

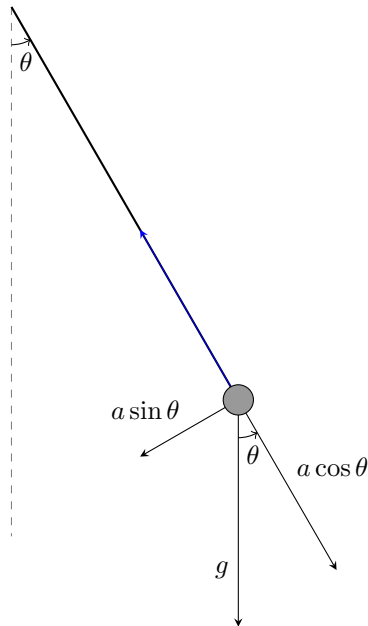
Relazione di Laboratorio: Esperienza Zero

Misure ripetute del periodo di oscillazione di un pendolo

Matteo Herz

Matricola 1098162

7 Gennaio 2024



Università degli studi di Torino
Laurea Triennale in Fisica

Indice

1	Scopo dell'esperienza	2
2	Strumentazione utilizzata	2
3	Procedura di misura effettuata	2
4	Analisi Dati	2
4.1	Test del $3\text{-}\sigma_x$	3
4.2	Errore sulla stima - Sensibilità dello strumento	3
4.3	Risultato ottenuto	3
5	Test del χ^2	3
5.1	Istogramma delle frequenze	4
5.2	Ipotesi del Test	4
5.3	Dati ottenuti	4
5.4	Conclusione Test del χ^2	5
6	Test di Gauss	5
6.1	Stima del Periodo e Misura della Fotocellula	5
6.2	Test di Compatibilità tra le Misure	5
6.3	Ipotesi del Test	6
6.4	Dati ottenuti	6
6.5	Conclusione del Test	6
6.6	Commenti sugli errori	6
7	Intervalli $\mu \pm \sigma_x$ e $\mu \pm \sigma_{\bar{x}}$	6
7.1	N misure necessarie	7
8	Conclusione	7
8.1	Sintesi Quantitativa dei Risultati dell'Esperienza	7
8.2	Qualità della misura	8
8.3	Possibili fonti di errore	8
8.4	Test condotti ed esiti	8

1 Scopo dell'esperienza

L'esperienza di laboratorio consiste nel valutare da un punto di vista fisico-statistico la qualità, in termini di accuratezza e precisione, di 100 misure del periodo di oscillazione di un pendolo reversibile (chiamato *Pendolo di Kater*).

Tale valutazione si basa sull'utilizzo di test statistici in grado di stimare quanto le misurazioni effettuate siano affette o meno da fluttuazioni statistiche ed in particolare da errori sistematici, la cui presenza potrebbe allontanare significativamente il risultato verso valori non compatibili (entro soglie fissate) con il valore vero del periodo di oscillazione.

Lungo tutto l'arco della descrizione dell'esperienza di laboratorio farò riferimento al valore vero, indicato con μ , come all'effettivo valore del periodo di oscillazione del pendolo di Kater, calcolato sperimentalmente in laboratorio con una fotocellula.

2 Strumentazione utilizzata

Tabella 1: Strumenti e relative sensibilità

Strumento	Sensibilità strumento
Fotocellula	0.001 s
Cronometro digitale	0.01 s
Pendolo di Kater	-

3 Procedura di misura effettuata

Le misurazioni sono state effettuate a casa attraverso l'utilizzo di un cronometro digitale dalla sensibilità di 0.01 s. In particolare, le 100 misure sono state ottenute tutte una di fila all'altra, attraverso la visione di un video preregistrato del pendolo in fase di oscillazione. I dati ottenuti sono stati poi salvati su un foglio di calcolo online, sul quale si è svolta l'analisi dati vera e propria.

4 Analisi Dati

Di seguito sono riportati i primi risultati dell'analisi dati, con i valori ottenuti rispettivamente prima e dopo il loro accorpamento.

Media	\bar{x}	1.95	s
Varianza	σ_x^2	0.0070	s^2
Dev. std	σ_x	0.083	s
Dev. std (media)	$\sigma_{\bar{x}}$	0.0083	s
Mediana	Me	1.95	s
Moda	\tilde{x}	1.94	s

Tabella 2: Dati non accorpati

Media	\bar{x}	1.95	s
Varianza	σ_x^2	0.0068	s^2
Dev. std	σ_x	0.082	s
Dev. std (media)	$\sigma_{\bar{x}}$	0.0083	s
Mediana	Me	-	-
Moda	\tilde{x}	-	-

Tabella 3: Dati accorpati

Come si evince dal confronto dei dati delle 2 tabelle, l'accorpamento non ha portato a significativi cambiamenti nei rispettivi campi.

Statistica	Simbolo	Valore Prima	Valore Dopo	Variazione Percentuale
Media	\bar{x}	1.95 s	1.95 s	0%
Varianza	σ^2	0.0070 s ²	0.0068 s ²	-2.86%
Dev. std	σ_x	0.083 s	0.082 s	-1.20%
Dev. std (media)	$\sigma_{\bar{x}}$	0.0083 s	0.0083 s	0%

Tabella 4: Dati prima e dopo l'accorpamento con variazioni percentuali

4.1 Test del $3\sigma_x$

E' importante evidenziare che prima di procedere all'accorpamento dei dati ho effettuato quello che viene definito come *Test del 3- σ* . Questo test permette di determinare se una data misura all'interno del nostro campione in analisi sia rigettabile o meno. Per fare ciò, ci si basa sulla probabilità empirica legata alla distribuzione di Gauss di osservare il dato in questione.

Se la probabilità di osservare tale misura (x_i) risulta minore della probabilità di osservare misure distanti 3 deviazioni standard (σ_x) dal valore centrale \bar{x} , ovvero

$P(x_i) < [1 - P(\bar{x} - 3\sigma_x < |x_i| < \bar{x} + 3\sigma_x)] \approx 0.3\%$ e tenendo conto che nel nostro caso, su 100 misurazioni, questo corrisponderebbe ad osservarne meno di una, allora quest'ultima può essere considerata "estranea" al campione di popolazione preso in analisi e dunque rigettata.

Applicando il test del $3\sigma_x$ ai 100 dati ottenuti, mi trovo a dover rigettare una misura, pari a 2.21 s. Tale misura eccede di 0.01 s oltre il valore soglia di $\bar{x} + 3\sigma_x$, corrispondente a 2.20 s.

Dunque, per il resto dell'analisi dati avrò $N = 99$.

4.2 Errore sulla stima - Sensibilità dello strumento

Il confronto tra la deviazione standard della media (considerata come errore sulla stima) e la sensibilità dello strumento indica che l'incertezza nei dati raccolti è circa minore del 17% rispetto alla sensibilità dello strumento. Questo suggerisce che, pur essendoci una certa variabilità nei dati, questa variabilità risulta essere ancora contenuta entro i limiti di precisione del nostro strumento. Sulla base di queste osservazioni posso dedurre che i dati generati dall'esperimento siano abbastanza precisi in relazione alla sensibilità dello strumento utilizzato.

4.3 Risultato ottenuto

In definitiva, la stima del periodo di oscillazione del pendolo ottenuta dall'analisi dati risulta essere:

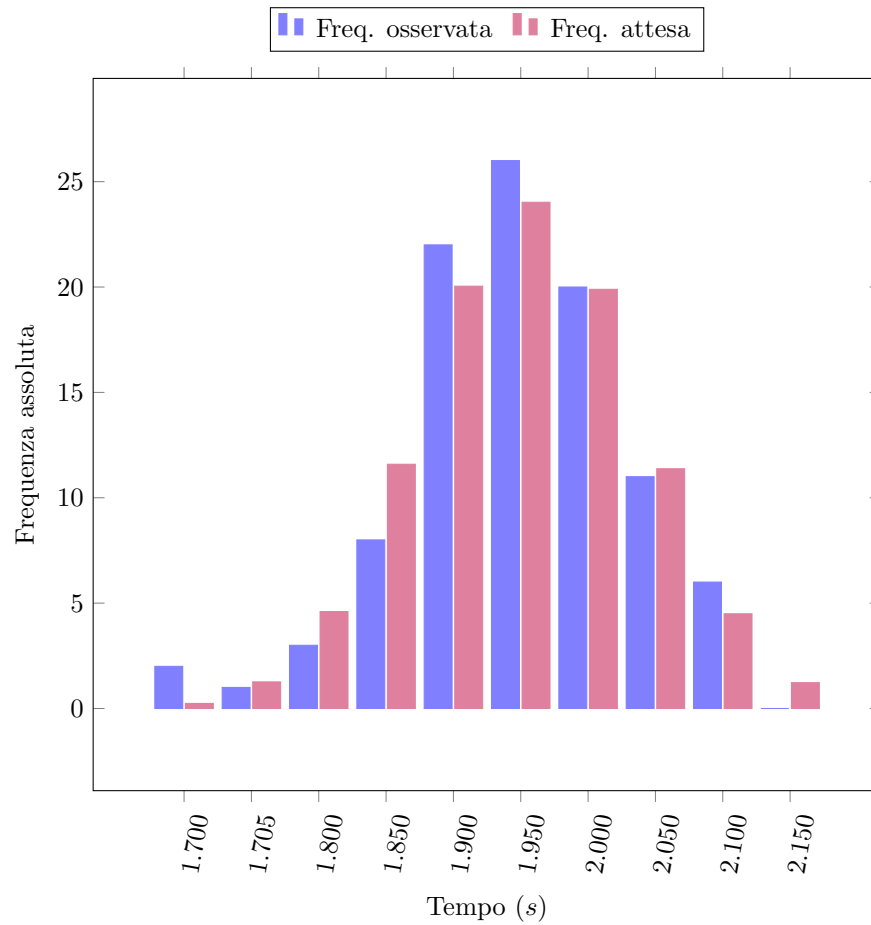
$$1.95 \pm 0.01 \text{ s}$$

5 Test del χ^2

A fronte dell'esperienza condotta, mi aspetto che a descrivere l'istogramma sperimentale delle misure ripetute del periodo di oscillazione del pendolo sia la *distribuzione di Gauss*.

Questo poiché suppongo che le misurazioni effettuate siano soggette principalmente a sorgenti di errori casuali e trascurabili errori sistematici. Se così dovesse risultare, i valori misurati sarebbero distribuiti su una curva a campana centrata attorno alla miglior stima del valore vero \bar{x} , non distante da μ . Nel caso in cui invece fossimo in presenza di errori sistematici non trascurabili dovrei osservare la distribuzione limite centrata su un valore \bar{x} distante dal valor vero μ calcolato dalla fotocellula.

5.1 Istogramma delle frequenze



5.2 Ipotesi del Test

H_0 : la distribuzione di Gauss si adatta alla distribuzione delle misure effettuate

H_1 : la distribuzione di Gauss non si adatta alla distribuzione delle misure effettuate

5.3 Dati ottenuti

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	4
χ^2 critico	9.49
χ^2 calcolato	1.72

Tabella 5: Dati del test del χ^2 per la verifica della distribuzione delle misure

5.4 Conclusione Test del χ^2

L'ipotesi nulla (H_0) che la distribuzione di Gauss si adatti alla distribuzione delle misure effettuate è confermata dai dati calcolati. Il valore del χ^2 calcolato, pari a 1.72, con 4 gradi di libertà, è inferiore al valore critico della variabile χ^2 a un livello di significatività del 5%, che risulta essere 9.49.

Inoltre si osserva che il χ^2 calcolato è relativamente basso rispetto al valore critico, indicando un *fit* coerente della distribuzione di Gauss a quella relativa alle 100 misure.

In conclusione, la distribuzione di Gauss può essere considerata compatibile con i dati raccolti.

6 Test di Gauss

6.1 Stima del Periodo e Misura della Fotocellula

La stima del periodo del pendolo calcolata (\bar{x}) e la stima teorica (μ), con relative incertezze e unità di misura, risultano essere:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1.95 \pm 0.01 \text{ s} \\ \mu &= 1.957 \pm 0.001 \text{ s}\end{aligned}$$

6.2 Test di Compatibilità tra le Misure

Per verificare se \bar{x} e μ sono compatibili, utilizzo il test di Gauss o "test z".

Il test viene eseguito prendendo per vera in partenza la cosiddetta "ipotesi nulla" (H_0), ovvero che i due valori siano effettivamente compatibili. Lo scopo del test è dunque quello di capire se l'ipotesi H_0 debba essere rigettata (confermando invece l'ipotesi H_1) o meno.

Per poter decretare la compatibilità o meno di \bar{x} con μ , il test prende in considerazione la distanza in valore assoluto di \bar{x} con μ , espressa in unità di deviazioni standard della media ($\sigma_{\bar{x}}$), ovvero la variabile z_{oss} , definita come segue:

$$z_{oss} = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Il valore così ricavato ci permette di calcolare l'area alle code della gaussiana corrispondenti a discrepanze maggiori in valore assoluto di tale numero, ovvero $P(|z_i| > z_{oss})$. Per definizione si tratta della probabilità di osservare stime (\bar{x}_i) corrispondenti a discrepanze $z_i > z_{oss}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-z_{oss}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{z_{oss}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{oss}}^{+z_{oss}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

Il numero ottenuto è definito come il "p-value".

Nel caso in cui il p-value calcolato risultasse maggiore di un certo *livello di significatività* (indicato con α), potremmo stabilire che \bar{x} è effettivamente compatibile con μ , e dunque affetta da errori sistematici trascurabili rispetto alle sole fluttuazioni statistiche.

In caso contrario invece (p-value $< \alpha$), dovremmo dedurre che una tale discrepanza sia dovuta ad errori sistematici non trascurabili, e dunque rigettare H_0 .

6.3 Ipotesi del Test

H_0 : \bar{x} e μ sono compatibili

H_1 : \bar{x} e μ non sono compatibili

6.4 Dati ottenuti

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
p-value	0.368
$z_{critico}$	1.96
z_{oss}	0.90

Tabella 6: Parametri del Test di Gauss

6.5 Conclusione del Test

Il valore della variabile statistica calcolata è inferiore al valore critico, e il p-value è superiore al livello di significatività, dunque possiamo confermare l'ipotesi nulla (H_0) di compatibilità tra la stima del periodo di oscillazione $\bar{x} = 1.95 \pm 0.01$ s e la media della popolazione (valor vero) $\mu = 1.957 \pm 0.001$ s, il tutto con un livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Tale compatibilità indica che siamo effettivamente in presenza di errori sistematici trascurabili rispetto agli errori casuali (fluttuazioni statistiche).

6.6 Commenti sugli errori

- **Analisi degli Errori:** *L'analisi degli errori suggerisce miglioramenti nella procedura di misurazione o negli strumenti utilizzati per futuri esperimenti?*

Sicuramente una misurazione del periodo di oscillazione del pendolo di Kater effettuata dal vivo potrebbe risultare più precisa rispetto ad una misurazione effettuata via video, con schermi aventi talvolta frequenze di aggiornamento e latenze differenti.

Inoltre l'utilizzo di cronometri aventi sensibilità di 0.01 s limita in parte l'analisi dati costringendoci a considerare meno cifre significative e a dover compiere alcune considerazioni come in 4.2.

- **Errori Sistematici:** *Sono presenti errori sistematici? È possibile escluderli? Se non è possibile, quanto incidono rispetto agli errori casuali?*

Possono essere presenti errori sistematici legati alla video registrazione e ai dispositivi su cui questa viene riprodotta, come citato sopra.

Inoltre non è possibile escludere totalmente la presenza di errori sistematici in quanto fortemente legati, in maniera intrinseca, ai nostri strumenti di lavoro non professionali.

Nonostante questo però, come emerge dall'analisi dati, questi ultimi incidono in maniera trascurabile rispetto alle fluttuazioni statistiche, presenti invece lungo tutta la procedura di misurazione.

7 Intervalli $\mu \pm \sigma_x$ e $\mu \pm \sigma_{\bar{x}}$

Intervallo $\mu \pm \sigma_x$: rappresenta l'intervallo di confidenza del 68% attorno alla media della popolazione (μ), dove σ_x è la deviazione standard delle singole misure. Questo significa che se si considera la deviazione standard come incertezza sulla singola misura (cioè $x_i = \mu \pm \sigma_x$), si può avere fiducia

al 68% che tale misura (x_i) si trovi entro una deviazione standard dal valor vero.

Intervallo $\mu \pm \sigma_{\bar{x}}$: rappresenta l'intervallo di confidenza del 68% attorno alla media della popolazione (μ), dove $\sigma_{\bar{x}}$ è la deviazione standard della media.

Se si compissero infatti molte determinazioni della media di N misure, allora i risultati \bar{x} si distribuirebbero attorno a μ con larghezza $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$.

Dunque, se si calcolasse la media di N misure una volta, si potrebbe essere confidenti al 68% che tale risultato giaccia entro una distanza $\sigma_{\bar{x}}$ dal valor vero.

7.1 N misure necessarie

Per determinare il numero di misure N necessarie affinché l'errore sulla media sia uguale alla sensibilità dello strumento, utilizzo la formula per il calcolo dell'errore standard della media ($\sigma_{\bar{x}}$):

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Dove:

- $\sigma_{\bar{x}}$ è l'errore standard della media
- σ_x è la deviazione standard delle singole misure
- N è il numero di misure.

Dunque basta risolvere questa equazione rispetto a N per ottenere il numero necessario di misure. Se la sensibilità dello strumento è δ e voglio che l'errore sulla media ($\sigma_{\bar{x}}$) sia uguale a δ , allora risolverò l'equazione:

$$\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \delta$$

Risolvendo per N ottengo:

$$N = \left(\frac{\sigma_x}{\delta} \right)^2$$

Sostituendo i valori numerici:

$$N \approx 68$$

8 Conclusione

8.1 Sintesi Quantitativa dei Risultati dell'Esperienza

Test	Valori Ottenuti	Valori Limite	Esito
Test del χ^2	$\chi_{oss}^2 = 1.72$	$\chi_{critico}^2 = 9.49$	Test Superato
Test di Gauss	$z_{oss} = 0.90$ $p - value_{oss} = 0.368$	$z_{critico} = 1.96$ $\alpha = 0.05$	Test Superato

Tabella 7: Sintesi Quantitativa dei Risultati dell'Esperienza

Media del Periodo di oscillazione calcolata $\rightarrow \bar{x} = 1.95 \pm 0.01$ s

Media del Periodo di oscillazione teorica $\rightarrow \mu = 1.957 \pm 0.001$ s

8.2 Qualità della misura

Al fronte dei risultati ottenuti e degli esiti dei test, le misure sono risultate precise e sufficientemente accurate, con un media (\bar{x}) calcolata distante $0.9\sigma_{\bar{x}}$ dal valor vero (μ) registrato dalla fotocellula.

Inoltre come evidenziato in 4.2, il confronto tra la deviazione standard della media e la sensibilità dello strumento suggerisce che i risultati ottenuti in fase di misurazione sono precisi rispetto alla sensibilità dello strumento utilizzato.

8.3 Possibili fonti di errore

- **Errori sistematici:** Come citato in 6.6 possibili fonti di errori sistematici possono essere sorte sia dall'utilizzo di una strumentazione non professionale con sensibilità non elevate, piuttosto che da misure effettuate via video. Inoltre la sensibilità e la prontezza dei riflessi variano da persona a persona, a differenza della precisione di macchina di una fotocellula.

Nonostante questo, come si evince dal test di Gauss e dal test del χ^2 gli errori sistematici risultano trascurabili rispetto alle sole fluttuazioni statistiche.

- **Errori casuali:** Possibili fonti di errori casuali (fluttuazioni statistiche) sono dovute per lo più ai miei riflessi e alla prontezza in fase di misurazione, ma in secondo luogo anche ad altre possibili fonti esterne (ad esempio distrazioni).

Come dimostrato dal test del χ^2 , gli errori sistematici risultano trascurabili rispetto ai soli errori casuali, la cui presenza nelle misurazioni denota proprio una distribuzione gaussiana limite in accordo con la distribuzione delle misure effettuate.

8.4 Test condotti ed esiti

1. **Test di Gauss:** Il test di Gauss avvalora l'ipotesi H_0 , confermando l'accordo tra la media calcolata (\bar{x}) e il valor vero (μ) calcolato attraverso la fotocellula.
2. **Test del χ^2 :** Il test del χ^2 avvalore l'ipotesi H_0 , confermando che la distribuzione di Gauss si adatta alla distribuzione delle misure effettuate.