GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 30/01/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (17 pt.)

Supponiamo $\mathbb{R}^2$ e V_3 siano dotati dei loro prodotti scalari usuali. Siano $\mathcal{B}_{\mathrm{st}}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} := \{(1,2),(1,1)\}$ un'altra base e $\mathcal{C} := \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ una base ortonormale positiva per V_3. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to V_3$ tale che

$$f(1,2) := \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad f(1,1) := \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(i) **(2 pt).** Sia $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Determinare $f(x,y)$.

(ii) **(5 pt).** Sia $\mathbf{w} := \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \in V_3$. Determinare le due proiezioni di $\mathbf{w}$ rispetto alla scomposizione $V_3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

Poniamo

$$W_1 := \mathcal{L}(\mathbf{w}), \qquad W_2 := \{\mathbf{v} \in V_3 \ : \ \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}\},$$

dove $\times$ denota il prodotto vettoriale. Determinare i seguenti sottospazi:

$$f^{-1}(W_1^{\perp}), \quad f^{-1}(\mathrm{Im}(f) \cap W_1^{\perp}), \quad f^{-1}(W_2).$$

(iii) **(4 pt).** Sia $g : V_3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $g(\mathbf{v}) := (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{j})$, e sia $g \circ f$ l'applicazione composta.

Determinare la sua matrice $M^{\mathcal{B}_{\mathrm{st}},\mathcal{B}_{\mathrm{st}}}(g \circ f)$ e trovare, se esiste, un suo sottospazio (non banale) invariante.

(iv) **(4 pt).** Sia $f^t : V_3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare aggiunta, definita dalla condizione

$$f(x,y)\cdot\mathbf{v} = (x,y)\cdot f^t(\mathbf{v}) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \mathbf{v} \in V_3$$

Determinare le matrici $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\mathrm{st}}}(f^t)$, $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^t)$.

(v) **(2 pt).** Vero o falso: data qualunque applicazione lineare $h : V_1 \to V_2$ tra spazi Euclidei, l'applicazione composta $h^t \circ h : V_1 \to V_1$ è diagonalizzabile. Giustificare la vostra risposta.

ESERCIZIO 2 (16 pt.)

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio Euclideo, e $\mathscr{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ una sua base ortonormale. Consideriamo l'endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ che soddisfa

$$\begin{cases} f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3} \\ f(\mathbf{e_2}) - f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \\ f(\mathbf{e_3}) - f(\mathbf{e_2}) = f(\mathbf{e_2}) - f(\mathbf{e_1}). \end{cases}$$

(i) **(2pt)** Determinare la matrice che rappresenta f nella base $\mathscr{B}$.

(ii) **(2pt)** Si consideri la funzione

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{v} \cdot f(\mathbf{w}) + f(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\Big).$$

Provare che φ è una forma bilineare simmetrica, e che $M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) **(3pt)** Classificare φ, trovare la sua forma normale ed una base $\mathscr{B}'$ che mette φ in forma normale.

(iv) **(3pt)** Stabilire se esiste un sottospazio W di dimensione 2 tale che la restrizione $\varphi_{|W} : W \times W \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_{|W}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad \text{for each } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$$

abbia segnatura $(2, 0)$.

(v) **(3pt)** Sia $W \leq V$ un sottospazio non banale (cioè, $W \neq \{\mathbf{0}\}, W \neq V$). Trovare tutti i valori che può assumere

$$\dim \left(W^{\perp_\varphi}\right)^{\perp_\varphi}.$$

Per ciascuno di tali valori, esibire un esplicito sottospazio W che lo realizza.

(vi) **(3pt)** Nel piano con coordinate (x, y) rispetto ad un riferimento ortonormale fissato, si classifichi la conica

$$\mathscr{C} \ : \ \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 3y^2 + 6\sqrt{2}(x + y) - 6 = 0$$

dove $\mathbf{v} = x\mathbf{e_1} + x\mathbf{e_2} + y\mathbf{e_3}$.

SOLUZIONI ESERCIZIO 1:

1. E' chiaro che $f(0,1)=f(1,2)-f(1,1)=j+k$, $f(1,0)=f(1,1)-f(0,1)=i+j$. Ne consegue che $f(x,y)=x(i+j)+y(j+k)=xi+(x+y)j+yk$.

2. Il versore normale all'immagine di f e' costruibile tramite il prodotto vettoriale: si trova $N=\frac{1}{\sqrt{3}}(i-j+k)$. La proiezione di v in direzione N e' costruibile tramite il prodotto scalare: si trova $\frac{1}{3}(i-j+k)$. La proiezione sull'immagine e' costruibile per differenza: si trova $\frac{1}{3}(2i+4j+2k)$.

Si ha che $f^{-1}(W_1^{\perp})=\{(x,y):f(x,y)\cdot w=0\}=\{(2x+2y=0\}=\{(x,-x)\}$.

Si ha che $(x,y)\in f^{-1}(\mathrm{Im}(f)\cap W_1^{\perp})$ sse $f(x,y)\in(\mathrm{Im}(f)\cap W_1^{\perp})$ sse $f(x,y)\in W_1^{\perp}$. Coincide quindi con il sottospazio precedente.

Infine, l'antisimmetria del prodotto vettoriale implica che $W_2=\{v:v\times w=0\}=\{v:v=\lambda w\}=W_1$. Si trova $f^{-1}(W_2)=\{0\}$.

3. Si trova che $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\rm st}}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Considerato che la composizione corrisponde alla moltiplicazione di matrici, troviamo che $M^{\mathcal{B}_{\rm st},\mathcal{B}_{\rm st}}(g\circ f)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. La matrice indica che $(0,1)$ e' un autovettore, dunque lo spazio da esso generato e' $(g\circ f)$-invariante.

4. Nel primo caso le basi sono ortonormali, quindi troviamo $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\rm st}}(f^t)=(M^{\mathcal{B}_{\rm st},\mathcal{C}}(f))^t=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. Nel secondo caso le basi non sono ortonormali, quindi usiamo la matrice di cambio base:

$M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^t)=(M^{\mathcal{B}_{\rm st},\mathcal{B}})^{-1}M^{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\rm st}}(f^t)=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

4. Considerato che la composizione corrisponde alla moltiplicazione di matrici, troviamo che $M^{\mathcal{B}_{\rm st},\mathcal{B}_{\rm st}}(f^t\circ f)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. Questa matrice ha autovalori $1,3$. Un autovettore di autovalore 1 e' $(1,-1)$. Ne consegue che $\mathcal{L}(1,-1)$ e' un sottospazio invariante.

5. Scegliamo basi ortonormali. Allora $h^t\circ h$ ha matrice della forma M^tM: e' simmetrica, quindi sempre diagonalizzabile.

SOLUZIONI ESERCIZIO 2:

(i) e (ii)

$$A=M^{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}.\qquad B=M^{\mathscr{B}}(\varphi)=\frac{{}^tA+A}{2}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

(iii). Abbiamo che φ ha segnatura $(1,0)$, B ha autovalori $(3,0,0)$ ed una base che mette in forma normale è

$$\left\{\frac{(1,1,1)}{3},\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}},\frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}}\right\}.$$

(iv). Se tale W esistesse, per Grassmann avrei una intersezione non banale con $\ker\varphi$. Avrei quindi un vettore non nullo $\mathbf{v}\in W$ tale che $\varphi(\mathbf{v},\cdot)=0$, assurdo siccome sto richiedendo che $\varphi_{|W}$ sia non degenere.

(v). Il doppio ortogonale contiene sempre per lo meno il nucleo

$$N(B) = \mathscr{L}((0,1,-1),(-2,1,1)),$$

quindi il doppio ortogonale ha dimensione almeno 2. Inoltre, se $W = \mathscr{L}((1,1,1))$ allora $W^{\perp_\varphi} = N(B)$ e quindi il suo doppio ortogonale è tutto V. Se $W = \mathscr{L}(0,1,-1)$ allora $W^{\perp_\varphi} = V$ ed il doppio ortogonale ha dimensione 2.

(vi). La conica $\mathscr{C}$ ha equazioni

$$(2x+y)^2 + 3y^2 + 6\sqrt{2}(x+y) = 6,$$

cioè

$$(x,y)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6\sqrt{2}(1,1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6 = 0.$$

La matrice della parte di secondo grado ha autovalori 6 e 2. Il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione in

$$6(x')^2 + 2(y')^2 + 12x' - 6 = 0$$

La conica è quindi l'ellisse

$$\frac{(x'+1)^2}{2} + \frac{(y')^2}{6} = 1.$$