

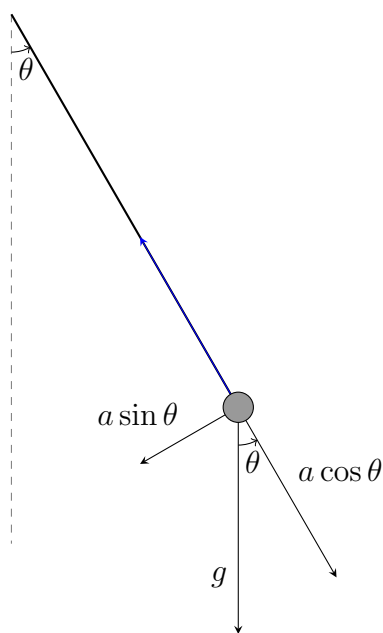
Relazione di laboratorio: Pendolo composto

Matteo Herz

Matricola: 1098162

Università degli Studi di Torino

4 Giugno 2024



Indice

1	Scopo dell'esperienza	3
1.1	Pendolo composto e pendolo semplice	3
2	Strumentazione	4
3	Esperienza in laboratorio	4
3.1	Errore su T	5
3.2	Periodi di oscillazione	5
3.3	Fit su carta millimetrata	6
3.4	Calcolo di g	7
3.4.1	Test di Gauss ($g_t - g_s$)	8
3.4.2	Esito del test	8
4	Analisi dati - 1^a Parte	8
4.1	$T_1(x)$ - Polinomio di 2° grado	9
4.2	$T_1(x)$ - Polinomio di 3° grado	10
4.3	$T_1(x)$ - Polinomio di 4° grado	11
4.4	$T_1(x)$ - Polinomio di 5° grado	12
4.5	$T_2(x)$ - Polinomio di 2° grado	13
4.6	$T_2(x)$ - Polinomio di 3° grado	14
4.7	Test di Fisher	15
4.7.1	Dati e ipotesi	15
4.7.2	Esito del test	15
5	Analisi Dati - 2^a Parte	15
5.1	Intersezione $T(x_A)$	16
5.2	Intersezione $T(x_B)$	17
5.3	Test di Gauss ($T_{x_A} - T_{x_B}$)	17
5.3.1	Dati e ipotesi	17
5.3.2	Esito del test	18
5.4	Calcolo di g con T_{x_A} e T_{x_B}	18
5.5	Test di Gauss ($g_A - g_t$)	18
5.5.1	Dati e ipotesi	18
5.5.2	Esito del test	18
5.6	Test di Gauss ($g_B - g_t$)	19
5.6.1	Dati e ipotesi	19
5.6.2	Esito del test	19
6	Errori sistematici	19
7	Conclusioni	21
A	Fit su carta millimetrata	22

1 Scopo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza di laboratorio è quello di determinare il valore dell'accelerazione di gravità g , alla latitudine di Torino, attraverso il periodo di oscillazione di un pendolo composto. Di seguito un breve riassunto teorico sulla base del quale verrà condotta l'esperienza di laboratorio.

1.1 Pendolo composto e pendolo semplice

Il periodo di oscillazione di un pendolo composto è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{hmg}} \quad (1)$$

Di conseguenza:

$$g = \frac{4\pi^2 I}{hmT^2}$$

Con questa espressione g dipende non solo da T ma anche da:

- I : momento di inerzia
- h : distanza del centro di massa dal polo

Sapendo invece che il periodo di un pendolo semplice equivale a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

si nota che il periodo di oscillazione del pendolo composto è quello di un pendolo semplice avente lunghezza:

$$l = \frac{I}{hm}$$

Dove l viene detta "lunghezza ridotta" del pendolo composto.

Durante l'esperienza di laboratorio il nostro obiettivo sarà infatti proprio quello di determinare il periodo di oscillazione di un pendolo semplice equivalente a quello del nostro pendolo composto.

Attraverso una serie di passaggi e sostituzioni matematiche si ottiene un risultato utile, che dimostra come nel caso in cui si abbia un pendolo semplice avente stesso periodo di oscillazione (T) di un pendolo composto, nel caso particolare in cui quest'ultimo si trovi nella condizione per cui i periodi calcolati su entrambi i suoi poli di oscillazione (coltelli) siano uguali, la lunghezza del pendolo semplice risulti proprio:

$$l = h_1 + h_2 \quad (3)$$

Dove h_1 e h_2 rappresentano le distanze dei due poli di oscillazione dal centro di massa del pendolo composto. Il periodo del pendolo composto coincide allora con il periodo di un pendolo semplice avente lunghezza pari alla distanza tra i due poli di oscillazione del pendolo composto, ovvero l . Di conseguenza, conoscendo tale periodo di oscillazione, g è calcolabile semplicemente tramite l'equazione (2):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (4)$$

L'esperienza in laboratorio consisterà dunque nel trovare la posizione della massa mobile lungo il pendolo composto tale per cui si verificherà la condizione $T_1 = T_2$, dove con T_1 e T_2 indichiamo rispettivamente il periodo calcolato con polo di oscillazione il primo coltello, vicino alla massa fissa, ed il periodo calcolato con polo di oscillazione il 2° coltello, per poter poi procedere a calcolare g dall'equazione (4).

2 Strumentazione

Elenco della strumentazione utilizzata in laboratorio:

- Pendolo reversibile
- PC con interfaccia grafica e funzioni di cronometro
- Fotocellula collegata al PC (sensibilità: 0.001 s)
- Metro a nastro (sensibilità: 1 mm)

3 Esperienza in laboratorio

Nella fase preliminare dell'esperienza di laboratorio abbiamo misurato alcuni valori utili per la nostra esperienza, a partire della distanza l tra i due coltelli. Abbiamo misurato inoltre lo spazio che intercorre tra la massa fissa e il coltello a lei vicino, in quanto se nel peggiore dei casi, per errore, avessimo spostato la massa fissa, sarebbe stato importante rimetterla esattamente alla stessa distanza, altrimenti sarebbe cambiato il momento di inerzia del pendolo e di conseguenza anche la posizione reciproca tra le due masse per ottenere l'isocronismo desiderato. Abbiamo infine posizionato la massa mobile ad una distanza a piacere vicino al primo coltello, annotandola, in modo da avere poi già il pendolo pronto per poter cominciare la seconda parte dell'esperienza di laboratorio. Di seguito una tabella riassuntiva con i valori registrati.

<i>Dati</i>	Valore	Incertezza	u.m.
l	99.6	0.1	cm
$d_{m_f-c_1}$	10.5	0.1	cm
$d_{m_f-m_m}$	18.2	0.1	cm
m_f	1.4	-	kg
m_m	1.0	-	kg

Tabella 1: Misurazioni del cilindro

Con l si fa riferimento alla distanza tra i due coltelli, mentre con $d_{...}$ vengono indicate le distanze tra gli oggetti a riportati a pedice. c_1 , c_2 , m_f , m_m corrispondono rispettivamente a: 1° coltello (il più vicino alla massa fissa), 2° coltello, massa fissa e massa mobile. Massa mobile e massa fissa vengono assunte prive di incertezza per quanto riportato dal costruttore.

Lungo tutto l'arco dell'esperienza di laboratorio il pendolo verrà messo in oscillazione con un angolo iniziale $\theta = 5^\circ$.

3.1 Errore su T

Prima di iniziare la ricerca dei periodi di oscillazione del pendolo abbiamo valutato se la sensibilità della fotocellula (0.001 s) fosse sufficiente come incertezza da associare ai periodi di oscillazione (T). Per fare ciò abbiamo eseguito 4 misurazioni distinte del periodo di oscillazione del pendolo con la posizione della massa mobile sempre alla stessa distanza dalla massa fissa, ma andando ogni volta tra una misurazione e l'altra a spostare la massa mobile e poi a rimetterla nella posizione iniziale.

I dati ottenuti mostrano una deviazione standard pari a 0.0006 s per il periodo di oscillazione T_1 , mentre quella relativa a T_2 risulta nulla essendo tutte le misure uguali tra loro.

I valori ottenuti risultano inferiori alla sensibilità della fotocellula, possiamo dunque procedere a considerare quest'ultima come valida incertezza su T .

x ($\pm 0.1\text{ cm}$)	T_1 ($\pm 0.001\text{ s}$)	T_2 ($\pm 0.001\text{ s}$)
18.2	2.138	2.027
	2.137	2.027
	2.137	2.027
	2.138	2.027

3.2 Periodi di oscillazione

Per determinare i periodi di isocronismo del pendolo composto si procede in primo luogo andando a misurare i periodi di oscillazione del pendolo in corrispondenza di diverse posizioni della massa mobile rispetto a quella fissa. Partendo con la massa mobile in prossimità della massa fissa siamo andati a rilevare T_1 e T_2 , rispettivamente periodo calcolato sul 1° e sul 2° coltello, per poi spostare la massa mobile di 10 cm e ripetere l'operazione, il tutto fino a raggiungere il coltello opposto del pendolo. Di seguito una tabella riassuntiva dei valori ottenuti.

$x (\pm 0.1 \text{ cm})$	$T_1 (\pm 0.001 \text{ s})$	$T_2 (\pm 0.001 \text{ s})$
18.2	2.137	2.027
28.2	2.005	2.003
38.2	1.931	1.984
48.2	1.897	1.971
58.2	1.893	1.964
68.2	1.910	1.965
78.2	1.942	1.975
88.2	1.984	1.993
98.2	2.035	2.022

Tabella 2: Valori dei periodi di oscillazione ottenuti per distanze diverse tra m_f e m_m

3.3 Fit su carta millimetrata

Con i dati ottenuti siamo andati poi a costruire un grafico su carta millimetrata che ci permettesse di dedurre le posizioni esatte della massa mobile per ottenere i periodi di isocronismo.

Riportando sulle ascisse le posizioni della massa mobile (cm) e sulle ordinate i periodi di oscillazione (s) siamo in grado di rappresentare con buona precisione l'andamento dei periodi T_1 e T_2 in funzione della distanza della massa mobile da quella fissa. Immagine (9) allegata in appendice.

I due punti di intersezione trovati forniscono una prima stima delle posizioni della massa mobile per cui $T_1 = T_2$. I punti di intersezione trovati graficamente sono:

$$x_A = 28.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$x_B = 92.7 \pm 0.1 \text{ cm}$$

Da quanto riportato in *Tabella 2* si evince subito come le informazioni di questo primo grafico non siano ancora sufficienti a darci la posizione esatta per ottenere la condizione di isocronismo. Ci si accorge subito delle limitazioni di un grafico così esteso realizzato a mano dal fatto che la prima intersezione trovata (x_A) sia già stata osservata nella fase di registrazione dei periodi di oscillazione [3.2], con un risultato diverso.

Per ovviare a ciò si è andati a realizzare altri due grafici su carta millimetrata, questa volta soltanto negli intorno dei due punti di intersezione trovati, in modo tale da aumentare l'accuratezza dei risultati. Ci siamo posizionati nell'intervallo $x \pm 2 \text{ cm}$ eseguendo misure del periodo di oscillazione a intervalli $\Delta x = 1 \text{ cm}$. Tenendo poi sempre conto delle barre di errore di $0.001s$ andremo a tracciare le rette che meglio approssimano l'andamento dei punti nell'intorno considerato. Immagine (10) allegata in appendice.

I punti di intersezione trovati sono effettivamente diversi da quelli ottenuti con il

grafico precedente e misurano:

$$\begin{aligned}x'_A &= 28.4 \pm 0.1 \text{ cm} \\x'_B &= 92.2 \pm 0.1 \text{ cm}\end{aligned}$$

Possiamo ora andare a verificare i periodi di oscillazione T_1 e T_2 nelle due posizioni appena individuate. Di seguito una tabella con i valori ottenuti:

	$x \ (\pm 0.1 \text{ cm})$	$T_1 \ (\pm 0.001 \text{ s})$	$T_2 \ (\pm 0.001 \text{ s})$
x'_A	28.4	2.003	2.002
	28.3	2.003	2.003
x'_B	92.2	2.004	2.003
	92.1	2.003	2.003

Tabella 3: Periodi ottenuti attraverso i valori dei grafici

Non avendo trovato esattamente la condizione $T_1 = T_2$ nei punti x'_A e x'_B , ma comunque valori differenti tra loro nell'ordine della sensibilità della fotocellula, abbiamo provato a ripetere la misura spostandoci di 1 mm nell'intorno di tali punti, visti i possibili errori derivati dalla misura con metro a nastro e dai grafici realizzati a mano. Così facendo si è stati in grado di risalire alle esatte posizioni cercate. In tabella sono state evidenziate le due posizioni per cui è stato possibile ottenere uno stesso periodo di oscillazione su entrambi i coltelli.

3.4 Calcolo di g

A questo punto, ricavati i periodi di isocronismo del pendolo composto, possiamo dare una prima stima di g attraverso la formula (4). L'errore verrà calcolato attraverso la propagazione gaussiana con la seguente formula:

$$\sigma_{g_s} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 \sigma_T^2}$$

Il valore ottenuto sperimentalmente risulta:

$$g_s = 9.801 \pm 0.014^1 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

Siamo andati infine ad eseguire un test di Gauss per verificare la compatibilità tra il valore ottenuto sperimentalmente ed il valore teorico $g_t = 9.806 \text{ m/s}^2$ fornito dall'Handbook of the American Institute of Physics.

¹Si è deciso di usare due cifre significative sia per poter apprezzare la differenza con il valore teorico sia perché approssimare alla prima cifra avrebbe portato ad una sottostima dell'errore del 40%

3.4.1 Test di Gauss ($g_t - g_s$)

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0** : $\bar{\nu} = |g_s - g_t|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_s e g_t sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto².
- **Ipotesi H_1** : $\bar{\nu} = |g_s - g_t|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_s e g_t non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

3.4.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.41 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): il valore g_s calcolato sperimentalmente in laboratorio è compatibile con il valore teorico g_t entro il livello di significatività scelto.

4 Analisi dati - 1^a Parte

Nella prima parte di analisi dati ci siamo concentrati sul ricavare la relazione funzionale che meglio descrivesse l'andamento dei dati ottenuti in laboratorio, ovvero dei periodi di oscillazione in funzione della posizione della massa mobile lungo il pendolo.

Abbiamo quindi fatto uso del metodo di regressione dei minimi quadrati, partendo da un fit con un polinomio di secondo grado per poi proseguire con polinomi di ordine superiore, fino al raggiungimento di risultati accettabili.

A seguito della verifica fatta in laboratorio, esposta al paragrafo [3.1], abbiamo dedotto quale grandezza tra il periodo e la distanza tra le due masse riportare sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate. La verifica eseguita in laboratorio ha mostrato come l'incertezza associata al periodo tenesse già conto di quella sul riposizionamento della massa mobile. Si è ottenuto infatti che anche andando a spostare e poi rimettere in posizione la massa mobile, con un'incertezza legata alla sensibilità del metro a nastro, la deviazione standard tra i periodi di oscillazione del pendolo risultava minore della sensibilità della fotocellula. Di conseguenza sull'asse delle ascisse verrà riportata la distanza della massa fissa da quella mobile, assunta come priva di incertezza.

Per comodità e per fare più chiarezza i fit relativi all'andamento del periodo lungo il primo coltello $T_1(x)$ verranno trattati in una prima sezione, mentre i dati relativi all'andamento lungo il secondo coltello $T_2(x)$ in un'altra, separatamente. Inoltre si è scelto di convertire le misure e le relative incertezze da centimetri a metri, in modo da lavorare con ordini di grandezza maggiori, più facili da trattare.

I parametri ottenuti per i diversi polinomi verranno riportati in tabella al fondo di ogni pagina per non appesantire la relazione.

²L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla sola incertezza di g_s in quanto g_t è assunto come valore esatto, privo di incertezza.

4.1 $T_1(x)$ - Polinomio di 2° grado

Test del χ^2 con polinomio di 2° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento parabolico descritto dalla parabola dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento parabolico descritto dalla parabola dei minimi quadrati.

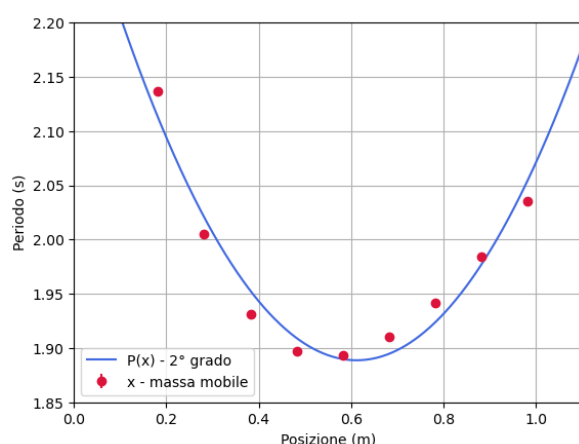


Grafico 1: Polinomio di 2° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	6
χ^2 critico	12.59
χ^2 sospetto	1.64
χ^2 calcolato	2469

Tabella 4: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto non risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, siamo dunque tenuti a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 e ad accettare l'ipotesi H_1 .

Tabella 5: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.342	0.002	s
b	-1.481	0.007	s/m
c	1.210	0.006	s/m^2

4.2 $T_1(x)$ - Polinomio di 3° grado

Test del χ^2 con polinomio di 3° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento descritto dal polinomio di 3° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento descritto dal polinomio di 3° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.

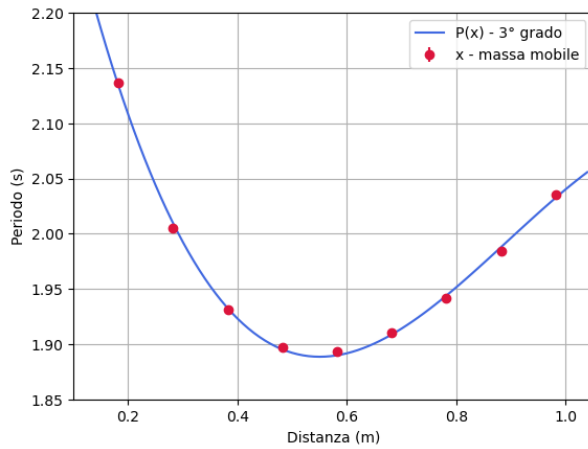


Grafico 2: Polinomio di 3° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	5
χ^2 critico	11.07
χ^2 sospetto	1.15
χ^2 calcolato	70.49

Tabella 6: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto non risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, siamo dunque tenuti a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 e ad accettare l'ipotesi H_1 .

Tabella 7: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.508	0.004	s
b	-2.65	0.02	s/m
c	3.47	0.05	s/m^2
d	-1.30	0.03	s/m^3

4.3 $T_1(x)$ - Polinomio di 4° grado

Test del χ^2 con polinomio di 4° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento descritto dal polinomio di 4° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento descritto dal polinomio di 4° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.

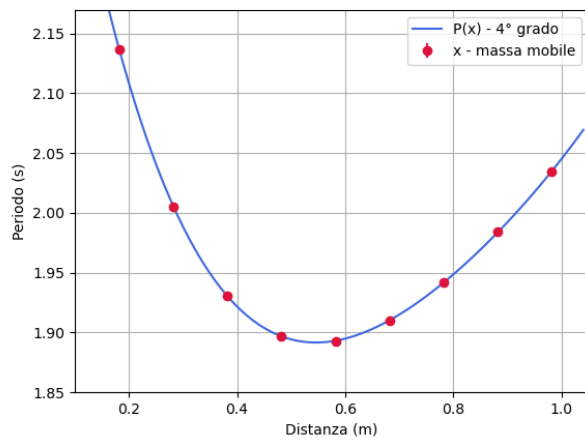


Grafico 3: Polinomio di 4° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	4
χ^2 critico	9.49
χ^2 sospetto	0.71
χ^2 calcolato	0.99

Tabella 8: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, senza risultare sospetto. Questo conferma l'ipotesi H_0 , ovvero un andamento dei periodi di oscillazione del pendolo concorde con quello del polinomio di 4° grado trovato.

Tabella 9: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.576	0.009	s
b	-3.29	0.08	s/m
c	5.5	0.2	s/m^2
d	-3.8	0.3	s/m^3
e	1.1	0.1	s/m^4

4.4 $T_1(x)$ - Polinomio di 5° grado

Test del χ^2 con polinomio di 5° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento descritto dal polinomio di 5° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento descritto dal polinomio di 5° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.

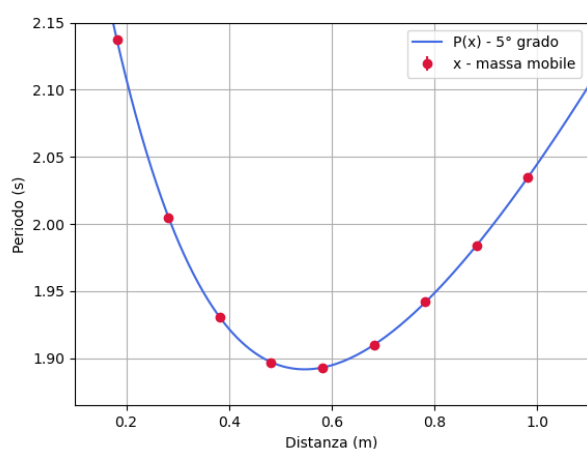


Grafico 4: Polinomio di 5° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	3
χ^2 critico	7.81
χ^2 sospetto	0.35
χ^2 calcolato	0.45

Tabella 10: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, senza risultare sospetto. Questo conferma l'ipotesi H_0 , ovvero un andamento dei periodi di oscillazione del pendolo concorde con quello del polinomio di 5° grado trovato.

Tabella 11: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.59	0.02	s
b	-3.5	0.3	s/m
c	6	1	s/m^2
d	-5	2	s/m^3
e	3	2	s/m^4
f	-0.9	0.6	s/m^5

4.5 $T_2(x)$ - Polinomio di 2° grado

Test del χ^2 con polinomio di 2° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento parabolico descritto dalla parabola dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento parabolico descritto dalla parabola dei minimi quadrati.

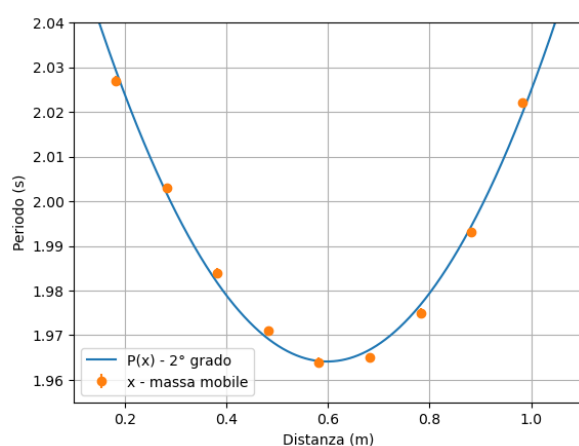


Grafico 5: Polinomio di 2° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	6
χ^2 critico	12.59
χ^2 sospetto	1.64
χ^2 calcolato	29.9

Tabella 12: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto non risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, siamo dunque tenuti a rifiutare l'ipotesi nulla H_0 e ad accettare l'ipotesi H_1 .

Tabella 13: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.099	0.002	s
b	-0.451	0.007	s/m
c	0.377	0.006	s/m^2

4.6 $T_2(x)$ - Polinomio di 3° grado

Test del χ^2 con polinomio di 3° grado. Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti ed i relativi valori riassunti nella tabella accanto.

Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento descritto dal polinomio di 3° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento descritto dal polinomio di 3° grado ottenuto con il metodo dei minimi quadrati.

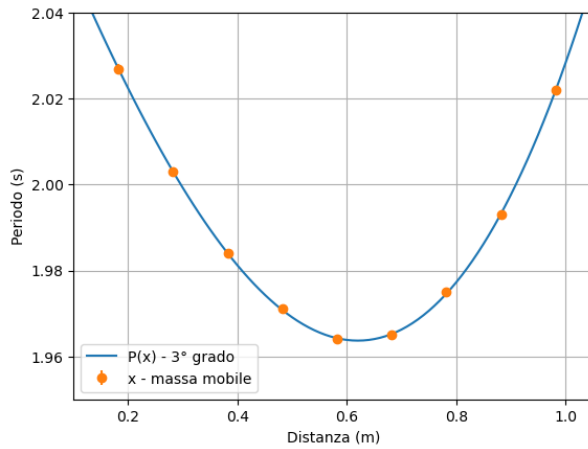


Grafico 6: Polinomio di 3° grado

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	5
χ^2 critico	11.07
χ^2 sospetto	1.15
χ^2 calcolato	0.37

Tabella 14: Test χ^2 - valori ottenuti

Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 risulta sospetto entro i livelli di significatività scelti. Escludiamo però che questo risultato sia dovuto ad una sovrastima degli errori in quanto come incertezza si è usata la sensibilità stessa della fotocellula. Anche un confronto con l'errore a posteriori esclude questa ipotesi, restituendo un valore $\sigma_p = 0.003\text{ s}$, pari a 3 volte la sensibilità dello strumento. I risultati ottenuti confermano l'ipotesi H_0 , ovvero un andamento dei periodi di oscillazione concorde con quello del polinomio di 3° grado trovato.

Tabella 15: Parametri ottenuti dal fit

Parametri	Valori	Incertezze	u.m.
a	2.080	0.004	s
b	-0.32	0.03	s/m
c	0.13	0.05	s/m^2
d	0.14	0.03	s/m^3

4.7 Test di Fisher

Avendo ottenuto due valori del χ^2 accettabili per $T_1(x)$, sia con il polinomio di quarto che di quinto grado, siamo interessati a capire quale sia di fatto il polinomio tra i due che meglio approssima l'andamento dei nostri dati. Per la verifica si ricorre ad un test di Fisher tra i due χ^2 ridotti. Andiamo dunque a calcolare il rapporto:

$$F = \frac{\chi_4^2/4}{\chi_5^2/3} \quad (6)$$

Dove con χ_4^2 indichiamo il valore ottenuto per il polinomio di 4° grado mentre con χ_5^2 quello ottenuto per il polinomio di 5° grado.

4.7.1 Dati e ipotesi

- Livello di significatività (α): 0.05
- H_0 : Non vi è modo di distinguere quale dei due andamenti sia migliore. Le discrepanze osservate sono imputabili alle sole fluttuazioni statistiche.
- H_1 : Il polinomio di 5° grado descrive significativamente meglio l'andamento dei dati sperimentali.

4.7.2 Esito del test

$$F_{oss} = 1.66 < 9.12 = F_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): non vi è modo di distinguere quale dei due polinomi descriva meglio l'andamento dei dati sperimentali. Le discrepanze osservate sono imputabili alle sole fluttuazioni statistiche.

5 Analisi Dati - 2^a Parte

In questa seconda parte dell'analisi dati ci siamo concentrati sul ricavare matematicamente le intersezioni delle rette costruite negli intorno dei punti x_A e x_B trovati durante l'esperienza in laboratorio [3.3].

Presi dunque i punti ricavati in laboratorio negli intervalli $x_A \pm 2\text{ cm}$ e $x_B \pm 2\text{ cm}$, siamo andati a ricavare i parametri delle rette di best fit per poter poi ottenere le loro intersezioni e dunque i relativi periodi per cui fosse verificato l'isocronismo.

Tratteremo le due intersezioni separatamente, indicandole con $T(x_A)$ e $T(x_B)$.

5.1 Intersezione $T(x_A)$

I parametri delle due rette, ottenuti attraverso il metodo dei minimi quadrati, nell'intorno del punto x_A e la loro rappresentazione grafica sono riportati di seguito:

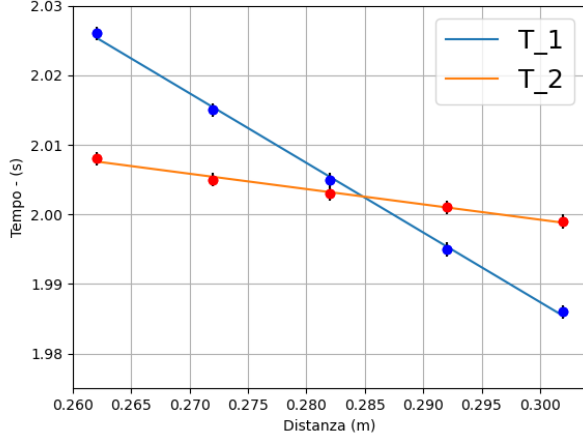


Grafico 7: Intersezione $T_1(x_A) - T_2(x_A)$

Dati	Valori	Incertezze	u.m.
a_1	2.287	0.009	s
b_1	-1.00	0.03	m/s
a_2	2.065	0.009	s
b_2	-0.22	0.03	m/s

Tabella 16: Valori del fit

Una volta ottenuti i valori a noi utili, possiamo procedere a ricavare il periodo nel punto di intersezione e la rispettiva incertezza direttamente in funzione dei parametri delle due rette. Nel punto di intersezione matematicamente si ha:

$$\begin{cases} T_{x_A} = a_1 + b_1 x \\ T_{x_A} = a_2 + b_2 x \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{T_{x_A} - a_1}{b_1} \\ T_{x_A} = a_2 + b_2 x \end{cases} \implies T_{x_A} = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{b_1 - b_2} \quad (7)$$

Calcoliamo dunque T_{x_A} e ed il rispettivo errore, tenendo conto delle due covarianze in quanto a_1/b_1 e a_2/b_2 sono ottenuti dagli stessi set di dati. Per l'errore utilizziamo dunque la seguente formula:

$$\sigma_{T_{x_A}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial a_1}\right)^2 \sigma_{a_1}^2 + \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial a_2}\right)^2 \sigma_{a_2}^2 + \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial b_1}\right)^2 \sigma_{b_1}^2 + \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial b_2}\right)^2 \sigma_{b_2}^2 + \Omega} \quad (8)$$

Dove:

$$\Omega = 2 \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial a_1}\right) \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial b_1}\right) \sigma_{a_1 b_1} + 2 \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial a_2}\right) \left(\frac{\partial T_{x_A}}{\partial b_2}\right) \sigma_{a_2 b_2}$$

rappresenta i due termini tenenti conto delle covarianze dei parametri delle rette. Sostituendo i valori ottenuti dai fit:

$$T_{x_A} = 2.0026 \pm 0.0006 \text{ s}$$

5.2 Intersezione $T(x_B)$

Ripetiamo la stessa procedura nell'intorno del punto x_B . Di seguito il grafico dell'intersezione e la tabella coi parametri delle due rette:

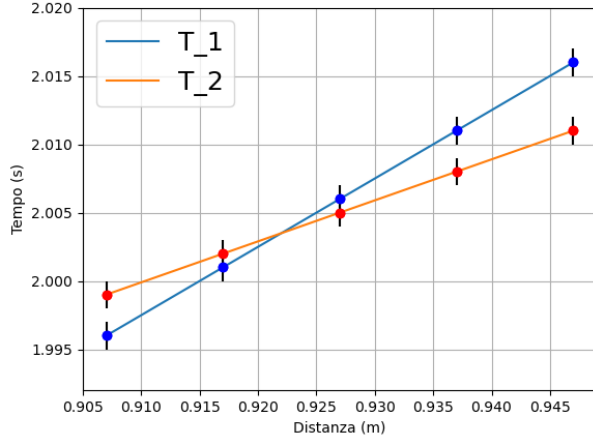


Grafico 8: Intersezione $T_1(x_B) - T_2(x_B)$

Dati	Valori	Incertezze	u.m.
a_1	1.54	0.03	s
b_1	0.50	0.03	m/s
a_2	1.73	0.03	s
b_2	0.30	0.03	m/s

Tabella 17: Valori del fit

Sfruttando quanto enunciato nel paragrafo precedente andiamo a ricavare T_{x_B} . I valori ottenuti sono:

$$T_{x_B} = 2.0035 \pm 0.0014^3 s$$

5.3 Test di Gauss ($T_{x_A} - T_{x_B}$)

Una volta ottenuti i periodi nei due punti di intersezione, non essendo quest'ultimi perfettamente uguali, siamo interessati a verificare se i due valori siano tra loro compatibili o meno. Procediamo dunque ad effettuare un test di Gauss.

5.3.1 Dati e ipotesi

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0** : $\bar{\nu} = |T_{x_A} - T_{x_B}|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 s$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza T_{x_A} e T_{x_B} sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto⁴.
- **Ipotesi H_1** : $\bar{\nu} = |T_{x_A} - T_{x_B}|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 s$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza T_{x_A} e T_{x_B} non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

³Si è deciso di lasciare due cifre significative sia per evidenziare le piccole discrepanze con il valore ottenuto in precedenza, sia perché approssimare alla prima cifra avrebbe portato ad una sottostima dell'errore del 40%.

⁴L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di $\sigma_{T_{x_A}}$ e $\sigma_{T_{x_B}}$

5.3.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.61 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): T_{x_A} e T_{x_B} sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto, le differenze tra i due sono imputabili alle sole fluttuazioni statistiche.

5.4 Calcolo di g con T_{x_A} e T_{x_B}

Stabilita la compatibilità tra i due periodi nei diversi punti di intersezione, abbiamo calcolato g con entrambi i valori ottenuti, per poi andare a verificare se anch'essi risultassero compatibili o meno con il valore di g teorico. Utilizzando la formula (4) si ottengono i seguenti valori:

$$g_A = 9.805 \pm 0.012 \text{ m/s}^2$$

per il periodo calcolato con T_{x_A} , e

$$g_B = 9.796 \pm 0.017^5 \text{ m/s}^2$$

per il periodo calcolato con T_{x_B} .

5.5 Test di Gauss ($g_A - g_t$)

Eseguiamo il primo dei 2 test di Gauss con il valore g_A calcolato a partire da T_{x_A} .

5.5.1 Dati e ipotesi

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0** : $\bar{\nu} = |g_A - g_t|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ cm/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_A e g_t sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto⁶.
- **Ipotesi H_1** : $\bar{\nu} = |g_A - g_t|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ cm/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_A e g_t non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.5.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.13 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): g_A e g_t sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto, le differenze tra i due sono imputabili alle sole fluttuazioni statistiche.

⁵Riportiamo l'errore con 2 cifre significative per apprezzare le differenze tra i risultati ottenuti.

⁶L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla sola incertezza di g_A in quanto g_t è assunto come valore esatto, privo di incertezza.

5.6 Test di Gauss ($g_B - g_t$)

Eseguiamo il secondo test di Gauss con il valore g_B calcolato a partire da T_{x_B} .

5.6.1 Dati e ipotesi

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0** : $\bar{\nu} = |g_B - g_t|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ cm/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_B e g_t sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto⁷.
- **Ipotesi H_1** : $\bar{\nu} = |g_B - g_t|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ cm/s}^2$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza g_B e g_t non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.6.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.63 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): g_B e g_t sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto, le differenze tra i due sono imputabili alle sole fluttuazioni statistiche.

6 Errori sistematici

Lungo l'arco dell'esperienza di laboratorio è possibile che si sia andati in contro ad alcuni errori sistematici e non, di diversa natura. Di seguito verranno discusse ed analizzate dove possibile, le potenziali fonti di errore.

1) Per quanto si cercasse ogni volta di posizionare il pendolo nella maniera più adeguata, è possibile che durante il corso dell'esperienza si siano verificati attriti tra i coltelli del pendolo ed il sostegno, i quali nel giro di più periodi di oscillazione avrebbero potuto smorzare l'andamento del pendolo, risultando in periodi di diversa durata.

2) L'attrito dell'aria, anche se di entità minore, nel giro di più oscillazioni avrebbe potuto anch'esso contribuire ad effetti di smorzamento sul periodo.

3) Bisogna tener conto che la formula (2), utilizzata per il calcolo dei periodi, vale solo per oscillazioni infinitesimali, tali per cui sia possibile realizzare l'approssimazione $\sin(\theta) \approx \theta$. Con l'aumentare dell'angolo quest'approssimazione non è più possibile e più in generale la formula per il calcolo del periodo di oscillazione diventa:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \dots \right] \quad (9)$$

⁷L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla sola incertezza di g_B in quanto g_t è assunto come valore esatto, privo di incertezza.

Dove con T_0 si fa riferimento proprio alla quantità calcolata con la formula (2). Per valutare dunque se sia stato commesso o meno un errore sistematico di entità non trascurabile andiamo a calcolare T_0 tenendo conto dell'ampiezza di oscillazione iniziale ($\theta = 5^\circ$) e prendendo come valore di T quello ottenuto sperimentalmente in laboratorio, ovvero:

$$T = 2.003 \pm 0.001 \text{ s}$$

Troncando la formula (9) al primo termine, vista la trascurabilità del termine successivo (nell'ordine di 10^{-6} s), risulta:

$$T_0 = \frac{T}{\left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} \quad (10)$$

Numericamente si ottiene:

$$T_0 = 2.002 \pm 0.001^8 \text{ s}$$

Il valore di g calcolato usando T_0 risulta essere:

$$g_0 = 9.810 \pm 0.014 \text{ m/s}^2$$

il quale risulta 0.001 m/s^2 più accurato del valore g_s ricavato a partire dal periodo T . Nonostante questo, la differenza tra i valori g_0 e g_s risulta essere 0.009 m/s^2 , minore dell'incertezza associata ad entrambi, pari a 0.014 m/s^2 . Dunque anche senza compiere un test di Gauss possiamo affermare che le due grandezze sono tra loro compatibili con un livello di significatività del 5%. La differenza tra i due valori è dunque imputabile alle sole fluttuazioni statistiche. Si conclude che l'errore sistematico dovuto al calcolo del periodo attraverso la formula (2) è considerabile trascurabile per l'angolo scelto ($\theta = 5^\circ$).

Infine, anche se si tratta di un errore casuale e non sistematico, grazie alle formule (9) e (10) possiamo dare una stima di quanto un'impresione nella scelta dell'angolo di oscillazione iniziale possa aver influito sul periodo. Anche assumendo di aver compiuto un'errore di 1° nel posizionamento iniziale, cosa molto improbabile vista la distanza tra le tacche sul supporto graduato, si otterrebbero i valori di T_0 :

$$T_{\theta=4^\circ} = 2.0023 \pm 0.0010 \text{ s}$$

$$T_{\theta=6^\circ} = 2.0016 \pm 0.0009 \text{ s}$$

Riportiamo 4 cifre decimali per mostrare l'effettiva discrepanza ottenuta.

Al fronte di un livello di significatività del 5% entrambe le misure risultano compatibili con il valore $T_0 = 2.002 \pm 0.001 \text{ s}$ ottenuto per $\theta = 5^\circ$. Ne deduciamo che possibili errori nella scelta dell'ampiezza di oscillazione, entro il margine di 1° , possono essere considerati trascurabili.

⁸La nuova incertezza è stata ottenuta dividendo σ_T per il fattore tra parentesi quadre.

7 Conclusioni

Esperienza in laboratorio Quanto svolto in laboratorio ha portato a risultati soddisfacenti rispetto a quello che era lo scopo dell'esperienza. I fit realizzati su carta millimetrata hanno permesso di determinare accuratamente le posizioni della massa mobile per cui si sono verificati i periodi di isocronismo del pendolo. Il valore ottenuto per i periodi di isocronismo ha permesso di stimare con buona approssimazione l'accelerazione di gravità g , restituendo un valore compatibile con quello teorico, entro un livello di significatività del 5%.

Analisi dati L'analisi dati ha evidenziato in primo luogo come l'andamento dei periodi di oscillazione del pendolo in funzione della distanza tra le due masse non fosse descritto da semplici parabole, come era sembrato in laboratorio, ma bensì da polinomi di grado superiore. Per quanto riguarda $T_1(x)$, sia il polinomio di 4° che di 5° grado hanno confermato l'ipotesi nulla dei relativi test del χ^2 , evidenziando due relazioni funzionali adatte a descrivere l'andamento dei dati. Il risultato del test di Fisher condotto in seguito ha confermato l'ipotesi nulla, evidenziando come non vi fosse modo di distinguere quale dei due andamenti fosse migliore dell'altro. Per quanto riguarda invece $T_2(x)$, il polinomio di 3° grado ha restituito un valore sospetto nel test del χ^2 , evidenziando subito un livello di accordo elevato tra la curva e l'andamento dei dati; dunque non si è andati oltre nella ricerca di una migliore relazione funzionale.

Le rette ottenute attraverso il metodo dei minimi quadrati hanno fornito i parametri per trovare matematicamente i due periodi di isocronismo del pendolo. I periodi così ottenuti sono risultati tra loro compatibili entro un livello di significatività del 5%. Allo stesso modo i valori di g calcolati attraverso quest'ultimi periodi sono risultati compatibili con il valore teorico entro un livello di significatività del 5%.

A Fit su carta millimetrata

Di seguito vengono riportate due foto dei fit realizzati su carta millimetrata:

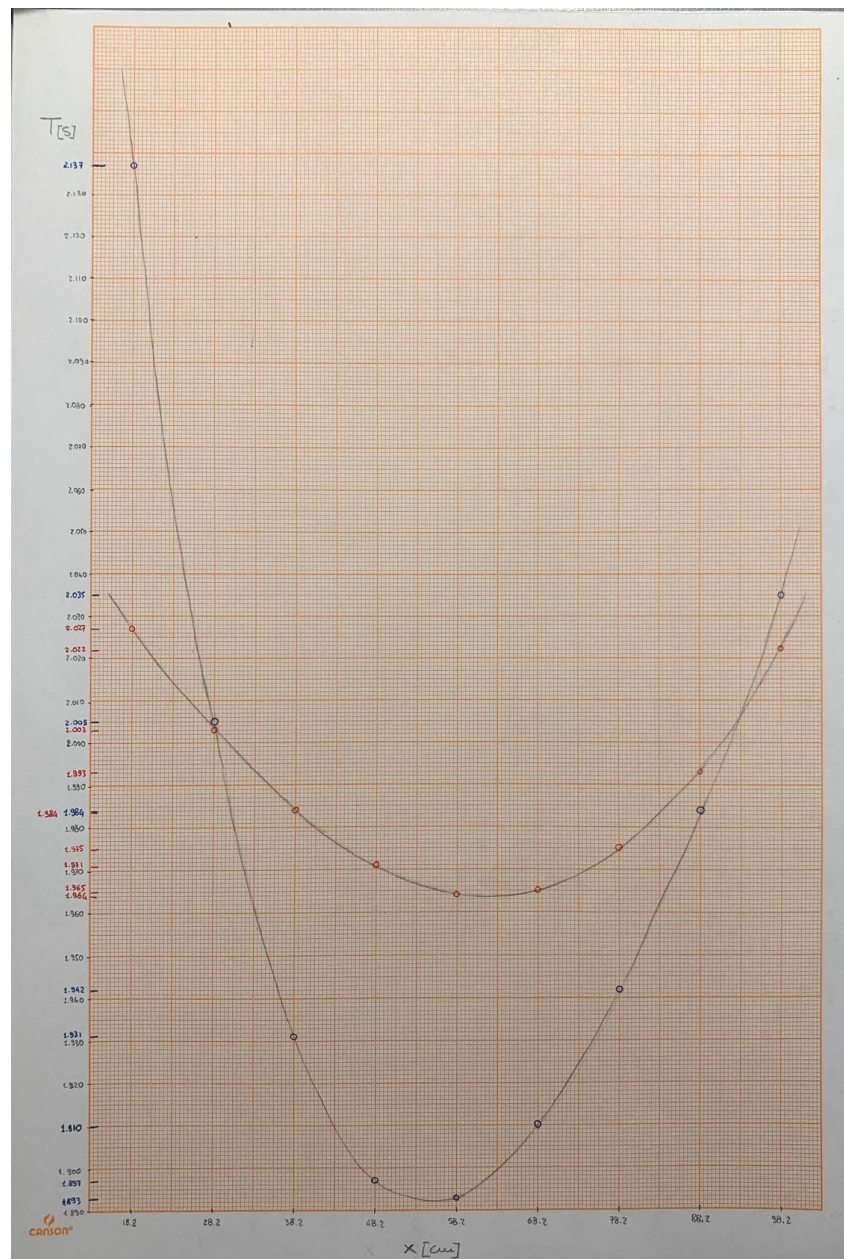


Grafico 9: Periodi di oscillazione in funzione della distanza tra le due masse

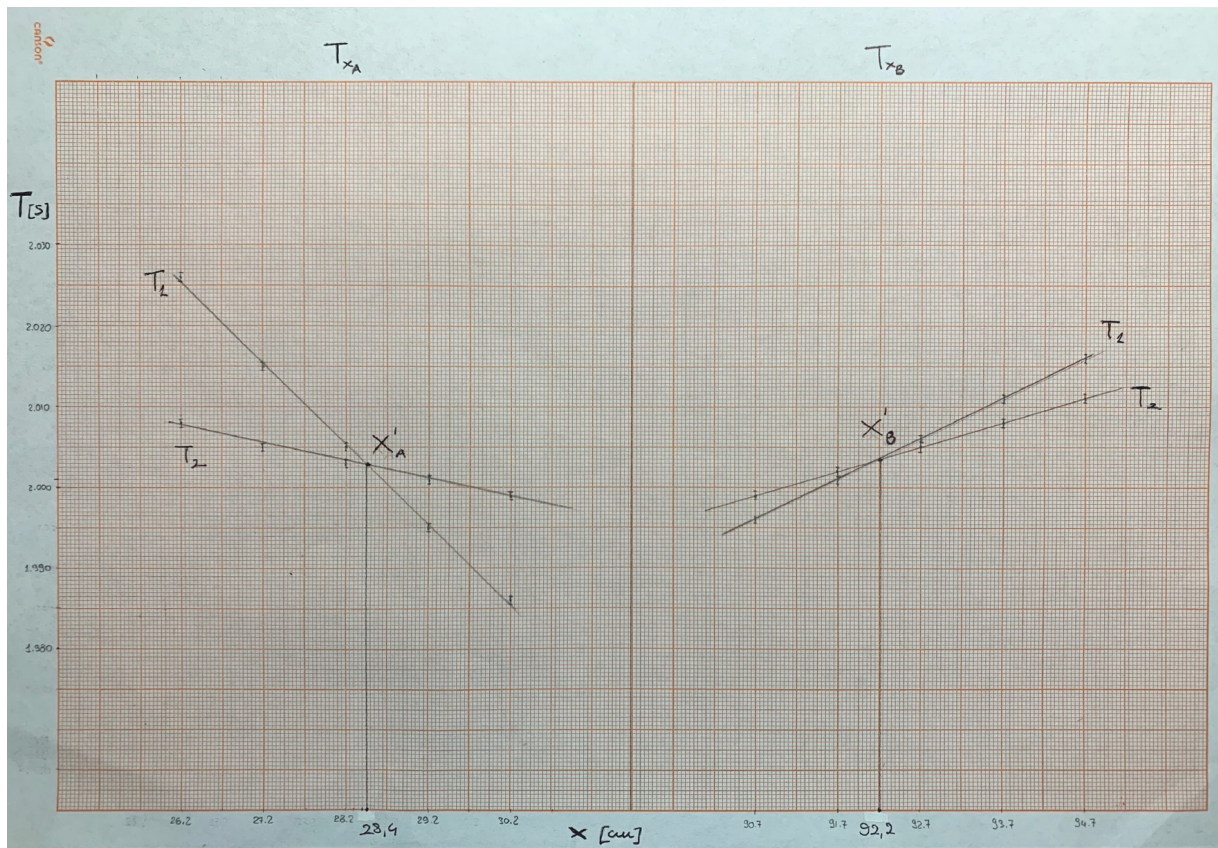


Grafico 10: Andamento del periodo negli intornoi dei punti di intersezione