GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 14/06/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (7 pt.)

Nello spazio vettoriale V_3, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1),$$

$$\mathbf{v} = (1, 0, 2),$$

$$\mathbf{w} = (-t, t, t+2), \quad t \in \mathbb{R}$$

(i) **(2 pt.)** Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono complanari?
Per quali valori di t si ha che $\mathbf{w}$ e' ortogonale al piano generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$?

(ii) **(2 pt.)** Fissato $t = -1$, calcolare le componenti del vettore $\mathbf{z}$ che e' ortogonale a $\mathbf{u}$, ortogonale a $\mathbf{v}$, $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{w}\|$ e che forma con $\mathbf{j}$ un angolo ottuso.

(iii) **(3 pt.)** Costruire una base ortonormale positiva contenente i vettori $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|, \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$. E' possibile trovarne piu' d'una?
E' possibile trovare una base ortonormale non positiva contenente quegli stessi vettori?

ESERCIZIO 2 (10 pt.)

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 + x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) **(1 pt.)** Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.

(ii) **(2 pt.)** L'applicazione f e' iniettiva ? L'applicazione f e' suriettiva ?

(iii) **(3 pt.)** Determinare $f^{-1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})), f^{-1}(\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2,2}))$ e $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ e' il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{2,2}$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2,2})$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbb{R}^{2,2}$ ed

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iv) **(4 pt.)** Supponiamo che Z_1, Z_2 siano sottospazi di $\mathbb{R}^{2,2}$ in somma diretta. E' vero che $f^{-1}(Z_1)$, $f^{-1}(Z_2)$ sono in somma diretta dentro $\mathbb{R}^3$?

Supponiamo che $Z_1 \oplus Z_2 = \mathbb{R}^{2,2}$. E' vero che $f^{-1}(Z_1) \oplus f^{-1}(Z_2) = \mathbb{R}^3$?

ESERCIZIO 3 (16 pt.)

Nello spazio $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al più due a coefficienti reali, consideriamo le seguenti applicazioni lineari:

$$T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}, \qquad T\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\big) = a_0 + a_1 + a_2,$$

$$F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \qquad F\big(p(x)\big) = 2p(x) - xp'(x),$$

dove $p'(x)$ e' la derivata di $p(x)$.

(i) **(1 pt.)** Verificare che $F\big(p(x)\big)$ e' un polinomio di grado 1.

(ii) **(4 pt.)** Consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(p,q) = \frac{1}{2}\Big(T(p' \cdot q') + T(F(p) \cdot F(q))\Big),$$

dove $\cdot$ e' l'usuale prodotto di polinomi (*non* un prodotto scalare!).

Provare che φ e' una forma bilineare e che la matrice rappresentativa nella base $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$ e'

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) **(3 pt.)** Classificare φ, e stabilire se φ e' un prodotto scalare.

(iv) **(2 pt.)** Determinare il cono isotropo di φ, e stabilire se coincide con $\ker \varphi$.

(v) **(3 pt.)** Trovare la forma normale di φ, ed una base che metta φ in forma normale.

(vi) **(3 pt.)** Denotiamo con A la matrice rappresentativa di φ nella base $\mathscr{B}$. Nel piano S_2 con coordinate (x, y) rispetto ad un riferimento ortonormale fissato, si classifichi la conica

$$\mathscr{C} = \left\{ (x,y) \ : \ (1, x, -y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \end{pmatrix} = \frac{31}{9} - x^2 \right\}$$

SOLUZIONI ESERCIZIO 1:

1) La matrice formata dalle componenti dei 3 vettori ha determinante 0 quando $t = -4/7$: questa e' la condizione di complanarita'. Non si ha mai l'ortogonalita'.

2) Poniamo $\mathbf{z} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Troviamo che $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ha coordinate $(4, -1, -2)$, dunque lunghezza $\sqrt{21}$. Il vettore $\mathbf{w}$ ha coordinate $(1, -1, 1)$, dunque lunghezza $\sqrt{3}$. Ne consegue che $\lambda = \pm(1/\sqrt{7})$. Infine, vogliamo che $\mathbf{z} \cdot \mathbf{j} < 0$: possiamo dunque scegliere il segno $+$.

3) La base $\mathcal{B} := \{\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|, \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|, \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\| \times \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|\}$ e' ortonormale positiva per definizione. Ne otteniamo altre permutando ciclicamente i tre vettori. Otteniamo una base non positiva cambiando di segno uno dei tre vettori, oppure scambiandone due adiacenti.

SOLUZIONI ESERCIZIO 2:

1) La matrice associata a f rispetto alle basi canoniche e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2) f e' iniettiva, ma non suriettiva.

3) $f^{-1}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})) = \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2,2})) = f^{-1}(\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2,2}) \cap Im(f)) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = Ker(f)$ e $f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(0, 0, 1)$.

4) Per controllare che le retroimmagini siano in somma diretta, bisogna controllare che abbiano intersezione 0. Questo e' vero quando f e' iniettiva.

Tipicamente, invece, le retroimmagini di una scomposizione del codominio non danno una scomposizione del dominio.

SOLUZIONI ESERCIZIO 3:

1) $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x + 2a_0$

2)

$$\begin{aligned} \varphi(p, q) &= \frac{1}{2}\Big(T\big((2a_2x + a_1)(2b_2x + b_1)\big) + T\big((a_1x + 2a_0)(b_1x + 2b_0)\big)\Big) \\ &= 2a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_1 + a_0b_1 + a_1b_0 + 2a_0b_0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Autovalori $0, 2, 3$. Semidefinita positiva, non é un prodotto scalare.

4) Cono isotropo é $\mathscr{L}(1 - 2x + x^2)$, e coincide con $\ker \varphi$.

5) Forma normale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base

$$\left\{ \frac{1}{2}(1-x^2), \frac{1}{3}(1+x+x^2), 1-2x+x^2 \right\}.$$

6) La conica ha equazione $2x^2+2y^2-2xy+2x=13/9$. Si tratta di un ellisse. La trasformazione $X = PX'$ data da

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la trasforma in $(x')^2+3(y')^2+\sqrt{2}(x'+y') = 13/9$, da cui

$$\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2 = 2$$

i semiassi sono $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2/3}$. I fuochi sono quindi sulla bisettrice $x = y$.