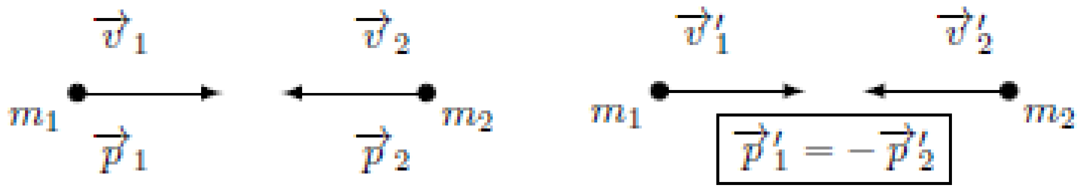
Appunti sugli urti

Sistemi di riferimento: laboratorio e centro di massa - I

Oltre al sistema di riferimento (inerziale) del laboratorio, è utile studiare gli urti nel sistema di riferimento del centro di massa perchè in questo sistema di riferimento le caratteristiche degli urti si semplificano. Nello stato iniziale si ha

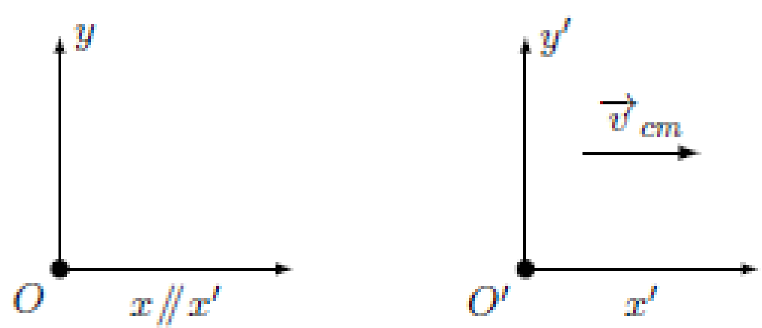


(a) Laboratorio (b) Centro di massa

dove per il sistema del centro di massa valgono le relazioni

$$\sum_i \vec{p}'_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0 \tag{1}$$

Scegliamo i sistemi di riferimento in modo tale che gli assi x e x' siano paralleli a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:



Sistemi di riferimento: laboratorio e centro di massa - II

Le osservabili nel sistema di riferimento del laboratorio saranno:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \qquad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 \tag{2}$$

Le osservabili nel sistema di riferimento del centro di massa saranno:

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 \qquad \vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 \tag{3}$$

Il passaggio da un sistema di riferimento all'altro è dato dalle leggi di trasformazione delle velocità:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_{cm} \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM} \tag{4}$$

Il valore di $\vec{v}_{cm}$ può essere calcolato tenendo a mente che la quantità di moto del c.m. coincide con quella totale del sistema:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{5}$$

Sistemi di riferimento: laboratorio e centro di massa - III

Questo era un risultato che potevamo già aspettarci. Sostituiamo ora il risultato ottenuto nelle equazioni (4) per calcolare i valori di $\vec{v}\,'_1$ e $\vec{v}\,'_2$:

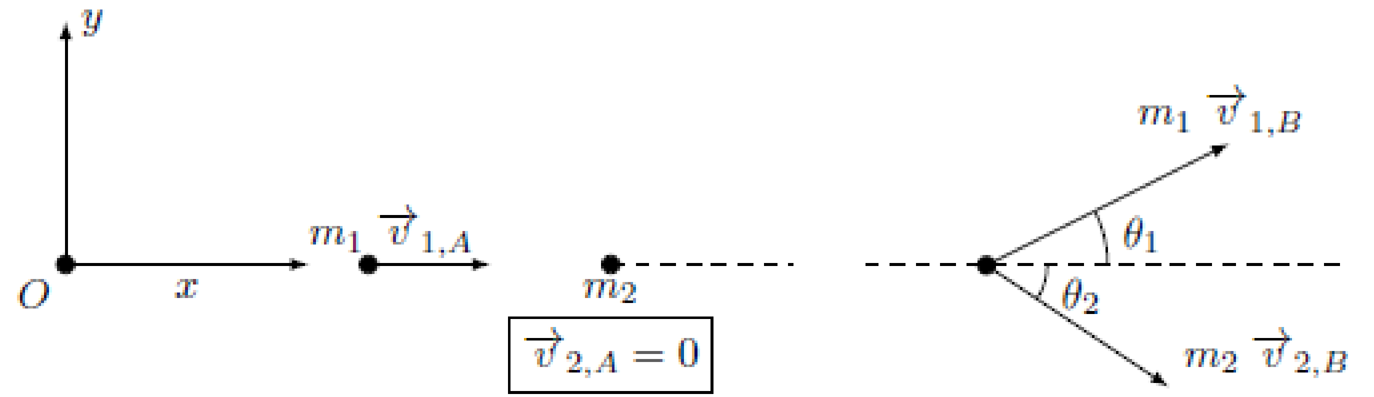
$$\begin{aligned} \vec{v}\,'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{6}$$

e analogamente

$$\vec{v}\,'_2 = \frac{m_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

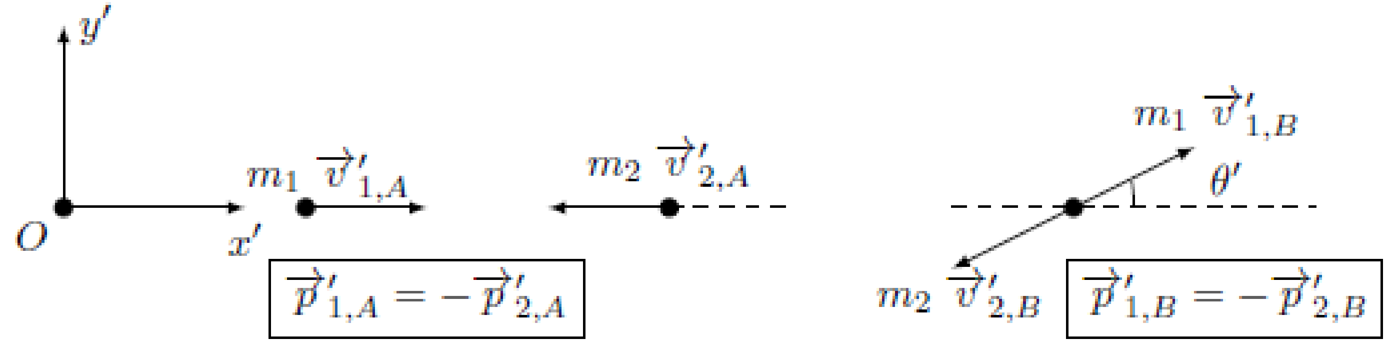
Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - I

Consideriamo ora un urto elastico su un bersaglio nel piano. Nel sistema di riferimento di laboratorio si ha:



(c) Prima dell'urto (d) Dopo l'urto

Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha:



(e) Prima dell'urto (f) Dopo l'urto

Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - II

Imponiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia nel sistema di riferimento di laboratorio:

$$\begin{cases} \vec{p}_{1,A} = \vec{p}_{1,B} + \vec{p}_{2,B} \\ T_{1,A} = T_{1,B} + T_{2,B} \end{cases} \tag{8}$$

Esplicitiamo in funzione di massa e velocità:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{1,A} = m_1 \vec{v}_{1,B} + m_2 \vec{v}_{2,B} \Longrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1,A} = m_1 v_{1,B_x} + m_2 v_{2,B_x} \\ 0 = m_1 v_{1,B_y} + m_2 v_{2,B_y} \end{cases} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,B}^2 \end{cases} \tag{9}$$

Abbiamo dunque 3 equazioni in 4 incognite (le componenti x e y di $\vec{v}_{1,B}$ e $\vec{v}_{2,B}$. Non tutto dunque sarà determinato a priori, ma dipenderà da un parametro libero che puo' essere identificato con l'angolo ϑ' di diffusione nel sistema di riferimento del del centro di massa , come illustrato nella figura in basso della slide precedente.

Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - III

Poniamoci ora nel s.r. del c.m. e scriviamo in tale s.r. le equazioni inerenti la conservazione della quantita’ di moto e dell’energia cinetica.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}'_{1,A} + m_2 \vec{v}'_{2,A} = m_1 \vec{v}'_{1,B} + m_2 \vec{v}'_{2,B} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}'_{1,A})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}'_{2,A})^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}'_{1,B})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}'_{2,B})^2 \end{cases} \tag{10}$$

Dimostriamo ora che le velocità rimangono invariate in modulo e possono ruotare solo di un angolo θ, ossia che:

$$\begin{cases} v'_{1,A} = v'_{1,B} \\ v'_{2,A} = v'_{2,B} \end{cases} \tag{11}$$

Dalla prima equazione del sistema (10) ricaviamo

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}'_{1,A} = -m_2 \vec{v}'_{2,A} \\ m_1 \vec{v}'_{1,B} = -m_2 \vec{v}'_{2,B} \end{cases} \tag{12}$$

e, se consideriamo i mduli, si ottiene

$$\begin{cases} v'_{1,A} = \frac{m_2}{m_1} v'_{2,A} \\ v'_{1,B} = \frac{m_2}{m_1} v'_{2,B} \end{cases} \tag{13}$$

Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - IV

Sostituiamo questi risultati nell'equazione per l'energia cinetica:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}v_{2,A}'^2\right)+\frac{1}{2}m_2v_{2,A}'^2 &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}v_{2,B}'^2\right)+\frac{1}{2}m_2v_{2,B}'^2\\ \frac{1}{2}v_{2,A}'^2\left(\frac{m_2^2}{m_1}+m_2\right) &= \frac{1}{2}v_{2,B}'^2\left(\frac{m_2^2}{m_1}+m_2\right)\\ v_{2,A}'^2 = v_{2,B}'^2 &\Longrightarrow v_{2,A}' = v_{2,B}'\end{aligned} \tag{14}$$

Andando a sostituire il risultato appena ottenuto nel sistema (13) otteniamo la seconda uguaglianza:

$$v_{1,A}' = v_{1,B}' \tag{15}$$

Abbiamo dimostrato che, nel sistema del centro di massa, i moduli delle velocità sono uguali prima e dopo l'urto; i vettori velocità possono dunque solo ruotare di un angolo θ. Ora studiamo l'urto nel sistema del centro di massa.

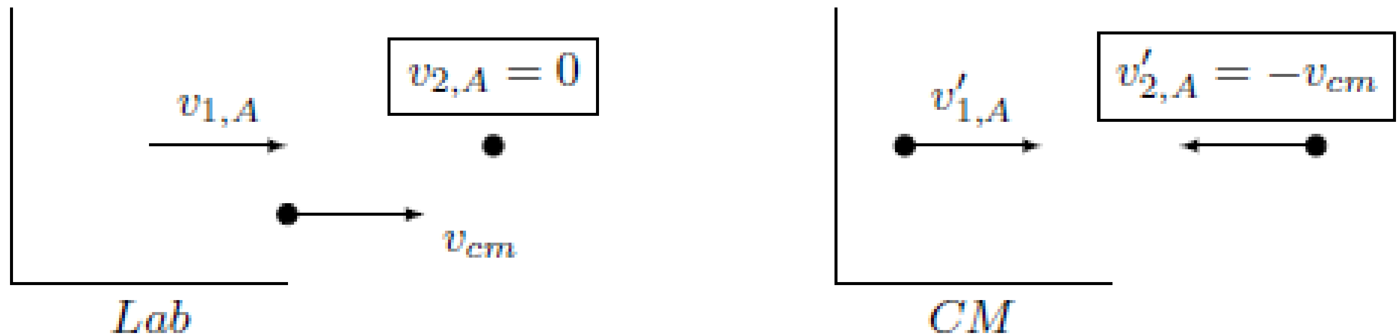
Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - V

Prima dell'urto il centro di massa si muoverà solo lungo la direzione delle ascisse. Utilizzando le equazioni (5), (6) e (7):

$$\begin{cases} v_{cm} = \frac{m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}}{m_1 + m_2} \\ v'_{1,A} = \frac{m_2 (v_{1,A} - v_{2,A})}{m_1 + m_2} \\ v'_{2,A} = \frac{m_1 (v_{2,A} - v_{1,A})}{m_1 + m_2} \end{cases} \tag{16}$$

Imponendo che il secondo corpo, prima dell'urto, sia fermo:

$$\begin{cases} v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A} \\ v'_{1,A} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A} < v_{1,A} \\ v'_{2,A} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A} = -v_{cm} \end{cases} \tag{17}$$



Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - VI

Ora andiamo a inserire la seconda equazione del sistema (17) nella prima:

$$v'_{1,A} = v'_{1,B} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_{cm} = \frac{m_2}{m_1} v_{cm} \tag{18}$$

In modulo, utilizzando l'equazione (14) e l'ultima equazione del sistema (17) otteniamo:

$$v'_{2,A} = v'_{2,B} = v_{cm} \tag{19}$$

Andiamo a calcolare la velocità nel sistema del centro di massa dopo l'urto in componenti. Rispetto al moto del centro di massa i corpi 1 e 2 si muoveranno con un angolo θ'

$$\begin{cases} v'_{1,B_x} = \frac{m_2}{m_1} v_{cm} \cos\theta' \\ v'_{1,B_y} = \frac{m_2}{m_1} v_{cm} \sin\theta' \end{cases} \tag{20}$$

Utilizzando la relazione (13) otteniamo, per il secondo corpo:

$$\begin{cases} v'_{2,B_x} = -v_{cm} \cos\theta' \\ v'_{2,B_y} = -v_{cm} \sin\theta' \end{cases} \tag{21}$$

Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - VII

Ora trasformiamo la situazione dopo l'urto nel sistema di riferimento del laboratorio utilizzando l'equazione (4):

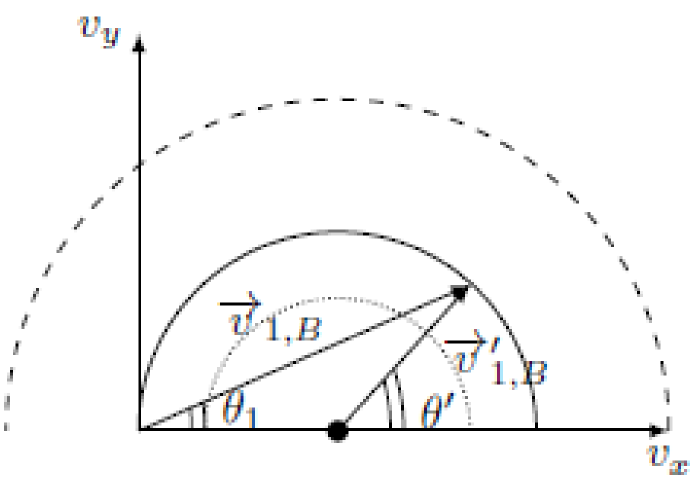
$$\begin{cases} v_{1,B_x} = v_{cm} + \frac{m_2}{m_1} v_{cm} \cos\theta' \\ v_{1,B_y} = \frac{m_2}{m_1} v_{cm} \sin\theta' \end{cases} \tag{22}$$

che implica, applicando la relazione (13), per il secondo corpo:

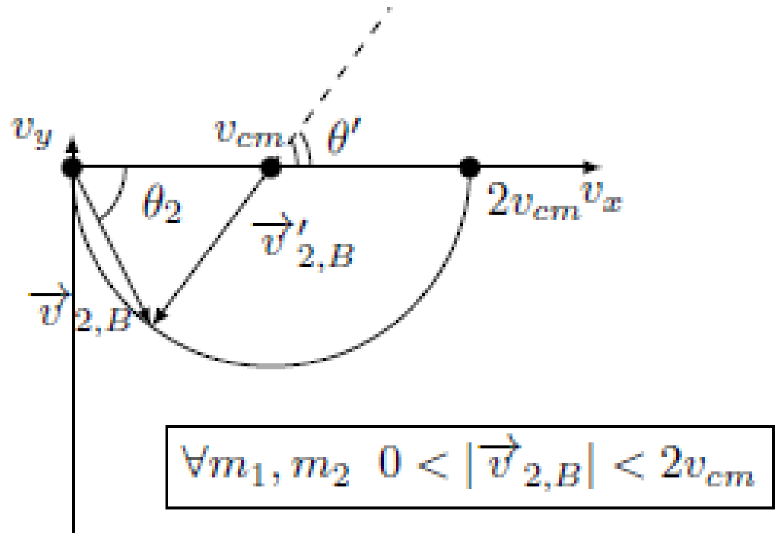
$$\begin{cases} v_{2,B_x} = v_{cm}(1 - \cos\theta') \\ v_{2,B_y} = -v_{cm} \sin\theta' \end{cases} \tag{23}$$

Andiamo ad analizzare i risultati ottenuti. Il sistema per il corpo 1 (proiettile) descrive l'equazione di una circonferenza centrata in $v_x = v_{cm}$ e di raggio $r = v_{cm} \cdot m_2/m_1$; il sistema per il corpo 2 (bersaglio) descrive l'equazione di una circonferenza centrata in $v_x = v_{cm}$ e di raggio $r = v_{cm}$:

Urto elastico bidimensionale su bersaglio fermo - VIII



(g) Particella proiettile



(h) Particella bersaglio

dove abbiamo usato la seguente rappresentazione:

$\frac{m_2}{m_1} > 1$ (bersaglio pesante) → Il proiettile puo' tornare indietro (Rutherford)

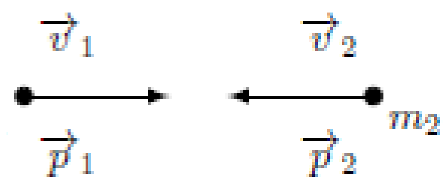
$m_1 = m_2$ → Il proiettile si puo' fermare (Fermi)

$\frac{m_2}{m_1} < 1$ (bersaglio leggero) → Il proiettile va' sempre avanti

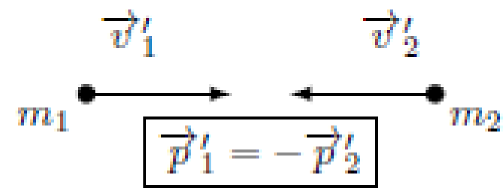
Urto totalmente anelastico - I

- Nell'urto totalmente anelastico i due corpi collidenti si fondono in un corpo solo (es. palline di pongo). La deformazione permanente dei corpi richiede dissipazione di energia cinetica, la quale pertanto non si conserva (sarà inferiore dopo l'urto)

Prima dell'urto



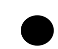
(a) Laboratorio



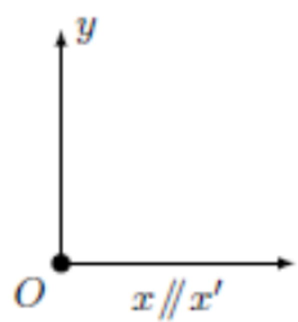
(b) Centro di massa

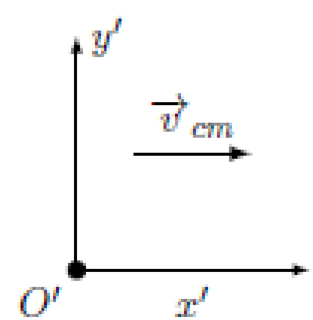
Dopo l'urto

$\vec{v}_{cm}$



$\vec{v'}$=0





Urto totalmente anelastico - II

- ***S.R. del C.M***. Come anticipato nella slide precedente, il corpo «unico» che si forma dopo l'urto deve essere a riposo nel S.R. del C.M. poichè in tale sistema di riferimento la quantità di moto totale del sistema di punti è sempre nulla. Il corpo è pertanto fermo (i.e. ha velocità nulla nel S.R. del C.M.)
- ***S.R. Del Lab.*** La velocità del corpo «unico» nel sistem del laboratorio può essere calcolata mediante le leggi di trasformazione delle velocità, imponendo nella eq. (4) che la velocità del corpo sia nulla nel S.R. del C.M.

  Si ha perciò che la velocità finale del corpo nel sistema del laboratorio sarà

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$$

Dove, per l'eq. (5) è

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\overrightarrow{P}}{M} = \frac{\vec{p}_1+\vec{p}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$