I primi minuti della lezione verranno dedicati alla correzione del seguente esercizio assegnato a lezione.

Esercizio

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_3 + x_2^2$$

1. Classificare Q ed esplicitare una base in cui Q risulti in forma normale.
2. Determinare la dimensione di $W^{\perp_\varphi}$, per $W = \mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$.
3. Determinare un vettore isotropo non nullo di Q.
4. Determinare due vettori isotropi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tali che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ non sia isotropo.

ESERCIZI PER IL TUTORAGGIO

Esercizio 1. [Foglio esercizi n.8, esercizio 5]
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 riferito ad una base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Data la funzione $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (x_1y_3 + x_3y_1)$$

con $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$, verificare che (V, φ) è uno spazio vettoriale euclideo e trovarne una base ortonormale rispetto a φ.

Esercizio 2. [Esame 20/06/2022, Esercizio 2]
Si consideri lo spazio V_3 ed una base ortonormale positiva $\mathscr{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, con componenti associate (x, y, z). Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo dato da

$$f(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2y\mathbf{k} + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \text{dove } \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

E si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{w})$$

(i) Determinare la matrice rappresentativa di φ nella base $\mathscr{B}$.
(ii) Classificare φ, e stabilire se il cono isotropo di φ è un sottospazio vettoriale.
(iii) Determinare una base in cui φ si esprime in forma normale.
(iv) Determinare, se esiste, una sottospazio W di dimensione massima possibile tale che $\varphi\colon W \times W \to \mathbb{R}$ sia un prodotto scalare

Esercizio 3. [Foglio esercizi n.8, esercizio 17]
Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, riferito alla base ortonormale $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
Sia $\mathscr{F}$ il piano vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, per $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$.
Tenendo conto che $V = \mathscr{F} \oplus \mathscr{F}^\perp$ e che ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si decompone in modo unico come $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_1 \in \mathscr{F}$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathscr{F}^\perp$, si consideri l'endomorfismo $p\colon V \to V$, proiezione ortogonale di V su $\mathscr{F}$, definito da $p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$

1. Verificare che la funzione

$$Q\colon V \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot p(\mathbf{u})$$

è una forma quadratica su V e classificarla.

2. Trovare una base di V rispetto alla quale Q si scrive in forma canonica.

Esercizio 4. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 28**]

1. In $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, determinare la forma bilineare simmetrica:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

che verifichi le seguenti condizioni:

   a. $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1$
   b. i vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sono isotropi.
2. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la forma quadratica associata a φ si possa scrivere in forma canonica.