GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 31/01/2022

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (17 pt.)

In $\mathbb{R}^{2,2}$ con il prodotto scalare $X \cdot Y = \operatorname{tr}({}^tXY)$ si consideri l'endomorfismo f

$$f(X) = XA - {}^tAX, \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathscr{B}$ la base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) **(2 pt).** Provare che

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) **(4 pt).** Determinare $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ e $\ker f^{\perp}$, e stabilire se la somma $\ker f + \mathrm{Im} f$ è diretta.

(iii) **(4 pt).** Si consideri il sottospazio

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \ :\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determinare la dimensione ed una base per i seguenti sottospazi:

$$f(W), \quad f^{-1}(W), \quad f(W) \cap f^{-1}(W), \quad f(W) + f^{-1}(W).$$

(iv) **(5 pt).** Verificare che il sottospazio

$$Z := \mathscr{L}\Big(E_1 + E_4,\ E_2 - E_3,\ E_2 + E_3\Big)$$

è invariante per f, e determinare se la restrizione $f : Z \to Z$ è diagonalizzabile e/o simmetrico.

(v) **(2 pt).** Determinare se $\ker f \leq \ker(f \circ f)$ e se questi due sottospazi coincidono. Si noti: $\circ$ significa composizione.

ESERCIZIO 2 (16 pt.)

Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Siano ϕ la forma bilineare e Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ associate ad M. Scriviamo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

(i) **(3 pt)** Classificare le seguenti coniche:

$$Q(\mathbf{x}) = 1, \quad Q(\mathbf{x}) = 0, \quad Q(\mathbf{x}) = -1.$$

(ii) **(3 pt)** Dire qual e' il massimo numero possibile di vettori $\mathbf{x}$ linearmente indipendenti tali che $Q(\mathbf{x}) > 0$. Ripetere per $Q(\mathbf{x}) = 0$ e per $Q(\mathbf{x}) < 0$.

(iii) **(2 pt)** Trovare (se possibile) un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ che sia ϕ-ortogonale a se stesso ed un vettore $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ che sia ϕ-ortogonale ad ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ e tali che $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ siano linearmente indipendenti.

(iv) **(3 pt)** Trovare (se possibile) 3 parametri $k \in \mathbb{R}$ tale che $M + k\,\mathrm{Id}$ abbia rispettivamente segnatura (2,0), (1,1), (0,2).

(v) **(3 pt)** Sia W il sottospazio generato dal vettore $(1, 2)$. Trovare $W^{\perp}$ e $(W^{\perp})^{\perp}$. Trovare un sottospazio W' tale che $(W')^{\perp} \neq W^{\perp}$.
Si noti: $\perp$ significa ϕ-ortogonale.

(vi) **(2 pt)** Classificare la seguente conica:

$$Q(\mathbf{x}) + 2x_1 + x_2 = -1.$$