Lezione 4 (29/09)

Numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'ambiente naturale per l'Analisi 1

Non ne conosciamo la def rigorosa (!)

ma possiamo riflettere sulle sue proprietà:

- sono definite due operazioni "+" e "·" (che rendono $\mathbb{R}$ un campo)
- è definita una relazione d'ordine "$x \leq y$"

Tale relazione d'ordine è "compatibile" con le operazioni nel senso che

$$\forall x,y,z \qquad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$$
$$\forall x,y,\ \forall z \geq 0 \qquad x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

Si dice che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato

Anche $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato;

la proprietà che differenzia $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è la cosiddetta

Completezza di $\mathbb{R}$ (geometricamente "$\mathbb{R}$ riempie la retta mentre $\mathbb{Q}$ ha buchi")

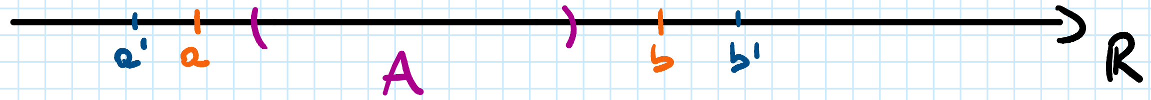
Vediamo ora una formulazione rigorosa di questo concetto

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che A è:

- superiormente limitato se $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c $x \leq b\ \forall x \in A$ (b si dice maggiorante di A)
- inferiormente limitato se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c

$x \le b \ \forall x \in A$ (b si dice maggiorante di A)

- inferiormente limitato se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $a \le x \ \forall x \in A$ (a si dice minorante di A)
- limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente, cioè se $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \le x \le b \ \forall x \in A$



Oss Maggiorante e minorante (se esistono) certamente non sono unici; anzi

a minorante di $A \Rightarrow a'$ minorante di $A \ \forall a' \le a$

b maggiorante di $A \Rightarrow b'$ maggiorante di $A \ \forall b' \ge b$

es gli intervalli $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$ sono sup lim

" " $(a, +\infty)$ e $[a, +\infty)$ sono inf lim

" " (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ sono lim

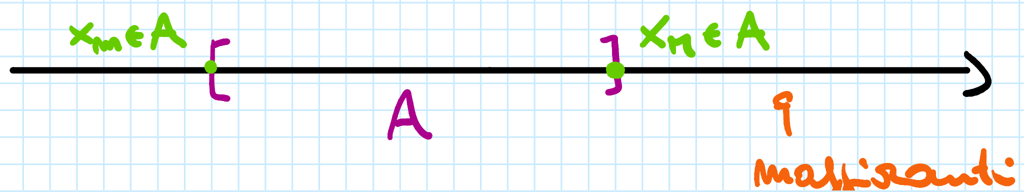
L'insieme $\mathbb{N}$ è inf lim

L'insieme $\tilde{A} = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ è limitato (infatti $0 < \frac{1}{n} \le 1 \ \forall n \ge 1$)

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sup (inf) limitato

Si dice che A ammette massimo (minimo) se $\exists x_M \in A$ t.c. $x \le x_M \ \forall x \in A$

($\exists x_m \in A$ t.c. $x_m \le x \ \forall x \in A$)



A

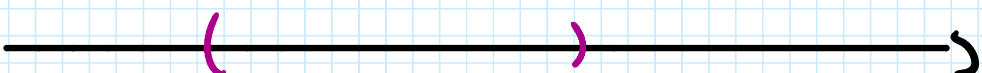
maggioranti

L'elemento x_M (x_m) (necessariamente unico)
si dice massimo di A (minimo)
e si pone $x_M = \max A$ ($x_m = \min A$)

infatti se x_M e x_M' sono entrambi massimi,
$x \le x_M$ e $x \le x_M'$ $\forall x \in A$
e quindi
$x_M' \le x_M$ e $x_M \le x_M'$
da cui $x_M = x_M'$

(es) L'intervallo $[a,b]$ ammette min (a) e max (b)
" $[a,b)$ " min (a) ma non max
" $(a,b]$ " max (b) ma non min
" (a,b) non ammette né min né max
L'insieme $\tilde{A}$ ammette massimo (1) ma non minimo

Anche quando $\nexists$ min/max sarebbe utile poter definire un minorante/maggiorante "ottimale"



$A=(a,b)$

a è il "minorante ottimale"
b è il "maggiorante ottimale"

Come definirli?

maggiorante ottimale (minorante) = il più piccolo (grande) dei maggioranti (minoranti)
= il minimo dell'insieme

(minorante) (grande) (minoranti)

= il minimo (massimo) dell'insieme dei maggioranti (minoranti)

Ma il min/max di un insieme non sempre esiste!

Tuttavia, vale il

Teorema di completezza di $\mathbb{R}$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è sup limitato (inf), il minimo (massimo) dell'insieme dei maggioranti (minoranti) esiste

Si può quindi dare la fondamentale

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sup limitato (inf)

Si dice estremo superiore (inferiore) di A, e si scrive $\sup A$ ($\inf A$), il più piccolo dei maggioranti di A (più grande dei minoranti)

Oss 1) "sup" e "inf" sono unici

2) Se A non è sup lim (inf), si pone $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$)

Es $\sup [a,b] = \max [a,b] = b = \sup [a,b)$

$\inf [a,b] = \min [a,b] = a = \inf (a,b]$

$\sup \tilde{A} = \max \tilde{A} = 1 \qquad \inf \tilde{A} = 0$

Esercizio Dimostrare che, se $A \subseteq \mathbb{R}$ è sup limitato

A ammette massimo $\iff \sup A \in A$

ed in tal caso $\max A = \sup A$

Dunque $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo

Dunque $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo

La proprietà di completezza in $\mathbb{Q}$ è invece falsa:

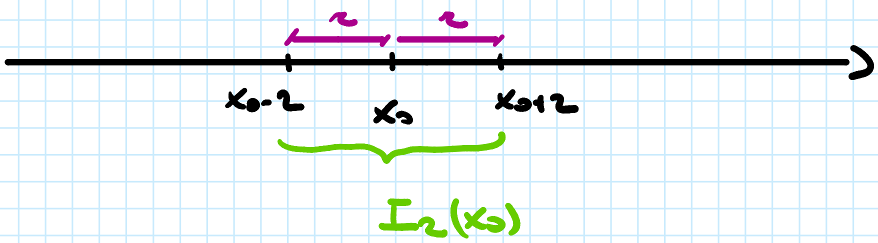
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \text{ e } x^2 < 2\} = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

"Dovrebbe essere" $\sup A = \sqrt{2}$, ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!

Fondamentale per l'Analisi è un'altra "struttura" di $\mathbb{R}$, che si basa sul concetto di intorno

Def Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice intorno di centro x_0 e raggio r l'intervallo

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$$



Notare che

$$x \in I_r(x_0) \iff x_0 - r < x < x_0 + r$$
$$\iff -r < x - x_0 < r$$
$$\iff \underbrace{|x - x_0|}_{\text{distanza di } x \text{ da } x_0} < r$$

È utile formalizzare anche un concetto di "vicinanza a $\pm\infty$"

Def Dato $M > 0$, si dice

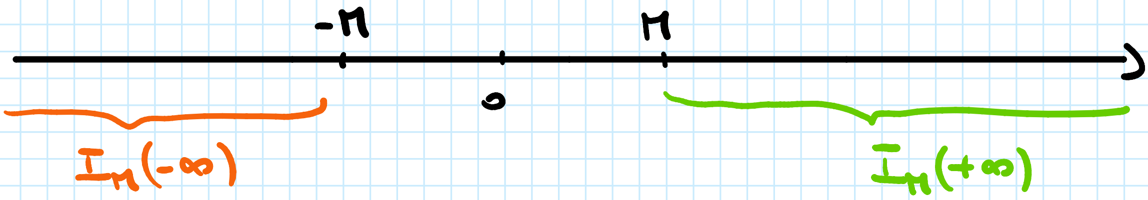
- intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M l'intervallo

- intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M l'intervallo

$$I_M(+\infty) = (M, +\infty)$$

- intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-M$ l'intervallo

$$I_M(-\infty) = (-\infty, -M)$$



Definiamo

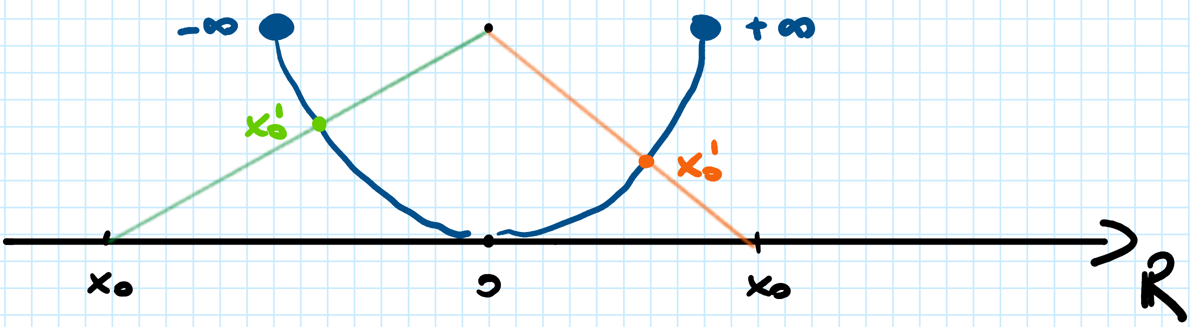
$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$$

"sistema esteso dei numeri reali"

Per ogni $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (cioè, $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = \pm\infty$) abbiamo definito una "famiglia di intorni"

(ciò conferisce a $\overline{\mathbb{R}}$ la struttura di "spazio topologico")

Un modello geometrico per $\overline{\mathbb{R}}$

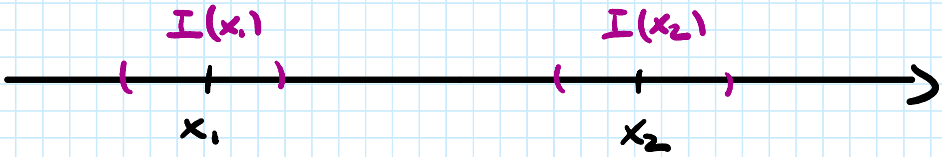


Concludiamo con due utili proprietà degli intorni:

1) per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $x_1 \neq x_2$ esistono $I(x_1)$ intorno di x_1 e $I(x_2)$ intorno di x_2 t.c.

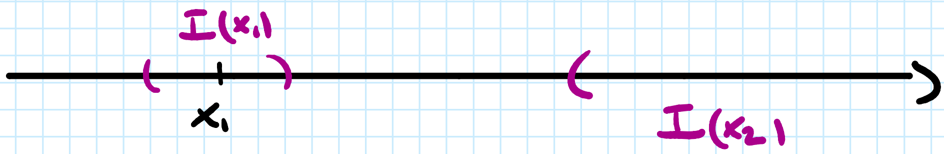
1) per ogni $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $x_1 \neq x_2$ esistono $I(x_1)$ intorno di x_1 e $I(x_2)$ intorno di x_2 t.c.
$I(x_1) \cap I(x_2) = \emptyset$

Caso I $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 \neq x_2)$



(basta prendere $\varepsilon < \frac{|x_2 - x_1|}{2}$)

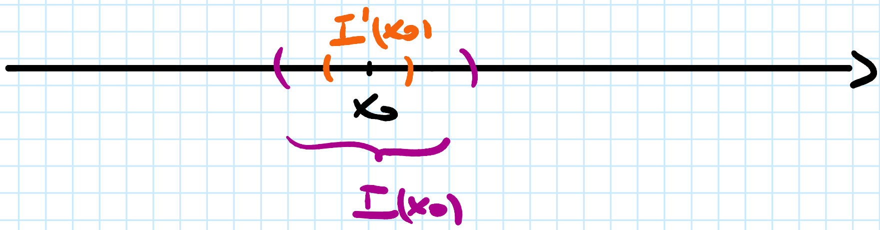
Caso II $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 = +\infty$ (o $-\infty$)



Caso III $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$
ovvio

2) per ogni $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se $I(x_0)$ e $I'(x_0)$ sono intorni di x_0, allora $I(x_0) \cap I'(x_0)$ è un intorno di x_0

Caso I $x_0 \in \mathbb{R}$



Quindi $I(x_0) \cap I'(x_0) = I'(x_0)$ è un intorno di x_0

Gli altri casi per esercizio