Tutoraggio mercoledì 20 dicembre: Esercizi di riepilogo su applicazioni lineari e forme bilineari

---

Correggeremo il seguente esercizio:

Esercizio 1. (Dal Tutoraggio del 15 dicembre, Es. 2 della prova scritta del 10/06/2021) Si consideri su $\mathbb{R}^3$ la base standard $\mathcal{B}$ e la forma quadratica Q definita dal polinomio $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2z^2$. Sia φ la corrispondente forma bilineare.

1. Trovare la matrice associata a φ.
2. Calcolare la segnatura di φ.
3. Trovare una base $\mathcal{B}'$ che diagonalizzi φ e scrivere le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e viceversa. Usare la formula di cambiamento di base per trovare la matrice associata a φ rispetto a $\mathcal{B}'$.
4. Dire se esiste una base $\mathcal{C}$, canonica per φ, rispetto cui la matrice associata a φ abbia elementi $1, -1, 4$ sulla diagonale. Nel caso, trovare tale base.

Svolgere i seguenti esercizi, la cui soluzione verrà commentata in aula:

Esercizio 2. (Es. [29] del foglio 8) Si consideri la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$:

$$Q\left((x_1, x_2, x_3)\right) = -x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. Calcolare il rango di Q e la sua segnatura.
2. Determinare la dimensione e una base di un sottospazio vettoriale $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^3$, se esiste, su cui la forma quadratica Q sia definita positiva.
3. Determinare la dimensione e una base del sottospazio vetorale ortogonale (rispetto alla forma bilineare simmetrica φ associata a Q), al piano vettoriale

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3\}.$$

Esercizio 3. Svolgere l'esercizio 1 della prova scritta del 20/02/2023 (trovate il testo nella pagina seguente).

Esercizio 4. Avete visto a lezione che se una forma quadratica Q è semidefinita (positiva o negativa), allora il nucleo della forma bilineare simmetrica associata a Q e il cono isotropo di Q coincidono. È vero il viceversa?
Se Q è indefinita, è possibile che il cono isotropo sia un sottospazio in alcuni casi? O non è mai un sottospazio? [*Suggerimento: ragionare sull'esempio del prodotto di Lorentz-Minkowski.*]

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 20/02/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Nello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado al più tre a coefficienti reali, si consideri l'endomorfismo f dato, nella base $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, da

$$f(1) = 1 + 3x^3, \qquad f(x) = 4x + 2x^2,$$
$$f(x^2) = 1 + 4x^2 + kx^3, \qquad f(x^3) = 3 + x^3$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) **(2pt).** Determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\mathscr{B}$.

(ii) **(4pt).** Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Le matrici rappresentative di f per $k = 1$ e per $k = -1$ sono simili?

Per le prossime domande, si ponga $k = 1$. Definiamo inoltre il prodotto scalare $\cdot$ tramite

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(iii) **(4pt).** Sia $H = \mathscr{L}(1 + x^2, x + x^3)$. Determinare i sottospazi $f(H)$ ed $f^{-1}(H)$. Stabilire se sono tra loro supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$.

(iv) **(3pt).** Sia π la proiezione ortogonale su H. Determinare se l'applicazione

$$\pi \circ f \;:\; H \to H$$

è un isomorfismo.

(v) **(3pt).** Stabilire se esistono sottospazi invarianti Z, W per f che siano di dimensione 2 e supplementari. (Suggerimento: ragionare sulla dimensione dell'autospazio associato a $\lambda = 4$).