GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 1

Prova scritta del 20/02/2023

Proff. L. Mari e T. Pacini

ESERCIZIO 1 (16 pt.)

Nello spazio $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado al più tre a coefficienti reali, si consideri l'endomorfismo f dato, nella base $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, da

$$f(1) = 1 + 3x^3, \qquad f(x) = 4x + 2x^2,$$
$$f(x^2) = 1 + 4x^2 + kx^3, \qquad f(x^3) = 3 + x^3$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) **(2pt).** Determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\mathscr{B}$.

(ii) **(4pt).** Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Le matrici rappresentative di f per $k = 1$ e per $k = -1$ sono simili?

Per le prossime domande, si ponga $k = 1$. Definiamo inoltre il prodotto scalare $\cdot$ tramite

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(iii) **(4pt).** Sia $H = \mathscr{L}(1+x^2, x+x^3)$. Determinare i sottospazi $f(H)$ ed $f^{-1}(H)$. Stabilire se sono tra loro supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$.

(iv) **(3pt).** Sia π la proiezione ortogonale su H. Determinare se l'applicazione

$$\pi \circ f \ : \ H \to H$$

è un isomorfismo.

(v) **(3pt).** Stabilire se esistono sottospazi invarianti Z, W per f che siano di dimensione 2 e supplementari.
(Suggerimento: ragionare sulla dimensione dell'autospazio associato a $\lambda = 4$).

ESERCIZIO 2 (17 pt.)

Nota: Nel seguente esercizio faremo sempre riferimento alla base standard di $\mathbb{R}^3$.

Sia $Q_1(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$ una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$. Sia $\varphi_1(v,w)$ la forma bilineare simmetrica corrispondente.

Sia
$$W_1 := \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}, \qquad W_2 := \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}.$$
Consideriamo la somma diretta $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Sia M la matrice 3x3 associata alla proiezione su W_2 e φ_2 la forma bilineare simmetrica avente matrice M.

(i) **(3pt).** Determinare la matrice M e le espressioni di $\varphi_1(v,w)$ e $\varphi_2(v,w)$ per $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$.

(ii) **(3pt).** Dimostrare che $\varphi(v,w) := \varphi_1(v,w) + \varphi_2(v,w)$ e' una forma bilineare e simmetrica su $\mathbb{R}^3$. Determinare la sua segnatura.

(iii) **(3pt).** Trovare un vettore non-zero nel cono isotropo di φ_1. Ripetere per φ_2 e $\varphi_1 + \varphi_2$.

(iv) **(3pt).** Studiare come varia la segnatura della forma bilineare simmetrica $\varphi_c := \varphi_1 + c\varphi_2$, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

(v) **(3pt).** Classificare le coniche nel piano $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ determinate dall'equazione $Q_1(x,y,z) = 0$ dopo le seguenti sostituzioni. Discutere anche la dipendenza dal parametro $c \in \mathbb{R}$.
(1) $x = s, y = t, z = c$;
(2) $x = c, y = s, z = t$;
(3) $x = s, y = t, z = c - s$.

(vi) **(2pt).** Come continuazione del punto 5, trovare una sostituzione che dia luogo ad un'ellisse (non circonferenza).

SOLUZIONI ESERCIZIO 1:

(i). $A = M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$

(ii). Si usa Laplace sulla seconda riga due volte per dedurre che gli autovalori sono 4 di molteplicità 3 e -2 di molteplicità 1. Inoltre

$$V_4 = \begin{cases} \mathscr{L}(1+x^3) & \text{if } k \neq -1, \\ \mathscr{L}(1+x^3, 3x^2-x^3) & \text{if } k = -1. \end{cases} \qquad V_{-2} = \mathscr{L}(1-x^3).$$

Quindi f non è diagonalizzabile per nessun k, e le matrici rappresentative di f per $k = 1$ e $k = -1$ non sono simili, avendo V_4 una dimensione diversa nei due casi.

(iii).
f è un automorfismo, quindi $f(H)$ ed $f^{-1}(H)$ hanno dimensione 2. In componenti $H = \{(x,y,z,w) : x = z, y = w\}$, quindi

$$f(H) = \mathscr{L}\{(2,0,4,4),(3,4,2,1)\} = \{(2a+3b, 4b, 4a+2b, 4a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

ed $f^{-1}(H) = \{(x,y,z,w) : x - 2y - 3z + 3w = 0 = 3x - 4y + z + w\}$. Quindi

$$f(H) \cap f^{-1}(H) = \{(2a+3b, 4b, 4a+2b, 4a+b) \ : \ a - 4b = 0 = 7a - 5b\} = \{0\},$$

quindi sono supplementari.

(iv).
Abbiamo che $\pi \circ f$ è un isomorfismo sse è iniettiva, cioè sse $f(H) \cap H^\perp = \{0\}$. Ma $f(H) \cap H^\perp$ è dato dalle equazioni

$$0 = (2a+3b, 4b, 4a+2b, 4a+b) \cdot (1,0,1,0) = (2a+3b, 4b, 4a+2b, 4a+b) \cdot (0,1,0,1),$$

quindi $0 = 6a + 5b = 4a + 5b$ da cui $a = b = 0$ e $\pi \circ f$ è un isomorfismo.

(v).
Non è possibile. Infatti, se così fosse, potrei prendere una base $\mathscr{C}$ rispetto a cui

$$M^{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico e' sempre lo stesso, per cui l'autovalore 4 avrebbe molteplicita' algebrica due in B ed uno in C (a meno dell'ordine). Cio' implica che sia B sia C conterrebbero almeno un autovettore, dunque V_4 avrebbe dimensione almeno 2: contraddizione.

SOLUZIONI ESERCIZIO 2:

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\varphi_1(v,w) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$, $\varphi_2(v,w) = y_1y_2 + z_1z_2$.

2) Verifica diretta. La matrice associata a $\varphi_1 + \varphi_2$ e' $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la segnatura e' (2,0).

3) Per esempio, $v_1 := (1, 1, \sqrt{2})$ appartiene al cono isotropo di φ_1, $v_2 := (1, 0, 0)$ appartiene al cono isotropo di φ_2, $v_3 := (0, 0, 1)$ appartiene al cono isotropo di $\varphi_1 + \varphi_2$.

4) La matrice associata a $\varphi_1 + c\varphi_2$ e' $N_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+c & 0 \\ 0 & 0 & -1+c \end{pmatrix}$.

Considerato che $-1 + c < 1 + c$, si tratta di studiare i seguenti casi: $-1 + c > 0$, dunque segnatura (3,0); $1 + c < 0$, dunque segnatura (1,2); $-1 + c < 0$ e $1 + c > 0$, dunque segnatura (2,1). Infine, se $c = -1$ la segnatura e' (1,1), se $c = 1$ la segnatura e' (2,0).

5) La prima sostituzione da' l'equazione $s^2 + t^2 = c^2$: circonferenze per $c \neq 0$, un punto per $c = 0$.

La seconda sostituzione da' l'equazione $s^2 - t^2 = -c^2$: iperboli per $c \neq 0$, due rette distinte per $c = 0$.

La terza sostituzione da' l'equazione $s^2 + t^2 - (c - s)^2 = 0$, ossia $t^2 + 2cs - c^2 = 0$. Per $c \neq 0$ si tratta di parabole, per $c = 0$ di una retta doppia.

6) Si tratta di cambiare l'inclinazione del piano in $\mathbb{R}^3$ corrispondente al punto 5.3, ossia di lavorare con sostituzioni della forma $x = s, y = t, z = c - \delta s$. Sostituendo, troviamo l'equazione $s^2 + t^2 - (c - \delta s)^2 = 0$, ossia $(1 - \delta^2)s^2 + t^2 + 2c\delta s - c^2 = 0$. Ponendo per esempio $\delta = 1/\sqrt{2}$, troviamo $(s/\sqrt{2})^2 + t^2 + 2c(s/\sqrt{2}) + c^2 - 2c^2 = 0$, dunque $(s/\sqrt{2} + c)^2 + t^2 = 2c^2$. Con $c = 1$ troviamo un'ellisse.