Tutoraggio lunedì 4 dicembre: Forme bilineari e quadratiche

Svolgere i seguenti esercizi, la cui soluzione verrà commentata in aula:

Esercizio 1. (Tratto dall'es. [30] del foglio 8) In V_3 con base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è dato il vettore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

1. Verificare che la funzione $Q : V_3 \to \mathbb{R}$, definita da:

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{x}),$$

è una forma quadratica.

2. Verificare che la matrice associata alla forma quadratica Q rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare l'insieme $\mathcal{I}$ dei vettori isotropi di Q. Dire se $\mathcal{I}$ è un sottospazio vettoriale di V_3.

Esercizio 2. (Tratto dall'es. [18] del foglio 8) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire, senza fare alcun calcolo, se esiste una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ sia diagonale e in caso affermativo trovarla.
2. Si consideri la foma bilineare simmetrica φ su V_3 la cui matrice rappresentativa in una base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è A. Scrivere esplicitamente φ in componenti nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.
3. Determinare la dimensione e una base dello spazio φ-ortogonale a $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Tale spazio è in somma diretta con $\mathcal{W}$?
4. Determinare, se esiste, un vettore isotropo non nullo della forma quadratica Q associata alla forma bilineare simmetrica φ. Il cono isotropo è un sottospazio di V_3?

Esercizio 3. (Caccia all'errore) Tra gli appunti di unə vostrə amicə leggete questa **proposizione errata** con un tentativo di dimostrazione:

Proposizione. Siano A e B due matrici congruenti, allora $\det(A) = \det(B)$.

Dimostrazione. Poiché A e B sono congruenti, allora ${}^tPBP = A$, con ${}^tP = P^{-1}$. Per il *Teorema di Binet*:

$$\det(A) = \det\left({}^tPBP\right) = \det\left({}^tP\right)\det(B)\det(P) = \det\left(P^{-1}\right)\det(B)\det(P) =$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(B)\det(P) = \det(B).$$

L'enunciato **è falso** perché ad esempio le due matrici $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ hanno determinanti diversi, ma sono congruenti, infatti

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Trovate l'errore nella dimostrazione e correggete l'enunciato.

Esercizio 4. Dimostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

non sono congruenti. [*Suggerimento: utilizzare l'enunciato corretto nell'esercizio precedente.*]