

# Bilancia di Cavendish

*Esperimentazioni I*  
*a.a. 2023-2024*

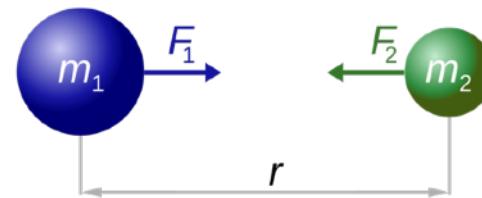
# Obiettivo

- ➊ Determinare la **costante di gravitazione universale G**, mediante l'uso di una bilancia di Cavendish col:
  - ➋ **metodo dell'accelerazione iniziale**
  - ➋ **metodo dell'escursione finale**

# La forza di gravitazione universale

- Tra 2 punti materiali di massa  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$ , posti a distanza  $\mathbf{r}$  fra di loro, si esercita una forza data da:

$$\overrightarrow{F_G} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$



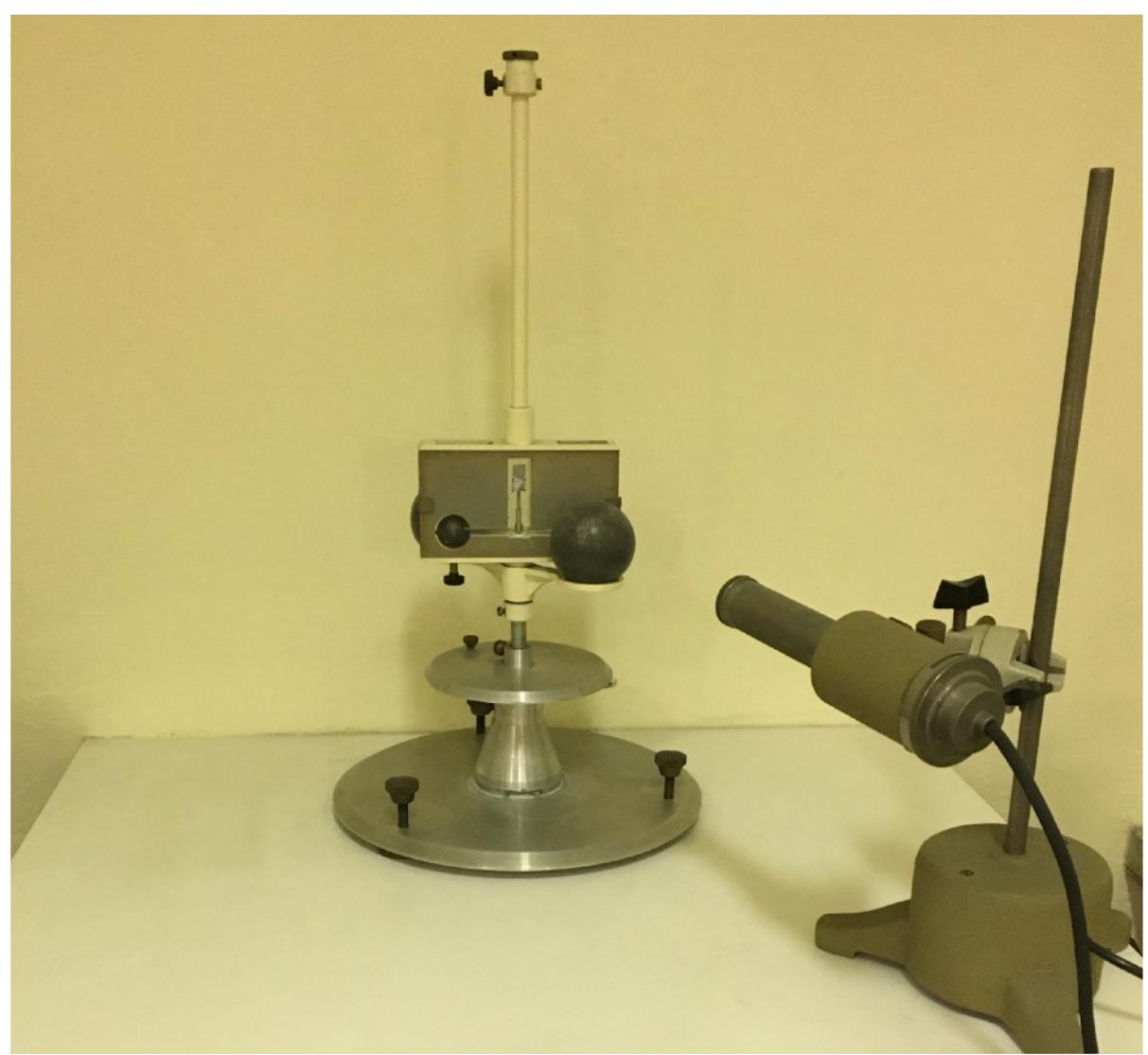
$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

con **G=(6,67430±0,00015) 10<sup>-11</sup> m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>·s<sup>-2</sup>**

che corrisponde alla forza esercitata tra 2 sfere di massa 1 kg, poste a 1 m di distanza

- G è una **costante universale**

# La bilancia di Cavendish

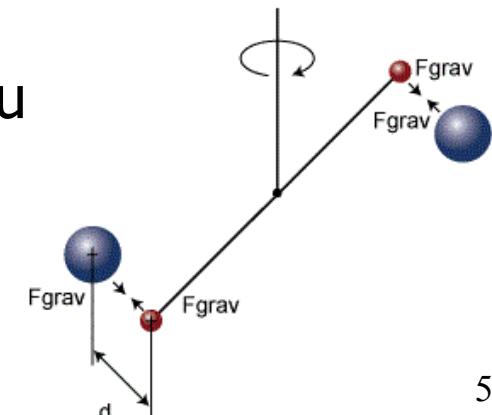


# La bilancia di Cavendish

• La bilancia di Cavendish è costituita da un **manubrio**, appeso a un **filo inestensibile** fissato ad un sostegno metallico.

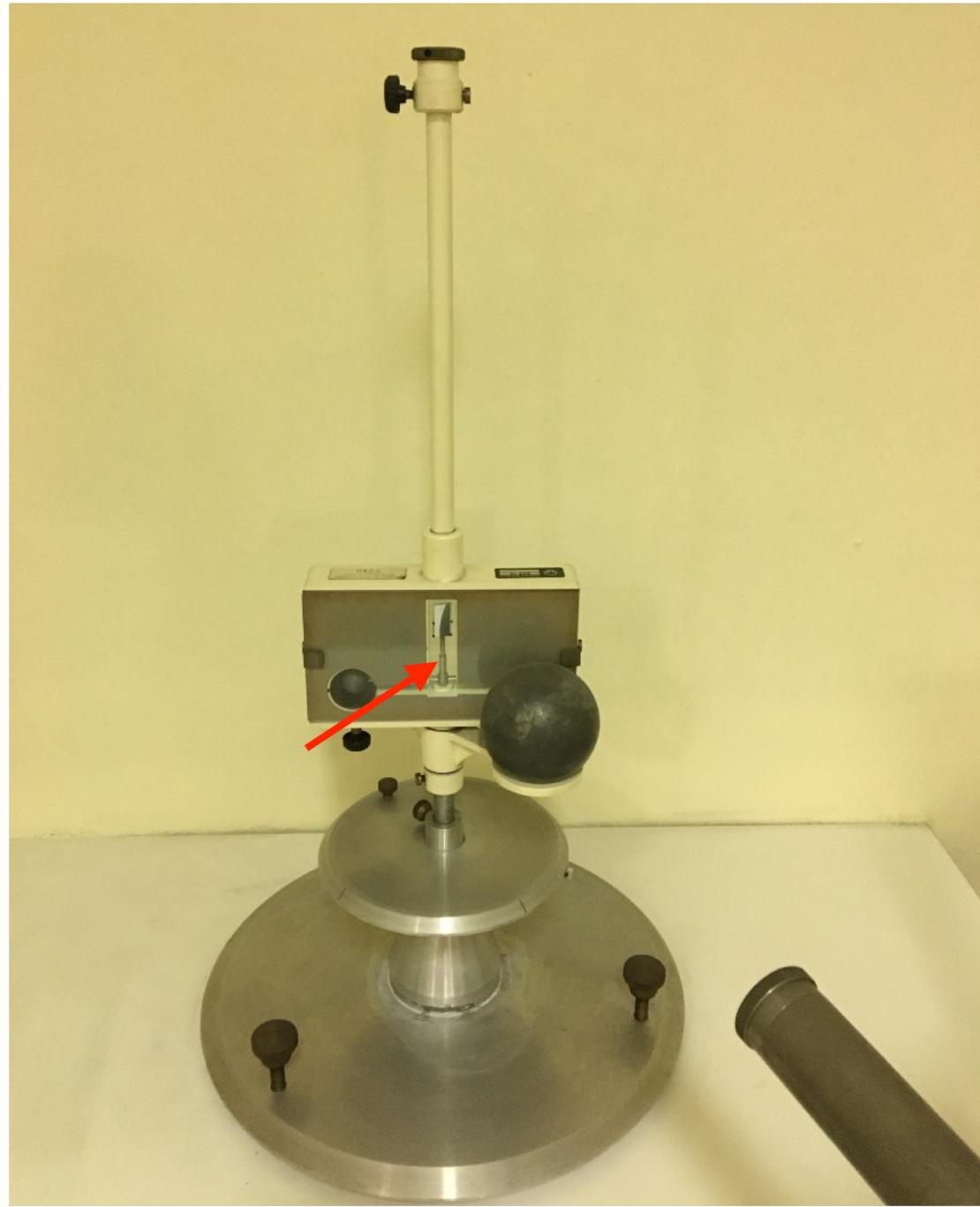
• Alle estremità del manubrio sono poste **due piccole masse** sferiche **m** ( $m=0,015\text{kg}$ )

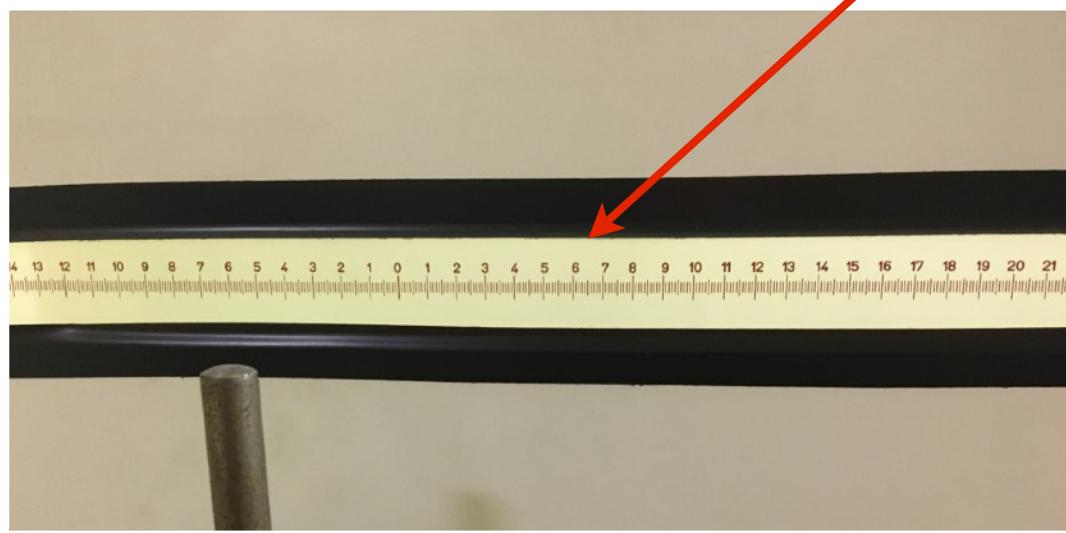
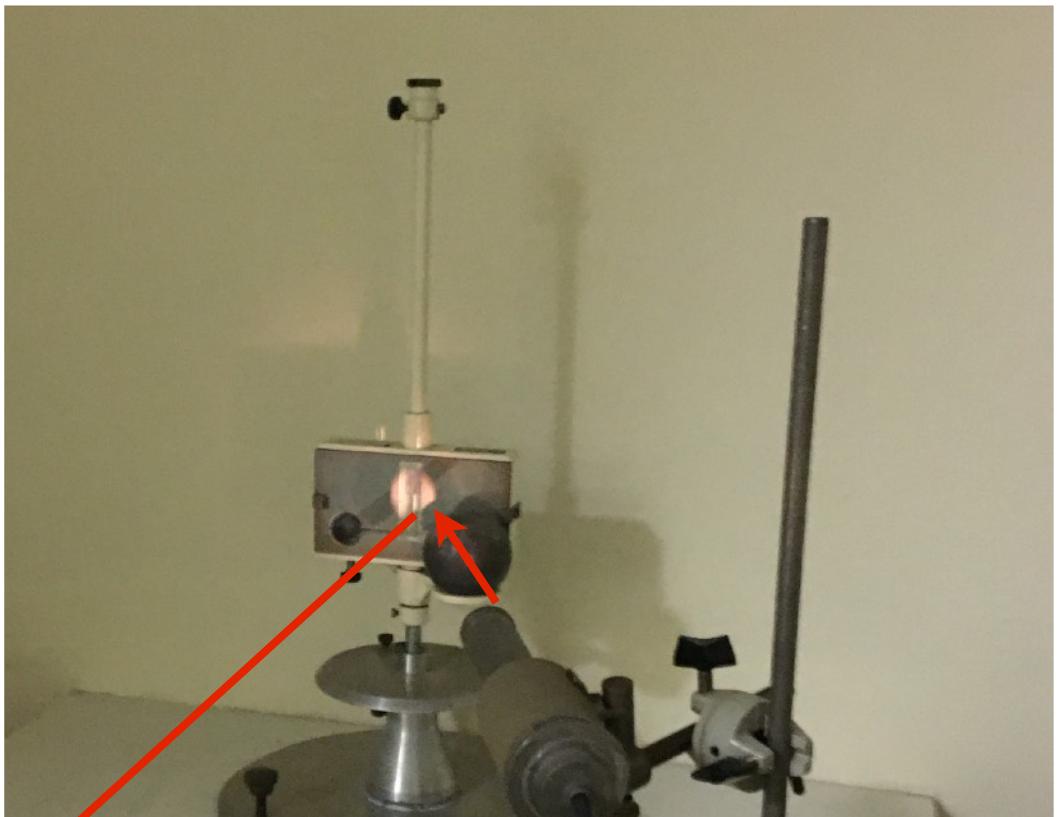
• **Due masse M** ( $M=1,5\text{kg}>m$ ) sono sistamate su di un'asta che, quando la **bilancia è scarica**, risulta essere ortogonale al manubrio.

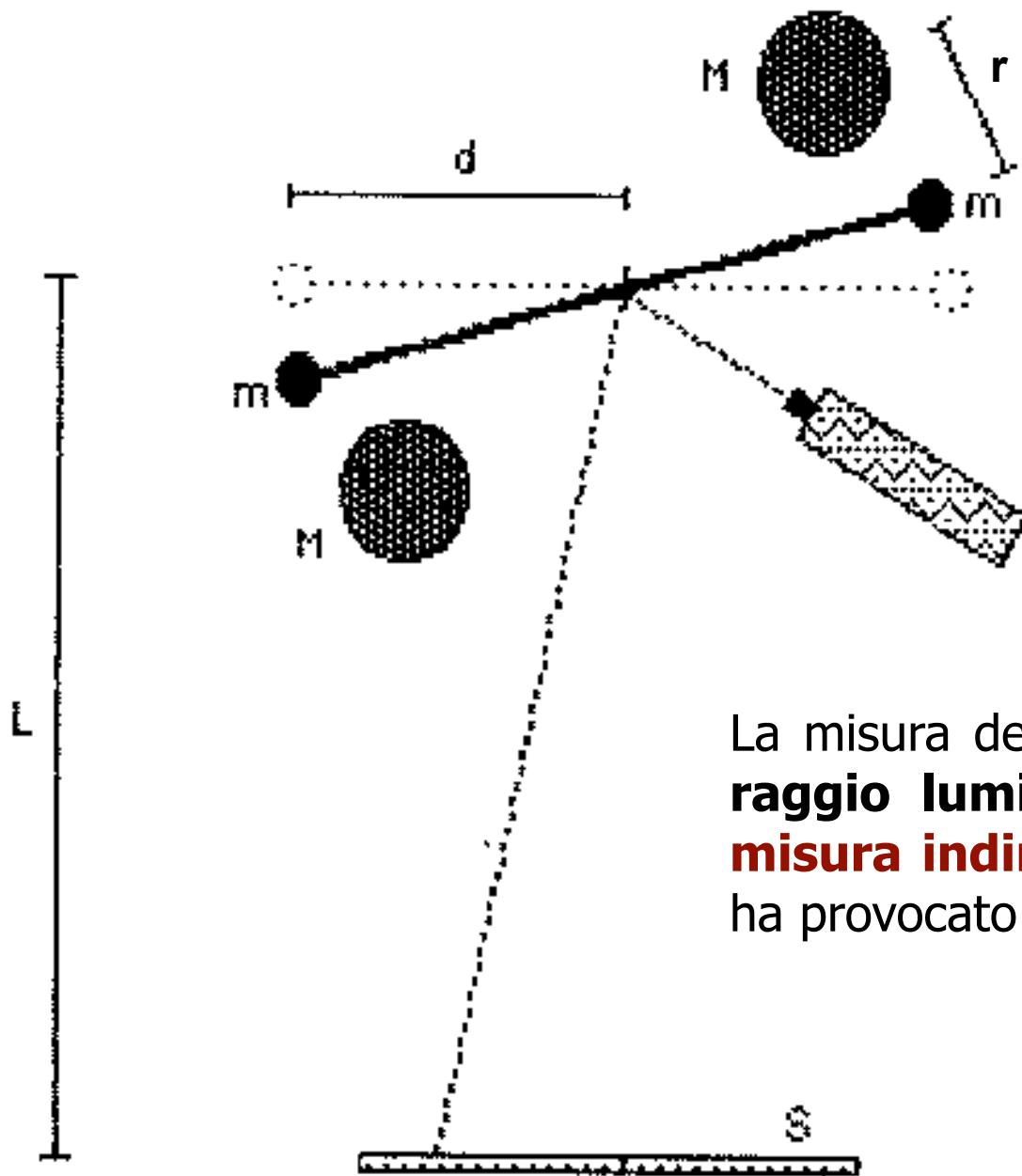












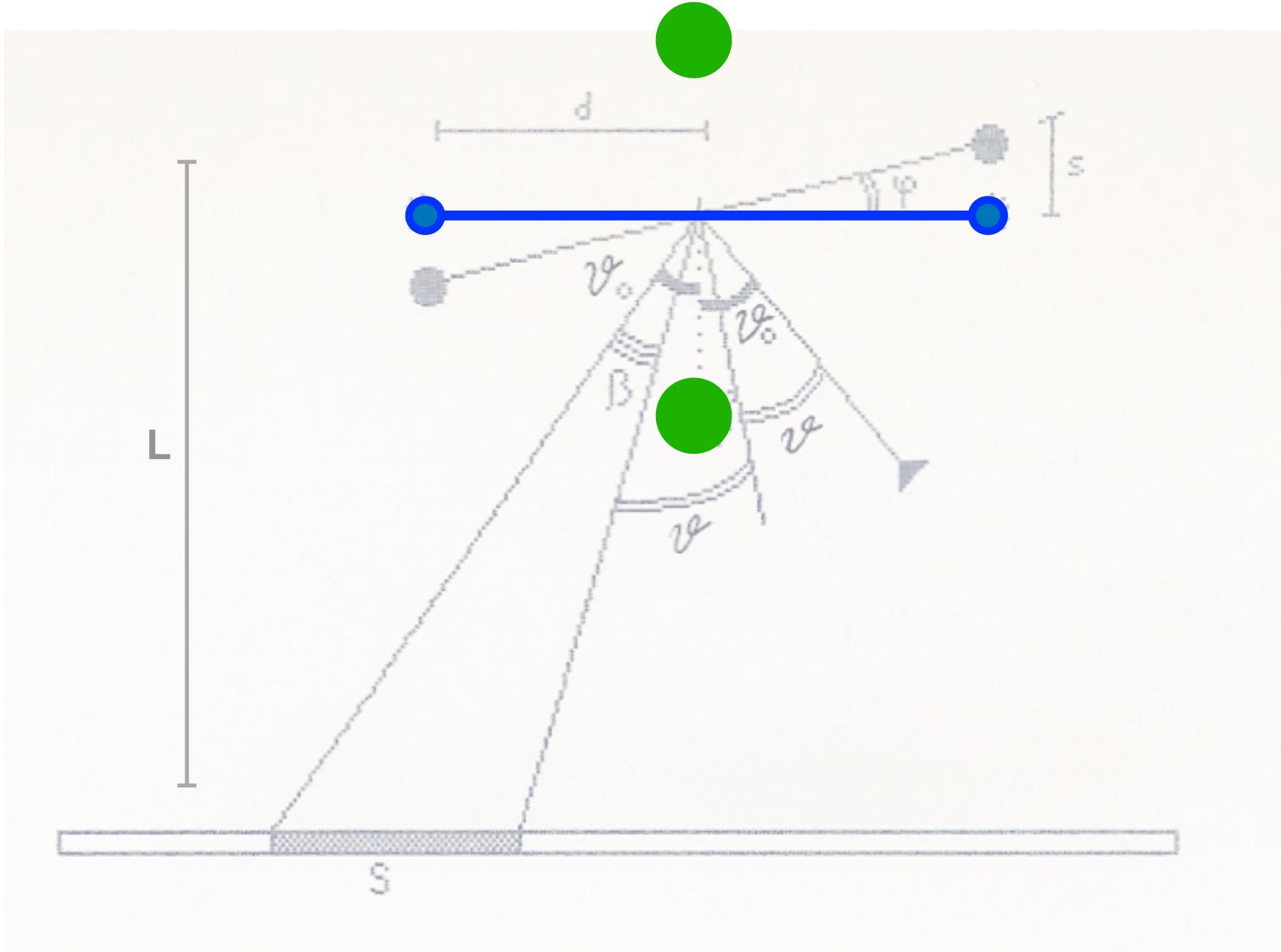
La misura dello **spostamento del raggio luminoso** costituisce una **misura indiretta della forza** che ha provocato quello spostamento.

# Acquisizione dati

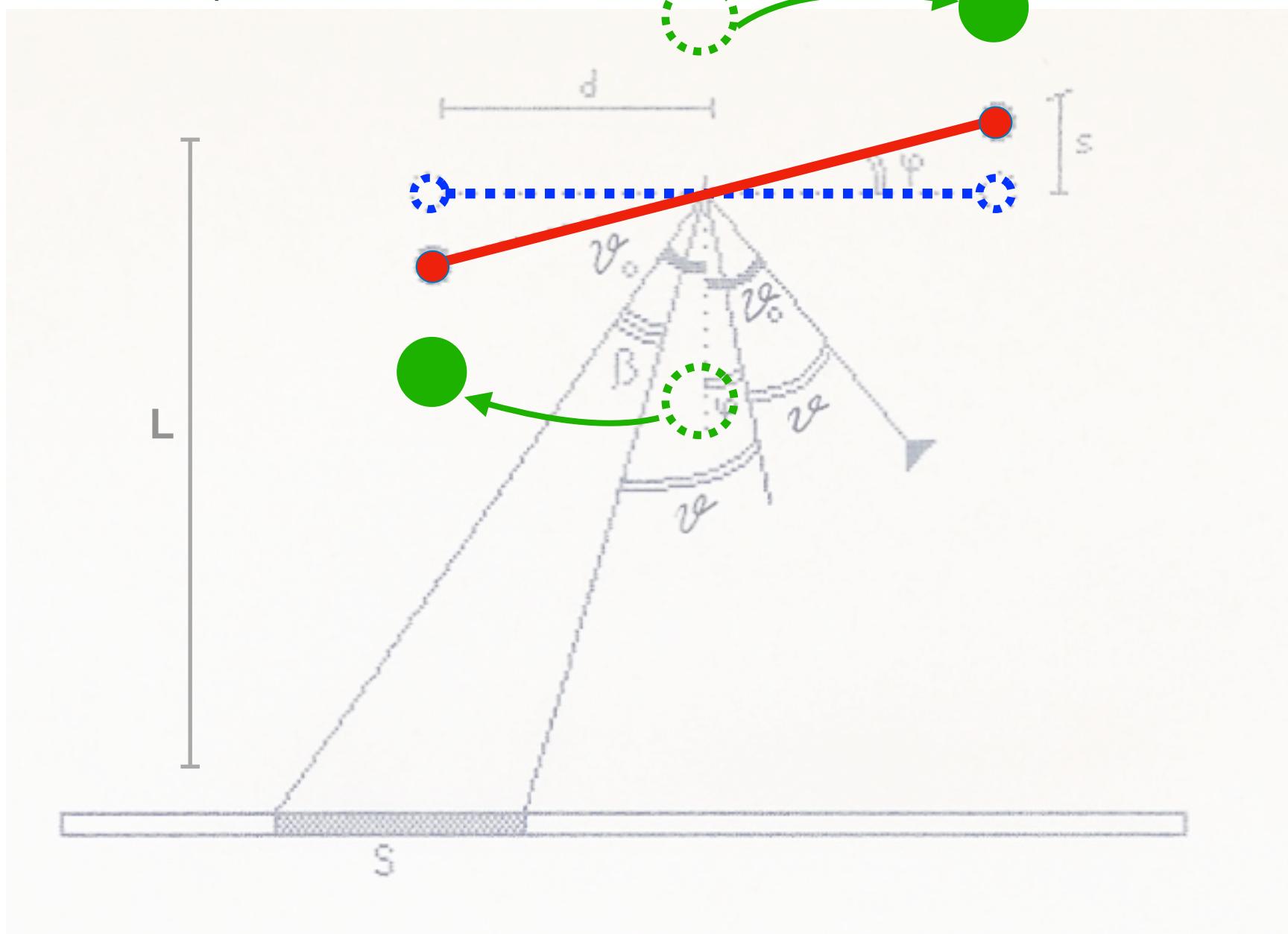
- ✿ Misurare la posizione di equilibrio iniziale **S<sub>0</sub>**: ad intervalli successivi di 1 minuto rilevare la posizione dell'indice sulla scala e stimare S<sub>0</sub>
- ✿ Far ruotare (da un operatore) le sfere di massa M e **rilevare la posizione dell'indice luminoso**
  - ✿ **ogni 5 secondi** per i primi 120 secondi
  - ✿ **ogni 20 secondi** successivamente
- ✿ Proseguire con la raccolta dati fino al **completamento di 6 oscillazioni complete**

# Metodo dell' ACCELERAZIONE INIZIALE

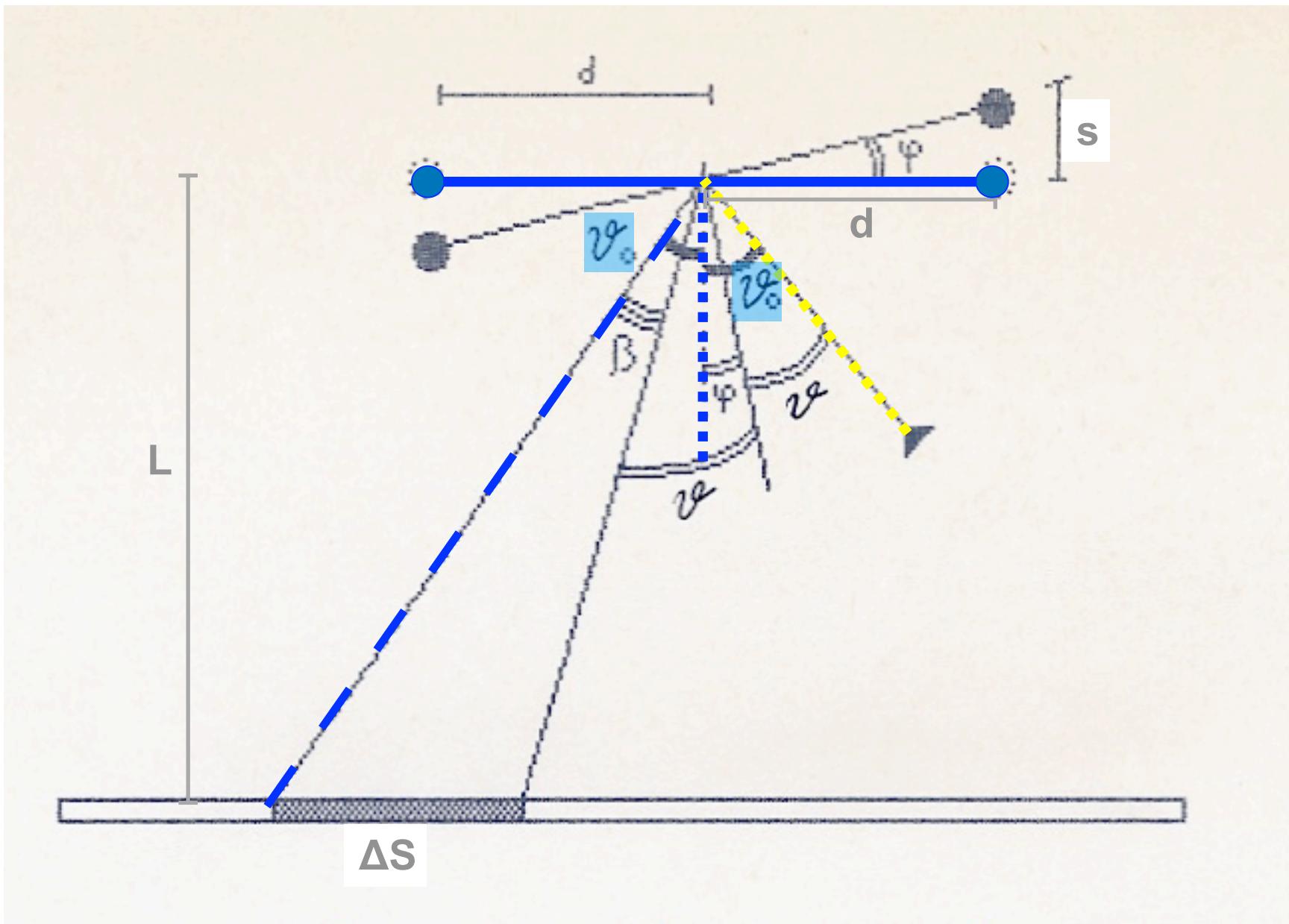
Si parta da "bilancia scarica", ovvero manubrio in orizzontale ( $M$  equidistanti da  $m$ )



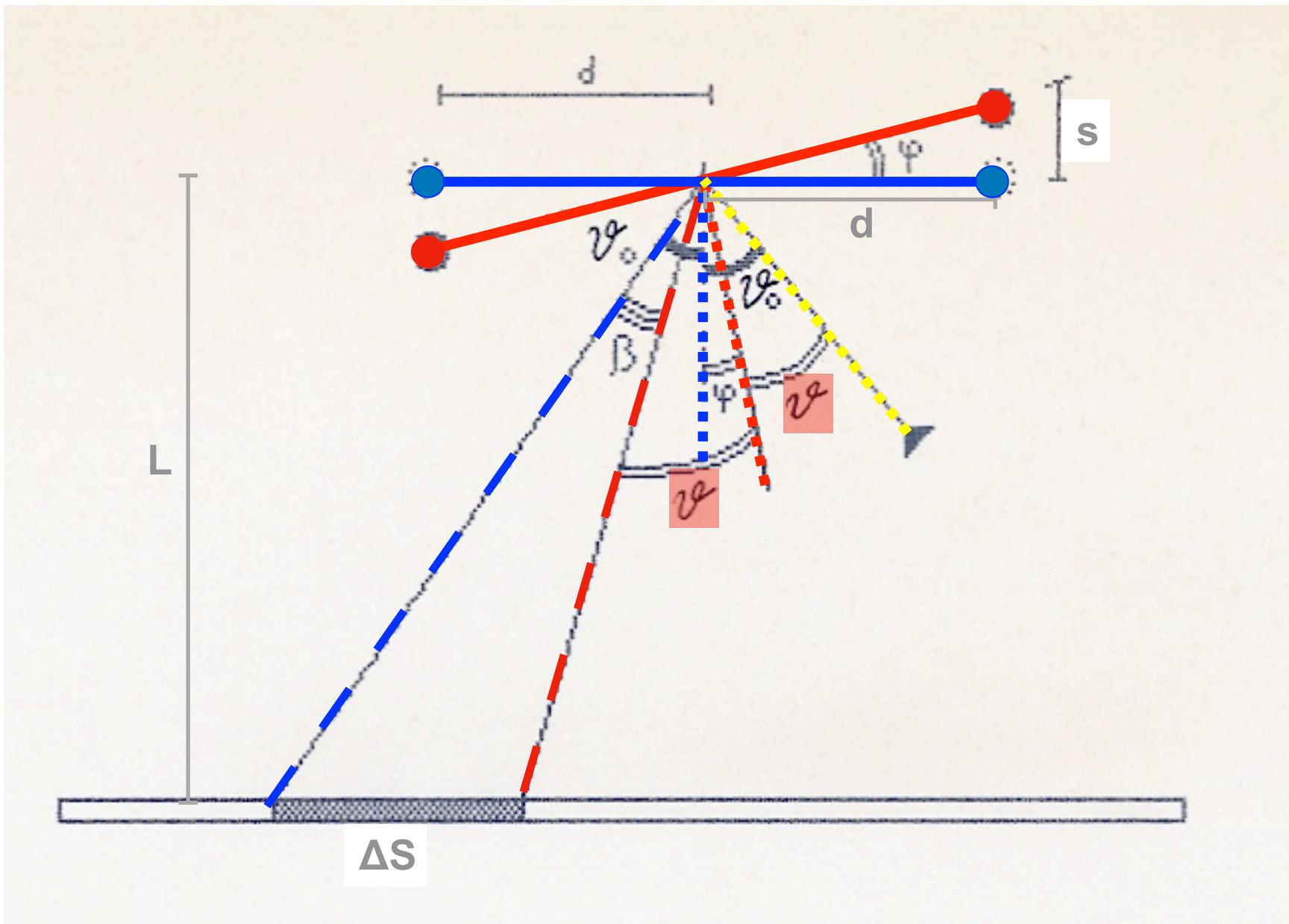
Si fanno ruotare le sfere di massa  $M$  e le sferette di massa  $m$  si mettono in movimento per effetto della forza  $F_G$



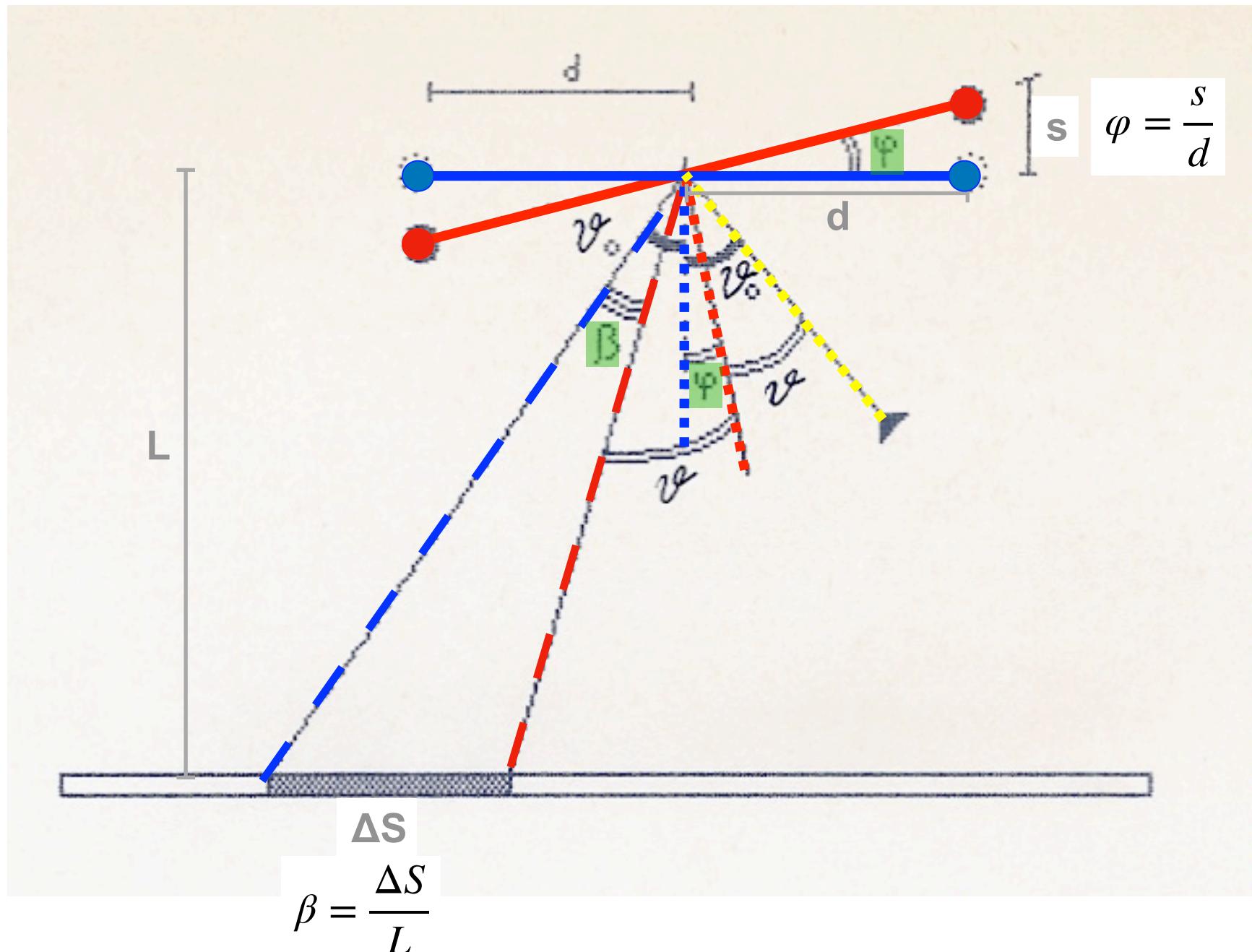
💡 Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:



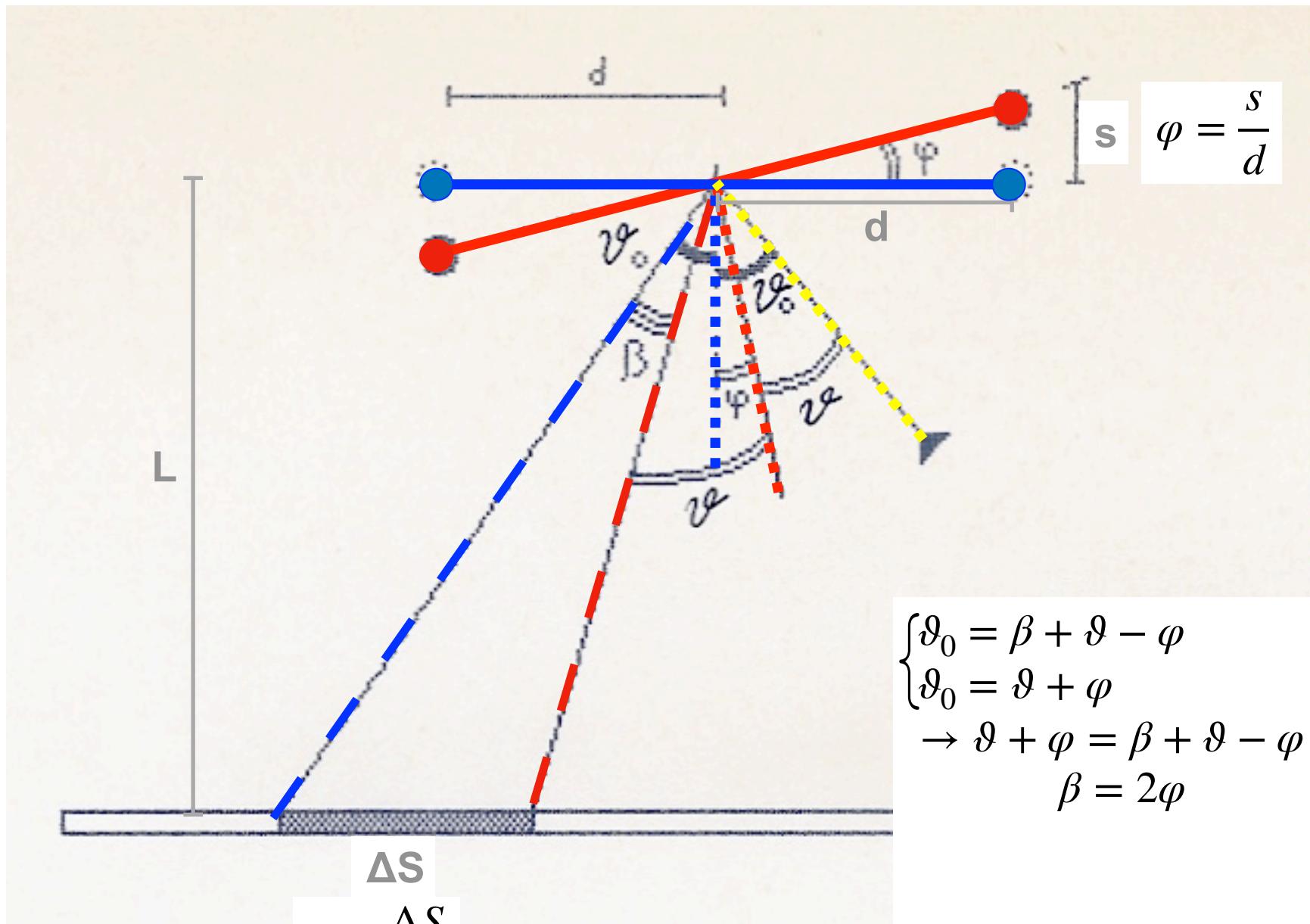
Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:



Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:



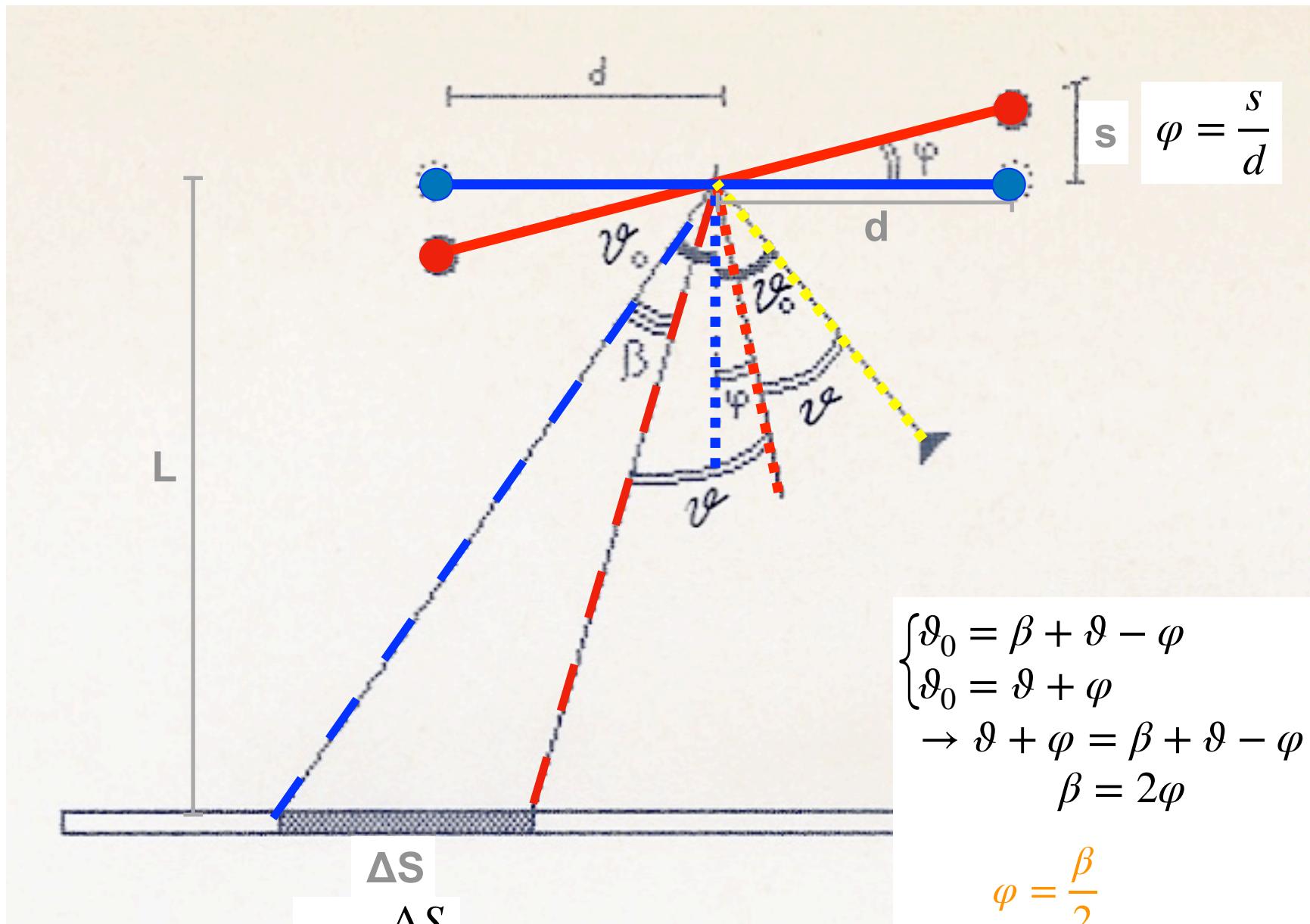
Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:



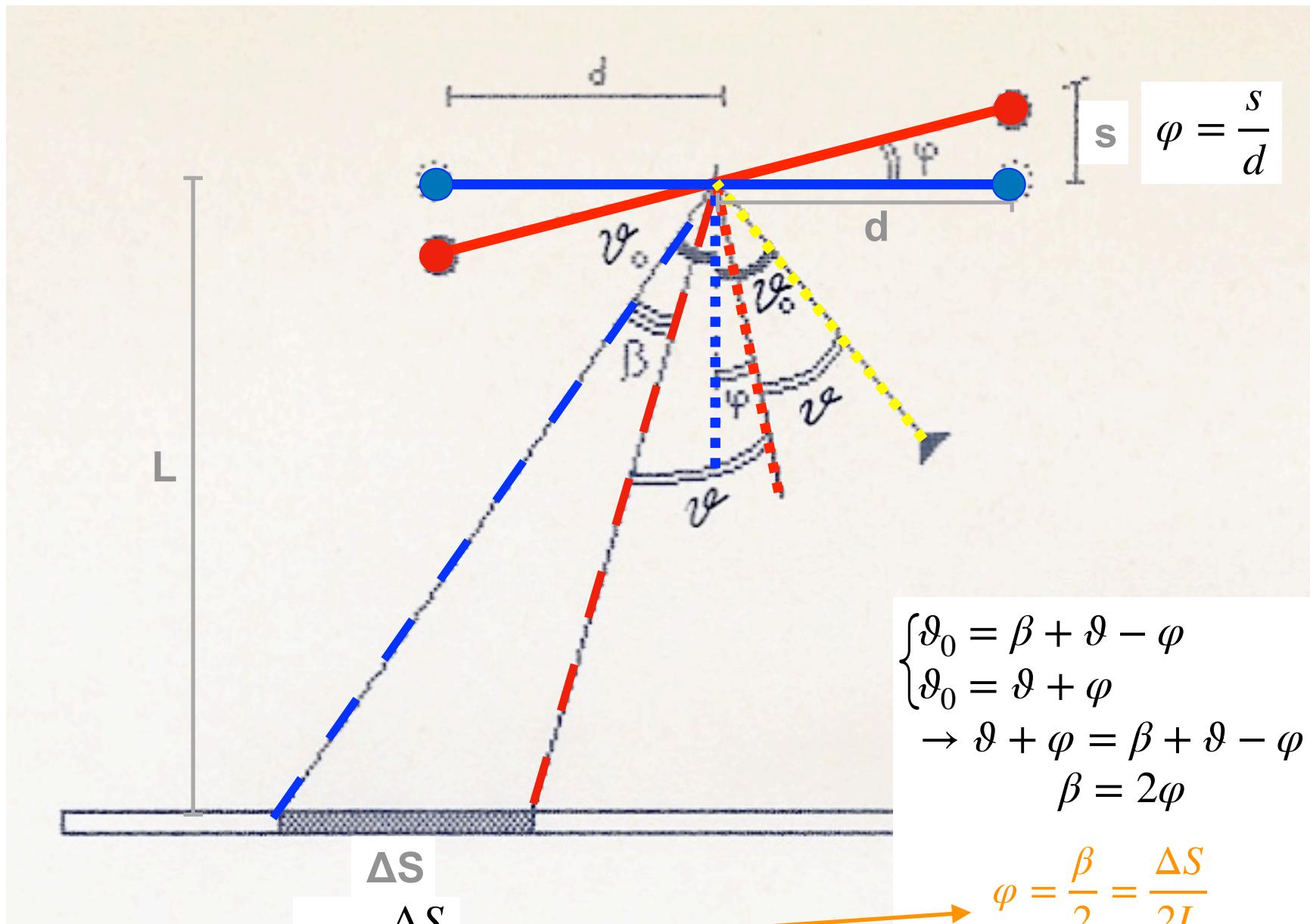
$$\beta = \frac{\Delta S}{L}$$

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \beta + \vartheta - \varphi \\ \vartheta_0 = \vartheta + \varphi \end{cases}$$
$$\rightarrow \vartheta + \varphi = \beta + \vartheta - \varphi$$
$$\beta = 2\varphi$$

Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:



Si analizzi ora il moto delle masse m nei primi 2 minuti:

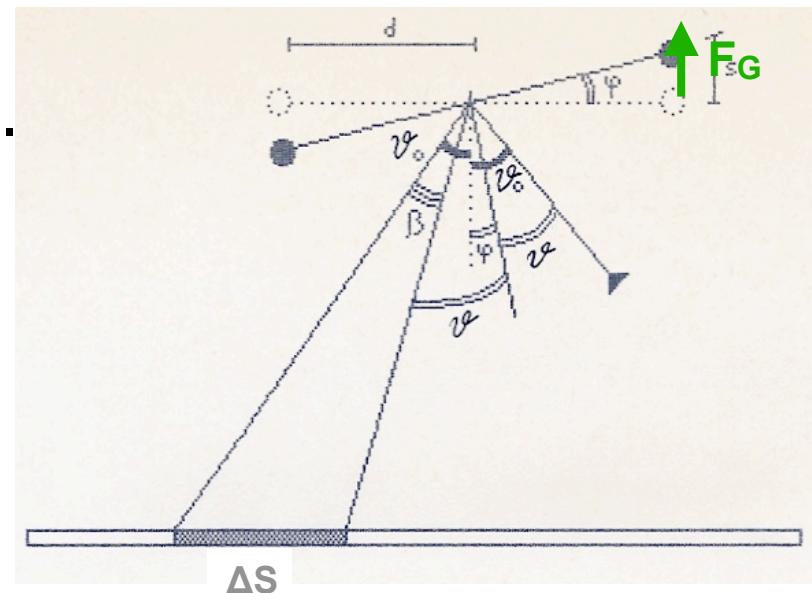


# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Nella prima fase (i primi 2 minuti) posso considerare **la sola forza di attrazione gravitazionale**, vista come **costante**, e trascurare l'attrito viscoso dell'aria ( $\propto$ velocità) e la forza di richiamo del filo
- La massa m ha quindi un **moto uniformemente accelerato**
- Di riflesso anche il raggio luminoso si muove con moto uniformemente accelerato  $\rightarrow a = \frac{d^2 \Delta S}{dt^2}$

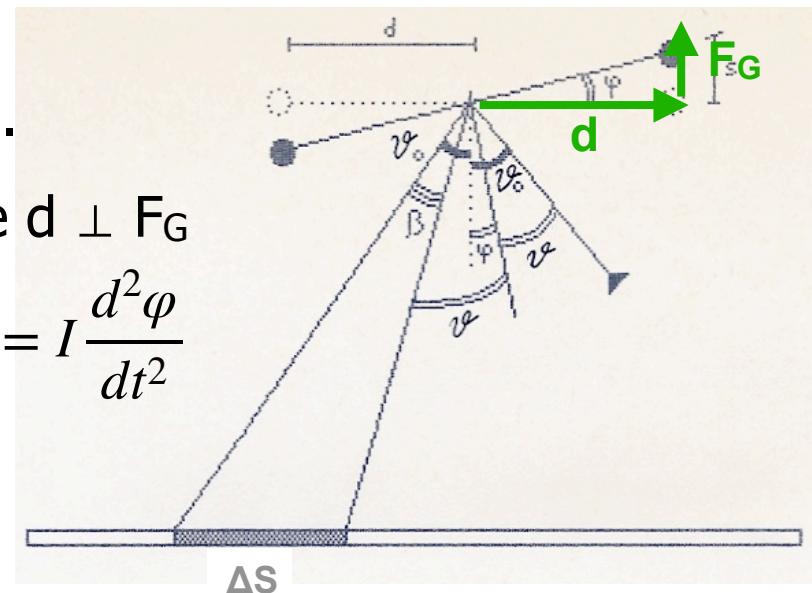
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.



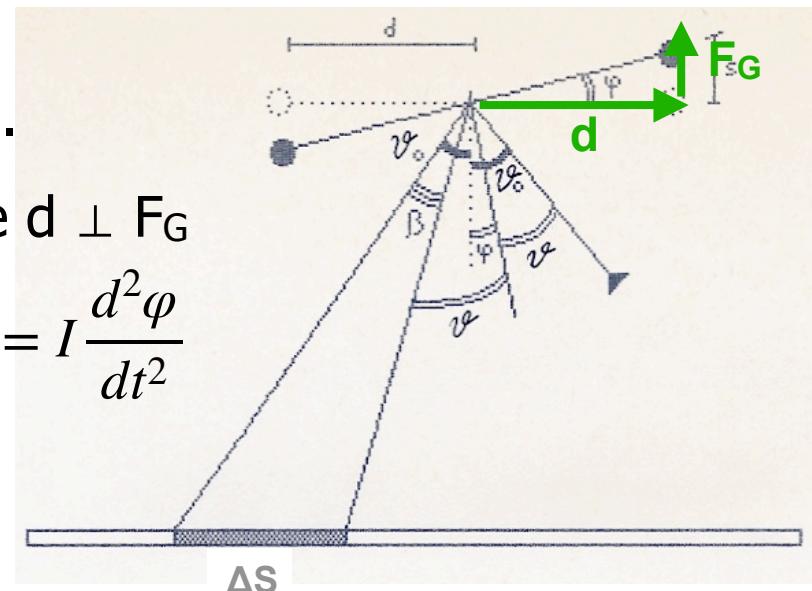
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$



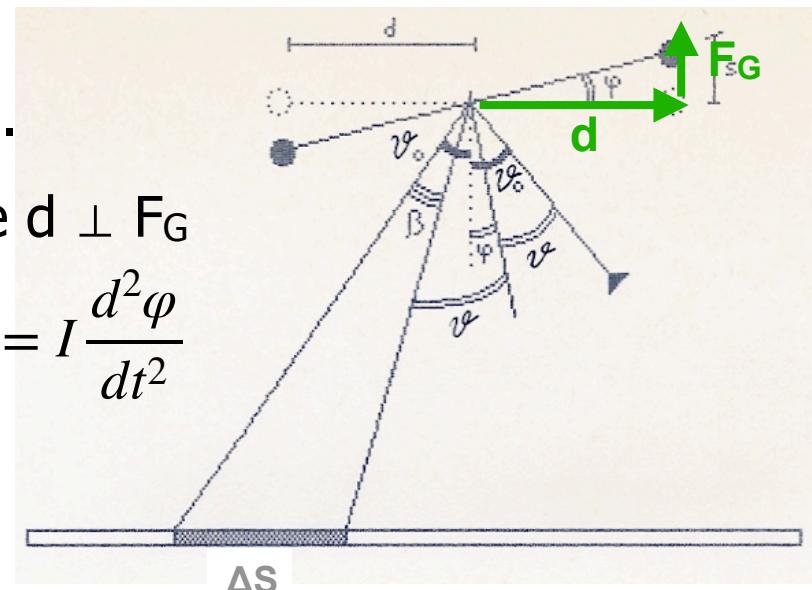
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- Da cui:  $2dG \frac{mM}{r^2} = 2md^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$



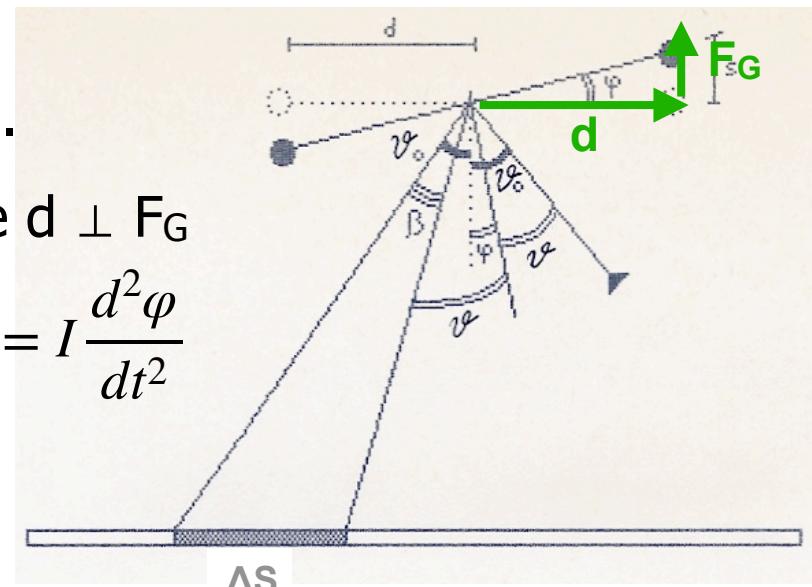
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- Da cui:  ~~$2dG \frac{mM}{r^2} = 2m d^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$~~



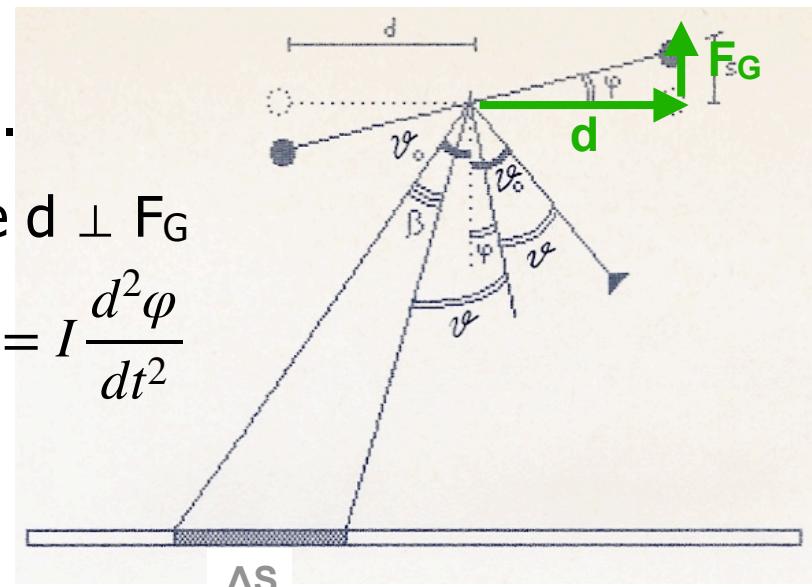
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- Da cui:  ~~$2dG \frac{mM}{r^2} = 2m d^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$~~
- Poichè  $\varphi = \frac{\Delta S}{2L} \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\Delta S}{dt^2} \frac{1}{2L} = \frac{a}{2L}$  (con a = accelerazione)



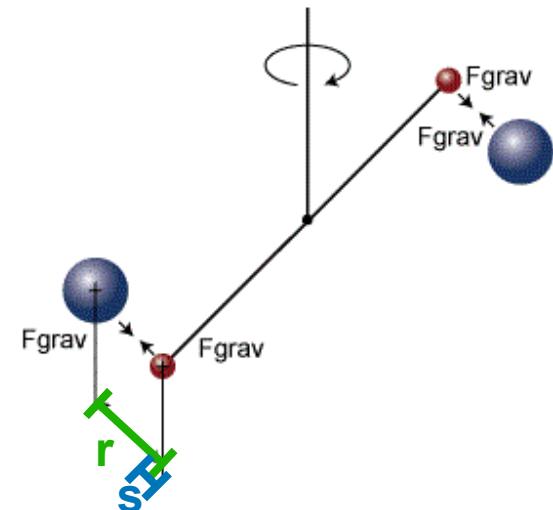
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- Da cui:  ~~$2dG \frac{mM}{r^2} = 2m d^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$~~
- Poichè  $\varphi = \frac{\Delta S}{2L} \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\Delta S}{dt^2} \frac{1}{2L} = \frac{a}{2L}$  (con a = accelerazione)
- E quindi:  $G \frac{M}{r^2} = \frac{da}{2L} \rightarrow G = \frac{r^2 da}{2ML}$



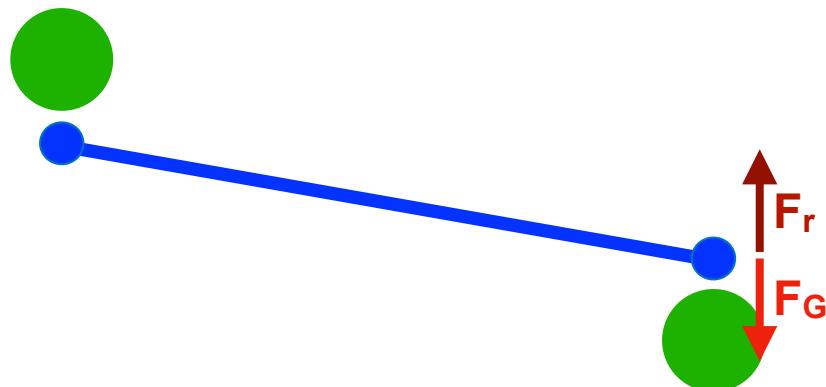
# Metodo dell'accelerazione iniziale

- Considero i momenti delle forze che agiscono sul sistema nei primi 2 minuti.
- Ricordando che  $\vec{M} = \vec{d}x \vec{F}$ , notando che  $d \perp F_G$  e che le masse m sono 2:  $|\vec{M}| = 2dF_G = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- Da cui:  ~~$2dG \frac{mM}{r^2} = 2md^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$~~
- Poichè  $\varphi = \frac{\Delta S}{2L} \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\Delta S}{dt^2} \frac{1}{2L} = \frac{a}{2L}$  (con a = accelerazione)
- E quindi:  $G \frac{M}{r^2} = \frac{da}{2L} \rightarrow G = \frac{r^2 da}{2ML}$
- N.B.: **r è considerato costante**, in realtà r varia di una quantità pari ad s (che è comunque trascurabile rispetto ad r → da dimostrare!)



# Bilancia scarica o in equilibrio?

- La bilancia è scarica se l'asta che sostiene le masse  $M$  è a  $90^\circ$  rispetto a quella che sostiene le masse  $m$
- In partenza la **bilancia si trovava** in realtà in **situazione di equilibrio** (da turno lab precedente), con  $M$  nelle vicinanze di  $m$   
→ momento  $M_G$  dovuto a  $F_G$  bilanciato da momento torcente del filo  $M_r$

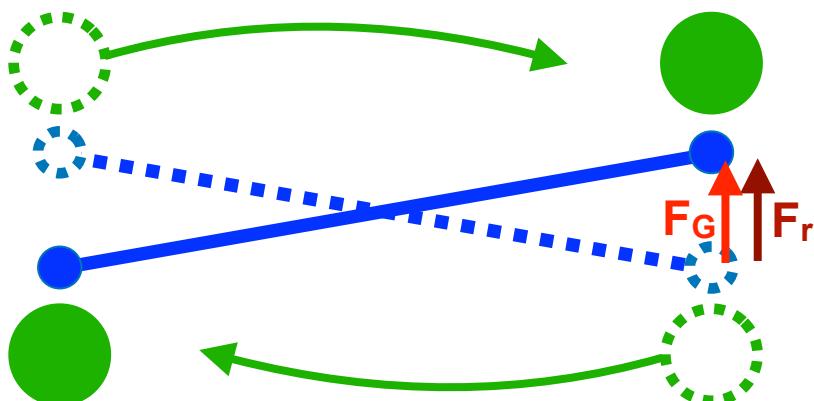


Nella situazione di partenza la bilancia si trova in equilibrio  $\sum M_i = 0$ :

$$M_r = M_G \rightarrow F_r = F_G = \frac{GmM}{r^2}$$

# Bilancia scarica o in equilibrio?

- La bilancia è scarica se l'asta che sostiene le masse M è a 90° rispetto a quella che sostiene le masse m
- In partenza la **bilancia si trovava** in realtà in **situazione di equilibrio** (da turno lab precedente), con M nelle vicinanze di m  
→ momento  $M_G$  dovuto a  $F_G$  bilanciato da momento torcente del filo  $M_r$
- Quando si invertono le masse M, le masse m sono soggette ad una **forza doppia** rispetto alla situazione di "bilancia scarica"

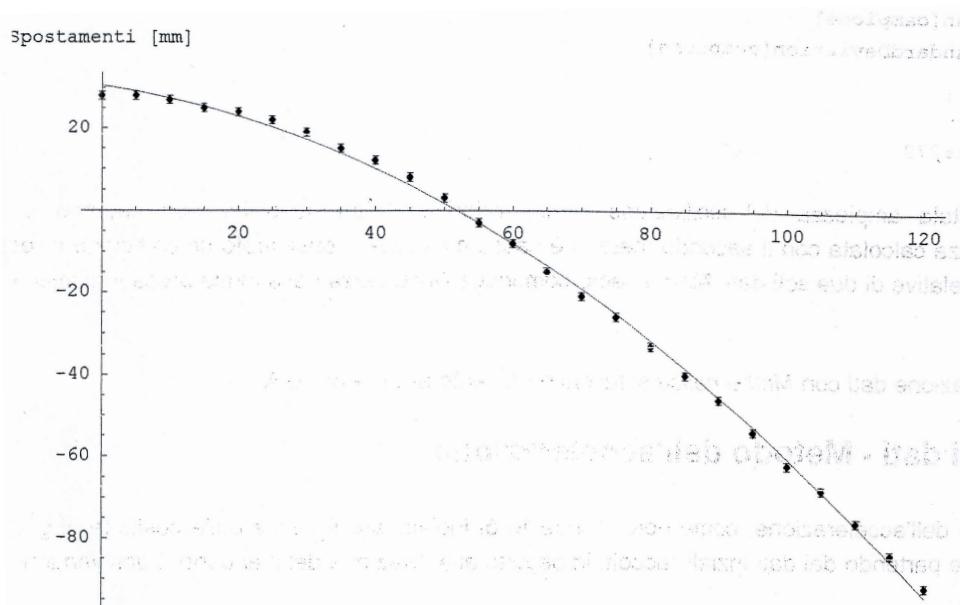


Spostando le masse M, le masse m si mettono in moto sotto l'azione di  $2 F_G$  ( $F_r$  non è più bilanciata, anzi si somma a  $F_G$ )

$$2d(2F_G) = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \rightarrow G = \frac{r^2 da}{4ML}$$

# Interpretazione del fit

- L'accelerazione **a** viene quindi ricavata dallo studio del moto del raggio luminoso nei primi 2 min:  $S(t) = S_0 + \mathcal{V}_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- Fit con il metodo dei minimi quadrati:
  - **termine noto** → posizione iniziale  **$S_0$**  (compatibile con valore atteso?)
  - **coeff. di  $t$**  → **velocità iniziale  $v_0$**  (compatibile con 0?)
  - **doppio del coeff. di  $t^2$**  → **accelerazione iniziale  $a$**



# Stima di G

- Con i dati dei primi 120 s è possibile fare una prima stima di G

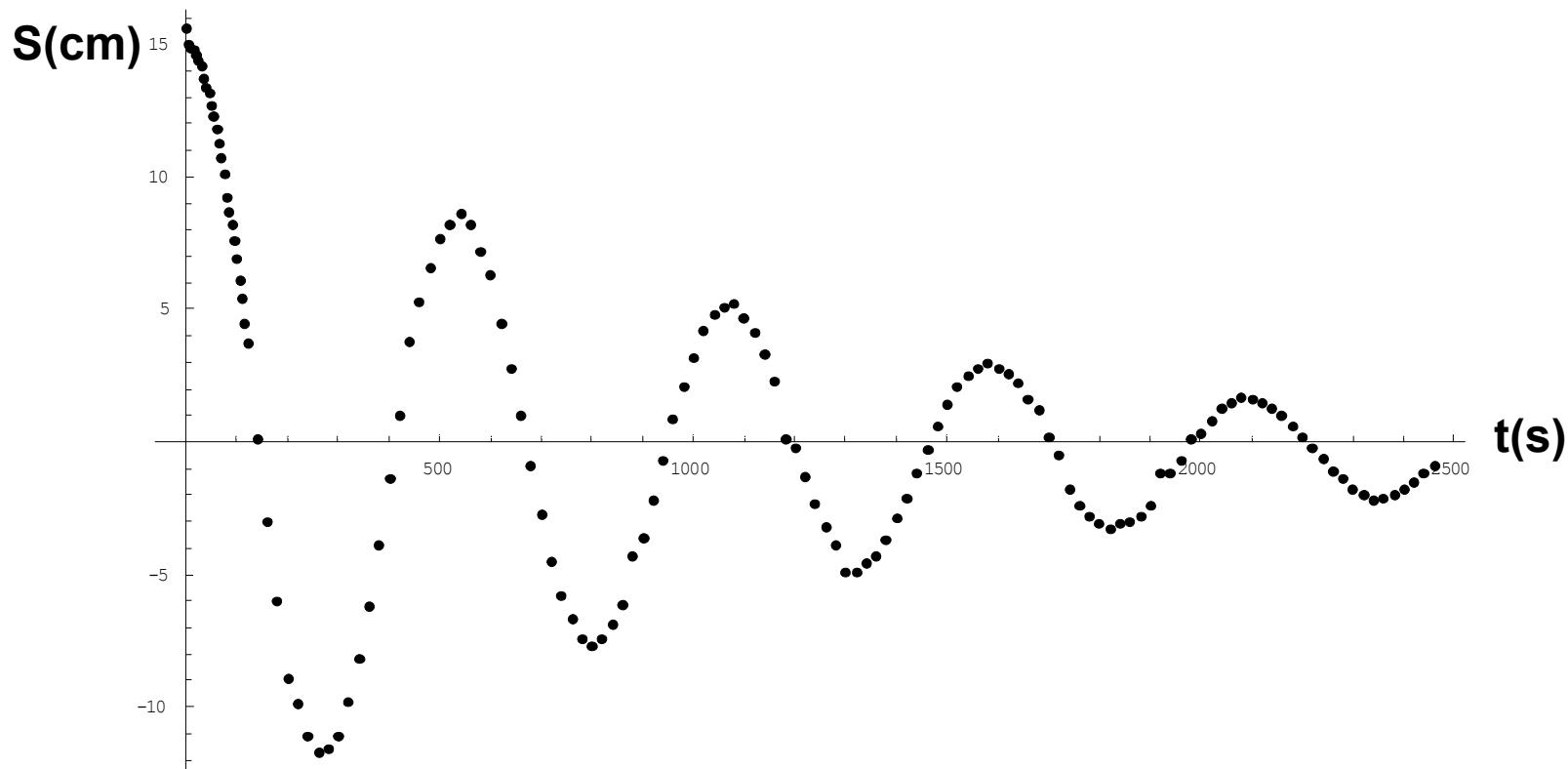
$$G = \frac{r^2 da}{4ML}$$

- $r=4,5$  cm distanza tra i centri delle sfere m-M vicine (assunta cost.)
  - $d=5$  cm distanza centri sfere piccole - asse di rotazione
  - $a$  accelerazione ricavata dal fit dei dati
  - $M=1,5$  kg massa sfere grandi
  - $L$  distanza specchietto - scala graduata
- 
- Verificare che l'ordine di grandezza sia corretto ma **evitare test di compatibilità** con valore atteso di G

# **Metodo dell' ESCURSIONE FINALE**

# Metodo dell'escursione finale

- Se si considerano **tutte le forze agenti**, il moto di m (e quindi anche di S) è un **moto armonico smorzato**



# Metodo dell'escurzione finale

- ➊ Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:

# Metodo dell'escursione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$

# Metodo dell'escurzione finale

- ➊ Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - ➌ il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - ➌ il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- ➋ L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$

# Metodo dell'escurzione finale

- ➊ Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - ➌ il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - ➌ il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- ➋ L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \beta \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = 2Fd$$

# Metodo dell'escurzione finale

- ➊ Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - ➌ il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - ➌ il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- ➋ L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\beta}{I} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{k}{I} \varphi = \frac{2Fd}{I}$$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \varphi = \frac{2Fd}{I}, \quad \text{con } 2\sigma = \frac{\beta}{I} \text{ e } \omega^2 = \frac{k}{I}$$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$ 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega'^2 \varphi = \frac{2Fd}{I}$$
- 💡 La soluzione di quest'equazione differenziale è:  
 $\varphi(t) = A e^{-\sigma t} \cos(\omega' t + \Phi) + \frac{2Fd}{k}$  con pseudo-pulsazione  $\omega'^2 = \omega^2 - \sigma^2$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$ 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega'^2\varphi = \frac{2Fd}{I}$$
- 💡 La soluzione di quest'equazione differenziale è:  
 $\varphi(t) = A e^{-\sigma t} \cos(\omega't + \Phi) + 2Fd/k$  con pseudo-pulsazione  $\omega'^2 = \omega^2 - \sigma^2$
- 💡 Considerando il solo moto armonico ( $\omega^2 > \sigma^2$ ):  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$   
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = \frac{2Fd}{I}$$
- 💡 La soluzione di quest'equazione differenziale è:  
 $\varphi(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega't + \Phi) + 2Fd/k$  con pseudo-pulsazione  $\omega'^2 = \omega^2 - \sigma^2$
- 💡 Considerando il solo moto armonico ( $\omega^2 > \sigma^2$ ):  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$   
 $\rightarrow \omega^2 = \frac{k}{I} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{k}$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \textbf{moto armonico smorzato}$   
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = \frac{2Fd}{I}$$
- 💡 La soluzione di quest'equazione differenziale è:  
 $\varphi(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega't + \Phi) + 2Fd/k$  con pseudo-pulsazione  $\omega'^2 = \omega^2 - \sigma^2$
- 💡 Considerando il solo moto armonico ( $\omega^2 > \sigma^2$ ):  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$   
 $\rightarrow \omega^2 = \frac{k}{I} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{k} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{8\pi^2 m d^2}{T^2}$

# Metodo dell'escurzione finale

- 💡 Dopo i primi 2 min non è più possibile trascurare le altre forze in gioco:
  - 💡 il momento della forza di attrito viscoso  $M_v = -\beta \frac{d\varphi}{dt}$
  - 💡 il momento torcente del filo  $M_r = -k\varphi$
- 💡 L'equazione diventa  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Fd - \beta \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi \rightarrow \text{moto armonico smorzato}$ 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = \frac{2Fd}{I}$$
- 💡 La soluzione di quest'equazione differenziale è:  
 $\varphi(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega't + \Phi) + 2Fd/k$  con pseudo-pulsazione  $\omega'^2 = \omega^2 - \sigma^2$
- 💡 Considerando il solo moto armonico ( $\omega^2 > \sigma^2$ ):  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$   
 $\rightarrow \omega^2 = \frac{k}{I} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{k} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{8\pi^2 m d^2}{T^2} \rightarrow$  posso determinare k filo

# Metodo dell'escursione finale

- Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$

# Metodo dell'escursione finale

- 💡 Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$  dopo un tempo sufficientemente lungo le derivate di  $\varphi$  rispetto al tempo si annullano:  $k\varphi - 2Fd = 0$

# Metodo dell'escurzione finale

- Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$  dopo un tempo sufficientemente lungo le derivate di  $\varphi$  rispetto al tempo si annullano:  $k\varphi - 2Fd = 0$  e quindi  $\varphi$  tende alla posizione di equilibrio:

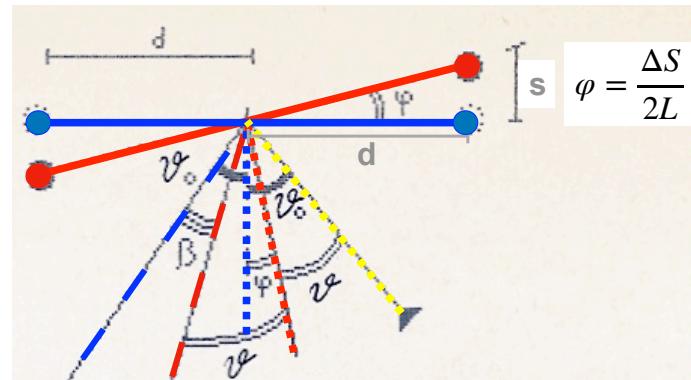
$$\varphi_{eq} = \frac{2Fd}{k} = \frac{2G \frac{Mm}{r^2} d}{\frac{8\pi^2 md^2}{T^2}}$$

# Metodo dell'escurzione finale

- Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$  dopo un tempo sufficientemente lungo le derivate di  $\varphi$  rispetto al tempo si annullano:  $k\varphi - 2Fd = 0$  e quindi  $\varphi$  tende alla posizione di equilibrio:

$$\varphi_{eq} = \frac{2Fd}{k} = \frac{2G \frac{Mm}{r^2} d}{\frac{8\pi^2 md^2}{T^2}}$$

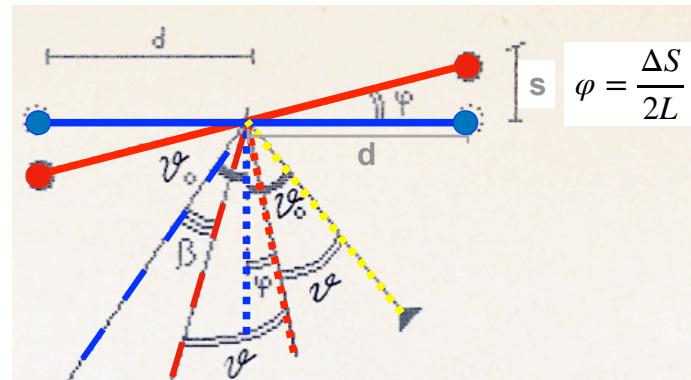
- Per costruzione:  $\varphi_{eq} = \frac{S_{eq} - S_0}{2L} = \frac{\Delta S}{2L}$ ,



# Metodo dell'escurzione finale

- Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$  dopo un tempo sufficientemente lungo le derivate di  $\varphi$  rispetto al tempo si annullano:  $k\varphi - 2Fd = 0$  e quindi  $\varphi$  tende alla posizione di equilibrio:

$$\varphi_{eq} = \frac{2Fd}{k} = \frac{2G \frac{Mm}{r^2} d}{\frac{8\pi^2 md^2}{T^2}}$$



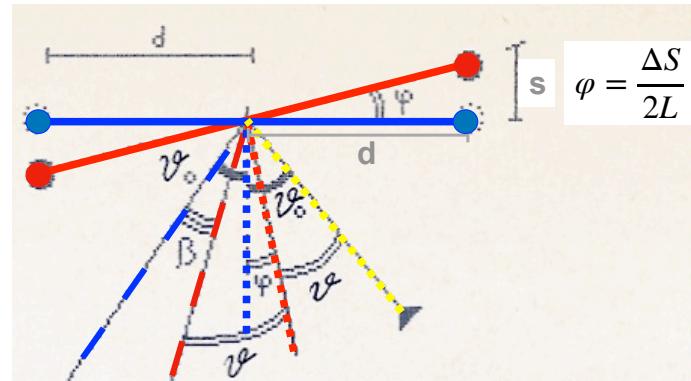
- Per costruzione:  $\varphi_{eq} = \frac{S_{eq} - S_0}{2L} = \frac{\Delta S}{2L}$ , tenendo conto del fatto che la bilancia non parte da scarica:  $\varphi_{eq} = \frac{\Delta S}{4L}$

# Metodo dell'escurzione finale

- Ricordando che  $k = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}$  e riprendendo l'eq.ne  $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi - 2Fd + \beta \frac{d\varphi}{dt} = 0$  dopo un tempo sufficientemente lungo le derivate di  $\varphi$  rispetto al tempo si annullano:  $k\varphi - 2Fd = 0$  e quindi  $\varphi$  tende alla posizione di equilibrio:

$$\varphi_{eq} = \frac{2Fd}{k} = \frac{2G \frac{Mm}{r^2} d}{8\pi^2 md^2} T^2$$

- Per costruzione:  $\varphi_{eq} = \frac{S_{eq} - S_0}{2L} = \frac{\Delta S}{2L}$ ,



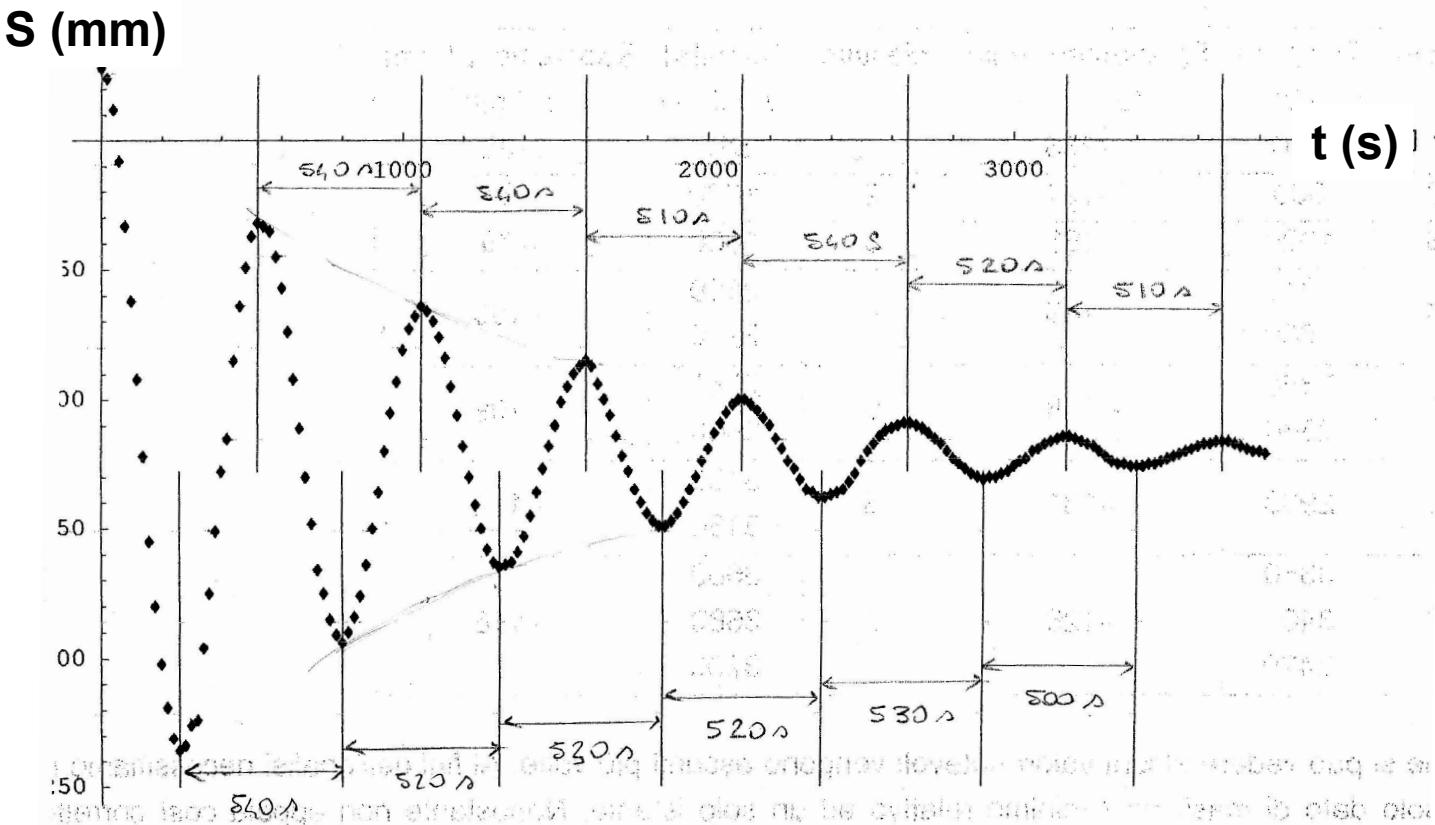
tenendo conto del fatto che la bilancia non parte da scarica:  $\varphi_{eq} = \frac{4Fd}{k}$

si ottiene  $\frac{\Delta S}{2L} = \frac{2GMT^2}{4\pi^2 dr^2} \rightarrow G = \frac{\pi^2 \Delta S r^2 d}{MLT^2}$

# Metodo dell'escursione finale

- Analizzando i vari termini di  $G = \frac{\pi^2 \Delta S r^2 d}{MLT^2}$  è possibile:
  - evidenziare legame tra la forza gravitazionale e:
    - la distanza fra la posizione  $S_0$  iniziale e finale  $S_{eq}$  (ovvero  $\Delta S$ )
    - il periodo  $T$  del moto armonico smorzato compiuto dal sistema
  - misurare la costante elastica  $k$  del filo (a partire da  $T$ )
- Quindi si studierà il **moto armonico smorzato** compiuto dal sistema, al fine di misurare sperimentalmente  $T$  e  $\Delta S$

# Metodo dell'escurzione finale



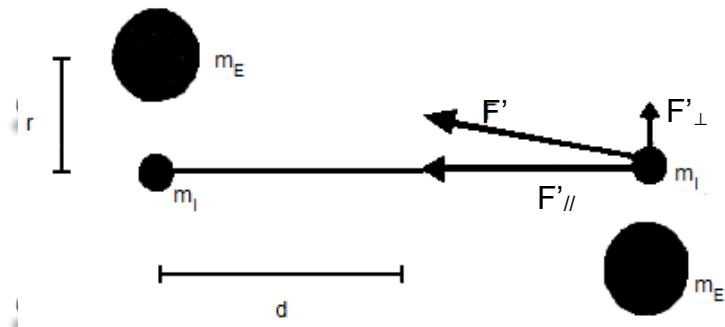
- Determinare **coordinate max/min** attaverso **fit parabolico**  
**nell'intorno dei max/min:** ricavare  $S(t)$  e porre  $dS/dt = 0$
  - Errori su tempi e posizioni: stimare l'ordine di grandezza propagando le incertezze dei parametri di 1-2 parabole e assumere lo stesso per tutti i punti

# I dati sperimentali

- ➊ Una volta determinate le coordinate (x,y) dei massimi e dei minimi della curva, è possibile determinare:
  - ➋ il **periodo  $T_m$**  come **media fra un certo numero di periodi sperimentali**, ottenuti come differenza fra le 'x' di massimi o minimi successivi (scartare oscillazioni iniziali e finali)
  - ➋ la **costante k del filo** a partire dal periodo  $T_m$
  - ➋ la **posizione di equilibrio  $S_{eq}$  finale** col "metodo dinamico" (vedi *Bilancia analitica*), utilizzando le 'y' di un numero dispari di max e min

# Approssimazioni: influenza massa lontana

- E' stata trascurata l'influenza della massa M lontana, che **rende la F agente minore di quella ipotizzata**. La posizione di equilibrio raggiunta va quindi associata ad una forza minore

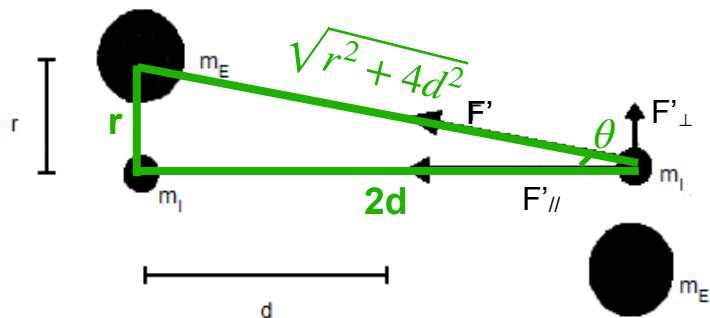


$$F' = G \frac{mM}{r^2 + 4d^2} \text{ può essere scomposta in:}$$

- $F'_{\parallel}$  annullata dal vincolo
- $F'_{\perp} = F' \sin \theta$

# Approssimazioni: influenza massa lontana

- E' stata trascurata l'influenza della massa M lontana, che **rende la F agente minore di quella ipotizzata**. La posizione di equilibrio raggiunta va quindi associata ad una forza minore

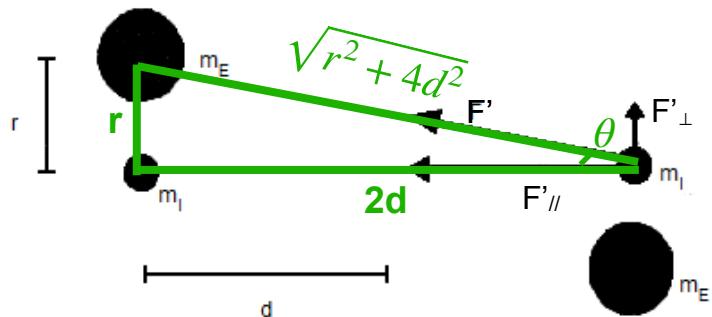


$$F' = G \frac{mM}{r^2 + 4d^2}$$
 può essere scomposta in:

- $F'_{//}$  annullata dal vincolo
- $F'_{\perp} = F' \sin \theta = F' \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} = G \frac{mMr}{(r^2 + 4d^2)^{3/2}}$

# Approssimazioni: influenza massa lontana

- E' stata trascurata l'influenza della massa M lontana, che **rende la F agente minore di quella ipotizzata**. La posizione di equilibrio raggiunta va quindi associata ad una forza minore



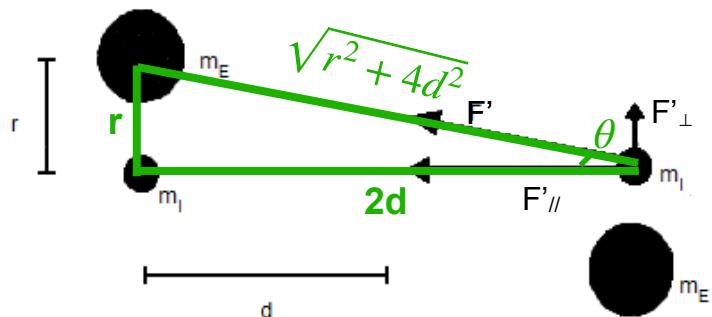
$F' = G \frac{mM}{r^2 + 4d^2}$  può essere scomposta in:

- $F'_{//}$  annullata dal vincolo
- $F'_\perp = F' \sin \theta = F' \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} = G \frac{mMr}{(r^2 + 4d^2)^{3/2}}$

- $F_{tot} = F - F'_\perp = G \frac{mM}{r^2} \left[ 1 - \frac{r^3}{(r^2 + 4d^2)^{3/2}} \right] = F_{corr}(1 - \gamma)$

# Approssimazioni: influenza massa lontana

- E' stata trascurata l'influenza della massa M lontana, che **rende la F agente minore di quella ipotizzata**. La posizione di equilibrio raggiunta va quindi associata ad una forza minore



$F' = G \frac{mM}{r^2 + 4d^2}$  può essere scomposta in:

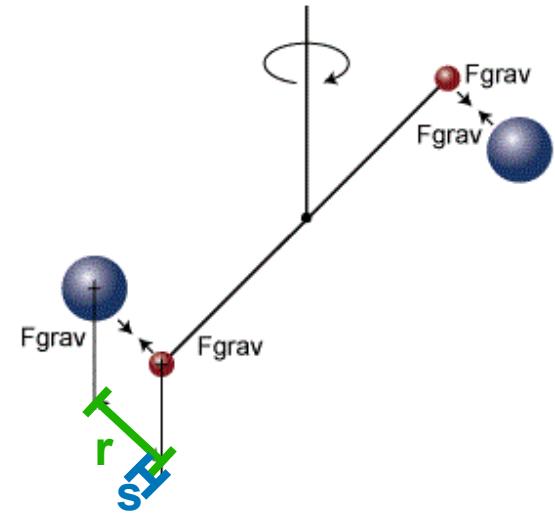
- $F'_{//}$  annullata dal vincolo
- $F'_{\perp} = F' \sin \theta = F' \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} = G \frac{mMr}{(r^2 + 4d^2)^{3/2}}$

- $F_{tot} = F - F'_{\perp} = G \frac{mM}{r^2} \left[ 1 - \frac{r^3}{(r^2 + 4d^2)^{3/2}} \right] = F_{corr}(1 - \gamma)$

- Quindi la forza che agisce sarà:  $F_{corr} = \frac{F_{tot}}{1 - \gamma} \rightarrow G_{corr} = \frac{G}{1 - \gamma}$

# Altre approssimazioni

- **r costante:** in realtà r varia di una quantità pari allo spostamento s della massa piccola  
*valutare se sia trascurabile*

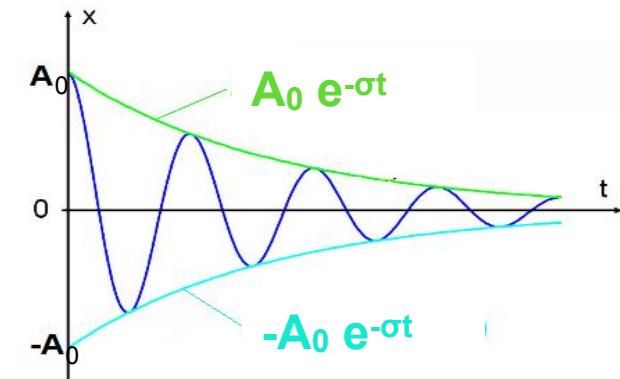


- **Momento di inerzia:** si sono considerate le masse puntiformi e si è trascurata la massa della sbarretta ( $m_s = 1 \text{ g}$ ) → *valutare il momento di inerzia del sistema sbarretta-masse piccole*

# Andamento esponenziale negativo di max e min

- Possiamo inoltre verificare l'**andamento esponenziale negativo di  $S_{\max}$  (e  $S_{\min}$ )**:

$$S_{\max}(t) = S_{\text{eq}} + A_0 e^{-\sigma t} \quad \text{e} \quad S_{\min}(t) = S_{\text{eq}} - A_0 e^{-\sigma t}$$



- Conoscendo le coordinate degli estremi di oscillazione, è possibile verificare tale andamento con un'**opportuna linearizzazione** delle relazioni sopra:

$$\ln(|S_{\max(\min)} - S_{\text{eq}}|) = \ln A_0 - \sigma t$$

ovvero  $y=c-\sigma t$

- Si esegue un **fit lineare sui dati**, osservando che **l'errore su  $y (= \ln |S_{\max} - S_{\text{eq}}|)$  varia al variare di  $y$**