Corso di Laurea in Fisica

Tutorato di Analisi 1

Equazioni differenziali

Esercizio 1
Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

1.a) $y' = \dfrac{y}{2x}$ $\quad [y^2 = Cx]$;

1.b) $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$ $\quad [x^3 - y^3 = C]$;

1.c) $y' = \dfrac{x^2}{y^3}$ $\quad \left[\dfrac{y^4}{4} = \dfrac{x^3}{3} + C\right]$;

1.d) $y' = xy$ $\quad \left[y = Ce^{\frac{x^2}{2}}\right]$;

1.e) $y' = 1 - y^2$ $\quad \left[y = 1, y = \dfrac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}\right]$;

1.f) $y' = 2 + e^y$ $\quad \left[y = -\log\left(Ce^{-2x} - \dfrac{1}{2}\right)\right]$;

1.g) $y' = \sin x \cos^2 y$ $\quad \left[y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, y = \operatorname{arctg}(C - \cos x) + n\pi\right]$.

Esercizio 2
Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

2.a) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2$ $\quad [y = x^3 + Cx^2]$;

2.b) $y' + 2y = 3$ $\quad \left[y = \dfrac{3}{2} + Ce^{-2x}\right]$;

2.c) $y' + y = x$ $\quad [y = x - 1 + Ce^{-x}]$;

2.d) $y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x}$ $\quad \left[y = e^{-\sin x}(x^2 + C)\right]$.

Esercizio 3.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

3a) $y'' + 7y' + 10y = 0$ $\quad [y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-2x}]$;

3b) $y'' + 2y' = 0$ $\quad [y = C_1 + C_2 e^{-2x}]$;

3c) $y'' + 8y' + 16y = 0$ $\quad [(C_1 + C_2 x)e^{-4x}]$;

3d) $y'' - 6y' + 10y = 0$ $\quad [e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$;

3e) $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\quad [e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))]$;

3f) $y'' + 2y' + 3y = 0$ $\quad \left[e^{-x}(C_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{2}x\right))\right]$;

3g) $y'' + 2y' + 5y = x^2$

$$\left[-\frac{2}{125} - \frac{4x}{25} + \frac{x^2}{5} + C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x)\right];$$

3h) $y'' - 14y' + 49y = 5e^{2x}$ $\quad \left[y = e^{7x}(C_1 x + C_2) + \frac{e^{2x}}{5}\right]$;

3i) $y''+2y'+5y = \cos 3x$ $\quad \left[e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{\cos 3x}{13} + \frac{3 \sin 3x}{26}\right]$. $\blacksquare$

Esercizio 4.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali (l'integrale generale può all'occorrenza essere lasciato in forma implicita)

4a) $u' + u \sin t = (1 + \cos t)\sin t$ $\quad [u = Ce^{\cos t} + 2 + \cos t]$;

4b) $xy' + y^2 = 3y - 2$ $\quad \left[y = 2,\ y = \frac{2C|x| - 1}{C|x| - 1}\right]$;

4c) $u' - e^t u = e^{2t}$ $\quad \left[u = Ce^{e^t} - (1 + e^t)\right]$;

4d) $yy' + (y+2)\sin^2 x = 0$

$$\left[y = -2,\ y - 2\log|y+2| = \frac{\sin x \cos x - x}{2} + C\right];$$

4e) $u' - \dfrac{u}{1 + \cos t + \sin t} = 1$

$$\left[u = \left(1 + \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)\left(C + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{\left(1 + \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)^2}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}\right)\right];$$

4f) $yy' = e^{x-y}\sin x$ $\quad \left[(y-1)e^y = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C\right]$;

4g) $u' - u\dfrac{\cos t}{1 + \sin t} = \sin t$ $\quad \left[u = (1 + \sin t)\left\{C + t - \mathrm{tg}t + \frac{1}{\cos t}\right\}\right]$;

4h) $\dfrac{xy'}{y} = 1 - x^4$ $\left[y = Cxe^{-\frac{x^4}{4}}\right]$;

4i) $u' + \dfrac{2}{t}u = e^t + 1$ $\left[u = \dfrac{1}{t^2}\left(C + \dfrac{t^3}{3} + (t^2 - 2t + 2)e^t\right)\right]$;

4l) $y' = \sqrt[3]{y(x+2)}$ $\left[y = 0, \sqrt[3]{y^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4} + C\right]$;

4m) $u' - \dfrac{u}{1+e^x} = e^{-x}$ $\left[u = \dfrac{1}{e^x + 1}\left(Ce^x - 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}\right)\right]$;

4n) $(2 - e^x)y' + e^{x+2y} = 0$ $\left[y = -\dfrac{1}{2}\log\left(C - 2\log|2 - e^x|\right)\right]$;

4o) $v' + \dfrac{v}{1-e^t} = \dfrac{1}{1+e^t}$, $\left[v = (e^{-t} - 1)\left\{C + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+e^t}{|1-e^t|}\right\}\right]$;

4p) $x \sin x \sin y - (1 - \cos y)y' = 0$

$[y = k\pi,\ \log(1 + \cos y) = x\cos x - \sin x + C]$;

4q) $u' - \dfrac{2u}{1 - 3e^t} = t$

$\left[u = \left(\dfrac{e^t}{1-3e^t}\right)^2\left(C + \dfrac{9}{2}t^2 + 6(t+1)e^{-t} - \dfrac{2t+1}{4}e^{-2t}\right)\right]$;

4r) $u' - \dfrac{u}{1+e^x} = \sin x$ $\left[u = \dfrac{1}{1+e^{-x}}\left\{C - \cos x - \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^{-x}\right\}\right]$;

4s) $y' = y^2\log(x+3)$ $\left[y = 0,\ y = \dfrac{1}{x + C - (x+3)\log(x+3)}\right]$;

4t) $v' - \dfrac{2v}{1+2e^{-s}} = 1$ $\left[v = \dfrac{(e^s+2)^2}{4}\left(C + s - \log(e^s + 2) + \dfrac{2}{e^s+2}\right)\right]$;

4u) $y'(y-3)(x+1) = (y-2)^2(x+2)$

$\left[y = 2,\ \log|y-2| + \dfrac{1}{y-2} = x + \log|x+1| + C\right]$.

Esercizio 5.
Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

5a) Equazione differenziale (4u) con c.i. $y(1) = 0$ $\left[C = -\frac{3}{2}\right]$;

5b) Equazione differenziale (4s) con c.i. $y(-2) = 1$ $[C = 3]$;

5c) Equazione differenziale (3a) con c.i. $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$;
$[C_1 = -4, C_2 = 7]$;

5d) Equazione differenziale (4a) con c.i. $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[C = -1]$;

5e) Equazione differenziale (4l) con c.i. $y(6) = 8$ $[C = -4]$;

5f) Equazione differenziale (3g) con c.i. $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{125}$
$\left[C_1 = \frac{2}{125}, C_2 = \frac{1}{10}\right]$.