Corso di Laurea in Fisica
Analisi I - a.a. 2023-2024

Esercitazione su integrali indefiniti

Esercizi svolti in aula

Esercizio 1 [Quiz] Tra le seguenti affermazioni, individuare quella falsa:

(a) le primitive delle funzioni positive sono positive;

(b) le primitive delle funzioni continue sono funzioni continue;

(c) le primitive dei polinomi sono polinomi;

(d) le primitive delle funzioni razionali potrebbero non essere funzioni razionali.

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+3}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+4}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

Esercizio 3 [Quiz] Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua e positiva. Sia F una primitiva di f fissata. Allora il limite per $x \to +\infty$ di $F(x)$:

(a) esiste finito;

(b) esiste infinito;

(c) esiste finito o infinito;

(d) potrebbe non esistere.

Esercizio 4 Calcolare i seguenti integrali indefiniti

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$

Esercizi proposti

Esercizio 5 [Quiz] Si consideri l'uguaglianza seguente

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \frac{2}{5}(x-5)^{5/2} + \frac{10}{3}(x-5)^{3/2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(a) l'uguaglianza è falsa

(b) l'uguaglianza è vera e si può verificare mediante la sostituzione $t = \sqrt{x-5}$

(c) l'uguaglianza vale solo per $c = 0$

(d) la funzione $x\sqrt{x-5}$ non ammette primitive perché non è definita su tutto $\mathbb{R}$

Esercizio 6 Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

(a) $\int e^{1-3x}\,dx$

(b) $\int \left(\frac{1}{x}+3\right)^2 dx$

(c) $\int e^x \cos(e^x)\,dx$

(d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+2}\,dx$

(e) $\int \frac{\cos^3 x + 5}{\cos^2 x}\,dx$

(f) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

(g) $\int \frac{\log^2 x + 1}{x\log x}\,dx$

(h) $\int \frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+1}\,dx$

(i) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(j) $\int \frac{\sqrt[5]{\log(1+x^2)}x}{1+x^2}\,dx$

(k) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

(l) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

(m) $\int \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}\,dx$

(n) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-1)}\,dx$

(o) $\int \log^2 x\,dx$

(p) $\int \sqrt{2-x^2}\,dx$

(q) $\int x\sin x\cos x\,dx$

(r) $\int x^2 e^x\,dx$

(s) $\int \log(x^2+3)\,dx$

(t) $\int \sin^{10} x \cos^5 x\,dx$

(u) $\int \cos^2(3x)\sin^4(3x)\,dx$

(v) $\int \frac{1}{1+\tan x}\,dx$

(w) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$

(x) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

Esercizio 7 [Quiz] Indicare quale seguenti funzioni è una una primitiva di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} & \text{se } x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) $x + 2021$

(b) $2021\sin x + 2021\cos x$

(c) $2021\sin^2 x + 2021\cos^2 x$

(d) $2021x\sin x\cos x$

Esercizio 8 Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali

(a) $\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{x^2+2x+7}\,dx$

(c) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+7}\,dx$

(d) $\int \frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$

(e) $\int \frac{2x^3+x^2-4x+7}{x^2+x-2}\,dx$

(f) $\int \frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$

Soluzioni

Esercizio 5 [Quiz] (a)

Esercizio 6

(a) $-\frac{e^{1-3x}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(b) $-1/x + 9x + 6\log|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(c) $\sin(e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{1}{3}\log(e^{3x} + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(e) $\sin x + 5\tan x c, \quad c \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{\arctan^2 x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(g) (sostituzione $t = \log x$) $\quad \frac{\log^2 x}{2} + \log|\log x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(h) (sostituzione $t = \sqrt{1-x}$) $\quad x - 4\sqrt{1-x} + 4\log(\sqrt{1-x} + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(i) (sostituzione $t^2 = x$) $\quad 2\sqrt{x} - 2\log(1 + \sqrt{x}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(j) (sostituzione $t = \log(1 + x^2)$) $\quad \frac{5}{6}\log^{\frac{6}{5}}(1 + x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(k) (sostituzione $t = \tan x$) $\quad e^{\tan x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(l) (trasformare $\sin^2 x$ in $1 - \cos^2 x$ e sostituire $t = \cos x$) $\quad \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(m) (sostituzione $t = \log x$) $\quad \frac{1}{3}\sqrt{4 + 3\log^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(n) (sostituzione $t^4 = x$) $\quad 4\left(\sqrt[4]{x} + \log|\sqrt[4]{x} + 1|\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(o) $2x - 2x\log x + x\log^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(p) $[e^x(\sin x + \cos x)]/2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(q) $\frac{1}{2}x\sqrt{2 - x^2} + \arcsin(x/\sqrt{2}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(r) $-\frac{x}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin x\cos x + \frac{1}{4}x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(s) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(t) $x\log(x^2 + 3) - 2x + 2\sqrt{3}\arctan(x/\sqrt{3}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(u) $\frac{\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{15} x}{15} - \frac{2\sin^{13} x}{13} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(v) $\frac{1}{48}\left(3x - \frac{\sin(12x)}{4} - \frac{\sin^3(6x)}{3}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(w) $\dfrac{1}{2}(x + \log|\sin x\cos x|) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}\tan x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(y) $2(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Esercizio 7 (a)

Esercizio 8

(a) $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \arctan \dfrac{x+1}{\sqrt{6}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(c) $\log |x^2 + 2x + 7| - \dfrac{1}{\sqrt{6}} \arctan \dfrac{x+1}{\sqrt{6}}, \quad c \in \mathbb{R}$

(d) $2 \log |x^2 + 4x + 5| - \log |x+1| - 7 \arctan(x+2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(e) $x^2 - x + \log \dfrac{(x-1)^2}{|x+2|} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(f) $3 \log |x| - 2 \log |x-1| - \dfrac{1}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Esercitazione 7

16/11/23

ES. 1 (QUIZ)

(c) VERA per linearità dell'integrale

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n > 1$$

(d) VERA : controesempi

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

(b) VERA

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{derivabile} \quad / \quad F'(x) = f(x)$$

$\Downarrow$

continua

(a) FALSA : controesempi

✓

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int 1\,dx = x + C'$$

ES. 2

(a) $$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$$

$\deg N = \deg D - 2$

$\Delta > 0$

MODO : schema per funzioni razionali

1. Scompone D

$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

2. fratti semplici

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

3. identità dei polinomi

$$\frac{1}{\cancel{x^2+4x+3}} = \frac{Ax+A+Bx+3B}{\cancel{(x+3)(x+1)}}$$

ci concentriamo sullo studio della primitiva.

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+3B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ -B+3B=1 \end{cases} \Rightarrow B=\frac{1}{2} \qquad A=-\frac{1}{2}$$

4. Integrale

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}\,dx}{\boxed{x+3}} + \int \frac{\frac{1}{2}}{\boxed{x+1}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+3| + \frac{1}{2}\log|x+1| + c$$

$$= \boxed{\log\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+3}\right|} + C}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+3}\,dx$ $\qquad$ $\deg N = \deg D - 1$

$\Delta > 0$

I MODO: si procede come prima $\rightsquigarrow$ schema 1.2.3.4.

II MODO: manipolazioni algebriche

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overset{D'(x)}{\boxed{2x+4}}}{x^2+4x+3}\,dx - 2\,\overset{(d)}{\boxed{\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log\left|x^2+4x+3\right| - 2\log\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+3}\right|} + C}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$ $\qquad$ $\deg N = \deg D$

$\Delta > 0$

I MODO: divisione + schema

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+4x+3 \\ \cline{2-2} x^2+4x+3 & \boxed{1} = Q(x) \\ \hline // \ \underset{R(x)}{\boxed{-4x-3}} & \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = \frac{(\cancel{x^2+4x+3})(1)}{\cancel{x^2+4x+3}} + \frac{(-4x-3)}{x^2+4x+3}$$

$$Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\,dx$$

$$x - \underbrace{4\int \frac{x}{x^2+4x+3}\,dx}_{(b)} - \underbrace{3\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx}_{(a)} = \ldots$$

II MODO: manipolazioni algebriche

$$\int \frac{x^2+4x+3-4x-3}{x^2+4x+3}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\,dx$$

(d) $$\int \frac{1}{\boxed{x^2+4x+4}}\,dx \qquad x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

$\deg N = \deg D - 2$

$\Delta = 0$

MODO: schema

$$\frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$1 = A(x+2) + B$$

$$1 = Ax + 2A + B$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2A+B = 1 \Rightarrow B=1 \end{cases}$$

lo schema non funziona soltanto perché è già un integrale immediato

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2}\,dx = -\frac{1}{f(x)} + C$$

$y = f(x)$

$dy = f'(x)\,dx$

teorema di sostituzione

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \boxed{-\frac{1}{x+2} + C}$$

(e) $$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx$$

$\deg N = \deg D - 1$

$\Delta = 0$

I MODO: schema (funzione per ricondursi a integrali immediati)

$$\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$x = Ax + 2A + B$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \qquad B = -2$$

$$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{1}{x+2} - 2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \boxed{\log|x+2| + \frac{2}{(x+2)} + C}$$

II MODO: manipolazioni algebriche

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+4} - 2\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$$

(f) $$\int \frac{x^2}{x^2+4x+4}$$

$\deg N = \deg D$

$\Delta = 0$

I MODO: divisione + schema

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x^2+4x+4 \\ \hline x^2+4x+4 & 1 \\ \hline // \quad -4x-4 & \end{array}$$

R(x)

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+4}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{\boxed{-4x-4}}{x^2+4x+4}\,dx = \dots$$

deg R = deg D − 1 $\quad \Delta = 0$

si risolve come in (e)

II MODO: manipolazioni algebriche

$$\int \frac{x^2+4x+4-4x-4}{x^2+4x+4} =$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

deg N = deg D − 2

$\Delta < 0$

MODO: manipolazioni algebriche (completamento del quadrato)

$$x^2+4x+5 = x^2+4x+4+1$$

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+\underline{1}$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \boxed{\arctan(x+2)+c'}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \arctan f(x) + c'$$

(h) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$ deg N = deg $D - 1$

$\Delta < 0$

MODO: manipolazioni algebriche

(g)

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 2\boxed{\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log\left(x^2+4x+5\right) - 2\arctan(x+2) + c'}$$

non serve il valore assoluto in quanto $x^2+4x+5>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta<0\,!)$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx = \ldots$ esercizio

---

per $\Delta<0$ lo schema da applicare è

$$\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+5} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

non funziona solo perché è immediato.

Vediamo un esempio per il quale lo schema anche con polinomi con $\Delta<0$ funziona

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx \qquad x^2 \quad \Delta=0 \qquad x^2+1 \quad \Delta<0$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$0x^3+0x^2+0x+1 = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2$$

$$\begin{cases} A+C=0 & \Rightarrow \quad C=0 \\ B+D=0 & \Rightarrow \quad D=-1 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \int \frac{1}{x^2} - \int \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{x} - \arctan x + C'}$$

ES. 4 integrazioni per sostituzione

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ $\qquad x=\sqrt{2}\sin t$

$dx = \sqrt{2}\cos t$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2 - 2\sin^2 t}} \sqrt{2}\cos t \, dt$$

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{\cancel{\cos^2 t}}{\cancel{1-\sin^2 t}}} \, dt$$

$$= t + c' = \boxed{\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c'}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}} \, dx$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$x = \sqrt{2} \sinh t$

$dx = \sqrt{2} \cosh t$

$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{2}} \, \cancel{\cosh t}}{\cancel{\sqrt{2}} \cancel{\sqrt{1 + \sinh^2 t}}} \, dt$$

$$= t + c' = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{\sqrt{2}} + c'$$

$$= \boxed{\log\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}\right) + c'}$$

arcseno iperbolico

(settore seno iperbolico)

ES. 3 (QUIZ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, positiva

$F'(x) = f(x) \geq 0 \xRightarrow{\text{test di monotonia}} F$ crescente

limite di funzioni monotone

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x)$ esiste (finito o infinito) $\Rightarrow C)$