Teorema di Fuchs

1 Teorema di Fuchs

Data l'equazione differenziale

$$u''(z) + P(z)\, u'(z) + Q(z)\, u(z) \;=\; 0 \;,$$

il teorema di Fuchs asserisce che:

Se z_0 è un punto singolare fuchsiano dell'equazione,

allora esiste sempre almeno una soluzione del tipo:

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{\rho_1 + k} \;, \qquad \mathit{con} \quad c_0 \neq 0 \;; \tag{1}$$

e una seconda soluzione linearmente indipendente dalla prima della forma:

$$u_2(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z - z_0)^{\rho_2 + k} + d\, u_1(z)\, \ln(z - z_0) \;, \qquad \mathit{con} \quad d_0 \neq 0 \;. \tag{2}$$

Dimostrazione:

Il teorema si dimostra per costruzione, cioè si trovano i parametri ρ_1, ρ_2, c_k, d_k, d, tali che la $u_1(z)$ e $u_2(z)$ siano soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale.

Essendo z_0 una singolarità fuchsiana, allora $P(z)$ ha al più un polo singolo in z_0 e $Q(z)$ ha al più un polo doppio in z_0. Pertanto esisteranno due funzioni $p(z)$ e $q(z)$ regolari in z_0, tali che:

$$P(z) = \frac{p(z)}{z - z_0}, \qquad \text{e} \qquad Q(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^2},$$

Essendo $p(z)$ e $q(z)$ regolari in z_0, allora ammetteranno entrambe uno sviluppo di Taylor in z_0 e potremo scrivere:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{p(z)}{z - z_0} = \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} p_l (z - z_0)^l}{z - z_0} = \sum_{l=0}^{+\infty} p_l (z - z_0)^{l-1} \;, \\ Q(z) &= \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} = \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} q_l (z - z_0)^l}{(z - z_0)^2} = \sum_{l=0}^{+\infty} q_l (z - z_0)^{l-2} \;. \end{aligned} \tag{3}$$

Cerchiamo ora di trovare una soluzione del tipo

$$u_\rho(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{\rho+k}$$

Sostituendo a primo membro dell'equazione differenziale l'espressione di $u_\rho(z)$ insieme alle sue derivate

$$u'_\rho(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\rho + k)(z - z_0)^{\rho+k-1}\,, \qquad u''_\rho(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1)(z - z_0)^{\rho+k-2}\,,$$

e lo sviluppo (3) di $P(z)$ e $Q(z)$, otteniamo:

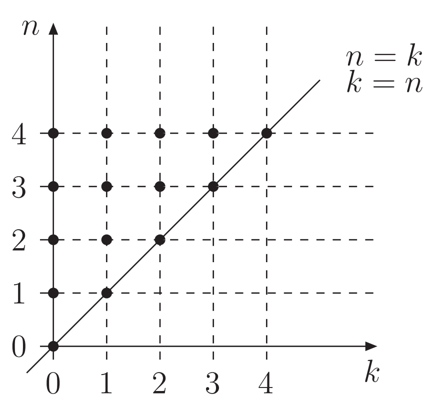
$$\begin{aligned} u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1)(z - z_0)^{\rho+k-2} \\ &+ \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} c_k \Big[(\rho + k)p_l + q_l\Big](z - z_0)^{\rho+k+l-2}\ . \end{aligned}$$

Ora cerchiamo di portare tutte queste serie ad avere la stessa potenza di $(z - z_0)$ facendo dei cambi di indici. In particolare nella prima serie rinominiamo semplicemente $n = k$, mentre nella seconda serie facciamo la sostituzione

$$n = k + l, \qquad l = n - k\,.$$

La doppia serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n}\,,$$



e otteniamo

$$\begin{aligned} u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (\rho + n)(\rho + n - 1)(z - z_0)^{\rho+n-2} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k \Big[(\rho + k)p_{n-k} + q_{n-k}\Big](z - z_0)^{\rho+n-2}\ , \end{aligned}$$

Mettendo tutto in un'unica serie otteniamo:

$$
\begin{aligned}
u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) \;\; = \;\; & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big\{ c_n(\rho+n)(\rho+n-1) \\
& \quad + \sum_{k=0}^{n} c_k \Big[(\rho+k)\, p_{n-k} + q_{n-k} \Big] \Big\} (z-z_0)^{\rho+n-2} \;\; .
\end{aligned}
$$

All'interno della parentesi graffa vediamo che il primo termine è proporzionale al coefficiente c_n, mentre il secondo termine è una somma di termini, contenenti tutti i coefficienti da c_0 a c_n. Estraiamo da questa somma il termine con c_n per assimilarlo al primo:

$$
\begin{aligned}
u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) \;\; = \;\; & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big\{ c_n \Big[(\rho+n)(\rho+n-1) + (\rho+n)p_0 + q_0 \Big] \\
& \quad + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho+k)\, p_{n-k} + q_{n-k} \Big] \Big\} (z-z_0)^{\rho+n-2} \;\; .
\end{aligned}
$$

Se ora introduciamo la funzione

$$
F(x) = x\,(x-1) + x\,p_0 + q_0 \;\; ,
$$

possiamo riscrivere il membro di destra dell'equazione differenziale in maniera più compatta come:

$$
\begin{aligned}
& u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) = \\
& \qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big\{ c_n F(\rho+n) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho+k)p_{n-k} + q_{n-k} \Big] \Big\} (z-z_0)^{\rho+n-2}.
\end{aligned}
$$

Ora imponiamo che la $u_\rho(z)$ soddisfi l'equazione differenziale, cioè che $u''_\rho + Pu'_\rho + Qu_\rho = 0$, e deteminiamo così il parametro ρ e i coefficienti c_n:

$$
u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) = 0 \;\; ;
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \Big\{ c_n F(\rho+n) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho+k)p_{n-k} + q_{n-k} \Big] \Big\} (z-z_0)^{\rho+n-2} = 0 \;\; , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \;\; ;
$$

Quest'ultima condizione, che impone ad una serie di potenze di essere identicamente nulla per ogni z, è verificata se e solo se sono nulli tutti i coefficienti della serie:

$$
u''_\rho(z) + P(z)u'_\rho(z) + Q(z)u_\rho(z) = 0 \;\; ;
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
c_n F(\rho+n) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho+k)p_{n-k} + q_{n-k} \Big] = 0 \;\; , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; ;
$$

Andando ora a vedere che conseguenze hanno queste equazioni per i vari valori $n = 0, 1, 2, 3$, ecc., abbiamo:

$$
\begin{aligned}
n = 0 : &\quad c_0 F(\rho) = 0 \ ; \\
n = 1 : &\quad c_1 F(\rho+1) + c_0[\rho\, p_1 + q_1] = 0 \ ; \\
n = 2 : &\quad c_2 F(\rho+2) + c_0[\rho\, p_2 + q_2] + c_1[(\rho+1)p_1 + q_1] = 0 \ ; \\
n = 3 : &\quad \ldots \ ; \\
\cdots : &\quad \ldots \ ;
\end{aligned}
$$

Dalla prima relazione (quella con $n = 0$), visto che il coefficiente c_0 è diverso da zero per ipotesi, otteniamo la sequente condizione su ρ:

$$
F(\rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\rho-1) + p_0\,\rho + q_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0} \tag{4}
$$

che è detta **equazione indiciale** o **caratteristica**. I parametri p_0 e q_0 si ottengo dagli sviluppi in serie delle funzioni $p(z)$ e $q(z)$:

$$
p_0 = \lim_{z\to z_0} p(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)P(z) \ , \qquad\qquad q_0 = \lim_{z\to z_0} q(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^2 Q(z) \ .
$$

Ora guardiamo le equazioni per $n > 0$ per trovare le condizioni sui coefficienti c_n ($n \in \mathbb{Z}^+$):

$$
\begin{aligned}
n = 1 : &\quad c_1 = -\frac{1}{F(\rho+1)}\, c_0[\rho\, p_1 + q_1] \ ; \\
n = 2 : &\quad c_2 = -\frac{1}{F(\rho+2)} \Big\{ c_0[\rho\, p_2 + q_2] + c_1[(\rho+1)p_1 + q_1] \Big\} \ ; \\
n = 3 : &\quad \ldots \ ; \\
\cdots : &\quad \ldots \ ;
\end{aligned}
$$

Come si vede, l'equazione per $n = 1$ permette di trovare c_1 in funzione di c_0, l'equazione per $n = 2$ permette di trovare c_2 in funzione di c_0 e c_1, e così via. In generale l'equazione per un generale $n > 0$

$$
c_n = -\frac{1}{F(\rho+n)} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho+k)p_{n-k} + q_{n-k} \Big] \ , \qquad n > 0 \ , \qquad \rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \ ,
$$

permette di trovare c_n in funzione dei c_k precedenti (cioè con $k < n$), a patto però che

$$
F(\rho + n) \ \neq \ 0 \qquad \forall\, n > 0 \ .
$$

Tornando quindi alla prima tesi del teorema, avremo che la serie

$$
u_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n}
$$

è effettivamente soluzione dell'equazione differenziale se ρ_1 soddisfa l'equazione indiciale e $F(\rho_1 + n)$ sia diverso da zero *per ogni* $n > 0$ (cioè che $\rho_1 + n$ *non* soddisfi l'equazione indiciale per nessun $n > 0$, mentre la soddisfi per $n = 0$). Si dimostra facilmente che questo è sempre verificato se scegliamo come ρ_1 la soluzione dell'equazione indiciale con parte reale maggiore (e ρ_2 quella con parte reale minore):

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\rho_1 \;\geq\; \mathrm{Re}\,\rho_2}$$

Infatti, visto che n è un numero positivo, avremo che

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\rho_1 + n > \mathrm{Re}\,\rho_1 \qquad &\forall\, n > 0\;, \qquad \Rightarrow \qquad \rho_1 + n \neq \rho_1 \qquad \forall\, n > 0\;,\\
\mathrm{Re}\,\rho_1 + n \;\geq\; \mathrm{Re}\,\rho_2 + n > \mathrm{Re}\,\rho_2 \qquad &\forall\, n > 0\;, \qquad \Rightarrow \qquad \rho_1 + n \neq \rho_2 \qquad \forall\, n > 0\;,
\end{aligned}$$

e pertanto $\rho_1 + n$ non è soluzione dell'equazione indiciale per nessun $n > 0$ e quindi

$$F(\rho_1 + n) \;\neq\; 0 \qquad \forall\, n > 0\;.$$

In altre parole, delle due soluzioni dell'equazione indiciale solo quella con parte reale maggiore (che abbiamo chiamato ρ_1) assicura di poter costruire tutti i coefficienti c_n della serie per u_1.

Concludendo, abbiamo dimostrato la prima parte del teorema di Fuchs, costruendo esplicitamente la soluzione del tipo di eq. (1), che è:

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n}$$

dove ρ_1 è la soluzione dell'equazione indiciale con **parte reale maggiore** e dove i coefficienti c_n sono dati da

$$\boxed{c_0 \neq 0 \quad \text{arbitrario}} \qquad\qquad \boxed{c_n = -\frac{1}{F(\rho_1 + n)} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Big[(\rho_1 + k) p_{n-k} + q_{n-k}\Big]\;, \quad n > 0} \quad (5)$$

Questo conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte cercheremo di costruire una seconda soluzione dell'equazione differenziale del tipo di eq. (2), assumendo fin dall'inizio che l'indice ρ_2 sia proprio la soluzione dell'equazione indiciale con **parte reale minore**.

Distinguiamo ora i due casi in cui la differenza tra le due radici $\delta = \rho_1 - \rho_2$ sia o meno un numero intero. Essendo $\mathrm{Re}\,\rho_1 \;\geq\; \mathrm{Re}\,\rho_2$, avremo che

$$\mathrm{Re}\,\delta = \mathrm{Re}\,\rho_1 - \mathrm{Re}\,\rho_2 \geq 0\,.$$

Da qui segue che, se δ è intero, è sicuramente un numero naturale. Quindi distingueremo i due casi $\delta \notin \mathbb{N}$ e $\delta \in \mathbb{N}$.

- $\boxed{\delta = \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}}$

  In questo caso la seconda soluzione ρ_2 dell'equazione indiciale soddisfa

$$\begin{array}{rclcccl}
\mathrm{Re}\,\rho_2 + n > \mathrm{Re}\,\rho_2 & & & \forall\, n > 0\ , & \Rightarrow & \rho_2 + n \neq \rho_2 & \forall\, n > 0\ , \\
\rho_2 + n & = & \rho_1 \underbrace{-\delta + n}_{\neq 0} \neq \rho_1 & \forall\, n > 0\ , & \Rightarrow & \rho_2 + n \neq \rho_1 & \forall\, n > 0\ .
\end{array}$$

  Pertanto anche per ρ_2 abbiamo:

$$F(\rho_2 + n) \neq 0 \qquad \forall\, n > 0\ .$$

  Quindi se $\delta = \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$, la seconda soluzione è del tipo di eq. (2) con $\boxed{\mathrm{d=0}}$:

$$u_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n}$$

  dove ρ_2 è la soluzione dell'equazione indiciale con **parte reale minore** e dove i coefficienti d_n sono dati da

$$\boxed{d_0 \neq 0 \quad \text{arbitrario}} \qquad \boxed{d_n = -\frac{1}{F(\rho_2 + n)} \sum_{k=0}^{n-1} d_k \Big[(\rho_2 + k)p_{n-k} + q_{n-k}\Big]\ , \quad n > 0} \tag{6}$$

- $\boxed{\delta = \rho_1 - \rho_2 = N \in \mathbb{N}}$

  Cerchiamo ora di trovare una soluzione del tipo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z - z_0)^{\rho_2 + k} + d\, u_1(z)\, \ln(z - z_0)\ .$$

  Sostituendo a primo membro dell'equazione differenziale l'espressione di $u(z)$ insieme alle sue derivate

$$\begin{aligned}
u'(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (\rho_2 + k)(z - z_0)^{\rho_2 + k - 1} + d\, \frac{u_1(z)}{z - z_0} + d\, u_1'(z)\, \ln(z - z_0)\ , \\
u''(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (\rho_2 + k)(\rho_2 + k - 1)(z - z_0)^{\rho_2 + k - 2} \\
&\quad + d\, \frac{2\, u_1(z)'}{z - z_0} - d\, \frac{u_1(z)}{(z - z_0)^2} + d\, u_1''(z)\, \ln(z - z_0)\ ,
\end{aligned}$$

  ripercorriamo i passaggi già fatti nella prima parte della dimostrazione per $u_\rho(z)$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
& u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ d_n F(\rho_2 + n) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \Big[(\rho_2 + k)p_{n-k} + q_{n-k}\Big] \right\} (z - z_0)^{\rho_2 + n - 2} \\
&\qquad\quad + d\, \frac{2\, u_1(z)'}{z - z_0} - d\, \frac{u_1(z)}{(z - z_0)^2} + d\, P(z)\, \frac{u_1(z)}{z - z_0} \\
&\qquad\quad + d\, \Big[u_1''(z) + P(z)u_1'(z) + Q(z)u_1(z)\Big]\, \ln(z - z_0).
\end{aligned}$$

Poiché u_1 è soluzione dell'equazione differenziale, il termine logaritmico si annulla, mentre per gli altri termini proporzionali a d inserendo l'espressione trovata per $u_1(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{2\,u_1'}{z-z_0}-\frac{u_1}{(z-z_0)^2}+P\,\frac{u_1}{z-z_0} \;=\; & \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[2(\rho_1+k)-1\Big]\,c_k(z-z_0)^{\rho_1+k-2}\\ & +\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}c_k p_l(z-z_0)^{\rho_1+k+l-2}\\ = & \sum_{h=0}^{+\infty}\left\{\Big[2(\rho_1+h)-1\Big]c_h+\sum_{k=0}^{h}c_k\,p_{h-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_1+h-2}.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo portato entrambe le serie ad avere la stessa potenza di $(z-z_0)$, rinominando nella prima serie $k=h$ e facendo nella seconda serie la sostituzione $l=h-k$. Abbiamo inoltre usato nuovamente l'identità

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{h=k}^{+\infty}=\sum_{h=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{h}\,.$$

A questo punto inseriamo la relazione $\rho_1=\rho_2+N$ e, facendo poi la sostituzione $n=h+N$ (cioè $h=n-N$), otteniamo

$$\begin{aligned}&\frac{2\,u_1'}{z-z_0}-\frac{u_1}{(z-z_0)^2}+P\,\frac{u_1}{z-z_0} \;=\\ &\quad=\sum_{h=0}^{+\infty}\left\{\Big[2(\rho_2+N+h)-1\Big]c_h+\sum_{k=0}^{h}c_k\,p_{h-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_2+N+h-2}\;=\\ &\quad=\sum_{n=N}^{+\infty}\left\{\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_{n-N}+\sum_{k=0}^{n-N}c_k\,p_{n-N-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2}.\end{aligned}$$

Mettiamo ora tutto insieme:

$$\begin{aligned}&u''(z)+P(z)u'(z)+Q(z)u(z)= \\ &\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{d_nF(\rho_2+n)+\sum_{k=0}^{n-1}d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2}\\ &\quad\;+d\sum_{n=N}^{+\infty}\left\{\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_{n-N}+\sum_{k=0}^{n-N}c_k\,p_{n-N-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Per trovare le relazioni per i coefficienti d_k e d dobbiamo ora distinguere i casi $N=0$ e $N>0$.

Caso $\boxed{\rho_1-\rho_2=N=0}$

In questo caso, essendo $N=\rho_1-\rho_2=0$, le due soluzioni dell'equazione indiciale

$$F(\rho)=\rho^2+(p_0-1)\rho+q_0=0$$

coincidono, il che significa che il discriminante dell'equazione è zero:

$$\Delta = (p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0\,, \qquad\qquad \rho_1 = \rho_2 = \frac{1-p_0}{2}\,.$$

Ponendo $N = 0$ nell'equazione (7), avremo che:

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0\;;$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{d_n F(\rho_2+n) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k} + q_{n-k}\Big]\right.$$
$$\left. + d\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_n + d\sum_{k=0}^{n} c_k\, p_{n-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2} = 0\,.$$

Quest'ultima condizione, che impone ad una serie di potenze di essere identicamente nulla per ogni z, è verificata se e solo se sono nulli tutti i coefficienti della serie:

$$d_n F(\rho_2+n) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k} + q_{n-k}\Big] \tag{8}$$
$$+ d\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_n + d\sum_{k=0}^{n} c_k\, p_{n-k} = 0\,, \qquad \forall\, n \geq 0\,.$$

Questa relazione è identicamente soddisfatta per $n = 0$, per qualunque valore di d_0 e d. Infatti il primo membro diventa

$$d_0F(\rho_2) + d\Big[2\rho_2 - 1\Big]c_0 + d\,c_0\,p_0 = d_0F(\rho_2) + d\,c_0\Big[p_0 + 2\rho_2 - 1\Big]\,,$$

che è sempre zero essendo $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1-p_0}{2}$ e $F(\rho_2) = 0$.

Poiché la relazione per $n = 0$ è soddisfatta per qualunque valore di d_0 e d, queste risulteranno costanti arbitrarie. Gli altri coefficienti d_n $(n > 0)$ sono invece fissati dalla relazione (8) per $n > 0$:

$$\boxed{d_0,\ d \neq 0 \quad \text{arbitrari}} \tag{9}$$
$$\boxed{d_n = -\frac{1}{F(\rho_2+n)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big] + d\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_n + d\sum_{k=0}^{n} c_k\,p_{n-k}\right\}}$$
$$\boxed{n > 0}$$

Caso $\boxed{\rho_1 - \rho_2 = N > 0}$

In questo caso abbiamo:

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0\;;$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N-1}\left\{d_n F(\rho_2+n)+\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2}\\
&+\sum_{n=N}^{+\infty}\left\{d_n F(\rho_2+n)+\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]\right.\\
&\qquad\left.+\,d\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_{n-N}+d\sum_{k=0}^{n-N} c_k\,p_{n-N-k}\right\}(z-z_0)^{\rho_2+n-2} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Questo significa che

$$d_n F(\rho_2+n)+\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]=0\,, \qquad \forall\, 0\le n<N\,, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&d_n F(\rho_2+n)+\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]\\
&\qquad+\,d\Big[2(\rho_2+n)-1\Big]c_{n-N}+d\sum_{k=0}^{n-N} c_k\,p_{n-N-k}=0\,, \qquad \forall\, n\ge N>0\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

La relazione (10) per $n=0$ diventa

$$d_0 F(\rho_2)=0$$

ed è identicamente soddisfatta per qualunque valore di d_0, che risulta quindi arbitrario (ricordo che ρ_2 è soluzione dell'equazione indiciale e pertanto $F(\rho_2)=0$). Invece per $0<n<N$, la relazione (10) permette di fissare i coefficienti d_n per $0<n<N$, ottenendo:

$$\boxed{d_0\neq 0 \quad \text{arbitrario}} \qquad \boxed{d_n=-\frac{1}{F(\rho_2+n)}\sum_{k=0}^{n-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}\Big]\,, \quad 0<n<N} \tag{12}$$

In maniera analoga, la relazione (11) per $n=N$ diventa

$$d_N\underbrace{F(\rho_2+N)}_{F(\rho_1)=0}+\sum_{k=0}^{N-1} d_k\Big[(\rho_2+k)p_{N-k}+q_{N-k}\Big]+d\Big[2(\rho_2+N)-1\Big]c_0+d\,c_0\,p_0 \;=\; 0\,,$$

e permette di fissare d, lasciando d_N arbitrario. La stessa relazione per $n>N>0$

permette invece di fissare gli altri coefficienti d_n (con $n > N > 0$). Otteniamo quindi:

$$\boxed{d_N \neq 0 \quad \text{arbitrario}}$$

$$\boxed{d = -\frac{1}{c_0[p_0 + 2(\rho_2 + N) - 1]} \sum_{k=0}^{N-1} d_k \Big[(\rho_2{+}k)p_{N-k}{+}q_{N-k}\Big]} \tag{13}$$

$$\boxed{d_n = -\frac{1}{F(\rho_2{+}n)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} d_k \Big[(\rho_2{+}k)p_{n-k}{+}q_{n-k}\Big] + d\Big[2(\rho_2{+}n){-}1\Big]c_{n-N} + d\sum_{k=0}^{n-N} c_k\, p_{n-N-k}\right\}}$$

$$\boxed{n > N > 0}$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema, dove abbiamo costruito esplicitamente le due soluzioni $u_1(z)$ e $u_2(z)$, fissando le relazioni tra i coefficienti delle serie che le definiscono.

2 Soluzione generale nell'intorno di una singolarità fuchsiana

Dalla dimostrazione del teorema di Fuchs possiamo quindi costruire esplicitamente la soluzione generale di un'equazione omogenea del secondo ordine nell'intorno di una singolarità fuchsiana.

Data l'equazione differenziale

$$u''(z) + P(z)\, u'(z) + Q(z)\, u(z) \;=\; 0 \;,$$

se z_0 è una singolarità fuchsiana, bisogna prima di tutto calcolare i parametri p_0 e q_0:

$$p_0 = \lim_{z\to z_0} p(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)P(z) \;, \qquad\qquad q_0 = \lim_{z\to z_0} q(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^2 Q(z) \;,$$

e poi risolvere l'**equazione indiciale**

$$\boxed{F(\rho) = \rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0} \tag{14}$$

Chiamiamo quindi ρ_1 la soluzione dell'equazione indiciale con **parte reale maggiore** e ρ_2 quella con **parte reale minore**:

$$\boxed{F(\rho_1) = F(\rho_2) = 0\,, \qquad \mathrm{Re}\,\rho_1 \;\geq\; \mathrm{Re}\,\rho_2}$$

A questo punto, chiamando $\delta = \rho_1 - \rho_2$ la differenza tra le due radici, distinguiamo i tre casi $\delta \notin \mathbb{N}$, $\delta = 0$, $\delta \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- $\boxed{\delta = \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}}$

  In questo caso abbiamo trovato le due soluzioni

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n}\,, \qquad u_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n}\,,$$

dove i coefficienti c_n e d_n ($n > 0$) soddisfano le relazioni di ricorrenza (5) e (6), mentre

$$c_0, d_0 \neq 0 \quad \text{sono arbitrari}\,.$$

Essendo $\rho_1 \neq \rho_2$, queste due soluzioni risultano linearmente indipendenti e la soluzione generale sarà

$$\boxed{u(z) = u_1(z) + u_2(z), \qquad \text{con} \quad c_0, d_0 \neq 0 \quad \text{costanti di integrazione}} \tag{15}$$

- $\boxed{\delta = \rho_1 - \rho_2 = 0}$

  In questo caso abbiamo trovato le due soluzioni

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho + n}\,, \qquad u_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho + n} + d\, u_1(z)\, \ln(z - z_0)\,,$$

con

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 = \frac{1 - p_0}{2}\,,$$

e dove i coefficienti c_n e d_n ($n > 0$) soddisfano le relazioni di ricorrenza (5) e (9), mentre

$$c_0, d_0, d \neq 0 \quad \text{sono arbitrari}\,.$$

Essendo $d \neq 0$, queste due soluzioni risultano linearmente indipendenti e la soluzione generale sarà ancora $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$.

Notiamo però che le costanti arbitrarie sono tre (c_0, d_0, d) e questo potrebbe erroneamente condurre alla conclusione che abbiamo tre costanti di integrazione. Se però scriviamo esplicitamente la soluzione generale isolando la potenza $(z - z_0)^\rho$

$$\begin{aligned}
u(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho+n} + d\, u_1(z)\, \ln(z - z_0) \\
&= c_0 (z - z_0)^\rho + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho+n} + d_0 (z - z_0)^\rho + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho+n} \\
&\quad + d\, u_1(z) \ln(z - z_0) \\
&= (c_0 + d_0)(z - z_0)^\rho + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho+n} + d\, u_1(z) \ln(z - z_0),
\end{aligned}$$

notiamo che le due costanti arbitrarie c_0 e d_0 si combinano nell'unica costante di integrazione $c_0 + d_0$. Pertanto in questo caso la soluzione generale sarà

$$\boxed{u(z) = u_1(z) + u_2(z), \qquad \text{con} \quad c_0 + d_0, d \neq 0 \quad \text{costanti di integrazione}} \tag{16}$$

- $\boxed{\delta = \rho_1 - \rho_2 = N \in \mathbb{N} - \{0\}}$

  In questo caso abbiamo trovato le due soluzioni

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n}, \qquad u_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n} + d\, u_1(z) \ln(z - z_0),$$

  dove i coefficienti c_n $(n > 0)$, d e d_n $(n \neq 0, N)$ soddisfano le relazioni di ricorrenza (5), (12) e (13), mentre

$$c_0, d_0, d_N \neq 0 \quad \text{sono arbitrari}.$$

  Essendo $\rho_1 \neq \rho_2$, queste due soluzioni risultano linearmente indipendenti e la soluzione generale sarà nuovamente $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$.

  Di nuovo notiamo però che le costanti arbitrarie sono tre (c_0, d_0, d_N), ma questo non significa che abbiamo tre costanti di integrazione. Infatti, se scriviamo esplicitamente la soluzione generale isolando la potenza $(z - z_0)^{\rho_1} = (z - z_0)^{\rho_2 + N}$

$$\begin{aligned}
u(z) = &\ u_1(z) + u_2(z) \\
= &\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n} + \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n} + d\, u_1(z) \ln(z - z_0) \\
= &\ c_0 (z - z_0)^{\rho_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n} + d_N (z - z_0)^{\rho_2 + N} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq N}}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n} \\
&+ d\, u_1(z) \ln(z - z_0) \\
= &\ (c_0 + d_N)(z - z_0)^{\rho_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\rho_1 + n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq N}}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{\rho_2 + n} + d\, u_1(z) \ln(z - z_0),
\end{aligned}$$

  notiamo che le due costanti arbitrarie c_0 e d_N si combinano nell'unica costante di integrazione $c_0 + d_N$. Pertanto in questo caso la soluzione generale sarà

$$\boxed{u(z) = u_1(z) + u_2(z), \qquad \text{con} \quad c_0 + d_N, d_0 \neq 0 \quad \text{costanti di integrazione}} \tag{17}$$

  Notiamo che in questo caso il coefficiente d non è una costante di integrazione, ma è fissato agli altri coefficienti e può quindi anche risultare nullo.