Lezione 11 (13/10)

Successioni

Informalmente, una successione è un "elenco infinito" di numeri reali:

$$\underset{n=1}{7},\ \underset{n=2}{-4/3},\ \underset{n=3}{\sqrt{2}},\ 1,\ -\pi,\ \dots$$

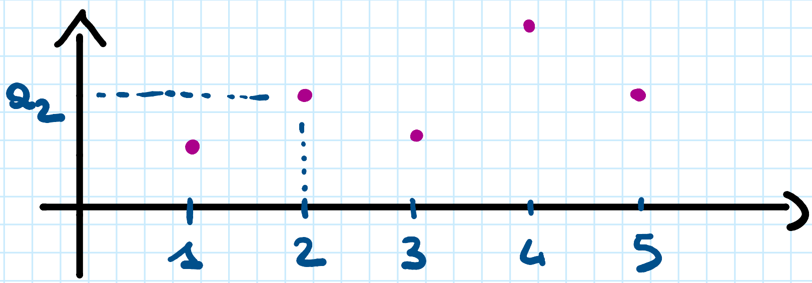
Formalmente

Def Si chiama successione una f.ne

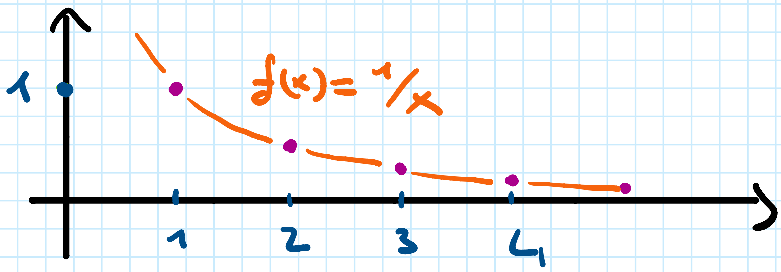
$$a : \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{oppure } \{n\in\mathbb{N} \mid n\geq n_0\}} \to \mathbb{R}$$

Anziché scrivere $a(n)$ si scrive a_n — termine n-esimo; n: indice

Per indicare la successione si scrive $\{a_n\}_{n\geq n_0}$



Es 1) $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad n\geq 1$



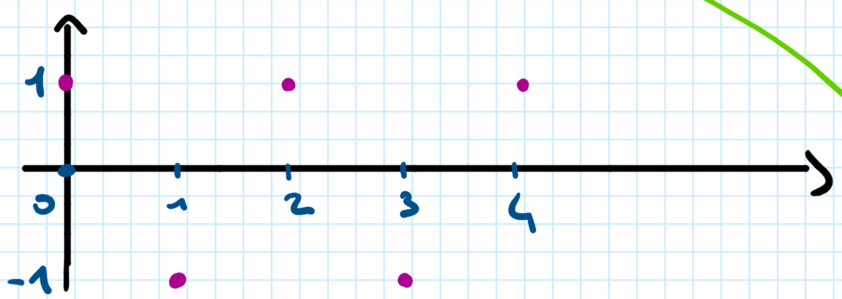
1 2 3 4

"Elencando" i termini:

$$1 \,,\; 1/2 \,,\; 1/3 \,,\; \dots$$

$n=1$, $n=2$

2) $a_n = (-1)^n \qquad n \geq 0$



"non provengono da f.ni"

"Elencando" i termini

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

3) $a_n = n!$

4) Successioni per ricorrenza

es $\quad a_0 = 1 \,,\; a_1 = 1 \,,\; a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

Si ha $\quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

Alcune def:

- $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M \;\; \forall n$
- $\{a_n\}$ si dice monotona crescente (decrescente) se

$$a_{n+1} \geq (\leq)\; a_n \qquad \forall n$$

Ora si vuole definire

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{limite di successione}$$

Def Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se

$\forall$ intorno $I(\ell)$ $\exists\, \overline{n} \geq n_0$ t.c. $n > \overline{n} \Rightarrow a_n \in I(\ell)$

Si dice che

- $\{a_n\}$ è convergente se $\exists \lim_{n} a_n = \ell \in \mathbb{R}$
- $\{a_n\}$ è divergente se $\exists \lim_{n} a_n = \ell \in \{-\infty, +\infty\}$
- $\{a_n\}$ è irregolare se $\nexists \lim_{n} a_n$

Es $a_n = \frac{1}{n}$ è convergente $(\ell = 0)$

$a_n = n!$ è divergente $(\ell = +\infty)$

(si dimostra che $e^n = o(n!)$ e $n! = o(n^n)$)

$a_n = (-1)^n$ è irregolare

Valgono (con piccole modifiche) i teoremi sui limiti già visti per le f.ni

Teorema 5.24 Valgono i seguenti risultati:

i) (**T. di unicità del limite**) Il limite di una successione, se esiste, è unico.

ii) (**T. di limitatezza**) Una successione convergente è limitata.

iii) (**T. di esistenza del limite delle successioni monotone**) Una successione definitivamente monotona, se è limitata allora è convergente; se non è limitata allora è divergente (a $+\infty$ se è crescente, a $-\infty$ se è decrescente).

iv) (**Primo T. del confronto**) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che esistano, finiti o infiniti, i limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$. Se definitivamente vale $a_n \leq b_n$, allora $\ell \leq m$.

v) (**Secondo T. del confronto**) Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim a_n = \lim c_n = \ell$. Se definitivamente vale $a_n \leq b_n \leq c_n$

"definitivamente" vuol dire "da un certo n in poi" (cioè, in un intorno definitivamente vale $a_n \le b_n$, allora $\ell \le m$.

v) (**Secondo T. del confronto**) Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n \le c_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

in poi"
(cioè, in un intorno di $+\infty$)

vi) (**Algebra dei limiti**) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ (ℓ, m finiti o infiniti). Si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \ell \pm m\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell m\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}, \quad \text{se definitivamente } b_n \neq 0\,,$$

ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita secondo la tabella di pag. 120.

$\boxed{\text{vii}}$ (**T. di sostituzione**) Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e sia g una funzione definita in un intorno di ℓ:

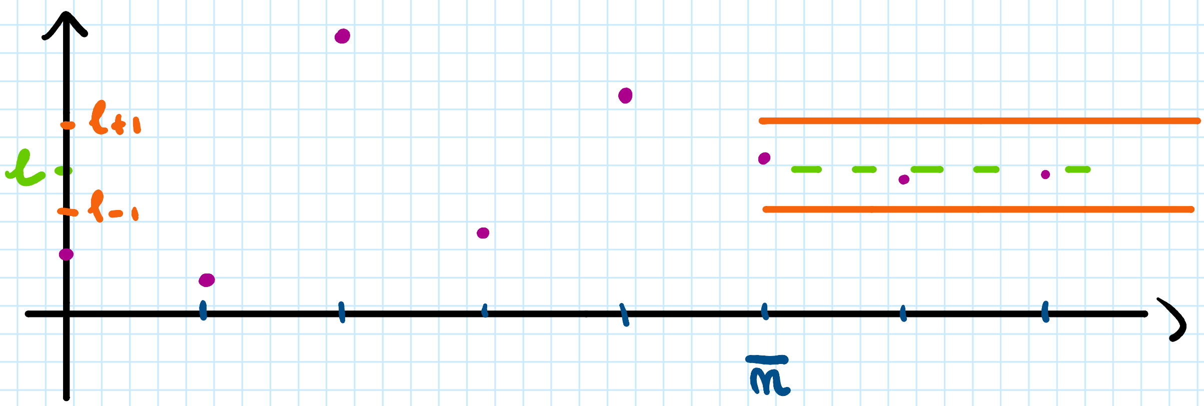
a) se $\ell \in \mathbb{R}$ e g è continua in ℓ, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\ell)$;

b) se $\ell \notin \mathbb{R}$ ed esiste il $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = m$.

Teorema di limitatezza

Se $\{a_n\}_{n \ge n_0}$ è convergente, allora è limitata

dim



Prendo $\varepsilon = 1$: per def di limite $\exists\, \bar{n} \ge n_0$ t.c.

$$n > \bar{n} \implies |a_n - \ell| < \varepsilon = 1$$

Quindi
$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - \ell + \ell| \\ &\le |a_n - \ell| + |\ell| \\ &< 1 + |\ell| \qquad \forall\, n > \bar{n} \end{aligned}$$

$\leq 1 + |l| \quad \forall n \geq \bar{n}$

Ponendo

$$M = \max\{|a_{n_0}|, |a_{n_0+1}|, \dots, |a_{\bar{n}}|, 1+|l|\}$$

si ha $|a_n| \leq M \quad \forall n \geq n_0$ $\square$

Oss 1) Non vale il viceversa, cioè

$$\{a_n\} \text{ limitata } \not\Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente}$$

(es: $a_n = (-1)^n$)

2) Per le f.ni il teorema è falso

$f(x) = 1/x$ su $(0, +\infty)$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ma f non è limitata su $(0, +\infty)$

Si può però dimostrare che:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists K > 0$ t.c.
f è limitata su $[K, +\infty)$

(teo limitatezza "locale")

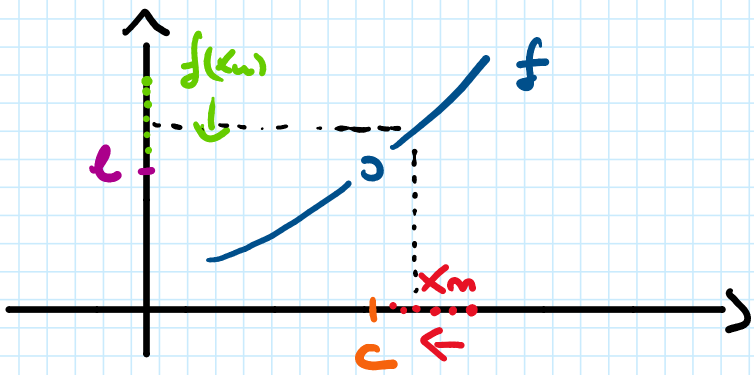
Il teo di sostituzione lo vediamo in una versione più precisa che chiamiamo

Teorema di selezione o "teorema ponte"

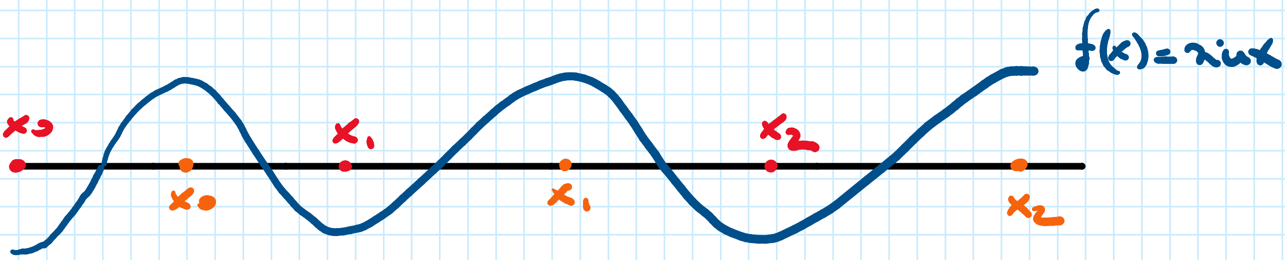
Teorema di relazione o "teorema ponte"

Sia f definita in un intorno di $c \in \overline{\mathbb{R}}$ tranne eventualmente c. Allora

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \begin{array}{l} \forall \text{ successione } \{x_n\} \text{ t.c.} \\ x_n \neq c \text{ e } \lim_n x_n = c \\ \text{risulta } \lim_n f(x_n) = l \end{array}$$



Applicazione $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$



$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \longrightarrow +\infty \qquad f(x_n) = 1$

$x'_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \longrightarrow +\infty \qquad f(x'_n) = -1$

Esercizio: $\nexists \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Corollario Sia f definita in un intorno di $c \in \mathbb{R}$.
Allora

$\forall \{x_n\}$ t.c. $\lim x_n = c$

f è continua in c $\iff$ $\forall \{x_n\}$ t.c. $\lim_n x_n = c$ risulta $\lim_n f(x_n) = f(c)$

Applicazione "finale": definizione di "e"

Si definisce

$$\boxed{e \overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

Proveremo che il limite esiste finito, in 2 passi:

1. $\exists \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = l \in \mathbb{R}$
2. $\exists \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = l$ (tramite teo relazione)

Per 1, faremo vedere che

1a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente

1b) a_n è (superiormente) limitata

Dunque:

1a) $$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$
$$= 1+1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$= 1+1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)} - \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}$$

$$\wedge \qquad\qquad \wedge \qquad\qquad\qquad \wedge$$

In modo simile

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \overbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \overbrace{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} \ldots \overbrace{\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{>0}$$

quindi $a_{n+1} > a_n \quad \forall n$

1b) $a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1} \cdot \ldots \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1}$

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

Ora $\quad k! = k\cdot(k-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad k \geq 2$

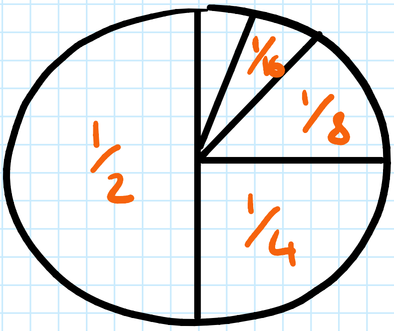
$$\geq 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 2^{k-1}$$

quindi

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$a_n < 2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}}_{\frac12 + \frac14 + \frac18 + \frac1{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1}$$



cioè $\quad a_n < 2+1 = 3 \quad \forall n$

Da 1a) e 1b) segue che

$$\exists \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ell \in (2,3]$$

- Ne segue che se $\{b_n\}$ è una successione t.c. $\lim_n b_n = +\infty$ e $\boxed{b_n \in \mathbb{N}}$ $\forall n$, allora

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \ell$$

Ora dimostriamo

2) In virtù del teo di relazione, troveremo che $\forall \{x_n\}$ t.c. $\lim_n x_n = +\infty$ risulta

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \ell$$

Possiamo assumere $x_n \geq 0$; denotando con $[x_n]$ la parte intera di x_n, si ha

$$[x_n] \leq x_n \leq [x_n]+1$$

e dunque

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}}_{\dfrac{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \to e}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right) \to 1}} \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}}_{\to e \text{ per il II teo confronto}} \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}}_{\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)}_{\to 1}}$$