Lezione 5 (02/10)

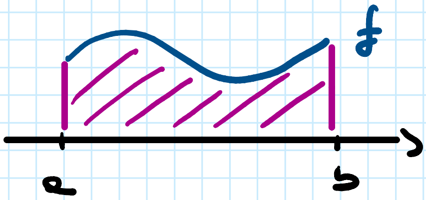
Integrale (secondo Riemann)

Obiettivo: data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definire (se possibile!) un numero reale, denotato

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o più semplicemente} \qquad \int_a^b f$$

(f funzione integranda)

che rappresenti, se $f \geq 0$, l'area della regione compresa tra il grafico e l'asse delle x



$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

La costruzione sarà fatta in 2 fasi:

① def di $\int_a^b f$ per una classe di f.ni "semplici" (f.ni a scala)

② def di $\int_a^b f$ per f.ni "generali" (per approssimazione)

Partiamo!

① **Def** Una f.ne $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice **funzione a scala** se esistono:

i) $n+1$ p.ti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ t.c.

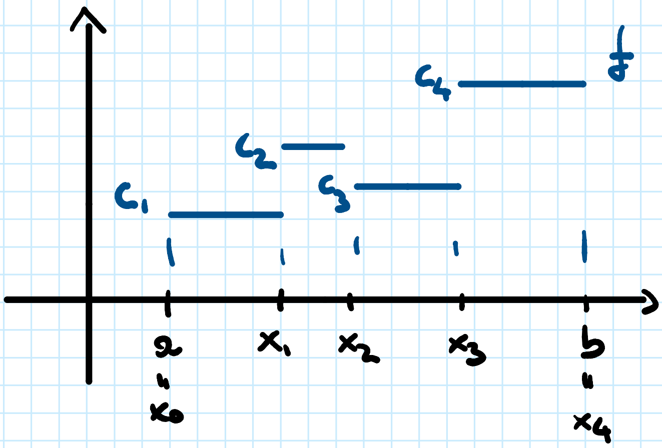
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ii) n costanti $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

per cui

per cui

$$f(x) = c_k \qquad \forall x \in (x_{k-1}, x_k) \qquad k = 1, \dots, m$$



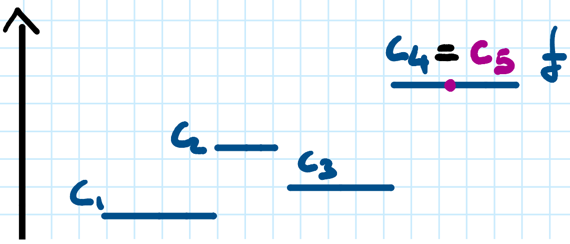
Nota: i valori $f(x_k)$ sono arbitrari

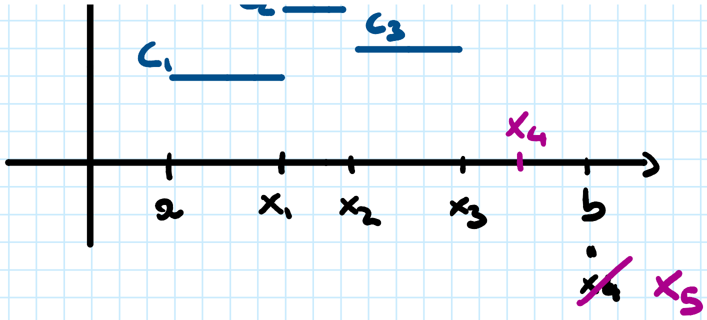
Un po' di terminologia

1) I p.ti $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ formano una <u>suddivisione</u> di $[a,b]$ (in m sottointervalli)

2) Se uno o più intervalli vengono ulteriormente suddivisi, si dice che la nuova suddivisione è <u>più fine</u> della precedente

3) Una f.ne a scala si dice <u>adattata</u> ad una suddivisione $\{x_0, \dots, x_m\}$ se f è costante in ogni sottointervallo (x_{k-1}, x_k). Ovviamente, se f è adattata a una suddivisione, lo è anche rispetto ad una suddivisione più fine





Indichiamo con $\mathcal{S}([a,b])$ l'insieme delle f.ni a scala.

<u>Def</u> Sia $f \in \mathcal{S}([a,b])$ e sia $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ una suddivisione adattata a f. Detto c_k il valore di f su (x_{k-1}, x_k) $(k=1,\dots,m)$ si dice <u>integrale di f su $[a,b]$</u> il numero

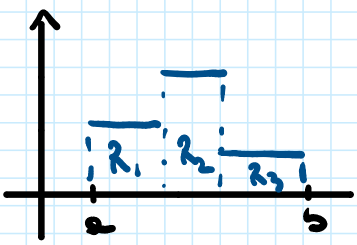
$$\sum_{k=1}^{m} c_k (x_k - x_{k-1})$$

che denoteremo con $\int_a^b f$

"<u>Oss tecnica</u>" la def data non dipende dalla suddivisione scelta (purché sia adattata ad f!)

<u>Interpretazioni</u>

• <u>Geometrica</u>

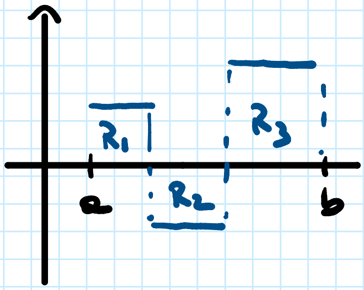


Se $f \geq 0$, $\int_a^b f$ è l'area del "plurirettangolo" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ cioè

$$\int_a^b f = \text{Area}(R_1) + \text{Area}(R_2) + \text{Area}(R_3)$$

Se f cambia segno, $\int_a^b f$ è un' "area con segno"

Se f cambia segno, $\int_a^b f$ è un' "area con segno"



$$\int_a^b f = Area(R_1) - Area(R_2) + Area(R_3)$$

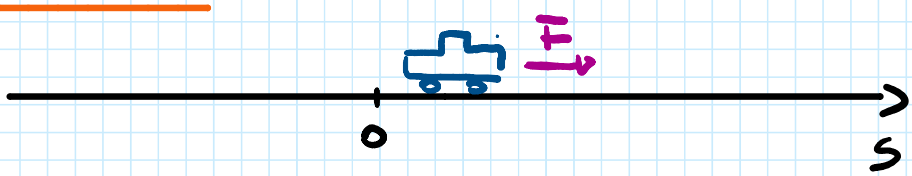
Ancora meglio: posso pensare che

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ è il valor medio di f su $[a,b]$

$\int_a^b f$: $\sum c_k (x_k - x_{k-1})$ somma pesata

$\frac{1}{b-a}$: normalizzazione $\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b 1 = 1 \right)$

- Meccanica



s = posizione di un oggetto lungo una retta

$f(x) \rightsquigarrow F(s)$ forza dipendente da s ed avente stessa direzione di F

$\int_a^b F(s)\,ds$ = lavoro compiuto dalla forza F durante lo spostamento da $s=a$ a $s=b$

($F(s) > 0$: lavoro motore; $F(s) < 0$: lavoro resistente)

② Passiamo al caso "generale"

Lemma 1 Siano $g, h \in S([a,b])$ t.c. $g(x) \le h(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Allora $\int_a^b g \le \int_a^b h$

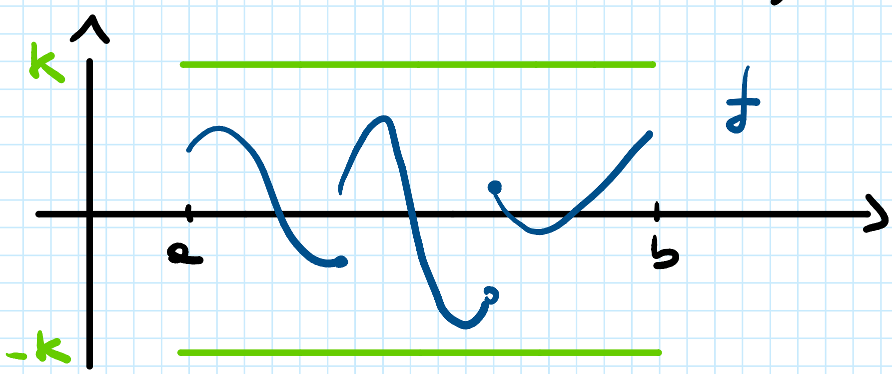
Allora $\int_a^b g \leq \int_a^b h$

dim

Sia $\{x_0, \dots, x_m\}$ adattata sia a g che ad h e siano c_k e d_k i valori di g e h su (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, \dots, m)$. Allora

$$\int_a^b g = \sum_{k=1}^m c_k (x_k - x_{k-1}) \underset{g \leq h}{\leq} \sum_{k=1}^m d_k (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b h \qquad \square$$

D'ora in avanti sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata (cioè, $f([a,b])$ è limitato, cioè esiste $K > 0$ t.c. $|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b]$)

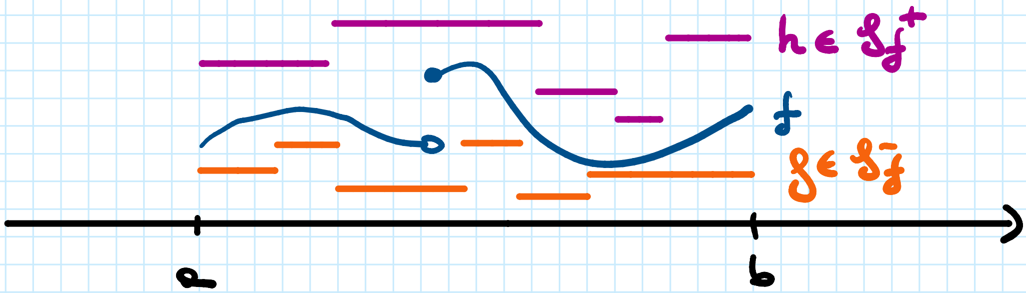


Definiamo

$$S_f^- = \{ g \in S([a,b]) \mid g(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \}$$

$$S_f^+ = \{ h \in S([a,b]) \mid f(x) \leq h(x) \ \forall x \in [a,b] \}$$

$$\mathcal{S}_f^+ = \{ h \in \mathcal{S}([a,b]) \mid f(x) \leq h(x) \ \forall x \in [a,b] \}$$



Nota: $\mathcal{S}_f^- \neq \emptyset$ e $\mathcal{S}_f^+ \neq \emptyset$ poiché f è limitata

Si pone:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \in \mathcal{S}_f^- \right\}$$ integrale inferiore

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$$ integrale superiore

Lemma 2 Risulta $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

dim Prendo $g \in \mathcal{S}_f^-$, $h \in \mathcal{S}_f^+$: si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in [a,b]$
In particolare $g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in [a,b]$ e quindi per il Lemma 1

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h$$

"Fisso g e muovo h"

$$\int_a^b g \leq \inf \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{S}_f^+ \right\} = \overline{\int_a^b} f$$

"Muovo g"

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{ \int_a^b g \mid g \in \mathcal{S}_f^- \right\} \leq \overline{\int_a^b} f \qquad \square$$

In generale non vale l'uguaglianza!

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

<u>f.ne di Dirichlet</u>

e prendiamo $[a,b]=[0,1]$

Se $g\in S_f^-$, allora $g(x)\le 0 \quad \forall x$

se $h\in S_f^+$, allora $h(x)\ge 1 \quad \forall x$

Quindi: $\underline{\int_0^1} f \le 0$ (in realtà $=0$)

$\overline{\int_0^1} f \ge 1$ (in realtà $=1$)

<u>Def</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>limitata</u>.
Si dice che f è <u>integrabile</u> (secondo Riemann) su $[a,b]$, e si scrive che $f\in\mathcal{R}([a,b])$, se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

In tal caso si pone

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

che si dice <u>integrale di f su $[a,b]$</u>

<u>Interpretazioni</u>: ovviamente, le interpretazioni come "area con segno", "valor medio" e "lavoro di una forza" restano valide

(ma se la f.ne integranda è "arbitraria")

(ma se la f.ne integranda è "arbitraria")

Proprietà dell'integrale

Siano f, g integrabili su $[a,b]$. Allora:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ $\quad$ (linearità)

2) Per ogni $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(additività rispetto al dominio)

3) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(monotonia)

In particolare: se $f \geq 0$ allora $\int_a^b f \geq 0$

4) $|f|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

(è una "disuguaglianza triangolare")

$$\left| \sum_{i=1}^{m} y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |y_i|$$

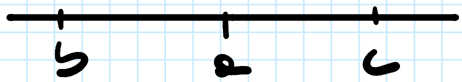
Osservazione in vari contesti (ad es domini..) è utile definire una nozione di "integrale orientato": cioè $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_a^b f & \text{se } a<b \\ 0 & \text{se } a=b \\ -\int_b^a f & \text{se } a>b \end{cases}$$

$$-\int_b^a f \qquad \text{se } a > b$$

Con questa convenzione, si può verificare che la prop. di additività rispetto al dominio vale nella forma

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \qquad \forall a, b, c$$

ad es se 

$$\underbrace{\int_b^a f}_{-\int_a^b f} + \int_a^c f = \underbrace{\int_b^c f}_{-\int_c^b f} \Rightarrow \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$