

Indice

1	Scopo dell'esperienza	2
2	Strumentazione	2
3	Spinta di Archimede in funzione di V_i	2
3.1	Metodo dei minimi quadrati (fluido 1)	4
3.1.1	Valori ottenuti	5
3.1.2	Grafico - Retta dei minimi quadrati	5
3.1.3	Test χ^2 - Ipotesi	5
3.1.4	Test χ^2 - Esito	5
3.2	Test di Gauss - termine noto	6
3.2.1	Dati del test	6
3.2.2	Esito del test	6
3.3	Confronto densità (fluido 1)	6
3.3.1	Dati del test	6
3.3.2	Esito del test	7
3.4	Metodo dei minimi quadrati (fluido 2)	7
3.4.1	Valori ottenuti	7
3.4.2	Grafico - Retta dei minimi quadrati	8
3.4.3	Test χ^2 - Ipotesi	8
3.4.4	Test del χ^2 - Esito	8
3.5	Confronto densità (fluido 2)	8
3.5.1	Dati del test	9
3.5.2	Esito del test	9
3.6	Rapporto spinte di Archimede	9
4	Spinta di Archimede in funzione di ρ_c	10
5	Viscosità e spinta di Archimede	11
5.1	Test di Gauss ($v_1 - v_2$)	12
5.1.1	Esito del test	13
5.2	Test di Gauss ($v_1 - v_3$)	13
5.2.1	Esito del test	13
5.3	Test di Gauss ($v_2 - v_3$)	13
5.3.1	Esito del test	13
5.3.2	Conclusioni - confronto velocità	14
5.4	Coefficiente di viscosità: η	14
5.4.1	η trascurando Archimede	14
5.4.2	η includendo Archimede	15
5.5	Test di Gauss - η	15
5.5.1	Esito del test	15
6	Conclusioni	16
	Appendice A	17

1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza di laboratorio è quello di studiare la spinta di Archimede e, in particolare, come varia in funzione:

- della **porzione di corpo immerso** nel fluido
- della **densità del fluido** in cui si immerge il corpo
- della **densità del corpo** immerso

Analizzeremo poi in ultima analisi il moto di un oggetto di forma sferica in un liquido, andando a determinare il coefficiente di viscosità di quest'ultimo.

2 Strumentazione

Strumentazione utilizzata:

- | | |
|---|----------------------------------|
| - Dinamometro | (sensibilità: 0.01 N) |
| - Bilancia digitale | (sensibilità: 0.1 g) |
| - Picnometro | (No sensibilità) |
| - Calibro a nonio semplice | (sensibilità: 0.05 mm) |
| - Calibro elettronico | (sensibilità: 0.01 mm) |
| - Righello | (sensibilità: 0.5 mm) |
| - Cronometro digitale | (sensibilità: 0.01 s) |
| - Becher | |
| - 2 fluidi diversi: acqua di rubinetto/acqua di rubinetto + sale | |
| - Cilindro graduato | |
| - 5 sfere di materiale diverso (rame, alluminio, ferro, piombo, ottone) | |
| - 14 Sferette di piombo | |

3 Spinta di Archimede in funzione di V_i

Per verificare la spinta di Archimede in funzione del volume immerso (V_i), abbiamo in primis misurato peso, diametro e altezza del cilindretto utilizzato, con l'usilio di un calibro digitale e di un dinamometro.

Inoltre, per essere più precisi, abbiamo calcolato l'effettiva lunghezza di ognuna delle singole tacche che scandivano l'altezza del cilindro (di base assunte come di 5 mm ognuna tranne per l'ultima, di lunghezza minore), questa volta con un calibro classico.

Di seguito due tabelle riassuntive:

<i>Dati</i>	Simbolo	Valore
Diametro (<i>mm</i>)	<i>d</i>	37.96
Altezza (<i>mm</i>)	<i>h</i>	44.30
Peso (<i>N</i>)	<i>P_c</i>	0.71

Tabella 1: Misurazioni del cilindro

Tacche Cilindro	<i>h</i> ± 0.05 <i>mm</i>
1^a Tacca	6.30
2^a Tacca	11.70
3^a Tacca	16.15
4^a Tacca	21.20
5^a Tacca	25.70
6^a Tacca	30.60
7^a Tacca	35.85
8^a Tacca	40.65
9^a Tacca	44.30

Tabella 2: Tacche - Altezza cilindro

Con l'ausilio del picnometro abbiamo poi calcolato la densità dell'acqua di rubinetto (ρ_l) con relativo errore. Per fare ciò abbiamo prima pesato con la bilancia il picnometro vuoto ed in seguito pieno, calcolando per differenza la massa d'acqua al suo interno, con il relativo errore dato dalla somma in quadratura delle due incertezze:

$$m_l = 49.2 \pm 0.14^1 g$$

Procediamo a calcolare la densità dell'acqua tenendo conto che il volume del picnometro utilizzato (49.390 ml) non riporta alcuna incertezza per volere del costruttore.

Possiamo dunque utilizzare la formula classica per la propagazione delle incertezze nei prodotti per determinare l'incertezza da assegnare a ρ_l :

$$\frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} = \frac{\Delta m_l}{m_l} + \frac{\Delta V_l}{V_l} \quad (1)$$

Assumendo come esatta e dunque priva di incertezza la misura sul volume:

$$\frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} = \frac{\Delta m_l}{m_l} \implies \Delta \rho_l = \frac{\Delta m_l}{m_l} \rho_l \quad (2)$$

Ottenendo:

$$\Delta \rho_l = 0.996 \pm 0.003 g/cm^3$$

Andiamo ora a valutare l'entità della spinta di Archimede immergendo per 10 volte consecutive il cilindro graduato solo fino alla prima tacca, ottenendo una stima della risultante ($P_c - A$).

Valori ottenuti:

$$R = 0.66 \pm 0.002 N$$

Tenendo conto che la deviazione standard per la media ottenuta è inferiore alla sensibilità del dinamometro utilizzato di 0.01N, il risultato corretto risulta essere:

$$R = 0.66 \pm 0.01 N$$

Sottraendo dunque a P_c il valore ottenuto (R) e propagando le incertezze attraverso la somma in quadratura otteniamo una stima per la spinta di Archimede:

$$A = 0.05 \pm 0.014^2 N$$

¹Manteniamo due cifre significative per l'errore in quanto arrotondarlo a 0.1 porterebbe a sottostimare l'incertezza di circa il 30%.

²Manteniamo due cifre significative per l'errore in quanto arrotondarlo a 0.01 porterebbe a sottostimare l'incertezza di circa il 30%.

Ripetiamo ora lo stesso procedimento per le tacche successive del cilindro, limitandoci però a misurare una sola volta la risultante ottenuta e andando a calcolare poi la relativa spinta di Archimede. Il tutto verrà anche poi ripetuto in fase di risalita del cilindro, anche se per il resto dell'esperienza faremo riferimento ai soli valori ottenuti in fase di immersione.

Ora, per la costruzione del grafico relativo alla spinta di Archimede in funzione del volume immerso $A(V_i)$, andiamo a calcolare il volume del cilindro in corrispondenza delle varie tacche. Per propagare l'errore su tali volumi useremo la formula generalare di propagazione degli errori gaussiana, non tenendo conto delle covarianze in quanto le grandezze non sono dipendenti tra loro. Sostituendo nel nostro caso per il calcolo dell'incertezza relativa al volume di un cilindro:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\pi h \frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{\sigma_d}{2}\right)^2 + \left(\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^2 (\sigma_h)^2} \quad (3)$$

Di seguito una tabella riassuntiva con i volumi immersi (V_i), le spinte di Archimede (A) e le relative incertezze.

	$V_i \text{ (mm}^3\text{)}$	Incetzze $V_i \text{ (mm}^3\text{)}$	$A \pm 0.014 N$
1^a tacca	7129.89	56.71	0.06
2^a tacca	13241.22	57.01	0.11
3^a tacca	18277.42	57.40	0.17
4^a tacca	23992.65	57.98	0.22
5^a tacca	29085.42	58.62	0.27
6^a tacca	34630.89	59.46	0.32
7^a tacca	40572.47	60.49	0.39
8^a tacca	46004.77	61.56	0.44
9^a tacca	50135.58	62.45	0.48

Tabella 3: Volumi e spinte di Archimede a confronto (fluido 1)

3.1 Metodo dei minimi quadrati (fluido 1)

Ottenuti i nostri dati con le relative incertezze, siamo ora interessati a ricercare quali siano i migliori parametri della relazione funzionale che intercorre tra la spinta di Archimede ed il volume immerso. Siamo cioè interessati a stimare quali siano i migliori parametri a e b della retta teorica $y = a + bx$ che meglio descrive l'andamento dei dati ottenuti sperimentalmente. Per fare ciò ricorreremo ad un metodo di regressione lineare, ovvero al metodo dei minimi quadrati. Seguirà poi un test del χ^2 per verificare il livello di accordo tra la distribuzione sperimentale dei dati ottenuti e tale retta.

Visto che l'errore relativo sulla spinta di Archimede risulta essere in media 26 volte più grande dell'errore relativo legato ai volumi immersi, andremo ad utilizzare come variabile indipendente lungo l'asse delle ascisse il volume e lungo l'asse delle ordinate, con la rispettiva incertezza, la spinta di Archimede. Inoltre, in quanto l'errore relativo su V_i risulta essere trascurabile rispetto all'errore relativo su A , non dobbiamo procedere a propagarne l'errore.

3.1.1 Valori ottenuti

I valori ottenuti come migliori parametri per la retta dei minimi quadrati ($y = a + bx$) risultano essere³:

$$a = -0.02 \pm 0.01 \text{ N}$$

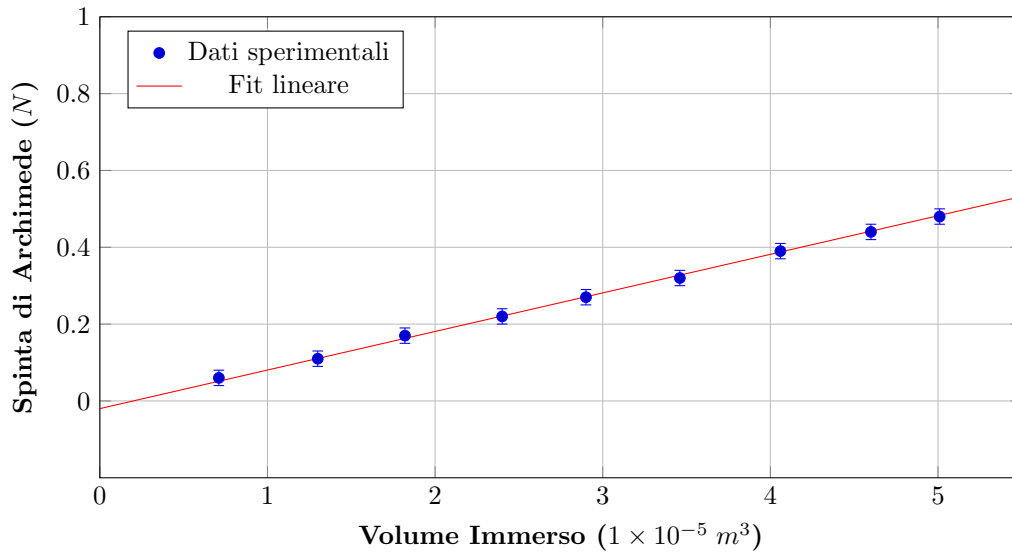
$$b = 10041 \pm 333 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}$$

Inoltre, i valori relativi al coefficiente di correlazione lineare (r) e all'errore a posteriori (σ_p) sono:

$$r = 0.998$$

$$\sigma_p = 0.001$$

3.1.2 Grafico - Retta dei minimi quadrati



3.1.3 Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento lineare descritto dalla retta dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento lineare descritto dalla retta dei minimi quadrati.

3.1.4 Test χ^2 - Esito

Il valore della variabile χ^2 ottenuto risulta accettabile entro un livello di significatività del 5%, senza risultare sospetto. Questo conferma l'ipotesi H_0 , ovvero il corretto andamento lineare della spinta di Archimede in funzione del volume immerso per il nostro set di dati.

Avendo però ottenuto un termine noto non nullo, in contrasto con l'andamento teorico, siamo tenuti a compiere un test di Gauss per verificarne la compatibilità con il valore teorico $\mu = 0 \text{ N}$.

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	7
χ^2 critico	14.07
χ^2 sospetto	2.167
χ^2 calcolato	3.45

³Per ricondursi alle u.m. utilizzate nel S.I. si è ricorso ad un semplice conversione delle misure e delle incertezze.

3.2 Test di Gauss - termine noto

3.2.1 Dati del test

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : a è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ N e deviazione standard pari a σ_a . Dunque a e μ sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.
- **Ipotesi** H_1 : a non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ N e deviazione standard pari a σ_a . Dunque a e μ non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

3.2.2 Esito del test

$$Z_{oss} = \frac{|a - \mu|}{\sigma_a} \quad (4)$$
$$Z_{oss} = 2 > 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto ci porta a rigettare l'ipotesi nulla (H_0) e ad accettare l'ipotesi H_1 .

Le discrepanze tra il termine noto ottenuto ed il valore teorico $\mu = 0$ N risultano significative entro il livello di significatività scelto. Nonostante questo, utilizzando un livello di significatività anche solo del 4%, tale Z_{oss} risulta confrontabile con $\mu = 0$ N in quanto minore dello $Z_{critico} = 2.6$.

3.3 Confronto densità (fluido 1)

Dal coefficiente angolare ottenuto come parametro della retta dei minimi quadrati dal nostro set di dati, è possibile ricavare una stima della densità del fluido. Essendo infatti il coefficiente angolare pari al rapporto tra ascisse e ordinate, nel nostro grafico questo risulta essere pari al rapporto tra la spinta di Archimede e il volume immerso, ovvero: $\rho_l \cdot g$.

Dunque, dividendo il risultato ottenuto per $g = 9.81$ $m \cdot s^{-2}$, otterremo una stima della densità dell'acqua di rubinetto. Numericamente:

$$\rho_l = \frac{b}{g} \pm \frac{\sigma_b}{g} = 1024 \pm 34 \frac{kg}{m^3}$$

Il valore ottenuto sperimentalmente a partire dal fit lineare del nostro set di dati è ora confrontabile con il valore ottenuto inizialmente tramite il picnometro.

Eseguiamo dunque un test di Gauss per vedere se la differenza tra i due ($\bar{\nu} = \rho_{l_{pic}} - \rho_{l_{fit}}$) sia significativa o meno, ovvero se i due valori siano tra loro compatibili.

3.3.1 Dati del test

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : $\bar{\nu}$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ $\frac{kg}{m^3}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza $\rho_{l_{pic}}$ e $\rho_{l_{fit}}$ sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.⁴
- **Ipotesi** H_1 : $\bar{\nu}$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ $\frac{kg}{m^3}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza $\rho_{l_{pic}}$ e $\rho_{l_{fit}}$ non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

⁴L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di $\sigma_{l_{pic}}$ e $\sigma_{l_{fit}}$

3.3.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.8 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): i due valori ottenuti per la densità dell'acqua di rubinetto sono fra loro confrontabili con un livello di significatività del 5%.

Ripetiamo ora l'intera procedura sperimentale della sezione precedente variando la densità del fluido, ovvero utilizzando una miscela di acqua di rubinetto e sale. Verrà fatto riferimento a tale miscela come a "fluido 2". Di seguito un riassunto dei valori ottenuti.

	$V_i (mm^3)$	Incertezze $V_i (mm^3)$	$A \pm 0.014 N$
1 ^a tacca	7129.89	56.71	0.07
2 ^a tacca	13241.22	57.01	0.13
3 ^a tacca	18277.42	57.40	0.19
4 ^a tacca	23992.65	57.98	0.25
5 ^a tacca	29085.42	58.62	0.31
6 ^a tacca	34630.89	59.46	0.37
7 ^a tacca	40572.47	60.49	0.43
8 ^a tacca	46004.77	61.56	0.49
9 ^a tacca	50135.58	62.45	0.53

Tabella 4: Volumi e spinte di Archimede a confronto (fluido 2)

3.4 Metodo dei minimi quadrati (fluido 2)

Ripetiamo quanto riportato in [3.1] con il set di dati riguardante il fluido 2.

Anche in questo caso l'errore relativo sulla spinta di Archimede risulta essere in media 21 volte più grande dell'errore relativo legato ai volumi immersi, il quale si può dunque assumere come trascurabile senza dover propagare l'errore.

3.4.1 Valori ottenuti

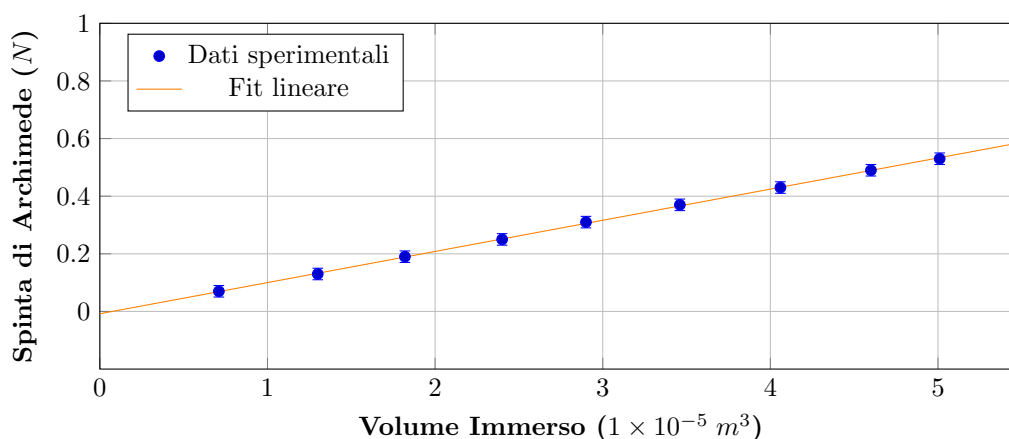
I valori ottenuti come migliori parametri per la retta dei minimi quadrati ($y = a + bx$) risultano essere:

$$a = -0.008 \pm 0.01 \text{ N}$$
$$b = 10813 \pm 333 \frac{kg}{m^2 \cdot s^2}$$

Inoltre, i valori relativi al coefficiente di correlazione lineare (r) e all'errore a posteriori (σ_p) sono:

$$r = 0.999$$
$$\sigma_p = 0.003$$

3.4.2 Grafico - Retta dei minimi quadrati



3.4.3 Test χ^2 - Ipotesi

- H_0 : I dati ottenuti sperimentalmente seguono l'andamento lineare descritto dalla retta dei minimi quadrati.
- H_1 : I dati ottenuti sperimentalmente non seguono l'andamento lineare descritto dalla retta dei minimi quadrati.

3.4.4 Test del χ^2 - Esito

Il χ^2 ottenuto ad un livello di confidenza del 5%, risulta "sospetto" in quanto minore di 2.167. Andando però a consultare l'errore a posteriori ottenuto, pari a 0.003, ci accorgiamo di non star sovrastimando le barre di errore in quanto quest'ultimo risulta essere circa 5 volte più piccolo delle barre di errore utilizzate nell'analisi dati (0.014 N), il cui valore è stato derivato direttamente dalla sensibilità del dinamometro utilizzato (0.01 N), al di sotto del quale non vi è possibilità di andare. Il valore di r suggerisce inoltre una correlazione lineare altamente significativa.

Dati	Valori
Livello di significatività (α)	0.05
Numero di gradi di libertà	7
χ^2 critico	14.07
χ^2 sospetto	2.167
χ^2 calcolato	0.37

Preso atto di questo e del fatto che la fase di misurazione della risultante (R) avvenisse in condizioni molto stabili, non legate al tempo, possiamo assumere che il χ^2 ottenuto sia effettivamente frutto di un set di punti disposti molto in prossimità della retta dei minimi quadrati, e dunque accettare l'ipotesi nulla (H_0).

In questo caso non è necessario compiere un test di Gauss per il termine noto in quanto il valore ottenuto ($a = -0.008$ N) risulta minore della propria incertezza associata ($\sigma_a = 0.01$ N) e dunque compatibile con il valore teorico ($\mu = 0$ N) entro un livello di significatività del 5%.

3.5 Confronto densità (fluido 2)

Ripetendo il procedeminto esposto in [3.3]:

$$\rho_l = \frac{b}{g} \pm \frac{\sigma_b}{g} = 1102 \pm 34 \frac{kg}{m^3}$$

Eseguiamo nuovamente un test di Gauss per verificare se la differenza tra la densità calcolata a partire dal coefficiente angolare della retta dei minimi quadrati e quella calcolata attraverso il picnometro ($\bar{\nu} = \rho_{l_{pic}} - \rho_{l_{fit}}$) sia significativa o meno.

3.5.1 Dati del test

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0 :** $\bar{\nu}$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \frac{kg}{m^3}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza $\rho_{l_{pic}}$ e $\rho_{l_{fit}}$ sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto⁵.
- **Ipotesi H_1 :** $\bar{\nu}$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \frac{kg}{m^3}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza $\rho_{l_{pic}}$ e $\rho_{l_{fit}}$ non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

3.5.2 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.7 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): i due valori ottenuti per la densità della miscela di acqua di rubinetto e sale sono fra loro confrontabili ad un livello di significatività del 5%.

3.6 Rapporto spinte di Archimede

Per prevedere il rapporto tra le due spinte di Archimede (a parità di volumi immersi), basta calcolare il rapporto tra le densità dei due fluidi, come si evince facilmente dalla formula stessa.

E' dunque possibile andare a calcolare il rapporto tra le due densità ottenute dai nostri set di dati direttamente dal rapporto dei due coefficienti angolari.

Per verificare l'attendibilità del risultato ottenuto andremo a confrontarlo con il rapporto tra le densità ottenute tramite picnometro, attraverso un test di Gauss. Di seguito i risultati ottenuti:

Rapporto densità coefficienti angolari (θ_c): 0.93 ± 0.04

Rapporto densità picnometro (θ_p): 0.92 ± 0.004

Tali incertezze sono state ottenute tramite la formula:

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2 (\sigma_{\rho_1})^2 + \left(-\frac{\rho_1}{(\rho_2)^2}\right)^2 (\sigma_{\rho_2})^2} \quad (5)$$

Test di Gauss

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi H_0 :** $\bar{\nu} = |\theta_c - \theta_p|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza θ_c e θ_p sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto⁶.
- **Ipotesi H_1 :** $\bar{\nu} = |\theta_c - \theta_p|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza θ_c e θ_p non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

Esito del test

$$Z_{oss} = 0.1 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il rapporto tra le densità ottenute dai coefficienti angolari (θ_c) è compatibile con il rapporto ottenuto tramite le densità ricavate col picnometro (θ_p).

⁵L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di $\sigma_{\rho_{l_{pic}}}$ e $\sigma_{\rho_{l_{fit}}}$

⁶L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di σ_{θ_c} e σ_{θ_p}

4 Spinta di Archimede in funzione di ρ_c

Per verificare l'influenza della densità del corpo immerso (ρ_c) per A , andiamo a misurare la spinta di Archimede con oggetti che abbiano approssimativamente lo stesso volume, ma di materiale diverso (per quanto dimostrato nel primo punto dell'esperienza, eventuali discrepanze non trascurabili tra i volumi delle 5 sfere dovrebbero essere osservabili nelle differenze tra le varie risultanti).

Per fare ciò utilizzeremo 5 sfere rispettivamente di: ottone, rame, alluminio, acciaio e piombo. Procediamo dunque a calcolare massa⁷, volume e relativa densità delle sferette.

Diametri, masse e pesi delle sferette:

<i>Dati</i>	Ottone	Rame	Alluminio	Acciaio	Piombo	Incertezze
Diametro (mm)	25.24	25.46	24.95	25.32	25.11	0.01
Massa (g)	71.5	77.3	55.5	67	93.3	0.1
Peso (N)	0.71	0.77	0.55	0.66	0.92	0.01

Volumi e relative incertezze:

<i>Dati</i>	Ottone	Rame	Alluminio	Acciaio	Piombo
Volumi (mm^3)	8419.12	8641.20	8132.24	8499.43	8289.70
Incertezze (mm^3)	10.01	10.18	9.78	10.07	9.90

Le incertezze sui volumi sono state calcolate con la seguente formula:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\pi d^2}{2}\right)^2 (\sigma_d)^2} \quad (6)$$

Dove:

- d è il diametro della sfera
- σ_d è l'errore associato al diametro d

Di seguito le densità⁸ ottenute:

<i>Dati</i>	Ottone	Rame	Alluminio	Acciaio	Piombo
Densità ($g \cdot cm^{-3}$)	8.49	8.95	6.82	7.88	11.25
Incertezze ($g \cdot cm^{-3}$)	0.01	0.01	0.008	0.01	0.014

Le incertezze sulle densità sono state calcolate con la seguente formula:

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(-\frac{m}{V^2}\right)^2 (\sigma_V)^2} \quad (7)$$

⁷Nel calcolo della massa e del peso è inevitabilmente incluso anche il piccolo gancetto di materiale metallico attaccato ad ogni sfera, il quale è con molta probabilità trascurabile rispetto al resto del corpo, ma di cui non conosciamo la reale entità.

⁸Le incertezze relative alla densità della sfera di alluminio e alla sfera in piombo vengono riportate come tali in quanto approssimarle a 0.01 porterebbe nel primo caso a sovrastimare l'errore del 20% e nel secondo caso ad una sottostima di circa il 30%.

dove:

- σ_m è l'errore associato alla massa m
- σ_V è l'errore associato al volume V

Calcoliamo poi la risultante ($P_c - A$) immergendo le sfere (sia nel fluido 1 che nel fluido 2), e in seguito, per differenza, la relativa spinta di Archimede.

FLUIDO 1

<i>Dati</i>	Ottone	Rame	Alluminio	Acciaio	Piombo	Incertezze
Risultante (N)	0.63	0.68	0.47	0.58	0.84	0.1
Archimede (N)	0.8	0.9	0.8	0.8	0.8	0.014

FLUIDO 2

<i>Dati</i>	Ottone	Rame	Alluminio	Acciaio	Piombo	Incertezze
Risultante (N)	0.62	0.68	0.47	0.57	0.83	0.1
Archimede (N)	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9	0.014

Le spinte di Archimede ottenute risultano tutte uguali tra loro, per entrambi i fluidi, a meno della spinta registrata per la sfera di rame (fluido 1) e per la sfera di alluminio (fluido 2), che risultano infatti essere rispettivamente la sfera con volume maggiore e la sfera con volume minore; ciò è perfettamente in accordo con quanto dimostrato nel primo punto dell'esperienza.

Nonostante questo, la discrepanza con le altre spinte di Archimede risulta essere contenuta entro una volta l'incertezza associata a quest'ultima, pari a 0.014 N , di conseguenza non è necessario effettuare un test di Gauss, ma possiamo direttamente affermare che esse sono confrontabili tra loro con un livello di significatività del 5%.

Oltre a confermare quanto osservato nel primo punto dell'esperienza, dai risultati ottenuti possiamo anche apprezzare la dipendenza della spinta di Archimede dalla densità del fluido, osservando come mediamente la spinta di Archimede registrata per il fluido 2 (miscela di acqua di rubinetto + sale, dunque più densa della sola acqua di rubinetto) risulti maggiore di quella registrata per il fluido 1.

In ultima analisi possiamo dunque dedurre come la spinta di Archimede non dipenda dalla densità dei corpi immersi, in quanto le discrepanze osservate tra sfere aventi densità differenti non sono tra loro significative.

5 Viscosità e spinta di Archimede

La scopo di quest'ultima parte dell'esperienza di laboratorio sarà quella di studiare il moto di un oggetto di forma sferica in un liquido e determinare il coefficiente di viscosità di quest'ultimo.

Per fare ciò utilizzeremo 14 sferette di piombo, le quali verranno fatte cadere una alla volta in un cilindro graduato riempito di shampoo. Verranno presi i tempi di caduta con un cronometro digitale e poi calcolate le rispettive velocità medie da cui proveremo a stimare il coefficiente di viscosità η . Tale coefficiente verrà calcolato in due modi: prima non tenendo conto della spinta di Archimede ed in seguito tenendo conto della spinta di Archimede, per procedere poi ad un confronto finale tra i due valori ottenuti.

Per prima cosa pesiamo le palline tutte insieme con un bilancia e ne stimiamo la massa media ed il relativo errore⁹. Ne calcoliamo poi i 14 diametri con un calibro elettronico e ne stimiamo il diametro medio e l'incertezza¹⁰. Una volta ottenuto il diametro, calcoliamo il volume medio, l'incertezza associata [formula (6)] e per finire la densità media con la relativa incertezza [formula (7)]. Di seguito una tabella riassuntiva:

<i>Dati</i>	Valori Ottenuti	Incertezze	u.m.
Peso totale	62.4	0.1	<i>g</i>
Peso medio	4.46	0.007	<i>g</i>
Diametro medio	10.26	0.01	<i>mm</i>
Volume medio	564.92	1.16	<i>mm</i> ³
Densità media	7.89	0.02	<i>g · cm</i> ⁻³

Tabella 5: Risultati delle misurazioni per le 14 sferette

Suddividendo poi il becher in 3 segmenti di altezza $h = 67 \pm 0.5 \text{ mm}$, andiamo a far cadere le palline prendendone i tempi di passaggio alla fine del primo, del secondo e del terzo intervallo. Calcoliamo poi per ogni segmento il tempo di percorrenza medio, la velocità media ed i relativi errori. La tabella con tutti i tempi registrati è consultabile in appendice. Di seguito una tabella riassuntiva dei valori ottenuti:

Segmento	Tempo Medio (s)	Tempo di percorrenza medio (s)	Velocità media (<i>mm · s</i>⁻¹)
1°	1.05 ± 0.02	1.05 ± 0.02	64.1 ± 1.5
2°	2.06 ± 0.04	1.01 ± 0.05	66.3 ± 3.1
3°	3.00 ± 0.04	0.94 ± 0.05	71.6 ± 4.1

Tabella 6: Tempi e velocità medie per le 14 sferette

Le incertezze corrispondenti alle medie dei tempi di passaggio (indicate nella tabella con "Tempo Medio") alla fine del primo, secondo e terzo segmento, sono state ottenute come le deviazioni standard delle medie delle 14 misure effettuate per ognuno dei 3 segmenti. L'incertezza associata al tempo di percorrenza medio (t_m) è data dalla semplice somma in quadratura, mentre l'incertezza relativa alla velocità media (v_m) è stata ottenuta dalla seguente formula:

$$\sigma_{v_m} = \sqrt{\left(\frac{1}{t_m}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(-\frac{h}{t_m^2}\right)^2 (\sigma_{t_m})^2} \quad (8)$$

Andiamo ora a compiere 3 test di Gauss per verificare se le velocità medie nei rispettivi segmenti sono tra loro compatibili o meno.

5.1 Test di Gauss ($v_1 - v_2$)

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : $\bar{v} = |v_1 - v_2|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{v}}$. Di conseguenza v_1 e v_2 sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto¹¹.

⁹Valori ottenuti dividendo la massa totale e la relativa incertezza (sensibilità strumento) per 14

¹⁰L'incertezza associata è la deviazione standard della media dei 14 diametri

¹¹L'incertezza $\sigma_{\bar{v}}$ è data dalla somma in quadratura di σ_{v_1} e σ_{v_2}

- **Ipotesi** H_1 : $\bar{\nu} = |v_1 - v_2|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza v_1 e v_2 non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.1.1 Esito del test

$$Z_{oss} = 0.8 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): la velocità media nel primo segmento (v_1) è compatibile con la velocità media nel secondo segmento (v_2) ad un livello di significatività del 5%.

5.2 Test di Gauss ($v_1 - v_3$)

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : $\bar{\nu} = |v_1 - v_3|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza v_1 e v_3 sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto¹².
- **Ipotesi** H_1 : $\bar{\nu} = |v_1 - v_3|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza v_1 e v_3 non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.2.1 Esito del test

$$Z_{oss} = 1.7 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): la velocità media nel primo segmento (v_1) è compatibile con la velocità media nel terzo segmento (v_3) ad un livello di significatività del 5%.

5.3 Test di Gauss ($v_2 - v_3$)

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : $\bar{\nu} = |v_2 - v_3|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza v_2 e v_3 sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto¹³.
- **Ipotesi** H_1 : $\bar{\nu} = |v_2 - v_3|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza v_2 e v_3 non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.3.1 Esito del test

$$Z_{oss} = 1.0 < 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto conferma l'ipotesi nulla (H_0): la velocità media nel secondo segmento (v_2) è compatibile con la velocità media nel terzo segmento (v_3) ad un livello di significatività del 5%.

¹²L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di σ_{v_1} e σ_{v_3}

¹³L'incertezza $\sigma_{\bar{\nu}}$ è data dalla somma in quadratura di σ_{v_2} e σ_{v_3}

5.3.2 Conclusioni - confronto velocità

Al contrario di quanto ci aspetteremmo, la velocità media sui 3 segmenti non risulta diminuire durante la fase di caduta, bensì aumentare, da quanto si evince nella *Tabella 6*. A primo impatto questo sembrerebbe contraddittorio, in quanto le sfere, essendo soggette alla forza di attrito viscoso, dovrebbero raggiungere la velocità limite già nel primo tratto del cilindro graduato.

Nonostante questo però, applicando un test di Gauss le 3 velocità risultano tutte tra loro compatibili viste le incertezze. Le differenze osservate, così come il fatto che la velocità sembri aumentare, potrebbero quindi essere frutto di fluttuazioni statistiche, e della prontezza/riflessi in fase di presa dati, contando che la pallina andava seguita ad occhio mentre cadeva lungo il cilindro graduato, con possibili errori di parallasse.

Di conseguenza, al fronte di tali incertezze, le differenze riscontrate tra le 3 velocità risultano di fatto trascurabili, indicando come nonostante i valori crescenti ottenuti per quest'ultime, le sfere possano in realtà aver raggiunto mediamente la velocità limite già nel primo tratto del cilindro graduato.

5.4 Coefficiente di viscosità: η

Andiamo ora a calcolare il coefficiente di viscosità η in due modi diversi: prima non tenendo conto della spinta di Archimede e poi in secondo luogo tenendo conto di quest'ultima.

Se la spinta di Archimede non dovesse essere trascurabile, come ci aspettiamo, le discrepanze tra le due stime di η dovrebbero risultare significative entro un livello di significatività del 5%.

5.4.1 η trascurando Archimede

Calcoliamo la velocità media, coincidente con la velocità limite (v_l), sull'intero percorso, ovvero sullo spazio totale coperto dai 3 segmenti di altezza $h = 67 \pm 0.5 \text{ mm}$, tramite il tempo medio di passaggio alla fine del terzo segmento (t_m), pari $3.00 \pm 0.04 \text{ s}$.

$$v_l = \frac{S_{tot}}{t_m} = \frac{3 \cdot h}{t_m} \quad (9)$$

$$\sigma_{v_l} = \sqrt{\left(\frac{1}{t_m}\right)^2 (\sigma_{S_{tot}})^2 + \left(\frac{-S_{tot}}{t_m^2}\right)^2 (\sigma_{t_m})^2} \quad (10)$$

Numericamente:

$$v_l = 67.05 \pm 0.94 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Ora possiamo calcolare il coefficiente di viscosità η con la relativa incertezza:

$$\eta = \frac{mg}{6\pi \frac{d}{2} v_l} \quad (11)$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{g}{6\pi \frac{d}{2} v_l}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(-\frac{mg}{6\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v_l}\right)^2 \left(\frac{\sigma_d}{2}\right)^2 + \left(-\frac{mg}{6\pi \frac{d}{2} v_l^2}\right)^2 (\sigma_{v_l})^2} \quad (12)$$

Numericamente:

$$\eta = 6.75 \pm 0.09 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

5.4.2 η includendo Archimede

Ricalcoliamo η e la relativa incertezza utilizzando la formula completa, tenente conto della spinta di Archimede, e utilizzando la densità dello shampoo ($\rho_l = 1.04 \pm 0.04 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) nota sperimentalmente:

$$\eta = \frac{(\rho_c - \rho_l) V g}{6 \pi \frac{d}{2} v_l} \quad (13)$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{V g}{6 \pi \frac{d}{2} v_l} \sigma_{\rho_c}\right)^2 + \left(-\frac{V g}{6 \pi \frac{d}{2} v_l} \sigma_{\rho_l}\right)^2 + \left(\frac{(\rho_c - \rho_l) g}{6 \pi \frac{d}{2} v_l} \sigma_V\right)^2 + \left(-\frac{(\rho_c - \rho_l) V g}{6 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v_l} \frac{\sigma_d}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(\rho_c - \rho_l) V g}{6 \pi \frac{d}{2} v_l^2} \sigma_{v_l}\right)^2}$$

Numericamente:

$$\eta = 5.86 \pm 0.09 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

5.5 Test di Gauss - η

Eseguiamo infine un ultimo test di Gauss per verificare la compatibilità tra i due coefficienti di viscosità appena calcolati. Indicheremo con η_1 il coefficiente calcolato senza tener conto della spinta di Archimede e con η_2 quello tenente conto della spinta di Archimede.

- Livello di significatività (α): 0.05
- **Ipotesi** H_0 : $\bar{\nu} = |\eta_1 - \eta_2|$ è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza η_1 e η_2 sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto¹⁴.
- **Ipotesi** H_1 : $\bar{\nu} = |\eta_1 - \eta_2|$ non è stato estratto da una distribuzione normale avente $\mu = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ e deviazione standard pari a $\sigma_{\bar{\nu}}$. Di conseguenza η_1 e η_2 non sono tra loro compatibili entro il livello di significatività scelto.

5.5.1 Esito del test

$$Z_{oss} = 6.8 > 1.96 = Z_{critico}$$

Il risultato ottenuto ci porta a rigettare l'ipotesi nulla (H_0) e ad accettare l'ipotesi H_1 .

La discrepanza ottenuta tra η_1 e η_2 risulta significativa, indicando come la spinta di Archimede non sia trascurabile. Ne deduciamo dunque che il valore precedentemente calcolato per η_1 è affetto da errore sistematico.

¹⁴L'incertezza $\sigma_{\bar{\eta}}$ è data dalla somma in quadratura di σ_{η_1} e σ_{η_2}

6 Conclusioni

1) Spinta di archimede in funzione di V_i .

Grazie all'ausilio della rigressione lineare (metodo dei minimi quadrati) e del test del χ^2 , abbiamo verificato positivamente per entrambi i fluidi l'andamento lineare della spinta di Archimede in funzione del volume immerso. Inoltre, le densità ottenute a partire dei coefficienti angolari delle rette, sono risultate compatibili, ad un livello di significatività del 5%, con le densità ottenute sperimentalmente tramite il picnometro.

Questi risultati evidenziano un'accurata e precisa acquisizione dei dati, come mostrato anche dal valore sospetto del χ^2 ottenuto per il fluido 2.

2) Spinta di archimede in funzione di ρ_c .

I risultati ottenuti confrontando le spinte di Archimede per sfere di densità differenti mostrano come quest'ultima non dipenda in nessun modo dalla densità del corpo immerso, bensì dal volume del corpo immerso e dalla densità del liquido.

Non è stato necessario effettuare un test di Gauss per verificare tale risultato in quanto nel peggiore dei casi la discrepanza tra le diverse spinte di Archimede è risultata essere contenuta entro una volta l'incertezza associata a tali spinte. Di conseguenza le spinte di Archimede ottenute sono risultate tutte tra loro confrontabili con un livello di significatività del 5%.

3) Viscosità

Le 3 velocità medie ottenute per le sferette nei relativi segmenti sono risultate tutte tra loro confrontabili con un livello di significatività del 5%. Nonostante i valori ottenuti possano in primo luogo mostrare un'apparente accelerazione delle sferette lungo tutto il percorso, le "ampie" incertezze associate e l'effetto delle fluttuazioni statistiche rendono tra loro le velocità compatibili, mostrando come mediamente le sferette possano in realtà aver raggiunto la velocità limite prima della fine del 1° segmento.

Infine, per quanto riguarda il coefficiente di viscosità, i due valori di η calcolati non sono risultati tra loro confrontabili ad un livello di significatività del 5%, mostrando un'errore sistematico nel calcolo di η_1 e dunque come la spinta di Archimede non sia una forza trascurabile per le sferette immerse nello shampoo.

Appendice A

Dati registrati con il cronometro digitale per i tempi di passaggio alla fine dei vari segmenti del cilindro graduato.

Tabella 7: Tempi registrati in laboratorio

Lap	Segmento	Tempi (s)	Lap	Segmento	Tempi (s)
1	1° segmento	1.18	8	1° segmento	1.03
	2° segmento	2.19		2° segmento	1.91
	3° segmento	3.20		3° segmento	3.09
2	1° segmento	1.15	9	1° segmento	0.97
	2° segmento	2.16		2° segmento	1.90
	3° segmento	3.21		3° segmento	2.83
3	1° segmento	1.05	10	1° segmento	0.96
	2° segmento	2.06		2° segmento	2.09
	3° segmento	2.94		3° segmento	2.93
4	1° segmento	1.15	11	1° segmento	1.06
	2° segmento	2.16		2° segmento	2.11
	3° segmento	3.09		3° segmento	3.00
5	1° segmento	1.13	12	1° segmento	0.99
	2° segmento	2.39		2° segmento	1.92
	3° segmento	3.07		3° segmento	2.85
6	1° segmento	1.03	13	1° segmento	0.91
	2° segmento	2.12		2° segmento	1.96
	3° segmento	2.96		3° segmento	2.93
7	1° segmento	1.11	14	1° segmento	0.92
	2° segmento	2.12		2° segmento	1.81
	3° segmento	3.09		3° segmento	2.78