Lezione 10 (12/10)

Confronti locali e simboli di Landau

Siano f, g definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, tranne eventualmente x_0 stesso. Si dice:

- f è trascurabile rispetto a g se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e si scrive $\boxed{f = o(g)}$ $\quad$ f è o-piccolo di g

- f è dello stesso ordine di grandezza di g se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e si scrive $\boxed{f \asymp g}$ $\quad$ f è equi-grande di g

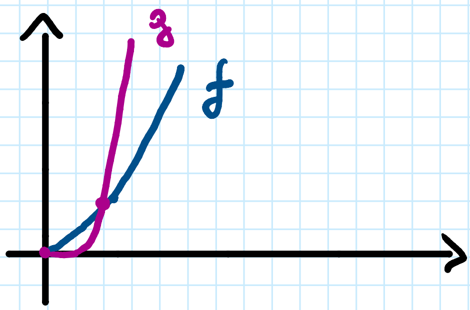
In particolare se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

si dice che f è equivalente a g e si scrive $\boxed{f \sim g}$

Es 1) $f(x) = x^\alpha$ $\quad$ con $0 < \alpha < \beta$

$g(x) = x^\beta$



Si ha $\frac{f}{g} = x^{\alpha - \beta} = \frac{1}{x^{\beta - \alpha}}$

$\frac{g}{f} = x^{\beta - \alpha}$

quindi:

$f = o(g) \qquad x \to +\infty$

$f = o(g) \qquad x \to +\infty$

$g = o(f) \qquad x \to 0^+$

2) Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x) \sim x \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad \Rightarrow \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

3) Gerarchia degli infiniti $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x = o(x^\alpha)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^\alpha = o(e^x) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

4)
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 \pm x} &= \sqrt{x^2(1 \pm 1/x)} \qquad \text{per } x \to +\infty \\ &= |x|\sqrt{1 \pm 1/x} \\ &= x \underbrace{\sqrt{1 \pm 1/x}}_{\to 1} \sim x\end{aligned}$$

Proprietà $\quad f \sim g \iff f = g + o(g) \quad$ per $x \to x_0$

dim $\quad f = g + o(g) \iff f - g = o(g)$

$$\iff \lim \frac{f-g}{g} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{f-g}{g} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(\frac{f}{g} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{f}{g} = 1 \Leftrightarrow f \sim g \quad \square$$

⑩ Ancora limiti notevoli:

$\sin x \sim x \Rightarrow \bullet\ \sin x = x + o(x)$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \underbrace{- o\left(\frac{1}{2}x^2\right)}_{o(x^2)}$$

$$\bullet\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^x - 1 = x + o(x)$

$$\bullet\ e^x = 1 + x + o(x)$$

$\log(1+x) \sim x \Rightarrow \bullet\ \log(1+x) = x + o(x)$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + \underbrace{o(\alpha x)}_{o(x)}$

$$\bullet\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

Proprietà Se $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$ per $x \to x_0$, allora

i) $fg \sim \tilde{f}\tilde{g}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} fg = \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}\tilde{g}$

ii) $f/g \sim \tilde{f}/\tilde{g}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f/g = \lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}/\tilde{g}$

dim i) $\frac{fg}{\tilde{f}\tilde{g}} = \underbrace{\frac{f}{\tilde{f}}} \cdot \underbrace{\frac{g}{\tilde{g}}} \to 1$

Dim c) $\tilde{f}\tilde{g} = \underbrace{\tilde{f}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\tilde{g}}_{\to 1} \to$

da cui $\lim fg = \lim \tilde{f}\tilde{g}$ □

es 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

Per $t \to 0$

$$\begin{cases} 1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2 & \overset{t=2x}{\Longrightarrow} \quad 1-\cos(2x) \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2 \\ \sin t \sim t & \overset{t=3x}{\Longrightarrow} \quad \sin(3x) \sim 3x \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\underbrace{\sin^2(3x)}_{\sin(3x)\sin(3x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{(3\cancel{x})\cdot(3\cancel{x})} = \frac{2}{3}$$

"Potevo farlo" anche così:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left|\frac{1-\cos(2x)}{\frac{1}{2}(2x)^2}\right|}_{\to 1} \frac{1}{2}(2x)^2 \underbrace{\left|\frac{(3x)^2}{\sin^2(3x)}\right|}_{\to 1} \frac{1}{(3x)^2}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ma l'uso di "$\sim$" rende il conto più "snello"!

2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2} = [1^\infty]$

$\parallel$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\log\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2}}$$

$\to 1$

$$\lim_{x\to+\infty} e$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{(x-2)\log\left(\boxed{\frac{x-1}{x+3}}\right)} \quad \to 1$$

So che $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

quindi per $x \to +\infty$

$$\log\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log\left(\frac{x+3-3-1}{x+3}\right)$$

$$= \log\Big(1\ \underbrace{\boxed{-\frac{4}{x+3}}}_{=t\to 0}\Big) \sim -\frac{4}{x+3}$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} (x-2)\log\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x-2)\cdot\left(-\frac{4}{x+3}\right) = -4$$

In definitiva

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(x-2)\log\left(\frac{x-1}{x+3}\right)} = e^{-4}$$

⚠ Attenzione ad utilizzare "$\sim$" con le somme!

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = [+\infty - \infty]$$

Sappiamo che

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x} \sim x \\ \sqrt{x^2-x} \sim x \end{cases} \quad \text{per } x \to +\infty$$

tuttavia $\lim \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) \neq \lim (x-x) = 0$

tuttavia $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) \neq \lim_{x\to+\infty}(x-x)=0$

L'uso di o-piccolo rende chiaro l'errore

$$\sqrt{x^2+x} = x + o(x)$$
$$\sqrt{x^2-x} = x + o(x)$$

per $x\to+\infty$

quindi

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} = (x+o(x))-(x+o(x))$$
$$= o(x)-o(x)$$
$$= o(x)$$

Vediamo come calcolare il limite:

- $\sqrt{x^2 \pm x} = x\sqrt{1\pm \boxed{1/x}}$ per $x>0$ $\quad t\to 0$

So che per $t\to 0$

$$\begin{cases} \sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t + o(t) \\ \sqrt{1-t} = 1-\frac{1}{2}t + o(t) \end{cases}$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+1/x}-\sqrt{1-1/x}\right)$$

$$\underset{t=1/x\to 0^+}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{2}t+o(t)\right)-\left(1-\frac{1}{2}t+o(t)\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{2}t+o(t)\right)-\left(1-\frac{1}{2}t+o(t)\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t+\boxed{o(t)-o(t)}}{t} \qquad = o(t)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(1+\underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\to 0}\right) = 1$$

- Ancora un esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^3}{4x+\log(1+x^2)}$$

$$\sin(2x)+x^3 = 2x+o(x)+\boxed{x^3} \quad = o(x)$$

$$= 2x+o(x)$$

$$4x+\log(1+x^2) = 4x+\underbrace{x^2+o(x^2)}_{o(x)}$$

$$= 4x+o(x)$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^3}{4x+\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x+o(x)}^{\sim 2x}}{\underbrace{4x+o(x)}_{\sim 4x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

Infiniti e infinitesimi

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ si dice che f è infinitesima per $x\to x_0$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ " " " f è infinito per $x\to x_0$

Se f, g sono entrambe infinitesime o infinite

Se f, g sono entrambe infinitesime o infinite per $x \to x_0$

$$f = o(g) \overset{def}{\iff} \begin{cases} f \text{ si dice infinito di ordine inferiore rispetto a } g \\ f \text{ si dice infinitesimo di ordine superiore rispetto a } g \end{cases}$$

Fissiamo un infinito/infinitesimo "campione" $\varphi(x)$

Def Se esiste $\alpha > 0$ t.c.

$$f \asymp \varphi^\alpha \quad \text{per } x \to x_0$$

si dice che f ha ordine α rispetto a φ per $x \to x_0$

Precisamente se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

la f.ne $l\varphi^\alpha$ si dice parte principale di f rispetto a φ.

Quindi

$$f(x) = \underbrace{l\varphi(x)^\alpha}_{\text{parte principale}} + \underbrace{o(\varphi(x)^\alpha)}_{\text{"resto"}} \qquad x \to x_0$$

Es 1) $f(x) = \sin x$, $x \to 0$, $\varphi(x) = x$

Si ha $\sin x = \underbrace{x}_{\text{parte principale}} + o(x)$ per $x \to 0$

parte principale

Ordine di infinitesimo $\alpha = 1$ rispetto a $\varphi(x) = x$

2) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, $x \to 0$, $\varphi(x) = x$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x)$$

$$\sim \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$$

quindi:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \underbrace{\frac{1}{2}x^3}_{\text{parte principale}} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Ordine di infinitesimo $\alpha = 3$

3) $f(x) = \sqrt{3x^5 + 7x^3 - 1}$, $x \to +\infty$, $\varphi(x) = x$

$$f(x) = \sqrt{x^5\left(3 + 7/x^2 - 1/x^5\right)}$$

$$= x^{5/2} \underbrace{\sqrt{3 + 7/x^2 - 1/x^3}}_{\to 3}$$

quindi:

$$f(x) = \underbrace{3x^{5/2}}_{\text{parte principale}} + o(x^{5/2}) \qquad x \to +\infty$$

Ordine di infinito $\alpha = 5/2$

Ordine di infinito $\alpha = 5/2$