Tutoraggio mercoledì 21 dicembre: Coniche

Correggeremo il seguente esercizio:

Esercizio 1. Dal Tutoraggio del 20 dicembre, Es. 1 della prova scritta del 20/02/2023 (trovate il testo nella pagina seguente).

Svolgere i seguenti esercizi, la cui soluzione verrà commentata in aula:

Esercizio 2. Riconoscere la conica

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 4x + 4y\sqrt{3} + 4 = 0$$

Esercizio 3. Riconoscere le seguenti coniche:

1. $3x^2 - 3y^2 - 8xy - 10\sqrt{5}y - 10 = 0$.
2. $(x + y - 1)(2x - y - 3) = 0$.
3. $(3x - 2y + 1)^2$.
4. $\frac{(x+y-1)^2}{4} + (x - y + 1)^2 = 1$.

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 20/02/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Nello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado al più tre a coefficienti reali, si consideri l'endomorfismo f dato, nella base $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, da

$$f(1) = 1 + 3x^3, \qquad f(x) = 4x + 2x^2,$$
$$f(x^2) = 1 + 4x^2 + kx^3, \qquad f(x^3) = 3 + x^3$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) **(2pt).** Determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\mathscr{B}$.

(ii) **(4pt).** Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Le matrici rappresentative di f per $k = 1$ e per $k = -1$ sono simili?

Per le prossime domande, si ponga $k = 1$. Definiamo inoltre il prodotto scalare $\cdot$ tramite

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(iii) **(4pt).** Sia $H = \mathscr{L}(1 + x^2, x + x^3)$. Determinare i sottospazi $f(H)$ ed $f^{-1}(H)$. Stabilire se sono tra loro supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$.

(iv) **(3pt).** Sia π la proiezione ortogonale su H. Determinare se l'applicazione

$$\pi \circ f \;:\; H \to H$$

è un isomorfismo.

(v) **(3pt).** Stabilire se esistono sottospazi invarianti Z, W per f che siano di dimensione 2 e supplementari.
(Suggerimento: ragionare sulla dimensione dell'autospazio associato a $\lambda = 4$).