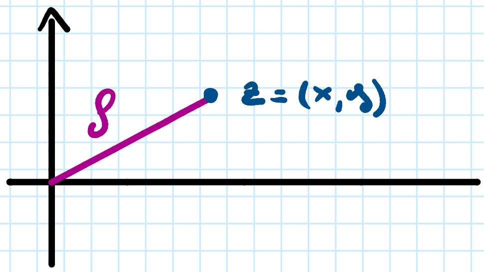
Lezione 3 (28/09)

Numeri complessi

Dato $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ si definisce:

- modulo di z il numero reale

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



cioè la distanza di z dall'origine $(0,0)$

Notare che se $z = (x, 0) = x \in \mathbb{R}$

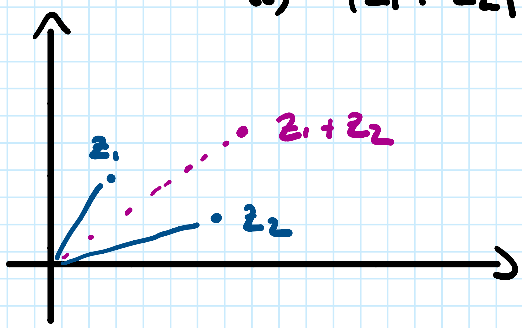
allora $|z| = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(tipico errore $\sqrt{x^2} = x$!)

Proprietà

i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

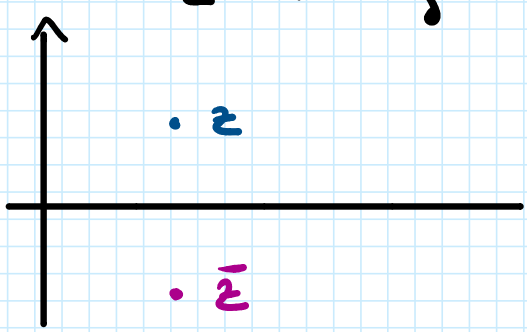
ii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$\searrow$ disuguaglianza triangolare

- complesso coniugato di z il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy$$



cioè il simmetrico di z rispetto all'asse x

Proprietà

i) $\bar{\bar{z}} = z$

ii) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Inoltre

iv) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$$\left((x+iy)(x-iy) = x^2 - i\cancel{xy} + i\cancel{xy} - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \right)$$

Segue formula per il reciproco: se $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

da cui, se $z_2 \neq 0$,

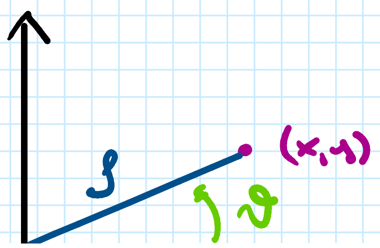
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dots = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Osservo infine che

$$z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x$$
$$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy$$

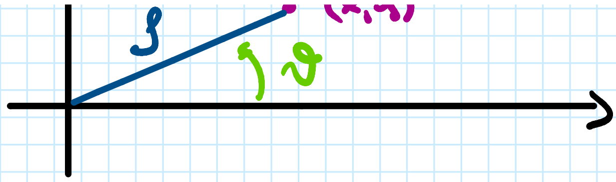
da cui $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Forma goniometrica/esponenziale dei numeri complessi



$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

può essere individuato anche tramite



può essere individuato anche tramite

- il suo modulo

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

- "il" suo angolo, misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle x

ϑ è indeterminato se $\rho = 0$;
se $\rho > 0$ ϑ è determinato a meno di multipli di 2π;
ϑ si chiama argomento di (x,y);
argomento principale se
$-\pi < \vartheta \leq \pi$

In formule

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

coordinate polari in $\mathbb{R}^2$

Applichiamo ai numeri complessi ($\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{C}$)

$$z = x + iy = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta$$
$$= \underbrace{\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}_{\text{forma goniometrica di } z}$$

Si ha

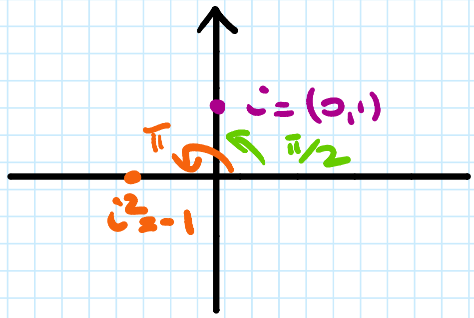
$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)]$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2$$
$$+ i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2\sin\vartheta_1)]$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)]$$

Quindi

Quindi:

$z_1 \cdot z_2$ ha come
- <u>modulo</u>: prodotto dei moduli
- <u>argomento</u>: somma degli argomenti

es) $i = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = 1\cdot\left(\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right)$



Quindi:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= i\cdot i \\
&= 1\cdot 1\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Ancora più "bella" è la forma esponenziale che si basa sulla formula

$$\boxed{e^{i\vartheta} \overset{\text{def}}{=} \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

($e = 2,71828\ldots$ numero di Nepero)

daremo una "spiegazione" quando faremo la formula di Taylor

Per $\vartheta = \pi$ ho

$$
\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

Applichiamo ai numeri complessi:

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \\
&= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)
\end{aligned}
$$

$$z = x + iy$$
$$= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$= \underbrace{\rho e^{i\vartheta}}_{\text{forma esponenziale di } z}$$

Si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$
$$\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\vartheta}$$

Esercizio Dato $z = \sqrt{3} + i$, calcolare z^5

Si ha $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Per trovare ϑ

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{6}$$

Quindi $z = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

da cui
$$z^5 = 2^5 e^{i\frac{5}{6}\pi}$$
$$= 32\,(\underbrace{\cos\tfrac{5}{6}\pi}_{-\sqrt{3}/2} + i\underbrace{\sin\tfrac{5}{6}\pi}_{1/2})$$
$$= -16\sqrt{3} + 16i$$

$$= -16\sqrt{3} + 16i$$

Radici n-esime complesse

Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ studiamo

$$\boxed{z^n = w} \qquad \text{con } z, w \in \mathbb{C} \ (w \neq 0)$$

Scriviamo

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$
$$w = r e^{i\varphi}$$

Allora l'eqz diventa

$$\rho^n e^{in\vartheta} = r e^{i\varphi}$$

cioè
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\vartheta = \varphi + 2\pi k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

cioè
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \vartheta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi l'eqz $z^n = w$ ha le soluzioni:

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}, \qquad z_2 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}$$
$(k=0)$ $\qquad$ $(k=1)$

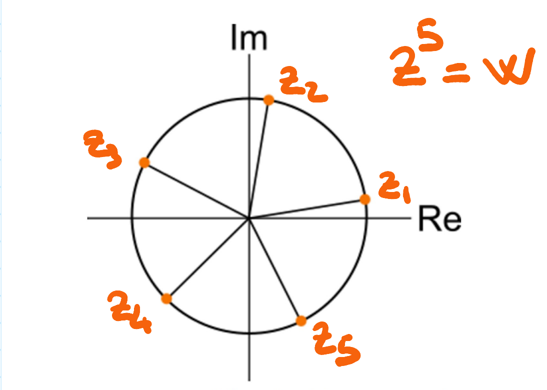
$$z_3 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n}\right)}, \ \ldots\ldots, \quad z_n = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}$$
$(k=2)$ $\qquad$ $(k=n-1)$

Conclusione: ogni numero complesso w non nullo ha esattamente n radici distinte in $\mathbb{C}$

Geometricamente [illegible] vertici

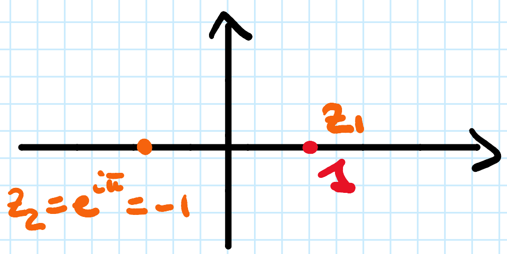
ha esattamente (n) radici distinte in $\mathbb{C}$

Geometricamente, sono disposte ai vertici di un n-gono regolare iscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$

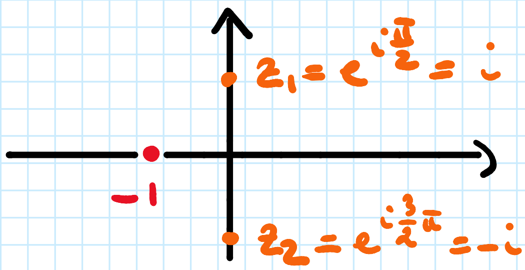


Rappresentazione delle radici del numero complesso nel piano di Argand-Gauss.

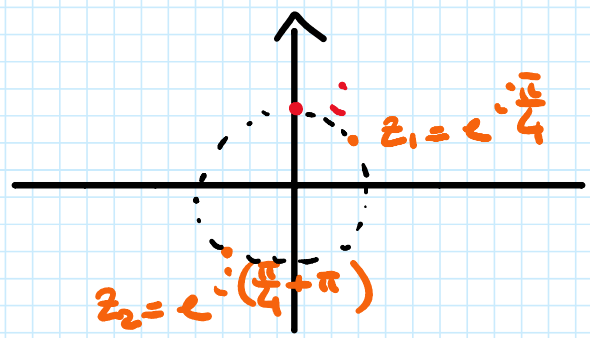
es $z^2 = 1 \ (= e^{i0})$



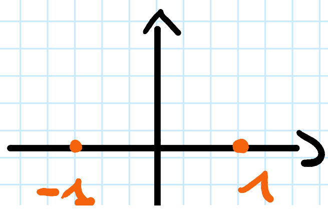
$z^2 = -1 \ (= e^{i\pi})$

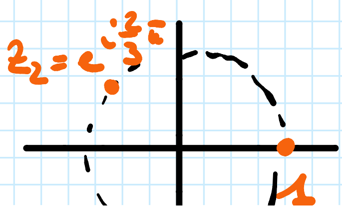


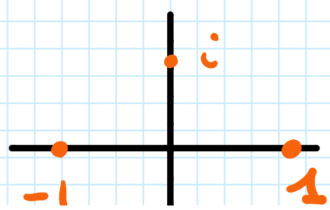
$z^2 = i \ (= e^{i\frac{\pi}{2}})$

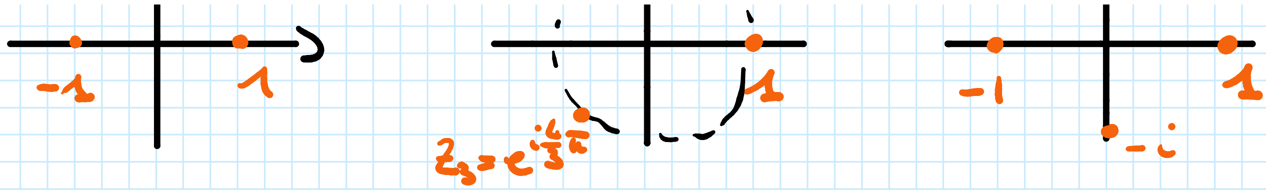


es $z^n = 1 \ (= e^{i0})$









$n=2$ $\qquad$ $n=3$ $\qquad$ $n=4$

Chiudiamo con un commento sulle
equazioni di secondo grado a coefficienti complessi

$$az^2+bz+c=0 \qquad \text{con } a,b,c\in\mathbb{C},\ a\neq 0,\ z\in\mathbb{C}$$

(ad es $(2+i)z^2+(4-3i)z+i=0$)

La formula

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{con } \Delta=b^2-4ac$$

vale ancora, interpretando $\pm\sqrt{\Delta}$ come le 2 radici complesse di $\Delta\in\mathbb{C}$