GRAVITAZIONE

- La forza gravitazionale.

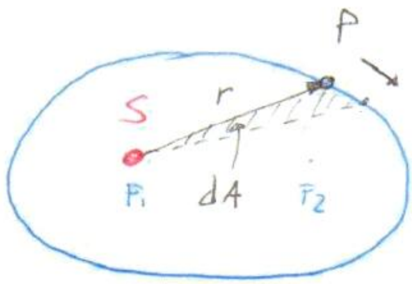
  1) Copernico (~~fine~~ inizio '500): Ipotesi eliocentrica

  2) Ticho Brahe (fine '500): misure delle posizioni dei pianeti in funzione del tempo

  3) Keplero (inizio '600): partendo dalle misure di T.B. le sintetizza in tre leggi.

  4) Newton (fine '600 - inizio '700): interpretazione dinamica delle leggi di Keplero ⇒ legge di gravitazione universale

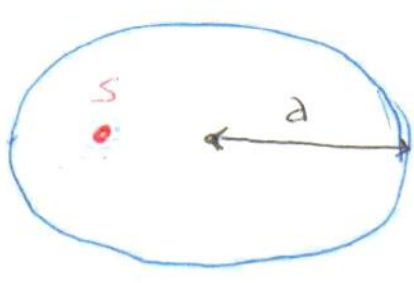
Leggi di Keplero



1. I pianeti compiono orbite ellittiche attorno al sole che occupa uno dei due fuochi

2. La velocità areale del raggio vettore che unisce il sole al pianeta è costante

$$\frac{dA}{dt} = cost. \Rightarrow \boxed{\text{Forze centrali}}$$



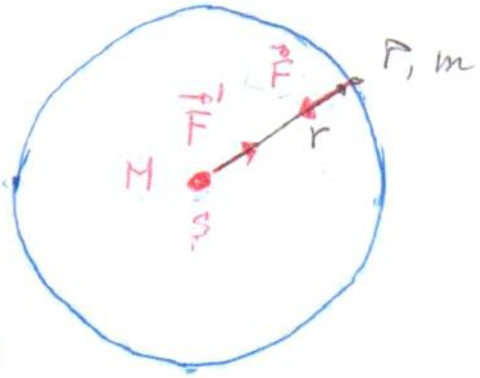
3. Il quadrato del periodo T di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse

$$T^2 = K a^3$$

le di gravitazione universale (Newton)

- La circonferenza è un caso particolare dell'ellisse
- Forza centrale ≡ Forza centripeta

Forza centripeta



$$F = m\omega^2 r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$

massa pianeta — velocità angolare — $\omega = \frac{2\pi}{T}$

utilizzo la 3ª legge di Keplero $T^2 = k r^3$

$$F = m\,\frac{4\pi^2}{k r^{\cancel{3}}}\cdot \cancel{r} \Rightarrow \boxed{F = \frac{4\pi^2}{k}\,\frac{m}{r^2}}$$

pongo $c = \frac{4\pi^2}{k} \Rightarrow \boxed{F = c\,\frac{m}{r^2}}$

F = forza esercitata dal sole sul pianeta

F' = forza esercitata dal pianeta sul sole

Terzo principio della dinamica

$\Rightarrow \vec{F}' = -\vec{F} \Rightarrow F' = F$

$$\boxed{F' = c'\,\frac{M}{r^2}} \Rightarrow c'\,\frac{M}{\cancel{r^2}} = c\,\frac{m}{\cancel{r^2}} \Rightarrow \boxed{c'M = cm} \quad (i)$$

$\Downarrow$

$c' \neq c$ $(M \neq m)$ $\Rightarrow$ c non è cost. univ.

Noto che l'eq. (i) è soddisfatta se pongo:

$c' = \gamma m \;;\; c = \gamma M$

con γ costante universale (è la stessa per tutti i corpi celesti)

$$c'M = cm \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{\cancel{\gamma} m}{\cancel{\gamma} M} = \frac{m}{M}$$

$$\boxed{F = c\,\frac{m}{r^2} = \gamma\,\frac{Mm}{r^2}} \;;\; \boxed{F' = c'\,\frac{M}{r^2} = \gamma\,\frac{mM}{r^2}}$$

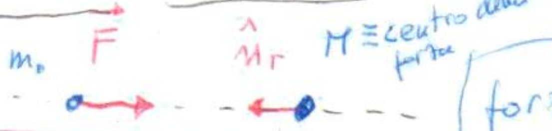
legge di gravitazione universale

La costante di gravitazione universale.

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow [\gamma] = \left[\frac{F \cdot r^2}{mM}\right] = \frac{Kg\,m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{Kg^2} = \frac{m^3}{Kg\,s^2}$$

Numericamente: $\boxed{\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg\,s^2}}$

Vettoriale



$$\boxed{\vec{F} = - \underbrace{\gamma \frac{mM}{r^2}}_{f(r)\ \text{delle forze centrali}} \hat{u}_r}$$

forza esercitata da M su m.

Accelerazione di gravità (prossimità sup. terrestre)

$$g = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M_T}{R_T^2} = \left(6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg\,s^2}\right) \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}\,Kg}{(6.37 \cdot 10^6\,m)^2} = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

Molti punti (centri gravitazionali)

$$\boxed{\vec{F}_{ns} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\gamma \frac{m_i M}{r_i^2} \hat{u}_{r,i}\right)}$$

forza esercitata dall'insieme dei punti m_i sul punto di massa M

MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

L21-4

ricavato $F = \gamma \dfrac{m M}{r^2}$ → "cariche gravitazionali"? (masse gravitazionali?)

utilizzando le leggi della dinamica ⇒ m, M sono le masse inerziali

. Parallelismo tra forza gravitazionale e forza elettrostatica (legge di Coulomb)

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

← cariche elettriche "proprietà che hanno alcune particelle e che non ha nulla a che vedere con la massa"

Massa inerziale vs. massa gravitazionale

sono la stessa cosa o differiscono?

→ Esperienza di Galileo: la gravità è uguale per tutti.

Se ∃ massa gravitazionali ≠ masse inerziali

$$F = \gamma \frac{m_G M_G}{r^2}$$

prossimità sup. terrestre

$$g = \frac{F}{m_I} = \frac{1}{m_I} \cdot \gamma \frac{m_G M_G^T}{R_T^2} = \left(\frac{m_G}{m_I}\right) \gamma \frac{M_G^T}{R_T^2}$$

2a legge dinamica

è lo stesso qualunque sia il corpo che cade in pross. della sup. terr.

Se $m_G \neq m_I$ potrebbe variare da corpo a corpo

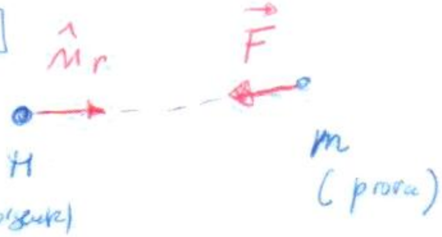
g è la stessa per tutti i corpi ci indica che $m_I = m_G$

Oggi ⇒ $\left|\dfrac{m_I}{m_G} - 1\right| < 10^{-12}$!

CAMPO GRAVITAZIONALE

L21-5

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad [G] = \left[\frac{F}{m}\right] = [a]$$



$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

→ forza a distanza

$$\vec{F} = \underbrace{\left[\left(-\gamma \frac{M}{r^2}\hat{u}_r\right)\right]}_{(1)\,\equiv\,\vec{G}} \cdot \underbrace{[m]}_{(2)}$$

fattorizzazione

(1) La massa M provoca una perturbazione dello spazio circostante proporzionale ad M ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza ⟹ Campo gravitazionale G

(2) Tale perturbazione è percepita dalla massa di prova m.

$$\boxed{\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^2}\hat{u}_r}$$

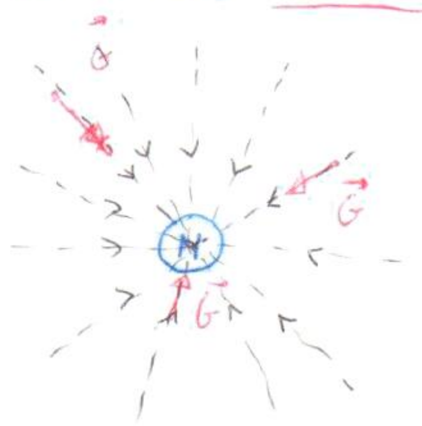
→ dimensionalmente $|\vec{G}|$ è una accelerazione.

→ $\vec{g}$ non è altro che il campo gravitazionale $\vec{G}$ calcolato in prossimità della superficie terrestre

Esp. Dyson

Teorema di Gauss per $\vec{G}$

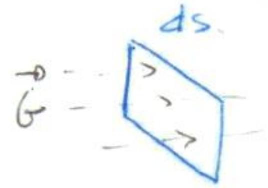
- Premessa: Linee di campo e flusso di un vettore



- linee di campo: linee tangenti in ogni punto al vettore $\vec{G}$ gravitazionale
- le linee di campo si addensano dove $|\vec{G}|$ è più grande

Flusso del vettore $\vec{G}$: "conta" il n° di linee di campo che attraversano una certa superficie

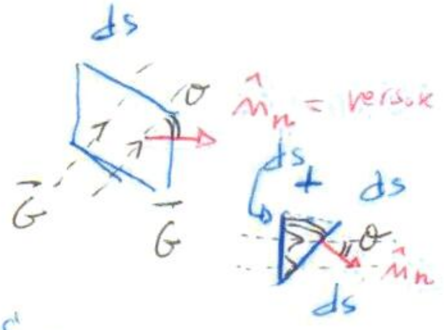
A) $\vec{G} \perp ds$



$$\boxed{d\Phi = |\vec{G}| \cdot ds}$$

flusso infinitesimo

B) $\vec{G}$ non è $\perp ds$



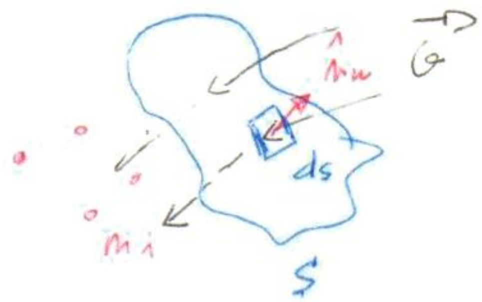
$\hat{n}_n$ = versore normale alla superficie

ds · cosθ

$$d\Phi = |\vec{G}| \cdot ds_\perp = \underbrace{|\vec{G}| ds \cos\theta}_{\vec{G}\cdot\hat{n}_n}$$

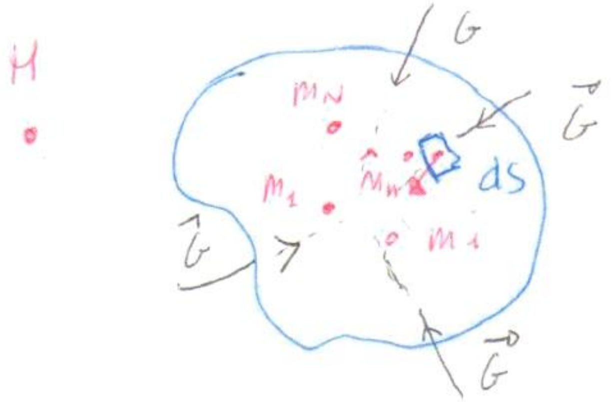
$$= \boxed{d\Phi = (\vec{G}\cdot\hat{n}_n)\, ds}$$

Superficie finita S.



$$\Phi_S = \int_S \underbrace{(\vec{G}\cdot\hat{n}_n)\, ds}_{d\Phi}$$

Superficie S chiusa



$$\Phi = \int_{S,\,chiusa} (\vec{G}\cdot\hat{n}_n)\,ds$$

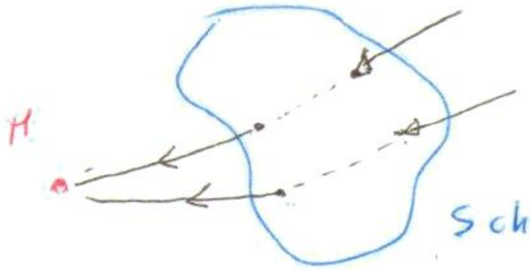
convenzione: se S sup. chiusa $\hat{n}_n$ è entrante nella superf.

Teorema di Gauss

Il flusso del vettore $\vec{G}$ attraverso una superficie chiusa S è proporzionale alla somma delle masse in essa contenute:

$$\boxed{\oint_{S,\,chiusa} = \underbrace{4\pi\gamma}_{\text{costante di proporzionalità}} \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

somma delle masse contenute all'interno della sup. S chiusa.

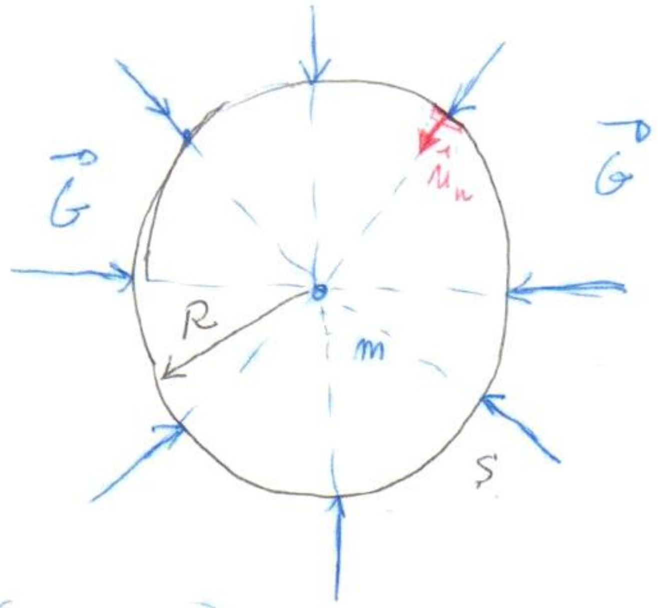


$\boxed{\oint = 0 \quad \text{se } M \text{ è esterna alla superficie}}$

$\vec{E}, \vec{G}$ radiale (entrante o uscente) e proporzionale a $1/r^2$

Esempio 1

Verificare il teor. di Gauss nel caso di una ~~carica~~ massa puntiforme posta al centro di una superficie (di Gauss) sferica.



$$\Phi = \int_S (\vec{G} \cdot \hat{n}_n)\, ds$$

- $\vec{G} \perp$ sup. sferica poiché è radiale (entrante)
- $\hat{n}_n \perp$ sup. sferica.

$$\underbrace{\vec{G} \cdot \hat{n}_n}_{\vec{G} \text{ ed } \hat{n}_n \text{ sono } //} = |\vec{G}| = G$$

$$G = \gamma \frac{m}{R^2}$$

↳ Costante per tutti i punti della superficie sferica

$$\Phi = \int_S (\vec{G} \cdot \hat{n}_n)\, ds = \int_S |\vec{G}|\, ds = \int_S \gamma \frac{m}{R^2}\, ds = \gamma \frac{m}{R^2} \int_S ds =$$

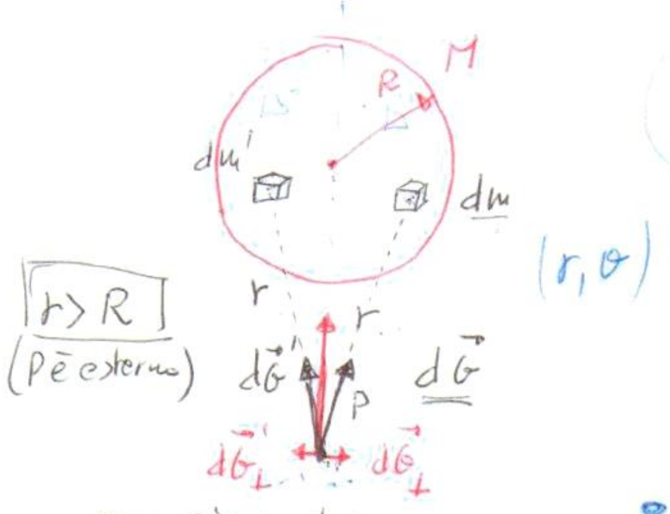
superficie della sfera $4\pi R^2$

$$\Phi = \gamma \frac{m}{\cancel{R^2}} \cdot 4\pi \cancel{R^2} \Rightarrow \boxed{\Phi = 4\pi\gamma \cdot m}$$

Esempio 2

Applicazione del teor. di Gauss per il calcolo di $\vec{G}$ generato da una distribuzione sferica di massa

per simmetria $dm = dm'$



$\boxed{r > R}$ (P è esterno)

(r, θ)

$d\vec{G} + d\vec{G}'$ = vettore radiale (entrante)

perché le componenti ortogonali a quella radiale di $d\vec{G}$ e $d\vec{G}'$ si elidono (sono uguali e contrarie)

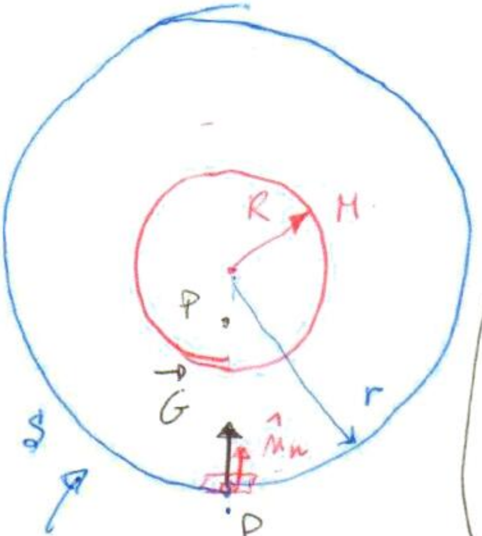
$\Downarrow$

per simmetria $|d\vec{G}| = |d\vec{G}'|$

- $\vec{G}$ è radiale entrante

- $|\vec{G}|$ è solo funzione di r (distanza di P dal centro della sfera); $|\vec{G}|$ non dipende da θ perché la distribuzione di massa ha simmetria sferica $\Rightarrow$ il sistema è invariante per rotazioni.

$$\vec{G} = f(r)\,\hat{u}_r$$



Superficie di Gauss sferica concentrica

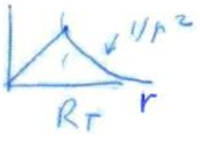
- def. di Φ: $\Phi = \int_S \vec{G}\cdot\hat{u}_n\, dS = \int_S \underbrace{|\vec{G}|}_{\text{costante sulla sfera}} dS \Rightarrow$ $\vec{G}\cdot\hat{u}_n = |\vec{G}|$

$$\boxed{\Phi = |\vec{G}|\int_S dS = 4\pi R^2 |\vec{G}|}$$

- Teor. di Gauss $\boxed{\Phi = 4\pi\gamma M}$

$\cancel{4\pi} R^2 |\vec{G}| = \cancel{4\pi}\gamma M$

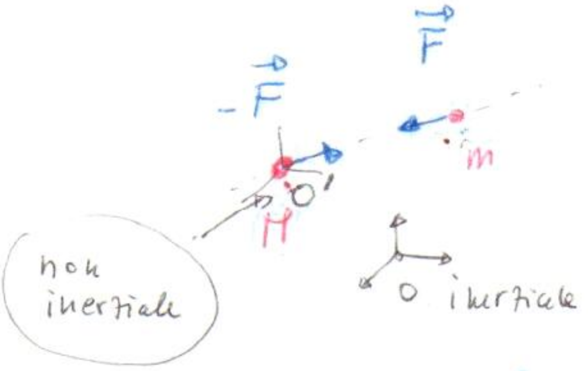
stessa espressione di $\vec{G}$ generato da massa M puntiforme



$$\boxed{|\vec{G}| = \gamma\frac{M}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{G} = -\gamma\frac{M}{r^2}\cdot\hat{u}_r}$$

Equazione del moto: sistema di due corpi (es. Sole - pianeta)

L22-4



$$|\vec{F}| = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

pianeta $\vec{F} = m\vec{a}_m \Rightarrow \vec{a}_m = \frac{\vec{F}}{m}$

Sole $-\vec{F} = M\vec{a}_M \Rightarrow \vec{a}_M = -\frac{\vec{F}}{M}$

Usare leggi di trasformazione dell'accelerazione nel cambio di S.R.

$$\text{in } O' \rightarrow \vec{a}'_m = \underbrace{\vec{a}_m}_{\text{in } O} - \underbrace{\vec{a}_M}_{\vec{a}_{O'}} = \frac{\vec{F}}{m} - \left(-\frac{\vec{F}}{M}\right) = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{M} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{a}'_m = \frac{\vec{F}}{\mu}} \quad \text{con} \quad \boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}}$$

μ = massa ridotta del sistema

dim

IL moto osservato dal S.R. O' in cui M è a riposo (e questo è un S.R. non inerziale) è equivalente a quello osservato in un S.R. inerziale (O) per un punto di massa μ sottoposto alla stessa forza $\vec{F}$ cui è sottoposto il corpo di massa m.

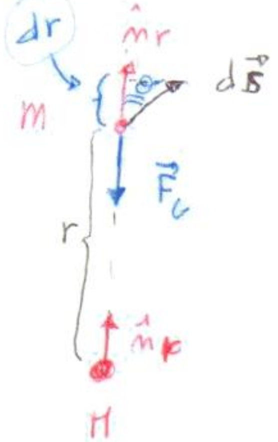
$$T = \frac{1}{2}\mu v_m^2$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

L22-5

La forza gravitazionale è una forza centrale $\Rightarrow$ conservativa

- Trovare l'espressione dell'energia pot. grav.



$$dW_G = \vec{F}_G \cdot d\vec{s} = \underbrace{-\gamma \frac{Mm}{r^2}\,\hat{u}_r}_{\vec{F}_G} \cdot d\vec{s}$$

$\rightarrow |\hat{u}_r| \cdot ds\cos\theta = \underbrace{ds\cos\theta}_{dr}$, con $|\hat{u}_r| = 1$

$$\boxed{dW_G = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr}$$

Spostamento finito

$$W_{A,B} = \int_A^B -\gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr = -\gamma Mm \int_A^B \frac{dr}{r^2} =$$

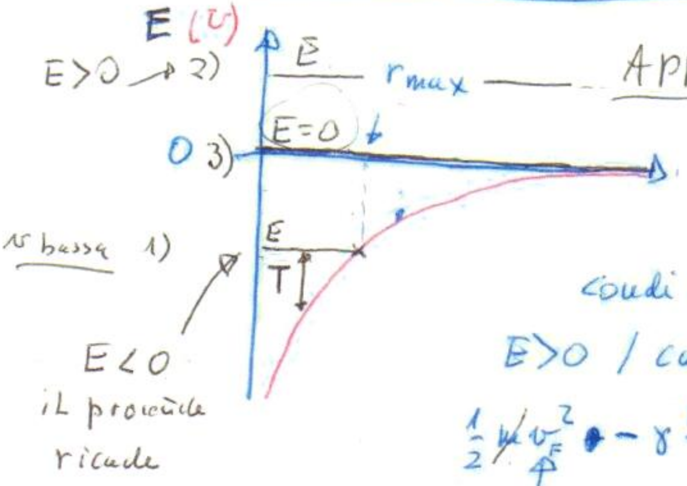
$$= -\gamma Mm \left[-\frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} \right] = -\gamma Mm \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \underbrace{-\gamma \frac{Mm}{r_A}}_{U_A} - \underbrace{\left(-\gamma \frac{Mm}{r_B} \right)}_{U_B}$$

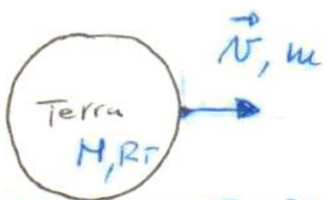
$$\boxed{\text{con } U = -\gamma \frac{Mm}{r}}$$

(avendo posto la costante additiva arbitraria pari a zero)

Diagramma dell'energia potenziale gravitazionale



Applicazione: Velocità di fuga



condiz. di fuga:

$E > 0$ / caso limite $E = 0 \Rightarrow T + U = 0$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_F^2 - \gamma \frac{M \cancel{m}}{R_T} = 0 \qquad v_F^2 = \frac{2\gamma M}{R_T} \Rightarrow v_F > \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_T}}$$

$$\boxed{v_F = 1.1\ 10^4\ m/s}$$

POTENZIALE CENTRIFUGO E POTENZIALE EFFICACE / L22-6

Es sistema terra-luna

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \gamma \frac{mM}{r}$$

energia mecc. luna

massa ridotta sistema terra-luna

- Uso coordinate polari centrate al centro della terra (SR Terra)

$$\vec{v} = v_r \hat{u}_r + v_\theta \hat{u}_\theta \qquad \left[\text{Con. } v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

$O' \equiv$ Terra

$$E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_\theta^2}_{} - \gamma \frac{mM}{r}$$

Trasformiamo da termine cinetico a termine di potenziale utilizzando la conservazione del momento angolare

- $L = r p_\theta = r\mu v_\theta \Rightarrow v_\theta = \frac{L}{\mu r} \Rightarrow v_\theta^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$

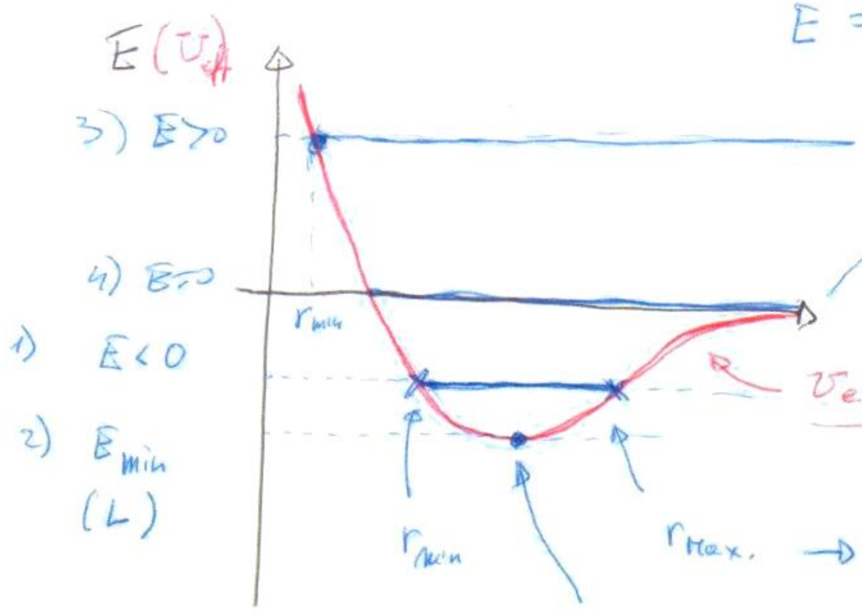
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu v_\theta^2 = \frac{1}{2}\mu \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\mu v_\theta^2 = \frac{L^2}{2\mu r^2}}$$

costante

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{\text{potenziale centrifugo}} - \gamma \frac{mM}{r}}_{\text{potenziale efficace}}}$$

$E = T + U$

$T > 0$



orbita libera iperbolica

orbita libera parabolica

U_{eff} (dipende dal valore di L)

r_{max} → orbita ellittica

$r_{min} \equiv r_{max}$ ⇒ orbita circolare