Relazione di laboratorio - Esperienza di Poisson

Misurazioni del rate di una sorgente radioattiva

Matteo Herz

Matricola 1098162

 $3~{\rm Marzo}~2024$

Università degli studi di Torino Dipartimento di Fisica

Indice

1	Sco	po dell	l'esperienza	2
2	Арр	oarato	Sperimentale	2
3	\mathbf{Acq}	uisizio	ne Dati	2
4	Dist	ribuzi	one sperimentale: Radiazione di fondo	3
	4.1	Tempo	porta 1s	3
		4.1.1	Valori ottenuti	3
		4.1.2	Grafico sulla distribuzione dei conteggi	3
		4.1.3	Rate del fondo	3
	4.2	Tempo	porta 3s	4
		4.2.1	Valori ottenuti	4
		4.2.2	Grafico sulla distribuzione dei conteggi	4
		4.2.3	Rate fondo	4
5	Dist	tribuzi	one sperimentale: $fondo + sorgente$	5
	5.1	Tempo	porta 1s	5
		5.1.1	Valori ottenuti	5
		5.1.2	Grafico sulla distribuzione dei conteggi	5
		5.1.3	Rate fondo $+$ sorgente	5
		5.1.4	Rate sorgente	6
		5.1.5	Confronto Media e Varianza	6
		5.1.6	Test del χ^2 - distribuzione di Poisson	6
		5.1.7	Test del χ^2 - distribuzione di Gauss	7
	5.2	Tempo	porta 3 s	9
		5.2.1	Valori ottenuti	9
		5.2.2	Grafico sulla distribuzione dei conteggi	9
		5.2.3	Rate fondo + sorgente	9
		5.2.4	Rate sorgente	9
		5.2.5	Confronto Media e Varianza	10
		5.2.6	Test del χ^2 - distribuzione di Poisson	10
		5.2.7	Test del χ^2 - distribuzione di Gauss	11
	5.3		i Gauss - Rate sorgente	12
		5.3.1	Ipotesi del Test	13
		5.3.2	Valori ottenuti	13
		5.3.3	Conclusione del Test	13
		0.0.0		10
6	Con	clusio	lphai	13

1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza di laboratorio è quello di misurare il *rate* di una sorgente radioattiva, ovvero il numero di conteggi al secondo registrati da un contatore Geiger, per tempi porta di 1 e 3 secondi, quando quest'ultimo è posto ad una distanza di 3 cm dalla sorgente.

2 Apparato Sperimentale

Strumentazione utilizzata:

- Contatore Geiger
- Pietra di uranile con relativo sostegno
- Rotaia con scala metrica graduata
- Computer con relativi software

Il contatore Geiger consiste in tubo riempito con un gas a bassa pressione all'interno del quale vi sono un elettrodo positivo (catodo) e un elettrodo negativo (anodo). Quando una radiazione ionizzante, come quella emessa a seguito di un decadimento radioattivo, attraversa il tubo, ionizza gli atomi del gas presente al suo interno provocando una scarica elettrica. L'impulso elettrico generato dalla ionizzazione viene rilevato dal contatore e segnato come un conteggio.

3 Acquisizione Dati

Visto che in natura è presente una radiazione naturale di fondo comunque rilevabile dal contatore Geiger, all'inizio dell'esperienza di laboratorio sono state effettuate 1500 misurazioni della sola radiazione naturale di fondo, con tempi porta di 1 e 3 secondi. Successivamente, sono state eseguite 1500 misurazioni che includevano sia la radiazione naturale di fondo che quella relativa alla pietra di uranile (fondo + sorgente), il tutto con tempi porta di 1 e poi 3 secondi. Durante la raccolta dati e per entrambi i tempi porta la sorgente radioattiva è stata posizionata a una distanza di 3 cm dal rilevatore.

I dati che andremo a trattare durante questa esperienza, ovvero i conteggi dei decadimenti radioattivi rilevati dal contatore Geiger per tempo porta, rappresentano delle variabili aleatorie discrete. Ci troviamo dunque in presenza di un processo bernoulliano all'interno del quale il conteggio di un decadimento radioattivo corrisponde ad un successo ed il non rilevamento corrisponde ad un insuccesso.

Dato che però la probabilità di successo è molto bassa ed il numero di prove (N=1500) è significativo, ci aspettiamo ipoteticamente che la distribuzione dei nostri dati segua la distribuzione teorica di Poisson. Parte dell'analisi dati verterà proprio nel verificare l'effettiva distribuzione dei nostri set di misure.

4 Distribuzione sperimentale: Radiazione di fondo

La costruzione delle due distribuzioni sperimentali, per tempi porta rispettivamente di 1 e 3 secondi, verrà tratta in due sottosezioni differenti.

4.1 Tempo porta 1 s

Costruzione della distribuzione sperimentale del fondo con tempo porta di 1 s.

4.1.1 Valori ottenuti

Di seguito vengono riportate le tabelle con i dati accorpati e con i valori ottenuti sperimentalmente attraverso l'analisi dati.

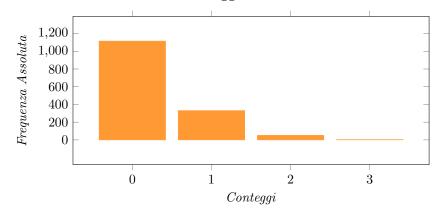
X_k	Freq. Assoluta
0	1115
1	331
2	51
3	3

Tabella 1: Dati accorpati

Dati	Simbolo	Valore
Media	$ar{x}$	0.30
Varianza	σ_x^2	0.29
Dev. std	σ_x	0.54
Dev. std (media)	$\sigma_{ar{x}}$	0.01

Tabella 2: Valori ottenuti sperimentalmente

4.1.2 Grafico sulla distribuzione dei conteggi



4.1.3 Rate del fondo

Per il calcolo del rate del fondo si procede dividendo la media e la sua deviazione standard per il tempo porta (t_p) , in questo caso di 1 s.

Rate =
$$\frac{\bar{x}}{t_p} \pm \frac{\sigma_{\bar{x}}}{t_p}$$

Numericamente:

Rate =
$$0.30 \, \mathrm{s}^{-1} \, \pm \, 0.01 \, \mathrm{s}^{-1}$$

4.2 Tempo porta 3 s

Costruzione della distribuzione sperimentale del fondo con tempo porta di 3 s.

4.2.1 Valori ottenuti

Di seguito vengono riportare le tabelle con i dati accorpati e con i valori ottenuti sperimentalmente attraverso l'analisi dati.

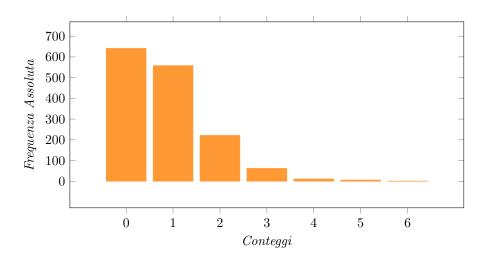
X_k	Freq. Assoluta
0	641
1	558
2	221
3	62
4	11
5	6
6	1

$Tabella \ 3:$	Dati	accorpati

Dati	Simbolo	Valore
Media	$ar{x}$	0.84
Varianza	σ_x^2	0.86
Dev. std	σ_x	0.93
Dev. std (media)	$\sigma_{ar{x}}$	0.02

 $Tabella\ 4:\ Valori\ ottenuti\ sperimentalmente$

4.2.2 Grafico sulla distribuzione dei conteggi



4.2.3 Rate fondo

Per il calcolo del $rate\ del\ fondo$ si procede anche in questo caso dividendo la media e la sua deviazione standard per il tempo porta (t_p) , pari a 3 s.

Rate =
$$\frac{\bar{x}}{t_p} \pm \frac{\sigma_{\bar{x}}}{t_p}$$

Numericamente:

Rate =
$$0.28 \, \mathrm{s}^{-1} \, \pm \, 0.01 \, \mathrm{s}^{-1}$$

5 Distribuzione sperimentale: fondo + sorgente

Anche in questo caso la costruzione delle due distribuzioni sperimentali, per tempi porta rispettivamente di 1 e 3 secondi, verrà trattata in due sottosezioni differenti.

Non verrà però riportata anche la tabella relativa ai dati accorpati in quanto con la presenza della sorgente radioattiva il numero degli X_k inizia ad essere troppo importante. Gli stessi dati saranno comunque consultabili dai relativi grafici in [5.1.2] e [5.2.2].

5.1 Tempo porta 1 s

Costruzione della distribuzione sperimentale del fondo + sorgente con tempo porta di $1\,\mathrm{s}.$

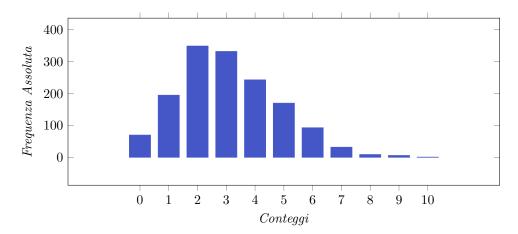
5.1.1 Valori ottenuti

Di seguito viene riportata la tabella contenente i valori ottenuti sperimentalmente attraverso l'analisi dati.

Dati	Simbolo	Valore
Media	\bar{x}	3.09
Varianza	σ_x^2	3.01
Dev. std	σ_x	1.74
Dev. std (media)	$\sigma_{ar{x}}$	0.05

Tabella 5: Valori ottenuti sperimentalmente

5.1.2 Grafico sulla distribuzione dei conteggi



5.1.3 Rate fondo + sorgente

Procedendo come esposto in [4.1.3]:

Rate =
$$\frac{\bar{x}}{t_p} \pm \frac{\sigma_{\bar{x}}}{t_p}$$

Numericamente:

$$\mathbf{Rate} = 3.09 \, \mathrm{s}^{-1} \, \pm \, 0.05 \, \mathrm{s}^{-1}$$

5.1.4 Rate sorgente

Per quanto riguarda invece il rate della sola sorgente radioattiva (pietra di uranile), questo viene calcolato semplicemente sottraendo al rate del fondo + sorgente quello del fondo calcolato in [4.1.3]. La relativa incertezza sarà invece data dalla somma in quadratura delle incertezze associate al rate del fondo e al rate del fondo + sorgente. In formule:

$$Rate_S = (Rate_{S+f} - Rate_f) \pm \sqrt{\sigma_{S+f}^2 + \sigma_f^2}$$

Sostiduendo i valori numerici:

$$\mathbf{Rate}_S = 2.79 \, \mathrm{s}^{-1} \pm 0.05$$

5.1.5 Confronto Media e Varianza

A questo punto ci interessa capire entro quale margine media e varianza risultino confrontabili. Questo poiché in via teorica, in una distribuzione poissoniana, quest'ultime coincidono $(\bar{x} = \sigma_x^2)$. Per fare ciò, confronteremo il valore assoluto della differenza tra media e varianza con la somma delle relative incertezze.

Per quanto riguarda l'incertezza associata alla media, abbiamo già calcolato la sua deviazione standard $(\sigma_{\bar{x}})$, mentre l'incertezza associata alla varianza (σ_{Var}) si ricava dalla formula:

$$\sigma_{Var} = \frac{2\,\sigma_x^2}{\sqrt{2(N-1)}}$$

Sostituendo i valori ottenuti sperimentalmente:

$$\sigma_{Var} = 0.11$$

Proseguiamo dunque calcolando la differenza in valore assoluto tra media e varianza e la somma delle relative incertezze:

$$|\bar{x} - \sigma_x^2| = 0.08$$

$$\sigma_{Var} + \sigma_{\bar{x}} = 0.16$$

Risulta che $|\bar{x} - \sigma_x^2| < \sigma_{Var} + \sigma_{\bar{x}}$. Media a varianza sono dunque confrontabili entro 1 volta la somma delle loro incertezze.

Questo confronto è un primo passo per iniziare a capire quanto effetivamente la nostra distribuzione sperimentale sia riconducibile o meno ad una distribuzione di Poisson come ci aspettiamo. Nonostante ciò, in quanto questo confronto non è un vero e proprio test statistico, per trarre una conclusione rigorosa a riguardo, sarà necessario eseguire un $test \ del \ \chi^2$.

5.1.6 Test del χ^2 - distribuzione di Poisson

Per verifiare se la distribuzione sperimentale ottenuta dai nostri dati sia poissoniana come ci aspettiamo, compiremo un Test del χ^2 . Il test ci permette infatti di verificare se la distribuzione teorica di Poisson si adatti o meno alla distribuzione sperimentale calcolata entro un determinato livello di significatività.

Ipotesi del Test

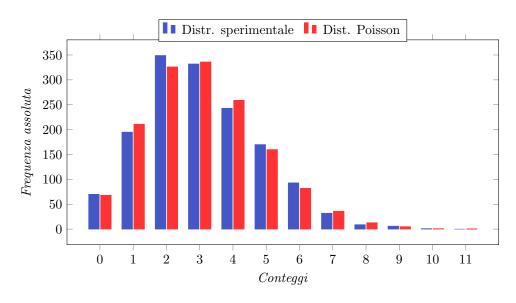
- H_0 : la distribuzione di Poisson si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.
- H_1 : la distribuzione di Poisson non si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.

Dati del Test

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	8
χ^2 critico	15.51
χ^2 calcolato	9.32

Tabella 6: Test del χ^2 per la verifica della distribuzione dei conteggi

Distribuzione teorica e sperimentale a confronto



Conclusione test

Il valore del χ^2 calcolato, pari a 9.32, con 8 gradi di libertà, è inferiore al valore critico della variabile χ^2 a un livello di significatività del 5%, che risulta essere 15.51.

I valori ottenuti confermano l'ipotesi nulla (H_0) . Dunque la distribuzione teorica di Poisson si adatta bene alla distribuzione sperimentale dei conteggi osservati come ci aspettavamo.

5.1.7 Test del χ^2 - distribuzione di Gauss

Sapendo che in via teorica, all'aumentare del valore \bar{x} la distribuzione di Poisson tende alla distribuzione di Gauss, siamo anche interessati a compiere un test del χ^2 per verificare l'accordo o meno tra la distribuzione teorica di Gauss e quella da noi ottenuta sperimentalmente entro i livelli di significatività scelti.

Ipotesi del Test

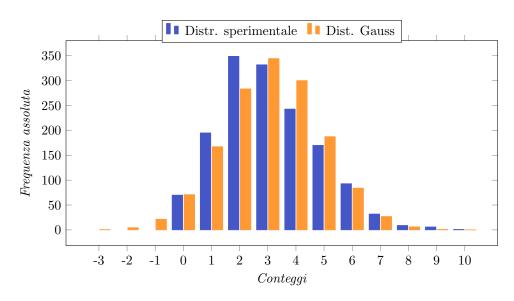
- H_0 : la distribuzione di Gauss si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.
- H_1 : la distribuzione di Gauss non si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.

Dati del Test

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	8
χ^2 critico	15.51
χ^2 calcolato	79.16

Tabella 7: Test del χ^2 per la verifica della distribuzione dei conteggi

Distribuzione teorica e sperimentale a confronto



Prima di passare alle conclusioni è interessante osservare come durante il calcolo del χ^2 , per quanto riguarda la distribuzione gaussiana, siano state aggiunte delle classi contenenti un numero di conteggi negativo. Questo è stato fatto in fase di normalizzazione dei dati per far si che la somma delle frequenze assolute attese per la distribuzione teorica di Gauss fosse almeno di 1499.5 (tenendo conto che sperimentalmente sono state effettuate 1500 misurazioni). Per fare ciò si è dovuto ricorrere ad aggiungere classi contenenti un numero di conteggi negativo in quanto le classi contenenti numeri di conteggi positivi, all'aumentare dei conteggi per tempo porta, si presentano con frequenze assolute attese sempre più piccole, tendenti a zero, non permettendoci di raggiungere la somma desirata.

Per fare un esempio, già solo nel caso di 10 conteggi per tempo porta la frequenza assoluta attesa risulta essere soltanto 0.122.

Di conseguenza, per quanto questo sia impossibile nella realtà, si ricorre alle proprietà teoriche della curva di Gauss la quale si estende su tutto \mathbb{R} , numeri negativi compresi, permettendoci di raggiungere la somma desiderata.

Conclusione test

osservati con un α del 5%.

Il valore del χ^2 calcolato, pari a 79.16, con 8 gradi di libertà, è superiore al valore critico della variabile χ^2 a un livello di significatività del 5%, pari a 15.51, come calcolato in precedenza. I valori così ottenuti ci portano a rigettare l'ipotesi nulla (H_0) e ad accettare l'ipotesi H_1 . Dunque, la distribuzione teorica di Gauss non si adatta alla distribuzione sperimentale dei conteggi

5.2 Tempo porta 3 s

Costruzione della distribuzione sperimentale del fondo + sorgente con tempo porta di 3 s.

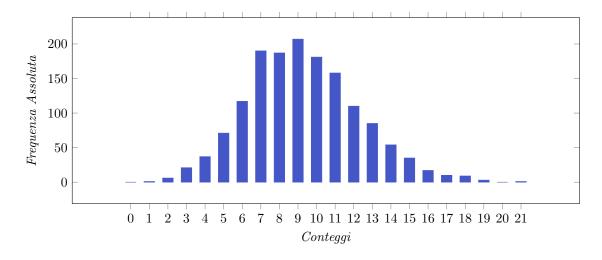
5.2.1 Valori ottenuti

Di seguito viene riportata la tabella contenente i valori ottenuti sperimentalmente attraverso l'analisi dati.

Dati	Simbolo	Valore
Media	\bar{x}	9.27
Varianza	σ_x^2	9.00
Dev. std	σ_x	3.00
Dev. std (media)	$\sigma_{ar{x}}$	0.08

Tabella 8: Valori ottenuti sperimentalmente

5.2.2 Grafico sulla distribuzione dei conteggi



5.2.3 Rate fondo + sorgente

Procedendo come esposto in [4.2.3]:

Rate =
$$\frac{\bar{x}}{t_p} \pm \frac{\sigma_{\bar{x}}}{t_p}$$

Numericamente:

Rate =
$$3.09 \, \mathrm{s}^{-1} \, \pm \, 0.03 \, \mathrm{s}^{-1}$$

5.2.4 Rate sorgente

Come esposto in [5.1.4]:

$$Rate_{S} \, = \, \left(\, Rate_{S+f} - Rate_{f} \, \right) \, \pm \, \sqrt{\sigma_{S+f}^{2} + \sigma_{f}^{2}}$$

Sostiduendo i valori numerici:

$$\mathbf{Rate}_S = 2.81 \, \mathrm{s}^{-1} \pm 0.03 \, \mathrm{s}^{-1}$$

5.2.5 Confronto Media e Varianza

Eseguiamo allo stesso modo quanto riportato in [5.1.5]:

$$\sigma_{Var} = \frac{2\sigma_x^2}{\sqrt{2(N-1)}}$$

Sostituendo i valori ottenuti sperimentalmente:

$$\sigma_{Var} = 0.33$$

Proseguiamo dunque calcolando la differenza in valore assoluto tra media e varianza e la somma delle relative incertezze:

$$|\bar{x} - \sigma_x^2| = 0.27$$

$$\sigma_{Var} + \sigma_{\bar{x}} = 0.41$$

Risulta che $|\bar{x} - \sigma_x^2| < \sigma_{Var} + \sigma_{\bar{x}}$. Media a Varianza sono dunque confrontabili entro 1 volta la somma delle loro incertezze.

5.2.6 Test del χ^2 - distribuzione di Poisson

Per verifiare se la distribuzione sperimentale ottenuta dai nostri dati sia poissoniana come ci aspettiamo, compiremo un test del χ^2 . Il test ci permette infatti di verificare se la distribuzione teorica di Poisson si adatti o meno alla distribuzione sperimentale calcolata entro un determinato livello di significatività.

Ipotesi del Test

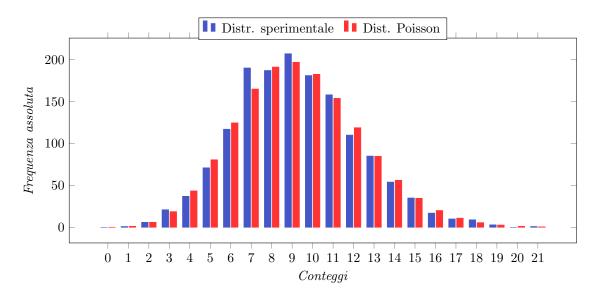
- H_0 : la distribuzione di Poisson si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.
- H_1 : la distribuzione di Poisson non si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.

Dati del Test

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	15
χ^2 critico	25.00
χ^2 calcolato	10.25

Tabella 9: Test del χ^2 per la verifica della distribuzione dei conteggi

Distribuzione teorica e sperimentale a confronto



Conclusione test

Il valore del χ^2 calcolato, pari a 10.25, con 15 gradi di libertà, è inferiore al valore critico della variabile χ^2 a un livello di significatività del 5%, che risulta essere 25.00.

I valori ottenuti confermano l'ipotesi nulla (H_0) . Dunque la distribuzione teorica di Poisson si adatta bene alla distribuzione sperimentale dei conteggi osservati come ci aspettavamo.

5.2.7 Test del χ^2 - distribuzione di Gauss

Per le stesse considerazioni fatte in [5.1.7] procediamo ad eseguire anche un test del χ^2 con la distribuzione gaussiana.

Ipotesi del Test

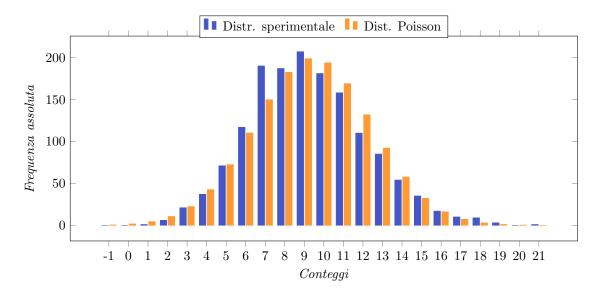
- H_0 : la distribuzione di Gauss si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.
- H_1 : la distribuzione di Gauss non si adatta alla distribuzione sperimentale entro il livello di significatività scelto.

Dati del Test

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	14
χ^2 critico	23.68
χ^2 calcolato	38.98

Tabella 10: Test del χ^2 per la verifica della distribuzione dei conteggi

Distribuzione teorica e sperimentale a confronto



Per la stessa motivazione illustrata in [5.1.7], anche in questo caso è stata aggiunta una classe contenente un numero di conteggi negativo.

Conclusione test

Il valore del χ^2 calcolato, pari a 38.99, con 14 gradi di libertà, è superiore al valore critico della variabile χ^2 a un livello di significatività del 5%, pari a 23.69.

I valori così ottenuti ci portano a rigettare l'ipotesi nulla (H_0) e ad accettare l'ipotesi H_1 .

Dunque, la distribuzione teorica di Gauss non si adatta coerentemente alla distribuzione sperimentale dei conteggi osservati con un α del 5%.

5.3 Test di Gauss - Rate sorgente

Infine vogliamo verificare la compatibilità tra il rate della sorgente con tempo porta di 1 secondo ed il rate della sorgente con tempo porta di 3 secondi. Questo poiché in linea teorica il rate della sorgente, ovvero il numero di conteggi rilevati per unità di tempo, dovrebbe essere lo stesso in entrambi i casi. Per verificare l'effettiva compatibilità o meno dei due rate ricorreremo dunque ad un test di Gauss.

Per procedere ad effettuare il test di Gauss, abbiamo bisogno di calcolare la differenza in valore assoluto $(\bar{\nu})$ tra i due rate sorgente e la relativa incertezza associata:

$$\bar{\nu} = |Rate_{S_{1s}} - Rate_{S_{3s}}| \pm \sqrt{\sigma_{S_{1s}}^2 + \sigma_{S_{3s}}^2}$$

Sostituendo i relativi valori nell'equazione otteniamo:

$$\bar{\nu} = 0.02 \, \mathrm{s}^{-1} \pm 0.06 \, \mathrm{s}^{-1}$$

Una volta ottenuta la differenza e la rispettiva incertezza possiamo procedere con il test di Gauss.

Calcolare se i due rate sorgente siano tra loro compatibili equivale infatti a chiederci se la loro differenza sia consistente con 0; ovvero se il valore $\bar{\nu}$ sia stato estratto da una distribuzione normale avente media $\mu=0$ e deviazione standard pari all'incertezza associata a $\bar{\nu}$, e dunque se la differenza osservata sperimentalmente tra i due rate sia puramente imputabile al caso o meno.

5.3.1 Ipotesi del Test

- H_0 : $\bar{\nu}$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ e deviazione standard pari a 0.06. Di conseguenza $Rate_{S_{1s}}$ e $Rate_{S_{3s}}$ sono tra loro compatibili.
- H_1 : $\bar{\nu}$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu=0$ e deviazione standard pari a 0.06. Di conseguenza $Rate_{S_{1s}}$ e $Rate_{S_{3s}}$ non sono tra loro compatibili.

5.3.2 Valori ottenuti

Dato	Valore
Livello di significatività (α)	0.05
p-value	0.74
$z_{critico}$	1.96
z_{oss}	0.33

Tabella 11: Parametri del Test di Gauss

5.3.3 Conclusione del Test

Il p-value ottenuto è superiore ad α (equivalentemente $z_{oss} < z_{critico}$), possiamo quindi confermare l'ipotesi nulla H_0 . Pertanto, $Rate_{S_{1s}}$ e $Rate_{S_{3s}}$ risultano tra loro compatibili con un livello di significatività del 5%.

6 Conclusioni

Il confronto delle distribuzioni limite di Poisson e di Gauss con le due distribuzioni sperimentali del fondo + sorgente per tempi porta di 1 e 3s ha confermato quanto ci aspettavamo a priori. Difatti, per entrambi i tempi porta, la distribuzione delle 1500 misure è risultata essere una distribuzione di Poisson. La distribuzione limite di Gauss invece non è risultata essere in accordo con le distribuzioni dei due set di dati.

Distr. fondo+sorgente	Test del χ^2	α	Esito Test
Tempo porta 1s	Distr. di Poisson	0.05	H_0 accetta
	Distr. di Gauss	0.05	H_0 rigettata
			H_1 accettata
Tempo porta 3s	Distr. di Poisson	0.05	H_0 accetta
	Distr. di Gauss	0.05	H_0 rigettata
			H_1 accettata

Infine, i due rate della sorgente radioattiva ottenuti per tempi porta di 1 e 3 secondi sono risultati tra loro compatibili a seguito del test di Gauss effettuato. La differenza tra i due rate non è risultata significativa rispetto alle sole fluttuazioni statistiche.

	Valori Ottenuti	Valori Limite	Esito
Test di Gauss	$z_{oss} = 0.33$	$z_{critico} = 1.96$	$Rate_{S_{1s}} \ e \ Rate_{S_{3s}}$
	p-value = 0.74	$\alpha = 0.05$	risultano tra loro compatibili