Esercizio 1.
Sia A una matrice quadrata, ad elementi reali, di ordine 8, il cui polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2)(\lambda - 3)^2$$

1. Quanto può valere il rango di A? (Giustificare la risposta)
2. A può essere diagonalizzabile? (Giustificare la risposta)
3. Trovare un esempio di A con $\dim V_0 = 1$ e uno con $\dim V_0 = 2$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. determinare, se esiste, una matrice invertibile P tale che

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. A e B sono simili?

c. determinare, se esiste, una matrice Q ortogonale tale che

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.
Sia fissato un vettore $\mathbf{a} \in V_3$, e sia data l'applicazione lineare:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$$

1. Determinare autovalori e autospazi di f.

2. f è diagonalizzabile?

3. f è un endomorfismo autoaggiunto?

Esercizio 4.
Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, determinare la validità delle seguenti implicazioni:

1. A diagonalizzabile $\Rightarrow A^2$ diagonalizzabile.

2. A^2 diagonalizzabile $\Rightarrow A$ diagonalizzabile.

3. A^2 simmetrica $\Rightarrow A$ simmetrica.

In caso di risposta affermativa, dimostrare. In caso di risposta negativa, confutare con un controesempio.

Esercizio 5.
Trovare un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker f \subset \ker f^2.$$

È possibile trovare tale f diagonalizzabile?