**Corso di Laurea in Fisica - Esame di Geometria e Algebra Lineare I**

**Prova scritta del 01 Febbraio 2021**

---

**ATTENZIONE.** Riportare lo svolgimento completo degli esercizi. I soli risultati, anche se corretti, non vengono presi in considerazione.

---

### Esercizio 1

In $\mathbb{R}^{2,2}$, spazio vettoriale reale delle matrici quadrate di ordine 2, si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ cosí definito

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$ nel dominio e nel codominio. (1 punto)
2. Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ sia di $\operatorname{im} f$. (2 punti)
3. Determinare l'immagine $f\big(\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})\big)$ del sottospazio vettoriale delle matrici triangolari superiori $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})$ di $\mathbb{R}^{2,2}$. Stabilire se $f\big(\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})\big)$ è un sottospazio vettoriale del codominio. (2 punti)
4. Determinare la controimmagine $f^{-1}(\mathbf{z})$ del vettore $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la controimmagine $f^{-1}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})\big)$ del sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{2,2}$. Stabilire se $f^{-1}(\mathbf{z})$ e $f^{-1}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})\big)$ sono dei sottospazi vettoriali del dominio. (4 punti)
5. $f$ è diagonalizzabile? (2 punti)
6. Determinare due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$ invarianti per $f$ e tali che la somma delle loro dimensioni sia 4. (4 punti)
7. Determinare l'endomorfismo $f \circ f$. (1 punto)

**Soluzione**

1. La matrice associata a $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$ è

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\dim(\ker f) = 1$ e $\dim(\operatorname{im} f) = 3$, inoltre

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

3. $f\big(\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})\big) = \operatorname{im} f = \mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})$. $f\big(\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})\big)$ è un sottospazio vettoriale del codominio.

4. $f^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \ker f$ non è un sottospazio vettoriale del dominio. $f^{-1}\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})\big) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ è un sottospazio vettoriale del dominio.

5. $f$ è diagonalizzabile.

6. Per esempio $\ker f$ e $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{2,2})$.

7. La matrice associata a $f \circ f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$ è

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dunque $f \circ f = f$.

**Esercizio 2**

Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Risolvere l'equazione $MX = 6X$, dove $X \in \mathbb{R}^3$. (2 punti)
2. Calcolare gli autovalori di $M$ e le rispettive molteplicità . (2 punti)
3. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente matrice $M$ rispetto alla base canonica.

   Trovare una base che diagonalizzi $f$. (3 punti)
4. Sia $\phi$ l'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^3$ avente matrice $M$ rispetto alla base canonica.

   Trovare una base rispetto cui $\phi$ abbia forma normale. (3 punti)
5. Determinare il cono isotropo di $\phi$, ovvero l'insieme dei vettori isotropi della forma quadratica $Q$ associata a $\phi$. (2 punti)
6. Determinare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tali che:

   (i) $Q(v) = 0$, (ii) $Q(v) < 0$, (iii) $Q(v) > 0$. (4 punti)

**Soluzione**

1. Si tratta di trovare l'autospazio relativo all'autovalore 6. Si trova che è generato da $e_1 + e_2 - 2e_3$.
2. E' chiaro dalla matrice che il nucleo ha dimensione 2, generato da $e_1 - e_2$ e da $2e_1 + e_3$. Quindi l'autovalore 0 ha molteplicità 2, l'autovalore 6 ha molteplicità 1.
3. Possiamo usare i tre autovettori trovati sopra.
4. Dobbiamo trovare una base ortonormale di autovettori per ottenere la forma canonica, poi normalizzarli ulteriormente. Per esempio $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$, $\frac{1}{6}(e_1 + e_2 - 2e_3)$.
5. Il cono isotropo coincide con il Ker.
6. In questo caso il cono isotropo è un sottospazio di dimensione 2, quindi ci sono al massimo 2 vettori linearmente indipendenti con $Q(v) = 0$. Non esistono vettori con $Q(v) < 0$. Qualunque 3 vettori linearmente indipendenti e non appartenenti al Ker soddisfano $Q(v) > 0$. Questo è il numero massimo perché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.