GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 21/02/2022

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Sia $\mathcal{B} := \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormale positiva di V_3.
Posto $\mathbf{a} := \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} := \mathbf{i} + \mathbf{k}$, consideriamo l'applicazione

$$f : V_3 \to V_3, \quad \mathbf{v} \mapsto ((\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{i} + ((\mathbf{v} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{j} + (\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}))\, \mathbf{k}.$$

(i) **(2 pt).** Dimostrare che f è lineare.

(ii) **(2 pt).** Trovare la matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

(iii) **(3 pt).** Determinare basi ortonormali per $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

(iv) **(3 pt).** Determinare $f^{-1}((0,0,1))$, $f^{-1}(\mathcal{L}(0,0,1))$, $f^{-1}(\mathrm{Im} f)$.

(v) **(3 pt).** Trovare gli autovalori di f. Per ciascuno, determinare molteplicità algebrica e geometrica.

(vi) **(3 pt).** Determinare sottospazi Z_0, Z_1, Z_2 di V_3 tali che l'applicazione ristretta $f_{|Z_i} : Z_i \to V_3$ abbia rango i.

ESERCIZIO 2 (16 pt.)

Sia φ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ la cui forma quadratica Q associata ha equazione

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_4,$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

(i) **(5 pt)** Classificare Q, e determinare una base nella quale Q sia in forma canonica.

(ii) **(2 pt)** stabilire se $\ker\varphi$ coincide con il cono isotropo $\mathcal{I}_\varphi$. In caso contrario, determinare un vettore non nullo $\mathbf{x} \in \mathcal{I}_\varphi \setminus \ker\varphi$.

(iii) **(3 pt)** Trovare, se esiste, un valore $k \in \mathbb{R}$ tale che la forma quadratica $Q(\mathbf{x}) + kx_1^2$ sia semidefinita positiva.

(iv) **(3 pt)** Trovare un sottospazio W di dimensione 2 tale che

$$(W^{\perp_\varphi})^{\perp_\varphi} \neq W.$$

(v) **(3 pt)** Riconoscere la seguente conica nel piano (x, y):

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \ : \ Q(x,x,y,y) + 7\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 0\right\},$$

esplicitando un sistema di coordinate che metta $\mathcal{C}$ in forma canonica.