Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 19 settembre 2023

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(a,z) \;=\; \frac{\sin\left(a\frac{\pi}{z}\right)}{1+z^2}\,, \qquad\qquad a\in\mathbb{C}\,,\quad a\neq 0\,.$$

(1) Determinare, al variare di a, i punti singolari di $f(a,z)$ al finito e all'infinito, specificando il tipo di singolarità e l'ordine di eventuali poli.

(2) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $f(a,z)$ attorno a $z=\infty$; indicare la regione di convergenza dello sviluppo al variare di a; calcolare il residuo di $f(a,z)$ all'infinito.

(3) Indicando con γ_R una circonferenza di raggio R percorsa in senso antiorario, centrata in $z=0$, calcolare

$$I(R) \;=\; \oint_{\gamma_R} dz\, f(1,z)\,,$$

al variare di R in $\mathbb{R}$.

Soluzione

(1) Per quanto concerne lo studio al finito, analizzando i diversi fattori, abbiamo:

- La funzione $\sin\left(a\frac{\pi}{z}\right)$ ha una singolarità essenziale in $z=0$.
- Il denominatore $1+z^2$ ha due zeri semplici, in $z=\pm i$.

Per verificare se $z=\pm i$ diano luogo a poli semplici per $f(a,z)$, analizziamo il numeratore $\sin\left(a\frac{\pi}{z}\right)$ in $z=\pm i$:

$$\sin\left(a\frac{\pi}{\pm i}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; a\frac{\pi}{\pm i}=k\,\pi \;\Leftrightarrow\; a=\pm i\,k\,, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Se e solo se $a=\pm i\,k$, con $k\in\mathbb{Z}$, ($k\neq 0$ visto che per ipotesi del problema $a\neq 0$) il numeratore ha zeri semplici in $z=\pm i$, compensando gli zeri semplici del denominatore.

Collezionando i vari risultati parziali, la funzione al finito presenta

- una singolarità essenziale in $z = 0$;
- due poli semplici in $z = \pm i$ se $a \neq \pm i\, k$, con $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Per studiare il punto all'infinito si opera il consueto cambio di variabile $z = 1/t$, ottenendo

$$f(a, 1/t) \;=\; t^2\, \frac{\sin(a\,\pi\, t)}{1+t^2}\,.$$

Il seno ha uno zero semplice in $t = 0$, pertanto $f(a, z)$ presenta uno zero triplo in $z = \infty$.

(2) Sviluppiamo la funzione $f(a, z)$ all'infinito, ponendo $z = 1/t$:

$$\begin{aligned} f(a, 1/t) &= t^2\, \frac{\sin(a\,\pi\, t)}{1+t^2} \\ &= \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{(a\pi)^{2l+1}(-1)^{n+l}}{(2l+1)!} t^{2n+2l+3} \\ &= \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{(a\pi)^{2l+1}(-1)^{n+l}}{(2l+1)!} z^{-2n-2l-3}\,. \end{aligned}$$

Tale sviluppo converge nella regione $0 < |t| < 1$, ovvero $|z| > 1$, per $a \neq \pm i\, k$, $k \in \mathbb{Z}$, a causa dei poli semplici di $f(a, 1/t)$ in $t = \pm i$, mentre converge per ogni t quando $a = \pm i\, k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Il residuo all'infinito è zero, essendo l'infinito uno zero triplo.

(3) La funzione integranda ha poli semplici in $z = \pm i$, per quanto discusso in precedenza. Distinguiamo i casi:

- $R < 1$
  In questo caso l'unica singolarità di $f(1, z)$ interna a γ_R è la singolarità essenziale in $z = 0$. Si può procedere in due modi:
  - Metodo della serie di Laurent:

    Calcoliamo la serie di Laurent intorno a $z = 0$

    $$f(1, z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{1+z^2} = \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2l+1}(-1)^{n+l}}{(2l+1)!}\, z^{2n-2l-1}$$

    Il residuo di $f(1, z)$ in $z = 0$ è dato dal coefficiente del termine $1/z$ che si ha per $2n - 2l - 1 = -1$, cioè per $n = l$. Imponendo questa uguaglianza su n, notiamo che la somma su l non viene intaccata e otteniamo:

    $$\mathrm{Res}\left[f(1, z)\right]_{z=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi^{2l+1}}{(2l+1)!} = \sinh(\pi)\,.$$

Pertanto l'integrale è dato da

$$I(R) \,=\, 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=0} \,=\, 2\pi i\, \sinh(\pi)\,.$$

– Metodo del teorema dei residui:

$$\begin{aligned} I(R) &= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=0} \\ &= -2\pi i \Big[\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=\infty} + \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=i} + \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=-i}\Big] \\ &= -2\pi i \Big[\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=i} + \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=-i}\Big]\,. \end{aligned}$$

Per i residui in $z = \pm i$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=\pm i} &= \lim_{z\to\pm i}(z\mp i) f(1,z) \,=\, \lim_{z\to\pm i}(z\mp i)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{1+z^2} \\ &= \lim_{z\to\pm i}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z\pm i} \,=\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\pm i}\right)}{\pm 2i} \,=\, -\,\frac{\sin(i\pi)}{2i} \,=\, -\,\frac{\sinh(\pi)}{2} \end{aligned}$$

Pertanto

$$I(R) \,=\, 2\pi\, \sin(i\pi) \,=\, 2\pi i\, \sinh(\pi)$$

- $R = 1$
  In questo caso i punti $z = \pm i$ appartengono a γ_R, pertanto vi sono singolarità sul cammino d'integrazione e l'integrale $I(R)$ non è definito.
- $R > 1$
  In questo caso tutte le singolarità di $f(1,z)$ sono interne a γ_R e possiamo usare il teorema dei residui per calcolare

$$\begin{aligned} I(R) &= 2\pi i \Big[\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=0} + \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=i} + \mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=-i}\Big] \\ &= -2\pi i \,\mathrm{Res}\left[f(1,z)\right]_{z=\infty} \,=\, 0\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Dato l'integrale

$$I(n,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin^2(\pi\, x/a)}{x^n(x-a)}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}\,.$$

(1) Determinare i valori di n, a per cui esiste $I(n,a)$.

(2) Calcolare $I(2,a)$ con a un numero reale secondo il risultato della parte (1).

Soluzione

(1) *Al finito*: Il denominatore della funzione integranda ha zeri per $x = 0, a$. Il numeratore ha uno zero doppio in $x = 0$ e in $x = a$. Pertanto lo zero semplice del denominatore in $x = a$ è sempre compensato dal numeratore, mentre lo zero di ordine n del denominatore è compensato dallo zero doppio del numeratore solo per $n = 0, 1, 2$. Non ci sono restrizioni per a.
All'infinito: Dobbiamo controllare che la funzione integranda vada a zero più velocemente di $1/x$ per $x \to \pm\infty$. Abbiamo

$$x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin^2(\pi\, x/a)}{x^n(x-a)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

Questo implica $n > 0$ e non ci sono restrizioni per a.

Mettendo tutto insieme abbiamo che l'integrale esiste per $n = 1, 2$ e qualunque valore di $a \neq 0$.

(2) Dobbiamo calcolare

$$I(2,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin^2(\pi\, x/a)}{x^2(x-a)}\,,$$

che è un integrale nel piano complesso sul cammino di integrazione mostrato nella Figura 1. Per utilizzare il lemma di Jordan possiamo scrivere il seno in termini di due esponenziali,

$$\begin{aligned} I(2,a) &= \int_\sigma dz\, \frac{\left(e^{i\,\pi\, z/a} - e^{-i\,\pi\, z/a}\right)^2}{(2i)^2 z^2(z-a)}\,, \\ &= -\frac{1}{4}\int_\sigma dz\, \frac{\left(e^{i\,2\pi\, z/a} + e^{-i\,2\pi\, z/a} - 2\right)}{z^2(z-a)}\,. \end{aligned}$$

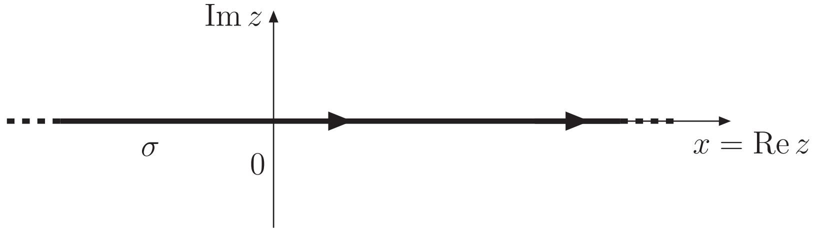

Figura 1: Cammino di integrazione σ

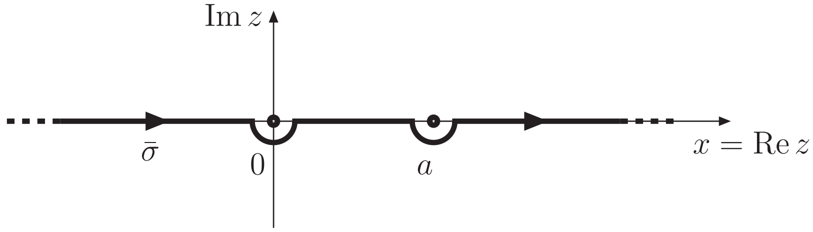

Figura 2: Cammino di integrazione $\bar{\sigma}$. La figura mostra solo il caso $a > 0$.

L'ultima espressione si può risolvere spezzando l'integrale e chiudendo il cammino di integrazione secondo il caso, però prima dobbiamo deformare il cammino di integrazione in modo da evitare di passare sui punti singolari. Scegliamo un cammino $\bar{\sigma}$ dove aggiriamo le singolarità da sotto, come mostrato nella Figura 2.

Possiamo quindi scrivere

$$I(2,a) = -\frac{1}{4}\left[\int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} + \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} - \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{2}{z^2(z-a)}\right] .$$

Dato che tutti i poli delle funzione da integrare si trovano sopra il cammino $\bar{\sigma}$, gli integrali che si possano risolvere chiudendo sotto sono nulli.

Se $a > 0$, per il lemma di Jordan chiudiamo il cammino di integrazione sopra per il primo integrale e sotto per il secondo.

Se $a < 0$, invece, chiudiamo il cammino di integrazione sotto per il primo integrale e sopra per il secondo.

In ogni caso, l'ultimo integrale si può risolvere chiudendo sotto, visto che la funzione integranda va a zero più velocemente di $1/z$ per $z \to \infty$.

Da questo ricaviamo che per $a > 0$

$$\begin{aligned}
I(2, a > 0) &= -\frac{1}{4} \int_{\bar{\sigma}} dz \, \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \\
&= -\frac{2\,\pi\,i}{4} \left[\mathrm{Res}_{z=a} \left\{ \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \right\} + \mathrm{Res}_{z=0} \left\{ \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\lim_{z\to a} \left\{ \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z^2} \right\} + \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{z-a} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\frac{1}{a^2} + \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{i\,2\pi\,e^{i\,2\pi\,z/a}}{a(z-a)} - \frac{e^{i\,2\pi\,z/a}}{(z-a)^2} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\frac{1}{a^2} - 2i\,\pi\,\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right] \\
&= -\frac{\pi^2}{a^2} \,.
\end{aligned}$$

Invece per $a < 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
I(2, a < 0) &= -\frac{1}{4} \int_{\bar{\sigma}} dz \, \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \\
&= -\frac{2\,\pi\,i}{4} \left[\mathrm{Res}_{z=a} \left\{ \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \right\} + \mathrm{Res}_{z=0} \left\{ \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z^2(z-a)} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\lim_{z\to a} \left\{ \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z^2} \right\} + \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{z-a} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\frac{1}{a^2} + \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{-i\,2\pi\,e^{-i\,2\pi\,z/a}}{a(z-a)} - \frac{e^{-i\,2\pi\,z/a}}{(z-a)^2} \right\} \right] \\
&= -\frac{\pi\,i}{2} \left[\frac{1}{a^2} + 2i\,\pi\,\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right] \\
&= \frac{\pi^2}{a^2} \,.
\end{aligned}$$

Si noti che $I(2, a)$ dipende dal segno di a. Questo si può vedere facendo il cambio di variabile $y = x/a$:

$$I(2, a) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2(\pi\,x/a)}{x^2(x-a)} = \mathrm{sign}(a) \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \frac{\sin^2(\pi\,y)}{a^2\,y^2(y-1)} \,,$$

dove $\mathrm{sign}(a)$ viene dal fatto che

$$\begin{aligned}
a > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x \to \pm\infty \;\Longrightarrow\; y \to \pm\infty \\
a < 0 \quad &\Longrightarrow \quad x \to \pm\infty \;\Longrightarrow\; y \to \mp\infty \,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Si considerino tre polinomi $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ a coefficienti reali nella forma

$$P_n(x) \,=\, \sum_{k=0}^{n} c_{nk}\, x^k$$

(1) Determinare le relazioni tra i coefficienti c_{nk} di $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ in modo tale che essi siano ortogonali nell'intervallo $[-3, +3]$.

(2) Determinare i coefficienti c_{nk} con due distinte normalizzazioni: (a) in modo che ogni polinomio $P_n(x)$ abbia $c_{nn} = 1$; (b) in modo che valga $P_n(3) = 1$ per ogni n.

(3) Calcolare la norma al quadrato $||P_n||^2$ dei tre polinomi nei casi (a) e (b) del punto precedente.

(4) Scrivere i primi tre termini dello sviluppo in serie generalizzata di Fourier della funzione
$$F(x) \,=\, \cos(x)\,,$$
nella base dei polinomi $P_n(x)$, usando la normalizzazione (a).

Soluzione

(1) La forma generale dei tre polinomi richiesti è

$$P_0(x) \,=\, c_{00}\,, \qquad P_1(x) \,=\, c_{10} + c_{11}\, x\,, \qquad P_2(x) \,=\, c_{20} + c_{21}\, x + c_{22}\, x^2\,.$$

Le condizioni di ortogonalità nell'intervallo $[0, 2]$ stabiliscono tre relazioni tra i coefficienti:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \big(P_0, P_1\big) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\, P_0(x)\, P_1(x) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\, c_{00}\, \big(c_{10} + c_{11}\, x\big) = 6\, c_{00}\, c_{10}\,, \\
0 \;&=\; \big(P_0, P_2\big) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\, P_0(x)\, P_2(x) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\, c_{00}\, \big(c_{20} + c_{21}\, x + c_{22}\, x^2\big) \\
&=\; 6\, c_{00}\, \big(c_{20} + 3\, c_{22}\big)\,, \\
0 \;&=\; \big(P_1, P_2\big) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\, P_1(x)\, P_2(x) \\
&=\; \int_{-3}^{+3} dx\, \big(c_{10} + c_{11}\, x\big)\, \big(c_{20} + c_{21}\, x + c_{22}\, x^2\big) \,=\, 6\, c_{10}\, \big(c_{20} + 3\, c_{22}\big) + 18\, c_{11}\, c_{21}\,.
\end{aligned}$$

Sfruttando la prima relazione, otteniamo $c_{10} = 0$ (essendo $c_{00} \neq 0$, altrimenti $P_0 \neq 0$). Inserendola nella terza abbiamo $c_{21} = 0$ (essendo $c_{11} \neq 0$, altrimenti $P_1 \neq 0$). Infine la seconda impone $c_{20} = -3c_{22}$. I polinomi quindi diventano:

$$P_0(x) \,=\, c_{00}\,, \qquad P_1(x) \,=\, c_{11}\,x\,, \qquad P_2(x) \,=\, c_{22}\,(x^2-3)\,.$$

(2) A partire dalle relazioni precedenti, le condizioni di normalizzazione determinano univocamente i coefficienti. Nel caso (a) si impone $c_{00} = c_{11} = c_{22} = 1$, da cui si ricava:

$$\text{(a)} \qquad P_0^{(\mathrm{a})}(x) \,=\, 1\,, \qquad P_1^{(\mathrm{a})}(x) \,=\, x\,, \qquad P_2^{(\mathrm{a})}(x) \,=\, x^2-3\,.$$

Nel caso (b) si impone $P_n(3) = 1$, ovvero $c_{00} = 1$, $3\,c_{11} = 1$, $6c_{22} = 1$, da cui si ricavano i valori $c_{11} = 1/3$, $c_{22} = 1/8$ e quindi:

$$\text{(b)} \qquad P_0^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, 1\,, \qquad P_1^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, \frac{1}{3}\,x\,, \qquad P_2^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, \frac{1}{6}\,(x^2-3)\,.$$

Si noti che

$$P_0^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, P_0^{(\mathrm{a})}(x)\,, \qquad P_1^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, \frac{1}{3}\,P_1^{(\mathrm{a})}(x)\,, \qquad P_2^{(\mathrm{b})}(x) \,=\, \frac{1}{6}\,P_2^{(\mathrm{a})}(x)\,. \quad (1)$$

La proporzionalità tra $P_n^{(\mathrm{a})}(x)$ e $P_n^{(\mathrm{b})}(x)$ è diretta conseguenza delle condizioni di ortogonalità, le quali, per un dato intervallo, fissano in modo univoco i rapporti tra i diversi coefficienti dello stesso polinomio; le condizioni di normalizzazione imposte determinano invece le costanti globali che moltiplicano i polinomi.

(3) La norma dei polinomi (reali) si calcola dalla definizione:

$$\begin{aligned}
||P_0^{(\mathrm{a})}||^2 &= \left(P_0^{(\mathrm{a})}, P_0^{(\mathrm{a})}\right) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx \left(P_0^{(\mathrm{a})}(x)\right)^2 \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\,1 \,=\, 6\,,\\
||P_0^{(\mathrm{b})}||^2 &= ||P_0^{(\mathrm{a})}||^2 \,=\, 6\,,\\
\\
||P_1^{(\mathrm{a})}||^2 &= \left(P_1^{(\mathrm{a})}, P_1^{(\mathrm{a})}\right) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx \left(P_1^{(\mathrm{a})}(x)\right)^2 \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\,x^2 \,=\, 18\,,\\
||P_1^{(\mathrm{b})}||^2 &= \frac{1}{9}\,||P_1^{(\mathrm{a})}||^2 \,=\, 2\,,\\
\\
||P_2^{(\mathrm{a})}||^2 &= \left(P_2^{(\mathrm{a})}, P_2^{(\mathrm{a})}\right) \,=\, \int_{-3}^{+3} dx \left(P_2^{(\mathrm{a})}(x)\right)^2 \,=\, \int_{-3}^{+3} dx\,(x^2-3)^2\\
&= 2\,\frac{243}{5} - 6(18) + 6(9) \,=\, 6\,\frac{36}{5} \,=\, \frac{216}{5}\,,\\
||P_2^{(\mathrm{b})}||^2 &= \frac{1}{36}\,||P_2^{(\mathrm{a})}||^2 \,=\, \frac{6}{5}\,.
\end{aligned}$$

(4) Per polinomi ortogonali di norma $||P_n||$ non unitaria i coefficienti della serie generalizzata di Fourier di $F(x)$ si ricavano a partire dallo sviluppo

$$F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, P_k(x)\,,$$

da cui si ottiene, per ortogonalità dei polinomi e linearità del prodotto scalare,

$$\big(P_n, F\big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k \big(P_n, P_k\big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k \big(P_k, P_k\big)\, \delta_{nk} \;=\; f_n \big(P_n, P_n\big)\,.$$

Ciò consente di ricavare i coefficienti dello sviluppo generalizzato come

$$f_n \;=\; \frac{\big(P_n, F\big)}{\big(P_n, P_n\big)} \;=\; \frac{\big(P_n, F\big)}{||P_n||^2}\,.$$

Nel caso in analisi si ha

$$\begin{aligned}
(P_0^{(\mathrm{a})}, F) \;&=\; \int_{-3}^{+3} dx\, \cos x \;=\; 2\,\sin 3\,,\\
(P_1^{(\mathrm{a})}, F) \;&=\; \int_{-3}^{+3} dx\, x\, \cos x \;=\; \Big[x\,\sin x\Big]_{-3}^{+3} - \int_{-3}^{+3} dx\, \sin x \;=\; 0\,,\\
(P_2^{(\mathrm{a})}, F) \;&=\; \int_{-3}^{+3} dx\, (x^2-3)\, \cos x \;=\; \Big[(x^2-3)\,\sin x\Big]_{-3}^{+3} - \int_{-3}^{+3} dx\, 2x\, \sin x\\
&=\; 12\,\sin 3 + \Big[2x\,\cos x\Big]_{-3}^{+3} - \int_{-3}^{+3} dx\, 2\,\cos x \;=\; 4\,\big(2\,\sin 3 + 3\,\cos 3\big)\,,
\end{aligned}$$

da cui infine

$$f_0^{(\mathrm{a})} \;=\; \frac{1}{3}\,\sin 3\,, \qquad f_1^{(\mathrm{a})} \;=\; 0\,, \qquad f_2^{(\mathrm{a})} \;=\; \frac{5}{216}\,4\,\big(2\,\sin 3{+}3\,\cos 3\big) \;=\; \frac{5}{54}\,\big(2\,\sin 3{+}3\,\cos 3\big)\,.$$

Si noti che, essendo $P_n^{(\mathrm{a})} \;=\; \lambda_n\, P_n^{(\mathrm{b})}$ (con $\lambda_1 \;=\; 1,\ \lambda_2 \;=\; 1/3,\ \lambda_3 \;=\; 1/6$), se volessimo calcolare gli $f_n^{(\mathrm{b})}$ non dovremmo ripetere il conto, ma basterebbe usare la relazione $f_n^{(\mathrm{b})} = \lambda_n\, f_n^{(\mathrm{a})}$:

$$f_0^{(\mathrm{b})} \;=\; f_0^{(\mathrm{a})} \;=\; \frac{1}{3}\,\sin 3\,, \qquad f_1^{(\mathrm{b})} \;=\; \frac{f_1^{(\mathrm{a})}}{3} \;=\; 0\,, \qquad f_2^{(\mathrm{b})} \;=\; \frac{f_2^{(\mathrm{a})}}{6} \;=\; \frac{5}{324}\,\big(2\,\sin 3{+}3\,\cos 3\big)\,.$$