Esercizio 1. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 19, tagliato**]
Data la forma bilineare simmetrica $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ generici vettori di $\mathbb{R}^3$.

1. Determinare la dimensione e una base del sottospazio vettoriale ortogonale a $\mathscr{W} = \mathscr{L}(\mathbf{a})$, rispetto a φ, con $\mathbf{a} = (2, 0, -1)$. La base scelta è ortogonale rispetto a φ?

2. Determinare l'insieme dei vettori isotropi della forma quadratica Q associata a φ. Tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

Esercizio 2. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 21, rivisitato**]
Determinare la matrice associata alla forma quadratica Q su $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tale che la sua forma bilineare simmetrica φ verifichi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \ker\varphi = \mathscr{L}(\mathbf{e}_2) \\ \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 1 \\ \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2 \\ \varphi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. [**Foglio esercizi n.8, esercizio 4, rivisitato**]
In V_3, rispetto alla base ortonormale $\mathscr{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

1. Trovare la matrice, rispetto alla base $\mathscr{B}$, del prodotto scalare φ definito in modo tale che $\mathscr{B}' = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, -\mathbf{i}+\mathbf{k})$ sia una base ortonormale (rispetto a φ).

2. Determinare la dimensione e una base per $\mathscr{F}^\perp$ (complemento ortogonale rispetto a φ) del piano vettoriale:

$$\mathscr{F} = \{\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathscr{V}_3 : \ x_1 + x_3 = 0\}.$$

3. Calcolare la norma del vettore $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (rispetto a φ).