Analisi I - Prova Scritta (simulazione)

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Regole d'esame. La prova è composta di tre parti: Quiz, Esercizi e Domande. Per superare la prova è necessario soddisfare tutti i requisiti seguenti.

- Quiz con almeno 4 risposte corrette.
- Esercizi con un punteggio di almeno 8/15.
- Domande con un punteggio di almeno 8/15.
- Esercizi e Domande con un punteggio complessivo di almeno 18/30.

Il voto dell'esame corrisponde al punteggio complessivo degli Esercizi e delle Domande.

Formulari.

DERIVATE	
$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x\log a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI I ORDINE
$y'(x)+a(x)y(x)=g(x)$ $a, g : I \to \mathbb{R}$ continue
$y(x) = (K(x)+c)e^{-A(x)}$ A primitiva di a, K primitiva di ge^A, $c \in \mathbb{R}$

SVILUPPI PER $x \to 0$
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI II ORDINE
$y''(x)+ay'(x)+by(x)=g(x)$ $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ oppure $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$, p_n polinomio di grado n, $a, b \in \mathbb{R}$.
$y_p(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\sin(\theta x) + q_{2,n}(x)\cos(\theta x))$ $q_{1,n}$ e $q_{2,n}$ polinomi di grado $\leq n$ $m = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta > 0,\ \theta = 0 \text{ e } \mu \in \{\lambda_1, \lambda_2\} \\ 2 & \text{se } \Delta = 0,\ \theta = 0 \text{ e } \mu = \lambda \\ 1 & \text{se } \Delta < 0,\ \theta = \omega \text{ e } \mu = \sigma\ (\lambda = \sigma \pm i\omega) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Quiz 1. La parte reale del numero complesso

$$z = \frac{i+5}{2i-3}$$

è

☐ $-\frac{5}{3}$

☐ -1

☐ 1

☐ $\frac{17}{5}$

Quiz 2. Il dominio della funzione

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

è

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\{x > 0\}$

☐ $\{x \neq 0\}$

☐ $\{x \neq 3\}$

Quiz 3. L'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$$

vale

☐ 0

☐ 1

☐ $\log(2)$

☐ $\log(1+\pi)$

Quiz 4. L'equazione differenziale

$$y'(x) = 2y(x) + 2$$

☐ non ha soluzioni

☐ ha come unica soluzione $y(x) \equiv -1$

☐ ha due sole soluzioni

☐ ha infinite soluzioni

Quiz 5. La definizione del limite $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ è

☐ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ e $0 < |x-1| < \delta$ si ha $|f(x) - 1| \leq \epsilon$

☐ $\exists \delta > 0\ \forall \epsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ e $0 < |x+1| < \delta$ si ha $|f(x) + 1| \leq \epsilon$

☐ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ e $|x-1| < \delta$ si ha $|f(x) - 1| \leq \epsilon$

☐ $\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ e $0 < |x-1| < \delta$ si ha $|f(x) - 1| \leq \epsilon$

Quiz 6. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente. Allora

☐ f ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$

☐ f ha un unico zero in $\mathbb{R}$

☐ f non ha zeri in $\mathbb{R}$

☐ f ha al massimo uno zero in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1 (*6 punti*). Stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+\sin^4(2x))}{3x(1+\sqrt{x})}\,dx.$$

Esercizio 2 (*9 punti*). Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = -\frac{|1 - e^x|}{1 + |x|},$$

rispondendo ai seguenti punti.

(2a) Dominio, simmetrie e periodicità.

(2b) Limiti agli estremi del dominio.

(2c) Segno e zeri.

(2d) Derivata e intervalli di monotonia.

(2e) Massimi, minimi e punti di non derivabilità.

(2f) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Domanda 1 (*6 punti*). Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione di variabile reale.

(3a) Scrivere la definizione di punto di massimo locale $x_0 \in [a, b]$ di f.

(3b) Dimostrare che, se $x_0 \in (a, b)$ è punto di massimo locale e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

(3c) Scrivere un esempio esplicito di funzione derivabile in $[a, b]$ tale che $x_0 = a$ è punto di massimo locale per f e $f'(a) \neq 0$.

Domanda 2 (*9 punti*). Rispondere alle seguenti domande.

(4a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(4b) Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(4c) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Dimostrare che $x = 0$ è un punto di flesso (a tangente obliqua) per F.