Tutoraggio mercoledì 29 novembre: Teorema spettrale e recap applicazioni lineari

---

Commenteremo la soluzione dei seguenti esercizi:

Esercizio 1. (Es. 5 del tutorato del 23/11/2023) Si fissi una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dimostrare che la matrice ${}^tAA$ ha solamente autovalori non negativi. [*Suggerimento: utilizzare il Teorema spettrale.*]

Esercizio 2. (Es. 8 del tutorato del 17/11/2023) Dimostrare che un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale reale V tale che $f^2 = f$, dove $f^2 = f \circ f$ ha come possibili autovalori solo i numeri 0 e 1.

Svolgere il seguente esercizio, la cui soluzione verrà commentata in aula:

Esercizio 3. Esercizio 1 della prova scritta del 20/06/2022: vedere pagina successiva per il testo dell'esercizio.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 20/06/2022

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2x2, munito del prodotto scalare standard $M \cdot N := tr(M^t N)$. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(i) **(3 pt)** Trovare tutti gli autovalori ed autovettori di f.

(ii) **(3 pt)** Costruire una base ortonormale di V contenente almeno un autovettore di ogni autospazio.

(iii) **(3 pt)** Trovare un esempio di sottospazio $W \neq \{0\}$ di V tale che la restrizione $f_{|W} : W \to W$ sia diagonalizzabile.

Determinare il piu' grande sottospazio avente questa proprieta'.

(iv) **(4 pt)** Sia $W \leq V$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Determinare il sottospazio immagine $f(W)$ e la sua controimmagine $f^{-1}(f(W))$.

Sia $Z := \{M \in V : tr(M + M^t) = 0\}$. Individuare $f^{-1}(Z)$.

Determinare $f^{-1}(Im(f))$.

(v) **(3 pt)** Si ricordi che un sottospazio $W \leq V$ si dice invariante se $f(W) \leq W$. Trovare sottospazi invarianti di dimensione 1,2,3.