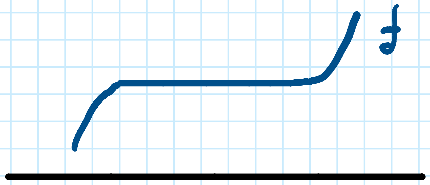
Lezione 8 (09/10)

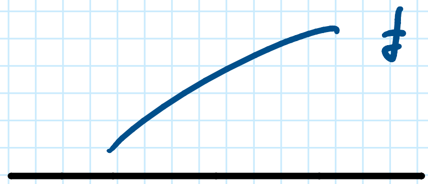
Una condizione sufficiente per l'esistenza del limite

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$. Ricordo che:

- f si dice monotona crescente (decrescente) se
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(\geq)}{\leq} f(x_2)$
- f si dice strettamente monotona crescente (decrescente) se
  $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(>)}{<} f(x_2)$



crescente



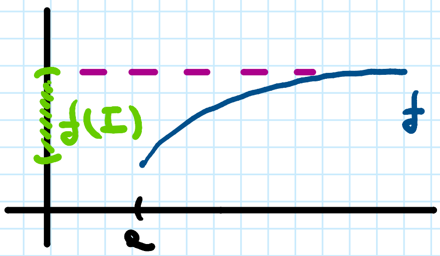
strett crescente

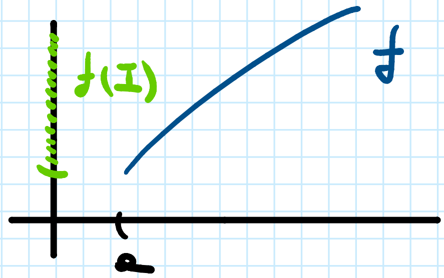
Teorema di esistenza del limite per f.ni monotone

Sia $I = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$

Se f è monotona su I, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup(f(I)) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf(f(I)) & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$





Ricordo $f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$ immagine di f

Per brevità, $\sup(f(I)) / \inf(f(I))$

Per brevità, $\sup(f(I))/\inf(f(I))$ spesso si denotano anche con

$$\sup_{x\in I} f(x) / \inf_{x\in I} f(x) \quad \text{o} \quad \sup_I f / \inf_I f$$

<u>dim</u> Supponiamo f crescente e sia $l = \sup(f(I))$

<u>$l=+\infty$</u> Dobbiamo dim che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l = +\infty$ cioè

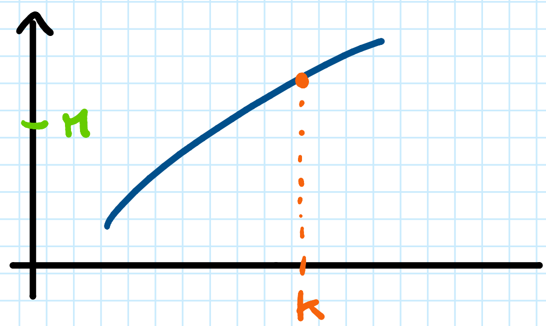
$\forall M>0 \ \exists K>0$ t.c. $x>K \Rightarrow f(x)>M$

Prendo $M>0$ arbitrario. Poiché M non è maggiorante di $f(I)$

$\exists K\in I$ t.c. $f(K)>M$

Poiché f è crescente

$x>K \Rightarrow f(x) \geq f(K) > M$



<u>$l\in\mathbb{R}$</u> Dobbiamo dim che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ cioè

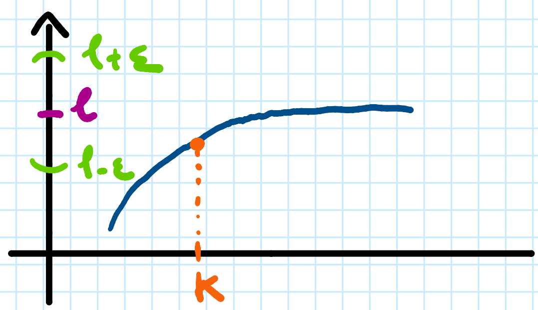
$\forall \varepsilon>0 \ \exists K>0$ t.c. $x>K \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

cioè $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

Prendo $\varepsilon>0$ arbitrario

Poiché $l-\varepsilon$ non è maggiorante di $f(I)$, $\exists K\in I$ t.c.

$f(K) > l-\varepsilon$



Poiché f è crescente

$x>K \Rightarrow f(x) \geq f(K) > l-\varepsilon$

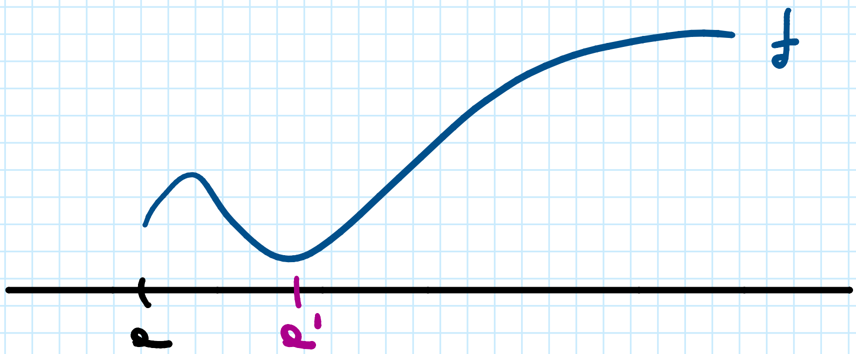
D'altra canto, $f(x) \leq l \ \ \forall x\in I$ poiché l è

D'altra canto, $f(x) \leq l \quad \forall x \in I$ poiché l è maggiorante di $f(I)$.
In definitiva

$$x > K \Rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) \leq l < l + \varepsilon \qquad \square$$

Osservazioni

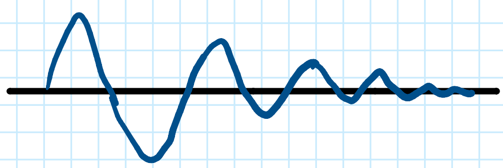
- Non è essenziale che f sia monotona su tutto il dominio $I = (a, +\infty)$; è sufficiente che lo sia su $(a', +\infty)$ con $a' > a$



- Il teo dà una condizione sufficiente ma non necessaria! Ad es

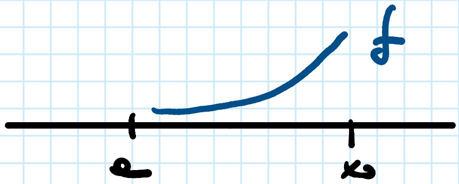
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ per cui $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(lo dim nella Lez 9)



- Con identica dim si prova che:
se $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ (con $x_0 \in \mathbb{R}$) è monotona allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$



Simmetrici enunciati per

$f: (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ $\quad \left(\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) \right)$

$f: (x_0, b) \to \mathbb{R}$ $\quad \left(\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$

- Riflettiamo:

f monotona su (a, x_0) $(x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$ $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

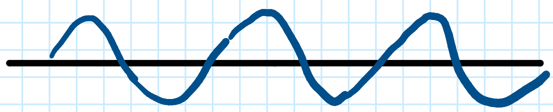
Quindi:

cond necessaria per $\nexists \lim$

$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Rightarrow f$ non è monotona in nessun intorno sx di x_0

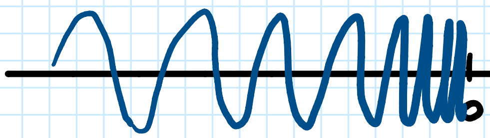
($\Rightarrow f$ cambia monotonia infinite volte a sx di x_0)

es



$f(x) = \sin x$

$\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$



$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\nexists \lim_{x \to 0^-} f(x)$

Teorema sull'algebra dei limiti

Se $\lim f(x) = l$ e $\lim g(x) = m$, con $x_0, l, m \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, con $x_0, l, m \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora: 1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

3) se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, tranne x_0,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

purché l'espressione a secondo membro sia ben definita in $\overline{\mathbb{R}}$

Ciò vuol dire che:

- si escludono le forme indeterminate

$$+\infty - \infty, \ -\infty + \infty, \ (\pm\infty) \cdot 0, \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \frac{0}{0}$$

- sono invece definite

$$+\infty + m = +\infty \qquad \text{se } m \neq -\infty$$

$$-\infty + m = -\infty \qquad \text{se } m \neq +\infty$$

$$\pm\infty \cdot m = \text{sgn}(m) \cdot (\pm\infty) \qquad \text{se } m \neq 0$$

$$\pm\infty / m = \text{sgn}(m) \cdot (\pm\infty) \qquad \text{se } m \neq \pm\infty, 0$$

$$l / \pm\infty = 0 \qquad \text{se } l \neq \pm\infty$$

- la forma $l/0$ se $l \neq 0$ è "semi-indeterminata", nel senso che:
  - se $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g(x) > 0$ in $I(x_0) \setminus \{0\}$ (in tal caso si scrive $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+$) allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{sgn}(l) \cdot (+\infty)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{sgn}(\ell)\cdot(+\infty)$$

- se $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e $g(x) < 0$ in $I(x_0)\setminus\{0\}$ (in tal caso si scrive $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$) allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{sgn}(\ell)\cdot(-\infty)$$

- negli altri casi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{non esiste!}$$

Tuttavia $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

es 1) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right]$ non esiste

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2+1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2+1}{x} = +\infty$$

2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-3x+7}{x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{3}}(2-3/x^2+7/x^3)}{\cancel{x^2}(1+5/x^2)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,\boxed{(2-3/x^2+7/x^3)}\to 2}{\boxed{1+5/x^2}\to 1} = +\infty$$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^5+2x^3-7}{8x^5-x^4+5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^5}\,\boxed{(-4+2/x^2-7/x^5)}\to -4}{\cancel{x^5}\,\boxed{(8-1/x+5/x^4)}\to 8}$

$$= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+1}{-3x^3+6x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\,\boxed{(6+1/x^2)}\to 6}{x^{\cancel{3}}\,\boxed{(-3+6/x)}\to -3} = 0$

<u>Corollario</u> Se f e g sono continue in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

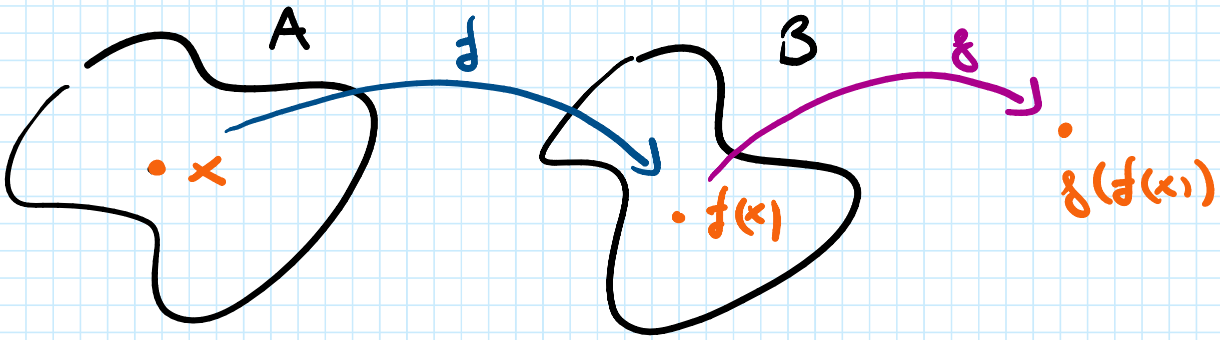
1) $f \pm g$ 2) $f \cdot g$ 3) f/g se $g(x_0) \neq 0$

sono continue in x_0.

Per introdurre il prossimo teorema, facciamo una premessa. Date $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può definire

$$g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$$ <u>f.ne composta</u>

sul dominio $\mathrm{dom}(g\circ f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$



Es $f(x) = \log x$ $\mathrm{dom}(f) = (0,+\infty)$

$g(y) = \sqrt{y}$ $\mathrm{dom}(g) = [0,+\infty)$

Si ha $g(f(x)) = \sqrt{\log x}$

su $\mathrm{dom}(g\circ f) = \{x \in (0,+\infty) \mid \underbrace{\log x \geq 0}_{f(x)\in\mathrm{dom}(g)}\} = [1,+\infty)$

se $\mathrm{dom}(g\circ f) = \{x \in (0,+\infty) \mid \underbrace{\log x \geq 0}_{f(x)\in \mathrm{dom}(g)}\} = [1,+\infty)$

Vediamo come calcolare

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))$$

"Operativamente" si fa così:

1) pongo $y = f(x)$
2) calcolo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$
3) calcolo $\lim_{y\to \ell} g(y)$

Cioè, ci si aspetta che valga la formula

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to \ell} g(y) \quad \text{se } \ell = \lim_{x\to x_0} f(x)} \qquad (S)$$

In effetti (sotto opportune ipotesi!) vale il:

Teorema di sostituzione

La formula (S) è vera se:

i) $\ell = \pm\infty$

oppure

ii) $\ell \in \mathbb{R}$ e g è continua in ℓ

Oss Nel caso ii) possiamo scrivere

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to \ell} g(y) \qquad \text{con } \ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\overset{g \text{ continua}}{=} g(\ell)$$

$$= g\left(\lim f(x)\right)$$

g continua $=$ $g(\ldots)$

$$= g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

es 1) $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\boxed{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$

$y = f(x)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to -\infty} \sin\left(\boxed{e^x}\right) = \lim_{y\to 0} \sin(y) = 0$

$y = f(x)$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

o più brevemente

$$\lim_{x\to -\infty} \sin(e^x) = \sin\Big(\overbrace{\lim_{x\to -\infty} e^x}^{=0}\Big) = \sin(0) = 0$$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} g(x^2)$ con $g(y) = \frac{\sin y}{y}$

g si prolunga per continuità in $y=0$ (cfr Lez 7) $\rightarrow$ $= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Corollario Se f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ e g è continua in $f(x_0)$, allora $g\circ f$ è continua in x_0