1 I numeri complessi

I numeri complessi sono nati guardando le soluzioni delle equazioni di grado superiore al primo, attraverso la nozione di numero immaginario come la radice di un numero negativo. Il legame tra numeri complessi e equazioni algebriche è solo uno degli aspetti basilari dei numeri complessi.
Astraendo un po' l'analisi dell'insieme dei numeri complessi, si vede che esso è contemporaneamente uno *spazio vettoriale* di dimensione 2 e un *campo* rispetto alle operazioni di somma e prodotto. Infatti un numero complesso

$$z = x + i\,y, \qquad x = \mathrm{Re}\,z, \qquad y = \mathrm{Im}\,z,$$

non è altro che un'entità z in corrispondenza biunivoca con la coppia di numeri reali (x, y). Cioè ogni coppia di numeri reali (x, y) identifica un unico numero complesso $z = x + i\,y$ e ogni numero complesso z identifica un'unica coppia di numeri reali $(x, y) = (\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$. In questo senso l'insieme dei numeri complessi è uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ ed è quindi isomorfo al piano $\mathbb{R}^2$. Per questo motivo si parla spesso di *piano complesso* e si rappresentano i numeri complessi come punti (vettori) del piano.
Essendo i numeri complessi dei vettori del piano, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi NON è un insieme ordinato. Cioè mentre per due numeri reali x_1 e x_2 si può dire che x_1 è maggiore o minore di x_2, per due numeri complessi z_1 e z_2 non ha senso dire che z_1 è maggiore o minore di z_2.
Sui numeri complessi si può naturalmente definire l'operazione di somma, che è quella dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cccccc} + & : & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z_1, z_2 & \to & z_1 + z_2 \\ & & x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 & \to & x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ & & (x_1, y_1), (x_2, y_2) & \to & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

A differenza però di uno spazio vettoriale qualunque, in cui in generale non esiste la nozione di prodotto tra vettori, in $\mathbb{C}$ si può anche definire un'operazione prodotto interna a $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccccl} \cdot & : & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z_1, z_2 & \to & z_1 \cdot z_2 \\ & & x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 & \to & (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = \\ & & & & \quad x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ & & & & \quad x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ & & (x_1, y_1), (x_2, y_2) & \to & (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = \\ & & & & \quad (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{array}$$

Questa definizione di prodotto discende direttamente dal fare il prodotto di $x_1 + iy_1$ e $x_2 + iy_2$ trattando l'unità immaginaria come un numero qualunque e usando solo il fatto che

$$i^2 = -\,1.$$

La particolarità del prodotto definito in questo modo è che è definito per ogni coppia di numeri complessi z_1, z_2 e che ammette un inverso per ogni numero complesso diverso dallo zero. Queste due operazioni danno all'insieme dei numeri complessi la struttura di *campo*. Per questo motivo si dà a $\mathbb{C}$ anche il nome di *campo complesso*.

1.1 Modulo di un numero complesso

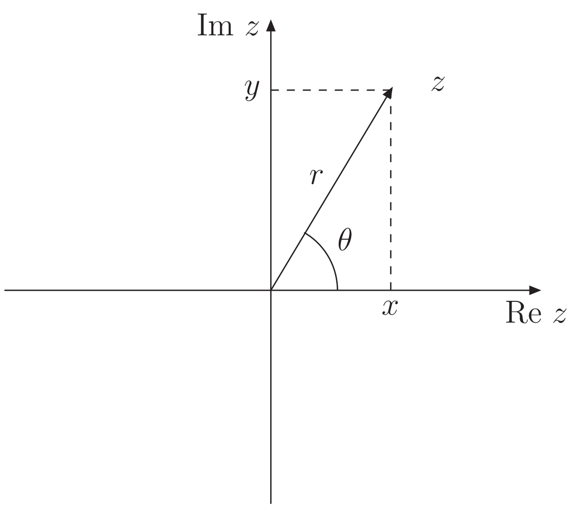
Il modulo di un numero complesso $z = x + i\,y$ si indica con $|z|$ ed è la lunghezza del vettore della sua rappresentazione nel piano. Poiché le coordinate cartesiane del vettore sono x e y, abbiamo che il modulo si può calcolare con il teorema di Pitagora:

$$z = x + i\,y \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Importante notare che **nel calcolare il modulo la i davanti alla parte immaginaria y non va considerata**.

1.2 Rappresentazione cartesiana e polare dei numeri complessi

Poiché i numeri complessi sono vettori del piano, è possibile descriverli sia in coordinate cartesiane bidimensionali attraverso la parte reale e la parte immaginaria, sia in coordinate polari attraverso il modulo e l'argomento (detto anche fase):



$$z = x + i\,y = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta),$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z,$$

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

Il legame tra coordinate cartesiane e polari è:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta, \\ y = r\,\sin\theta, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Per la rappresentazione polare esiste anche un'altra formulazione:

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,e^{i\theta},$$

dove si è fatto uso della formula di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta.$$

Questa formula di fatto definisce l'esponenziale di un numero immaginario, da cui si definisce l'esponenziale di un numero complesso $z = x + iy$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\,\sin y).$$

La formula di Eulero si può capire bene dall'espansione in serie, una volta che si distinguono le potenze pari da quelle dispari, trattando la i come un numero qualunque (solo ricordandosi che $i^2 = -1$):

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0\\ \text{pari}}}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0\\ \text{dispari}}}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

Inoltre con la formula di Eulero l'esponenziale così definito ha tutte le proprietà note dell'esponenziale:

$$\begin{aligned}
e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) + i\,\sin\theta_1(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) = e^{i\theta_1}\,e^{i\theta_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[e^{i\theta}\right]^{-1} &= \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta - i^2\sin^2\theta} \\
&= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta},
\end{aligned}$$

1.3 Complesso coniugato di un numero complesso

Dato un numero complesso z

$$z = x + i\,y = r\,e^{i\theta},$$

si definisce il **complesso coniugato** z^* di z come:

$$z^* \equiv x - i\,y.$$

In coordiante polari avremo:

$$z^* = x - i\,y = r\cos\theta - i\,r\sin\theta = r\left[\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)\right] = r\,e^{-i\theta}.$$

Quindi z^* ha lo stesso modulo di z, ma fase opposta. Proprietà fondamentali sono:

$$\begin{aligned}
z + z^* &= (x + i\,y) + (x - i\,y) = 2\,x = 2\,\mathrm{Re}\,z, \\
z - z^* &= (x + i\,y) - (x - i\,y) = 2\,i\,y = 2\,i\,\mathrm{Im}\,z, \\
z\,z^* &= (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 - i^2\,y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2.
\end{aligned}$$

Perciò il complesso coniugato può essere usato per calcolare le coordinate del numero complesso:

$$x = \mathrm{Re}\,z = \frac{z + z^*}{2}, \qquad y = \mathrm{Im}\,z = \frac{z - z^*}{2i},$$

$$r = |z| = \sqrt{z\, z^*}, \qquad \tan\theta = -\, i\, \frac{z - z^*}{z + z^*}.$$

La relazione con il modulo rivela il modo più pratico di calcolare il modulo quadro di un numero complesso z:

$$|z|^2 = z\, z^*.$$

1.4 Operazioni con i numeri complessi

Dati due numeri complessi

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 = r_1\, e^{i\theta_1}, \qquad\qquad z_2 = x_2 + i\, y_2 = r_2\, e^{i\theta_2},$$

le operazioni principali sono

- <u>Somma</u>
  La somma di numeri complessi si fa più facilmente con la rappresentazione cartesiana:
  $$z_1 + z_2 = (x_1 + i\, y_1) + (x_2 + i\, y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

- <u>Differenza</u>
  La differenza di numeri complessi si fa più facilmente con la rappresentazione cartesiana:
  $$z_1 - z_2 = (x_1 + i\, y_1) - (x_2 + i\, y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

- <u>Prodotto</u>
  Il prodotto di numeri complessi si fa più facilmente in rappresentazione polare:
  $$z_1\, z_2 = \left(r_1\, e^{i\theta_1}\right)\left(r_2\, e^{i\theta_2}\right) = (r_1\, r_2)\left(e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2}\right) = (r_1\, r_2)\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$
  In coordinate cartesiane è invece:
  $$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1\, x_2 + i\, x_1\, y_2 + i\, y_1\, x_2 + i^2\, y_1\, y_2 \\ &= x_1\, x_2 + i\, x_1\, y_2 + i\, y_1\, x_2 - y_1\, y_2 \\ &= (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\,(x_1\, y_2 + y_1\, x_2). \end{aligned}$$

- <u>Divisione</u>
  Anche la divisione di numeri complessi si fa più facilmente in rappresentazione polare:
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\theta_1}}{r_2\, e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$
  In coordinate cartesiane è invece:
  $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1\, x_2 + (x_1)(-iy_2) + (iy_1)(x_2) + (iy_1)(-iy_2)}{x_2\, x_2 + (x_2)(-iy_2) + (iy_2)(x_2) + (iy_2)(-iy_2)} \\ &= \frac{x_1\, x_2 - i\, x_1\, y_2 + i\, y_1\, x_2 - i^2\, y_1\, y_2}{x_2^2 - i\, x_2\, y_2 + i\, y_2\, x_2 - i^2\, y_2^2} = \frac{x_1\, x_2 - i\, x_1\, y_2 + i\, y_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \frac{-x_1\, y_2 + y_1\, x_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

- <u>Potenza</u>
  L'elevamento a potenza di un numero complesso si fa più facilmente con la rappresentazione polare:

$$z_1^\alpha = \left(r_1\, e^{i\theta_1}\right)^\alpha = r_1^\alpha \left(e^{i\theta_1}\right)^\alpha = r_1^\alpha\, e^{i\alpha\theta_1}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

  Nel caso $\alpha = 2$, abbiamo:

$$z_1^2 = r_1^2\, e^{2i\theta_1}.$$

  In coordinate cartesiane è invece:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= (x_1 + iy_1)^2 = x_1^2 + (iy_1)^2 + 2\,x_1\,iy_1 = x_1^2 + i^2\,y_1^2 + 2\,i\,x_1\,y_1 \\ &= (x_1^2 - y_1^2) + i\,(2x_1 y_1). \end{aligned}$$

  È importante notare che per un numero complesso:

$$z^2 \neq |z|^2.$$

1.5 Proprietà dei numeri complessi

In questa sezione facciamo una lista di importanti proprietà dei numeri complessi.

- <u>Reciproco di i:</u>

$$\boxed{\frac{1}{i} = -\,i}$$

  Infatti

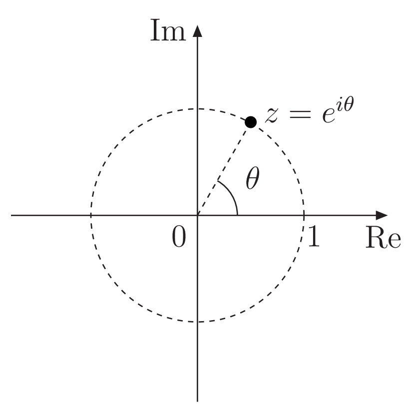
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\,\frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -\,i.$$

- <u>Il numero complesso $z = e^{i\theta}$:</u>

  Il numero complesso $z = e^{i\theta}$ ha modulo

$$\boxed{|e^{i\theta}| = 1} \qquad\qquad \forall\,\theta.$$

  Infatti il coefficiente davanti all'esponenziale è 1. Quindi è un numero che sta sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine:



- Valori notevoli:

$$e^{2m\pi\, i} = 1, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{e^{i\,0} = e^{2\pi\, i} = e^{-2\pi\, i} = \cdots = 1}$$

$$e^{(2m+1)\pi\, i} = -1, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{e^{\pi\, i} = e^{-\pi\, i} = \cdots = -1}$$

$$e^{\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi\, i} = i, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{e^{\frac{\pi}{2}\, i} = e^{-\frac{3}{2}\pi\, i} = \cdots = i}$$

$$e^{\left(2m-\frac{1}{2}\right)\pi\, i} = -i, \quad m \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{e^{-\frac{\pi}{2}\, i} = e^{\frac{3}{2}\pi\, i} = \cdots = -i}$$

- Seno e coseno di numeri reali scritti con i numeri complessi:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Per provare le queste due importanti uguaglianze basta ricordare che:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta;$$

sommando membro a membro abbiamo:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

mentre sottraendo membro a membro otteniamo:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Grazie a queste relazioni se vede facilmente che, dato un numero reale x, vale

$$\boxed{\cos(i\,x) = \cosh(x)} \qquad \boxed{\sin(i\,x) = i\,\sinh(x)}$$