Formulario di Meccanica Classica

MOTO RETTILINEO UNIFORME

- legge oraria:
  $x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0)$
- velocità istantanea:
  $v(t) = v_0 = cost.$
- accelerazione istantanea:
  $a(t) = 0$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

- legge oraria:
  $x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2$
- velocità istantanea:
  $v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)$
- accelerazione istantanea:
  $a(t) = a = cost.$
- relazione tra velocità, accelerazione e spazio percorso:
  $v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0)$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}$$

- periodo e frequenza:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \longrightarrow \quad \nu = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- accelerazione centripeta:

$$a_c = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

MOTO PARABOLICO

- legge oraria:

$$x(t) = v_0 \cos\vartheta\,(t - t_0)$$

$$y(t) = v_0 \sin\vartheta\,(t - t_0) - \frac{1}{2} g\,(t - t_0)^2$$

- equazione della traiettoria:

$$y(x) = x \tan\vartheta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\vartheta} x^2$$

- gittata:

$$x_G = \frac{2v_0^2}{g} \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta}{g}$$

- quota massima:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta}{g}$$

- tempo di volo:

$$t_v = \frac{x_G}{v_0 \cos\vartheta} = 2t_{max} = \frac{2v_0 \sin\vartheta}{g}$$

MOTI PIANI

- accelerazione tangenziale ed accelerazione centripeta:

  $a_t = a_\varphi = \frac{dv}{dt}$
  $a_c = a_r = \frac{v^2}{r}$

- velocità istantanea in coordinate polari:

  $\vec{v}(t) = v_\varphi\,\hat{\varphi} + v_r\,\hat{r} = r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} + \frac{dr}{dt}\,\hat{r}$

- accelerazione istantanea in coordinate polari:

  $\vec{a}(t) = a_\varphi\,\hat{\varphi} + a_r\,\hat{r}$

  $\vec{a}(t) = \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\hat{\varphi} + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]\hat{r} = \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\hat{\varphi} + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}$

VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

- vettore velocità istantanea:
  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

- vettore velocità angolare:

  $\vec{\omega} = \frac{1}{r^2}\vec{r}\times\vec{v}$

- formula di Poisson:
  $\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}$

- accelerazione tangenziale ed accelerazione centripeta:

  $a_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$

  $a_c = \vec{\omega}\times\vec{v}$

VELOCITÀ AREOLARE

- vettore velocità areolare:
  $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$

- modulo del vettore velocità areolare:
  $\Gamma = \frac{1}{2}r\,v_\varphi = \frac{1}{2}r\,v\,\sin\varphi$

TRASFORMAZIONI TRA SISTEMI DI RIFERIMENTO

- posizione:

  $\vec{r}_S(P) = \vec{r}_{S'}(P) + \vec{OO'}$

- velocità:

  $\vec{v}_S(P) = \vec{v}_{S'}(P) + [\vec{v}_S(O') + \vec{\omega} \times \vec{O'P}]$

- accelerazione:

  $\vec{a}_S(P) = \vec{a}_{S'}(P) + [\vec{a}_S(O') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_S(P)$

- descrizione dei simboli:

  $\vec{r}_S(P)$= posizione del punto P nel sistema di riferimento S.

  $\vec{r}_{S'}(P)$= posizione del punto P nel sistema di riferimento S′.

  $\vec{v}_S(P)$= velocità del punto P nel sistema di riferimento S.

  $\vec{v}_{S'}(P)$= velocità del punto P nel sistema di riferimento S′.

  $\vec{v}_S(O')$= velocità del punto O′ nel sistema di riferimento S.

  $\vec{a}_S(P)$= accelerazione del punto P nel sistema di riferimento S.

  $\vec{a}_{S'}(P)$= accelerazione del punto P nel sistema di riferimento S′.

  $\vec{a}_S(O')$= accelerazione del punto O′ nel sistema di riferimento S.

  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})$= accelerazione centrifuga.

  $2\vec{\omega} \times \vec{v}_S(P)$= accelerazione di Coriolis.

PRINCIPI DELLA DINAMICA

- principio di inerzia, legge di Newton e terzo principio di azione e reazione:

  (1) Si definisce *sistema di riferimento inerziale*, un sistema di riferimento in cui un corpo soggetto a forze di risultante nulla permane nello stato di quite o di moto rettilineo uniforme.

  (2) In un sistema di riferimento inerziale un corpo soggetto ad un sistema di forze aventi risultante $\vec{F}$ subisce un'accelerazione che ha stessa direzione e stesso verso della forza risultante e modulo pari al rapporto tra il modulo della forza risultante ed una costante nota come *massa inerziale*.

  (3) Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_A$ su un corpo B, quest'ultimo eserciterà una forza $\vec{F}_B$ sul corpo A con stessa direzione stesso modulo ma verso opposto ad $\vec{F}_A$.

FORZE DI ATTRITO

- modulo della forza di attrito:

  $F_{att} = \mu_s N$ (statico)
  $F_{att} = \mu_d N$ (dinamico)
  $F_{att} = b\, v$ (viscoso)

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

- legge di gravitazione universale:

  $\vec{F} = -\frac{G\, m\, M}{r^2}\hat{r}$ con $G = 6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ (costante di gravitazione universale)

- posizione del perielio e dell'afelio:

  $\frac{1}{r} = \frac{GM \pm \sqrt{G^2M^2 + 2EL^2m^{-3}}}{L^2m^{-2}}$

OSCILLATORE ARMONICO

- forza elastica unidimensionale:
  $\vec{F} = -k\,(x - x_0)\,\hat{x}$
- equazione del moto per l'oscillatore armonico unidimensionale:
  $m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -k(x - x_0)$
- legge oraria dell'oscillatore armonico unidimensionale:
  $x(t) = A\sin(\omega\,t + \phi) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$
- velocità istantanea dell'oscillatore armonico unidimensionale:
  $v(t) = A\omega\cos(\omega\,t + \phi)$
- accelerazione istantanea dell'oscillatore armonico unidimensionale:
  $a(t) = -A\omega^2\sin(\omega\,t + \phi) = -\omega^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$

PENDOLO SEMPLICE

- equazione del moto:
  $m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{T}$
  $\hat{r} : m\frac{v^2}{l} = m\frac{\dot{\vartheta}^2}{l} = T - mg\cos\vartheta$
  $\hat{\vartheta} : m\frac{dv}{dt} = ml\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$
- legge oraria nella variabile angolare:
  $\vartheta(t) = \vartheta_0\sin(\omega\,t + \phi)$
- pulsazione e periodo:
  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE O DELL'ENERGIA CINETICA

- teorema delle forze vive:
  $W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$

ENERGIA POTENZIALE

- lavoro delle forze conservative ed energia potenziale:
  $W = -\Delta U = U(A) - U(B)$
- forza peso:
  $W = -\int_{z_A}^{z_B} mg\, dz = -mg(z_B - z_A)$
- forza elastica:
  $W = -\int_{x_A}^{x_B} kx\, dx = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$
- forza centrifuga:
  $W = \int_{r_A}^{r_B} m\omega^2 r\, dr = \frac{1}{2}m\omega^2(r_B^2 - r_A^2)$
- forza gravitazionale:
  $W = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2}\, dr = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

- conservazione dell'energia:
  $W = W_{cons} + W_{noc} = \Delta K$

  $W_{noc} = \Delta U + \Delta K = (U_{fin} + K_{fin}) - (U_{in} + K_{in}) = \Delta E = E_{fin} - E_{in}$

IMPULSO E QUANTITÀ di MOTO

- legge di Newton:

  $\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d}{dt}\vec{v}$ avendo definito la quantità di moto: $\vec{p} = m\vec{v}$

- definizione dell'impulso di una forza:

  $\vec{i} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$

URTO CENTRALE ELASTICO

- conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica:

  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$

  $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

- soluzioni per le velocità finali nel caso unidimensionale:

  $u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2$

  $u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_2$

MOMENTO ANGOLARE

- momento angolare:

  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ il cui modulo si può scrivere: $L = mr^2\omega = mr^2\frac{d\vartheta}{dt}$

- teorema del momento angolare:

  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

CORPO RIGIDO

- posizione, velocità ed accelerazione del centro di massa (caso discreto):

$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{p}_{tot}}{m} = \frac{\vec{p}_{cm}}{m}$

$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$

- posizione, velocità ed accelerazione del centro di massa (caso continuo):

$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_m \vec{r}\, dm}{\int dm}$

$\vec{v}_{cm} = \frac{\int_m \vec{v}\, dm}{\int dm} = \frac{\vec{p}_{tot}}{m} = \frac{\vec{p}_{cm}}{m}$

$\vec{a}_{cm} = \frac{\int_m \vec{a}\, dm}{\int dm}$

- componenti del vettore posizione del centro di massa in coordinate cartesiane (caso continuo):

$x_{cm} = \frac{\int_m x\, dm}{\int dm}$

$y_{cm} = \frac{\int_m y\, dm}{\int dm}$

$z_{cm} = \frac{\int_m z\, dm}{\int dm}$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

- prima equazione cardinale:

$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\vec{p}_{cm}$

- seconda equazione cardinale:

$\vec{M}_{ext} = \sum_i \vec{M}_i = \frac{d}{dt}\vec{L}_{tot}$ (polo fisso)

TEOREMI DI KOENIG

- teorema di Koenig per il momento angolare:

  $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel} = \vec{r} \times \vec{p}_{cm} + \int_m (\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{rel})\, dm$

- teorema di Koenig per l'energia cinetica:

  $K_{tot} = K_{cm} + K_{rel} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \int_m v_{rel}^2\, dm$

MOMENTO DI INERZIA

- momento di inerzia:

  $I = \sum_i m_i b_i^2$ con b_i= distanza dall'asse di rotazione di ciascun punto di massa m_i

  $I = \int_m b^2\, dm$ con b= distanza dall'asse di rotazione di ciascun elemento dm

- teorema di Huygens-Steiner o degli assi paralleli:

  $I = I_{cm} + m_{tot} a^2$

  a= distanza tra asse di rotazione passante per il c.m. e quello parallelo passante per O

PENDOLO FISICO

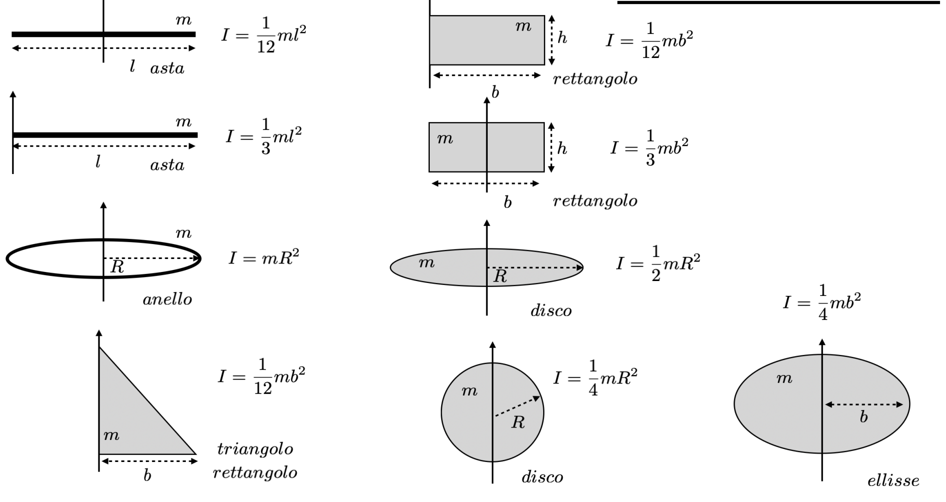
- equazione del moto:

  $\vec{M}_{ext} = \vec{r} \times m\vec{g} = \frac{d}{dt}\vec{L} \longrightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{mgr_{cm}}{I}\vartheta$

- periodo:

  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_{cm}}}$

FIGURE PIANE OMOGENEE



SOLIDI OMOGENEI