Lezione 9 (11/10)

Teoremi del confronto

Primo teorema del confronto

Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, con $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l, m \in \mathbb{R}$

Se esiste un intorno $I(x_0)$ t.c. $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$,

allora $l \le m$

<u>dim</u> Poniamo $h(x) = g(x) - f(x)$

Allora $h(x) \ge 0$ $\forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

Dunque

$$0 \le \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = m - l$$

corollario teo permanenza segno

teo algebra

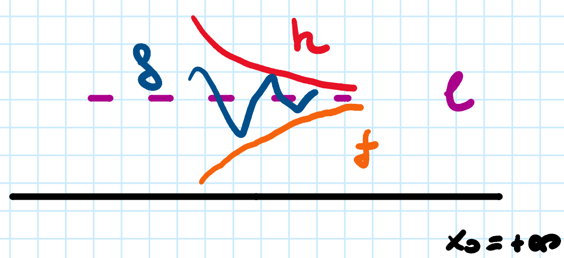
$\square$

Secondo teorema del confronto

Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l = \lim_{x\to x_0} h(x)$, con $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Se esiste un intorno $I(x_0)$ t.c. $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$



- Se $l = +\infty$, basta

  $f(x) \le g(x) \le \cancel{h(x)}$

- Se $l = -\infty$, basta

  $\cancel{f(x)} \le g(x) \le h(x)$

<u>dim</u> La facciamo nel caso $l \in \mathbb{R}$

<u>dim</u> Lo facciamo nel caso $\ell \in \mathbb{R}$

Prendo $\varepsilon > 0$:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \exists\, I'(x_0)$ t.c. $\forall x \in I'(x_0)\setminus\{x_0\}$ $\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \Rightarrow \exists\, I''(x_0)$ t.c. $\forall x \in I''(x_0)\setminus\{x_0\}$ $\ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon$

Quindi:

$$x \in \underbrace{\left(I(x_0) \cap I'(x_0) \cap I''(x_0)\right)\setminus\{x_0\}}_{\text{è un intorno di } x_0} \Rightarrow \ell-\varepsilon < \overbrace{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}^{\text{ipotesi}} < \ell+\varepsilon$$

$\square$

<u>Corollario</u> Sia $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ e sia f una f.ne limitata in un intorno di x_0 (cioè : $\exists M>0$ t.c. $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$). Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

<u>dim</u> Si ha

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \underbrace{M|g(x)|}_{\to 0}$$

e quindi per confronto $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

(<u>nota</u> : $h \to 0 \iff |h| \to 0$) $\square$

es) 1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

$f(x) = \sin x \qquad |f(x)| \leq 1 \quad \forall$

$g(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

1b) $\lim x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

1b) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{g(x)\to 0}\, \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{f(x) \text{ limitata}} = 0$

Quindi: $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si prolunga per continuità in $x_0 = 0$

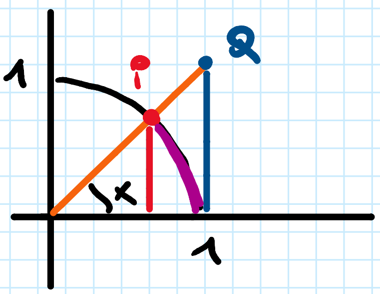
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

Infatti $\quad x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{\to +\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Dimostriamo il "limite notevole"

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Osserviamo che $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ è pari $(f(-x) = f(x))$: basta fare $x \to 0^+$. Inoltre supponiamo $x < \frac{\pi}{2}$



$P = (\cos x, \sin x)$

$Q = (1, \operatorname{tg} x)$

"Graficamente" si vede che

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dunque (dividendo per $\sin x > 0$)

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

da cui:

$$\underbrace{\cos x}_{\to \cos(0)=1 \text{ per } x\to 0^+} < \frac{\sin x}{x} < \underbrace{1}_{\to 1} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Quindi (per confronto) $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0^+$

- Ne segue un altro limite notevole

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Infatti:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}_{\to 1^2 = 1} \boxed{\frac{1}{1+\cos x}} \to \frac{1}{2}$$

Altri limiti notevoli

Prendiamo per buono che

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{(dim nella Lez 11)}$$

e ne ricaviamo altri

1) $$\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{y=-x\to+\infty}{=} \lim_{y\to+\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim \left(\frac{y-1+1}{\ldots}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$\underset{z=y-1\to+\infty}{=} \lim_{z\to+\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{z}\right)}_{\to 1} = e$$

1(bis) Per ogni $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} \underset{y=\frac{x}{a}\to\pm\infty}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay}$$

$$= \lim_{y\to\pm+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a} = e^{a}$$

Quindi

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

2) Per $a>0$ e $a\neq 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \underset{y=\frac{1}{x}\to\pm\infty}{=} \lim_{y\to\pm\infty} y \log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$= \lim_{y\to\pm\infty} \log_a\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{\to e}\right] = \log_a e = \frac{1}{\log a}$$

($\log$ = logaritmo in base e)

($\log$ = logaritmo in base e)

In particolare $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$

3) Per $a>0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \underset{y=a^x-1\to 0}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)}$$

$(y+1=a^x \Rightarrow x=\log_a(y+1))$

$$= \log a$$

In particolare $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

4) Per $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \underset{1+x=e^y;\ y\to 0}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \alpha \underbrace{\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}}_{\to 1} \underbrace{\frac{y}{e^y-1}}_{\to 1} = \alpha$$

In definitiva $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Gerarchia degli infiniti

Dimostreremo più avanti che $\forall \alpha>0$

$\boxed{1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0}$

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\cdots}{x^\alpha} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

Da ciò segue che

$$3)\ \lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x = 0$$

$$4)\ \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

Forme indeterminate di tipo esponenziale

Sono tre

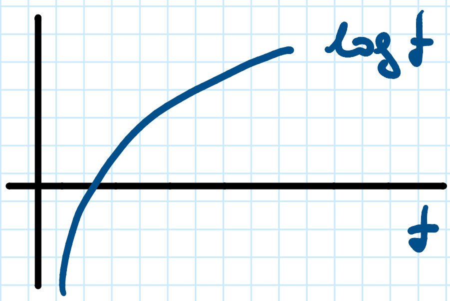
$$1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

e si incontrano calcolando limiti di f.ni del tipo

$$f(x)^{g(x)} \qquad (f(x)>0)$$

Il "trucco" è scrivere

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$



Le f.ni sono dunque

1) $f(x)\to 1 \Rightarrow \log(f(x))\to 0$

   $g(x)\to\infty$

2) $f(x)\to 0^+ \Rightarrow \log(f(x))\to -\infty$

   $g(x)\to 0$

3) $f(x)\to+\infty \Rightarrow \log(f(x))\to+\infty$

3) $f(x) \to +\infty \Rightarrow \log(f(x)) \to +\infty$

$g(x) \to 0$

(es) 1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è del tipo 1^∞

Abbiamo visto che il risultato è "e"

2) $\lim_{x \to 0^+} x^x$ è del tipo 0^0

$$x^x = e^{\log(x^x)} = e^{\underbrace{x \log x}_{\to 0}} \to e^0 = 1$$

per la 3) della gerarchia degli infiniti

3) $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ è del tipo ∞^0

$$x^{1/x} = e^{\log(x^{1/x})} = e^{\underbrace{\frac{1}{x}\log x}_{\to 0}} \to e^0 = 1$$

per la 1) della gerarchia degli infiniti