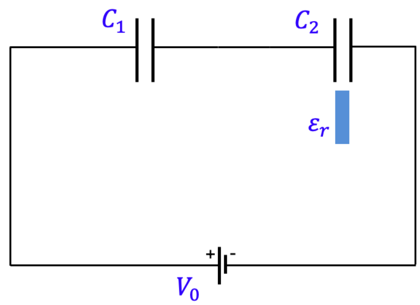
# Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

12/09/2024

## Esercizio 1

Due condensatori piani identici di capacità $C = 50$ pF, con distanza $d = 2$ mm tra le armature, in aria, sono collegati in serie come mostrato in figura. Un generatore mantiene costante la d.d.p. $V_0 = 20$ V. Un foglio di materiale isolante di costante dielettrica $\epsilon_r = 10$ di spessore $d$ e superficie uguale alle armature viene introdotto in uno dei due condensatori. Calcolare:




a) la capacità del sistema dei due condensatori prima e dopo l'inserimento del dielettrico;

b) la variazione di energia potenziale elettrostatica del sistema a seguito dell'introduzione del dielettrico;

c) il lavoro totale compiuto dal generatore che mantiene costante la tensione $V_0$.

## Esercizio 2

Una bobina compatta di forma circolare, costituita da $N = 100$ spire di raggio $a = 1$ cm e resistenza totale $R = 10\ \Omega$, ruota intorno ad un suo diametro, ortogonale ad un campo magnetico uniforme di intensità $B = 2$ T, con velocità angolare $\omega = 40$ rad/s. A $t = 0$ la bobina è ortogonale a $\vec{B}$. Calcolare:

a) il valore massimo della f.e.m. indotta;

b) il valore della f.e.m. indotta per $t = 0.05$ s;

c) il momento meccanico esercitato dal campo magnetico sulla bobina nell'istante in cui la f.e.m. è massima..

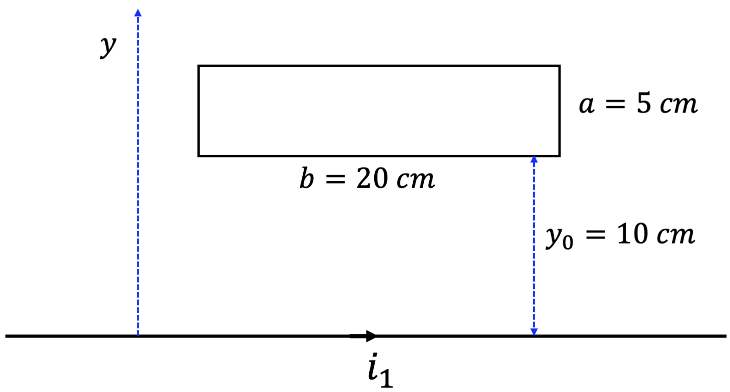
## Esercizio 3

Una spira rettangolare rigida ($a = 5$ cm, $b = 20$ cm) è posta a distanza $y_0 = 10$ cm da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente $i_1 = 10$ A. La spira e il filo appartengono allo stesso piano. Calcolare:

a) il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira

b) il coefficiente di mutua induzione del sistema.

c) Se la spira stessa è sede di una corrente $i_2 = 1.5$ A, calcolare la forza esercitata dal filo sulla spira per i due possibili versi di $i_2$.



# Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

12/09/2024

## Soluzione

### Esercizio 1

I due condensatori sono in serie, pertanto la capacità del sistema è inizialmente

$$C_{\text{eq}} = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2} = 25 \text{ pF}$$

Quando il dielettrico è inserito la capacità diventa

$$C'_{\text{eq}} = \frac{\epsilon_r C^2}{\epsilon_r C + C} = \frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} C = 45.45 \text{ pF}$$

Indichiamo con $U'$ l'energia elettrostatica del sistema dei due condensatori dopo l'inserimento del dielettrico e con $U$ l'energia elettrostatica iniziale. Si osserva un incremento di energia elettrostatica con l'inserimento dell'isolante

$$\Delta U = U' - U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} C V_0^2 - \frac{1}{2}\frac{C}{2} V_0^2 = \frac{1}{4} C V_0^2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} = 4.1 \cdot 10^{-9} \; J$$

Il lavoro elementare compiuto dal generatore per variare la carica nel sistema è

$$dW = V_0 dq = V_0^2 dC$$

Il lavoro totale è pertanto

$$W = V_0^2 \int_{C_{\text{eq}}}^{C'_{\text{eq}}} dC = \frac{1}{2} C V_0^2 \frac{\epsilon_r - 1}{1+\epsilon_r} = 2\Delta U = 8.2 \cdot 10^{-9} \; J$$

### Esercizio 2

Il flusso del campo magnetico in funzione del tempo è

$$\Phi = BN\pi a^2 \cos \omega t$$

La scelta della funzione coseno è dovuta al fatto che all'istante $t = 0$ il flusso è massimo in quanto il versore normale alla superficie delle spire che formano la bobina è parallelo al campo magnetico. La f.e.m. indotta è (la derivata è totale perché il flusso dipende soltanto dal tempo in questo caso)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B N \pi a^2 \sin \omega t = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t$$

La f.e.m. massima vale $\mathcal{E}_{\max} \simeq 2.51$ V. A $t = 0.05$ s, la f.e.m. è

$$\mathcal{E}_{\max} \sin \omega 0.05 \simeq 2.29 \text{ V}$$

Indichiamo con $\hat{n}$ il versore normale alla superficie delle spire che costituiscono la bobina, preso secondo la regola della mano destra. Esso forma una angolo $\omega t$ con $\vec{B}$. Il momento di dipolo magnetico della bobina, che per la sua compattezza approssimiamo come una spira, è

$$\vec{\mu} = N\pi a^2 i \hat{n} = N\pi a^2 \frac{\mathcal{E}}{R} \hat{n}$$

Il momento meccanico che agisce sulla spira, diretto secondo l'asse di rotazione con verso alternato ma tale da opporsi al moto rotatorio, è:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \longrightarrow \quad \tau = N\pi a^2 \frac{\mathcal{E}}{R} B \sin \omega t = N\pi a^2 \frac{\omega B^2 N \pi a^2 \sin^2 \omega t}{R} = \frac{N^2 \pi^2 a^4 \omega B^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Il momento meccanico è massimo quando è massima la f.e.m. Quindi

$$\tau_{\max} = \frac{N^2 \pi^2 a^4 \omega B^2}{R} = 0.0158 \text{ Nm}$$

## Esercizio 3

Il campo magnetico prodotto dal filo ha intensità che dipende soltanto da $y$. Il flusso lo si ottiene per integrazione, valutando il flusso elementare attraverso un rettangolo, orientato come la spira, avente base pari a $b$, altezza $dy$, collocato ad una distanza $y$ dal filo variabile da $y_0$ a $y_0 + a$:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \int_{y_0}^{y_0+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \log \frac{y_0 + a}{y_0} = 1.62 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

Il coefficiente di mutua induzione è

$$M = \frac{\Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \log \frac{y_0 + a}{y_0} = 1.62 \cdot 10^{-8} \text{ H}$$

La forza che si esercita sulla spira qualora essa sia percorsa da corrente si può calcolare ricordando che la forza su un circuito in campo magnetico è

$$\vec{F} = i_2 \nabla \Phi$$

Nel caso in esame il gradiente del flusso coincide con la derivata fatta rispetto alla posizione $y$ ed è diretto lungo l'asse $y$ con componente:

$$\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \frac{a}{y\,(y+a)}$$

La forza è quindi diretta lungo l'asse $y$ con componente

$$F = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 a b}{2\pi y_0\,(y_0+a)} = -2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

Se definiamo una terna cartesiana avente asse $x$ parallelo al filo e orientato verso destra (nel disegno), asse $y$ come rappresentato nel disegno e asse $z$ ortogonale al foglio e diretto verso l'osservatore, abbiamo che la corrente $i_2$ nella spira è positiva se scorre in senso antiorario. Quindi la forza ha componente negativa e quindi è attrattiva quando le due correnti hanno lo stesso segno.

Si arriva allo stesso risultato applicando la seconda formula di Laplace sui quattro lati della spira rettangolare.