Esercizio 1. [**Esame 10/06/2021, Esercizio 2**]
Si consideri su $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\mathscr{B} := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e la forma quadratica Q definita dal polinomio $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2z^2$. Sia φ la corrispondente forma bilineare.

1. Trovare la matrice associata a φ.
2. Calcolare la segnatura di φ.
3. Trovare una base $\mathscr{B}'$ che diagonalizzi φ e scrivere le matrici di cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ e viceversa. Usare la formula di cambiamento base per trovare la matrice associata a φ rispetto a $\mathscr{B}'$.
4. Dire se esiste una base $\mathscr{C}$, canonica per φ, rispetto cui la matrice associata a φ abbia elementi 1, -1, 4 sulla diagonale. Nel caso, trovare tale base.
5. Trovare un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ rispetto cui la restrizione di φ non sia nè definita positiva nè definita negativa.
6. Se possibile, trovare un vettore isotropo in $\mathbb{R}^3$ che non appartenga al vostro spazio W, ed un vettore isotropo appartenente a W.

Esercizio 2. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 16**]
Si consideri la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

1. Classificare Q e scriverla in forma normale.
2. Scrivere Q in forma canonica e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale Q assume tale espressione.

Esercizio 3. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 4**]
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

1. Trovare la matrice, rispetto alla base $\mathscr{B}$, del prodotto scalare φ definito in modo opportuno sapendo che $\mathscr{B}' = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale (rispetto a φ).
2. Determinare la dimensione e una base per $\mathscr{F}^\perp$ complemento ortogonale (rispetto a φ) per piano vettoriale:
$$\mathscr{F} = \{\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \in V \mid x_1 + x_3 = 0\}.$$
3. Calcolare la norma del vettore $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ (rispetto a φ).

Esercizio 4. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 22**]
Si consideri la forma quadratica $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:
$$Q(\mathbf{x}) = -x_2^2 + 2x_1x_3 + x_4^2$$
con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

1. Classificare Q e calcolarne la segnatura.
2. Scrivere Q in forma normale e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale Q assume tale forma.
3. Determinare un vettore isotropo non nullo di Q.
4. Determinare le equazioni del sottospazio vettoriale ortogonale a:
$$\mathscr{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 - x_3 = x_1 - 2x_3 = 0\}$$
e scrivere una sua base ortogonale (rispetto alla forma bilineare simmetrica φ associata a Q).