=\ell$$

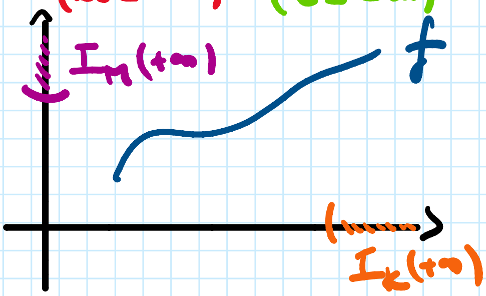
$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists K>0$ t.c.

$\underbrace{x>K}_{x\in I_K(+\infty)}$ $(x<-K)$ $\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

La retta $y=\ell$ si chiama asintoto orizzontale (a destra)

4) $x_0=+\infty,\ \ell=+\infty$ $\quad (x_0=-\infty)\ (\ell=-\infty)$



$$\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} f(x)=+\infty \ (-\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$\forall M>0 \ \exists K>0$ t.c.

$x>K \Rightarrow f(x)>M$

$(x<-K)$ $\quad (f(x)<-M)$

Concentriamoci ora sul caso $x_0\in\mathbb{R}$: possiamo essere più precisi dicendo se $x\to x_0$ "da sinistra" o "da destra"

- $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$

  $\Updownarrow$ def

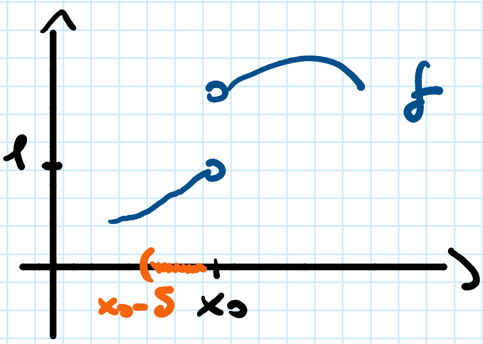
  $\forall$ intorno $I(\ell)$ $\exists\delta>0$ t.c.

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$

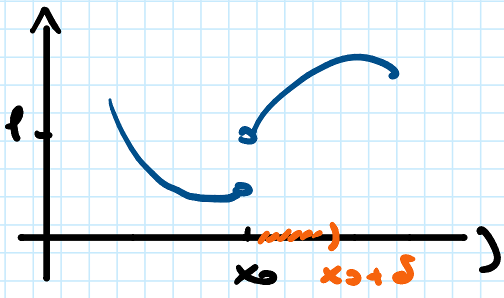
  $\Updownarrow$ def

  $\forall$ intorno $I(\ell)$ $\exists\delta>0$ t.c.

∀ intorno $I(l)$ ∃ $\delta>0$ t.c.
$x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)\in I(l)$



∀ intorno $I(l)$ ∃ $\delta>0$ t.c.
$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)\in I(l)$

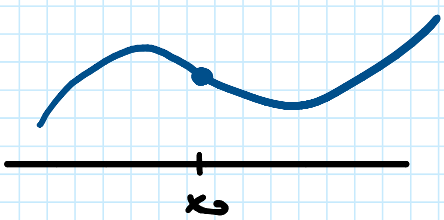


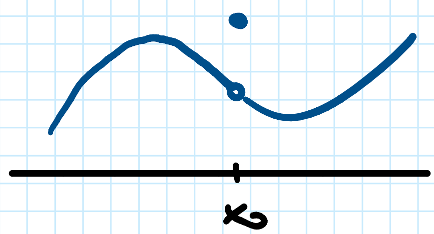
Ovviamente:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l_1,\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l_2$ e $l_1=l_2$

Continuità

Supponiamo che f sia definita in un intorno di $x_0\in\mathbb{R}$
(compreso stesso!)





$\lim_{x\to x_0} f(x)$ è lo stesso nei due casi
tuttavia la prima situazione è "più naturale"

Def Si dice che f è continua in x_0 se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Quindi:

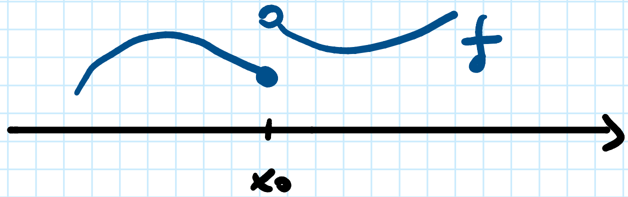
Quindi:

f è continua in x_0 $\iff$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c.
$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Si dice anche che

f è continua da sx (da dx) in x_0 $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)$

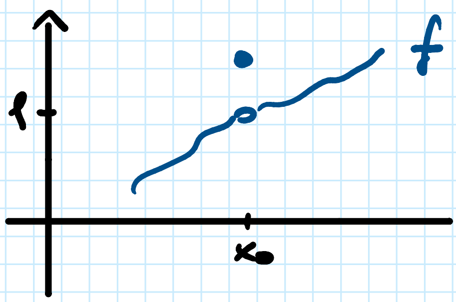
Es



f è continua da sinistra in x_0

"Classificazione" dei punti di discontinuità

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $l \neq f(x_0)$



Si dice che x_0 è una discontinuità eliminabile

$\Downarrow$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0

Oss Più interessante è il caso in cui f non è definita in x_0 ma $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Es $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è definita per $x \neq 0$

Tuttavia vedremo (nella Lez 8) che

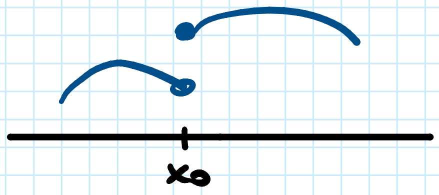
Tuttavia vedremo (nella lez 5) che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

In questi casi si dice che f si può prolungare per continuità in x_0 $(=0)$; cioè

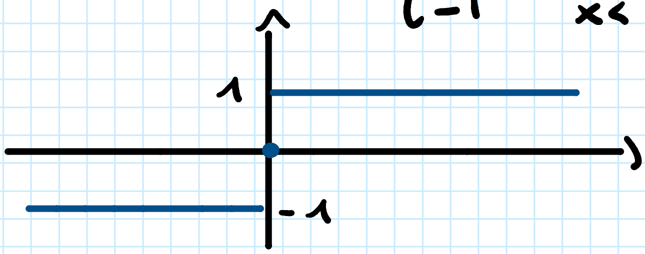
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ è continua in $x_0 = 0$

2) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, $l_1 \neq l_2$

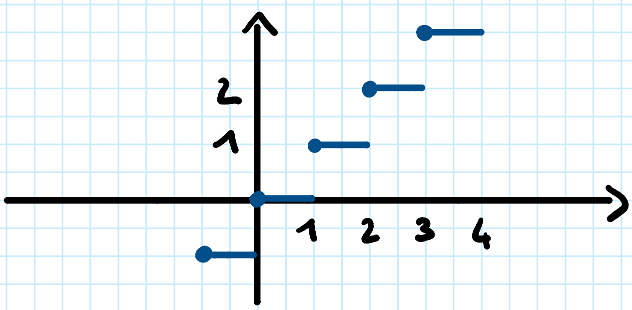


Si dice che f ha una discontinuità di salto in x_0 (o di prima specie)

es $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

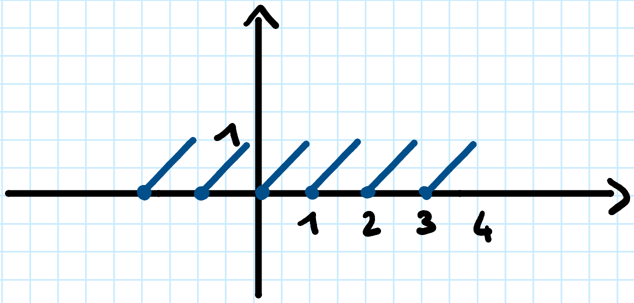


$f(x) = [x]$ parte intera



$f(x) = x - [x]$ mantissa

$f(x) = x - [x]$ mantissa



3) negli altri casi (cioè: almeno uno dei lim sx/dx è infinito o non esiste) si parla di discontinuità di seconda specie

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in I se è continua in ogni $x_0 \in I$ (se $I = [a,b]$ per continuità in a e b si intende continuità da dx e da sx)

L'insieme delle f.ni continue su I si indica con $C(I)$ (o anche $C^0(I)$)

"Pseudoteorema" Tutte le f.ni elementari sono continue sul loro dominio

polinomi, f.ni razionali, f.ni trigonometriche, logaritmiche, esponenziali

Inoltre

Prop Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una f.ne integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I

Prop Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ una f.ne integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I.
Preso $x_0 \in I$, la f.ne integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

è continua su I

dim Per semplicità, supponiamo anche che f sia limitata su I, cioè $\exists K > 0$ t.c. $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in I$
Fissiamo $\bar{x} \in I$ (arbitrario) e proviamo che F è continua in $\bar{x}$, cioè

$$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$$

cioè $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c.

$$|x - \bar{x}| < \delta \implies |F(x) - F(\bar{x})| < \varepsilon$$

Per la proprietà di additività rispetto al dominio

$$F(x) - F(\bar{x}) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt$$

$$= \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt$$

dunque, sempre per le proprietà dell'integrale

$$|F(x) - F(\bar{x})| = \left| \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{\bar{x}}^{x} |f(t)|\,dt \right|$$

$$\leq K \left| \int_{\bar{x}}^{x} dt \right| = K\,|x - \bar{x}|$$

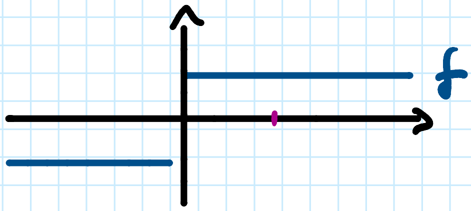
Dunque $\forall \varepsilon > 0$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$

$$|x-\bar{x}| < \frac{\varepsilon}{K} =: \delta \Rightarrow |F(x)-F(\bar{x})| \le K \underbrace{|x-\bar{x}|}_{<\delta = \frac{\varepsilon}{K}} < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

$\square$

es $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

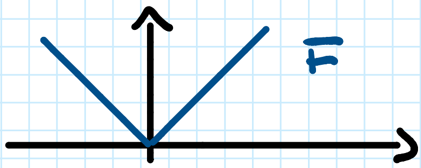


e $x_0 = 0$

Allora

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt = x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \int_0^x (-1)\,dt = -x & x<0 \end{cases}$$

cioè $F(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Nota: F è continua anche se f non lo è!

(la f.ne integrale è "più regolare" della f.ne integranda)