

# Appunti di ANALISI COMPLESSA

ROBERTO BONCIANI\*

Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”  
e INFN Sezione di Roma,  
Piazzale Aldo Moro 2,  
00185 Roma

Corso di MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

*Università degli Studi di Roma “La Sapienza”*

*Dipartimento di Fisica*

*Anni Accademici 2017/2018 — 2021/2022*

---

\*Email: roberto.bonciاني@roma1.infn.it

# Indice

<b>1</b>	<b>Appunti sui NUMERI COMPLESSI</b>	<b>5</b>
1.1	Introduzione . . . . .	5
1.2	Numeri Complessi . . . . .	7
1.2.1	Radice Quadrata . . . . .	11
1.2.2	Rappresentazione geometrica dei Complessi . . . . .	12
1.2.3	Rppresentazione Polare . . . . .	13
1.2.4	Potenza $n$ -esima . . . . .	16
1.2.5	Radice $n$ -esima . . . . .	16
1.2.6	Radici dell'unità . . . . .	18
1.3	Disuguaglianze . . . . .	18
1.4	Alcuni Esercizi . . . . .	19
1.4.1	Esercizio . . . . .	19
1.4.2	Esercizio . . . . .	19
1.4.3	Esercizio . . . . .	20
1.4.4	Esercizio . . . . .	21
1.4.5	Esercizio . . . . .	21
1.4.6	Esercizio . . . . .	22
1.4.7	Esercizio . . . . .	22
1.4.8	Esercizio . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Appunti sulle FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA</b>	<b>24</b>
2.1	Introduzione . . . . .	24
2.2	Dominio ... . . . .	24
2.3	Funzioni di una variabile complessa . . . . .	26
2.4	Limiti e continuità . . . . .	27
2.5	Funzioni analitiche . . . . .	29
2.5.1	Funzioni analitiche e condizioni di Cauchy-Riemann . . . . .	31
2.5.2	Zeri di una funzione analitica . . . . .	35
2.5.3	Singolarità isolate di una funzione analitica . . . . .	35
2.5.4	Funzioni analitiche e campi irrotazionali e solenoidali . . . . .	37
2.5.5	Funzioni analitiche e funzioni armoniche . . . . .	37
2.6	Funzioni Analitiche e Trasformazioni Conformi . . . . .	38
2.6.1	Funzioni analitiche come trasformazioni del piano . . . . .	39
2.6.2	Punti con derivata nulla . . . . .	42
2.6.3	Trasformazioni di Möbius . . . . .	42
2.6.4	Esempi di trasformazioni conformi . . . . .	45
2.7	Alcuni Esercizi . . . . .	45

2.7.1	Esercizio . . . . .	45
2.7.2	Esercizio . . . . .	46
2.7.3	Esercizio . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Appunti sulle SERIE DI POTENZE</b>	<b>48</b>
3.1	Successioni . . . . .	48
3.2	Successioni di funzioni . . . . .	49
3.3	Serie di funzioni . . . . .	50
3.3.1	Serie di potenze . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Appunti sulle FUNZIONI ANALITICHE ELEMENTARI</b>	<b>57</b>
4.1	Esponenziale complesso . . . . .	57
4.2	Funzioni trigonometriche . . . . .	59
4.3	Funzioni iperboliche . . . . .	63
4.4	Funzioni inverse e polidromia . . . . .	64
4.4.1	Logaritmo complesso . . . . .	65
4.5	Radice $n$ -esima . . . . .	68
4.6	Punti di diramazione multipli . . . . .	70
4.7	Funzioni trigonometriche inverse . . . . .	76
4.8	Funzioni iperboliche inverse . . . . .	78
4.9	Potenza complessa . . . . .	78
4.10	Alcuni Esercizi . . . . .	79
4.10.1	Esercizio . . . . .	79
4.10.2	Esercizio . . . . .	80
4.10.3	Esercizio . . . . .	80
4.10.4	Esercizio . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Appunti sull'INTEGRAZIONE NEI COMPLESSI</b>	<b>82</b>
5.1	Curve in $\mathbb{C}$ . . . . .	83
5.1.1	Omotopia . . . . .	85
5.2	Integrali . . . . .	85
5.2.1	Esempi . . . . .	88
5.3	Teorema di Cauchy (forma debole) . . . . .	91
5.3.1	Una conseguenza del Teorema di Cauchy: primitiva . . . . .	98
5.3.2	Domini multiplamente connessi . . . . .	100
5.3.3	Principio di deformazione dei cammini . . . . .	101
5.3.4	Formula integrale di Cauchy . . . . .	103
5.4	Serie di Taylor . . . . .	107
5.4.1	Esempi . . . . .	109
5.5	Altri risultati importanti . . . . .	113
5.6	Funzioni analitiche monodrome con singolarità isolate: serie di Laurent . . . . .	115
5.7	Esempi . . . . .	119
5.8	Serie di Laurent e Serie di Fourier . . . . .	123
5.9	Teorema dei residui . . . . .	123
5.9.1	Residuo nel caso di singolarità polare di ordine $m$ . . . . .	125
5.9.2	Residuo nel caso di polo singolo . . . . .	125
5.10	Esempi . . . . .	126

5.11	Lemma di Jordan e lemma degli archi infinitesimi . . . . .	127
5.12	Integrazione con i residui di funzioni razionali trigonometriche nei reali . . . . .	130
5.13	Integrali di Fourier . . . . .	132
5.14	Integrali di Fresnel . . . . .	136
5.15	Integrali con esponenziali . . . . .	137
5.16	Teorema dei residui con singolarità esterne alla curva di integrazione . . . . .	140
5.16.1	Esempio . . . . .	143
5.16.2	Esempio . . . . .	144
5.16.3	Esempio . . . . .	145
5.16.4	Esempio . . . . .	146
5.17	Integrali impropri e Valor Principale di Cauchy . . . . .	147
5.17.1	Valore Principale di Cauchy . . . . .	148
5.18	Integrali di funzioni polidrome . . . . .	151
5.18.1	Esempio . . . . .	152
5.18.2	Esempio . . . . .	153
5.18.3	Esempio . . . . .	155
5.18.4	Esempio . . . . .	156
5.18.5	Esempio . . . . .	157
5.19	Prolungamento analitico nel piano complesso . . . . .	160
5.19.1	Funzione $\Gamma(z)$ di Eulero . . . . .	164
5.19.2	Principio di riflessione di Schwartz . . . . .	166
5.19.3	Continuazione alla Borel . . . . .	166

*Questi appunti non vogliono essere una trattazione esaustiva dell'analisi complessa, ma soltanto una schematica presentazione di ciò che è stato trattato a lezione.*

# Capitolo 1

## Appunti sui NUMERI COMPLESSI

*In questo capitolo introduciamo i numeri complessi.*

### 1.1 Introduzione

Storicamente i numeri complessi vengono introdotti nel XVI secolo da alcuni matematici italiani impegnati nella ricerca della formula risoltrice delle equazioni di terzo grado.

Si può pensare all'introduzione di numeri complessi coinvolgendo la chiusura di un certo insieme sotto particolari operazioni. La mancanza di tale chiusura può essere risolta allargando l'insieme. Per esempio, I numeri naturali sono chiusi rispetto alla *somma* di due numeri. Infatti, se  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , si ha che

$$n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Invece, se consideriamo la *differenza* di due numeri naturali,

$$n = n_1 - n_2, \quad (1.2)$$

questa è ancora nell'insieme soltanto se  $n_1 > n_2$ . Altrimenti ho bisogno di un allargamento dell'insieme. Si deve passare ai numeri interi per poter avere chiusura anche rispetto alla differenza.

La stessa cosa viene fuori se consideriamo l'insieme dei numeri interi,  $\mathbb{Z}$ , e si vuole considerare la chiusura rispetto al quoziente. In generale, se  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$z = \frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

Allargando  $\mathbb{Z}$  ai numeri razionali,  $\mathbb{Q}$ , si fa sì che  $z$  sia un razionale.

Analogamente potremmo cercare una chiusura rispetto all'estrazione della radice quadrata e dovremmo introdurre l'insieme dei numeri reali,  $\mathbb{R}$ .

Infine, se vogliamo estrarre la radice quadrata di un numero negativo, dobbiamo allargare ulteriormente all'insieme dei complessi,  $\mathbb{C}$ .

Un altro modo di dire la stessa cosa e rifarsi alla soluzione di un'equazione algebrica su un certo insieme (corpo). Se consideriamo per esempio l'equazione

$$2x + 3 = 0 \quad (1.4)$$

e la vogliamo risolvere negli interi  $\mathbb{Z}$ , l'equazione non avrà soluzioni. Se invece allarghiamo gli interi ai razionali,  $\mathbb{Q}$ , allora l'Eq. (2.64) avrà una soluzione

$$x = -\frac{2}{3}. \quad (1.5)$$

La stessa cosa se consideriamo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1.6)$$

Nei reali, l'Eq. (1.6) non ha soluzioni, ma se introduciamo i numeri complessi,  $\mathbb{C}$ , allora possiamo definire l'unità immaginaria

$$i = \sqrt{-1}, \quad (1.7)$$

e l'Eq. (1.6) ha due soluzioni:

$$x = \pm i. \quad (1.8)$$

L'Eq. (1.6) può derivare per esempio da un problema fisico, come lo studio delle soluzioni dell'equazione del moto armonico

$$y'' + y = 0. \quad (1.9)$$

Se cerchiamo una soluzione del tipo esponenziale

$$y(t) \sim e^{\alpha t}, \quad (1.10)$$

troviamo un'equazione indiciale del tipo (1.6). Ovvero

$$\alpha_{1,2} = \pm i. \quad (1.11)$$

Quindi una soluzione generale dell'equazione differenziale può essere scritta nella forma seguente

$$y(t) = \tilde{A}e^{it} + \tilde{B}e^{-it}. \quad (1.12)$$

D'altra parte si vede immediatamente che due soluzioni indipendenti reali (e la soluzione finale deve essere reale poiché  $y(t)$  rappresenta per esempio la coordinata del punto materiale soggetto alla forza di richiamo elastico) della (1.9) sono

$$y_1(t) = \sin t, \quad y_2(t) = \cos t, \quad (1.13)$$

ovvero la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(t) = A \sin t + B \cos t. \quad (1.14)$$

Se ne deduce che  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  dovranno essere dei numeri complessi (in maniera tale da far venire l'espressione (1.12) reale) e che l'esponenziale  $e^{\pm it}$  ha a che fare con le funzioni seno e coseno ... Vedremo che ciò è corretto, introducendo la formula di Eulero.

## 1.2 Numeri Complessi

**Definizione 1.2.1** *L'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  è l'insieme delle coppie ordinate  $(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

Con questa definizione è immediato capire che c'è una corrispondenza biunivoca fra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , cioè  $\mathbb{C}$  è isomorfo al prodotto cartesiano di  $\mathbb{R}$  con sé stesso.

Un elemento di  $\mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , si può rappresentare usando l'unità immaginaria nel seguente modo

$$z = x + iy. \quad (1.15)$$

La  $x$  e la  $y$  vengono dette *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso  $z$  e si indicano con

$$x = \Re(z), \quad (1.16)$$

$$y = \Im(z). \quad (1.17)$$

La rappresentazione (1.15) è unica, cioè il numero  $z$  è individuato da una sola  $\Re(z)$  e da una sola  $\Im(z)$ . Se così non fosse si avrebbe

$$z = x + iy = x' + iy' \quad (1.18)$$

e quindi

$$(x - x') = i(y' - y), \quad (1.19)$$

che è verificata soltanto se  $x = x'$  e  $y = y'$ .

Definito l'insieme abbiamo bisogno di definirci sopra una struttura, cioè delle operazioni rispetto alle quali l'insieme è chiuso e che ci permettano di lavorare con gli  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definizione 1.2.2** *Detti  $z_1$  e  $z_2$  due numeri complessi, si ha*

1.  $z_1 = z_2$  se e solo se  $\Re(z_1) = \Re(z_2)$  e  $\Im(z_1) = \Im(z_2)$ .

2. Si definisce la **somma**. Per  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C}. \quad (1.20)$$

3. Si definisce il **prodotto**. Per  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{C}. \quad (1.21)$$

**NB.** Valgono le usuali regole dell'aritmetica dei numeri reali con l'aggiunta della regola  $i^2 = -1$ .

**Proprietà 1.2.3** *Per somma e prodotto valgono le seguenti proprietà (che seguono banalmente dalle analoghe proprietà dei reali):*

1. (Commutativa): per  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  si ha

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (1.22)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1. \quad (1.23)$$



2. (Associativa): per  $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  si ha

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = \dots \quad (1.24)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = \dots \quad (1.25)$$

3. (Distributiva): per  $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  si ha che

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \quad (1.26)$$

4. (Elemento neutro della somma):  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 0$  tale che

$$z + 0 = 0 + z = z. \quad (1.27)$$

5. (Elemento neutro del prodotto):  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 1$  tale che

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z. \quad (1.28)$$

si avrà  $0 = (0, 0)$  e  $1 = (1, 0)$ .

6. (Inverso della somma):  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! -z$  tale che

$$z + (-z) = (-z) + z = 0. \quad (1.29)$$

7. (Reciproco del prodotto):  $\forall z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0, \exists! z^{-1}$  tale che

$$z z^{-1} = z^{-1} z = 1. \quad (1.30)$$

L'inverso sarà il numero complesso  $z' = -z$  con  $\Re(z') = -\Re(z)$  e  $\Im(z') = -\Im(z)$

$$z' = -z = -x - iy = (-x, -y) \quad (1.31)$$

Da qui si può definire la differenza di  $z_1$  da  $z_2$  come la somma di  $z_1$  e dell'inverso di  $z_2$ .

Il reciproco, invece, è leggermente più complicato. Infatti, dalla definizione abbiamo che  $z' = 1/z$  deve essere tale che  $z z' = 1$ . Allora possiamo cercare la sua parte reale e parte immaginaria in termini della parte reale e immaginaria di  $z$  risolvendo un sistema:

$$z z' = (x x' - y y') + i(x' y + x y') = 1, \quad (1.32)$$

ovvero

$$x x' - y y' = 1 \quad (1.33)$$

$$x' y + x y' = 0. \quad (1.34)$$

La soluzione del sistema dà

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (1.35)$$

$$y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1.36)$$

Se consideriamo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , il rapporto  $z_1/z_2$  potrà essere visto come il prodotto di  $z_1$  per il reciproco di  $z_2$  e quindi

$$z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy, \quad (1.37)$$

tale che

$$x = x_1 \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - y_1 \left( -\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (1.38)$$

$$y = x_1 \left( -\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + y_1 \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.39)$$

**NB.** Regola semplice:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.40)$$

**Definizione 1.2.4** Si dice **modulo** di  $z \in \mathbb{C}$ , e si indica con  $|z|$ , il seguente numero reale

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}. \quad (1.41)$$

Si ha che  $|z| = 0$  se e solo se  $z = 0$ .

**Definizione 1.2.5** Si dice **coniugato** di  $z \in \mathbb{C}$ , e si indica con  $\bar{z}$ , il seguente numero complesso

$$\bar{z} = x - iy, \quad (1.42)$$

ovvero il numero complesso che abbia la stessa parte reale e l'inversa della parte immaginaria di  $z$ .

**Proprietà 1.2.6** Si possono verificare facilmente le seguenti proprietà:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \forall z \neq 0, \quad (1.44)$$

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad (1.45)$$

$$\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.46)$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad (1.47)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (1.48)$$

$$\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0, \quad (1.49)$$

$$\overline{\bar{z}} = z. \quad (1.50)$$

Si ha anche

### Proprietà 1.2.7

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (1.51)$$

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \implies |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.52)$$

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|, \quad (1.53)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= \text{poiché } \bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}, \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2, \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = \dots = |z_1|^2 - 2\Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2, \quad (1.56)$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad (1.57)$$

**Proprietà 1.2.8** *L'insieme dei numeri complessi,  $\mathbb{C}$ , con le operazioni di somma e prodotto discusse sopra, è un campo (o corpo).*

**NB.**  $\mathbb{C}$  NON è un insieme ordinato, a differenza di  $\mathbb{R}$ .

Utilizzando le regole che abbiamo derivato possiamo dimostrare per esempio che, se

$$\sum_{i=0}^N a_i z^i = 0 \quad (1.58)$$

è un'equazione a coefficienti reali,  $a_i \in \mathbb{R}$  (cioè  $\overline{a_i} = a_i$ ), allora il fatto che  $z_0$  sia una radice complessa di (1.58) implica che anche  $\bar{z}_0$  lo sia.

Infatti, se  $z_0$  è radice di (1.58), vuol dire che  $\sum_{i=0}^N a_i z_0^i = 0$ . Ma allora

$$0 = \overline{\sum_{i=0}^N a_i z_0^i} = \sum_{i=0}^N \overline{a_i z_0^i} = \sum_{i=0}^N \overline{a_i} \overline{z_0^i} = \sum_{i=0}^N a_i \bar{z}_0^i, \quad (1.59)$$

quindi  $\bar{z}_0$  è soluzione della stessa equazione.

**Definizione 1.2.9** *Si dice potenza  $n$ -esima di  $z \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )*

$$z^n = \underbrace{z z z \dots z}_n \quad n \text{ volte} \quad (1.60)$$

Se  $z \neq 0$  si ha

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} \dots \frac{1}{z} \quad n \text{ volte} \quad (1.61)$$

Inoltre si ha  $z^0 = 1$ .

### 1.2.1 Radice Quadrata

Definiamo adesso la radice quadrata di un numero complesso. Questa sarà un numero complesso

$$w = \sqrt{z} = \alpha + i\beta, \quad (1.62)$$

tale che

$$(\alpha + i\beta)^2 = z = x + iy. \quad (1.63)$$

La relazione (1.63) equivale al seguente sistema

$$\alpha^2 - \beta^2 = x, \quad (1.64)$$

$$2\alpha\beta = y. \quad (1.65)$$

Se sommiamo i quadrati delle due equazioni otteniamo

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = x^2 + y^2, \quad (1.66)$$

da cui

$$|w|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.67)$$

Sommando o sottraendo la (1.67) dalla (1.64) si ottiene

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1.68)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (1.69)$$

Quindi

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}, \quad (1.70)$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})}. \quad (1.71)$$

Da notare che gli argomenti delle radici sono positivi indipendentemente dai segni di  $x$  e  $y$ . Sembrano esserci quattro combinazioni. In realtà non abbiamo ancora utilizzato da sola l'Eq. (1.65), che ci dice che  $\alpha$  e  $\beta$  devono essere tali che il loro prodotto deve avere lo stesso segno di  $y$ . Quindi per  $y > 0$   $\alpha$  e  $\beta$  dovranno essere concordi e per  $y < 0$  discordi. Possiamo quindi selezionare due possibilità, sintetizzabili nella formula che segue

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})} + i \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})} \right), \quad (1.72)$$

con  $y \neq 0$ .

Se  $y = 0$ , si ha

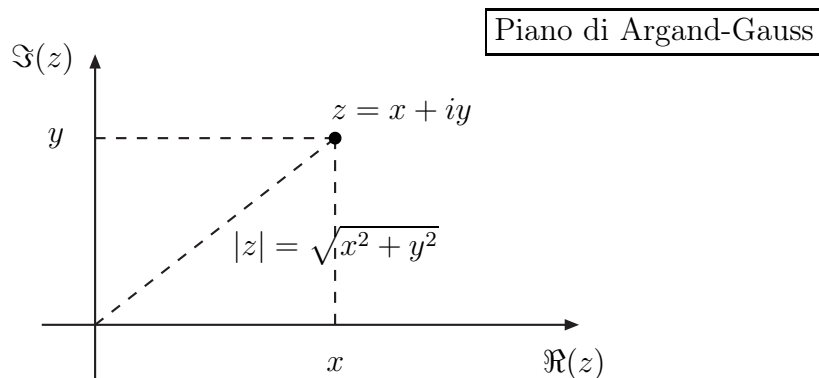
$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{x} \quad \text{se } x \geq 0, \quad (1.73)$$

$$\sqrt{z} = \pm i\sqrt{-x} \quad \text{se } x < 0. \quad (1.74)$$

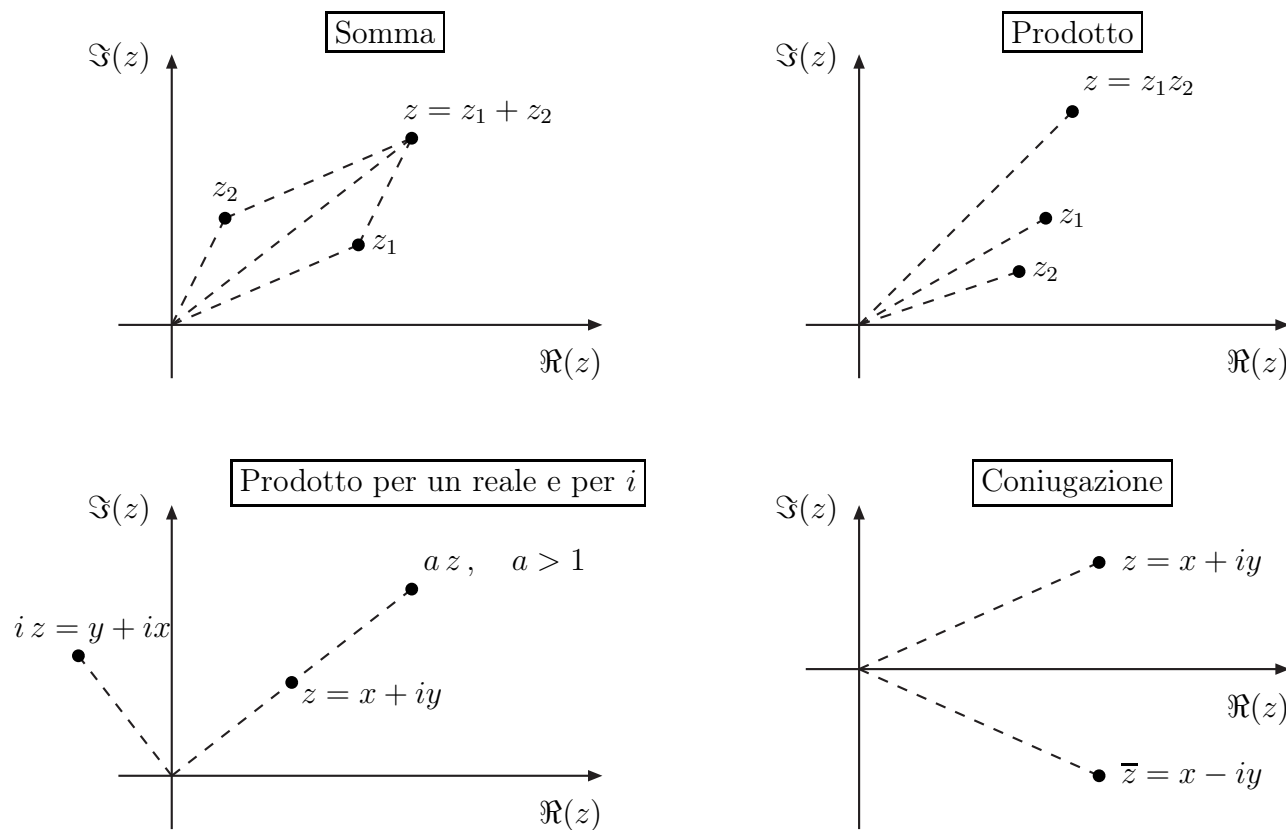
Quindi, la radice quadrata di un numero complesso ha due valori opposti che coincidono solo se  $z = 0$ . Se  $y = 0$  e  $x \geq 0$  i due valori sono reali, se  $y = 0$  e  $x < 0$  sono immaginari puri.

## 1.2.2 Rappresentazione geometrica dei Complessi

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi sfrutta l'isomorfismo fra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e associa a  $z = x + iy$  la coppia di valori  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ :

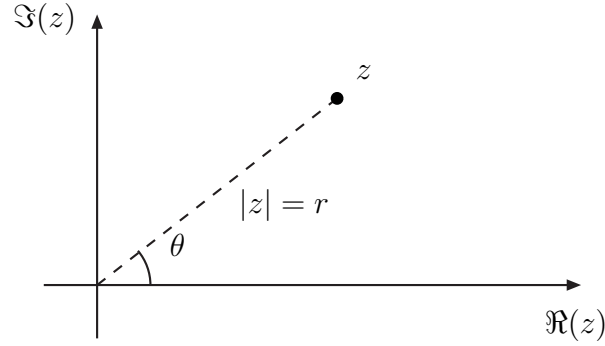


Si può pensare a  $z$  come ad un vettore in  $\mathbb{R}^2$  e di conseguenza possiamo rappresentare sul piano di Argand-Gauss le operazioni che abbiamo introdotto: somma, coniugazione, moltiplicazione per un numero reale o per l'unità immaginaria ... prodotto di due numeri complessi. Questo ultimo però si capirà meglio dopo l'introduzione della rappresentazione polare.



### 1.2.3 Rppresentazione Polare

Andando avanti con l'analogia fra  $\mathbb{C}$  e piano cartesiano, possiamo rappresentare  $z \in \mathbb{C}$  tramite la rappresentazione polare del piano.



Avremo  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e

$$x = r \cos \theta, \quad (1.75)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (1.76)$$

Allora

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.77)$$

con

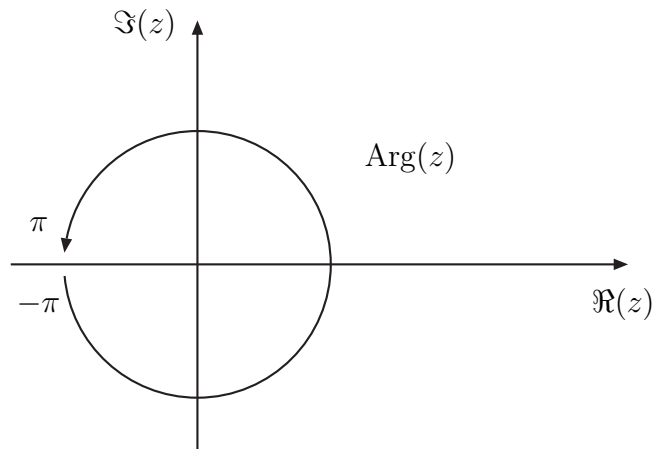
$$r = |z| \geq 0, \quad (1.78)$$

$$\theta = \arg(z). \quad (1.79)$$

L'argomento di  $z$ ,  $\theta = \arg(z)$ , è in realtà definito a meno di  $2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definizione 1.2.10** Si definisce l'Argomento Principale di  $z$ ,  $\text{Arg}(z)$ , tale che

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi. \quad (1.80)$$



Si ha

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.81)$$

Come si fa a trovare  $r$  e  $\text{Arg}(z)$  sapendo la parte reale e la parte immaginaria di  $z$  (cioè  $x$  e  $y$ )? Dobbiamo ricorrere alla formula inversa delle coordinate polari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.82)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1.83)$$

tenendo conto del fatto che l'arcotangente ha come codominio l'intervallo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e non  $(-\pi, \pi)$ . Quindi per raggiungere tutti i quadranti del piano, dovremo aggiungere (o levare) a mano  $\pi$ .

Infatti, se  $x$  e  $y$  sono concordi,  $y/x > 0$  e quindi l'argomento di un punto nel primo quadrante ( $0 < \text{Arg}(z) < \pi/2$ ) o del terzo quadrante ( $x < 0, y < 0$ ) vengono mappati dall'arcotangente nello stesso valore. L'argomento del punto nel terzo quadrante sarà però dato da  $\arctan y/x - \pi$ . Così come nel caso  $x$  e  $y$  siano discordi, l'argomento di un punto nel secondo quadrante sarà dato da  $\arctan y/x + \pi$ .

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0, (x, y) \neq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (1.84)$$

Se  $z = 0$  l'argomento di  $z$  non è definito.

## Prodotto

Alla luce della rappresentazione polare, riprendiamo in considerazione il prodotto fra due numeri complessi. Se

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad (1.85)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \quad (1.86)$$

si avrà

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)], \quad (1.87)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad (1.88)$$

ovvero,  $z = z_1 z_2$  ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti:

$$|z| = r = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \quad (1.89)$$

$$\arg(z) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (1.90)$$

Da notare che la regola vale per l'argomento e non per l'argomento principale. Infatti, la somma può eccedere  $2\pi$ .

Questa regola si può generalizzare al prodotto di  $n$  numeri complessi. Se

$$z = z_1 z_2 \dots z_n, \quad (1.91)$$

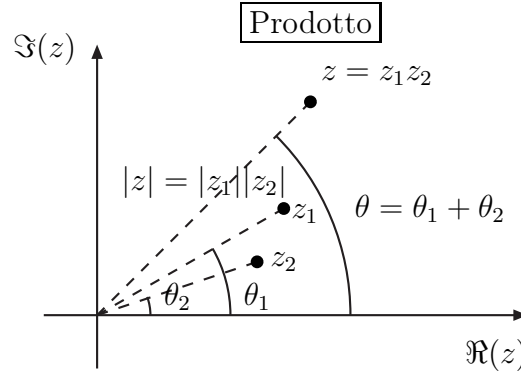
allora si ha:

$$|z| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|, \quad (1.92)$$

$$\arg(z) = \sum_i \arg(z_i). \quad (1.93)$$

L'argomento principale del prodotto si può trovare prendendo  $\sum_i \arg(z_i)$  modulo  $2\pi$ .

Così si capisce bene la rappresentazione d prodotto di due (o più) numeri complessi nel piano di Argand-Gauss:



### Inverso

Dato  $z = x + iy$ , si ha:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1.94)$$

da cui

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad (1.95)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\arg(z). \quad (1.96)$$

Da cui il rapporto di due numeri complessi si può trovare facilmente come

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad (1.97)$$

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.98)$$

$$\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \quad (1.99)$$

### Formula di Eulero

Nel 1740 Eulero dà la sua formula esponenziale per rappresentare i numeri complessi. Si ha

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}. \quad (1.100)$$

Per avere una dimostrazione di tale formula rimandiamo al capitolo sulle funzioni analitiche. Per il momento possiamo dare una giustificazione della (1.100) come segue.

Per l'esponenziale reale,  $e^x$ , si ha

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}. \quad (1.101)$$



Supponiamo che questa regola di derivazione sia valida anche nel caso complesso e che in particolare valga anche per  $a = i$ , con  $i^2 = -1$ . Allora

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i e^{i\theta}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} e^{i\theta} = -e^{i\theta}, \dots \quad (1.102)$$

Sviluppiamo l'esponenziale in serie di Taylor. Avremo

$$r e^{i\theta} = r \left( 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right), \quad (1.103)$$

$$= r \left[ \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \right]. \quad (1.104)$$

La prima serie è quella che individua il  $\cos \theta$ , mentre la seconda il  $\sin \theta$ , provando così la (1.100).

### 1.2.4 Potenza $n$ -esima

Utilizzando la formula di Eulero, si avrà

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad (1.105)$$

che per  $r = 1$  dà la cosiddetta formula di de Moivre

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (1.106)$$

### 1.2.5 Radice $n$ -esima

Per  $\forall z \in \mathbb{C}$  si dice *radice  $n$ -esima* di  $z$  il numero complesso  $w \in \mathbb{C}$ , tale che

$$w^n = z. \quad (1.107)$$

Se  $w = \rho e^{i\phi}$  si deve quindi avere

$$\rho^n = |z|, \quad (1.108)$$

$$n\phi = \text{Arg}(z) + 2k\pi. \quad (1.109)$$

Quindi

$$w = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left( \frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n} \right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.110)$$

Come si vede, la  $\sqrt[n]{z}$  ha  $n$  soluzioni distinte, con lo stesso modulo,  $\sqrt[n]{|z|}$ , e argomenti distinti fin quando  $k = n$ . Da questo valore in poi si riottengono gli stessi argomenti.

### Esempio: radice quadrata

Dato  $z = \rho e^{i\theta}$  si trova

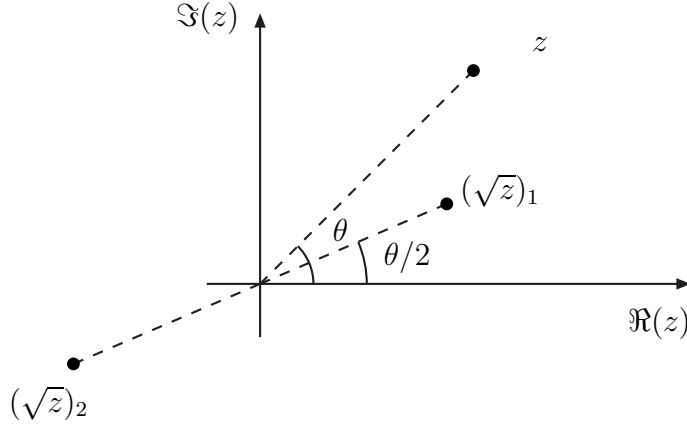
$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{2}} = \sqrt{\rho} e^{i \frac{\theta}{2}} e^{ik\pi}. \quad (1.111)$$

$e^{ik\pi}$  vale 1 per  $k = 0$  e -1 per  $k = 1$ . Da  $k = 2$  in poi si riottengono gli stessi valori, +1 e -1. Quindi le due radici distinte sono

$$(\sqrt{z})_1 = \sqrt{\rho} e^{i \frac{\theta}{2}}, \quad (1.112)$$

$$(\sqrt{z})_2 = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi} = -\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad (1.113)$$

che si possono rappresentare sul piano complesso come segue:



### Esempio: radice cubica

Dato  $z = \rho e^{i\theta}$  si trova

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}}e^{i\frac{2}{3}k\pi}. \quad (1.114)$$

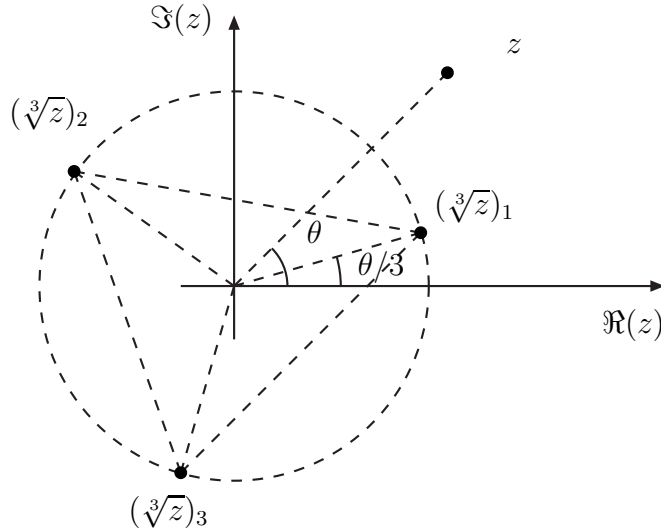
In questo caso la radice ha 3 valori distinti, per  $k = 0, 1, 2$ . Da  $k = 3$  si riottengono gli stessi valori. Queste tre radici hanno lo stesso modulo,  $\sqrt[3]{\rho}$ , e argomenti intervallati di  $2/3k\pi$ . Si avrà

$$(\sqrt[3]{z})_1 = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}}, \quad (1.115)$$

$$(\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{\rho}e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\pi)}, \quad (1.116)$$

$$(\sqrt[3]{z})_3 = \sqrt[3]{\rho}e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{4}{3}\pi)}, \quad (1.117)$$

Le tre radici si dispongono, quindi, su una circonferenza di raggio  $\sqrt[3]{\rho}$  e formano i tre vertici di un triangolo equilatero



Le radici  $n$ -esime, si disporranno quindi su una circonferenza di raggio  $\sqrt[n]{|z|}$  e occuperanno i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza.

## 1.2.6 Radici dell'unità

Di notevole importanza sono le radici  $n$ -esime dell'unità,  $\sqrt[n]{1}$ . Si ha

$$z = 1 = e^{i2k\pi}, \quad (1.118)$$

da cui

$$z_k = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.119)$$

Quindi per esempio le radici seste dell'unità sono

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, \dots, 5, \quad (1.120)$$

ovvero

$$z_k = \left\{ 1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}, \quad (1.121)$$

vertici di un esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio unitario.

## 1.3 Disuguaglianze

Per le dimostrazioni che seguiranno, abbiamo bisogno della *disuguaglianza triangolare*.

Supponiamo che

$$|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2, \quad \text{con } |z|, \Re(z), \Im(z) \in \mathbb{R}. \quad (1.122)$$

Siccome  $\mathbb{R}$  è un insieme ordinato, si può scrivere che

$$|\Re(z)| \leq |z|, \quad (1.123)$$

$$|\Im(z)| \leq |z|. \quad (1.124)$$

Allora

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}), \quad (1.125)$$

$$= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2, \quad (1.126)$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2, \quad (1.127)$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2, \quad (1.128)$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2, \quad (1.129)$$

da cui segue che

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (1.130)$$

la disuguaglianza triangolare (nel triangolo, un lato è minore o uguale alla somma degli altri due).

La disuguaglianza triangolare si può estendere alla somma di  $n$  numeri complessi

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|. \quad (1.131)$$

Dalla disuguaglianza triangolare seguono altre disuguaglianze. Si ha

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \quad (1.132)$$

da cui

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|. \quad (1.133)$$

Analogamente si ha anche

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| = |z_1 - z_2| + |z_1|, \quad (1.134)$$

da cui

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|. \quad (1.135)$$

Dalle (1.133) e (1.135) si evince che

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.136)$$

## 1.4 Alcuni Esercizi

### 1.4.1 Esercizio

Porre in forma “canonica” ( $x + iy$ ) i seguenti numeri complessi:

$$\frac{1}{-1 + 3i}, \quad \frac{2 + i}{2 - i}, \quad \frac{i}{2 - 3i}. \quad (1.137)$$

Basta moltiplicare e dividere per il complesso coniugato del denominatore:

$$\frac{1}{-1 + 3i} = \frac{1}{-1 + 3i} \frac{1 + 3i}{1 + 3i} = -\frac{1 + 3i}{10}. \quad (1.138)$$

$$\frac{2 + i}{2 - i} = \frac{2 + i}{2 - i} \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{(2 + i)^2}{5} = \frac{3 + 4i}{5}. \quad (1.139)$$

$$\frac{i}{2 - 3i} = \frac{i}{2 - 3i} \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = -\frac{3 - 2i}{13}. \quad (1.140)$$

### 1.4.2 Esercizio

Calcolare le seguenti radici di numeri complessi:

$$\sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}, \quad \sqrt{1 + i}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{-i}. \quad (1.141)$$

Per calcolare le radici complesse conviene mettere il numero in forma polare.

1.  $\sqrt{i}$ .

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}} = e^{i\frac{\pi}{4} + k\pi i}, \quad (1.142)$$

quindi si hanno due soluzioni distinte, per esempio con  $k = 0, 1$ , ovvero

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}. \quad (1.143)$$

Se vogliamo rimanere con argomento compreso fra  $-\pi$  e  $\pi$ , possiamo riscrivere la seconda radice come

$$z_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}. \quad (1.144)$$

2.  $\sqrt{-i}$ .

$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}} = e^{-i\frac{\pi}{4} + k\pi i}, \quad (1.145)$$

quindi si hanno due soluzioni distinte, per esempio con  $k = 0, 1$ , ovvero

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}. \quad (1.146)$$

3.  $\sqrt{1+i}$ . Si ha che

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\arctan(y/x)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.147)$$

Quindi

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8} + k\pi i}, \quad (1.148)$$

quindi si hanno due soluzioni distinte, per esempio con  $k = 0, 1$ , ovvero

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}. \quad (1.149)$$

Se vogliamo rimanere con argomento compreso fra  $-\pi$  e  $\pi$ , possiamo riscrivere la seconda radice come

$$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}. \quad (1.150)$$

4. ....

### 1.4.3 Esercizio

Mettere in forma polare i seguenti numeri complessi:

$$1+i, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}. \quad (1.151)$$

Per fare ciò ci rifacciamo alla definizione

$$z = x + iy = |z|e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.152)$$

Quindi

1.  $1+i$ .

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \phi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \implies 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.153)$$

2.  $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ .

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \phi = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} \implies \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \quad (1.154)$$

3. ....

### 1.4.4 Esercizio

Esprimere  $\cos(3\phi)$  in termini di  $\sin(\phi)$  e  $\cos(\phi)$ .

Ovviamente si possono utilizzare le formule trigonometriche trovando:

$$\cos(3\phi) = \cos(\phi + 2\phi) = \cos(\phi)\cos(2\phi) - \sin(\phi)\sin(2\phi), \quad (1.155)$$

$$= \cos(\phi)(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) - \sin(\phi)(2\sin(\phi)\cos(\phi)), \quad (1.156)$$

$$= \cos^3(\phi) - 3\sin^2(\phi)\cos(\phi). \quad (1.157)$$

Alternativamente possiamo utilizzare la formula di De Moivre e ottenere in un colpo solo anche il  $\sin(3\phi)$ :

$$\begin{aligned} \cos(3\phi) + i\sin(3\phi) &= (\cos(\phi) + i\sin(\phi))^3, \\ &= \cos^3(\phi) + 3i\cos^2(\phi)\sin(\phi) - 3\sin^2(\phi)\cos(\phi) - i\sin^3(\phi), \end{aligned} \quad (1.158)$$

da cui

$$\cos(3\phi) = \cos^3(\phi) - 3\sin^2(\phi)\cos(\phi), \quad (1.159)$$

$$\sin(3\phi) = -\sin^3(\phi) + 3\cos^2(\phi)\sin(\phi). \quad (1.160)$$

### 1.4.5 Esercizio

Mostrare che  $\forall z$  tale che  $|z| = 1$  può esser messo nella forma

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.161)$$

Se  $|z| = 1$  si ha che  $z = e^{i\phi}$  e, se  $z, \bar{z} \neq 1$

$$z = \frac{z + 1}{\bar{z} + 1} \quad (\text{baste moltiplicare a dx e sx per } \bar{z} + 1), \quad (1.162)$$

$$= \frac{1 + e^{i\phi}}{1 + e^{-i\phi}} = \frac{1 + \cos\phi + i\sin\phi}{1 + \cos\phi - i\sin\phi}, \quad (1.163)$$

$$= \frac{1 + i\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}}{1 - i\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}}. \quad (1.164)$$

Ponendo

$$t = \frac{\sin\phi}{1 + \cos\phi}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}, \quad (1.165)$$

si ha l'assunto.

In generale, quindi, un numero sul cerchio unitario può anche essere scritto come rapporto di un numero complesso e del suo complesso coniugato

$$z = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{|a|e^{i\theta}}{|a|e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}, \quad (1.166)$$

dove  $a = x + iy$  e  $\theta = \arctan(y/x)$ .

### 1.4.6 Esercizio

Calcolare il seguente numero complesso:

$$\sum_{k=1}^{19} (1+i)^k. \quad (1.167)$$

Utilizziamo la somma della progressione geometrica

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad (1.168)$$

che può essere provata semplicemente moltiplicando ambo i membri della (1.168) per  $1 - z$ . Quindi si ha

$$\sum_{k=1}^{19} (1+i)^k = -1 + \frac{1 - (1+i)^{20}}{1 - 1 - i} = -1 + \sum_{k=0}^{19} (1+i)^k = -1 + i \left[ 1 - \left( \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{20} \right] = \dots = -1 + i1025. \quad (1.169)$$

### 1.4.7 Esercizio

Calcolare il  $|z|$  dove

$$z = \frac{ie^{-1-5i}(1+i)^3}{1+3i}. \quad (1.170)$$

Utilizzando le proprietà dei numeri complessi si può arrivare rapidamente alla soluzione

$$|z| = \left| \frac{ie^{-1-5i}(1+i)^3}{1+3i} \right| = \frac{|ie^{-1-5i}(1+i)^3|}{|1+3i|} = \frac{|i||e^{-1}||e^{-5i}||1+i|^3}{|1+3i|} = \frac{e^{-1}2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}e}. \quad (1.171)$$

### 1.4.8 Esercizio

Provare che

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1, \quad (1.172)$$

(con  $\bar{a}b \neq 1$ ) se  $|a| = 1$  o  $|b| = 1$ . E che

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1, \quad (1.173)$$

se  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$ .

Se  $|a| = 1$  si ha

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a| \left| 1 - \frac{b}{a} \right|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|a| \left| 1 - \frac{\bar{a}b}{\bar{a}a} \right|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|a| |1-\bar{a}b|}{|1-\bar{a}b|} = |a| = 1. \quad (1.174)$$

Se  $|b| = 1$  si ha

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|b| \left| \frac{a}{b} - 1 \right|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|b| \left| 1 - \frac{\bar{b}a}{\bar{b}b} \right|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|b| |1-\bar{b}a|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|b| |1-\bar{a}b|}{|1-\bar{a}b|} = |b| = 1. \quad (1.175)$$

Supponiamo ora che  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$ . Allora

$$\frac{|a - b|}{|1 - \bar{a}b|} < 1 \quad (1.176)$$

implica che

$$\frac{|a - b|^2}{|1 - \bar{a}b|^2} = \frac{(a - b)(\bar{a} - \bar{b})}{(1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b})} < 1, \quad (1.177)$$

ovvero

$$(a - b)(\bar{a} - \bar{b}) < (1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b}). \quad (1.178)$$

Sviluppando:

$$|a|^2 - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^2 < 1 - a\bar{b} - b\bar{a} + |a|^2|b|^2, \quad (1.179)$$

ovvero

$$|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2, \quad (1.180)$$

Se  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$  si ha per esempio che

$$|a|^2(|a|^2 + |b|^2) < |a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2, \quad (1.181)$$

ovvero

$$|a|^4 < 1, \quad (1.182)$$

che è verificata. Oppure

$$|b|^2(|a|^2 + |b|^2) < |a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2, \quad (1.183)$$

ovvero

$$|b|^4 < 1, \quad (1.184)$$

anch'essa verificata.



# Capitolo 2

## Appunti sulle FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

*In questo capitolo definiamo e studiamo le funzioni di una variabile complessa.*

### 2.1 Introduzione

Per introdurre la teoria delle funzioni di una variabile complessa, dobbiamo definire “trasportando” ai complessi una serie di concetti che abbiamo definito a suo tempo per lo studio delle funzioni di variabile reale. In particolare dobbiamo specificare il dominio e il codominio di tali funzioni e poi riportare ai complessi il concetto di limite, continuità e derivabilità.

### 2.2 Dominio ...

Se vogliamo definire il dominio di una funzione di variabile complessa, ma anche il concetto di limite, dobbiamo introdurre il concetto di spazio metrico (in realtà per alcune cose basta utilizzare uno spazio topologico ...).

**Definizione 2.2.1** Si dice **spazio metrico** la coppia  $(S, d)$  dove  $S$  è un insieme e  $d$  un'applicazione  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , da  $S$  cartesiano  $S$  nei reali, detta **distanza**, tale che se  $x_i \in S$  si abbia:

1.  $d(x_i, x_j) \geq 0$  e  $= 0$  se e solo se  $x_i = x_j$ ;
2.  $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$  ;
3.  $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$  (disuguaglianza triangolare)

**Proprietà 2.2.2**  $(\mathbb{C}, d)$ , dove  $\mathbb{C}$  è l'insieme dei numeri complessi e  $d$  la distanza Euclidea

$$d(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z'))^2 + (\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z'))^2}, \quad (2.1)$$

con  $z, z' \in \mathbb{C}$ , è uno spazio metrico.

Vogliamo adesso arrivare alla definizione di sottoinsiemi aperti e chiusi di  $\mathbb{C}$ . Per far questo, definiamo un disco aperto e un disco chiuso (utilizzando la metrica) e poi usiamo il disco aperto per definire un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  che sia aperto.

**Definizione 2.2.3** Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r \in \mathbb{R}$  con  $r > 0$ . Si dice **disco aperto** centrato in  $z_0$  l'insieme degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$|z - z_0| < r \quad (2.2)$$

e si indica con  $D(z_0, r)$ . Si dice invece **disco chiuso** centrato in  $z_0$  l'insieme degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$|z - z_0| \leq r \quad (2.3)$$

e si indica con  $\overline{D}(z_0, r)$ .

Allora

**Definizione 2.2.4** se  $U \subset \mathbb{C}$  si dice che  $U$  è **aperto** se per  $\forall z \in U \exists \epsilon > 0$  tale che il disco aperto centrato in  $z$  di raggio  $\epsilon$  è contenuto in  $U$ ,  $D(z, \epsilon) \subset U$ .

Allora si può dimostrare che

**Teorema 2.2.5** L'unione di più aperti è un aperto. L'intersezione di più aperti è un aperto.

**Definizione 2.2.6**  $U \subset \mathbb{C}$  si dice **chiuso** se il suo complemento,  $U^c = \mathbb{C} - U$ , è aperto in  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.2.7** Si dice che  $z_0$  è un punto di frontiera di  $U \subset \mathbb{C}$ , se  $\forall D(z_0, r)$  con  $r > 0$  contiene sia punti di  $U$  che punti non appartenenti ad  $U$ . L'insieme dei punti di frontiera di  $U$  si indica con  $\partial U$ .

**Definizione 2.2.8** Si dice che  $z_0$  è un **punto interno** di  $U$  se  $\exists D(z_0, \epsilon)$ , con  $\epsilon > 0$ , tale che  $D(z_0, \epsilon) \subset U$ .

**Definizione 2.2.9** Si dice **chiusura** di  $U$ , e si indica con  $\overline{U}$ , l'unione di  $U$  e della sua frontiera

$$\overline{U} = U \cup \partial U. \quad (2.4)$$

Allora  $U$  è chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Si può dimostrare che

**Teorema 2.2.10** L'unione di più chiusi è un chiuso. L'intersezione di più chiusi è un chiuso.

**Definizione 2.2.11** Si dice che  $S \subset \mathbb{C}$  è **limitato** se  $\exists$  un  $c > 0$  reale, tale che  $|z| < c$  per  $\forall z \in S$  (ovvero se tutto  $S$  è incluso in un disco di raggio  $c$ ).

**Definizione 2.2.12** Siano  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se  $t \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq t \leq 1$  si indichi il segmento di retta che congiunge  $z$  a  $w$  come

$$\{z + t(w - z), 0 \leq t \leq 1\} = [z, w]. \quad (2.5)$$

Allora si dice **poligonale** da  $z$  a  $w$  l'insieme  $P = \bigcup_{k=1}^n [z_k, z_{k+1}]$  con  $z_n \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, n, \in \mathbb{N}$  e  $z_1 = z$ ,  $z_n = w$ .

Allora

**Definizione 2.2.13** Un insieme aperto si dice **connesso** se per  $\forall z, w \in S$ ,  $\exists P$  (poligonale) che connette  $z$  a  $w$  e che è interamente contenuta in  $S$ .

**Esempio 1.** Un disco  $U = D(0, r)$  con  $r > 0$ , per esempio  $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| < 1\}$ , è aperto e connesso.

**Esempio 2.** Una corona circolare,  $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } 1 < |z| < 2\}$  è un aperto connesso.

**Esempio 3.** L'unione di più aperti non è detto che sia connesso. Per esempio  $A = \cup A_n$  con  $A_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - n| < 1/3\}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , è aperto ma non connesso.

Normalmente, quando parleremo di “dominio” della funzione  $f(z)$  ci riferiremo ad un aperto connesso.

## 2.3 Funzioni di una variabile complessa

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto e connesso e sia  $f$  una funzione da  $U$  in  $\mathbb{C}$

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (2.6)$$

tale che per  $\forall z \in U$  si abbia  $f(z) = w \in D \subset \mathbb{C}$ . La  $f(z)$  è una funzione di una variabile complessa.  $U$  sarà il dominio di  $f$ , mentre  $D = f(U)$  sarà l'immagine di  $U$  rispetto ad  $f$ .

Siccome  $w \in D \subset \mathbb{C}$ , possiamo esplicitare la parte reale e la parte immaginaria di  $f(z)$  come segue:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.7)$$

tale che

$$u(x, y) = \Re f(z), \quad (2.8)$$

$$v(x, y) = \Im f(z). \quad (2.9)$$

Parte reale e parte immaginaria di  $f(z)$  sono funzioni da  $U \subset \mathbb{C}$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 1.**  $f(z) = \bar{z}$  ha le seguenti parti reale e immaginaria

$$u(x, y) = x, \quad (2.10)$$

$$v(x, y) = -y \quad (2.11)$$

e si tratta della funzione che prende  $z$  e ne fa lo speculare rispetto all'asse dei reali,  $\Re z$ .

**Esempio 2.** Se definiamo

$$u(x, y) = -y, \quad (2.12)$$

$$v(x, y) = x, \quad (2.13)$$

si vede che

$$f(z) = -y + ix = i(x + iy) = e^{i\frac{\pi}{2}}(x + iy), \quad (2.14)$$

che corrisponde alla rotazione in senso antiorario di  $\pi/2$  del punto  $z$ .

**Esempio 3.** Se definiamo

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (2.15)$$

$$v(x, y) = 2xy, \quad (2.16)$$

si ha

$$f(z) = x^2 + y^2 + i2xy, \quad (2.17)$$

che, utilizzando le relazioni  $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$ ,  $2x = z + \bar{z}$  e  $2iy = z - \bar{z}$ , può essere riscritta in funzione di  $z$  e  $\bar{z}$  come segue:

$$f(z) = z\bar{z} + 2i \frac{(z + \bar{z})}{2} \frac{(z - \bar{z})}{2i} = z\bar{z} + \frac{(z^2 - \bar{z}^2)}{2}. \quad (2.18)$$

**Esempio 4.** Se consideriamo

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (2.19)$$

$$v(x, y) = 2xy, \quad (2.20)$$

si ha

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2. \quad (2.21)$$

In generale  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  può essere funzione di  $z$  e  $\bar{z}$ . Vedremo fra poco che le funzioni della sola variabile  $z$  rivestono un ruolo particolarmente importante nell'analisi complessa.

## 2.4 Limiti e continuità

Cominciamo con la definizione di limite.

**Definizione 2.4.1 Limite.** Sia  $f : U \rightarrow W$  una funzione di variabile complessa e sia  $z_0 \in U$  e  $w \in \mathbb{C}$ . Allora si dice che  $w$  è il limite di  $f(z)$  per  $z$  che tende a  $z_0$  e si scrive

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w, \quad (2.22)$$

se dato un  $\epsilon \in \mathbb{R}$  con  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\epsilon) > 0$  tale che se  $z \in U$  e  $|z - z_0| < \delta$  allora  $|f(z) - w| < \epsilon$ .

Ovviamente non è detto che  $z_0 \in U$  e  $w \in W$ . Basta che  $z_0$  sia un punto di accumulazione per  $U$  e  $w$  per  $W$ .

**Teorema 2.4.2** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0, w \in \mathbb{C}$ . Allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w, \quad (2.23)$$

se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Re f(z) = \Re w, \quad (2.24)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Im f(z) = \Im w. \quad (2.25)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$ . Allora, dato  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta$  tale che  $|f(z) - w| < \epsilon$  se  $|z - z_0| < \delta$ . Ma

$$|\Re f(z) - \Re w| = |\Re(f(z) - w)| \leq |f(z) - w| < \epsilon. \quad (2.26)$$

Quindi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \Re f(z) = \Re w. \quad (2.27)$$

Lo stesso vale per  $\Im f(z)$ .  
Viceversa, supponiamo che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Re f(z) = \Re w, \quad (2.28)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Im f(z) = \Im w, \quad (2.29)$$

allora  $|\Re f(z) - \Re w| < \epsilon_1$  e  $|\Im f(z) - \Im w| < \epsilon_2$ , ma

$$|f(z) - w| = |\Re(f(z) - w) + i\Im(f(z) - w)| \leq |\Re(f(z) - w)| + |\Im(f(z) - w)| < \epsilon, \quad (2.30)$$

dove si è preso  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ . Quindi  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$ .

**Teorema 2.4.3** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni di variabile complessa,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $z_0 \in U$  e  $w_f, w_g \in \mathbb{C}$ . Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_f$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_g$ , allora*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = w_f \pm w_g, \quad (2.31)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_f w_g, \quad (2.32)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_f}{w_g}, \quad \text{se } w_g \neq 0. \quad (2.33)$$

*Dimostrazione.* Si utilizza sempre la disuguaglianza triangolare. Per esempio, sia  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_f$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_g$ . Allora

$$|(f(z) + g(z)) - (w_f + w_g)| = |(f(z) - w_f) + (g(z) - w_g)| \leq |(f(z) - w_f)| + |(g(z) - w_g)| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon. \quad (2.34)$$

La stessa cosa vale per la differenza.

Per il prodotto si può avere

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - w_f w_g| &= |(f - w_f)(g - w_g) + f w_g + g w_f - 2w_f w_g|, \\ &\leq |(f - w_f)(g - w_g) + (f - w_f)w_g + (g - w_g)w_f|, \\ &\leq |(f - w_f)(g - w_g)| + |(f - w_f)w_g| + |(g - w_g)w_f|, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$< \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 w_g + \epsilon_2 w_f < \epsilon. \quad (2.36)$$

La stessa cosa vale per il rapporto.

**Definizione 2.4.4 Continuità.** *Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice che  $f(z)$  è continua in  $z_0 \in U$  se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .  $f$  è continua in  $U$  se è continua per  $\forall z \in U$ .*

Allora valgono i seguenti risultati.

**Teorema 2.4.5** *Sia  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , continua in  $S_1$  e  $g : S_2 \rightarrow S_3$  continua in  $S_2$ . Allora  $g \circ f = g(f(z)) : S_1 \rightarrow S_3$  è continua.*

*Dimostrazione.* Basta tener conto della definizione di continuità e mettere insieme i limiti della funzione composta.

**Teorema 2.4.6** *Siano  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue in  $U$ . Allora  $f + g$  e  $fg$  sono continue in  $U$ . Inoltre,  $f/g$  è continua per  $\forall z \in U$  per cui  $g(z) \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione basta sfruttare la definizione di limite.

**Teorema 2.4.7** *Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in U$ . La  $f$  è continua in  $z_0$  se e solo se  $\Re f$  e  $\Im f$  sono continue in  $z_0$ .*

*Dimostrazione.* Sfruttare lo stesso ragionamento dei limiti usando la definizione di continuità.

## 2.5 Funzioni analitiche

Abbiamo visto come una funzione di variabile complessa dipenda in generale da  $x$  e  $y$  tramite le sue parti reale e immaginaria. Di conseguenza,  $f$  potrà essere espressa in funzione di  $z$  e  $\bar{z}$  (vedi esempi nella sezione precedente). C'è però una classe di funzioni di variabile complessa molto importanti per le quali la dipendenza si riduce alla sola  $z = x + iy$ . Queste funzioni sono le *funzioni analitiche*, per le quali si estende a  $\mathbb{C}$  il concetto di derivabilità.

**Definizione 2.5.1** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice che  $f$  è derivabile in  $z_0 \in U$  se  $\exists$  il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0), \quad (2.37)$$

con  $h \in \mathbb{C}$ .

**[NB.]** Questo limite del rapporto incrementale è genuinamente in  $\mathbb{C}$ ! Cioè stiamo richiedendo che ci si possa avvicinare a 0 da qualunque direzione in  $\mathbb{C}$ . Ciò ha delle conseguenze molto importanti e come vedremo subito pone dei vincoli stringenti sulla parte reale e sulla parte immaginaria di  $f(z)$ .

**Teorema 2.5.2** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile in  $z_0 \in U$ , allora è anche continua in  $z_0$ .

(Il viceversa ovviamente non è vero).

*Dimostrazione.* Se  $f(z)$  è derivabile in  $z_0$  si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0), \quad (2.38)$$

ma allora, siccome il limite del prodotto è il prodotto dei limiti si ha anche

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right) \lim_{h \rightarrow 0} h = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(z_0 + h) - f(z_0)). \quad (2.39)$$

Quindi  $f(z)$  è continua in  $z_0$ .

**Teorema 2.5.3** Se  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono derivabili in  $z_0 \in U$ , allora:

1.  $(f + g)(z)$  è derivabile in  $z_0$  e si ha  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ ;
2.  $(fg)(z)$  è derivabile in  $z_0$  e si ha  $(fg)'(z_0) = (f'g)(z_0) + (fg')(z_0)$ ;
3.  $(f/g)(z)$  è derivabile se  $g(z_0) \neq 0$  e si ha  $(f/g)'(z_0) = (f'g - fg')(z_0)/g^2(z_0)$ .

*Dimostrazione.*

1. Sfruttando le proprietà dei limiti si ha:

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f + g)(z) - (f + g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))}{z - z_0}, \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} + \frac{(g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \right) = f'(z_0) + g'(z_0). \end{aligned} \quad (2.40)$$

2. Si ha

$$\begin{aligned}
(fg)'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h)g(z_0 + h) - f(z_0)g(z_0)}{h}, \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h)g(z_0 + h) - f(z_0)g(z_0 + h) + f(z_0)g(z_0 + h) - f(z_0)g(z_0)}{h}, \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} g(z_0 + h) + f(z_0) \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} \right), \\
&= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \tag{2.41}
\end{aligned}$$

3. Partiamo con la derivata dell'inverso della funzione. Sfruttando le proprietà dei limiti si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(z_0+h)} - \frac{1}{g(z_0)}}{h}, \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} \frac{1}{g(z_0 + h)g(z_0)} \right) = -\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Allora

$$(f/g)'(z_0) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0) \left(\frac{1}{g(z_0)}\right) + f(z_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \frac{(f'g - fg')(z_0)}{g^2(z_0)}. \tag{2.43}$$

**Teorema 2.5.4** Se  $f : U \rightarrow V$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  e inoltre  $f(z)$  è derivabile in  $z_0 \in U$  e  $g(z)$  è derivabile in  $f(z_0)$ , allora  $g(f(z)) = (g \circ f)$  è derivabile in  $z_0$  e si ha  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

*Dimostrazione.* Possiamo riscrivere il limite del rapporto incrementale come segue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2.44}$$

Sappiamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0), \tag{2.45}$$

ovvero  $f(z_0 + h) - f(z_0)$  è un infinitesimo del primo ordine in  $h$  che possiamo scrivere come

$$f(z_0 + h) - f(z_0) \simeq f'(z_0)h = k, \tag{2.46}$$

o anche, ponendo  $f(z_0) = y_0$ , come

$$f(z_0 + h) \simeq y_0 + k. \tag{2.47}$$

Quando  $h \rightarrow 0$  anche  $k \rightarrow 0$  e  $f(z + h) \rightarrow f(z)$  essendo  $f$  derivabile e quindi continua in  $z$ . Allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = g'(f(z_0))f'(z_0). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

**Teorema 2.5.5** Sia  $f : D \rightarrow V$  con  $D$  e  $V$  aperti e connessi di  $\mathbb{C}$ . Sia  $w = f(z)$  e  $f$  biunivoca con funzione inversa  $f^{-1}(w) = z$  continua in  $V = f(D)$ . Allora se  $f$  è derivabile in  $z \in D$  e  $f'(z) \neq 0$ ,  $f^{-1}$  è derivabile in  $w = f(z)$  e la sua derivata è

$$\left. \frac{d}{dw} f^{-1}(w) \right|_{w=f(z)} = \frac{1}{f'(z)}. \quad (2.49)$$

*Dimostrazione.*  $f$  è biunivoca. Quindi  $w = f(z)$  e  $w' = f(z')$  sono due numeri complessi diversi se  $z \neq z'$ . Allora

$$\frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} = \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \frac{1}{\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}}. \quad (2.50)$$

Poiché  $f^{-1}$  è continua in  $V = f(D)$ , si ha che

$$\lim_{w' \rightarrow w=f(z)} f^{-1}(w') = f^{-1}(w) = f^{-1}(f(z)), \quad (2.51)$$

cioè quando  $w' \rightarrow w = f(z)$  in  $V$ , si ha che  $z' \rightarrow z$  in  $D$ . Allora

$$\left. \frac{d}{dw} f^{-1}(w) \right|_{w=f(z)} = \lim_{w' \rightarrow w} \frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}} = \frac{1}{f'(z)}. \quad (2.52)$$

**Definizione 2.5.6** Una funzione  $f(z)$  sul dominio  $U$  è detta **analitica** (o **olomorfa**) in  $U$  se è derivabile (nel senso della derivata complessa definita in questa sezione) in  $\forall z \in U$ . Si dice che la funzione  $f(z)$  è analitica nel punto  $z_0$ , se è derivabile in un intorno di  $z_0$ . (NB. L'analiticità ha bisogno di derivabilità in un intorno ...).

## 2.5.1 Funzioni analitiche e condizioni di Cauchy-Riemann

Riprendiamo adesso la definizione di derivabilità in  $\mathbb{C}$ . Abbiamo definito la derivata con il seguente limite del rapporto incrementale

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (2.53)$$

Questa definizione è abbastanza restrittiva. Infatti, stiamo dicendo che la derivabilità nel punto  $z_0$  viene fatta con un  $h$  che può tendere a 0 in qualsiasi modo, da qualsiasi direzione nel piano  $\mathbb{C}$ !! Potremo quindi scegliere per esempio due “percorsi” lungo i quali  $h \rightarrow 0$  e le derivate trovate in entrambi i casi dovranno essere uguali.

Per capire quali conseguenze abbia questa definizione sulla struttura di  $f(z)$  consideriamo due casi particolari. Nel primo caso  $h$  tende a 0 sulla retta dei reali,  $h = (x - x_0) + iy_0$  per  $x \rightarrow x_0$ . Nel secondo caso invece  $h$  tende a zero dall'asse immaginario,  $h = x_0 + i(y - y_0)$  per  $y \rightarrow y_0$ .

Nel primo caso si ha:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{[u(x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0}. \quad (2.54)$$

Facendo il limite per  $z \rightarrow z_0$  si ottiene

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \quad (2.55)$$



Nel secondo caso si ha:

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)}, \\ &= \frac{[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{(y - y_0)} - i \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)]}{(y - y_0)}.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Facendo il limite per  $z \rightarrow z_0$  si ottiene

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0). \quad (2.57)$$

Siccome le due espressioni devono essere uguali, si hanno le cosiddette **equazioni di Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0). \quad (2.59)$$

Quindi, se  $f(z)$  è analitica (e quindi derivabile) in  $z_0$  la sua parte reale e la sua parte immaginaria devono soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann in  $z_0$ .

Si può dimostrare anche il viceversa, sotto l'aggiuntiva ipotesi che le derivate parziali di  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  siano continue in  $z_0$ , ovvero che se  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono differenziabili in  $z_0$ , con derivate continue e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann allora  $f(z) = u + iv$  è derivabile in  $z_0$  (nel senso della (2.53)). Infatti, se  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono differenziabili in  $z_0$  possiamo scrivere

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \epsilon_1, \quad (2.60)$$

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \epsilon_2, \quad (2.61)$$

con  $\xi = h + ik$  e

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\epsilon_2}{\xi} = 0. \quad (2.62)$$

Allora

$$\frac{f(z_0 + \xi) - f(z_0)}{\xi} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \epsilon_1\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \epsilon_2\right)}{h + ik}, \quad (2.63)$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(h + ik) + i\frac{\partial v}{\partial x}(h + ik)}{h + ik} + \frac{\epsilon_i}{h + ik}, \quad (2.64)$$

dove abbiamo utilizzato le equazioni di CR, raccogliendo a fattore  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Prendendo il limite  $\xi \rightarrow 0$  della Eq. (2.64) otteniamo:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial}{\partial x}f(z_0). \quad (2.65)$$

Per cui  $\exists f'(z_0)$  e  $f(z)$  è derivabile in  $z_0$ .

Analogamente, raccogliendo in Eq. (2.64)  $\frac{\partial u}{\partial y}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  si ottiene anche la

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -i \frac{\partial}{\partial y} f(z_0). \quad (2.66)$$

Siccome la derivata deve essere la stessa, si deve avere

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2.67)$$

ovvero

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z_0) = 0. \quad (2.68)$$

Vediamo a cosa corrisponde la relazione (2.68). Avendo  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$  si possono invertire queste relazioni trovando

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (2.69)$$

Di conseguenza, possiamo riesprimere le derivate in  $x$  e  $y$  in termini di derivate in  $z$  e  $\bar{z}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (2.71)$$

Quindi:

$$0 = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z_0) = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0). \quad (2.72)$$

La richiesta che  $f(z)$  sia analitica è equivalente ad affermare che  $f$  non deve dipendere da  $\bar{z}$ , ma soltanto da  $z$ , nel dominio di analiticità.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

**Teorema 2.5.7** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(z)$  sia analitica in  $D \subset \mathbb{C}$  è che  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  siano differenziabili con continuità in  $\forall z \in D$  e che valgano le condizioni di Cauchy-Riemann in  $D$ .*

**Definizione 2.5.8** *Se una funzione  $f(z)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C} - \{\infty\}$ , si dice **intera**.*

**Teorema 2.5.9** *Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analitica in  $D$  e sia  $f'(z) = 0$  per  $\forall z \in D$ . Allora  $f$  è costante in  $D$ .*

*Dimostrazione.* Siccome  $f$  è analitica in  $D$ , in ogni suo punto esiste la derivata e si dovrà avere

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.73)$$

e anche

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.74)$$

Quindi per  $\forall z \in D$  si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.75)$$

Siccome  $D$  è connesso, possiamo trovare due punti,  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  in  $D$ , tali che siano collegati da una retta in  $\mathbb{C}$ :  $\{z_1 + t(z_2 - z_1), 0 \leq t \leq 1\}$  con  $t$  parametro reale.

La differenza di  $f(z_2) - f(z_1)$  avrà le seguenti parte reale e parte immaginaria:

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int_0^1 \frac{du}{dt} dt, \quad (2.76)$$

$$v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1) = \int_0^1 \frac{dv}{dt} dt, \quad (2.77)$$

con  $u(t) = u(x(t), y(t))$  e  $v(t) = v(x(t), y(t))$ . Si ha

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = 0, \quad (2.79)$$

dove abbiamo sfruttato le (2.75). Quindi

$$u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1) \quad \text{e} \quad v(x_2, y_2) = v(x_1, y_1). \quad (2.80)$$

Siccome questo ragionamento lo possiamo estendere a coppia a coppia ad ogni  $z \in D$ ,  $f(z)$  è costante in  $D$ .

**Esempio.** La potenza di un numero complesso

$$f(z) = z^n, \quad (2.81)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , è una funzione analitica per  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $z \in \mathbb{C}$ . Infatti

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z^n + nz^{n-1}h + \dots) - z^n}{h}, \quad (2.82)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}h + \dots \right] = nz^{n-1}, \quad (2.83)$$

quindi la derivata esiste  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $z \in \mathbb{C}$ .

**Esempio.** Siccome la somma di funzioni analitiche è analitica, un polinomio di grado  $n$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad (2.84)$$

con  $c_k \in \mathbb{C}$ , è una funzione analitica. Per il teorema fondamentale dell'algebra, possiamo scrivere il polinomio esplicitandone gli zeri

$$P_n(z) = a_n(z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_i)^{k_i}, \quad (2.85)$$

dove si può considerare in generale il fatto che la  $i$ -esima radice abbia molteplicità  $k_i$  (cioè le  $n$  radici possono non essere tutte diverse). Si avrà  $P_n(z) \neq 0$  tranne che per  $z \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$ .

**Esempio.** Una funzione razionale è un rapporto di polinomi

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (2.86)$$

Allora  $R(z)$  è analitica tranne negli zeri di  $Q(z)$ .

## 2.5.2 Zeri di una funzione analitica

Se  $z_0 \in D$  è tale che data  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  si abbia  $f(z_0) = 0$  allora  $z_0$  è detto zero di  $f$ .

**Definizione 2.5.10** Si dice che  $z_0$  è uno zero di ordine  $n$  per  $f(z)$  se  $f(z)$  e le sue prime  $n-1$  derivate si annullano in  $z_0$ :

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{n-1}(z_0) = 0. \quad (2.87)$$

Una funzione analitica in  $D$  con uno zero di ordine  $n$  in  $z = z_0$  si potrà scrivere come

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \quad (2.88)$$

dove  $\phi(z)$  è necessariamente analitica e  $\phi(z) \neq 0$  in  $z = z_0$ .

**Teorema 2.5.11** Gli zeri di una funzione analitica sono punti isolati.

*Dimostrazione.* Infatti, data la forma in Eq. (2.88), la funzione  $\phi(z)$  essendo analitica e diversa da zero in  $z = z_0$ , sarà  $\neq 0$  in un intorno di  $z_0$ . Di conseguenza anche  $f(z)$  sarà  $\neq 0$  in quell'intorno e  $z_0$  sarà quindi uno zero isolato.

## 2.5.3 Singularità isolate di una funzione analitica

I punti di non analiticità di una funzione  $f(z)$  in  $\mathbb{C}$  sono detti singolarità per la funzione stessa. Tali singolarità possono essere di vario tipo. Come prima distinzione possiamo parlare di singolarità isolate e non isolate.

**Definizione 2.5.12** Si dice che  $z = z_0$  è una **singularità isolata** per  $f(z)$  se esiste un intorno di  $z_0$  in cui  $f(z)$  è analitica per  $z \neq z_0$ .

Se così non è, ovvero se non è possibile trovare un intorno (per quanto piccolo) di  $z_0$  in cui  $z_0$  sia l'unica singolarità, allora  $z_0$  è non isolato. Si può pensare per esempio ad un punto di accumulazione di singolarità.

Concentriamoci adesso sulle singolarità isolate. In particolare ci riferiamo allo studio di funzioni monodrome. Le funzioni polidrome, i punti di diramazione e i tagli verranno trattati più avanti nel corso.

Un punto di singolarità isolato di una funzione monodroma può essere di tre tipi:

1.  $z_0$  è un punto di singolarità **eliminabile** per  $f(z)$  se  $f(z)$  non è analitica in  $z_0$ , ma  $\exists$  finito il seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c. \quad (2.89)$$

Allora, definendo  $f(z_0) = c$  la  $f(z)$  diventa analitica in tutto  $D$ , incluso il punto  $z = z_0$ .

2.  $z_0$  è un **polo** per  $f(z)$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (2.90)$$

In particolare  $z_0$  è un **polo di ordine  $k$**  se  $\exists$  finito ( $k \neq 0$ ) il seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0. \quad (2.91)$$

3.  $z_0$  è una singolarità essenziale se non è né eliminabile né polare. In particolare per esempio se il limite della funzione non esiste in  $z_0$ .

**Esempio.** La funzione

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad (2.92)$$

ha una singolarità eliminabile in  $z = 0$ . Infatti, la funzione non è definita in  $z = 0$ , ma il suo limite sì ed è pari a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1. \quad (2.93)$$

Allora, definendo la funzione come

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases} \quad (2.94)$$

abbiamo una funzione analitica anche in  $z = 0$ .

**Esempio.** La funzione

$$f(z) = \frac{3z - 2}{(z - 1)^2(z + 1)}, \quad (2.95)$$

ha un polo doppio in  $z = 1$  e un polo singolo in  $z = -1$ .

**Esempio.** La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad (2.96)$$

ha una singolarità essenziale in  $z = 0$ .

**Teorema 2.5.13** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(z)$  abbia un polo di ordine  $n$  in  $z_0$  è che  $g(z) = 1/f(z)$  abbia uno zero di ordine  $n$  in  $z_0$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f(z)$  ha un polo di ordine  $n$  in  $z_0$

$$\phi(z) = (z - z_0)^n f(z) \quad (2.97)$$

è analitica e  $\neq 0$  in un intorno di  $z_0$  (e in  $z_0$ ). Anche la sua reciproca

$$\psi(z) = \frac{1}{\phi(z)} \quad (2.98)$$

sarà analitica e  $\neq 0$  in un intorno di  $z_0$  (e in  $z_0$ ). Allora

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \psi(z) \quad (2.99)$$

ha uno zero di ordine  $n$  in  $z = z_0$ .

Viceversa, se  $z_0$  è uno zero di ordine  $n$  di  $g(z)$  la  $f(z) = 1/g(z)$  sarà analitica in un intorno di  $z_0$  ma divergerà in  $z = z_0$  come segue:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \phi(z), \quad (2.100)$$

quindi un polo di ordine  $n$ .

**Definizione 2.5.14** *Una funzione analitica monodroma le cui uniche singolarità al finito siano dei poli si dice **meromorfa**.*

## 2.5.4 Funzioni analitiche e campi irrotazionali e solenoidali

Le funzioni analitiche di una variabile complessa sono legate alla descrizione di campi solenoidali irrotazionali in due dimensioni.

## 2.5.5 Funzioni analitiche e funzioni armoniche

Assumiamo per il momento (lo dimostreremo in seguito) che se  $f(z)$  è analitica in  $D$ , anche  $f'(z)$  sia a sua volta derivabile con continuità per  $\forall z \in D$ . Allora possiamo derivare due volte  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  rispetto a  $x$ , per esempio, ottenendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.101)$$

Quindi

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0. \quad (2.102)$$

Analogamente troviamo che

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.103)$$

ovvero:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = 0. \quad (2.104)$$

Quindi, se  $f(z)$  è analitica in  $D \subset \mathbb{C}$ , la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni armoniche, ovvero soddisfano all'equazione di Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (2.105)$$

Supponiamo adesso che sia data una funzione armonica in un dominio  $D$ . Questa può essere interpretata come la parte reale di una funzione analitica. È possibile “ricostruire” la parte immaginaria di tale funzione? Cioè, sapendo che  $u(x, y) = \Re f$  è possibile trovare  $v(x, y) = \Im f$ ? La risposta è: sì, ma a meno di una costante indeterminata, che va fissata con delle condizioni iniziali.

Cerchiamo  $v(x, y)$  tale che valgano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.106)$$

Allora, la forma differenziale

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad (2.107)$$

può essere scritta anche nel seguente modo:

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (2.108)$$

Siccome  $u(x, y)$  è nota, la sua derivata rispetto ad  $x$  e quella rispetto ad  $y$  sono ugualmente note. Possiamo sfruttare l'Eq. (2.108) per integrare  $dv$  e trovare la funzione  $v(x, y)$ . Integriamo

$dv$  lungo un cammino opportuno in  $D$ . Prendiamo una spezzata formata da un segmento fra  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y_0)$  seguito da un segmento da  $(x, y_0)$  a  $(x, y)$ . Allora avremo

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{z_0, \gamma}^z dv, \quad (2.109)$$

$$= \int_{x_0}^x dx' \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x', y_0) + \int_{y_0}^y dy' \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) (x, y'), \quad (2.110)$$

$$= \int_{x_0}^x dx' \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) (x', y_0) + \int_{y_0}^y dy' \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x, y'). \quad (2.111)$$

La conoscenza di  $u(x, y)$  determina  $v(x, y)$  a meno della costante  $v(x_0, y_0)$ .

Ovviamente, conoscendo  $v(x, y)$  si può determinare  $u(x, y)$  a meno della costante  $u(x_0, y_0)$  con lo stesso procedimento.

## 2.6 Funzioni Analitiche e Trasformazioni Conformi

Un problema importante in fisica matematica è quello di trovare una funzione armonica (soluzione dell'equazione di Laplace) in un certo dominio, che prenda dei valori dati sul bordo di questo dominio: problema di Dirichlet. In due dimensioni spaziali questo problema soddisfa un'importante proprietà, ovvero supponiamo che  $V(x, y)$  sia una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta V(x, y) = 0 \quad (2.112)$$

e supponiamo che  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  costituiscano una trasformazione del piano in sé stesso,  $(x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ , tale che  $u_x = v_y$  e  $u_y = -v_x$  (cioè  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono parte reale e parte immaginaria di una funzione analitica in un certo dominio di  $\mathbb{C}$ ). Allora il problema di Dirichlet in  $(x, y)$  corrisponde ad un nuovo problema di Dirichlet nelle nuove variabili  $(u, v)$ .

Infatti, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2.116)$$

Siccome la trasformazione

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (2.117)$$

è tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.118)$$

e le  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  quindi sono armoniche esse stesse, si ha anche

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.119)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2.120)$$

Quindi, dalle (2.114,2.116), sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann (e quindi le (2.118,2.119,2.120)), si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (2.121)$$

Vediamo a cosa corrisponde l'espressione in parentesi graffa. Siccome la  $u(x, y)$  e la  $v(x, y)$  sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria di una funzione analitica, possiamo esprimere la sua derivata come segue

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.122)$$

da cui

$$\left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} = |f'(z)|^2. \quad (2.123)$$

Allora la (2.121) si può riscrivere come

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2 \quad (2.124)$$

e si vede che là dove  $|f'(z)|^2 \neq 0$  si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0. \quad (2.125)$$

Al problema di Dirichlet in  $(x, y)$  corrisponde il problema di Dirichlet in  $(u, v)$ , ovvero, se abbiamo risolto uno dei due problemi (quindi con certe condizioni al contorno nel primo piano), abbiamo risolto anche il secondo, trasformato secondo la  $f(z) = u(x, y) + i(v(x, y))$ . La funzione analitica  $f(z)$  mappa il dominio di  $(x, y)$  in cui la  $V(x, y)$  è armonica, in un dominio in  $(u, v)$ , in cui la  $V(u, v)$  è sempre armonica, e il bordo del dominio in  $(x, y)$ , curva regolare, nel bordo del dominio in  $(u, v)$ , altra curva regolare. Quindi possiamo guardare alla trasformazione  $f(z)$  come quella trasformazione che trasforma il dominio  $D \subset \mathbb{C}$  con bordo  $\partial D$  nel dominio  $D' \subset \mathbb{C}$  con bordo  $\partial D'$ , tali che se  $V(x, y)$  è soluzione dell'equazione di Laplace in  $(x, y)$  con condizioni su  $\partial D$ ,  $V(u, v)$  è soluzione dell'equazione di Laplace in  $(u, v)$  con condizioni su  $\partial D'$  (e viceversa).

Siccome problemi di Dirichlet su domini "simmetrici" hanno soluzione più semplice (e nota), si può impostare il problema di Dirichlet in un certo dominio andando a cercare la funzione analitica che mi trasformi questo dominio in un dominio dato, per esempio un cerchio di raggio dato. Così facendo tale trasformazione trasporta automaticamente la soluzione nota per esempio in un cerchio nella soluzione nel nuovo dominio.

### 2.6.1 Funzioni analitiche come trasformazioni del piano

Consideriamo adesso la funzione  $f(z)$  come una trasformazione geometrica del piano  $\mathbb{C}$  in sé stesso e cerchiamo di individuarne le caratteristiche peculiari. Per far ciò, consideriamo una curva con traccia in un certo dominio  $D \subset \mathbb{C}$  (vedi Paragrafo 5.1)

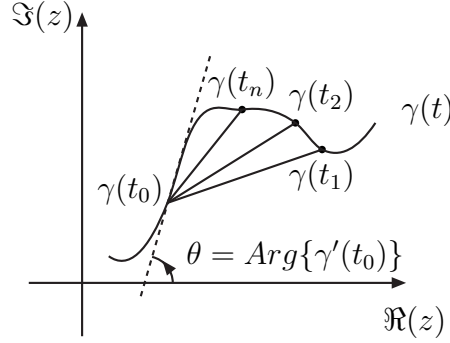
$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.126)$$



e supponiamo che  $\gamma(t)$  sia continua e derivabile per  $\forall t \in [a, b]$ . La sua derivata in  $t_0 \in [a, b]$  è un numero complesso, definito come segue

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \quad (2.127)$$

Se  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , possiamo definire la tangente alla curva  $\gamma(t)$  in  $\gamma(t_0)$  che avrà come coefficiente angolare l'argomento del numero complesso  $\gamma'(t_0)$ , che possiamo visualizzare come in figura:



Consideriamo adesso una funzione  $f(z)$  analitica in un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  tale che  $\{\gamma\} \subset D$ . Allora, tale funzione  $w = f(z)$  mappa la curva  $\gamma(t)$  in una curva nel piano  $(u, v)$ , parte reale e parte immaginaria di  $f(z)$ , data da

$$\Gamma(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) = f(\gamma(t)). \quad (2.128)$$

Se la curva  $\gamma(t)$  passa dal punto  $z_0 = \gamma(t_0)$ , con  $t_0 \in [a, b]$ , la curva  $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$  passerà dal punto  $w_0 = f(z_0) = f(\gamma(t_0))$  del piano  $(u, v)$ . Allora:

**Teorema 2.6.1** *Se  $f(z)$  è derivabile in  $z_0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ , la tangente in  $w_0$  alla curva  $\Gamma(t)$  eccede l'inclinazione  $\theta = \text{Arg}(\gamma'(t_0))$  della tangente in  $z_0$  alla curva  $\gamma(t)$  di un angolo pari a  $\text{Arg}(f'(z_0))$ .*

*Dimostrazione.* Infatti, se  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , si ha

$$\Theta = \text{Arg}(\Gamma'(t_0)) = \text{Arg} \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t_0)}{t - t_0} \right\}, \quad (2.129)$$

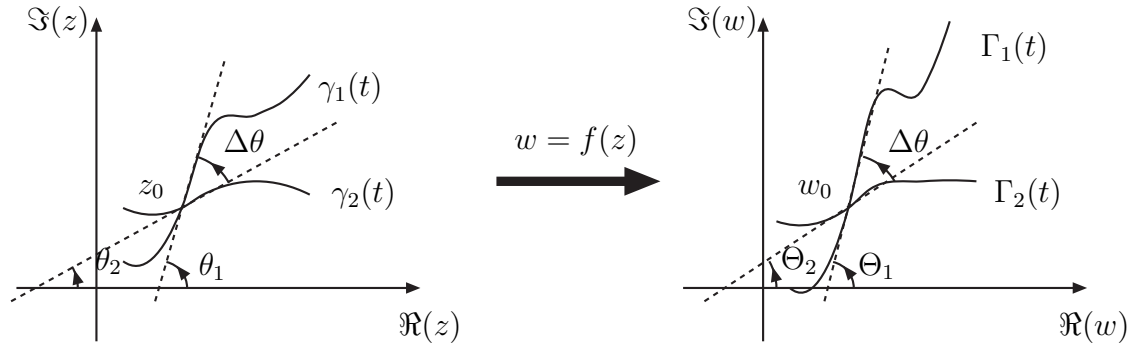
$$= \text{Arg} \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t_0)}{\gamma(t) - \gamma(t_0)} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\} = \text{Arg} \{f'(z_0) \gamma'(t_0)\}, \quad (2.130)$$

$$= \text{Arg} \{f'(z_0)\} + \text{Arg} \{\gamma'(t_0)\}, \quad (2.131)$$

$$= \theta + \text{Arg} \{f'(z_0)\}. \quad (2.132)$$

Supponiamo adesso di avere due curve,  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$ , che si intersechino in  $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ . L'angolo fra le tangenti in  $z = z_0$  sarà

$$\Delta\theta = \text{Arg}(\gamma_1'(t_0)) - \text{Arg}(\gamma_2'(t_0)) = \theta_1 - \theta_2. \quad (2.133)$$



Consideriamo adesso l'angolo fra le tangenti in  $w_0 = f(z_0)$  delle curve trasformate (tramite la  $f(z)$ ,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Si avrà per il teorema 2.6.1

$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 = [\theta_1 + \text{Arg}\{f'(z_0)\}] - [\theta_2 + \text{Arg}\{f'(z_0)\}] = \theta_1 - \theta_2 = \Delta\theta, \quad (2.134)$$

ovvero, se  $f(z)$  è analitica l'angolo fra le curve nel piano  $(x, y)$  viene preservato dalla trasformazione alle relative curve in  $(u, v)$  ovunque sia  $f'(z_0) \neq 0$ . È da notare che anche l'orientazione dell'angolo viene preservata, ovvero che  $\Delta\theta$  è l'angolo fra la tangente a  $\gamma_2$  e quella a  $\gamma_1$  preso in senso antiorario, nel piano  $(u, v)$  questo corrisponde all'angolo fra la tangente a  $\Gamma_2$  e quella a  $\Gamma_1$  ed è ancora in senso antiorario. Si dice che la trasformazione è *conforme* in  $z_0$ . Se la trasformazione invece preserva l'ampiezza dell'angolo ma non l'orientamento si dice *isogona*. Si ha il seguente teorema (già dimostrato nei punti precedenti):

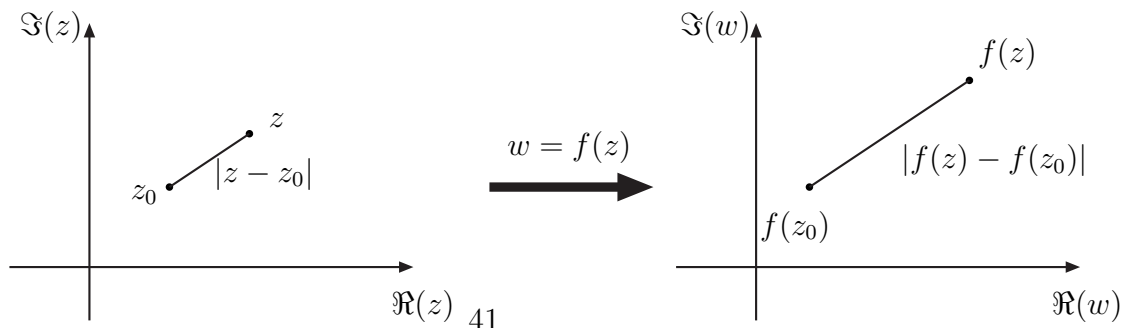
**Teorema 2.6.2** *Sia  $f(z)$  analitica in  $D \subset \mathbb{C}$ . Allora  $f(z)$  è una trasformazione conforme in tutti i punti per cui  $f'(z) \neq 0$ .*

Una trasformazione isogona, ma non conforme, si ha per esempio quando si considera il coniugato di una trasformazione conforme. Se consideriamo per esempio  $f(z) = \bar{z}$ , che non è analitica e che è il complesso coniugato della  $f(z) = z$ , si avrà una riflessione rispetto all'asse reale. Quindi, se consideriamo le due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , queste saranno trasformate in due curve speculari rispetto all'asse  $\Re(z)$ . Nell'operazione di coniugazione gli argomenti cambiano di segno. Quindi se fra la  $\gamma_1$  e la  $\gamma_2$  in  $z_0$  c'è un angolo  $\Delta\theta$ , fra la  $\Gamma_1$  e la  $\Gamma_2$  in  $w_0$  ci sarà un angolo  $-\Delta\theta$ , cioè un angolo della stessa ampiezza, ma orientato in senso orario, là dove  $\Delta\theta$  era orientato in senso antiorario.

Oltre all'argomento della derivata c'è anche un'altra quantità importante nella comprensione delle trasformazioni conformi: il modulo della derivata

$$|f'(z)| = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (2.135)$$

$|z - z_0|$  è la distanza fra i due punti  $z$  e  $z_0$ , nel piano  $(x, y)$ , mentre  $|f(z) - f(z_0)|$  è la distanza fra i due punti trasformati, corrispondenti a  $z$  e  $z_0$ , nel piano  $(u, v)$ .



Quindi possiamo interpretare  $|f'(z)|$  come un'amplificazione lineare nel punto  $z$  tramite la  $f(z)$ . Ogni punto  $w = f(z)$  avrà in generale un'amplificazione diversa e quindi le figure geometriche in  $(x, y)$  verranno distorte in  $(u, v)$ , ma saranno tali che gli angoli della figura rimangano uguali.

## 2.6.2 Punti con derivata nulla

## 2.6.3 Trasformazioni di Möbius

Le trasformazioni bilineari, o *Trasformazioni di Möbius*, sono trasformazioni conformi in tutto il piano complesso esteso, caratterizzate dall'essere invertibili (con inversa monodroma) e tali da trasformare cerchi finiti in cerchi finiti.

Una generica trasformazione di Möbius è data dalla seguente funzione

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad (2.136)$$

che ha un polo singolo in  $z = -d/c$  (punto di non analiticità della trasformazione). Eseguendo la divisione fra polinomi, si può anche riscrivere come

$$w = \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}. \quad (2.137)$$

Affinché la trasformazione (2.137) sia non banale, bisogna imporre

$$ad - cb \neq 0. \quad (2.138)$$

Se  $ad - cb = 0$ , la trasformazione trasforma il piano complesso in un punto,  $w = a/c$ . D'altronde la derivata della  $f(z)$  è

$$f'(z) = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \quad (2.139)$$

e affinché sia  $\neq 0$  si deve avere la relazione (2.138). Inoltre la derivata non esiste in  $z = -d/c$  e si annulla nel punto all'infinito. Infatti

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{(ad - cb)\zeta^2}{(c + d\zeta)^2} \rightarrow 0 \quad (2.140)$$

se  $\zeta \rightarrow 0$ . Quindi nei due punti  $z = -d/c$  e  $z = \infty$  la trasformazione in generale non è conforme (in realtà si può dimostrare che una trasformazione di Möbius è conforme anche in questi due punti e quindi è conforme in tutto  $\overline{\mathbb{C}}$ ).

Possiamo pensare alla trasformazione (2.137) come la composizione di tre trasformazioni elementari:

1. La prima trasformazione è una *traslazione*:

$$z \rightarrow \xi = z + \frac{d}{c}. \quad (2.141)$$

2. La traslazione viene seguita da un'*inversione*

$$\xi \rightarrow \eta = \frac{1}{\xi}. \quad (2.142)$$

3. La terza trasformazione è la *moltiplicazione per un numero complesso*

$$\eta \rightarrow \alpha\eta, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.143)$$

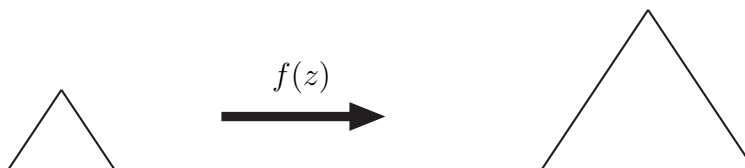
4. Infine si ripete la traslazione

Quindi ogni trasformazione di Möbius è una sequenza di queste tre trasformazioni di base.

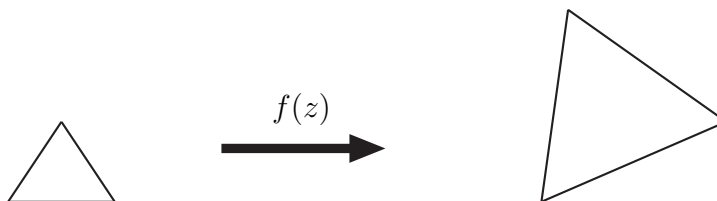
Vediamo come sono caratterizzate queste tre trasformazioni, a partire dalla terza.

### Moltiplicazione per un numero complesso

Consideriamo quindi la trasformazione  $z \rightarrow w = az$  dove in generale  $a \in \mathbb{C}$ . Supponiamo prima che  $a$  sia reale. Se così è, si ha  $|f'(z)| = |a|$  e  $\arg(f'(z)) = 0$ . Quindi abbiamo un fattore di amplificazione costante (uguale in tutto  $\mathbb{C}$ ) e nessuna rotazione, poiché l'argomento della derivata è sempre nullo. Ciò vuol dire che una figura geometrica finita nel piano  $z$  verrà trasformata nella stessa figura amplificata, ma NON distorta (né ruotata).



Se invece  $a \in \mathbb{C}$ , avremo  $a = |a|e^{i\arg(a)}$ . Quindi  $|f'(z)| = |a|$  e  $\arg(f'(z)) = \arg(a)$ . Ne consegue che tutte le distanze trasformate sono amplificate di  $|a|$  e tutte le linee sono ruotate di  $\arg(a)$ .



Ancora una volta non si ha distorsione della figura trasformata (le figure prima e dopo la trasformazione sono congruenti).

### Traslazione

Consideriamo ora la trasformazione  $z \rightarrow w = z + a$  dove  $a \in \mathbb{C}$ . Questa trasformazione equivale ad una ridefinizione dell'origine degli assi. Quindi la figura finita verrà solo traslata ma NON distorta. Inoltre siccome  $|f'(z)| = 1$  non abbiamo amplificazione.

## Inversione

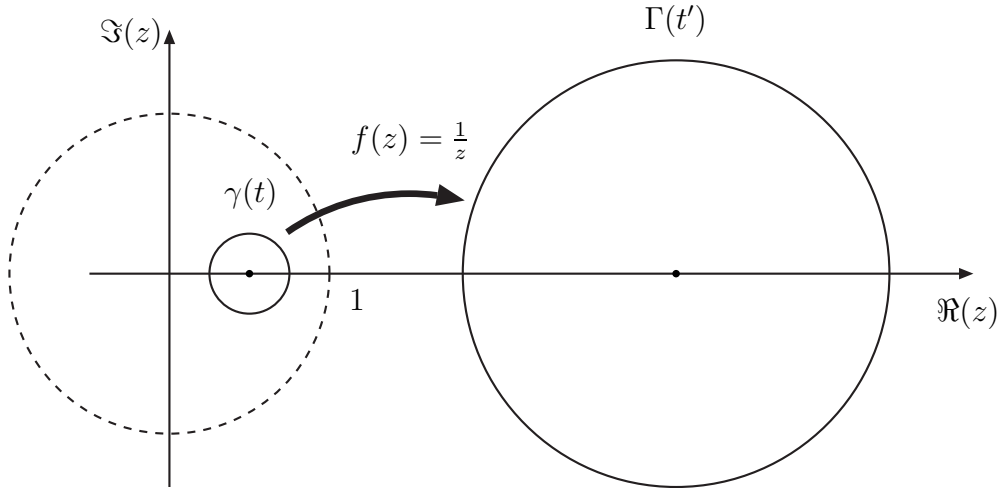
L'inversione manda  $z$  in  $w = 1/z$ . Mappa i punti dentro la circonferenza di raggio unitario nei punti esterni alla stessa e vice versa. I punti sulla circonferenza unitaria rimangono sulla circonferenza unitaria, ma l'argomento va in meno l'argomento (si identifica la semi-circonferenza nel primo e secondo quadrante con quella nel terzo e quarto quadrante). Siccome  $|f'(z)| = 1/|z|^2$ , il fattore di amplificazione dipende dal punto e quindi abbiamo una distorsione delle figure. Inoltre  $|f'(z)| = 1$  sulla circonferenza unitaria (i punti della circonferenza unitaria non hanno fattore di amplificazione), ma è  $>1$  per i punti immagine dei punti interni alla circonferenza unitaria e  $<1$  per gli esterni. Per esempio se prendiamo la circonferenza

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2.144)$$

questa verrà trasformata, tramite la  $z \rightarrow 1/z$ , nella circonferenza

$$\Gamma(t') = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it}} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}e^{it'} \quad (2.145)$$

come in figura:



## Inversa di una trasformazione di Möbius

L'inversa di una trasformazione di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius. Infatti, prendendo la (2.136) e risolvendo in  $z$  si ottiene

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (2.146)$$

per la quale dobbiamo ancora avere  $(-a)(-d) - bc = ad - bc \neq 0$ , relazione che sussiste già per la trasformazione diretta.

Inoltre la composizione di due trasformazioni di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius. Se consideriamo, infine, che l'unità è una trasformazione di Möbius (banale), si vede come le trasformazioni di Möbius formino un Gruppo.

## 2.6.4 Esempi di trasformazioni conformi

## 2.7 Alcuni Esercizi

### 2.7.1 Esercizio

Indicare quali delle seguenti funzioni siano funzioni analitiche:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 + y^2 + i2xy, \quad f(z) = x^2 - y^2 + i2xy, \quad f(z) = x^2 + y^2, \\ f(z) &= \frac{1}{z^4}, \quad f(z) = \frac{(3z^2 - \bar{z}^2)\bar{z}}{2}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

1.  $f(z) = x^2 + y^2 + i2xy$ . Avendo in maniera esplicita la parte reale e la parte immaginaria

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2, \\ v(x, y) = 2xy, \end{cases} \quad (2.148)$$

che sono due funzioni continue e derivabili con continuità in  $\mathbb{R}^2$ , bisogna verificare che soddisfino le condizioni di Cauchy-Riemann (CR). Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \end{cases} \quad (2.149)$$

ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.150)$$

ma anche

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.151)$$

laddove ci vorrebbe un segno meno. Quindi le CR non sono verificate che non per  $y = 0$  (asse dei reali). La funzione è derivabile sull'asse dei reali, ma non è analitica da nessuna parte in  $\mathbb{C}$ , richiedendo, l'analiticità, la derivabilità in un intorno del punto di derivabilità.

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando direttamente la

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 4iy. \quad (2.152)$$

In ultima analisi, riportando la funzione in termini di  $z$  e  $\bar{z}$  si vede che

$$f(z) = z\bar{z} + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2}. \quad (2.153)$$

Siccome

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad (2.154)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z - \bar{z}, \quad (2.155)$$

si vede che le CR valgono solo sull'asse dei reali e quindi la  $f(z)$  non è analitica in  $\mathbb{C}$ .

2.  $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ . Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \end{cases} \quad (2.156)$$

ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.157)$$

La  $f(z)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ . D'altra parte si ha

$$f(z) = z^2, \quad (2.158)$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.159)$$

3. ....

### 2.7.2 Esercizio

Sia data  $u(x, y) = 2xy$ . Trovare la funzione analitica  $f(z)$  che abbia  $u(x, y)$  come parte reale.

Intanto verifichiamo che  $u(x, y)$  sia una funzione armonica. Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad (2.160)$$

per cui, banalmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.161)$$

essendo entrambe le derivate seconde nulle.

Per risalire alla parte immaginaria scriviamo il differenziale di  $v(x, y)$  e utilizziamo le CR:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = -2x dx + 2y dy. \quad (2.162)$$

Integrando su una spezzata da  $(0, 0)$  a  $(x, y)$  avremo

$$v(x, y) - v(0, 0) = \int_0^x (-2x) dx + \int_0^y 2y dy = -x^2 + y^2. \quad (2.163)$$

Quindi, posto  $v(0, 0) = v_0$ , si ha

$$f(z) = 2xy + i(v_0 - x^2 + y^2). \quad (2.164)$$

Altro modo di fare esattamente la stessa cosa:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x \implies v(x, y) = -x^2 + \phi(y), \quad (2.165)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y \implies v(x, y) = y^2 + \phi(x). \quad (2.166)$$

Allora, per le CR si ha

$$x^2 + \phi(x) = -y^2 + \phi(y), \quad (2.167)$$

che è verificata soltanto se

$$x^2 + \phi(x) = -y^2 + \phi(y) = k. \quad (2.168)$$

Quindi  $\phi(x) = -x^2 + k$  oppure  $\phi(y) = y^2 + k$ . In entrambi i casi si ritrova la (2.164).

### 2.7.3 Esercizio

Sia data  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ . Trovare la funzione analitica  $f(z)$  che abbia  $u(x, y)$  come parte reale.

Si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x. \quad (2.169)$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.170)$$

La  $u(x, y)$  è armonica e quindi può essere la parte reale di una funzione analitica.

Si ha:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \implies v(x, y) = 3x^2y + \phi(y), \quad (2.171)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \implies v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \phi(x), \quad (2.172)$$

per cui

$$\phi(x) = \phi(y) + y^3 = k. \quad (2.173)$$

Da cui si ricava

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + k). \quad (2.174)$$

Altro modo, assolutamente identico:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \implies v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \phi(x), \quad (2.175)$$

quindi

$$6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y - y^3 + \phi(x)) = 6xy + \phi'(x). \quad (2.176)$$

Si ricava un'equazione differenziale banale per determinare  $\phi(x)$ :

$$\phi'(x) = 0, \quad (2.177)$$

ovvero

$$\phi(x) = k, \quad (2.178)$$

costante.



# Capitolo 3

## Appunti sulle SERIE DI POTENZE

Finora abbiamo visto polinomi e funzioni razionali come esempio di funzioni analitiche. Adesso vogliamo estendere lo studio a funzioni più complicate, come per esempio l'esponenziale complesso, le funzioni trigonometriche, iperboliche e infine alle funzioni inverse, il logaritmo e la radice.

Per introdurre l'esponenziale studieremo alcune proprietà delle serie di potenze. Faremo vedere che una serie di potenze uniformemente convergente in un certo aperto e connesso converge ad una funzione analitica, la cui derivata può essere ottenuta derivando la serie termine a termine. La funzione analitica così ottenuta è infinitamente derivabile nel dominio di convergenza della serie. Con questo bagaglio, studieremo la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Questa converge ad una funzione intera, che sarà l'esponenziale complesso e dalle proprietà della serie deriveremo tutte le proprietà dell'esponenziale.

Per svolgere questo programma, in questo capitolo riassumiamo alcune importanti proprietà di successioni e serie di funzioni.

### 3.1 Successioni

Cominciamo con le successioni poiché la somma di una serie non è altro che il limite della successione delle somme parziali ...

Consideriamo la successione  $a_n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$  e  $a_n \in \mathbb{C}$ .

**Definizione 3.1.1** La successione  $a_n$  ha limite  $A$  se per  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $n \geq n_0$  si abbia  $|a_n - A| < \epsilon$ .

Una successione che ha limite finito è detta *convergente*, altrimenti è detta *divergente*.

Un concetto importante è quello di *successione di Cauchy*.

**Definizione 3.1.2** Una successione  $a_n$  è detta di *Cauchy* se per  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - a_m| < \epsilon$  non appena  $n, m \geq n_0$ .

Allora si ha il seguente teorema

**Teorema 3.1.3** Una successione  $a_n \in \mathbb{C}$  è convergente se e solo se è di *Cauchy*.

*Dimostrazione.* Se la successione è convergente allora per  $\forall \epsilon > 0$  si può trovare un  $n_0$  tale che  $|a_n - A| < \epsilon/2$  se  $n \geq n_0$ . Prendiamo anche un  $m \in \mathbb{N}$ , tale che  $m \geq n_0$ . Avremo

$$|a_n - a_m| = |a_n - A - (a_m - A)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon \quad (3.1)$$

e quindi se  $a_n$  è convergente essa è di Cauchy.

Per dimostrare il viceversa notiamo che la parte reale e la parte immaginaria di una successione di Cauchy sono successioni di Cauchy nei reali. Se convergono, convergerà anche la successione di partenza. Quindi possiamo limitarci a dimostrare che una successione reale di Cauchy è convergente.

Prima di tutto, facciamo vedere che se  $a_n$  è di Cauchy allora è limitata. Infatti, se è di Cauchy si ha che per  $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tale che per  $n, m \geq N$  si abbia  $|a_n - a_m| < \epsilon$ . Prendiamo  $\epsilon = 1$  e in corrispondenza di questo  $\epsilon$  esisterà un  $N_1$  tale che per  $\forall n, m > N_1$  si abbia  $|a_n - a_m| < 1$ .

D'altra parte

$$|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m| < 1. \quad (3.2)$$

Poniamo  $m = N_1 + 1$ . Allora

$$|a_n| - |a_{N_1+1}| < 1 \quad (3.3)$$

e quindi

$$|a_n| < 1 + |a_{N_1+1}|, \quad (3.4)$$

per  $\forall n > N_1$  e quindi è limitata.

Se è limitata in  $\mathbb{R}$ , per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione convergente. Sia tale sottosuccessione la  $a_{n_k}$  e si abbia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \quad (3.5)$$

Quindi per  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tale che per  $\forall k > N$  si abbia  $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ . Ma  $a_n$  è di Cauchy e quindi  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$  tale che per  $\forall n, m > N_1$  si abbia  $|a_n - a_m| < \epsilon$ . Allora

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon = 2\epsilon, \quad (3.6)$$

se  $n, k > \max\{N, N_1\}$ . Ne consegue che  $a_n$  converge.  $\text{f}$

## 3.2 Successioni di funzioni

Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Consideriamo una successione  $f_n(z)$  di funzioni, tali che  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U \subset \mathbb{C}$ .

**Definizione 3.2.1** Si dice che  $f_n$  converge “puntualmente” a  $f$  e si scrive  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$  se per  $\forall z \in U$  e per  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon, z)$ , naturale, tale che  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  per  $\forall n > N$ .

NB. La scelta dell' $N$  dipende anche dal punto  $z$ , non solo dall' $\epsilon$ .

**Definizione 3.2.2** Si dice che  $f_n$  converge “uniformemente” a  $f$  se per  $\forall z \in U$  e per  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ , naturale, tale che  $|f_n - f| < \epsilon$  per  $\forall n > N$ .

NB. Qui l' $N$  dipende solo dall' $\epsilon$  e quindi è lo stesso per ogni  $z \in U$ .

Sussiste il seguente teorema.

**Teorema 3.2.3** Sia  $f_n$  una successione di funzioni continue in  $U \subset \mathbb{C}$ , uniformemente convergente a  $f$ . Allora  $f$  è anch'essa continua.

*Dimostrazione.* Supponiamo quindi che le  $f_n$  siano continue e tendano uniformemente a  $f$ . Allora, per  $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$  tale che  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \forall n \geq N$  e per ogni  $z \in U$ . D'altra parte le  $f_n$  sono continue, per cui se  $z_0 \in U$  si può scegliere un  $\delta > 0$  e un  $\epsilon > 0$  tali che se  $|z - z_0| < \delta$  allora  $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon$ . Ma in corrispondenza di questo  $\delta$  avremo anche

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)|, \quad (3.7)$$

$$\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|, \quad (3.8)$$

$$< \epsilon' = 3\epsilon. \quad (3.9)$$

Infatti, il primo e l'ultimo modulo sono entrambi  $< \epsilon$  (indipendentemente dallo  $z$ ) per l'uniforme convergenza, mentre il secondo modulo è  $< \epsilon$  per la continuità delle  $f_n$ .

Ne concludiamo che anche  $f(z)$  è continua in  $z_0$ .

### 3.3 Serie di funzioni

**Definizione 3.3.1** Sia  $f_n(z)$  una successione di funzioni in  $U \subset \mathbb{C}$ . Si dice *serie di funzioni* la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f_n(z). \quad (3.10)$$

**Definizione 3.3.2** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  si dice *convergente (puntualmente)* a  $s(z)$ , se la successione  $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$  delle somme parziali converge (puntualmente) a  $s(z)$ .

Analogamente,

**Definizione 3.3.3** la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  si dice *convergente uniformemente* a  $s(z)$ , se la successione  $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$  delle somme parziali converge uniformemente a  $s(z)$ .

**Definizione 3.3.4** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge "assolutamente" se converge la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ , per  $\forall z \in U$ .

Sussistono i due seguenti importanti risultati.

**Teorema 3.3.5** Sia  $f_n(z)$  una successione di funzioni di  $U \subset \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ . Se  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge assolutamente in  $U$  allora converge (puntualmente) in  $U$ .

*Dimostrazione.* Se la somma converge assolutamente, vuol dire che  $\tilde{s}_N(z) = \sum_{n=0}^N |f_n(z)|$  è di Cauchy. Quindi, per  $\forall \epsilon > 0, \exists N$  tale che per  $\forall n, m > N$  si abbia

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = ||f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n|| < \epsilon. \quad (3.11)$$

D'altra parte si ha anche

$$||f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n|| = |f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n|, \quad (3.12)$$

quindi

$$|f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n| < \epsilon. \quad (3.13)$$

Consideriamo adesso  $s_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$ . Se  $\tilde{s}_N(z)$  è di Cauchy, anche  $s_N(z)$  è di Cauchy (per ogni  $z \in U$ ). Infatti

$$|s_n - s_m| = |f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n| \leq |f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n| < \epsilon. \quad (3.14)$$

Essendo di Cauchy, per ogni  $z \in U$ ,  $s_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$  è convergente (puntualmente) in  $U$ .

**Teorema 3.3.6 M-test di Weierstrass.** Sia  $f_n(z)$  una successione di funzioni da  $U \subset \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ . Se  $\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n > 0$  tale che  $|f_n(z)| < M_n$  per  $\forall z \in U$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ , allora  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  converge uniformemente in  $U$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $s_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z)$ . Si ha

$$|s_n - s_m| = |f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n| \leq |f_{m+1}| + |f_{m+2}| + \dots + |f_n| \leq M_{m+1} + M_{m+2} + \dots + M_n. \quad (3.15)$$

Siccome  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ , vuol dire che  $M_k$  è di Cauchy e quindi per  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$  (che non dipende da  $z$ ) tale che per  $\forall n, m > n_0$  si abbia

$$|M_n - M_m| = M_{m+1} + M_{m+2} + \dots + M_n < \epsilon \quad (3.16)$$

e

$$|s_n - s_m| \leq \epsilon, \quad (3.17)$$

per  $\forall z \in U$ . La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  quindi è uniformemente convergente.

L'uniforme convergenza implica la convergenza puntuale, ma non è vero il viceversa.

### 3.3.1 Serie di potenze

Una *serie di potenze* è una particolare serie di funzioni, data dalla somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (3.18)$$

con  $a_n, z \in \mathbb{C}$ .

Associata alla serie abbiamo la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n. \quad (3.19)$$

Se  $s_n$  ha un limite, questo è la somma della serie.

La serie di potenze è convergente se e solo se la successione delle somme parziali è di Cauchy, ovvero se e solo se per  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $\forall n, m \geq n_0$  si abbia

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} z^{m+1} + a_{m+2} z^{m+2} + \dots + a_n z^n| < \epsilon. \quad (3.20)$$

Se scelgo  $n = m + 1$  si avrà

$$|a_m z^m| < \epsilon. \quad (3.21)$$

Quindi

**Proprietà 3.3.7** Il termine  $n$ -esimo di una serie convergente deve tendere a 0.

### Esempio: la serie geometrica

Consideriamo la seguente serie

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (3.22)$$

La successione delle somme parziali ha il seguente termine  $n$ -esimo:

$$s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad (3.23)$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad (3.24)$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |z^n|$  è convergente se  $|z| < 1$ . Infatti, con  $|z| < 1$ , si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|} = \frac{1}{1 - |z|}, \quad (3.25)$$

poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$  se  $|z| < 1$ . Quindi la  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  è assolutamente convergente (e quindi convergente puntualmente) in  $|z| < 1$ . Inoltre,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  è uniformemente convergente in  $|z| < q < 1$  e la somma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z}. \quad (3.26)$$

Per far vedere questo, consideriamo che la successione delle somme parziali tende uniformemente a  $1/(1 - z)$ . Infatti

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \left| \frac{q^{n+1}}{1 - q} \right|, \quad (3.27)$$

dove  $|z| < q < 1$ . Quindi per  $\forall \epsilon > 0$  possiamo definire un  $n_0(\epsilon)$  (quindi indipendente da  $z$ ) tale che per  $\forall n > n_0$  si abbia

$$\left| \frac{q^{n+1}}{1 - q} \right| < \epsilon \quad (3.28)$$

e quindi, sempre per  $n > n_0(\epsilon)$

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| < \epsilon. \quad (3.29)$$

Ovvero la  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge uniformemente a  $1/(1 - z)$ .

Una serie di potenze converge banalmente per  $z = 0$ . Per  $z = z_0 \neq 0$  si ha il seguente importante risultato.

**Teorema 3.3.8** *i) Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge per  $z_0 \neq 0$ , allora converge assolutamente per qualsiasi valore di  $z$  tale che  $|z| < \rho < |z_0|$ , con  $\rho > 0$ , ovvero in tutti i punti interni al cerchio centrato in  $z = 0$  di raggio  $|z_0|$ . ii) Se per  $z = z_0$  la serie non converge, allora non converge per  $\forall z$  con  $|z| > |z_0|$ , cioè in tutti i punti esterni al cerchio di raggio  $|z_0|$ .*

*Dimostrazione.* i) Poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  in  $z_0$ , si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| = 0. \quad (3.30)$$

Ma allora esisterà un numero reale positivo,  $g$ , tale che dato un  $n_0 \in \mathbb{N}$  si abbia che per  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n z_0^n| < g. \quad (3.31)$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq g \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| = g \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n. \quad (3.32)$$

Se  $|z| < \rho < |z_0|$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  è quindi maggiorata dalla serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} g \rho^n / |z_0|$  che è convergente. Ne consegue che  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  è uniformemente convergente in  $|z| < \rho < |z_0|$  (per l'M-test di Weierstrass).

ii). Il secondo punto è dimostrabile banalmente per assurdo. Infatti, supponiamo che  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  diverga per un certo  $z_0$ . Se convergesse per uno  $z$  tale che  $|z| > |z_0|$  allora per il punto precedente convergerebbe uniformemente per  $|z| < |z_0|$ , contro l'ipotesi.

Indicando con  $R$  il sup dei valori di  $|z|$  per i quali  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge, abbiamo che  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge uniformemente nel disco aperto centrato in  $z = 0$ , di raggio  $R$ ,  $D(0, R)$  (o meglio in ogni chiuso di raggio  $\rho < R$  contenuto nell'aperto di raggio  $R$ ). Allora  $R$  viene detto *raggio di convergenza*. Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge solo per  $z = 0$  allora  $R = 0$ . Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge per  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $R = \infty$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  è detta *trascendente intera*.

**Teorema 3.3.9 di Cauchy-Hadamard.** Data la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , si consideri la successione  $\sqrt[n]{|a_n|}$  e sia

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (3.33)$$

Allora il raggio di convergenza della serie è  $R = \frac{1}{\alpha}$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che il  $\limsup$  di una successione esiste sempre, anche quando la successione non ha limite (e quindi il  $\limsup$  non coincide col  $\liminf$ ). Inoltre, se  $a_n$  è una successione di numeri reali,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_n\} = a$  implica che  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n < a + \epsilon$  per  $\forall n \geq N$  e inoltre ci sono infiniti valori di  $n$  per i quali  $a_n > a - \epsilon$ . Infatti se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_n\} = a$  vuol dire che  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tale che se  $n \geq N$  si abbia  $|a - \sup_{n \geq N} \{a_n\}| < \epsilon$ , ovvero

$$a - \epsilon < \sup_{n \geq N} \{a_n\} < a + \epsilon \quad (3.34)$$

e se il  $\sup_{n \geq N} \{a_n\} < a + \epsilon$  vuol dire che  $a_n < a + \epsilon$ . Se il  $\sup_{n \geq N} \{a_n\} > a - \epsilon$  vuol dire che ci sono infiniti valori di  $n$  per i quali  $a_n > a - \epsilon$ .

Detto questo passiamo alla dimostrazione vera e propria.

Sia  $\alpha \neq 0$  e finito. Se  $z$  è tale che  $|z| < \frac{1}{\alpha}$  si ha  $\alpha|z| < 1$  (strettamente minore di 1). Allora si può sempre trovare un  $\epsilon > 0$  tale che si abbia anche  $(\alpha + \epsilon)|z| < 1$ . Chiamiamo  $(\alpha + \epsilon)|z| = q$  (quindi  $q < 1$ ). Se  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$  si ha che, in corrispondenza di quell' $\epsilon$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \epsilon. \quad (3.35)$$

Quindi

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} < (\alpha + \epsilon)|z| = q \quad (3.36)$$

e infine

$$|a_n||z|^n = |a_n z^n| < q^n. \quad (3.37)$$

Allora la serie  $\sum |a_n z^n|$  è maggiorata dalla serie geometrica che è convergente e quindi è a sua volta convergente (uniformemente, per l'M-test di Weierstrass), per quel valore di  $z$ .

Se  $|z| > \frac{1}{\alpha}$ , invece, si ha  $\alpha|z| > 1$  e possiamo prendere un  $\epsilon$  tale che si abbia  $(\alpha - \epsilon)|z| > 1$ . Chiamiamo  $(\alpha - \epsilon)|z| = q$  (quindi adesso è  $q > 1$ ). Allora  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > n_0$  infiniti punti della successione  $\sqrt[n]{|a_n|}$  sono

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \epsilon \quad (3.38)$$

e quindi

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} > (\alpha - \epsilon)|z| = q. \quad (3.39)$$

Si ha dunque  $|a_n z^n| > q^n$  con  $q > 1$ , per cui la serie  $\sum a_n z^n$  non converge per quei valori di  $z$ . Se  $\alpha = 0$  si ha  $R = \infty$ . Infatti,  $\forall z$  si può sempre scegliere un  $\epsilon$  tale che  $\epsilon|z| = q < 1$ . Allora  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > n_0$  si abbia  $\sqrt[n]{|a_n|} < \epsilon$  e quindi  $\sqrt[n]{|a_n|}|z| < \epsilon|z| = q < 1$  e la serie è convergente (uniformemente) per  $\forall z$ .

Se  $\alpha = \infty$  si ha  $R = 0$ .

**Teorema 3.3.10** *Se esiste il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R, \quad (3.40)$$

*questo è il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .*

*Dimostrazione.*

Aggiungiamo due importantissimi risultati.

**Teorema 3.3.11** *Le due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ , se convergenti, hanno lo stesso raggio di convergenza.*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Consideriamo la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k, \quad (3.41)$$

dove abbiamo posto  $k = n - 1$ . Allora si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{(k+1)} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha, \quad (3.42)$$

visto che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1)} = 1$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}$ . Quindi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  convergono uniformemente per gli stessi valori di  $z$ .

**Teorema 3.3.12** Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$  ha per raggio di convergenza  $R$ , per  $\forall z$  tale che  $|z| < R$  si ha

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad (3.43)$$

ovvero la  $f(z)$  è analitica in  $D(0, R)$  e la sua derivata prima coincide con la derivata termine a termine della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

*Dimostrazione.* Sia  $z_0$  tale che  $|z_0| < R$  e  $\delta > 0$  tale che  $|h| < \delta$  e  $|z_0 + h| < \rho < R$ , con  $\rho > 0$ . Si ha

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h}. \quad (3.44)$$

Vediamo come possiamo riscrivere il termine ennesimo della serie:

$$\frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = (z_0 + h)^{n-1} \frac{\left[ (z_0 + h) - \frac{z_0^n}{(z_0 + h)^{n-1}} \right]}{h}, \quad (3.45)$$

$$= (z_0 + h)^{n-1} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{z_0}{z_0 + h} \right)^n \right]}{\frac{h}{z_0 + h}}, \quad (3.46)$$

$$= (z_0 + h)^{n-1} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{z_0}{z_0 + h} \right)^n \right]}{1 - \frac{z_0}{z_0 + h}}, \quad (3.47)$$

$$= (z_0 + h)^{n-1} \left[ 1 + \frac{z_0}{z_0 + h} + \dots + \left( \frac{z_0}{z_0 + h} \right)^{n-1} \right], \quad (3.48)$$

$$= (z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2} z_0 + \dots + z_0^{n-1}. \quad (3.49)$$

Quindi

$$\left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| = \left| (z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2} z_0 + \dots + z_0^{n-1} \right| < \rho^{n-1} + \rho^{n-2} \rho + \dots + \rho^{n-1} = n \rho^{n-1} \quad (3.50)$$

e si trova che, per  $|h| < \delta$ , i termini della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \quad (3.51)$$

sono maggiorati dai corrispondenti termini della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \rho^{n-1}$  e siccome la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$  converge, anche la  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \rho^{n-1}$  convergerà con lo stesso raggio di convergenza  $R$ . Allora la (3.51) converge uniformemente per  $|z| < \rho < R$  e quindi si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}. \quad (3.52)$$

Quindi, abbiamo dimostrato che se  $\sum_n a_n z^n$  è convergente la sua somma è una funzione analitica tale che la sua derivata coincide con la serie delle derivate termine a termine della serie di partenza.



Ma se così è, il ragionamento può essere ripetuto e quindi si trova che una serie di potenze con raggio di convergenza  $R$  ha derivate di ogni ordine date dalla serie delle derivate termine a termine:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \\ f'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots \\ f''(z) &= 2a_2 + 6a_3 z + \dots \\ f^k(z) &= k! a_k + \dots \end{aligned} \tag{3.53}$$

In particolare quindi:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}z^n + \dots \tag{3.54}$$

cioè se  $f(z)$  è una serie di potenze vale la formula di Taylor. Il viceversa ha bisogno del teorema di Cauchy.

# Capitolo 4

## Appunti sulle FUNZIONI ANALITICHE ELEMENTARI

Utilizzando lo studio delle serie di potenze che abbiamo effettuato nel capitolo precedente passiamo allo studio delle funzioni elementari, che saranno definite proprio grazie alle serie di potenze.

### 4.1 Esponenziale complesso

Consideriamo la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Il coefficiente  $n$ -esimo è pari a

$$a_n = \frac{1}{n!}. \quad (4.2)$$

Usando il criterio del rapporto, troviamo il raggio di convergenza della serie:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty. \quad (4.3)$$

Per cui la serie converge in tutto il piano complesso.

Per analogia con l'esponenziale reale, che era dato da

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (4.4)$$

si pone

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.5)$$

La funzione  $e^z$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ , ovvero è *intera*.

La derivata si può ottenere dalla derivata termine a termine della serie

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (4.6)$$

L'esponenziale così definito ha le usuali proprietà dell'esponenziale reale. In particolare

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} . \quad (4.7)$$

Infatti, prendiamo  $e^z e^{c-z}$  con  $c \in \mathbb{C}$  costante. Abbiamo

$$\frac{d}{dz}(e^z e^{c-z}) = e^z e^{c-z} + e^z (-e^{c-z}) = 0 , \quad (4.8)$$

per cui

$$e^z e^{c-z} = \text{cost} . \quad (4.9)$$

Per determinare la costante poniamo  $z = 0$ , trovando

$$\text{cost} = e^c , \quad (4.10)$$

da cui

$$e^z e^{c-z} = e^c \quad (4.11)$$

e ponendo  $z = z_1$  e  $c = z_1 + z_2$  si ha l'assunto.

Se  $z_1 = x$  e  $z_2 = iy$  si ha

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \left( 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \dots \right) , \quad (4.12)$$

$$= e^x \left[ \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots \right) \right] , \quad (4.13)$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) . \quad (4.14)$$

In particolare, abbiamo così provato la formula di Eulero.

La funzione  $e^z$  è una funzione dai complessi nei complessi. Vediamo come sono fatti il suo modulo e il suo argomento. Abbiamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} , \quad (4.15)$$

per cui

$$\begin{cases} |e^z| &= e^x , \\ \arg(e^z) &= y + 2k\pi , \end{cases} \quad (4.16)$$

quindi  $e^z$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi i$ :

$$e^z = e^{z+2k\pi i} , \quad (4.17)$$

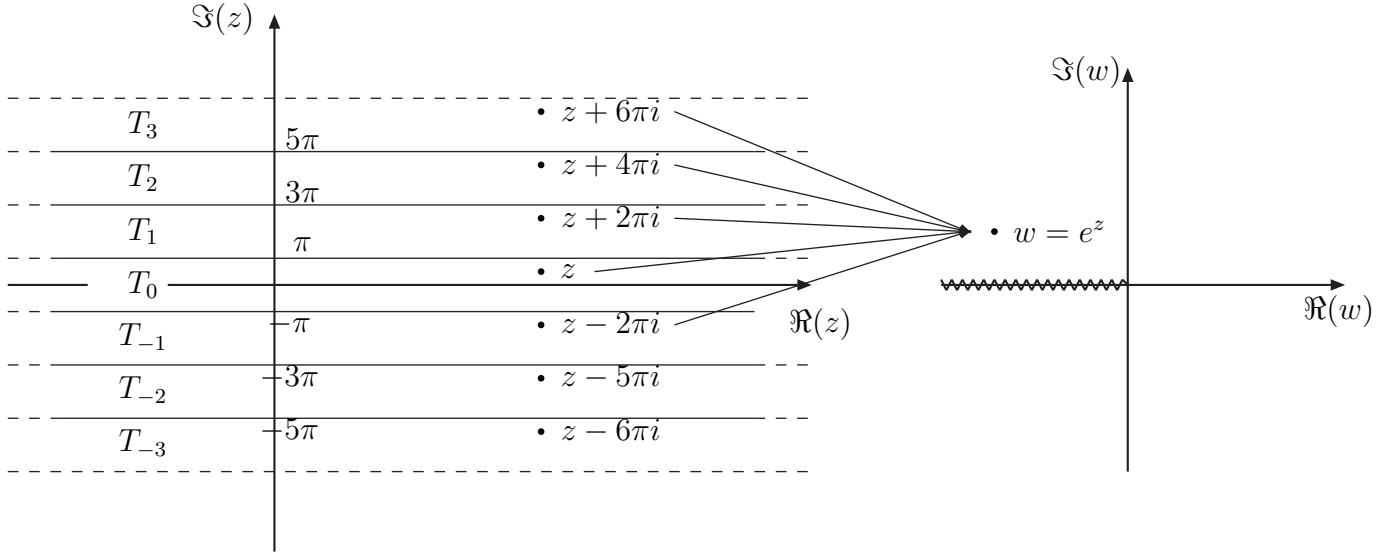
con  $k \in \mathbb{Z}$ . Inoltre

$$e^z \neq 0 , \quad \forall z \in \mathbb{C} , \quad (4.18)$$

cioè lo zero non fa parte del codominio.

Quando nel piano  $\mathbb{C}$  del dominio di  $e^z$ , il punto  $z$  varia la sua parte reale,  $x = \Re(z)$ , su  $\mathbb{R}$ , il modulo del numero complesso  $e^z$  nel codominio va da 0 (escluso) all'infinito. Di pari passo, quando la parte immaginaria di  $z$ ,  $y = \Im(z)$  varia per esempio da  $-\pi$  a  $\pi$ ,  $-\pi < y \leq \pi$ , l'argomento di  $e^z$  varia da  $-\pi$  a  $\pi$ . Quindi, la striscia  $T_0$  parallela all'asse reale come in figura,

viene mappata da  $e^z$  in una copia del piano  $\mathbb{C}$ . Siccome  $e^z$  è periodico, anche la striscia  $T_1$  viene analogamente mappata in un'altra copia di  $\mathbb{C}$  e così ogni striscia  $T_k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .



La funzione  $e^z$  può essere resa biunivoca se ci si restringe a considerare un solo ramo, ovvero una funzione che agisce da una fascia  $T_k$  del dominio, in una copia di  $\mathbb{C}$ , in cui l'argomento di  $w = e^z$  sia compreso fra  $-\pi$  e  $\pi$ . Siccome passando alla fascia  $T_{k+1}$  si otterrebbe un numero  $w$  con argomento che eccede  $\pi$  (in pratica si farebbe un altro giro intorno all'origine nel piano  $\mathbb{C}$  del codominio), per limitarsi ad un ramo, si mette un “taglio” al piano  $\mathbb{C}$  del codominio fra l'origine e il punto all'infinito. Nella configurazione considerata in figura, il taglio viene posto sulla semiretta reale negativa.

Questa “necessità” di definire una funzione biunivoca deriva dalla possibilità di invertire la funzione  $e^z$  e definire il logaritmo complesso. Siccome  $e^z$  è una funzione periodica, la funzione inversa sarà una funzione polidroma e per poterla definire senza ambiguità dobbiamo scegliere un ramo, ovvero ridurre lo studio al ramo  $k$ -esimo della funzione

$$e^z : T_k \rightarrow \mathbb{C} - \{x \leq 0\}. \quad (4.19)$$

## 4.2 Funzioni trigonometriche

Per la formula di Eulero, abbiamo per  $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad (4.20)$$

ovvero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} + \dots, \quad (4.21)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots. \quad (4.22)$$

Allora, sfruttando l'analogia con la serie di potenze  $\sum \frac{z^n}{n!}$ , che abbiamo posto uguale all'esponenziale complesso, definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (4.23)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (4.24)$$

Troviamo le proprietà di  $\sin z$  e  $\cos z$  e mostriamo che sono del tutto analoghe a quelle del seno e coseno reali.

1. Siccome  $e^{iz}$  e  $e^{-iz}$  sono funzioni intere, anche  $\sin z$  e  $\cos z$  lo sono.

2. Si ha:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i} \left( \frac{d}{dz} e^{iz} - \frac{d}{dz} e^{-iz} \right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} e^{iz} + \frac{d}{dz} e^{-iz} \right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z. \quad (4.26)$$

3. Si ha

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{+iz}}{2i} = -\sin z, \quad (4.27)$$

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z. \quad (4.28)$$

4. Siccome  $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$  si ha

$$\cos z = \frac{1}{2} \left[ 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots + 1 - iz + \frac{(-iz)^2}{2!} + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (4.29)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} \left[ \left( 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots \right) - \left( 1 - iz + \frac{(-iz)^2}{2!} + \dots \right) \right] \quad (4.30)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.31)$$

5. Si ha

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = 1. \quad (4.32)$$

6. Si ha

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2}, \quad (4.33)$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)}{2} + \frac{(\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2}, \quad (4.34)$$

$$= \dots, \quad (4.35)$$

$$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (4.36)$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \quad (4.37)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad (4.38)$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2. \quad (4.39)$$

7. Si ha

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y, \quad (4.40)$$

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y. \quad (4.41)$$

8. Quindi

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{2}, \quad (4.42)$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2}, \quad (4.43)$$

$$= \cos x \frac{e^{-y} + e^y}{2} + i \sin x \frac{e^{-y} - e^y}{2}, \quad (4.44)$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (4.45)$$

$$\sin z = \sin x \cosh(y) + i \cos x \sinh y, \quad (4.46)$$

ovvero

$$\Re(\sin z) = \sin x \cosh y, \quad \Im(\sin z) = \cos x \sinh y, \quad (4.47)$$

$$\Re(\cos z) = \cos x \cosh y, \quad \Im(\cos z) = -\sin x \sinh y. \quad (4.48)$$

9. Troviamo gli zeri delle funzioni  $\sin z$  e  $\cos z$ , che serviranno per capire il dominio di analiticità della tangente e della cotangente.

$$\cos z = 0, \quad (4.49)$$

siccome sia la parte reale che la parte immaginaria si devono annullare contemporaneamente, implica il seguente sistema:

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0, \\ \sin x \sinh y = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Il  $\cosh y$  non si annulla mai; quindi la prima equazione ha come soluzioni

$$\cos x = 0, \quad \implies \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.51)$$

Per questi valori di  $x$ , il  $\sin x \neq 0$ . Quindi la seconda equazione impone

$$\sinh y = 0, \quad \implies \quad y = 0. \quad (4.52)$$

In totale, il  $\cos z$  si annulla per

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.53)$$

quindi, solo parte reale.

Per il  $\sin z$  si può fare la stessa considerazione. Abbiamo

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 0, \\ \cos x \sinh y = 0. \end{cases} \quad (4.54)$$

La prima equazione, siccome  $\cosh y \neq 0$  per  $\forall y \in \mathbb{R}$ , impone  $\sin x = 0$ , che è verificata per  $x = k\pi$ . Per questi valori di  $x$  si ha  $\cos x \neq 0$ , ma  $\sinh y = 0$  è verificata per  $y = 0$ . In totale,  $\sin z = 0$  in

$$z = k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.55)$$

10. Siccome  $e^z$  è periodico di periodo  $2\pi i$ , anche  $\sin z$  e  $\cos z$  sono periodiche. Infatti si ha:

$$\sin(z + 2k\pi) = \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{i2k\pi} - e^{-iz}e^{-i2k\pi}}{2i}, \quad (4.56)$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z, \quad (4.57)$$

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z. \quad (4.58)$$

Quindi, le fasce di periodicità sono verticali, parallele all'asse immaginario

11. Ricordando che  $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ , si ha

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \quad (4.59)$$

$$= \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad (4.60)$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \quad (4.61)$$

Dall'espressione del modulo quadro si capisce che in  $\mathbb{C}$  le due funzioni non sono limitate!

Dati  $\sin z$  e  $\cos z$  si possono studiare i loro rapporti.

La tangente è definita come segue:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}. \quad (4.62)$$

Quindi la tangente è una funzione analitica in  $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ . Si ha

$$\frac{d}{dz} \tan z = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}. \quad (4.63)$$

Nei punti singolari,  $\tan z$  ha poli del primo ordine:

$$\tan z \underset{z \simeq \frac{\pi}{2}}{\simeq} \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}. \quad (4.64)$$

La cotangente è definita come segue:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (4.65)$$

Quindi la cotangente è una funzione analitica in  $\mathbb{C} - \{k\pi\}$ . Si ha

$$\frac{d}{dz} \cot z = \frac{-\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin^2 z}. \quad (4.66)$$

Nei punti singolari,  $\cot z$  ha poli del primo ordine:

$$\cot z \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{z}. \quad (4.67)$$

## 4.3 Funzioni iperboliche

Definiamo seno e coseno iperbolico come segue:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (4.68)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (4.69)$$

In quanto combinazioni lineari di funzioni intere, sono anch'esse funzioni intere. Le loro proprietà derivano dalle proprietà dell'esponenziale.

1. Si ha

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \quad (4.70)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z. \quad (4.71)$$

2. Sempre dalla definizione deriva che

$$\sinh -z = \frac{e^{-z} - e^z}{2} = -\sinh z, \quad (4.72)$$

$$\cosh -z = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z. \quad (4.73)$$

3. Dalla periodicità dell'esponenziale deriva la periodicità di  $\sinh z$  e  $\cosh z$ :

$$\sinh(z + 2\pi i) = \frac{e^{(z+2\pi i)} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z, \quad (4.74)$$

$$\cosh(z + 2\pi i) = \frac{e^{(z+2\pi i)} + e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z. \quad (4.75)$$

4. Si ha

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad (4.76)$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2, \quad (4.77)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2. \quad (4.78)$$



5. Esplicitando parte reale e parte immaginaria dell'esponenziale si ottiene

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad (4.79)$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. \quad (4.80)$$

6. Gli zeri delle due funzioni sono determinati dai seguenti sistemi.

Per  $\sinh z = 0$  abbiamo

$$\begin{cases} \sinh x \cos y = 0, \\ \cosh x \sin y = 0, \end{cases} \quad (4.81)$$

che sono verificate per  $x = 0$  e  $y = k\pi$ , quindi  $z = k\pi i$ .

Per  $\cosh z = 0$  abbiamo

$$\begin{cases} \cosh x \cos y = 0, \\ \sinh x \sin y = 0, \end{cases} \quad (4.82)$$

che sono verificate per  $x = 0$  e  $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , quindi  $z = i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ .

Così come abbiamo fatto per le funzioni trigonometriche, possiamo definire e studiare la tangente e la cotangente iperbolica dal rapporto di seno e coseno o coseno e seno. Si ha

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad (4.83)$$

analitica in  $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ . Nei punti di non analiticità, ha dei poli semplici.

Si ha anche

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad (4.84)$$

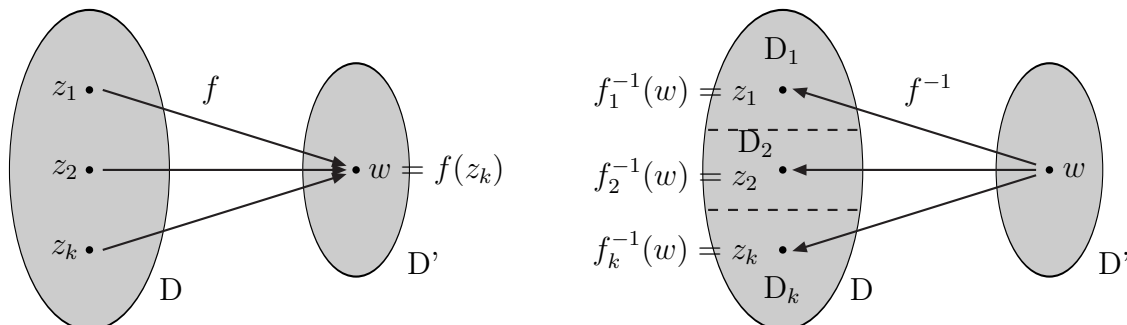
analitica in  $\mathbb{C} - \{k\pi\}$ . Nei punti di non analiticità, ha dei poli semplici.

## 4.4 Funzioni inverse e polidromia

Abbiamo visto diversi casi di funzioni analitiche

$$f(z) : D \rightarrow D' \subset \mathbb{C}, \quad (4.85)$$

non biunivoche. Per esempio  $f(z) = e^z$  oppure  $f(z) = z^n$ , o  $f(z) = \sin z$ .



La funzione inversa di tali funzioni,

$$f^{-1} : D' \rightarrow D, \quad (4.86)$$

sarà **polidroma**, ovvero assocerà ad un valore di  $w \in D'$  nel dominio, diversi possibili valori  $z_k$  nel codominio  $D$ .

Per poter definire in maniera univoca la funzione inversa  $z = f^{-1}(w)$ , ci dobbiamo limitare a considerare un sottodominio  $D_k \subset D$ , tale che, se  $z \in D_k$ , la  $f : z \rightarrow w = f_k(z)$  sia biunivoca e quindi abbia l'inversa  $f_k^{-1}(w)$ . Si dice che abbiamo identificato un *ramo* monodromo della funzione polidroma.

#### 4.4.1 Logaritmo complesso

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Si definisce **logaritmo** di  $z$ ,  $\ln z$ , l'esponente da dare ad  $e$  affinché si ottenga  $z$ :

$$z = e^{\ln z}. \quad (4.87)$$

Siccome  $z = |z|e^{i\theta}$ , con  $\theta = \text{Arg}(z)$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ , si ha

$$e^{\ln z} = z = |z|e^{i\theta} = e^{\ln |z|}e^{i\theta} = e^{\ln |z| + i\theta}, \quad (4.88)$$

da cui

$$\ln z = \ln |z| + i\theta, \quad (4.89)$$

con  $z \neq 0$ . Questo è il **ramo principale** del logaritmo. In generale, siccome  $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ , si avrà

$$\ln z = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.90)$$

A seconda del valore di  $k \in \mathbb{Z}$ , si definisce un ramo del logaritmo. Ogni ramo va dal piano  $\mathbb{C}$  tagliato ( $\mathbb{C} - \{x \leq 0\}$ ) in una striscia (vedi dominio dell'esponenziale)  $T_k : (2k - 1)\pi < \Im(\ln z) \leq (2k + 1)\pi$ .

1. Siccome  $e^z \neq 0$  sempre,  $z = 0$  non appartiene al dominio del  $\ln z$ .
2. Il logaritmo e l'esponenziale sono l'una la funzione inversa dell'altra, ma il logaritmo è una funzione polidroma. Ne deriva che  $e^{\ln z} \neq \ln e^z$ . Infatti

$$e^{\ln z} = e^{\ln |z| + i\theta + i2k\pi} = |z|e^{i\theta + i2k\pi} = z. \quad (4.91)$$

Invece

$$\ln e^z = \ln(e^x e^{iy + 2k\pi i}) = z + 2k\pi i, \quad (4.92)$$

che rende manifesta la natura polidroma della funzione inversa.

3. Se  $z = x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , allora

$$\ln z = \ln x, \quad (4.93)$$

logaritmo naturale nei reali. Ma in  $\mathbb{C}$  si può prendere anche  $x < 0$ . In particolare, se  $x = -1$  ( $z = e^{i\pi}$ ) si ha

$$\ln(-1) = \ln|1| + i\pi + 2k\pi i = i\pi + 2k\pi i. \quad (4.94)$$

4. Se fissiamo per  $z_0$  un valore del  $\ln z_0$  e prendiamo poi con continuità i valori di  $\ln z$  su un circuito chiuso  $\gamma$ , abbiamo due possibilità:

- se  $\gamma$  non include l'origine, una volta tornati allo stesso punto  $z_0$ , il  $\log z$  torna ad assumere lo stesso valore iniziale  $\ln z_0$ ;
- se  $\gamma$  include l'origine, invece, tornando allo stesso punto  $z_0$  dopo aver chiuso il circuito, il  $\ln z$  diventerà  $\ln z_0 + 2\pi i$ . Cioè tornando al punto iniziale, il  $\ln z_0$  avrà aumentato la sua parte immaginaria di  $2\pi i$ .

Per avere una funzione ad un sol valore (biunivoca) si deve “impedire” di fare un giro completo intorno a  $z = 0$ . Per questo si introduce un “taglio” da  $z = 0$  a  $-\infty$  sull'asse reale. Il punto  $z = 0$  viene detto **punto di diramazione**.

Impedendo di oltrepassare il taglio, abbiamo individuato un ramo monodromo del logaritmo, che mappa una copia di  $\mathbb{C}$  in una striscia  $T_k$  del codominio.

Oltrepassare il taglio, fa passare ad un altro ramo monodromo del logaritmo.

Se con continuità si continua a fare il giro intorno a  $z = 0$  in senso antiorario, il  $\ln z$  aumenta la sua parte immaginaria di  $2\pi i$  ogni passaggio, passando quindi da una fascia  $T_k$  alla  $T_{k+1}$  nel codominio.

Invece di limitarci ad una copia di  $\mathbb{C}$  e mettere un taglio per individuare un ramo monodromo del logaritmo, possiamo considerare un dominio allargato ad infinite copie di  $\mathbb{C}$ . Ogni copia è tale che il lembo superiore del taglio (per esempio quello a  $\theta = \pi$  dell'intervallo  $-\pi < \theta \leq \pi$ ) viene “incollato” al lembo inferiore della copia successiva di  $\mathbb{C}$ . Il dominio allargato, viene quindi ad essere identificato con una “scala a chiocciola” ogni piano della quale è una copia di  $\mathbb{C}$ . La “scala” è una superficie di Riemann. Il punto di diramazione  $z = 0$  è detto di **ordine infinito**, poiché girando infinite volte attorno ad esso si accede a valori del logaritmo sempre diversi.

5. Ogni ramo del  $\ln z$  così identificato è analitico ovunque tranne che sul taglio (e in  $z = 0$  che non appartiene al dominio) e vale la

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}. \quad (4.95)$$

Infatti, se prendiamo un solo ramo di

$$z \rightarrow e^z = w : T_k \rightarrow \mathbb{C} - \{x \leq 0\}, \quad (4.96)$$

la funzione è biunivoca e analitica con

$$\frac{d}{dz} e^z \neq 0 \quad (4.97)$$

in tutto il dominio. Allora

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)} \Big|_{z=f^{-1}(w)} = \frac{1}{e^z} \Big|_{z=\ln w} = \frac{1}{w}. \quad (4.98)$$

Per verificare l'analiticità possiamo provare la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann. Facciamolo sia in coordinate cartesiane che polari.

In coordinate cartesiane abbiamo:

$$\ln z = \ln |z| + i\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \left( \frac{y}{x} \right). \quad (4.99)$$

Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (4.101)$$

che quindi sono verificate.

Siccome il logaritmo è più naturalmente esprimibile in coordinate polari, con  $z = re^{i\theta}$ ,

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad (4.102)$$

possiamo controllare la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann direttamente in coordinate polari. Abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.104)$$

Allora

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y} - r \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} = -r \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (4.106)$$

Quindi, essendo  $\Re \ln z = \ln r$  e  $\Im \ln z = \theta$ , si ha

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial v}{\partial r} \quad (4.108)$$

e quindi sono verificate.

6. Consideriamo adesso l'andamento del logaritmo nel punto all'infinito. Studiamo quindi in  $\omega = 0$  il  $\ln \left( \frac{1}{\omega} \right)$ . Infatti

$$z \rightarrow \frac{1}{\omega}, \quad \ln z = -\ln \omega, \quad (4.109)$$

che in  $\omega = 0$  ha un punto di diramazione di ordine infinito. Quindi, il logaritmo ha due punti di diramazione, uno in  $z = 0$  e l'altro nel punto all'infinito e sono uniti dal taglio.

## 4.5 Radice $n$ -esima

La radice  $n$ -esima è la funzione inversa della potenza ennesima e quindi è una funzione polidroma.

Prendiamo la potenza  $n$ -esima:

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.110)$$

Siccome

$$z^n = |z|^n e^{in(\arg(z))}, \quad (4.111)$$

tutti gli  $z$  che abbiano l'argomento dato da

$$\arg(z) + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.112)$$

sono mappati nello stesso  $f(z)$ . Infatti

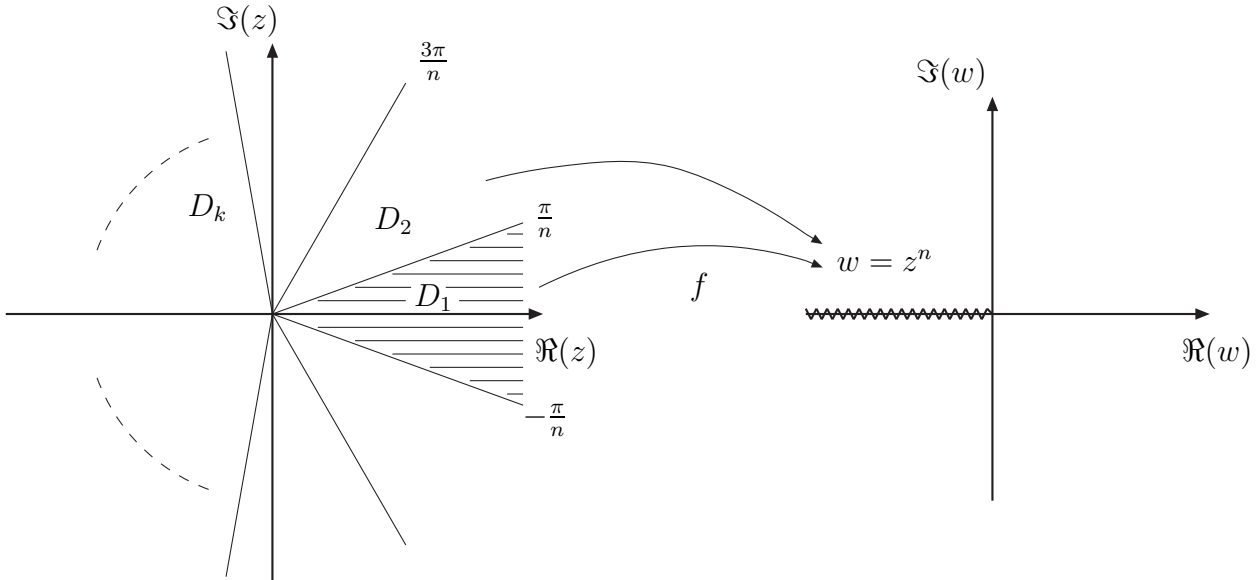
$$z^n = |z|^n e^{in(\arg(z) + \frac{2k\pi}{n})} = |z|^n e^{in \arg(z)} e^{2k\pi i} = |z|^n e^{in \arg(z)}. \quad (4.113)$$

Allora, la potenza  $n$ -esima è caratterizzata da  $n$  domini di monodromia, che sono degli spicchi di ampiezza  $2\pi/n$ :

$$D_k = \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.114)$$

con

$$f(z) = z^n : D_k \rightarrow \mathbb{C} - \{x \leq 0\}. \quad (4.115)$$



Il codominio di ognuno di questi spicchi è il piano  $\mathbb{C}$  tagliato.

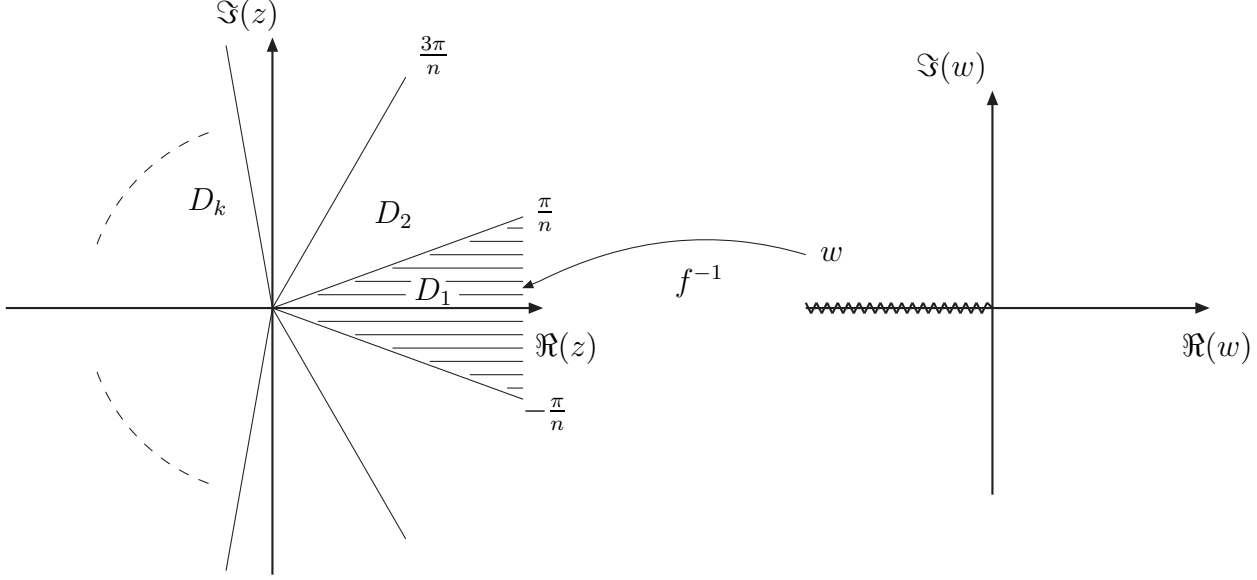
La radice  $n$ -esima è allora definita come segue:

$$z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}. \quad (4.116)$$

Il ramo principale si ottiene con  $k = 0$ :

$$z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\arg(w)}{n}}. \quad (4.117)$$

I  $w \in \mathbb{C} - \{x \leq 0\}$  sono trasformati nello spicchio con  $-\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}$ .



Ogni ramo è analitico, ad eccezione che sul taglio. Infatti le equazioni di Cauchy-Riemann danno, per  $r \neq 0$ ,

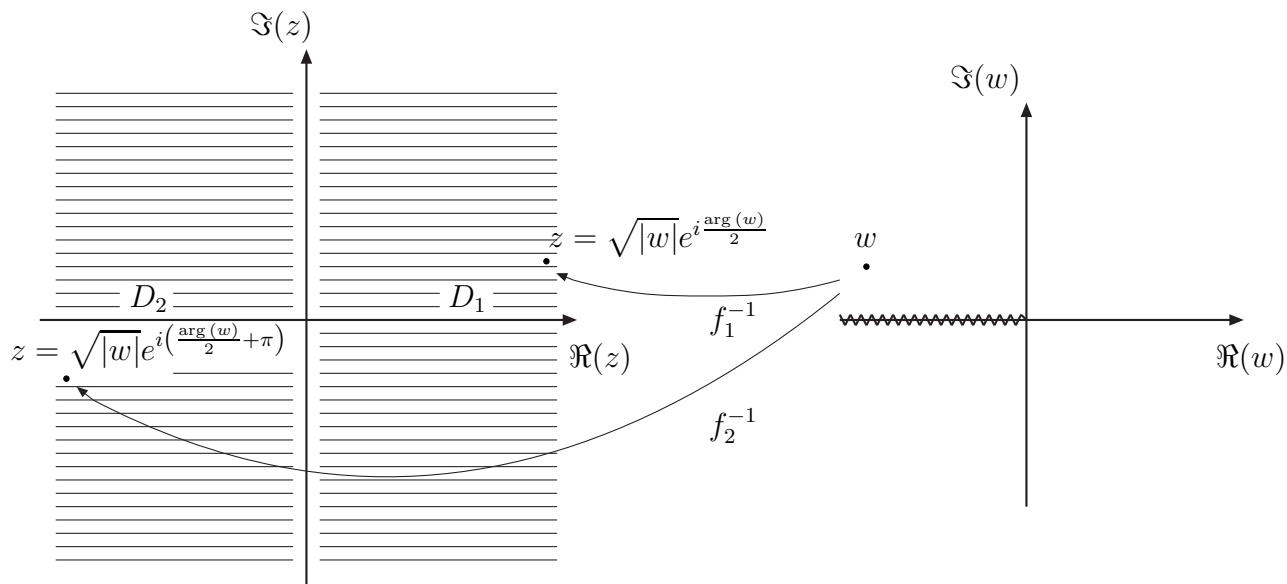
$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta}{n}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i \frac{\theta}{n}} + \frac{i}{r} r^{\frac{1}{n}} \frac{i}{n} e^{i \frac{\theta}{n}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i \frac{\theta}{n}} - \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i \frac{\theta}{n}} = 0, \quad (4.118)$$

Quando  $\arg w$  passa il taglio in  $\pi$ , si accede al secondo foglio di Riemann, in cui  $\pi \arg(w) \leq 3\pi \dots$  e così via. Dall' $n$ -esimo foglio di Riemann si ritorna al primo, in quanto per  $k = 0, 1, \dots, n-1$  i valori della radice  $n$ -esima sono tutti distinti, mentre per  $k = n$  si riottiene il primo valore. La superficie di Riemann della radice  $n$ -esima ha  $n$  fogli, ognuno dei quali è collegato al successivo, incollando il “lembo” del taglio in  $(2k+1)\pi$  con quello in  $(2k-1)\pi$  della copia successiva di  $\mathbb{C}$ . L'ultimo foglio ha il taglio superiore incollato col primo lembo del taglio del primo foglio. Quindi la superficie in questo caso è chiusa.

Per fare un esempio specifico, prendiamo la radice quadrata:

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{|w|} e^{i \left( \frac{\arg(w) + 2k\pi}{2} \right)}. \quad (4.119)$$

Per  $k = 0, 1$  abbiamo i due rami della radice quadrata. Prendendo  $-\pi \arg(w) \leq \pi$  sul primo foglio di Riemann, abbiamo il codominio che è rappresentato dai numeri complessi  $z$  con argomento  $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$  (semipiano  $D_1$  in figura). Se, passando il taglio, l'argomento di  $w$  è  $\pi \arg(w) \leq 3\pi$ , quindi sul secondo foglio di Riemann (la seconda copia di  $\mathbb{C}$  che dà luogo a valori distinti della funzione polidroma), abbiamo il codominio che è rappresentato dai numeri complessi  $z$  con argomento  $\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$  (semipiano  $D_2$  in figura).



Il punto  $w = 0$  è un punto di diramazione di ordine 2, ovvero dopo due giri intorno a  $w = 0$ , la  $\sqrt{w}$  riprende i valori iniziali (corrispondenti al primo giro).

Il taglio nel piano complesso, dominio del ramo monodromo di  $\sqrt{w}$ , parte dal punto di diramazione,  $w = 0$  e va al punto all'infinito, essendo anch'esso un punto di diramazione. Infatti, studiando il comportamento di  $\sqrt{w}$  nel punto all'infinito, otteniamo:

$$\sqrt{w} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{w'}}, \quad (4.120)$$

che quando  $w' \rightarrow 0$  ha un punto di diramazione di ordine 2.

Nel caso della radice  $n$ -esima, il punto di diramazione è un punto del dominio (al contrario di quanto succedeva per il logaritmo) ed inoltre in  $w = 0$  la radice è nulla. Non è però analitica, né in  $w = 0$  né in tutti i punti del taglio.

## 4.6 Punti di diramazione multipli

Se la radice  $\sqrt{z}$  ha un punto di diramazione in  $z = 0$  e uno nel punto all'infinito, andiamo a vedere cosa possiamo dire di una radice del tipo

$$f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}. \quad (4.121)$$

Per semplicità consideriamo  $a, b \in \mathbb{R}$ , ma potrebbero essere tranquillamente due numeri complessi qualunque e il ragionamento non cambierebbe.

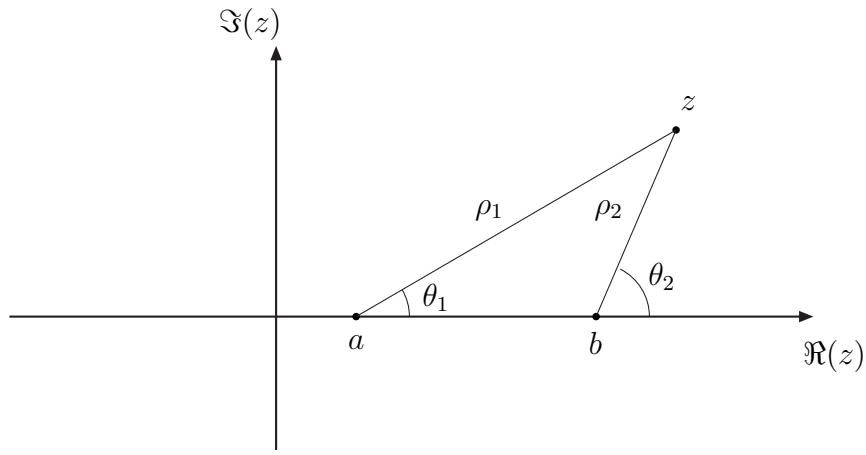
La funzione  $f(z)$  è il prodotto di due radici quadrate,  $\sqrt{z-a}$  e  $\sqrt{z-b}$ . Pertanto è una funzione polidroma. I due punti  $z = a$  e  $z = b$  sono due punti di diramazione per le due radici, vediamo perché.

Poniamo

$$z - a = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad (4.122)$$

$$z - b = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad (4.123)$$

come in figura.

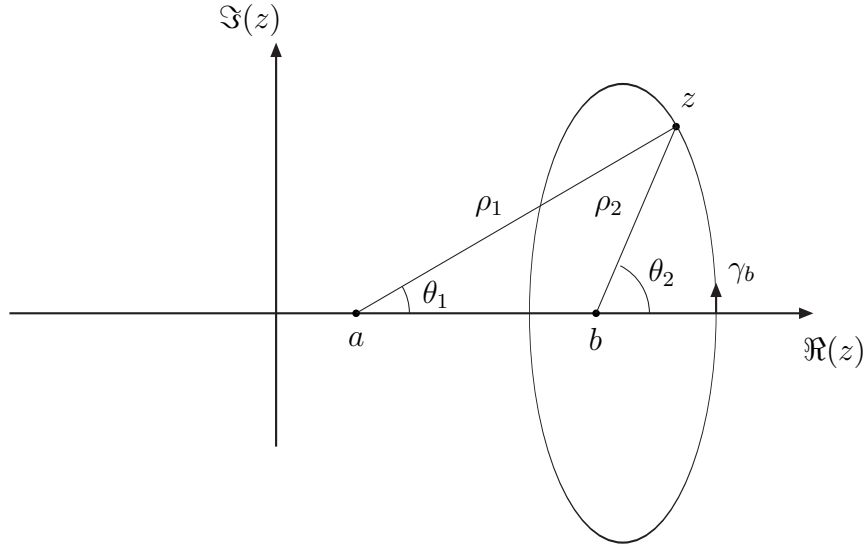


Allora si ha

$$f(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (k_1 + k_2)\pi\right]}, \quad (4.124)$$

con  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dipendenti dal punto  $z$  e  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Vediamo come variano  $k_1$  e  $k_2$  al variare di  $z$ , cercando quindi di individuare il ruolo di  $z = a$  e  $z = b$  come punti di diramazione e i due rami della funzione  $f(z)$  ( $f(z)$  è una radice quadrata ed ha quindi due rami).

Supponiamo che  $z$  vari con continuità sulla curva chiusa  $\gamma_b$  in figura, che include il punto di diramazione:



Facendo  $z$  il giro su  $\gamma_b$  e tornando al punto di partenza, ciò che si ottiene è che  $\theta_1$  varia fra un massimo e un minimo, ma comunque rimane nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Viceversa,  $\theta_2$  fa un giro di  $2\pi$ . Ritornando al punto di partenza, quindi, l'argomento di  $(z - b)$  varia di  $2\pi$ , ovvero finito il giro  $k_2$  diventa  $k_2 = 1$ . Si ha

$$f(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi\right)} = -\sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}. \quad (4.125)$$

Quindi, se si fa un giro completo intorno a  $b$ , si cambia ramo della radice ( $b$  è un punto di diramazione).

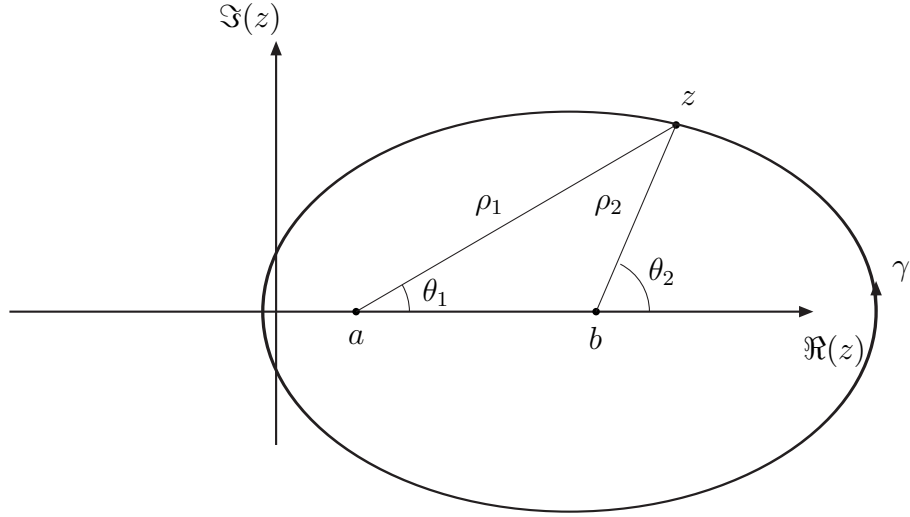


La stessa cosa succede se facciamo un giro completo intorno a  $z = a$ . Analogamente a quanto discusso per  $b$ , l'argomento  $\theta_2$  varia all'interno dell'intervallo  $[0, 2\pi]$ , toccando un massimo e un minimo, ma non facendo un giro. Mentre invece l'argomento  $\theta_1$  fa un giro di  $2\pi$  e quindi alla fine del giro abbiamo  $k_1 = 1$  e

$$f(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi)} = -\sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})}, \quad (4.126)$$

che indica il cambiamento del ramo della radice ( $a$  è un punto di diramazione).

Vediamo adesso cosa succede se giriamo contemporaneamente intorno a  $a$  e  $b$  facendo un giro completo, lungo la curva chiusa  $\gamma$ , come in figura:

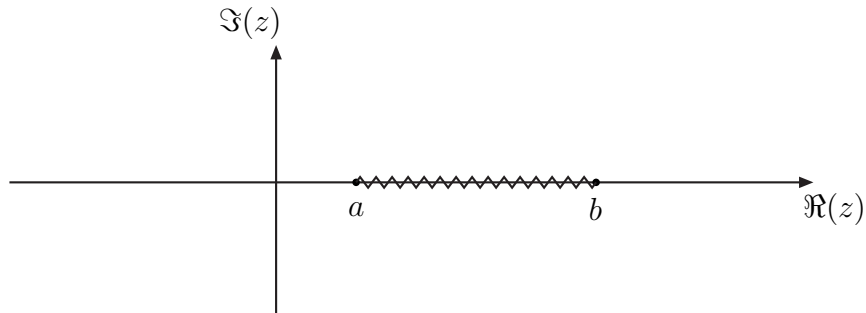


Sia  $\theta_1$  che  $\theta_2$ , adesso, fanno un giro di  $2\pi$  e quindi si ha  $k_1 = k_2 = 1$ . Ne deriva che, dopo un giro su  $\gamma$  si abbia

$$f(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi + \pi)} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} e^{2\pi i} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})}. \quad (4.127)$$

In giro intorno ad entrambi i punti di diramazione fa rimanere, quindi, sullo stesso ramo della funzione.

La scelta del taglio viene fatta per evitare di far girare attorno ad un solo punto di diramazione e poter rimanere, quindi, sullo stesso ramo della funzione  $f(z)$ . La scelta immediata è quella di congiungere col taglio i due punti di diramazione  $a$  e  $b$ :

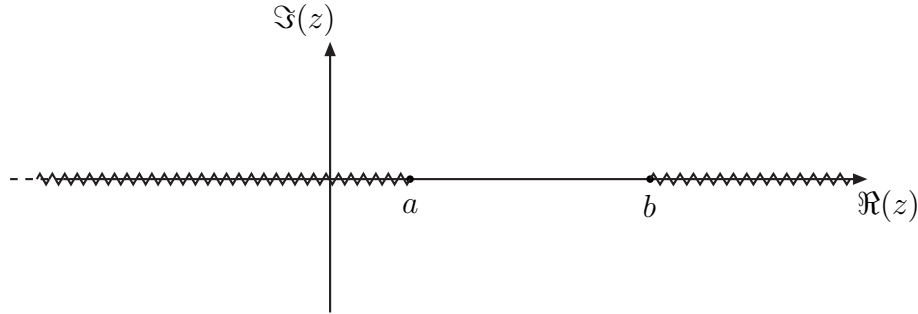


Andiamo a vedere il comportamento della funzione nel punto all'infinito. Sostituendo  $z$  con  $\frac{1}{w}$  abbiamo

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{w} - a\right)\left(\frac{1}{w} - b\right)} = \frac{\sqrt{(1-wa)(1-wb)}}{w} \sim \frac{1}{w}. \quad (4.128)$$

Quindi la funzione  $f(z)$  ha una singolarità isolata di tipo polare (un polo semplice) nel punto all'infinito e questo non costituisce un punto di diramazione. Gli unici punti di diramazione sono al finito e sono  $z = a$  e  $z = b$ . Il taglio quindi può unicamente unire  $a$  con  $b$ .

C'è un altro modo di unire  $a$  con  $b$  che non sia il segmento sull'asse reale da  $a$  a  $b$ . Possiamo unirli tramite il punto all'infinito:



Ovvero ponendo il taglio da  $a$  sull'asse reale fino a  $-\infty$  e da  $b$  fino a  $+\infty$ .

Sulla sfera di Riemann, questa seconda scelta consiste nell'unire i due punti che corrispondono ad  $a$  e  $b$ , tramite proiezione stereografica, per mezzo di due meridiani: dal punto corrispondente ad  $a$  al polo Nord e dal Polo Nord al punto corrispondente a  $b$ . La prima scelta corrisponde, invece, all'unione dei punti immagine di  $a$  e  $b$  sulla sfera di Riemann tramite una curva che non passa dal polo Nord.

Un altro esempio di quanto detto per  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  è quello di

$$f(z) = \sqrt{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}. \quad (4.129)$$

La funzione è una radice quadrata e quindi ha due rami possibili e due fogli di Riemann. Per capire la distribuzione dei tagli consideriamo i vari punti di diramazione:

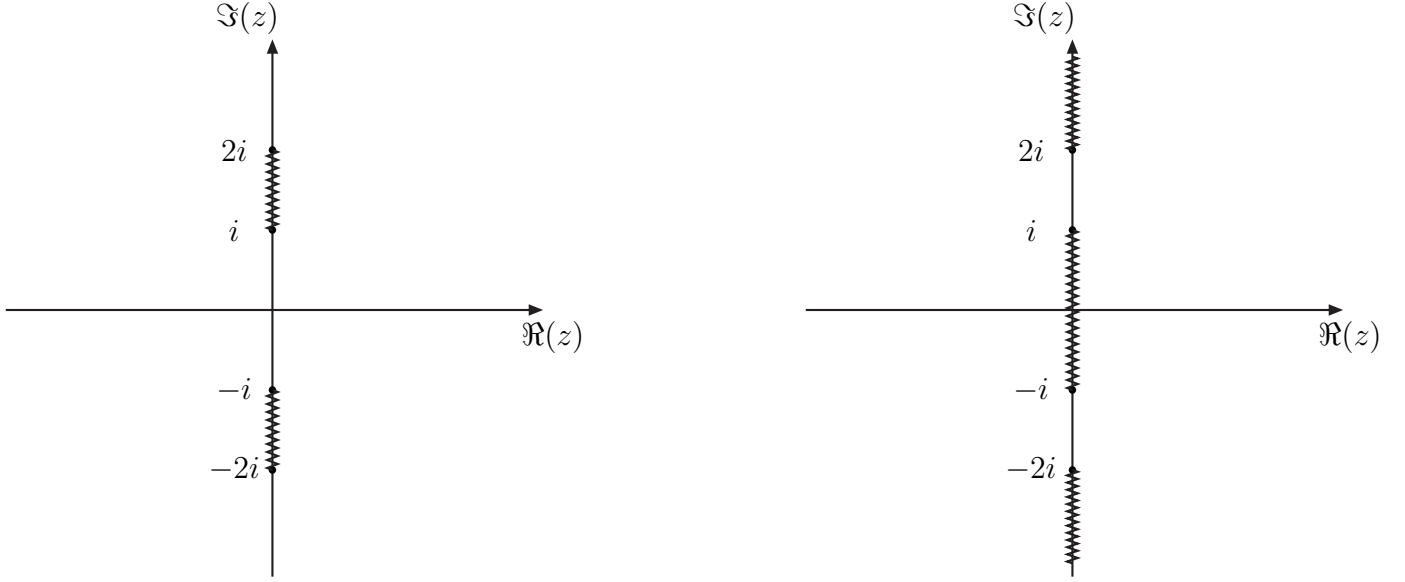
$$f(z) = \sqrt{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \sqrt{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}. \quad (4.130)$$

Si hanno quindi quattro punti di diramazione,  $z = \pm i$  e  $z = \pm 2i$ .

Ripercorrendo il ragionamento fatto per  $\sqrt{(z-a)(z-b)}$  ci si può convincere del fatto che, passando singolarmente intorno ad uno dei 4 punti di diramazione, la radice cambia di segno, passando quindi al secondo ramo. Se giriamo intorno a due punti di diramazione contemporaneamente, gli argomenti interessati sviluppano un fattore  $e^{2\pi i} = 1$ , che quindi indica il fatto che il ramo della radice rimane lo stesso. Girando intorno a tre punti di diramazione contemporaneamente si trova ancora un cambio di ramo, mentre girando intorno a tutti e 4 i punti di diramazione si rimane sullo stesso ramo. Allora la scelta dei tagli deve essere tale da far sì che si possa girare intorno a 2 o 4 punti di diramazione, ma non ad 1 o 3. Una scelta naturale

è quella di unire a due a due i punti di diramazione con un taglio. Un'altra scelta è quella di unire due punti tramite il punto all'infinito (che è un polo doppio per la funzione  $f(z)$  e NON un punto di diramazione) e di unire gli altri due fra loro al finito.

Due possibilità sono rappresentate nella figura seguente:



Consideriamo adesso la funzione

$$f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}. \quad (4.131)$$

Come nel caso precedente, abbiamo tre punti di diramazione al finito, che sono  $z = a, b, c$ . Passando singolarmente intorno ad ognuno di essi, abbiamo accesso al secondo ramo della radice. Se passiamo intorno a due di questi punti, invece, rimaniamo sul primo ramo. Passando intorno a tutti e tre, ci rendiamo conto che stiamo cambiando ramo di nuovo. Ciò avviene sempre per il fatto che la periodicità dell'esponente dell'esponenziale è tale che si abbia un termine  $3\pi i$  che quindi dà un segno negativo davanti a tutto. Utilizzando la notazione per la quale si ha

$$(z-a) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad (z-b) = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad (z-c) = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad (4.132)$$

otteniamo

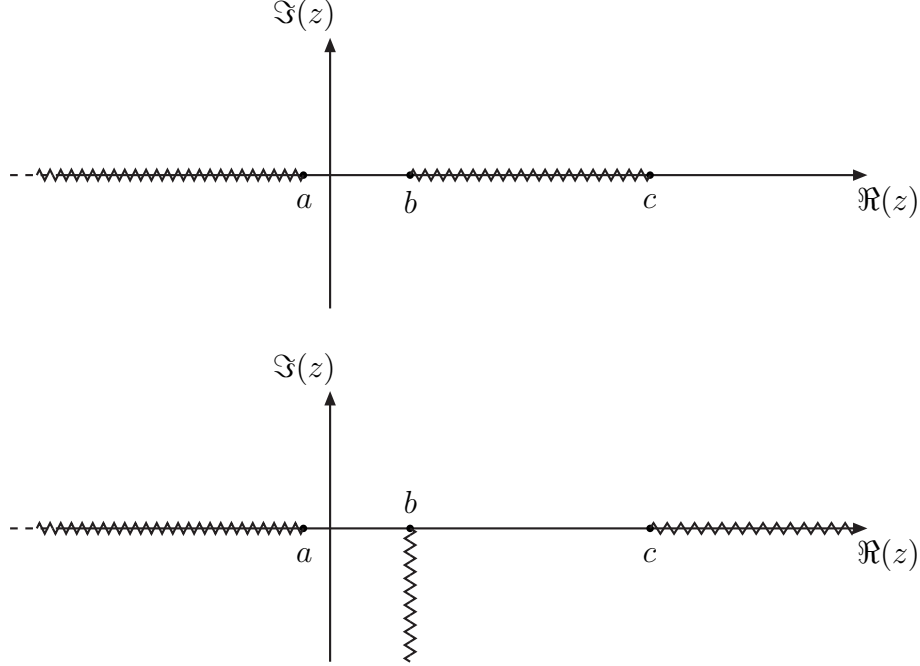
$$f(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} e^{i(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2})} e^{i(k_1 + k_2 + k_3)\pi}. \quad (4.133)$$

Quindi, se  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  (dopo un giro completo intorno ai tre punti di diramazione), si ha  $e^{i(k_1 + k_2 + k_3)\pi} = e^{i3\pi} = -1$ . Questo fa capire come ci debba essere un altro punto di diramazione. Il giro intorno ai tre punti equivale ad un giro intorno al punto all'infinito. Quindi ci aspettiamo che il punto all'infinito sia punto di diramazione, sempre di ordine due. Infatti, se consideriamo  $z \rightarrow \frac{1}{\omega}$  e studiamo il limite  $\omega \rightarrow 0$ , si vede che

$$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\omega} - a\right) \left(\frac{1}{\omega} - b\right) \left(\frac{1}{\omega} - c\right)} \sim \frac{\sqrt{\omega}}{\omega^2}, \quad (4.134)$$

cioè  $\omega \rightarrow 0$  è un punto di diramazione e girando intorno al punto all'infinito effettivamente accediamo al secondo ramo della funzione.

La disposizione dei tagli dovrà quindi essere tale da non permettere di girare intorno ad un punto di diramazione singolarmente e neppure a tre punti, ma solo ad un numero pari di punti. Due esempi sono riportati in figura (dove abbiamo posto per semplicità  $a, b$  e  $c$  sull'asse reale)



Consideriamo adesso la funzione

$$f(z) = \sqrt{(z-a)} \sqrt[3]{(z-b)}. \quad (4.135)$$

La  $f(z)$  ha due punti di diramazione in  $z = -1$  e  $z = i$ . Se poniamo

$$(z+1) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad (z-i) = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad (4.136)$$

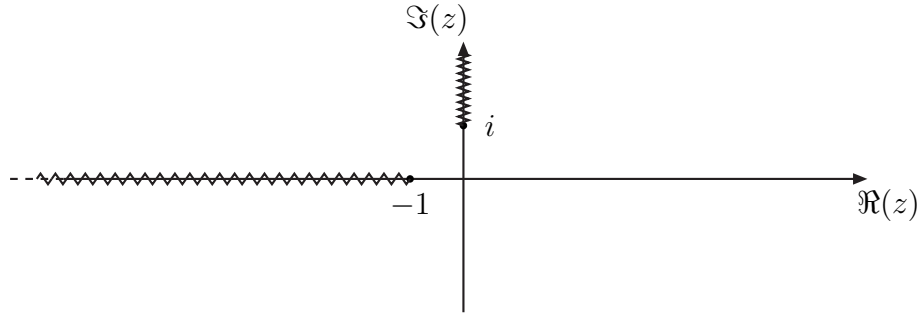
possiamo scrivere

$$f(z) = \sqrt{\rho_1} \sqrt[3]{\rho_2} e^{i\frac{\theta_1}{2}} e^{i\frac{\theta_2}{3}} e^{ik_1\pi} e^{i\frac{2k_2\pi}{3}}. \quad (4.137)$$

Si vede che facendo un giro intorno al solo punto di diramazione  $z = -1$  si passa sul secondo ramo della radice quadrata. Allo stesso modo, passando intorno a  $z = i$  passiamo sul secondo ramo della radice cubica. Passando intorno ai due punti non otteniamo lo stesso effetto dei casi precedenti (studiati sopra). Infatti, mentre  $z = -1$  è un punto di diramazione di ordine 2,  $z = i$  è un punto di diramazione di ordine 3, quindi mentre dopo due giri intorno a  $z = -1$  si riottiene il primo ramo della radice quadrata, ci vogliono tre giri intorno a  $z = i$  per riottenere il primo ramo della radice cubica. Passando intorno ai due punti otteniamo un fattore  $e^{i\frac{5k_2\pi}{3}}$  che evidentemente è  $\neq 1$ . Si capisce quindi che il punto all'infinito è anch'esso un punto di diramazione. Infatti, se mandiamo  $z \rightarrow \frac{1}{\omega}$  e studiamo  $f(1/\omega)$  in  $\omega \rightarrow 0$ , si trova

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{\frac{1+\omega}{\omega}} \sqrt[3]{\frac{1-i\omega}{\omega}}. \quad (4.138)$$

Il punto all'infinito è un punto di diramazione per la radice quadrata e per la radice cubica. Quindi la disposizione dei tagli (per determinare il ramo monodromo principale della funzione) deve essere tale da impedire di girare intorno a  $z = -1$ ,  $z = i$  e anche a  $z = \infty$ .



## 4.7 Funzioni trigonometriche inverse

### L'arcoseno

Consideriamo

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (4.139)$$

e cerchiamo una rappresentazione per la funzione inversa

$$z = \arcsin w. \quad (4.140)$$

Si ha

$$2wi = e^{iz} - e^{-iz}, \quad (4.141)$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per  $e^{iz}$

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0, \quad (4.142)$$

che risolta in  $e^{iz}$  dà

$$e^{iz} = iw \pm \sqrt{1 - w^2} \quad (4.143)$$

e infine

$$z = -i \ln(iw \pm \sqrt{1 - w^2}). \quad (4.144)$$

La (4.144) costituisce una rappresentazione per l'arcoseno. Se consideriamo il fatto che la radice è comunque una funzione polidroma e quindi prende sia il valore positivo che negativo a seconda del ramo, possiamo limitarci al segno positivo nell'argomento del logaritmo e definire

$$\arcsin w = -i \ln(iw + \sqrt{1 - w^2}). \quad (4.145)$$

L'arcoseno è una funzione polidroma. Il ramo principale viene scelto scegliendo il ramo principale per la radice  $\sqrt{1 - w^2}$  e del logaritmo  $\ln(iw + \sqrt{1 - w^2})$ .

Il ramo principale di  $\sqrt{1 - w^2}$  è tale che  $1 - w^2$  non stia sul semiasse reale negativo, ovvero

$$1 - w^2 \neq -t, \quad t \in [0, \infty). \quad (4.146)$$

Si ha quindi

$$w \neq \pm\sqrt{1+t}, \quad (4.147)$$

che corrisponde ad un taglio che va da  $-1$  a  $-\infty$  e da  $1$  a  $\infty$ .

Il ramo principale del logaritmo impone che

$$iw + \sqrt{1-w^2} \neq -t, \quad t \in [0, \infty]. \quad (4.148)$$

Ora, se  $t \in [0, \infty)$  e se per  $\sqrt{1-w^2}$  prendiamo il ramo principale, si ha automaticamente che  $iw + \sqrt{1-w^2} \neq -t$ . Infatti, se ciò non fosse vero dovremmo avere  $iw + \sqrt{1-w^2} = -t$ . Intanto vediamo che  $iw + \sqrt{1-w^2}$  non si annulla mai (quindi non c'è punto di diramazione per il logaritmo al finito). Inoltre,  $iw + \sqrt{1-w^2} = -t$  implica che  $\sqrt{1-w^2} = -(t+iw)$  e quindi, quadrando ambo i membri dell'equazione, si ha

$$w = i \frac{t^2 - 1}{2t}. \quad (4.149)$$

Il primo membro dell'equazione è quindi sempre positivo per  $t \in [0, \infty)$

$$\sqrt{1-w^2} = \sqrt{1 + \frac{(t^2-1)^2}{4t^2}} = \sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}} > 0, \quad (4.150)$$

mentre il secondo membro è sempre negativo per  $t \in [0, \infty)$

$$-(t+iw) = -\left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) = -\frac{(t^2+1)}{2t} < 0, \quad (4.151)$$

contraddicendo l'ipotesi.

In sintesi, l'unico vincolo che abbiamo è costituito dal taglio della radice, ovvero fra  $-1$  e  $-\infty$  e fra  $1$  e  $\infty$ , dove prendendo il ramo principale della radice, prendiamo anche il ramo principale dell'arcoseno.

Nella regione di analiticità, la derivata dell'arcoseno vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arcsin z &= \frac{1}{f'(w)} \Big|_{w=f^{-1}(z)} = \frac{1}{\frac{d}{dw} \sin w} \Big|_{w=\arcsin z} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin z)}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned} \quad (4.152)$$

## L'arcocoseno

Per l'arcocoseno il ragionamento è lo stesso. Si ha

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (4.153)$$

da cui si ottiene

$$\arccos w = -i \ln(w + i\sqrt{1-w^2}). \quad (4.154)$$

Il taglio è definito dal taglio della radice quadrata interna al logaritmo e pertanto riproduce il taglio dell'arcoseno.

Nella regione di analiticità la derivata dell'arcocoseno è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arccos z &= \frac{1}{f'(w)} \Big|_{w=f^{-1}(z)} = \frac{1}{\frac{d}{dw} \cos w} \Big|_{w=\arccos z} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos z)}}, \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

## L'arcotangente

Per la definizione dell'arcotangente si ha

$$w = \tan z = -i \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \right), \quad (4.156)$$

da cui

$$\arctan w = -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{1+iw}{1-iw} \right). \quad (4.157)$$

Il ramo principale è dato dal ramo principale del logaritmo, ovvero

$$\frac{1+iw}{1-iw} \neq -t, \quad t \in [0, \infty), \quad (4.158)$$

la cui soluzione è

$$w \neq i \frac{1-t}{1+t}. \quad (4.159)$$

Il taglio è sull'asse immaginario e va da  $i$  a  $i\infty$  e da  $-i$  a  $-i\infty$ .

All'interno del dominio di analiticità si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arctan z &= \frac{1}{f'(w)} \Big|_{w=f^{-1}(z)} = \frac{1}{\frac{d}{dw} \tan w} \Big|_{w=\arctan z} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan z)}, \\ &= \frac{1}{1 + z^2}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

## 4.8 Funzioni iperboliche inverse

Allo stesso modo delle funzioni trigonometriche inverse si trovano

$$\operatorname{arcsinh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad (4.161)$$

$$\operatorname{arccosh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad (4.162)$$

$$\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right). \quad (4.163)$$

## 4.9 Potenza complessa

Vogliamo definire la funzione

$$f(z) = z^c, \quad z, c \in \mathbb{C}. \quad (4.164)$$

Lo facciamo attraverso il logaritmo come segue

$$f(z) = z^c = e^{c \ln(z)}. \quad (4.165)$$

In questo modo, quando  $c$  assume valori particolari (per esempio è un intero, oppure un razionale) si riottengono le proprietà già studiate delle potenze o delle radici.

La  $f(z)$  così definita è una funzione polidroma. La superficie di Riemann è quella del logaritmo, quindi con infiniti fogli:

$$z^c = e^{c(\ln|z| + i\theta + i2k\pi)}. \quad (4.166)$$

Il ramo principale si ha per  $k = 0$  ed è quindi dato da

$$z^c = e^{c(\ln|z| + i\theta)}, \quad (4.167)$$

con  $-\pi < \theta \leq \pi$  (taglio da  $z = 0$  al punto all'infinito sull'asse reale negativo). La discontinuità sul taglio vale

$$|z|^c (e^{i\pi c} - e^{-i\pi c}) = 2i |z|^c \sin(c\pi). \quad (4.168)$$

I rami successivi della funzione sono dati da

$$z^c = e^{i2k\pi c} e^{c(\ln|z| + i\theta)}. \quad (4.169)$$

Là dove la funzione è monodroma, si può derivare e si ottiene

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} e^{c \ln(z)} = \frac{c}{z} e^{c \ln(z)} = c e^{-\ln(z)} e^{c \ln(z)} = c e^{(c-1) \ln(z)} = c z^{c-1}. \quad (4.170)$$

Se ora consideriamo dei valori particolari di  $c$  ritroviamo la potenza e la radice che abbiamo già studiato. Infatti, supponiamo che  $c \in \mathbb{Z}$ . Allora, si ha  $\sin(c\pi) = 0$  e quindi la discontinuità sparisce. La funzione diventa monodroma e  $z = 0$  non è più un punto di diramazione, ma al massimo una divergenza di tipo polare. Se consideriamo  $c = m/n$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$z^c = |z|^{\frac{m}{n}} e^{m \left( \frac{i\theta + i2k\pi}{n} \right)} \quad (4.171)$$

e quindi  $z = 0$  diventa un punto di diramazione di ordine  $n$ .

## 4.10 Alcuni Esercizi

### 4.10.1 Esercizio

Studiare il dominio di analiticità di

$$f(z) = \log(1 + z). \quad (4.172)$$

Come abbiamo visto, il logaritmo ha un punto di diramazione dove si annulla il suo argomento. Il ramo principale è definito imponendo un taglio da questo punto al punto all'infinito lungo il semi-asse negativo dei reali. In questo caso quindi si ha quindi

$$1 + z \neq -t, \quad t \in [0, \infty), \quad (4.173)$$

ovvero

$$z \neq -1 - t. \quad (4.174)$$

Il taglio parte da  $z = -1$  e si estende al punto all'infinito dove c'è un taglio logaritmico, come si può vedere mandando  $z$  in  $1/\omega$  e studiando in  $\omega = 0$  il  $\ln(1/\omega)$ :

$$z \rightarrow \frac{1}{\omega}, \quad \ln(1 + z) \rightarrow \ln\left(\frac{1 + \omega}{\omega}\right). \quad (4.175)$$



### 4.10.2 Esercizio

Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right). \quad (4.176)$$

La funzione ha due punti di diramazione, in  $z = 1$  e  $z = -1$  (questi due punti non appartengono al dominio di  $f(z)$ ). Il ramo principale del logaritmo è dato per argomento diverso dal taglio, che poniamo fra 0 e il punto all'infinito, sul semiasse reale negativo. Allora abbiamo

$$\frac{z+1}{z-1} \neq -t, \quad t \in (0, \infty), \quad (4.177)$$

ovvero, risolvendo per  $z$ :

$$z \neq \frac{t-1}{t+1}. \quad (4.178)$$

Questa relazione individua il segmento fra  $z = -1$  e  $z = 1$ . Questa è sicuramente una possibilità per mettere il taglio. L'altra possibilità è unire  $z = -1$  e  $z = 1$  tramite il punto all'infinito, considerando però che il punto all'infinito non è punto di diramazione per la  $f(z)$ . Infatti, ponendo  $z \rightarrow \frac{1}{\omega}$  si ha

$$\ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \rightarrow \ln \left( \frac{1+\omega}{1-\omega} \right), \quad (4.179)$$

che, per  $\omega \rightarrow 0$ , non ha punti di diramazione.

Girando intorno a  $z = -1$  o  $z = 1$  singolarmente, si accede agli altri rami della funzione. Infatti, ponendo

$$z+1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z-1 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad (4.180)$$

si può scrivere

$$\ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) = \ln \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + i(\theta_1 - \theta_2) + 2\pi i(k_1 - k_2). \quad (4.181)$$

Girando intorno ai due punti, si ha  $k_1 = k_2$  e quindi si rimane sul ramo principale della funzione

$$\ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) = \ln \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + i(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.182)$$

Se invece si gira una volta intorno a  $z = -1$  si avrà  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0$  e quindi  $f(z)$  cambia di ramo e il logaritmo prende una parte immaginaria  $2\pi i$ . Così per un giro intorno a  $z = 1$ . Girando più volte intorno a  $z = -1$  o  $z = 1$  si accede agli altri rami.

### 4.10.3 Esercizio

Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \ln(z^2). \quad (4.183)$$

Dobbiamo trovare il taglio e il ramo principale della funzione. Si deve imporre

$$z^2 \neq -t, \quad t \in (0, \infty), \quad (4.184)$$

ovvero

$$z \neq \pm i\sqrt{t}, \quad (4.185)$$

che coincide con tutto l'asse immaginario (escluso  $z = 0$  che non appartiene al dominio).

Studiando il punto all'infinito si trova, ancora una volta, un punto di diramazione analogo a  $z = 0$ . Infatti

$$z \rightarrow \frac{1}{\omega}, \quad \ln(z^2) \rightarrow -\ln(\omega^2) \quad (4.186)$$

e quindi, come da  $z = 0$  partono due tagli per il punto all'infinito, nel punto all'infinito arrivano i due tagli.

Se escludiamo l'asse immaginario, che è costituito da punti di non analiticità, nel resto del piano complesso la funzione è analitica e si ha

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \ln(z^2) = \frac{2}{r} + \frac{i}{r}(2i) = 0. \quad (4.187)$$

Cioè valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.

Per capire quale sia il ramo principale della funzione, consideriamo il fatto che la funzione diretta, che ha per funzione inversa la  $f(z)$  è

$$\sqrt{e^w} = z. \quad (4.188)$$

Questa mi dà

$$z = \sqrt{e^x} e^{i\frac{y}{2}}. \quad (4.189)$$

Quindi, il codominio della funzione diretta è formato da una copia di  $\mathbb{C}$  quando, per ogni  $x$ , la  $y$  sta in una fascia di  $4\pi$ . Per esempio, la fascia con  $-2\pi < y < 2\pi$  viene mappata in  $-\pi < \arg(z) < \pi$ , con il taglio a  $\arg(z) = -\pi/2$  e  $\arg(z) = \pi/2$ .

Infatti, si può scrivere

$$\ln(z^2) = 2 \ln|z| + i2\arg(z), \quad (4.190)$$

quindi quando l'argomento di  $z$  sta fra  $-\pi$  e  $\pi$ , il  $\ln(z^2)$  ha una parte immaginaria che sta fra  $-2\pi$  e  $2\pi$ , cioè in una fascia di  $4\pi$ .

#### 4.10.4 Esercizio

Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \ln(z^3). \quad (4.191)$$

Stessa considerazioni si possono fare per questo caso. I tagli sono dati dalla

$$z^3 \neq t, \quad t \in (0, \infty), \quad (4.192)$$

ovvero

$$z \neq \sqrt[3]{t} e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{2k\pi}{3}}. \quad (4.193)$$

Da  $z = 0$  quindi partono tre tagli, con inclinazione  $\pi/3$ ,  $\pi$  e  $-\pi/3$ , che si ricongiungono nel punto all'infinito, che è anch'esso un punto di diramazione dello stesso tipo.

Adesso le fascie di monodromia della funzione diretta sono costituite da fascie di  $6\pi$  nella parte immaginaria. Infatti

$$\ln(z^3) = 3 \ln|z| + i3\arg(z). \quad (4.194)$$

Quando  $-\pi < \arg(z) < \pi$  il dominio della funzione diretta ( $\sqrt[3]{e^w}$ ) spanna una fascia  $-3\pi < \Im(\ln(z^3)) < 3\pi$ .

## Capitolo 5

# Appunti sull'INTEGRAZIONE NEI COMPLESSI

In questo capitolo affrontiamo lo studio dell'integrazione nei complessi. Oltre ad essere parte integrante dello studio delle proprietà analitiche delle funzioni di  $z$ , ci permette di dimostrare importantissime proprietà, come per esempio l'infinita derivabilità di una funzione analitica. Ciò non vuol dire che certe proprietà non si possano dimostrare senza l'integrazione, ma utilizzando i risultati dell'integrazione nei complessi la dimostrazione risulta più semplice ed immediata (inoltre storicamente è stato seguito questo cammino).

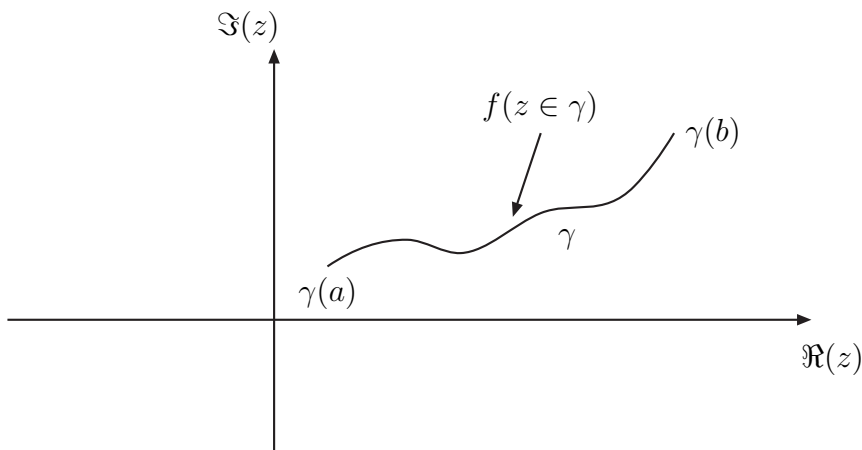
Se nei reali abbiamo

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (5.1)$$

in cui la variabile di integrazione si “muove” lungo il segmento  $[a, b]$ , la generalizzazione ai complessi sarà data da un integrale lungo un cammino in  $\mathbb{C}$ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz, \quad (5.2)$$

dove  $\gamma$  rappresenta tale cammino e  $f(z)$  sarà una funzione definita sui punti di tale curva, con certe proprietà.



## 5.1 Curve in $\mathbb{C}$

Cominciamo con la definizione di cosa intendiamo per curva.

**Definizione 5.1.1** Una curva (o cammino) in  $\mathbb{C}$  è un'applicazione

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow \gamma(t) = x(t) + iy(t),\end{aligned}\tag{5.3}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ , tale che  $x(t) = \Re(\gamma)$  e  $y(t) = \Im(\gamma)$  siano funzioni reali di variabile reale continue.

$\gamma(a)$  è il punto iniziale e  $\gamma(b)$  è il punto finale della curva.

**Definizione 5.1.2** La curva  $\gamma$  è detta semplice se è iniettiva in  $[a, b]$ , cioè se  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  per  $\forall t_1 \neq t_2$  in  $[a, b]$ .

**Definizione 5.1.3** La curva  $\gamma$  è detta chiusa se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**[NB.]** La “curva” è l'applicazione, non il luogo dei punti  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $z = \gamma(t)$ . Questo luogo geometrico è detto *traccia* ed è l'immagine di  $[a, b]$  tramite  $\gamma$ . La traccia si indicherà con  $\{\gamma\}$ , o con  $R(\gamma)$ . A due curve diverse può corrispondere la stessa traccia.

La curva è una funzione complessa di variabile reale. Per essa, si possono definire tutte le proprietà che abbiamo già introdotto per funzioni complesse di variabile complessa, come per esempio la derivabilità:

**Proprietà 5.1.4** Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  con  $[a, b] \in \mathbb{R}$  e  $a < b$  è derivabile in  $t \in [a, b]$ , se esiste finito il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t).\tag{5.4}$$

**Teorema 5.1.5** La funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile in  $t \in [a, b]$  se e solo se  $\Re(f), \Im(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $t$ .

La dimostrazione è identica al caso di funzione complessa di variabile complessa.

**Teorema 5.1.6** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile in  $[a, b]$  e  $f'(t) = 0$  per  $\forall t \in [a, b]$ , allora  $f$  è costante.

**Definizione 5.1.7** Si dice che la curva  $\gamma$  è regolare se  $\Re(\gamma)$  e  $\Im(\gamma)$  sono  $C^1$ . Si dice che  $\gamma$  è regolare a tratti se  $\exists$  una partizione di  $[a, b]$  tale che  $\gamma$  sia regolare in ogni tratto della partizione.

Si dice *lunghezza* della curva il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt,\tag{5.5}$$

dove  $|\gamma'(t)|$  è la velocità della curva

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\Re(\gamma))'^2(t) + (\Im(\gamma))'^2(t)}.\tag{5.6}$$

Per una curva regolare a tratti si ha

$$L_\gamma = \sum_i L_{\gamma_i}.\tag{5.7}$$

Un concetto importante è quello di equivalenza fra curve.

**Definizione 5.1.8** Due curve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \rightarrow \gamma(t)$  e  $\eta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau \rightarrow \eta(\tau)$ , sono equivalenti se  $\exists$  una funzione  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  monotona, continua e strettamente crescente, con  $\phi(c) = a$  e  $\phi(d) = b$  tale che  $\eta = \gamma \circ \phi$ . La  $\phi(\tau)$  è detta riparametrizzazione della curva.

Quindi, se  $\eta = \eta(\tau)$  e  $\gamma = \gamma(t)$ , si ha che  $\eta \sim \gamma$  se  $\eta(\tau) = \gamma(\phi(\tau))$ . Essendo  $\phi(\tau)$  monotona, è invertibile. Quindi si ha  $\gamma(t) = \eta(\phi^{-1}(t))$ .

**[NB.]** Curve equivalenti formano una classe di equivalenza. Per *curva* d'ora in avanti intenderemo la classe, indipendentemente dall'applicazione che la rappresenta. Infatti, le proprietà importanti degli integrali che studieremo non dipendono dalla rappresentazione della curva.

Un esempio di invarianza per riparametrizzazione è costituito dalla lunghezza della curva. Infatti, se

$$\eta(\tau) = \gamma(t(\tau)), \quad (5.8)$$

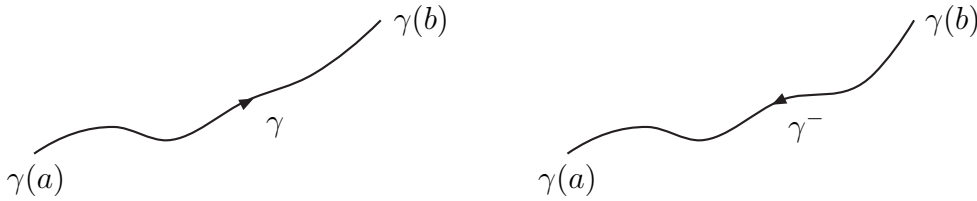
si ha

$$\eta'(\tau) = \gamma'(t(\tau)) t'(\tau). \quad (5.9)$$

Allora

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_c^d |\eta'(\tau)| d\tau = \int_c^d |\gamma'(t(\tau))| |t'(\tau)| d\tau, \\ &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned} \quad (5.10)$$

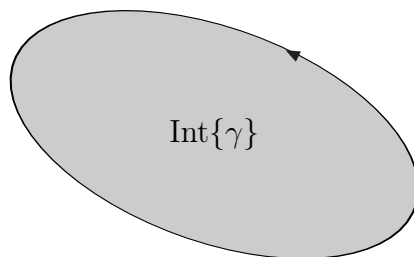
**Definizione 5.1.9** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , si dice cammino inverso  $\gamma^- : [b, a] \rightarrow \mathbb{C}$



Enunciamo soltanto il seguente teorema.

**Teorema 5.1.10 della curva di Jordan.** Sia  $\gamma$  una curva chiusa semplice in  $\mathbb{C}$ . Allora, il complemento di  $\{\gamma\}$ , traccia di  $\gamma$ , è l'unione di due aperti connessi:  $\text{Int}\{\gamma\} \cup \text{Ext}\{\gamma\}$ , di cui  $\text{Int}\{\gamma\}$  è limitato e  $\text{Ext}\{\gamma\}$  illimitato.

**Definizione 5.1.11** Diremo che la curva chiusa  $\gamma$  è orientata positivamente, se percorrendo la curva  $\text{Int}\{\gamma\}$  sta alla sinistra della curva.



### 5.1.1 Omotopia

Consideriamo un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  e due curve con traccia contenuta in  $D$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

**Definizione 5.1.12** Si dice che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope se  $\exists$  una trasformazione continua che connette  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  come in figura. Ovvero se  $\exists$

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D, \quad (5.11)$$

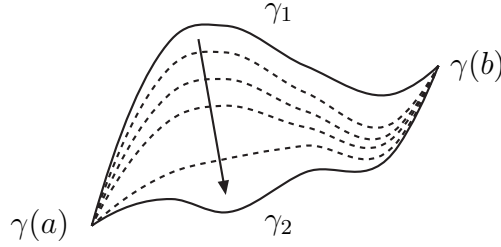
tale che  $\gamma(t, u) \in D$  per  $\forall t \in [a, b]$  e  $u \in [0, 1]$  e

$$\gamma(t, 0) = \gamma_1(t), \quad (5.12)$$

$$\gamma(t, 1) = \gamma_2(t), \quad (5.13)$$

$$\gamma(a, u) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad (5.14)$$

$$\gamma(b, u) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b). \quad (5.15)$$



L'idea è che si passi alla curva  $\gamma_2$  deformando con continuità la curva  $\gamma_1$ .

**NB.** Si ha omotopia anche fra curve chiuse. In particolare, una curva  $\gamma$  chiusa che per esempio abbia traccia in un disco aperto, è omotopa ad un punto. Si dice che è “omotopa a zero”. Questa proprietà dipende da come è fatto il dominio dove è definita la traccia di  $\gamma$ . Nel disco aperto, ogni curva chiusa semplice è omotopa a zero. Cosa che non succede per esempio in un settore circolare (disco forato). Un dominio in cui ogni curva chiusa semplice è omotopa a zero si dice semplicemente connesso. Il settore circolare è un dominio connesso, ma non semplicemente connesso.

## 5.2 Integrali

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva regolare (o regolare a tratti) e  $f : \{\gamma\} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua su  $D \supset \{\gamma\}$ . Allora si dice integrale di  $f(z)$  lungo  $\gamma$  il seguente numero complesso

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt} \quad (5.16)$$

La parte di destra della (5.16) deriva da un procedimento di limite, simile a quello utilizzato nella definizione dell'integrale di una funzione di variabile reale. Infatti possiamo approssimare la curva  $\gamma$  (regolare) con una poligonale e poi mandare il passo della poligonale a zero e il numero di segmenti all'infinito. Possiamo costruire la seguente somma:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}), \quad (5.17)$$

dove  $\xi_k$  è un punto dell'arco  $k$ -esimo della curva  $\gamma$  da  $z_{k-1}$  a  $z_k$  e  $(z_k - z_{k-1})$  è il segmento che unisce  $z_{k-1} = \gamma(t_{k-1})$  a  $z_k = \gamma(t_k)$ . Si ha, per la continuità della  $\gamma$ ,

$$(z_k - z_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\gamma'(t'_k), \quad (5.18)$$

con  $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ . Allora scelto un  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che, se  $(t_k - t_{k-1}) < \delta$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ , si abbia

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \\ = \left| \sum_{k=1}^n f(\gamma(t'_k))\gamma'(t'_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| < \epsilon. \end{aligned} \quad (5.19)$$

L'integrale (5.16) è invariante per riparametrizzazione della curva. Infatti, se  $t = t(\tau)$  e  $\gamma_1(t(\tau)) = \gamma_2(\tau)$ , allora

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma'_1(t) dt = \int_c^d f(\gamma_1(t(\tau)))\gamma'_1(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_c^d f(\gamma_2(\tau))\gamma'_2(\tau) d\tau. \quad (5.20)$$

Se  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ , allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (5.21)$$

**NB.** Ovviamente, se  $f(z)$  è una funzione di variabile complessa “qualunque”, l'integrale su  $\gamma$  dipende da  $\gamma$ .

**Esempio.** Come esempio di ciò possiamo prendere  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  e considerare il suo integrale su tre curve diverse:

$$\gamma_1(t) = e^{it} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad (5.22)$$

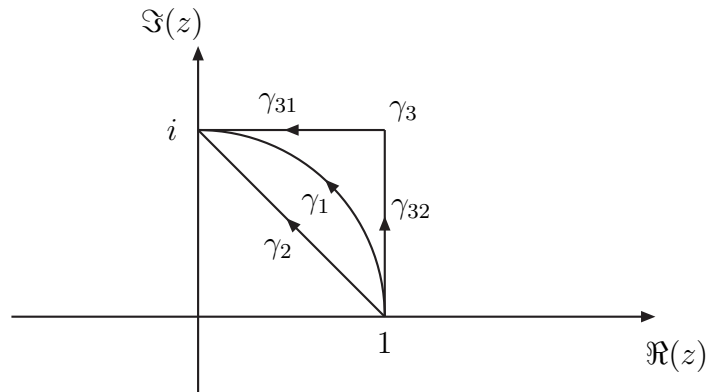
$$\gamma_2(t) = 1 + (i-1)t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) &= \gamma_{31} + \gamma_{32}, \\ \gamma_{31}(t) &= 1 + it, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\gamma_{32}(t) = (1-t) + i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.25)$$

Si ha

$$\gamma_i(a) = 1, \quad \gamma_i(b) = i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.26)$$



Avremo:

1. Integrale sulla prima curva:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{it}|^2 i e^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i e^{it} dt = e^{it} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = i - 1. \quad (5.27)$$

2. Integrale sulla seconda curva:

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 dz = \int_0^1 [(1-t)^2 + t^2](i-1)dt = (i-1) \int_0^1 (1-2t+2t^2) dt = \frac{2}{3}(i-1). \quad (5.28)$$

3. Integrale sulla terza curva:

$$\int_{\gamma_3} |z|^2 dz = \int_0^1 (1+t^2)i dt + \int_0^1 [(1-t)^2 + 1](-1) dt = \frac{4}{3}(i-1). \quad (5.29)$$

Da notare che la funzione che abbiamo integrato NON è una funzione analitica. Come vedremo più avanti, per una funzione analitica l'integrale non dipende dal cammino.

**Proprietà 5.2.1** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva semplice regolare (o regolare a tratti) e siano  $f(z)$  e  $g(z)$  due funzioni continue su  $D \supset \{\gamma\}$  e  $\omega \in \mathbb{C}$ . Allora si hanno le seguenti proprietà:

$$\int_{\gamma} \omega f(z) dz = \omega \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (5.30)$$

$$\int_{\gamma} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz, \quad (5.31)$$

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.32)$$

**Teorema 5.2.2 (di Darboux).** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva semplice regolare (o regolare a tratti) di lunghezza  $L_{\gamma}$  e  $f(z)$  una funzione continua su  $D \supset \{\gamma\}$ . Allora

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L_{\gamma} \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)|. \quad (5.33)$$

*Dimostrazione.* Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt, \\ &\leq \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_{\gamma} \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z)|. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Consideriamo adesso successioni e serie di funzioni. Si hanno i seguenti due risultati.

**Teorema 5.2.3** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva semplice regolare (o regolare a tratti) e  $f_n$  una successione di funzioni continue su  $D \supset \{\gamma\}$ , uniformemente convergente a  $f$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.35)$$



*Dimostrazione.* Siccome  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$ , anche  $f$  è continua e  $\int_{\gamma} f(z) dz$  è ben definita. Se  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , preso un  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_0(\epsilon)$  tale che

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{L_{\gamma}}, \quad (5.36)$$

per  $n > n_0$  e per  $\forall z \in \{\gamma\}$ . Allora, per il thm di Darboux, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)] dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| dz, \\ &\leq L_{\gamma} \sup_{z \in \{\gamma\}} |f_n(z) - f(z)| = \epsilon, \end{aligned} \quad (5.37)$$

dove abbiamo utilizzato la (5.36).

**Corollario 5.2.4** Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  una serie di funzioni continue su  $D \supset \{\gamma\}$ , uniformemente convergente ad  $f(z)$ . Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.38)$$

*Dimostrazione.* Considerato che la serie è il limite della successione delle somme parziali, questo risultato deriva direttamente dal teorema precedente.

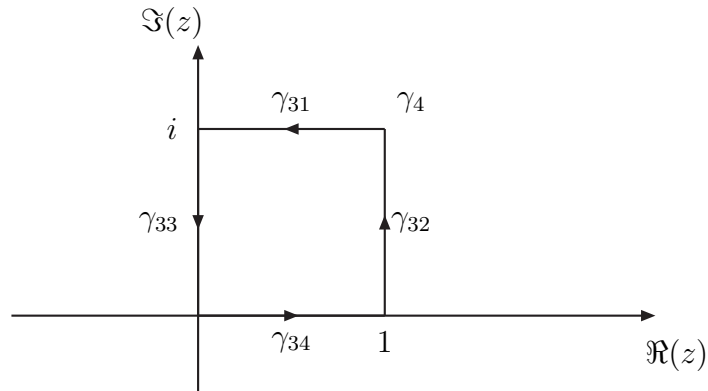
### 5.2.1 Esempi

Vediamo alcuni esempi di integrali su una curva chiusa e cerchiamo di capire come si comportano.

**Esempio 1.** Prima di tutto riprendiamo l'ultimo esempio fatto e calcoliamo l'integrale di  $f(z) = |z|^2$  sulla curva chiusa

$$\gamma_4 = \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34}, \quad (5.39)$$

$$\begin{cases} \gamma_{31} = 1 + it, \\ \gamma_{32} = (1 - t) + i, \\ \gamma_{33} = (1 - t)i, \\ \gamma_{34} = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.40)$$



Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4} |z|^2 dz &= \int_0^1 (1+t^2)i dt + \int_0^1 [(1-t)^2 + 1](-1) dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i) dt + \int_0^1 t^2 dt, \\
&= \frac{4}{3}i - \frac{4}{3} - i \left( t - t^2 + \frac{t^3}{3} \right)_0^1 + \frac{1}{3}, \\
&= i - 1.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Quindi l'integrale sulla curva chiusa di  $f(z) = |z|^2$  è diverso da zero!!

**Esempio 2.** Facciamo adesso l'integrale su una curva chiusa di una funzione analitica. Prendiamo per esempio  $f(z) = z^2$ , che è addirittura intera. Per curva prendiamo la circonferenza di raggio  $R$ .

$$f(z) = z^2, \tag{5.42}$$

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow Re^{it}. \tag{5.43}$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} R^2 e^{2it} i R e^{it} dt = i R^3 \int_0^{2\pi} e^{3it} dt, \\
&= \frac{R^3}{3} e^{3it} \Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Ciò deriva dal fatto che l'esponenziale valutato in 0 o in  $2\pi$  dà lo stesso risultato.

**Esempio 3.** Lo stesso risultato si ottiene considerando  $f(z) = z$ , altra funzione intera. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} R e^{it} i R e^{it} dt = i R^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} dt, \\
&= \frac{R^2}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

**Esempio 4.** ... e così anche per  $f(z) = c$  costante:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} c i R e^{it} dt = i R c \int_0^{2\pi} e^{it} dt, \\
&= R c e^{it} \Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

**Esempio 5.** Consideriamo adesso una potenza inversa. Prendiamo

$$f(z) = \frac{1}{z}. \tag{5.47}$$

Si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R^{-1} e^{-it} i R e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \tag{5.48}$$

e questo risultato è indipendente dal raggio della circonferenza  $\gamma$ .

**Esempio 6.** Prendiamo adesso

$$f(z) = \frac{1}{z^2}. \quad (5.49)$$

Si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R^{-2} e^{-2it} i R e^{it} dt = \frac{i}{R} \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0. \quad (5.50)$$

E così per le altre potenze negative di  $z$ .

Questi esempi si riassumono andando a considerare  $f(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Infatti

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} i R e^{it} dt = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt. \quad (5.51)$$

Quindi l'integrale è nullo per  $\forall n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ , cioè tranne che per  $n = -1$  per cui l'integrale vale  $2\pi i$ .

**NB.** Riassumiamo cosa abbiamo imparato da questo tipo di integrali. Per il momento possiamo soltanto trarre delle conseguenze legate ancora al tipo di funzione e alla curva; poi vedremo che col teorema di Cauchy potremo generalizzare. **Integrando su una circonferenza (curva chiusa) una potenza intera di  $z$  otteniamo che l'integrale è nullo tranne quando la funzione considerata ha un polo semplice interno alla circonferenza. Da notare che anche le funzioni con poli superiori al primo danno integrale nullo, anche se la singolarità è comunque interna alla circonferenza ...**

Prima di tutto vediamo che anche un altro tipo di curva chiusa dà lo stesso risultato. Per fare il calcolo in maniera semplice, prendiamo per esempio  $f(z) = z$  e  $f(z) = 1/z$  sul perimetro di un quadrato:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, \quad (5.52)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1 + (-1 + t)i, \\ \gamma_2 = (1 - t) + i, \\ \gamma_3 = -1 + (1 - t)i, \\ \gamma_4 = (t - 1) - i, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (5.53)$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_0^2 [1 + (-1 + t)i] i dt + \int_0^2 [(1 - t) + i] (-1) dt + \int_0^2 [-1 + (1 - t)i] (-i) dt, \\ &\quad + \int_0^2 [(t - 1) - i] dt, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} &= i \left[ (1 - i)t + i \frac{t^2}{2} \right]_0^2 - \left[ (1 + i)t - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 - i \left[ (-1 + i)t - i \frac{t^2}{2} \right]_0^2 + \left[ -(1 + i)t + \frac{t^2}{2} \right]_0^2, \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

e

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^2 \frac{idt}{[1 + (-1 + t)i]} - \int_0^2 \frac{dt}{[(1 - t) + i]} - \int_0^2 \frac{idt}{[-1 + (1 - t)i]} + \int_0^2 \frac{dt}{[(t - 1) - i]},$$

$$= \ln(-1-i+t)_0^2 + \ln(1+i-t)_0^2 + \ln(1+i-t)_0^2 + \ln(-1-i+t)_0^2, \quad (5.56)$$

$$= 2\ln(1-i) + 2\ln(-1+i) - 2\ln(-1-i) - 2\ln(1+i), \quad (5.57)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + 2\left(\frac{3}{4}\pi\right) - 2\left(-\frac{3}{4}\pi\right) - 2\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\pi i. \quad (5.58)$$

Quindi le proprietà che abbiamo elencato qui sopra non sembrano dipendere dal fatto che avessimo scelto una circonferenza, ma piuttosto dal fatto che la curva è chiusa. Inoltre, il polo semplice deve essere interno alla curva chiusa. Infatti, se il polo semplice della funzione  $f(z) = 1/z$  si trova al di fuori della curva chiusa abbiamo il seguente risultato. Consideriamo

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, \quad (5.59)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1+t, \\ \gamma_2 = 2+it, \\ \gamma_3 = (2-t)+i, \\ \gamma_4 = 1+(1-t)i, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.60)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{idt}{2+it} - \int_0^1 \frac{dt}{(21-t)+i} - \int_0^1 \frac{idt}{1+(1-t)i}, \\ &= \ln(2) + \ln(2+it)_0^1 + \ln(2-t+i)_0^1 + \ln(1+(1-t)i)_0^1, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

### 5.3 Teorema di Cauchy (forma debole)

Sia  $\gamma$  una curva semplice, regolare e chiusa e sia  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una funzione di variabile complessa sul dominio  $D \supset \{\gamma\}$ . L'integrale di  $f(z)$  su  $\gamma$  è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} [u(x, y) + i v(x, y)] (dx + idy), \\ &= \int_{\gamma} \{[u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i [v(x, y)dx + u(x, y)dy]\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Si tratta quindi di due integrali di forme differenziali, sulla curva parametrizzata da  $x(t)$  e  $y(t)$ . Se  $\gamma$  individua un dominio  $\text{Int}(\gamma)$  regolare, limitato e semplicemente connesso, possiamo applicare il teorema di Stokes (o meglio le formule di Gauss-Green)<sup>1</sup> all'integrale (5.62), ottenendo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \{[u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i [v(x, y)dx + u(x, y)dy]\}, \quad (5.65)$$

---

<sup>1</sup>Se  $D$  è un dominio regolare, limitato e semplicemente connesso di  $\mathbb{R}^2$ , di frontiera  $\partial D$ , curva semplice, chiusa, regolare e orientata positivamente e

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \quad (5.63)$$

una forma differenziale su un insieme aperto  $\Omega \supset \overline{D}$  dove  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  sono differenziabili con continuità, allora

$$\oint_{\partial D^+} \omega = \int_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.64)$$

$$= \int_{\text{Int}(\gamma)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \int_{\text{Int}(\gamma)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.66)$$

Se  $f(z)$  è analitica in  $D \supset \{\gamma\}$  e  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ ,  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  sono continue, valendo le condizioni di Cauchy-Riemann si ha che l'integrale in (5.66) diventa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.67)$$

Abbiamo allora dimostrato il

**Teorema 5.3.1 di Cauchy (forma debole).** *Sia  $f(z)$  analitica con derivata prima continua e derivabile (ancora più “debole”, sia  $f(z)$  olomorfa) in un dominio semplicemente connesso  $D$  del piano complesso. Sia  $\gamma$  una curva semplice, regolare, chiusa con traccia in  $D$ . Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.68)$$

**NB.** La “debolezza” di questa formulazione del teorema di Cauchy sta nel fatto che vogliamo che valgano le formule di Gauss-Green e quindi  $f$  deve essere derivabile con derivata continua. In realtà il teorema di Cauchy si può utilizzare per dimostrare che se una funzione è analitica, allora è olomorfa, ovvero se è derivabile una volta in un certo dominio, è ivi derivabile infinite volte. Si può abbandonare l'ipotesi che  $f'(z)$  sia continua, utilizzando una dimostrazione semplice ed elegante del teorema di Cauchy sul rettangolo, dovuta a Goursat.

**Teorema 5.3.2 di Cauchy-Goursat.** *Sia  $f(z)$  definita su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  e sia  $R$  un rettangolo (quindi un insieme chiuso) contenuto in  $\overset{\circ}{D}$  (punti interni di  $D$ ). Se  $f(z)$  è analitica su  $R$ , allora*

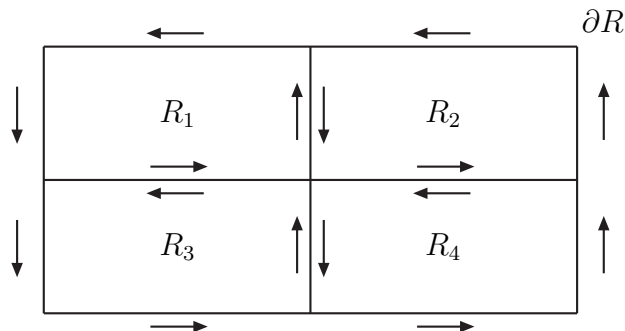
$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0, \quad (5.69)$$

dove  $\partial R$  è il perimetro di  $R$ .

*Dimostrazione.* Dividiamo  $R$  in 4 rettangoli congruenti:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ . Possiamo scrivere

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f(z) dz, \quad (5.70)$$

in quanto l'integrale di  $f(z)$  sui segmenti fra i vari rettangoli dà contributo nullo, visto che questi sono percorsi una volta in un senso e la seconda volta nell'altro.



Dalla disuguaglianza triangolare segue che:

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial R_4} f(z) dz \right|. \quad (5.71)$$

Ci sarà almeno uno dei quattro rettangoli per il quale il contributo alla somma di destra è massima. Diciamo che si tratti del rettangolo  $i$ -esimo. Allora potremo scrivere

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R_i} f(z) dz \right|. \quad (5.72)$$

(Se ci dovessero essere più rettangoli che danno lo stesso contributo, potremmo comunque individuare un algoritmo che permette di sceglierne uno e il ragionamento rimane lo stesso).

Ripetiamo lo stesso ragionamento, dividendo il rettangolo  $i$ -esimo in 4 e scegliendo il rettangolo che massimizza il contributo alla somma dei moduli. All' $n$ -esimo passaggio avremo

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right|, \quad (5.73)$$

dove  $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n$ .

Consideriamo i centri dei rettangoli  $R_n$ . Questi hanno un punto di accumulazione,  $z_0$ , che sarà per costruzione nel rettangolo  $R$ ,  $z_0 \in R$ . Quindi  $f(z)$  è analitica in un intorno di  $z_0$  (ciò vale anche se  $z_0 \in \partial R$ ). Quindi, scelto un  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che se  $|z - z_0| < \delta$  (e questo succederà per  $n$  sufficientemente grande) si abbia

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon, \quad (5.74)$$

ovvero

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| < \epsilon d_n, \quad (5.75)$$

dove  $d_n$  è la diagonale dell' $n$ -esimo rettangolino della serie.

Sappiamo (lo abbiamo dimostrato con un calcolo diretto) che

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \quad (5.76)$$

$$\int_{\partial R_n} z dz = 0. \quad (5.77)$$

Allora

$$\int_{\partial R_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)] dz = 0. \quad (5.78)$$

Quindi:

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right|, \quad (5.79)$$

$$\leq L_{\partial R_n} \sup_{z \in R_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|, \quad (5.80)$$

$$\leq L_{\partial R_n} \epsilon d_n, \quad (5.81)$$

$$= \frac{L}{2^n} \epsilon \frac{d}{2^n}, \quad (5.82)$$

$$= \epsilon \frac{d L}{4^n}, \quad (5.83)$$

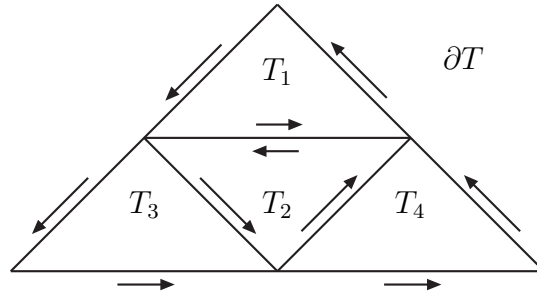
dove la prima uguaglianza segue dal fatto che valga la (5.78) e che quindi abbiamo aggiunto uno zero; poi passando da (5.79) a (5.80) abbiamo usato il teorema di Darboux; da (5.80) a (5.81) abbiamo usato la (5.75) e infine, dalla (5.81) alla (5.82) abbiamo usato il fatto che il perimetro dell' $n$ -esimo rettangolo è dato dal perimetro del rettangolo  $R$ ,  $L$ , diviso per  $2^n$  e così la sua diagonale.

Sostituendo infine la (5.83) nella (5.73) si ha

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| \leq d L \epsilon, \quad (5.84)$$

che per l'arbitrarietà dell' $\epsilon$  dimostra l'assunto.

**NB.** La stessa identica dimostrazione si trova a volte riferita ad un triangolo isoscele, invece che al rettangolo. Infatti se prendiamo la figura qui di seguito



possiamo ripetere esattamente gli stessi passaggi della dimostrazione precedente e concludere che anche in questo caso si ha

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0. \quad (5.85)$$

Il teorema di Goursat può essere dimostrato anche con ipotesi meno restrittive. Per esempio,  $f(z)$  può essere analitica tranne un certo numero (finito) di singolarità eliminabili (come dimostreremo qui sotto) e addirittura  $f(z)$  può essere analitica in  $\text{Int}\{\gamma\}$  ma solo continua su  $\{\gamma\}$  (ma non lo dimostreremo).

**Teorema 5.3.3 di Cauchy-Goursat modificato.** *Sia  $f(z)$  definita su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  e sia  $R$  un rettangolo (quindi un insieme chiuso) contenuto in  $\overset{\circ}{D}$  (punti interni di  $D$ ). Sia  $f(z)$  analitica su  $R$ , tranne nei punti  $\{z_1, \dots, z_n\} \in R$  in cui  $f(z)$  abbia singolarità eliminabili. Allora*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0. \quad (5.86)$$

(La stessa cosa vale per il triangolo ...)

*Dimostrazione.* Dividiamo il rettangolo  $R$  in  $m$  rettangolini ( $m > n$ ) contenuti in  $R$  tali che  $n$  di questi abbiano ognuno una delle  $z_n$  singolarità al centro,  $R_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Avremo

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\partial R_k} f(z) dz + \sum_{i=n+1}^{n+m} \int_{\partial R_i} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\partial R_k} f(z) dz, \quad (5.87)$$

poiché per i rettangoli che non contengono una singolarità interna sappiamo già che vale il teorema di Cauchy-Goursat e quindi

$$\int_{\partial R_i} f(z) dz = 0, \quad i = n+1, \dots, n+m. \quad (5.88)$$

Basta quindi concentrarsi sui rettangolini con al centro una singolarità. Per semplicità consideriamone uno, il  $k$ -esimo. Inoltre, senza perdere in generalità consideriamo un quadrato invece di un rettangolo.

Poiché la singolarità in  $z = z_k$  è rimovibile, si ha

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = 0, \quad (5.89)$$

cioè preso un  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che

$$|(z - z_k) f(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in D(z_k, \delta). \quad (5.90)$$

Se dividiamo il quadrato con  $z_k$  al centro in  $n$  quadrati di cui uno con  $z_k$  al centro e gli altri senza singolarità (per i quali l'integrale è nullo) si arriverà ad una partizione tale che il  $k$ -esimo quadrato  $Q_k$  con al centro  $z_k$  sia tutto contenuto in  $D(z_k, \delta)$ ,  $Q_k \subset D(z_k, \delta)$ . Se  $l_k$  è la lunghezza del quadrato  $Q_k$  si ha che per  $z \in \partial Q_k$

$$|z - z_k| \geq \frac{l_k}{2} \quad \forall z \in \partial Q_k. \quad (5.91)$$

Siccome

$$|f(z)(z - z_k)| < \epsilon, \quad (5.92)$$

si ha anche che

$$|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_k|} < \frac{2\epsilon}{l_k}, \quad \forall z \in \partial Q_k. \quad (5.93)$$

Allora, per il teorema di Darboux

$$\left| \int_{\partial Q_k} f(z) dz \right| \leq 4l_k \sup_{z \in \partial Q_k} |f(z)| < 4l_k \frac{2\epsilon}{l_k} = 8\epsilon. \quad (5.94)$$

Per l'arbitrarietà dell' $\epsilon$  si ha l'assunto.

Abbiamo dimostrato il teorema di Cauchy per una curva geometrica particolare (perimetro del rettangolo o del triangolo). Sfruttando la definizione di integrale sulla curva  $\gamma$  possiamo generalizzare il teorema ad una curva chiusa semplice e regolare qualsiasi.



**Teorema 5.3.4 di Cauchy (sul disco).** Sia  $f(z)$  definita su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  e sia  $B$  un disco (aperto e semplicemente connesso) contenuto in  $\overset{\circ}{D}$ . Se  $f(z)$  è analitica su  $D$ , allora per  $\forall \gamma$  cammino semplice, regolare e chiuso in  $B$  si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.95)$$

*Dimostrazione.* È facile capire come il teorema di Cauchy-Goursat valga per una poligonale chiusa. Prendiamo una poligonale inscritta nella curva  $\gamma$ . Per definizione di integrale si avrà

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) f(z_k) \right| < \epsilon, \quad (5.96)$$

che si può anche scrivere come

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z_k) dz \right| < \epsilon, \quad (5.97)$$

poiché  $\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z_k) dz = (z_k - z_{k-1}) f(z_k)$ .

Per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo anche

$$\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) dz = 0. \quad (5.98)$$

Ma allora

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z_k) dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) dz \right|, \\ &= \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right| < \epsilon. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Usando le proprietà dei numeri complessi, possiamo scrivere

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| - \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right| \quad (5.100)$$

e quindi

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| - \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right| < \epsilon. \quad (5.101)$$

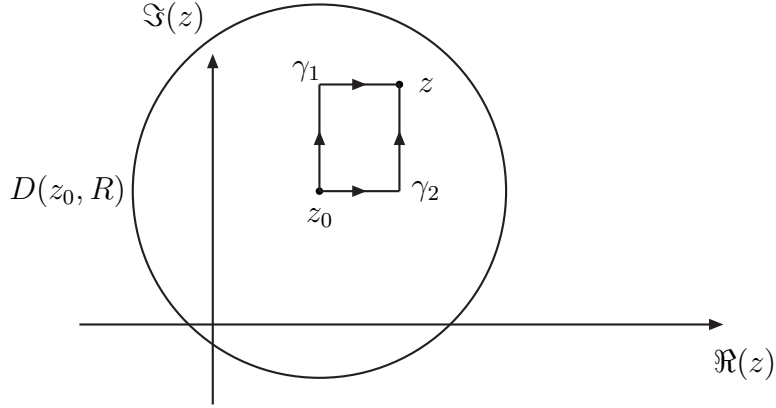
Ne segue che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &< \epsilon + \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right|, \\ &< \epsilon + \sum_{k=1}^n \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z_k) - f(z)) dz \right|, \end{aligned}$$

$$< \epsilon + L_{polig} \sup_{polig} |f(z_k) - f(z)| . \quad (5.102)$$

Per la continuità di  $f(z)$  (è analitica e quindi è continua) si ha che  $\sup_{polig} |f(z_k) - f(z)| < \epsilon'$  non appena  $|z - z_k| < \delta$  scelto in corrispondenza dell' $\epsilon'$ . Per l'arbitrarietà dell' $\epsilon$  si ha l'assunto.

*Altra Dimostrazione.* Possiamo dimostrare il Teorema di Chauchy nel disco anche utilizzando la primitiva della  $f(z)$ . Infatti, sia  $z_0$  il centro del disco in considerazione,  $D(z_0, R)$ . Prendiamo uno  $z \in D$ . Potremo collegare  $z$  a  $z_0$  tramite due cammini che formano un rettangolo (o al massimo con una spezzata), come in figura:



Per ogni cammino possiamo definire una funzione  $F_i(z)$  come segue

$$F_1(z) = \int_{\gamma_1} f(z) dz , \quad (5.103)$$

$$F_2(z) = \int_{\gamma_2} f(z) dz . \quad (5.104)$$

Per il teorema di Goursat, si ha

$$F_1(z) = F_2(z) = F(z) , \quad (5.105)$$

per  $\forall z \in D$  (nota che ciò vale per ogni coppia di spezzate che congiungano  $z_0$  a  $z$ ). Facciamo vedere che  $F(z)$  così definite è analitica e inoltre si ha  $F'(z) = f(z)$ , ovvero la  $F(z)$  è la primitiva di  $f(z)$ . Abbiamo

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^z f(z) dz = F(z_1) + \int_{z_1}^z f(z) dz , \quad (5.106)$$

questo per  $\forall z_1 \in D$ . In Eq. (5.106) abbiamo ommesso la curva specifica poiché qualunque spezzata dà lo stesso integrale. Allora, dalla (5.106) si ha

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) = \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z f(z) dz - f(z_1) = \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z (f(z) - f(z_1)) dz , \quad (5.107)$$

poiché

$$\frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z f(z_1) dz = f(z_1) \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z dz = f(z_1) . \quad (5.108)$$

Ma allora

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| = \frac{1}{|z - z_1|} \left| \int_{z_1}^z (f(z) - f(z_1)) dz \right| \leq \frac{1}{|z - z_1|} L_\gamma \sup_{z \in \{\gamma\}} |f(z) - f(z_1)| \quad (5.109)$$

per il teorema di Darboux. Nota che  $L_\gamma = |z - z_1|$  (o comunque dello stesso ordine). Siccome  $f(z)$  è analitica, è anche continua. Quindi dato un  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $|z - z_1| < \delta$  si abbia che  $|f(z) - f(z_1)| < \epsilon$ . In corrispondenza di questo  $\epsilon$ , la (5.109) diventa allora

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \epsilon. \quad (5.110)$$

Ovvero, abbiamo dimostrato che esiste il limite  $z \rightarrow z_1$  del primo membro e questo è pari a zero. La  $F(z)$  risulta quindi derivabile e

$$F'(z_1) = f(z_1), \quad (5.111)$$

cioè la  $F(z)$  è la primitiva di  $f(z)$ . Allora, per una qualunque curva regolare (o regolare a tratti)  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\{\gamma\} \in D(z_0, R)$  si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) \quad (5.112)$$

e quindi per una curva chiusa, tale che  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , si ha l'assunto:

$$\int_\gamma f(z) dz = 0. \quad (5.113)$$

Allo stesso modo si può dimostrare il teorema di Cauchy nel caso in cui la funzione  $f(z)$  abbia in  $\text{Int}\{\gamma\}$  un certo numero di singolarità rimovibili.

**Teorema 5.3.5 di Cauchy (sul disco) modificato.** *Sia  $f(z)$  definita su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  e sia  $B$  un disco (aperto e semplicemente connesso) contenuto in  $D$ . Se  $f(z)$  è analitica su  $D$ , tranne un numero finito di singolarità rimovibili  $\{z_1, \dots, z_k\}$ , allora per  $\forall \gamma$  cammino semplice, regolare e chiuso in  $B$ , tale che  $z_i \notin \{\gamma\}$ , si ha*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0. \quad (5.114)$$

(Cioè le singolarità non devono essere sulla curva di integrazione  $\gamma$ .)

### 5.3.1 Una conseguenza del Teorema di Cauchy: primitiva

L'immediata conseguenza del teorema di Cauchy è l'esistenza della primitiva<sup>2</sup> di  $f(z)$ . Infatti, se  $f(z)$  è analitica in  $D$  si ha

$$\int_\gamma f(z) dz = 0, \quad (5.115)$$

---

<sup>2</sup>Qui adottiamo il punto di vista “ dimostrato il teorema di Cauchy, questo si utilizza per dimostrare che esiste la primitiva”. Nella seconda dimostrazione del teorema, invece, abbiamo dimostrato il teorema dimostrando che esiste la primitiva.

per ogni  $\gamma$  la cui traccia sia inclusa in  $D$ . Ma allora, possiamo spezzare il cammino chiuso in due cammini

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (5.116)$$

tali che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0. \quad (5.117)$$

Quindi, siccome

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = - \int_{\gamma_2^-} f(z) dz, \quad (5.118)$$

si ha

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2^-} f(z) dz, \quad (5.119)$$

per  $\forall \gamma_1, \gamma_2$  con  $\gamma_1(a) = \gamma_2^-(a)$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2^-(b)$ . Allora l'integrale di  $f(z)$  dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale, ma non dalla curva su cui si integra. Potremo scrivere

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(z) dz, \quad (5.120)$$

senza specificare ulteriormente il  $\gamma$  di integrazione, poiché il risultato dipende solo da  $z_0$  e  $z$ . Si ha

**Teorema 5.3.6** *La funzione  $F(z)$  è analitica e si ha*

$$F'(z) = f(z), \quad (5.121)$$

*cioè  $F(z)$  è la primitiva di  $f(z)$ .*

*Dimostrazione.* Per provare che  $F'(z) = f(z)$  costruiamo il rapporto incrementale di  $F(z)$  e dimostriamo che il suo limite esiste ed è proprio  $f(z)$ .

Prendiamo  $z_1 \in D$  e costruiamo

$$\Delta = \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z}, \quad (5.122)$$

$$= \frac{1}{z_1 - z} \left( \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz - \int_{z_0}^z f(z) dz \right), \quad (5.123)$$

$$= \frac{1}{z_1 - z} \left( \int_{z_0}^z f(z) dz + \int_z^{z_1} f(z) dz - \int_{z_0}^z f(z) dz \right), \quad (5.124)$$

$$= \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(z) dz. \quad (5.125)$$

Siccome

$$f(z_1) = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(z_1) dz, \quad (5.126)$$

si ha

$$\Delta = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} f(z) dz + f(z_1) - f(z_1) = f(z_1) + \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} [f(z) - f(z_1)] dz, \quad (5.127)$$

ovvero

$$\frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z_1) = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} [f(z) - f(z_1)] dz. \quad (5.128)$$

Ora ricordiamoci che  $f(z)$ , essendo analitica in tutto  $D$ , è anche continua. Allora, scelto un  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che per  $|z_1 - z| < \delta$  risulti

$$|f(z) - f(z_1)| < \epsilon. \quad (5.129)$$

Ma allora

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z_1) \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z} \right| \left| \int_z^{z_1} [f(z) - f(z_1)] dz \right|, \quad (5.130)$$

$$\leq \frac{1}{|z_1 - z|} L_{\gamma_{z_1 z}} \sup_{z \in D} |f(z) - f(z_1)|, \quad (5.131)$$

$$\leq \epsilon, \quad (5.132)$$

dove per passare da (5.130) a (5.131) abbiamo utilizzato il teorema di Darboux e per arrivare alla (5.131) abbiamo usato il fatto che  $L_{\gamma_{z_1 z}} = |z_1 - z|$  e la (5.129).

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = F'(z_1) = f(z_1), \quad (5.133)$$

cioè  $F(z)$  è analitica e la sua derivata coincide con  $f(z)$ .

### 5.3.2 Domini multiplamente connessi

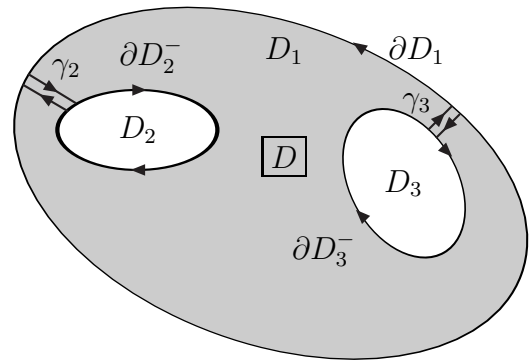
Abbiamo per adesso parlato del teorema di Cauchy in un dominio semplicemente connesso. Supponiamo invece di considerare un dominio multiplamente connesso  $D = D_1 - D_2 - D_3$  entro cui la funzione  $f(z)$  sia analitica e lo sia anche sulla frontiera  $\partial D$  di tale dominio. Allora si avrà

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0, \quad (5.134)$$

dove  $\partial D = \partial D_1 + \partial D_2^- + \partial D_3^-$ , è dato dalla somma delle curve in figura.

Il cammino  $\partial D$  si ottiene nel seguente modo: partendo da un qualunque punto sulla parte superiore di  $\partial D_1$ , si procede in senso positivo (antiorario); arrivati al primo cammino  $\gamma_2$  si procede verso  $D_2$  e si percorre, questa volta in senso orario, il cammino  $\partial D_2$  fino a quando, tramite il secondo cammino  $\gamma_2$  si torna a percorrere  $\partial D_1$ ; si procede in senso antiorario fino a  $\gamma_3$  e si ripete quanto detto per  $\gamma_2$ , ovvero si procede verso  $D_3$ , si percorre  $\partial D_3$  in senso orario e poi, tramite il secondo cammino  $\gamma_3$  si ritorna su  $\partial D_1$ , concludendo il giro. La

curva così ottenuta,  $\partial D$ , è omotopa a zero nella regione di analiticità della  $f(z)$  e pertanto vale la (5.134). Quando i due cammini  $\gamma_2$  si sovrappongono, diventano lo stesso cammino percorso



una volta in un senso e una nell'altro. Il contributo all'integrale (5.134) di questi due pezzetti, è nullo. Così avviene per i cammini contrassegnati in figura con  $\gamma_3$ . Quindi alla fine otteniamo che

$$0 = \int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D_1} f(z) dz + \int_{\partial D_2^-} f(z) dz + \int_{\partial D_3^-} f(z) dz. \quad (5.135)$$

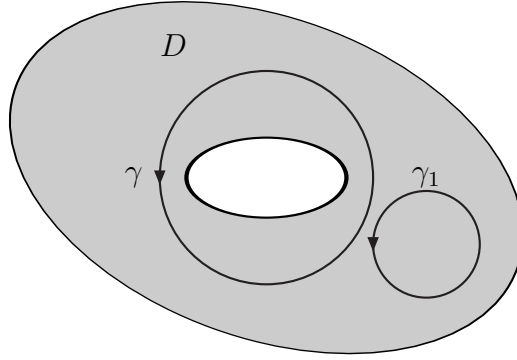
Siccome

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (5.136)$$

si ha infine

$$\int_{\partial D_1} f(z) dz = \int_{\partial D_2} f(z) dz + \int_{\partial D_3} f(z) dz. \quad (5.137)$$

Consideriamo sempre un dominio multiplamente connesso  $D$ , come in figura.



Se la  $f(z)$  è analitica in  $D$  e consideriamo le due curve  $\gamma$  e  $\gamma_1$  con traccia in  $D$ , si avrà

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0, \quad (5.138)$$

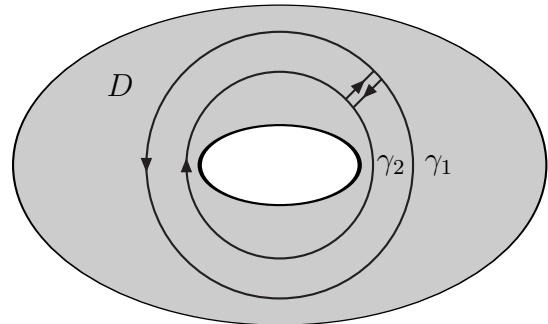
per il teorema di Cauchy ( $\gamma_1$  è omotopa a zero nella regione di analiticità di  $f(z)$ ), mentre invece sarà

$$\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0, \quad (5.139)$$

poiché  $\gamma$  non è omotopa a zero e non vale il teorema di Cauchy.

### 5.3.3 Principio di deformazione dei cammini

Consideriamo sempre una funzione  $f(z)$  analitica su  $D \in \mathbb{C}$ . Indipendentemente dal fatto che  $D$  sia semplicemente connesso o no, possiamo considerare il cammino  $\gamma$  in figura, dato da  $\gamma_1$  percorso in senso antiorario fino al primo segmento che lo collega a  $\gamma_2$ , che viene percorso in senso orario e ricollegato a  $\gamma_1$  tramite il secondo segmento. se sovrapponiamo i due segmenti, avremo solo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e un segmento che verrà percorso una volta in un



senso e la seconda volta nell'altro. Se consideriamo l'integrale di  $f(z)$  su  $\gamma$ , per il teorema di Cauchy questo sarà nullo. D'altra parte, l'integrale su  $\gamma$  sarà dato dalla somma dell'integrale su  $\gamma_1$ , di quello su  $\gamma_2$  e dall'integrale sul primo e sul secondo segmento. Questi due, però danno contributo nullo. Quindi avremo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^-} f(z) dz = 0. \quad (5.140)$$

Siccome

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (5.141)$$

avremo infine

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (5.142)$$

Quindi, purché fra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non ci siano divergenze di  $f(z)$ , l'integrale di  $f(z)$  su  $\gamma_1$  è lo stesso dell'integrale su  $\gamma_2$ . Questo è noto come “Principio di deformazione dei cammini”, poiché si può passare da  $\gamma_1$  al cammino omotopo  $\gamma_2$  (deformare  $\gamma_1$  su  $\gamma_2$ ) e l'integrale non cambia.

### Esempio

Come esempio, consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z - a}, \quad (5.143)$$

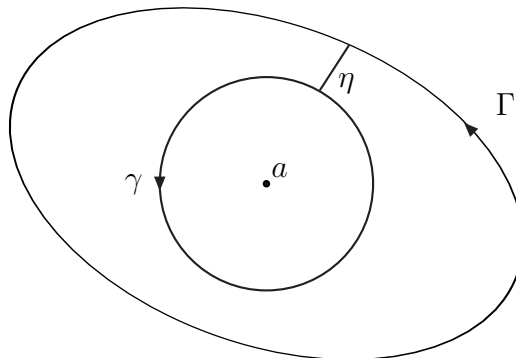
dove  $a \in \mathbb{C}$ . La  $f(z)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne nel punto  $z = a$  in cui ha un polo semplice. Abbiamo visto per integrazione e diretta che se consideriamo l'integrale di  $f(z)$  su una circonferenza centrata in  $a$  si ha

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i, \quad (5.144)$$

$$\gamma(t) = a + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.145)$$

Questo risultato deriva dal fatto che la primitiva di  $f(z)$  è un logaritmo e quindi una funzione polidroma. Siccome  $z = a$  è un punto di diramazione del logaritmo, facendo un giro intorno ad  $a$  e tornando allo stesso punto di partenza si trova la discontinuità e quindi  $2\pi i$ .

Per il principio di deformazione dei cammini,  $2\pi i$  sarà anche il risultato dell'integrale di  $f(z)$  su un qualsiasi cammino  $\Gamma$  che giri intorno a  $z = a$ .



Infatti, considerando la figura, si ha che per il teorema di Cauchy l'integrale di  $f(z)$  sulla curva chiusa costituita da  $C = \Gamma + \eta + \gamma^- + \eta^-$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} + \int_{\eta} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma^-} \frac{dz}{z-a} + \int_{\eta^-} \frac{dz}{z-a} = 0. \quad (5.146)$$

Ma i due contributi su  $\eta$  e  $\eta^-$  si annullano e siccome  $\int_{\gamma^-} = -\int_{\gamma}$  si ha infine

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \quad (5.147)$$

per  $\forall \Gamma$  semplice, regolare (o regolare a tratti) e chiusa, che contenga  $z = a$ .

### 5.3.4 Formula integrale di Cauchy

Un'importantissima conseguenza del teorema di Cauchy è la formula integrale, che collega le proprietà locali della funzione analitica con un suo integrale lungo una curva chiusa.

Cominciamo col definire l'indice di un punto rispetto ad una curva.

**Definizione 5.3.7** *Dato un cammino chiuso  $\gamma$  e dato un punto  $a \in \mathbb{C}$  ma  $a \notin \{\gamma\}$ , si dice "indice" di  $a$  rispetto a  $\gamma$  il numero così definito:*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}. \quad (5.148)$$

**Teorema 5.3.8**  *$n(\gamma, a)$  è quindi (per quanto visto nel paragrafo precedente) un'applicazione da  $\mathbb{C} - \{\gamma\} \rightarrow \mathbb{C}$  a valori interi, costanti su ogni componente connessa di  $\mathbb{C} - \{\gamma\}$  e  $n(\gamma, a) = 0$  sulla componente illimitata.*

*Dimostrazione.* Nel caso di una curva semplice, si ha che  $n(\gamma, a) = 1$  e la dimostrazione segue da quanto detto nel paragrafo precedente (per integrazione diretta). In generale, si ha quanto segue. Sia  $\gamma(t)$  con  $\alpha \leq t \leq \beta$ , una curva regolare chiusa. Consideriamo la funzione

$$h(t) = \int_{\alpha}^t \frac{\gamma'(t_1)}{\gamma(t_1) - a} dt_1, \quad (5.149)$$

con  $a \in \mathbb{C}$  tale che  $a \notin \{\gamma\}$ .  $h(t)$  è definita e continua nell'intervallo chiuso  $t \in [\alpha, \beta]$  e tale che

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}. \quad (5.150)$$

Ne segue che la funzione

$$f(t) = e^{-h(t)} (\gamma(t) - a) \quad (5.151)$$



sia derivabile e che valga

$$f'(t) = -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - a) + e^{-h(t)}\gamma'(t), \quad (5.152)$$

$$= -e^{-h(t)}\gamma'(t) + e^{-h(t)}\gamma'(t) = 0, \quad (5.153)$$

per  $\forall t \in [\alpha, \beta]$ . Siccome  $f(t)$  è continua, ne segue che è costante in  $[\alpha, \beta]$ .

Si ha  $h(\alpha) = 0$  e quindi  $f(\alpha) = \gamma(\alpha) - a$  e siccome  $f(t) = \text{cost}$ , dovrà essere ovunque uguale a  $f(\alpha)$ . Quindi

$$e^{-h(t)}(\gamma(t) - a) = \gamma(\alpha) - a, \quad (5.154)$$

cioè

$$e^{h(t)} = \frac{\gamma(t) - a}{\gamma(\alpha) - a}. \quad (5.155)$$

Se  $\gamma(t)$  è una curva chiusa, si ha  $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$  e quindi

$$e^{h(\beta)} = 1. \quad (5.156)$$

Ne segue che  $h(\beta)$  deve essere un multiplo di  $2\pi i$  ovvero

$$n(\gamma, a) = k \in \mathbb{Z}. \quad (5.157)$$

Consideriamo adesso la componente illimitata. Prendiamo  $a$  con  $|a|$  grande a piacere. Allora, preso un  $\epsilon > 0$  e  $a$  tale che  $|\gamma(t) - a| > 1/\epsilon$  per  $\forall t \in [\alpha, \beta]$ , si ha

$$|n(\gamma, a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \right| \leq \frac{L_{\gamma}}{2\pi} \sup_{z \in \{\gamma\}} \left| \frac{1}{z - a} \right|, \quad (5.158)$$

$$\leq \frac{L_{\gamma}}{2\pi} \epsilon. \quad (5.159)$$

Per l'arbitrarietà dell' $\epsilon$  e per il fatto che  $n(\gamma, a)$  è a valori interi segue che  $n(\gamma, a) = 0$ .

**Teorema 5.3.9 (formula integrale di Cauchy)** *Sia  $f(z)$  definita ed analitica su un disco  $D$  (aperto e semplicemente connesso). Allora,  $\forall z \in D$  e per  $\forall \gamma$  regolare e chiusa in  $D$ , con  $z \notin \{\gamma\}$ , si ha*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (5.160)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad (5.161)$$

che è una funzione analitica in  $D$  tranne per  $w = z$  dove  $F(w)$  ha una singolarità eliminabile

$$\lim_{w \rightarrow z} (w - z)F(w) = 0. \quad (5.162)$$

Allora, per il teorema di Cauchy applicato alla  $F(w)$  si ha

$$\int_{\gamma} F(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0 \quad (5.163)$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = 2\pi i n(\gamma, z) f(z), \quad (5.164)$$

da cui l'assunto.

**Teorema 5.3.10 (formula integrale di Cauchy per la derivata prima)** Sia  $f(z)$  definita ed analitica su un disco  $D$  (aperto e semplicemente connesso). Allora,  $\forall z \in D$  e per  $\forall \gamma$  regolare e chiusa in  $D$ , con  $z \notin \{\gamma\}$ , si ha

$$n(\gamma, z) f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw. \quad (5.165)$$

*Dimostrazione.* Costruiamoci il rapporto incrementale per  $f(z)$ . Utilizzando la formula integrale di Cauchy si ha

$$n(\gamma, z')f(z') - n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z'} dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z'-z)f(w)}{(w-z')(w-z)} dw. \quad (5.166)$$

Siccome  $z, z' \in \text{Int}\{\gamma\}$ , si ha che  $n(\gamma, z') = n(\gamma, z)$  e quindi

$$n(\gamma, z) \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)} dw. \quad (5.167)$$

Notiamo che il limite  $z' \rightarrow z$  sotto il segno di integrale nella parte destra dell'equazione porterebbe esattamente a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad (5.168)$$

mentre lo stesso limite a sinistra darebbe esattamente la derivata prima della  $f(z)$ . Bisogna quindi dimostrare che il limite dell'integrale è uguale all'integrale del limite, ovvero che

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw. \quad (5.169)$$

Per far ciò utilizziamo la definizione di limite. Dato un  $\epsilon > 0$  deve esistere un  $\delta(\epsilon)$  tale che per  $|z' - z| < \delta$  si abbia

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)} dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right) \right| < \epsilon. \quad (5.170)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)} dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right) \right| = \left| \frac{z'-z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)^2} dw \right|, \\ &= \left| \frac{z'-z}{2\pi i} \right| \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)^2} dw \right| \leq \sup_{w \in \{\gamma\}} \left| \frac{f(w)}{(w-z')(w-z)^2} \right| L_{\gamma} \frac{|z'-z|}{2\pi}, \\ &< \frac{M}{d^3} L_{\gamma} |z'-z|, \end{aligned} \quad (5.171)$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Darboux e dove  $d$  è la distanza minima fra  $w$  e  $z$  o  $z'$ ,  $L_{\gamma}$  è la lunghezza della curva  $\gamma$  e  $M$  è il sup della funzione sulla curva.

Se scegliamo  $\delta = \epsilon d^3 / (ML_{\gamma})$ ,  $|z' - z| < \delta$  implica  $\Delta < \epsilon$ .

Abbiamo dimostrato che  $f'(z)$  esiste, ma abbiamo anche dimostrato che è pari alla derivazione sotto il segno di integrale. Possiamo dimostrare questo risultato in maniera generale (che ci serve anche per dimostrare la formula integrale di Cauchy per la derivata n-esima).

**Teorema 5.3.11** Sia  $f(z, a)$  una funzione continua di  $z$  e  $a$  quando  $z$  varia su una curva regolare  $\gamma$  e  $a$  in una regione  $U$  delimitata da uno o più circuiti. Inoltre,  $\forall z \in \{\gamma\}$ ,  $f(z, a)$  sia analitica in  $a \in U$ . Allora l'integrale

$$J(a) = \int_{\gamma} f(z, a) dz \quad (5.172)$$

è una funzione analitica di  $a$  in  $U$  e

$$J'(a) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial a}(z, a) dz. \quad (5.173)$$

*Dimostrazione.* Siano  $a, b \in U$ . Costruiamoci il rapporto incrementale per  $J(a)$ . Si ha

$$\frac{J(b) - J(a)}{b - a} = \int_{\gamma} \frac{f(z, b) - f(z, a)}{b - a} dz. \quad (5.174)$$

Siccome  $f(z, a)$  è analitica in  $a$ , si ha

$$\begin{aligned} H(z, b) &= \frac{f(z, b) - f(z, a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z, w)}{w - b} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z, w)}{w - a} dw \right), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z, w)}{(w - a)(w - b)}, \end{aligned} \quad (5.175)$$

con  $a, b \in \text{Int}\{\gamma'\}$ . La funzione  $H(z, b)$  è tale che

$$\frac{J(b) - J(a)}{b - a} = \int_{\gamma} H(z, b) dz \quad (5.176)$$

e dobbiamo dimostrare quindi che

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_{\gamma} H(z, b) dz = \int_{\gamma} H(z, a) dz. \quad (5.177)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \int_{\gamma} (H(z, b) - H(z, a)) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \left( \frac{f(z, w)}{(w - a)(w - b)} - \frac{f(z, w)}{(w - a)^2} \right) dw dz \right|, \\ &= \left| (b - a) \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z, w)}{(w - a)^2(w - b)} dw dz \right|, \\ &< \frac{|b - a|}{2\pi} L_{\gamma} L_{\gamma'} \sup \left| \frac{f(z, w)}{(w - a)^2(w - b)} \right|, \\ &= \frac{|b - a|}{2\pi} L_{\gamma} L_{\gamma'} \frac{M}{d^3} \end{aligned} \quad (5.178)$$

dove  $L_{\gamma}$  e  $L_{\gamma'}$  sono rispettivamente la lunghezza delle curve  $\gamma$  e  $\gamma'$ ,  $M$  è l'estremo superiore della funzione  $f(z, w)$  quando  $z \in \gamma$  e  $w \in \gamma'$ , e  $d = \min \{|w - a|, |w - b|\}$ . Se prendiamo  $|b - a| < \delta$  con  $\delta = 2\pi d^3 \epsilon / (M L_{\gamma} L_{\gamma'})$  si ha  $\Delta < \epsilon$  e quindi l'assunto.

**Teorema 5.3.12 (formula integrale di Cauchy per la derivata n-esima)** Sia  $f(z)$  definita ed analitica su un disco  $D$  (aperto e semplicemente connesso). Allora,  $\forall z \in D$  e per  $\forall \gamma$  regolare e chiusa in  $D$ , con  $z \notin \{\gamma\}$ , si ha

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (5.179)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si fa per induzione. La formula è valida per  $n = 1$ . Facciamo vedere che  $n$  implica  $n + 1$ .

$$n(\gamma, z) f^{(n+1)}(z) = n(\gamma, z) \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad (5.180)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad (5.181)$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw. \quad (5.182)$$

## 5.4 Serie di Taylor

Dimostriamo adesso un risultato molto importante, ovvero facciamo vedere che se  $f(z)$  è analitica in un certo dominio  $D$ , in ogni punto di  $D$  può essere espressa come serie di potenze, la serie di Taylor.

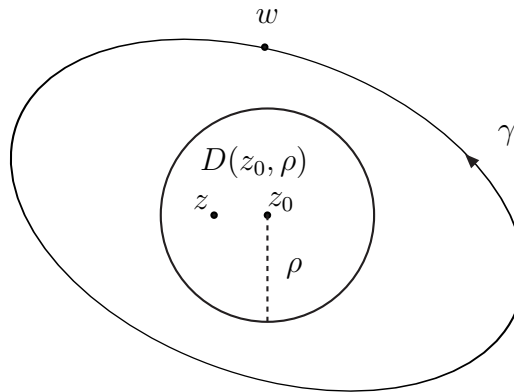
Sia quindi  $f(z)$  analitica in  $D \subset \mathbb{C}$  e sia  $\gamma \subset D$  un cammino chiuso e regolare. Abbiamo visto che per la formula integrale di Cauchy,  $f(z)$  e le sue derivate n-esime possono essere espresse come segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad (5.183)$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad (5.184)$$

per  $\forall z \in \text{Int}\{\gamma\}$ .

Prendiamo  $z_0 \in \text{Int}\{\gamma\}$  e prendiamo un disco aperto centrato in  $z_0$  di raggio  $\rho$ ,  $D(z_0, \rho)$ , tutto contenuto in  $\text{Int}\{\gamma\}$ , come in figura.



Prendiamo uno  $z \in D(z_0, \rho)$ . Allora  $z$  sarà anche interno alla curva  $\gamma$ . In  $z$  varranno le (5.183, 5.184).

Per  $\forall w \in \{\gamma\}$  e  $z \in D(z_0, \rho)$ , si avrà

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1, \quad (5.185)$$

poiché  $|z - z_0| < \rho$  e  $|w - z_0| > \rho$ . Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \quad (5.186)$$

è una serie geometrica di ragione  $< 1$  e quindi converge uniformemente, per  $w \in \{\gamma\}$ , a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{w - z_0}{w - z}. \quad (5.187)$$

Si trova quindi che

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}. \quad (5.188)$$

Sostituendo nella formula integrale per  $f(z)$ , si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w) dw, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} f(w) dw, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (5.189)$$

dove per passare da (5.189) a (5.189) abbiamo usato il fatto che la serie è uniformemente convergente.

Abbiamo trovato quindi che la  $f(z)$  ammette una espansione in serie di Taylor.

**NOTA.** Notiamo che

- La serie così ottenuta è uniformemente convergente a condizione che  $f(z)$  sia analitica in  $z_0$  e che  $z$  sia definita entro un cerchio centrato in  $z_0$  all'interno del quale per tutti gli  $z$   $f(z)$  sia analitica.
- La convergenza è per cerchi intorno allo  $z_0$  dell'espansione. Si potrà “estendere” il cerchio di convergenza fino a dove non incontrerà una singolarità. Quindi, sia  $z_S$  un punto di singolarità per la  $f(z)$ . Lo sviluppo di Taylor in  $z_0$  per la  $f(z)$  convergerà in  $D(z_0, d)$  dove  $d = |z_S - z_0|$ , che è detto raggio di convergenza.
- Se  $f(z)$  è intera, il suo sviluppo convergerà in tutto  $\mathbb{C}$ .

- Lo sviluppo ottenuto è unico, ovvero se per  $z \in D(z_0, d)$  vale la

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (5.190)$$

si ha necessariamente  $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ . Infatti, ponendo  $z = z_0$  in (5.190) si ha  $c_0 = f(z_0)$ . Essendo poi la serie uniformemente convergente, possiamo derivare termine a termine la (5.190) e porre  $z = z_0$ , ottenendo via via  $f'(z_0) = c_1$ ,  $f^{(2)}(z_0) = 2c_2$  ... etc.

### 5.4.1 Esempi

**Esempio 1.** Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \sin(z). \quad (5.191)$$

La  $f(z)$  è intera e si ha

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (5.192)$$

Sfruttando la serie dell'esponenziale, si trova

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right), \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{(2k+1)}, \end{aligned} \quad (5.193)$$

che converge in tutto  $\mathbb{C}$ .

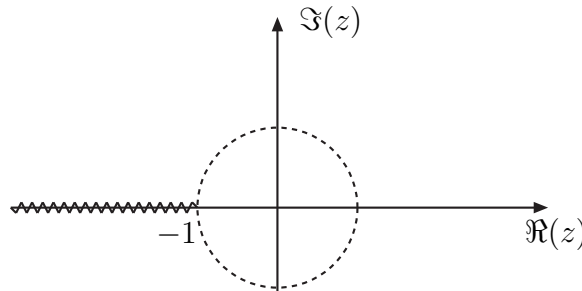
**Esempio 2.** Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \log(1+z) \quad (5.194)$$

e cerchiamo il suo sviluppo di Taylor in  $z = 0$ . Poniamo  $\xi = 1+z$ . Il ramo principale di  $\log(\xi)$  è definito e analitico in  $\mathbb{C} - \{\Re(\xi) \leq 0\}$ . Quindi in  $z$  si ha

$$1+z \neq -t, \quad (5.195)$$

con  $t \in [0, \infty)$ . Ovvero  $z \neq -1-t$ . Quindi poniamo il taglio su  $\Re(z) \leq -1$ , come in figura.



Se centriamo la serie di Taylor in  $z = 0$ , allora il raggio di convergenza sarà  $r = 1$ , ovvero la distanza da 0 alla prima singolarità che si incontra (punto di diramazione in  $z = -1$ ).

Si avrà

$$\frac{d}{dz} \log(1+z) = \frac{1}{1+z}, \dots, \frac{d^n}{dz^n} \log(1+z) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n}, \quad (5.196)$$

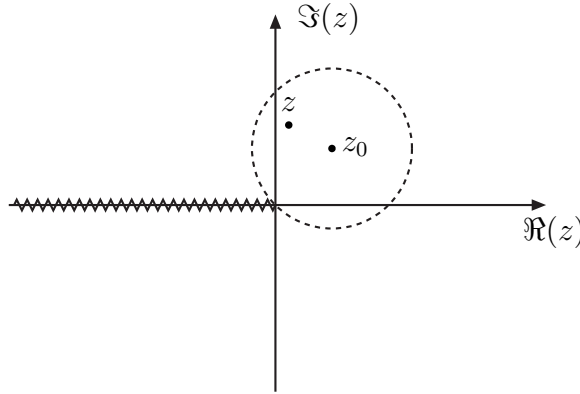
ovvero

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{z^n}{n}. \quad (5.197)$$

**Esempio 3.** In generale consideriamo il ramo principale del logaritmo

$$f(z) = \log(z) \quad (5.198)$$

e cerchiamo l'espansione di Taylor là dove il logaritmo è analitico (cioè al di fuori del taglio). Consideriamo il punto  $z = z_0$ , con  $z_0 \notin -t$ ,  $t \in (0, \infty)$ .



Quindi possiamo scrivere

$$\ln(z) = \ln(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\omega}{\omega} = \ln(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\omega}{z_0 + \omega - z_0}, \quad (5.199)$$

$$= \ln(z_0) + \frac{1}{z_0} \int_{z_0}^z \frac{1}{1 - \left(-\frac{\omega - z_0}{z_0}\right)} d\omega. \quad (5.200)$$

Là dove si abbia

$$\left| \frac{\omega - z_0}{z_0} \right| < 1, \quad (5.201)$$

ovvero là dove  $\omega$ , che sta su una qualsiasi curva che unisce  $z_0$  a  $z$ , è contenuto, insieme a  $z$ , nel disco centrato in  $z_0$  di raggio  $|z_0|$ , possiamo usare la convergenza uniforme della serie geometrica e scrivere

$$\ln(z) = \ln(z_0) + \frac{1}{z_0} \int_{z_0}^z \frac{1}{1 - \left(-\frac{\omega - z_0}{z_0}\right)} d\omega, \quad (5.202)$$

$$= \ln(z_0) + \frac{1}{z_0} \int_{z_0}^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\omega - z_0}{z_0}\right)^n d\omega, \quad (5.203)$$

$$= \ln(z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z_0} \int_{z_0}^z \left(\frac{\omega - z_0}{z_0}\right)^n d\omega, \quad (5.204)$$

$$= \ln(z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^{n+1}. \quad (5.205)$$

Il raggio di convergenza della serie è dato da

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)z_0^{n+1}} \right| \left| \frac{(n+2)z_0^{n+2}}{(-1)^{n+1}} \right| = |z_0|. \quad (5.206)$$

Si riottiene il risultato dell'Esempio 2 ponendo

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z' + 1, \\ z_0 &\rightarrow z'_0 + 1, \end{aligned} \quad (5.207)$$

con  $z'_0 = 0$ .

**Esempio 4.** Consideriamo lo sviluppo dell'esponenziale (che già sappiamo). L'esponenziale è una funzione intera, derivabile infinite volte in tutto  $\mathbb{C}$  e si ha

$$\frac{d^n}{dz^n} e^z = e^z, \quad (5.208)$$

da cui

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (5.209)$$

che converge uniformemente con raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty. \quad (5.210)$$

**Esempio 5.** Siccome il seno è esprimibile in termini dell'esponenziale, si può trovare subito la sua espansione di Taylor in  $z = 0$ :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right), \quad (5.211)$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n!} i^n z^n, \quad (5.212)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{(2k+1)}, \quad (5.213)$$



che ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{(2k+3)!}{(-1)^{k+1}} \right| = \infty. \quad (5.214)$$

La (5.213) si può anche trovare sapendo che

$$\frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z). \quad (5.215)$$

**Esempio 6.** Per il coseno, siccome abbiamo

$$\cos(z) = \frac{d}{dz} \sin(z), \quad (5.216)$$

possiamo derivare la (5.213) termine a termine:

$$\cos(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad (5.217)$$

con raggio di convergenza infinito.

**Esempio 7.** La stessa cosa si trova per seno iperbolico e coseno iperbolico:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (5.218)$$

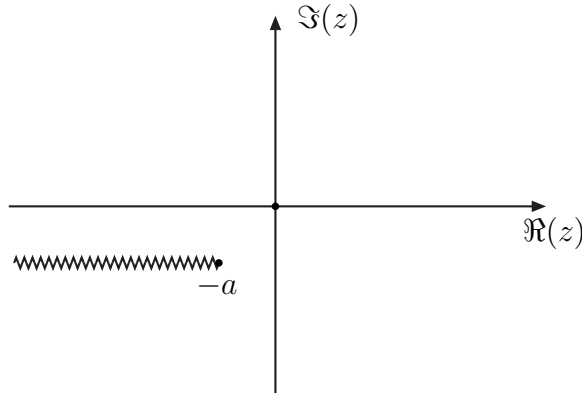
$$\sinh(z) = \frac{d}{dz} \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (5.219)$$

Entrambi hanno raggio di convergenza  $R = \infty$ .

**Esempio 8.** Troviamo l'espansione di Taylor di

$$f(z) = \sqrt{z+a}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (5.220)$$

in  $z = 0$ . La funzione è polidroma. Scegliamo il ramo principale e poniamo il taglio da  $z = -a$  al punto all'infinito, che è punto di diramazione (per esempio con un taglio parallelo all'asse reale negativa, come in figura).



In un intorno di  $z = 0$  allora la funzione è ad un sol valore ed è analitica. In  $z = -a$  invece la funzione non è analitica, visto che questo è un punto di diramazione. Siccome

$$f'(z) = \frac{d}{dz} (z-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (z-a)^{\frac{1}{2}-1}, \quad (5.221)$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) (z - a)^{\frac{1}{2}-2}, \quad (5.222)$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) (z - a)^{\frac{1}{2}-3}, \quad (5.223)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right) (z - a)^{\frac{1}{2}-n}, \end{aligned} \quad (5.224)$$

per cui si ha

$$f^{(n)}(0) = \left( \frac{1}{2} \right)_n n! a^{\frac{1}{2}-n} \quad (5.225)$$

e la serie può essere scritta come segue

$$\sqrt{z+a} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)_n a^{\frac{1}{2}-n} z^n. \quad (5.226)$$

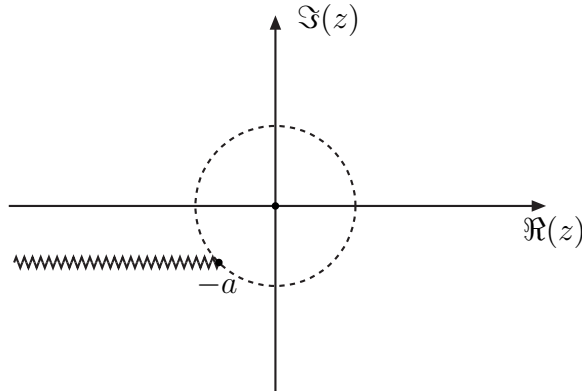
Il raggio di convergenza della serie si trova come segue

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (5.227)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right) a^{\frac{1}{2}-n}}{n!} \frac{(n+1)!}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n \right) a^{-\frac{1}{2}-n}} \right|, \quad (5.228)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)a}{\left( \frac{1}{2} - n \right)} \right| = |a|. \quad (5.229)$$

Quindi la serie converge uniformemente nel disco di raggio  $R = |a|$ , ovvero la distanza di  $a$  da  $z = 0$ .



## 5.5 Altri risultati importanti

Enunciamo qui due teoremi che servono a caratterizzare ulteriormente le funzioni analitiche.

**Teorema 5.5.1 (di Morera)** Sia  $f(z)$  una funzione continua della variabile complessa  $z \in D$ , dominio (aperto e connesso) in  $\mathbb{C}$  e sia

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (5.230)$$

per ogni  $\gamma$  regolare chiusa con  $\{\gamma\} \subset D$ . Allora  $f(z)$  è analitica in  $D$ .

*Dimostrazione.* Se  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  per  $\forall \gamma$  in  $D$ , possiamo considerare  $z_0, z \in \{\gamma\}$  tali che la curva  $\gamma$  rimanga divisa in due:  $\gamma_1$  che coincide con la parte di  $\gamma$  che collega in senso antiorario  $z_0$  a  $z$  e  $\gamma_2^-$  che coincide con la parte di  $\gamma$  che collega in senso antiorario  $z$  a  $z_0$ . Allora si avrà

$$\int_{z_0 \gamma_1}^z f(z) dz = - \int_{z \gamma_2^-}^{z_0} f(z) dz = \int_{z \gamma_2}^{z_0} f(z) dz \quad (5.231)$$

e questo per  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \subset D$ . Allora possiamo definire una funzione

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(z) dz, \quad (5.232)$$

che è la primitiva di  $f(z)$ , ovvero tale che

$$F'(z) = f(z). \quad (5.233)$$

Questo l'abbiamo già dimostrato nel paragrafo 5.3.1. Allora,  $F(z)$  è analitica in  $D$  e se è analitica anche la sua derivata lo è. Quindi  $f(z)$  è analitica in  $D$ .

**Teorema 5.5.2 (di Liouville)** Se una funzione  $f(z)$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  ed è limitata in modulo in tutto  $\mathbb{C}$ , allora è necessariamente una costante.

*Dimostrazione.* Segue dalla formula integrale per la derivata che

$$n(\gamma, z) f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad (5.234)$$

essendo  $\gamma$  una curva regolare che circonda  $z$ . Per ipotesi esiste un reale positivo,  $M \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$|f(z)| < M, \quad (5.235)$$

per  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Allora

$$|n(\gamma, z) f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} L_{\gamma} \sup_{w \in \{\gamma\}} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right|. \quad (5.236)$$

Se consideriamo come  $\gamma$  una circonferenza di raggio  $r$  (per avere una formula pulita, ovviamente  $\gamma$  può essere qualsiasi curva e otteniamo lo stesso risultato) abbiamo  $L_{\gamma} = 2\pi r$  e  $|w-z| = r$ . Quindi

$$|n(\gamma, z) f'(z)| < \frac{M}{r}, \quad (5.237)$$

che vale per  $\forall r > 0$ , che si può prendere arbitrariamente grande. Quindi  $f'(z) = 0$  ed  $f(z)$  è costante.

Questo risultato mi permette di dire che se  $f(z)$  è intera ed è limitata per ogni  $z$  al “finito”, deve in qualche modo divergere in modulo per  $z \rightarrow \infty$ , cioè nel punto all’infinito.

Una conseguenza del teorema di Liouville è una dimostrazione del teorema generale dell’Algebra.

**Teorema 5.5.3** Sia  $P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , con  $a_i, z \in \mathbb{C}$  e  $a_n \neq 0$ . Allora esiste almeno un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $P_n(z_0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, ovvero che  $P_n(z) \neq 0$  per  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Allora

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}, \quad (5.238)$$

è una funzione intera e limitata in modulo in tutto  $\bar{\mathbb{C}}$ . Cioè dato un  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere,  $\exists R > 0$  tale che  $\forall z$  tali che  $|z| > R$  si abbia  $|f(z)| < \epsilon$ . Per il teorema di Liouville vuol dire che  $f(z) = \text{cost}$ , cosa banalmente falsa. Quindi  $P_n(z)$  deve avere almeno uno zero.

Se  $z_0$  è una radice di  $P_n(z)$  si può scrivere

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z), \quad (5.239)$$

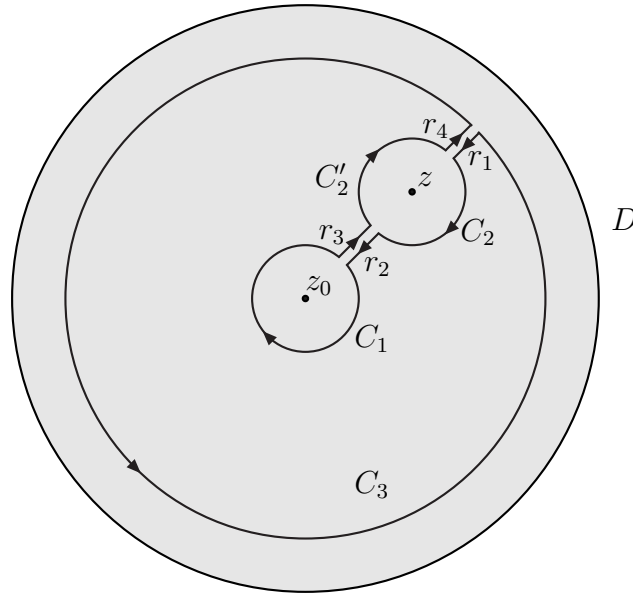
con  $P_{n-1}(z)$  polinomio di grado  $n - 1$  in  $z$ . Ripetendo lo stesso ragionamento per  $P_{n-1}(z)$  si ottiene

$$P_n(z) = (z - z_0)(z - z_1)P_{n-2}(z), \quad (5.240)$$

e così via, finché non si sia espresso il polinomio  $P_n$  come prodotto di, al più,  $n$  radici distinte.

## 5.6 Funzioni analitiche monodrome con singolarità isolate: serie di Laurent

Consideriamo  $f(z)$  analitica in un disco,  $D(z_0, R)$ , escluso il punto  $z_0$  dove  $f(z)$  ha una singolarità isolata. Prendiamo un punto  $z \in D(z_0, R)$  con  $z \neq z_0$  e consideriamo il percorso  $C = C_3 + r_1 + C_2 + r_2 + C_1 + r_3 + C'_2 + r_4$  in  $D$  che escluda  $z_0$  e  $z$ , come in figura:



Consideriamo la funzione

$$F(w, z) = \frac{f(w)}{w - z} \quad (5.241)$$

e l'integrale

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (5.242)$$

La funzione  $F(w, z)$  è analitica in  $z$  quando  $w \in C$ . Allora, per il teorema di Cauchy, si avrà

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = 0. \quad (5.243)$$

Considerando il cammino  $C$  come in figura e facendo sì che i segmenti  $r_1$  e  $r_4$  vadano a sovrapporsi e così per  $r_2$  e  $r_3$ , si ha

$$\int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0. \quad (5.244)$$

I cammini  $C_1$  e  $C_2$  sono percorsi in senso orario, per cui, se invertiamo il senso di percorrenza, si avrà

$$\int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C_2^-} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C_1^-} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 \quad (5.245)$$

e quindi, dato che per la formula integrale di Cauchy si ha

$$\int_{C_2^-} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z), \quad (5.246)$$

possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^-} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (5.247)$$

Se definiamo  $\rho = |z - z_0|$ , distanza di  $z$  da  $z_0$ ,  $\rho_1$  raggio di  $C_1$  e  $\rho_2$  raggio di  $C_2$ , allora si avrà

$$\rho_1 < \rho < \rho_3. \quad (5.248)$$

Consideriamo  $w \in C_3$ . Si avrà

$$|w - z_0| > |z - z_0|, \quad (5.249)$$

poiché  $\rho < \rho_3$ . Allora possiamo formare una serie geometrica uniformemente convergente all'interno del cerchio di raggio  $\rho_3$  tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w - z_0}{w - z}, \quad (5.250)$$

da cui

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}. \quad (5.251)$$

Sostituendo nel primo integrale si ha

$$\int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{C_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{C_3} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad (5.252)$$

dove abbiamo scambiato l'integrazione con la somma perché uniformemente convergente.

**NB** Nonostante la forma dei coefficienti della serie ricordi quella della derivata  $n$ -esima di  $f(z)$  in  $z = z_0$ , non si tratta della derivata, poiché la  $f(z)$  NON è analitica in  $z = z_0$ .

Consideriamo adesso  $w \in C_1$ . Si avrà

$$|w - z_0| < |z - z_0|, \quad (5.253)$$

poiché  $\rho > \rho_1$ . Allora possiamo formare una serie geometrica uniformemente convergente all'esterno del cerchio di raggio  $\rho_1$  tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \frac{z - z_0}{z - w} = -\frac{z - z_0}{w - z}, \quad (5.254)$$

da cui

$$\frac{1}{w - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (5.255)$$

Sostituendo nel secondo integrale si ha

$$\int_{C_1^-} \frac{f(w)}{w - z} dw = -\int_{C_1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(w) dw, \quad (5.256)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{C_1^-} f(w)(w - z_0)^n dw, \quad (5.257)$$

dove abbiamo scambiato l'integrazione con la somma perché uniformemente convergente. Ri-scaliamo adesso l'indice di somma, ponendo  $n + 1 = m$  e rinominiamo  $m = -n$ , avremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{C_1^-} f(w)(w - z_0)^n dw = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^m} \int_{C_1^-} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{1-m}} dw, \quad (5.258)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \int_{C_1^-} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw. \quad (5.259)$$

Definendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.260)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^-} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = -1, -2, -3, \dots, \quad (5.261)$$

possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (5.262)$$

che è assolutamente convergente nel settore circolare fra  $C_1^-$  e  $C_3$ . Siccome in questo settore circolare non ci sono punti di singolarità per la  $f(w)/(w - z)$ , che risulta ivi essere analitica, possiamo utilizzare il principio di deformazione del cammino mandando l'integrazione di  $C_1^-$  in quella su  $C_3$  o viceversa e l'integrale che definisce i coefficienti non cambia. Allora se prendiamo

un  $\gamma$  cammino chiuso che abbracci  $z_0$ , definito nell'anello  $A(\rho_1, \rho_3)$  posso ridefinire i coefficienti della serie come

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.263)$$

La formula (5.262) si dice *serie di Laurent* della funzione  $f(z)$ .

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

**Teorema 5.6.1 (di Laurent)** *Sia  $f(z)$  monodroma e analitica in un disco di raggio  $R$  centrato in  $z = z_0$ , tranne che in  $z_0$  dove  $f(z)$  ha una singolarità isolata. Allora, all'interno dell'anello centrato in  $z_0$  ri raggi  $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$  vale il seguente sviluppo in serie di Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (5.264)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.265)$$

e  $\{\gamma\}$  cammino intorno a  $z_0$ , nell'anello. La serie converge uniformemente nell'anello.

**NOTA.** Notiamo che:

- La serie generalizzata di Laurent è la somma di due serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (5.266)$$

La prima serie, a potenze positive di  $(z - z_0)$ , è la *parte analitica* dello sviluppo di Laurent. Converge uniformemente all'interno del cerchio di raggio maggiore. La seconda serie, a potenze negative di  $(z - z_0)$ , è detta *parte principale di Laurent* e converge uniformemente all'esterno al cerchio di raggio minore. La somma delle due converge nell'anello compreso fra i due raggi di convergenza.

- Per il principio di deformazione dei cammini, nella nostra dimostrazione possiamo pensare di stringere il cammino  $C_1$  intorno a  $z_0$ , con  $\rho_1$  che tende a zero, ma che ovviamente non può essere identicamente nullo, poiché  $z_0$  è un punto di non analiticità della  $f(z)$ . D'altra parte, anche  $C_3$  può essere esteso, aumentando  $\rho_3$  fino al limite del dominio di analiticità della  $f(z)$ , per esempio fino ad un'altra singolarità isolata della  $f(z)$ . Quindi la convergenza della serie di Laurent nel caso specifico sopra indicato è da considerarsi nell'anello  $A(z_0, 0, R)$ , ovvero nell'anello con raggi  $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ .
- Non è detto che  $z_0$  debba necessariamente essere un punto di non analiticità della  $f(z)$ . Basta che si richieda l'espansione in serie di una funzione in un disco, ovvero in un dominio non semplicemente connesso, con un "buco". Supponiamo che in  $z = 0$  la  $f(z)$  sia analitica ma che abbia una singolarità isolata in  $z = 1$  e un'altra in  $z = 2$ . Allora possiamo cercare una rappresentazione per serie della  $f(z)$  nell'anello centrato in  $z = 0$  di raggi  $\rho_1 = 1$  e  $\rho_2 = 2$ ,  $A(0, 1, 2)$ . Questo si risolve necessariamente in uno sviluppo in serie generalizzata. La presenza della serie con i termini a potenza negativa interviene poiché non conosciamo la  $f(z)$  all'interno del cerchio di raggio  $\rho_1 = 1$  essendo presente sulla frontiera di tale cerchio una singolarità della  $f(z)$ .

- La serie generalizzata “comprende” il caso in cui  $z_0$ , che abbiamo considerato come unica singolarità isolata nel dominio di analiticità  $D(z_0, R)$ , sia in realtà un punto di analiticità della  $f(z)$ . Infatti, in questo caso la “parte analitica” della serie di Laurent continua ad essere valida e in questo caso i coefficienti  $c_n$  sono effettivamente dati dalla derivata ennesima di  $f(z)$  diviso  $n!$  (adesso  $f(z)$  è analitica in  $z_0$  e quindi vale la formula integrale di Cauchy per  $f(z)$  e per le sue derivate). Invece, la parte principale di Laurent ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = -1, -2, \dots \quad (5.267)$$

ma essendo adesso  $z_0$  un punto di analiticità della  $f(z)$  si ha  $c_n = 0$  per  $\forall n = -1, -2, \dots$  il teorema di Cauchy. Si ritrova quindi lo sviluppo di Taylor per la  $f(z)$ .

- Siccome la  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  è uniformemente convergente nell’anello  $A(z_0, 0, R)$ , per qualunque  $\gamma$  cammino regolare NON chiuso nell’anello, possiamo integrare la  $f(z)$  integrando termine a termine i membri della serie

$$\int_{a\gamma}^b f(z) dz = \int_{a\gamma}^b \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{a\gamma}^b (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \int_{a\gamma}^b \frac{dz}{(z - z_0)^n}. \quad (5.268)$$

Analogamente, la derivata di  $f(z)$  per  $\forall z \in A(z_0, 0, R)$  si può eseguire derivando termine a termine gli elementi della serie

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (5.269)$$

- Lo sviluppo di Laurent della  $f(z)$  è unico. Ovvero, se  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  allora i  $c_n$  sono univocamente definiti dalla (5.265). Infatti, sia  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  nell’anello  $A(z_0, 0, R)$ . Scegliamo un cammino  $\gamma$  regolare chiuso che includa  $z_0$ , appartenente al disco. Per tutti i punti di  $\gamma$  la serie è convergente. Scegliamo un intero  $m$ , moltiplichiamo entrambi i membri della (5.264) per  $(z - z_0)^{-m-1}$  e integriamo su  $\gamma$ . Avremo

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-m-1} dz. \quad (5.270)$$

Ma gli integrali a secondo membro sono tutti nulli tranne che per  $n - m - 1 = -1$ , ovvero per  $n = m$ . In tal caso l’integrale dà  $2\pi i$ . Quindi si ha

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = 2\pi i c_m. \quad (5.271)$$

## 5.7 Esempi

**Esempio 1.** Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{12}{z(z+1)(2-z)}. \quad (5.272)$$



La  $f(z)$  è analitica in  $\mathbb{C}$  escluso i punti in cui si annulla il denominatore, ovvero  $z = 0, -1, 2$ , in cui ha delle singolarità isolate (poli di ordine 1).

Potremo quindi espandere la  $f(z)$  in serie di Laurent in diversi anelli di convergenza, delimitati dalle singolarità della funzione. Se consideriamo l'espansione centrata in  $z = 0$  si avrà la situazione riportata nella figura sotto.

Gli anelli di convergenza sono dati da

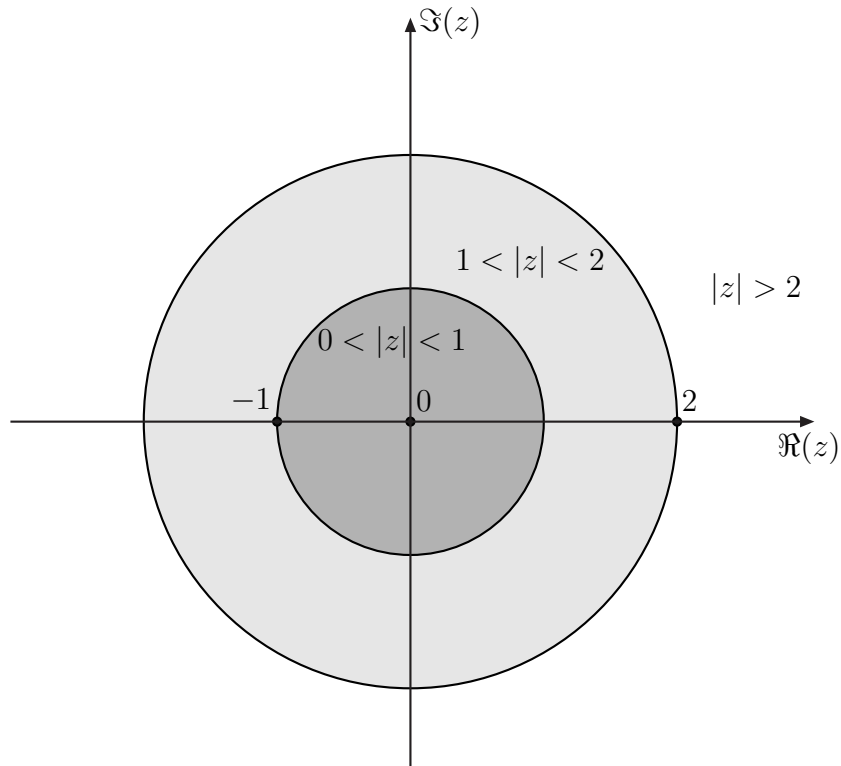
$$0 < |z| < 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad |z| > 2. \quad (5.273)$$

Nel punto all'infinito si ha

$$z \rightarrow \frac{1}{\zeta},$$

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{12\zeta^3}{(1+\zeta)(2\zeta-1)} \xrightarrow{\zeta \rightarrow 0} 0. \quad (5.274)$$

Quindi il punto all'infinito è uno zero di ordine 3 per la  $f(z)$ . Ciò ci permette di capire immediatamente che nella regione esterna alla circonferenza di raggio  $\rho = 2$  la serie di Laurent della  $f(z)$  sarà formata dai soli termini della parte principale e inoltre tale serie dovrà cominciare da  $1/z^3 \dots$



Regione  $0 < |z| < 1$  Per dare l'espressione della serie di Laurent della  $f(z)$  in questa regione ci conviene riscriverla come segue:

$$f(z) = \frac{4}{z(z+1)} + \frac{4}{z(2-z)}. \quad (5.275)$$

Siccome  $|z| < 1$ , possiamo riscrivere i termini  $1/(z+1)$  e  $1/(2-z)$  come somma di una serie geometrica. Rispettivamente:

$$\frac{1}{(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (5.276)$$

$$\frac{1}{(2-z)} = \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n. \quad (5.277)$$

Quindi in totale

$$f(z) = \frac{4}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (5.278)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 4(-1)^n + \frac{1}{2^{n-1}} \right] z^{n-1} \simeq \frac{6}{z} - 3 + \frac{9}{2} z + \dots \quad (5.279)$$

Quindi la forma della serie di Laurent ci dice che la  $f(z)$  ha un polo semplice in  $z=0$  (parte principale di Laurent con un solo termine) e una parte analitica con infiniti termini.

Possiamo controllare che la convergenza della serie arrivi effettivamente a  $R=1$  studiando il termine ennesimo col criterio del rapporto.

Riscriviamo le serie come segue:

$$f(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} \left[ 4(-1)^{m+1} + \frac{1}{2^m} \right] z^m = \frac{6}{z} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ 4(-1)^{m+1} + \frac{1}{2^m} \right] z^m. \quad (5.280)$$

La parte analitica ha come coefficiente m-esimo

$$c_m = \left[ 4(-1)^{m+1} + \frac{1}{2^m} \right] = \frac{4(-1)^{m+1} 2^m + 1}{2^m}. \quad (5.281)$$

Quindi si ha anche

$$c_{m+1} = \frac{4(-1)^{m+2} 2^{m+1} + 1}{2^{m+1}}. \quad (5.282)$$

Infine, applicando il criterio del rapporto si trova

$$R = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|c_m|}{|c_{m+1}|} = 1. \quad (5.283)$$

Regione  $1 < |z| < 2$  Adesso  $|z| > 1$  ( $e < 2$ ), quindi la serie che avevamo scritto per il termine  $1/(z+1)$  non va più bene. Dovremo considerare la seguente espressione

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}, \quad (5.284)$$

dove adesso

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 1. \quad (5.285)$$

Allora

$$f(z) = \frac{4}{z^2 \left(1 + \frac{1}{z}\right)} + \frac{4}{z(2-z)}, \quad (5.286)$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n-1}}, \quad (5.287)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{2}{z} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}, \quad (5.288)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{2}{z} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}. \quad (5.289)$$

Questa volta abbiamo una parte principale con infiniti termini.

Regione  $|z| > 2$  In questa regione anche la somma per il termine  $1/(2-z)$  va aggiornata. Si ha

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z \left(1 - \frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad (5.290)$$

poiché adesso è

$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1. \quad (5.291)$$

In totale

$$f(z) = \frac{4}{z^2 \left(1 + \frac{1}{z}\right)} - \frac{4}{z^2 \left(1 - \frac{2}{z}\right)}, \quad (5.292)$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+2}}, \quad (5.293)$$

$$\simeq -\frac{12}{z^3} - \frac{12}{z^4} + \dots \quad (5.294)$$

Come si vede, la  $f(z)$  ha soltanto la parte principale di Laurent e questa comincia con  $1/z^3$ . Questo è effettivamente l'andamento che ci aspettavamo, in quanto, come abbiamo già commentato all'inizio, la  $f(z)$  ha uno zero di ordine 3 nel punto all'infinito.

La serie (5.293) converge effettivamente per  $|z| > 2$ . Lo possiamo controllare andando ad utilizzare il criterio del rapporto:

$$c_n = (-1)^n - 2^n, \quad c_{n+1} = -(-1)^n - 2^n 2, \quad (5.295)$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{1}{2}. \quad (5.296)$$

Quindi la serie converge uniformemente per

$$\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}, \quad (5.297)$$

ovvero

$$|z| > 2. \quad (5.298)$$

**Esempio 2.** Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}. \quad (5.299)$$

La  $f(z)$  è analitica ovunque tranne in  $z = 0$  dove ha una singolarità (isolata) essenziale. Nel punto all'infinito la funzione è regolare ed ha limite 1. Possiamo sviluppare la  $f(z)$  in serie di Laurent in  $z = 0$  e la serie convergerà nell'anello  $A(0, 0, \infty)$  (centrato in  $z = 0$  di raggi 0 e  $\infty$ ), ovvero per  $|z| > 0$ .

Per trovare l'espressione della serie, ci ricordiamo che

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad (5.300)$$

che converge uniformemente per  $|w| < \infty$  e si pone  $w = \frac{1}{z}$ :

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}. \quad (5.301)$$

Si vede che questa serie ha le caratteristiche giuste. Converge uniformemente per

$$\left| \frac{1}{z} \right| < \infty \implies |z| > 0. \quad (5.302)$$

È formata solo dalla parte principale di Laurent (infatti la serie esterna a  $z = 0$  “vede” il punto all'infinito, che è regolare e in cui la  $f(z)$  ha limite 1).

Si può ovviamente anche “dimostrare” che la serie appena scritta sia la serie giusta. Il coefficiente  $m$ -esimo della parte principale di Laurent,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(z - z_0)^m}$  è dato da

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{1-m}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{\omega}}}{\omega^{1-m}} d\omega. \quad (5.303)$$

Questo integrale può essere fatto utilizzando il teorema dei residui col residuo all'infinito (vedi dopo) e ci si può rendere conto che si ha esattamente

$$c_m = \frac{1}{m!}. \quad (5.304)$$

## 5.8 Serie di Laurent e Serie di Fourier

### 5.9 Teorema dei residui

Supponiamo che  $f(z)$  sia definita ed analitica in un aperto connesso  $U \subset \mathbb{C}$  tranne in un punto  $z = a$  in cui  $f(z)$  abbia una singolarità isolata. Consideriamo una curva semplice regolare,  $\gamma$ , tale che  $\{\gamma\} \subset U$  e  $n(\gamma, a) = 1$ ,  $a \notin \{\gamma\}$ . Allora

**Definizione 5.9.1** Si dice “residuo” di  $f(z)$  in  $a$  il seguente numero complesso:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.305)$$

Nella regione in questione la  $f(z)$  ammette una rappresentazione in serie di Laurent, quindi sarà

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \quad (5.306)$$

Sostituendo nella (5.305) si ha

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \int_{\gamma} (z-a)^n dz = c_{-1}, \quad (5.307)$$

visto che gli integrali

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz \quad (5.308)$$

sono tutti nulli tranne quello con  $n = -1$ , che dà  $2\pi i$ . Quindi per calcolare il residuo della funzione in un punto singolare bisogna trovare il coefficiente del polo singolo dell'espansione della stessa in serie di Laurent.

Questo risultato può essere utilizzato per semplificare il calcolo di integrali che possono essere complicati tramite il teorema dei residui.

**Teorema 5.9.2 (dei residui).** *Sia  $f(z)$  analitica in un aperto connesso  $U \subset \mathbb{C}$  tranne in un numero finito  $n$  di punti,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , in cui  $f(z)$  abbia delle singolarità isolate. Sia  $\gamma$  una curva chiusa semplice e regolare in  $U$  e sia  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \text{Int}\{\gamma\}$  (cioè gli  $n$  punti di singolarità sono interni alla curva  $\gamma$ ). Allora si ha*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i). \quad (5.309)$$

*Dimostrazione.* Nella regione che esclude le singolarità  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  la  $f(z)$  è analitica. Quindi se prendiamo un cammino come in figura, in cui  $\Gamma = \gamma + \gamma_1^- + \dots + \gamma_n^-$ , possiamo utilizzare il teorema di Cauchy.

Allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i^-} f(z) dz, \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz. \end{aligned} \quad (5.310)$$

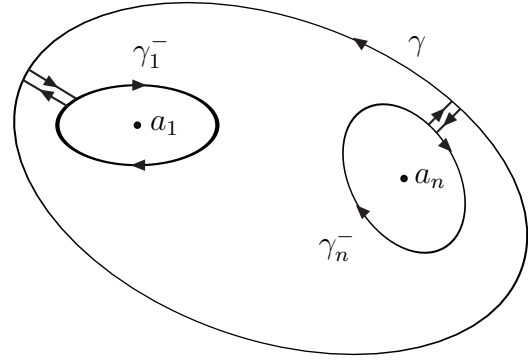
Inoltre

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, a_i), \quad (5.311)$$

da cui l'assunto.

**NB** L'importanza del teorema dei residui sta nel fatto che si riporta l'integrale della  $f(z)$  su  $\gamma$ , che potrebbe essere di difficile soluzione, al calcolo dei residui della  $f(z)$  nei punti di divergenza interni alla curva su cui integriamo e questo si riduce a calcolare il coefficiente del polo singolo nella serie di Laurent. Spesso ciò costituisce una semplificazione importante.

Il calcolo dei residui di una funzione può essere complicato, ma soprattutto nel caso di singolarità di tipo polare ci sono dei risultati che possono aiutare.



### 5.9.1 Residuo nel caso di singolarità polare di ordine $m$

Supponiamo che  $f(z)$  abbia un polo di ordine  $m$  in  $z = a$ . Allora per il teorema di Laurent si avrà

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (5.312)$$

Se moltiplichiamo ambo i membri della (5.312) per  $(z-a)^m$  avremo

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m} \quad (5.313)$$

e derivando adesso  $m-1$  volte e prendendo il limite per  $z \rightarrow a$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)) = (m-1)! c_{-1}, \quad (5.314)$$

da cui

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)). \quad (5.315)$$

### 5.9.2 Residuo nel caso di polo singolo

Supponiamo che la  $f(z)$  sia della forma

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (5.316)$$

con  $Q(z)$  e  $P(z)$  analitiche in  $z = a$ , con  $Q(a) \neq 0$  e  $P(a) = 0$ , ma  $P'(a) \neq 0$ . Allora  $z = a$  è un polo semplice per  $f(z)$  e si ha

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{Q(z)}{P'(z)}. \quad (5.317)$$

Infatti, se  $P'(a) \neq 0$  si può scrivere

$$P(z) = p(z)(z-a), \quad (5.318)$$

con  $p(z)$  analitica in  $a$  e  $p(a) \neq 0$ . Quindi

$$f(z) = \frac{Q(z)}{p(z)(z-a)} = \frac{F(z)}{(z-a)} \quad (5.319)$$

e  $\text{Res}(f, a) = F(a)$ . Ma

$$F(a) = \frac{Q(a)}{p(a)} = \frac{Q(a)}{P'(a)}. \quad (5.320)$$

Nel caso di polo singolo si ha anche che

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)' \Big|_{z=a}}. \quad (5.321)$$

Infatti si deve avere

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)} \quad (5.322)$$

e  $g(a) = \text{Res}(f, a)$ . Ma

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{d}{dz} \left(\frac{z-a}{g(z)}\right) = \frac{g(z) - g'(z)(z-a)}{g^2(z)} \quad (5.323)$$

e quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{\text{Res}(f, a)}. \quad (5.324)$$

## 5.10 Esempi

**Esempio 1.** Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad (5.325)$$

dove  $\gamma = e^{it}$  con  $0 \leq t < 2\pi$ .

La funzione

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad (5.326)$$

è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne in  $z = 0$  dove ha una singolarità isolata, essenziale. Per applicare il teorema dei residui dobbiamo trovare il residuo della  $f(z)$  in  $z = 0$ , ovvero il coefficiente del polo singolo della sua espressione in serie di Laurent. Tale serie convergerà uniformemente nell'anello  $A(0, 0, \infty)$  ed è data da

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots \quad (5.327)$$

Per cui il residuo è  $c_{-1} = 1$  e

$$\int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i. \quad (5.328)$$

**Esempio 2.** Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z \sin(z)}{z(1 - \cos(z))} dz, \quad (5.329)$$

dove  $\gamma = Re^{it}$  con  $0 \leq t < 2\pi$ .

Consideriamo la funzione integranda:

$$f(z) = \frac{e^z \sin(z)}{z(1 - \cos(z))}. \quad (5.330)$$

Si vede subito che ha un polo di ordine 3 in  $z = 0$ , unica singolarità della funzione. Siccome ci interessa il coefficiente del polo singolo, per applicare il teorema dei residui, possiamo ricavarcelo da alcuni passaggi approssimati. Si ha

$$f(z) = \frac{e^z \sin(z)}{z(1 - \cos(z))} = \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}{z \left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)\right]}, \quad (5.331)$$

$$= \frac{2}{z^2} \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{3} + \dots\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{12} + \dots\right)} \simeq \frac{2}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{3} + \dots\right) \left(1 + \frac{z^2}{12} + \dots\right) \simeq \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \dots \quad (5.332)$$

Quindi

$$\text{Res}(f, 0) = 2 \quad (5.333)$$

e l'integrale vale

$$\int_{\gamma} \frac{e^z \sin(z)}{z(1 - \cos(z))} dz = 4\pi i. \quad (5.334)$$

Si può anche applicare direttamente la (5.315) ottenendo

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{ze^z \sin(z)}{1 - \cos(z)} \right) = \dots = 2. \quad (5.335)$$

**Esempio 3.** Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{\sinh(z)}{z^4} dz, \quad (5.336)$$

dove  $\gamma = Re^{it}$  con  $0 \leq t < 2\pi$ .

La funzione integranda ha un polo di ordine 3 in  $z = 0$  ed è analitica nel resto di  $\mathbb{C}$ . Si avrà

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots \quad (5.337)$$

Quindi

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6} \quad (5.338)$$

e l'integrale vale

$$\int_{\gamma} \frac{\sinh(z)}{z^4} dz = \frac{\pi}{3} i. \quad (5.339)$$

Anche in questo caso si poteva usare la (5.315) ottenendo

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\sinh(z)}{z} \right) = \dots = \frac{1}{6}. \quad (5.340)$$

## 5.11 Lemma di Jordan e lemma degli archi infinitesimi

Il teorema dei residui ci permette di calcolare degli integrali nei complessi andando semplicemente ad individuare i residui della funzione integranda all'interno del cammino di integrazione. Questa tecnica è molto potente e permette di risolvere anche integrali nei reali, passando ad integrali nei complessi.

Per sfruttare nei reali le potenzialità dell'integrazione con i residui, abbiamo bisogno di alcuni risultati importanti che riguardano il calcolo di integrali su archi di circonferenza, infiniti o infinitesimi.

**Lemma 5.11.1 (di Jordan)** *Sia  $\gamma_k$  una successione di archi di circonferenza di raggio  $R_k$  (come in figura) e sia  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$ . Sia  $f(z)$  una funzione continua su  $\{\gamma_k\}$ , per  $\forall k \in \mathbb{N}$ , e, posto  $M_k = \sup_{z \in \{\gamma_k\}} |f(z)|$ , sia  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ . Allora, per  $\forall \lambda > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si ha*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (5.341)$$

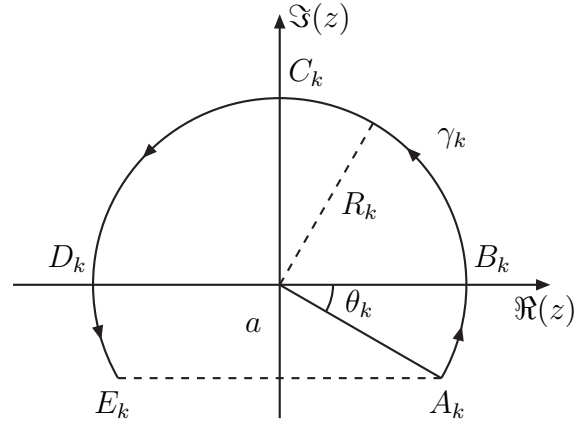


*Dimostrazione.* Riferendoci alla figura, abbiamo

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{a}{R_k}\right) \quad (5.342)$$

dove  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ . Inoltre l'arco di circonferenza  $\gamma_k$  è tale che

$$\begin{aligned} \gamma_k : \quad [-\theta_k, \pi + \theta_k] &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\rightarrow R_k e^{it}. \end{aligned} \quad (5.343)$$



Dimostriamo l'assunto, procedendo separatamente con i quattro archi  $\widehat{A_k B_k}$ ,  $\widehat{B_k C_k}$ ,  $\widehat{C_k D_k}$ ,  $\widehat{D_k E_k}$ .

$\widehat{A_k B_k}$  Quando  $z \in \widehat{A_k B_k}$  si ha

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \widehat{A_k B_k}} |f(z)e^{i\lambda z}| &= \sup_{z \in \widehat{A_k B_k}} |f(z)| |e^{-\lambda R_k \sin(t)} e^{i\lambda R_k \cos(t)}| = \sup_{z \in \widehat{A_k B_k}} |f(z)| |e^{-\lambda R_k \sin(t)}|, \\ &= M_k e^{\lambda a}, \end{aligned} \quad (5.344)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $z = R_k(\cos(t) + i \sin(t))$  e che  $-a < R_k \sin(t) < 0$  per  $-\theta_k \leq t \leq 0$ . Quindi

$$\left| \int_{\widehat{A_k B_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| < L_{\widehat{A_k B_k}} \sup_{z \in \widehat{A_k B_k}} |f(z)| = R_k \theta_k M_k e^{\lambda a}. \quad (5.345)$$

Ma  $R_k \theta_k$  è limitato per  $k \rightarrow \infty$  e quindi, siccome  $M_k \rightarrow 0$  si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\widehat{A_k B_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (5.346)$$

$\widehat{B_k C_k}$  Quando  $z \in \widehat{B_k C_k}$  si ha

$$\left| \int_{\widehat{B_k C_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(R_k e^{it}) e^{i\lambda R_k (\cos t + i \sin t)} i R_k e^{it} dt \right|, \quad (5.347)$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(R_k e^{it}) e^{i\lambda R_k (\cos t + i \sin t)} i R_k e^{it}| dt, \quad (5.348)$$

$$\leq M_k R_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_k \sin t} dt. \quad (5.349)$$

Se  $0 < t < \pi/2$ , si ha che  $\sin t > \frac{2}{\pi}t$ , per cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_k \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_k \frac{2}{\pi}t} dt = \frac{e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R_k t}}{-\frac{2}{\pi}\lambda R_k} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\lambda R_k} (1 - e^{-\lambda R_k}), \quad (5.350)$$

che, per  $R_k \rightarrow \infty$  va a zero come  $1/R_k$ . Allora si ha

$$\left| \int_{\widehat{B_k C_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| < M_k R_k \frac{\pi}{2\lambda R_k} (1 - e^{-\lambda R_k}) = M_k \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (5.351)$$

poiché  $M_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ . Quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\widehat{B_k C_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (5.352)$$

$\boxed{C_k D_k}$  Quando  $z \in \widehat{C_k D_k}$  si ha  $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \pi$ . In questo intervallo si ha

$$\sin t > 2 - \frac{2}{\pi} t \quad (5.353)$$

e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda R_k \sin t} dt \leq e^{-2\lambda R_k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\lambda R_k \frac{2}{\pi} t} dt = \left. \frac{e^{\frac{2}{\pi} \lambda R_k t - 2\lambda R_k}}{\frac{2}{\pi} \lambda R_k} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2\lambda R_k} (1 - e^{-\lambda R_k}). \quad (5.354)$$

Per cui, come sull'arco  $\widehat{B_k C_k}$ , anche sul  $\widehat{B_k C_k}$  si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\widehat{C_k D_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (5.355)$$

$\boxed{D_k E_k}$  Quando  $z \in \widehat{D_k E_k}$  si ha esattamente lo stesso risultato che per  $\widehat{A_k B_k}$  e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\widehat{D_k E_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (5.356)$$

In totale si ha l'assunto.

**Teorema 5.11.2 (della media di Gauss)** Sia  $f(z)$  analitica e non costante in  $D \subset \mathbb{C}$ , aperto e connesso e sia  $\gamma = z_0 + \rho e^{it}$  con  $0 \leq t < 2\pi$  una circonferenza centrata in  $z = z_0$  con  $z_0 \in D$ . Allora si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt, \quad (5.357)$$

ovvero che il valore di  $f(z)$  in  $z_0$  è dato dalla media dei valori che  $f(z)$  assume sulla circonferenza che circonda  $z_0$ .

*Dimostrazione.* In  $z = z_0$  la  $f(z)$  è analitica, per cui vale la formula integrale di Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt. \quad (5.358)$$

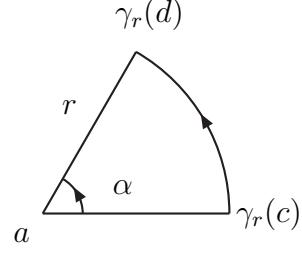
**Lemma 5.11.3 (degli archi infinitesimi)** Sia  $z = a$  un polo singolo per  $f(z)$  definita ed analitica in  $D \subset \mathbb{C}$  tranne in  $z = a$ , con  $a \in D$ . Sia  $\gamma_r : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco di circonferenza con centro in  $z = a$  e raggio  $r$  e tale che  $\arg \gamma_r(c) = \theta$  e  $\arg \gamma_r(d) = \theta + \alpha$ . Allora si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i\alpha \text{Res}(f, a). \quad (5.359)$$

*Dimostrazione.* Se  $f(z)$  ha un polo semplice in  $z = a$  sarà esprimibile come

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + g(z), \quad (5.360)$$

dove  $g(z)$  è analitica in  $z = a$ . Integriamo su  $\gamma$ . Avremo



$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_r} \frac{c_{-1}}{z - a} dz + \int_{\gamma_r} g(z) dz, \quad (5.361)$$

$$= c_{-1} \int_{\theta}^{\theta+\alpha} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt + \int_{\gamma_r} g(z) dz, \quad (5.362)$$

$$= c_{-1} i \alpha + \int_{\gamma_r} g(z) dz. \quad (5.363)$$

Prendendo ora il limite  $\lim_{r \rightarrow 0}$  si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i\alpha \text{Res}(f, a) + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz. \quad (5.364)$$

Dobbiamo dimostrare che  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$ . Si ha

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z) dz \right| \leq L_{\gamma_r} \sup_{z \in \{\gamma_r\}} |g(z)| = \alpha r \sup_{z \in \{\gamma_r\}} |g(z)|. \quad (5.365)$$

$g(z)$  è analitica in tutto il dominio e quindi anche continua e limitata. Per cui, se prendiamo il limite  $r \rightarrow 0$  abbiamo l'assunto.

## 5.12 Integrazione con i residui di funzioni razionali trigonometriche nei reali

Vediamo adesso come sfruttare il teorema dei residui per calcolare integrali nei reali. Ci sono diverse “classi” di integrali che si possono risolvere con questa tecnica.

Una prima classe consiste in integrali del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (5.366)$$

con  $R(\cos \theta, \sin \theta)$  una funzione razionale di seni e coseni, che sia finita per tutti i valori di  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Si interpreta l'integrale (5.366) come un integrale nei complessi sulla circonferenza di raggio 1,  $\gamma : \theta \rightarrow e^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ , facendo le seguenti sostituzioni:

$$z = e^{i\theta}, \quad (\text{sulla circonferenza unitaria}) \quad (5.367)$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \implies d\theta = -i \frac{dz}{z}, \quad (5.368)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.369)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right). \quad (5.370)$$

Allora

$$R(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow W(z) = R\left(\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)\right) \quad (5.371)$$

e

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \rightarrow -i \int_{\gamma} \frac{W(z)}{z} dz. \quad (5.372)$$

$W(z)/z$  sarà una funzione razionale

$$\frac{W(z)}{z} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (5.373)$$

quindi si potrà calcolare l'integrale calcolando i residui della funzione interni a  $\{\gamma\}$ .

### Esempio.

Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad a \in \mathbb{R}, -1 < a < 1. \quad (5.374)$$

Riportiamoci ad un integrale nei complessi sulla circonferenza di raggio unitario. Si ha

$$d\theta = -i \frac{dz}{z}, \quad (5.375)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.376)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right). \quad (5.377)$$

Per cui

$$I = -i \int_{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{z} = \frac{2}{ia} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} dz. \quad (5.378)$$

Per calcolare questo integrale cerchiamo i residui della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} \quad (5.379)$$

nei punti di singolarità interni a  $\gamma$ . Si ha

$$z^2 + \frac{2}{a}z + 1 = 0 \rightarrow z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad (5.380)$$

con  $|z_+||z_-| = 1$ , per cui siccome  $|z_-| > 1$  si ha  $|z_+| < 1$ . Quindi

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)}, \quad (5.381)$$

dove  $z = z_+$  è un polo interno alla circonferenza  $\gamma$ , mentre  $z = z_-$  è un polo esterno. Allora si avrà

$$I = \frac{2}{ia} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} dz = \frac{2}{ia} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_+), \quad (5.382)$$

dove

$$\text{Res}(f, z_+) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{(z - z_-)} = \frac{1}{(z_+ - z_-)} = \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}. \quad (5.383)$$

In totale

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \quad (5.384)$$

**[NB]** L'integrale di partenza è un integrale reale e quindi bisogna ottenere, alla fine, un risultato reale. Anche risolvendolo passando ai complessi, bisogna che alla fine le parti immaginarie si cancellino. Questo è un buon check che il calcolo sia stato eseguito correttamente. O meglio: se il risultato venisse con plesso, sarebbe indice immediato di un errore in qualche passaggio!!!

## 5.13 Integrali di Fourier

Un'altra classe di integrali che si risolvono facilmente passando ai complessi sono integrali del tipo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (5.385)$$

in cui  $f(x)$  ammetta prolungamento analitico in  $\mathbb{C}$  a una  $f(z)$  tale che  $f(z)$  si riduca a  $f(x)$  quando  $\Im(z) \rightarrow 0$  (sull'asse dei reali). Inoltre  $f(z)$  deve avere un numero finito di singolarità al finito e esser tale da poter sfruttare il Lemma di Jordan.

### Esempio.

Un esempio classico è costituito da una trasformata di Fourier come la seguente:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx. \quad (5.386)$$

Per calcolare l'integrale  $I$  passiamo ai complessi e cerchiamo di sfruttare il teorema dei residui. La funzione da integrare è costituita da una funzione fratta che moltiplica un esponenziale e quindi la situazione ricorda il lemma di Jordan ... L'idea è quella di trovare una funzione  $f(z)$  che sull'asse delle  $x$  si riduca alla  $f(x) = \frac{e^{-ikx}}{x^2+1}$  e che sia integrata su un cammino opportuno tale da farci calcolare l'integrale  $I$  facendo solo il calcolo di residui.

Consideriamo quindi la seguente funzione dei complessi:

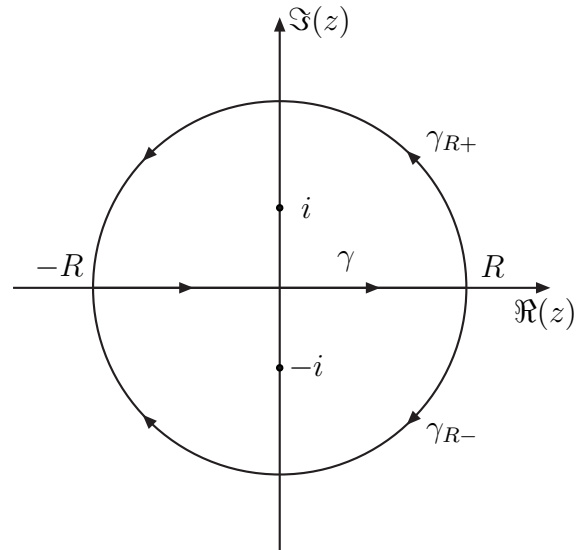
$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1}. \quad (5.387)$$

La  $f(z)$  è analitica in  $\mathbb{C}$  tranne che nei due punti in cui si annulla il denominatore

$$z^2 + 1 = 0, \quad z_{\pm} = \pm i, \quad (5.388)$$

dove la  $f(z)$  ha due poli singoli. Possiamo riscrivere esplicitamente

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)}. \quad (5.389)$$



Scegliamo un cammino  $\gamma$  nei complessi che

può essere identificato con la curva  $\gamma_+ = \gamma +$

$\gamma_{R+}$ , data da  $\gamma = t$ ,  $-R < t < R$ , e  $\gamma_{R+} = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  o con la  $\gamma_- = \gamma + \gamma_{R-}$ , data da  $\gamma = t$ ,  $-R < t < R$ , e  $\gamma_{R-} = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq -\pi$  (vedi figura).

Consideriamo l'integrazione su  $\gamma_+$ . Per il teorema dei residui avremo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-ikz}}{z + i} = \pi e^k. \quad (5.390)$$

D'altra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R+}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta. \quad (5.391)$$

Per cui si ha

$$I = \pi e^k - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta. \quad (5.392)$$

Si può dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.393)$$

se  $k < 0$ . Infatti

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta \right| < \int_0^\pi \frac{e^{kR \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} R d\theta \quad (5.394)$$

e siccome in  $[0, 2\pi]$  il  $\sin \theta$  è positivo, si ha che se  $k < 0$

$$\int_0^\pi \frac{e^{kR \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} R d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.395)$$

Se  $k > 0$  non possiamo integrare su  $\gamma_{R+}$ , altrimenti l'integrale sulla semicirconferenza diverge. Guardiamom allora cosa succederebbe se integrassimo su  $\gamma_{R-}$ . Prima di tutto dovremmo considerare il fatto che l'integrale è adesso calcolato percorrendo la curva intorno al polo in  $z = -i$  in senso antiorario. Quindi il teorema dei residui dà

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_-} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = -2\pi i \text{Res}(f, i) = -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-ikz}}{z - i} = \pi e^{-k}. \quad (5.396)$$

D'altra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_-} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R-}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta. \quad (5.397)$$

Questa volta abbiamo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.398)$$

se  $k > 0$ . Infatti

$$\left| \int_0^{-\pi} \frac{e^{-ikR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta \right| < \int_0^{-\pi} \frac{e^{kR \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} R d\theta \quad (5.399)$$

ma il  $\sin \theta$  ora è negativo, visto che  $\theta \in [0, -\pi]$ . Quindi

$$\int_0^{-\pi} \frac{e^{kR \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} R d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (5.400)$$

se  $k > 0$ .

In totale si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|k|}. \quad (5.401)$$

Il risultato (5.401) è valido anche per  $k = 0$ . Per vederlo potremmo applicare la stessa tecnica all'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad (5.402)$$

e troveremmo  $I = \pi$ .

### Esempio.

Un altro esempio è costituito dalla trasformata di Fourier della gaussiana:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ipx} dx. \quad (5.403)$$

Supponiamo di conoscere il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (5.404)$$

Per calcolare  $I$  consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = e^{-az^2}, \quad (5.405)$$

che è intera. Se valutiamo la  $f(z)$  sull'asse dei reali otteniamo  $e^{-ax^2}$  che sappiamo integrare (come in (5.404)). Se valutiamo  $f(z)$  su  $z = x + ik$ , con  $k$  costante, abbiamo

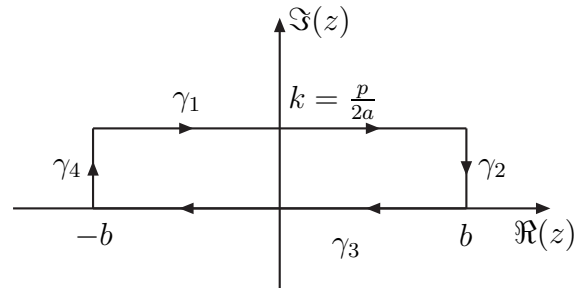
$$e^{-az^2} = e^{-a(x+ik)^2} = e^{-a(x^2 - k^2 + 2ikx)} = e^{ak^2} e^{-ax^2 - 2akxi}. \quad (5.406)$$

Se poniamo  $k = \frac{p}{2a}$  otteniamo

$$e^{-az^2} = e^{\frac{p^2}{4a}} e^{-ax^2 - ipx}, \quad (5.407)$$

ovvero la funzione che volevamo integrare inizialmente, moltiplicata per  $e^{\frac{p^2}{4a}}$ .

Allora prendiamo il cammino in figura,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ , sul quale si ha per il teorema di Cauchy



$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{-az^2} dz = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \int_{\gamma_1} e^{-az^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-az^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-az^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-az^2} dz \right], \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{\frac{p^2}{4a}} \int_{-b}^b e^{-ax^2 - ipx} dx - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(b+iy)^2} i dy - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b e^{-ax^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(-b+iy)^2} idy, \\
& = e^{\frac{p^2}{4a}} I - \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(b+iy)^2} idy + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(-b+iy)^2} idy.
\end{aligned} \tag{5.408}$$

Si ha

$$\left| \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(\pm b+iy)^2} idy \right| = \left| e^{-ab^2} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{ay^2} e^{\mp 2abiy} idy \right|, \tag{5.409}$$

$$< e^{-ab^2} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{ay^2} dy = e^{-ab^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Erf} \left( \frac{p}{2\sqrt{a}} \right). \tag{5.410}$$

Quindi

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(\pm b+iy)^2} idy = 0. \tag{5.411}$$

Infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ipx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}. \tag{5.412}$$

**Esempio.**

Ci si può riportare ad integrali di tipo Fourier anche nel seguente caso

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - x + 1} dx. \tag{5.413}$$

Infatti, notiamo che il  $\sin(x)$  è la parte immaginaria di  $e^{ix}$  e quindi

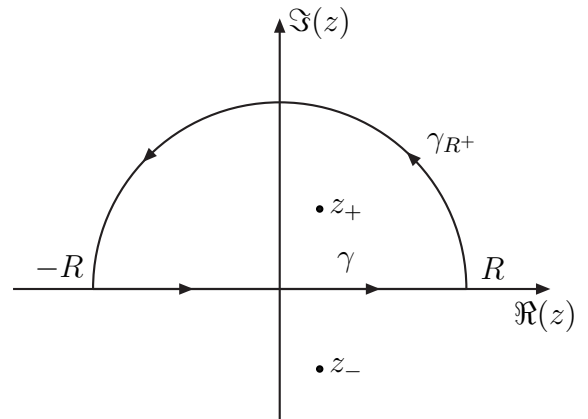
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - x + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - x + 1} dx + iI. \tag{5.414}$$

Calcoliamo  $J$  e poi prendiamone la parte immaginaria, per ottenere  $I$ . Per calcolare  $J$  consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - z + 1}, \tag{5.415}$$

che è analitica in  $\mathbb{C}$  tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero

$$z_{\pm} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \tag{5.416}$$



Allora possiamo sfruttare il teorema dei residui e il lemma di Jordan per calcolare  $I$ .

Integriamo la  $f(z)$  sulla curva in figura,  $\Gamma = \gamma + \gamma_{R+}$ . Si avrà

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_+), \tag{5.417}$$



dove

$$\text{Res}(f, z_+) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+)f(z) = \frac{e^{iz_+}}{(z_+ - z_-)} = \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} e^{\frac{i}{2}}}{i\sqrt{3}} \right). \quad (5.418)$$

D'altra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = J + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R^+}} f(z) dz = J, \quad (5.419)$$

poiché per il lemma di Jordan si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R^+}} f(z) dz = 0. \quad (5.420)$$

In totale quindi

$$J = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \left( \cos\left(\frac{1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad (5.421)$$

e

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - x + 1} dx = \Im(J) = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{2}\right). \quad (5.422)$$

## 5.14 Integrali di Fresnel

Consideriamo i due seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx. \quad (5.423)$$

Un modo per valutarli entrambi è quello di usare la formula di Eulero:

$$\int_0^{\infty} [\cos(x^2) + i \sin(x^2)] dx = \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx. \quad (5.424)$$

Una volta valutato

$$I = \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx, \quad (5.425)$$

avremo direttamente  $I_1$  come parte immaginaria di  $I$  e  $I_2$  come sua parte reale.

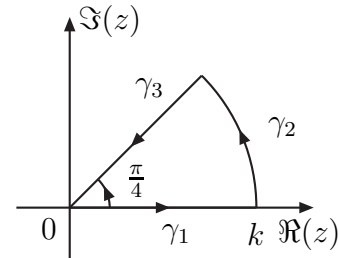
Sfruttiamo, anche in questo caso, la conoscenza del risultato

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.426)$$

Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{iz^2}, \quad (5.427)$$

continuazione analitica della  $f(x) = e^{ix^2}$  al piano complesso. La  $f(z)$  quindi si riduce alla  $f(x)$  quando siamo sull'asse reale. Inoltre è intera, quindi dovremo sfruttare il teorema di Cauchy.



Integriamo sul cammino in figura:  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ . Si avrà

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{iz^2} dz = I + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3^-} e^{iz^2} dz. \quad (5.428)$$

Si ha che  $\gamma_3^- = te^{i\frac{\pi}{4}}$  con  $0 \leq t \leq k$  (parametrizzazione della semiretta che parte dall'origine ed è inclinata di  $\pi/4$ ). Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3^-} e^{iz^2} dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-t^2} dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.429)$$

Sul cammino  $\gamma_2$  si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ik^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} i k e^{i\theta} d\theta. \quad (5.430)$$

Siccome

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{ik^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} i k e^{i\theta} \right| d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k^2 \sin \phi} d\phi < \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} k^2 \phi} d\phi, \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-k^2}}{k}, \end{aligned} \quad (5.431)$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = 0. \quad (5.432)$$

Infine

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (5.433)$$

Ovvero

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (5.434)$$

## 5.15 Integrali con esponenziali

Consideriamo il seguente integrale reale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1. \quad (5.435)$$

Il fatto che la funzione integranda sia costituita da esponenziali, che quando passiamo ai complessi sono funzioni periodiche, non mi permette di chiudere il cammino di integrazione con una semicirconferenza, come vedremo.

Consideriamo la funzione dei complessi continuazione analitica dell'integranda  $f(x)$ :

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}, \quad (5.436)$$

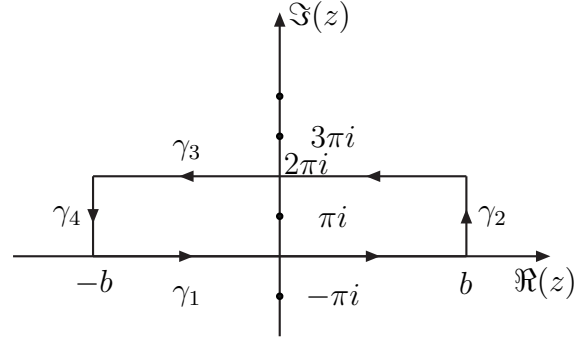
che si riduce alla  $f(x)$  quando siamo sull'asse dei reali. La  $f(z)$  è analitica tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero

$$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 = e^{i\pi + 2k\pi i}, \quad (5.437)$$

cioè in

$$z = i\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.438)$$

In questi punti la funzione ha dei poli singoli, come si vede sviluppando il denominatore. Quindi la  $f(z)$  ha un'infinità numerabile di poli singoli sull'asse immaginario e questo fatto fa sì che si debba scegliere un cammino di tipo rettangolare,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ , come in figura.



Possiamo utilizzare il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\pi) &= \int_{\gamma} f(z) dz, \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(b+iy)}}{1 + e^{b+iy}} idy - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1 + e^{x+2\pi i}} dx, \\ &\quad - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-b+iy)}}{1 + e^{-b+iy}} idy, \end{aligned} \quad (5.439)$$

$$= I - e^{2\pi ai} I + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(b+iy)}}{1 + e^{b+iy}} idy - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-b+iy)}}{1 + e^{-b+iy}} idy, \quad (5.440)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $e^{2\pi i} = 1$ . Inoltre abbiamo

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(b+iy)}}{1 + e^{b+iy}} idy = 0, \quad (5.441)$$

poiché  $0 < a < 1$  (l'integrando va quindi come  $e^{(a-1)b}$  per  $b \rightarrow \infty$  e quindi va a 0), e

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-b+iy)}}{1 + e^{-b+iy}} idy = 0. \quad (5.442)$$

Calcoliamo il residuo della funzione in  $i\pi$ . Si ha, per esempio

$$\operatorname{Res}(f, i\pi) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)' \Big|_{z=i\pi}} = \frac{1}{\frac{d}{dz} \left(\frac{1+e^z}{e^{az}}\right) \Big|_{z=i\pi}} = \dots = -e^{\pi ai}. \quad (5.443)$$

Infine

$$I = -\frac{2\pi i e^{\pi ai}}{1 - e^{2\pi ai}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \quad (5.444)$$

**Esempio.**

Un altro esempio simile, che si può risolvere ricorrendo ad integrali di esponenziali, è il seguente integrale:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (5.445)$$

Consideriamo il fatto che  $I$  è la parte immaginaria di

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (5.446)$$

e quindi risolviamo  $J$ . Passando ai complessi, si può considerare la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}, \quad (5.447)$$

analitica in  $\mathbb{C}$  tranne che nei punti in cui si annulla il denominatore

$$e^{2\pi z} = 1, \quad (5.448)$$

ovvero  $z = ki$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Allora, possiamo sfruttare il teorema di Cauchy ed integrare sul cammino in figura,  $\Gamma = \sum_{i=1}^6 \gamma_i$ . Per cui

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.449)$$

D'altra parte, si ha

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^6 \int_{\gamma_i} f(z) dz \quad (5.450)$$

dove

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} f(z) dz = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^b \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} dx = J, \quad (5.451)$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} f(z) dz = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{ia(b+iy)}}{e^{2\pi(b+iy)} - 1} i dy = 0, \quad (5.452)$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_3} f(z) dz = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_b^r \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi x} - 1} dx = -e^{-a} J, \quad (5.453)$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_4} f(z) dz = -i \frac{\pi}{2} \text{Res}(f, i), \quad (5.454)$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_5} f(z) dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} i dy, \quad (5.455)$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_6} f(z) dz = -i \frac{\pi}{2} \text{Res}(f, 0), \quad (5.456)$$

e dove

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^{-a}}{2\pi} \quad (5.457)$$

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi}. \quad (5.458)$$

Concentriamoci sull'integrale su  $\gamma_5$ . Si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} i dy = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} e^{-\pi y i}}{e^{\pi i y} - e^{-\pi i y}} i dy, \quad (5.459)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} (\cos(\pi y) + i \sin(\pi y))}{2 \sin(\pi y)} dy, \quad (5.460)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} \cos(\pi y)}{2 \sin(\pi y)} dy - \frac{i}{2} \int_0^1 e^{-ay} dy, \quad (5.461)$$

$$= K + \frac{i}{2a}(e^{-a} - 1), \quad (5.462)$$

dove abbiamo posto

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} \cos(\pi y)}{2 \sin(\pi y)} dy, \quad (5.463)$$

che è sicuramente reale.

In totale si ha

$$Y(1 - e^{-a}) - K - \frac{i}{2a}(e^{-a} - 1) - \frac{i}{4}(1 + e^{-a}) = 0, \quad (5.464)$$

ovvero

$$I = \frac{1}{4} \left( \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} \right) - \frac{1}{2a}. \quad (5.465)$$

## 5.16 Teorema dei residui con singolarità esterne alla curva di integrazione

Consideriamo una funzione  $f(z)$  definita ed analitica all'esterno di un disco di raggio  $r$ ,  $D(0, r)$ , tranne al più un numero finito di singolarità e il punto all'infinito (che al massimo deve essere una singolarità comunque isolata). Consideriamo una circonferenza di raggio  $R$ , tale da includere tutte le singolarità al finito di  $f(z)$ . Rimarrà fuori solo l'eventuale singolarità nel punto all'infinito. Allora prendiamo  $\gamma$  cammino interno all'anello  $A(0, R, \infty)$ .

**Definizione 5.16.1 (residuo nel punto all'infinito)** Si definisce residuo di  $f(z)$  nel punto all'infinito il seguente numero complesso:

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty), \quad (5.466)$$

dove la curva su cui si integra è  $\gamma$  ma percorsa in senso orario.

Il fatto che per definire il residuo nel punto all'infinito dobbiamo integrare su  $\gamma^-$  è legato al fatto che quando giriamo intorno ad una singolarità, questa deve rimanere sulla sinistra della curva che stiamo percorrendo. Per avere “sulla sinistra” il punto all'infinito, quindi, dobbiamo girare in senso orario.

Allora

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.467)$$

Per studiare cosa succede nel punto all'infinito si fa la sostituzione  $z \rightarrow 1/\zeta$  e si studia cosa succede in  $\zeta \rightarrow 0$ . Se  $\gamma = Re^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , andiamo a riscrivere l'integrale su  $\gamma$  di  $f(z)$  in termini dell'integrale su una nuova circonferenza,  $\tilde{\gamma}$ , che si otterrà dalla prima mediante l'inversione  $z \rightarrow 1/\zeta$ , della funzione valutata in  $z \rightarrow 1/\zeta$ . Si avrà

$$\gamma = Re^{it} \rightarrow \tilde{\gamma}^- = \frac{1}{R} e^{-it}, \quad (5.468)$$

ovvero la nuova circonferenza ha un raggio  $R' = 1/R$ , che quindi va a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Inoltre è percorsa in senso inverso alla  $\gamma$ . Quindi se la  $\gamma$

Allora si avrà

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}^-} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = - \int_{\tilde{\gamma}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = - \int_{\tilde{\gamma}} \left[ -\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] d\zeta \quad (5.469)$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta, \quad (5.470)$$

che quindi è il residuo (moltiplicato per  $2\pi i$ ) in  $\zeta = 0$  di

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right). \quad (5.471)$$

Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) \quad (5.472)$$

e quindi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right). \quad (5.473)$$

La relazione (5.473) si può vedere anche in altro modo.

Sia  $f(z)$  analitica in  $A(0, R, \infty)$  e sia  $\gamma_0$  tale che  $\{\gamma_0\} \subset A$ . In  $A$  la  $f(z)$  può essere espressa da una serie generalizzata di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (5.474)$$

Integriamo adesso la  $f(z)$  su un cammino  $\gamma$ , con  $\{\gamma\} \subset A$ . Si avrà

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n dz = 2\pi i c_{-1}, \quad (5.475)$$

poiché tutti gli integrali di  $z^n$  con  $n \geq 0$  e  $n \leq -2$  sono nulli.

Partendo dall'espressione di  $f(z)$  in  $R < |z| < \infty$ , prendiamo adesso  $z \rightarrow 1/\zeta$  e scriviamoci un'espressione di  $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  valida in  $0 < |\zeta| < 1/R$ . Abbiamo

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\zeta^{n+2}}. \quad (5.476)$$

Il coefficiente del polo singolo di questa funzione si avrà per  $n+2 = 1$ , ovvero  $n = -1$ , cioè corrisponde effettivamente a  $c_{-1}$ . Quindi il residuo di  $\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  in  $\zeta = 0$  è dato da

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.477)$$

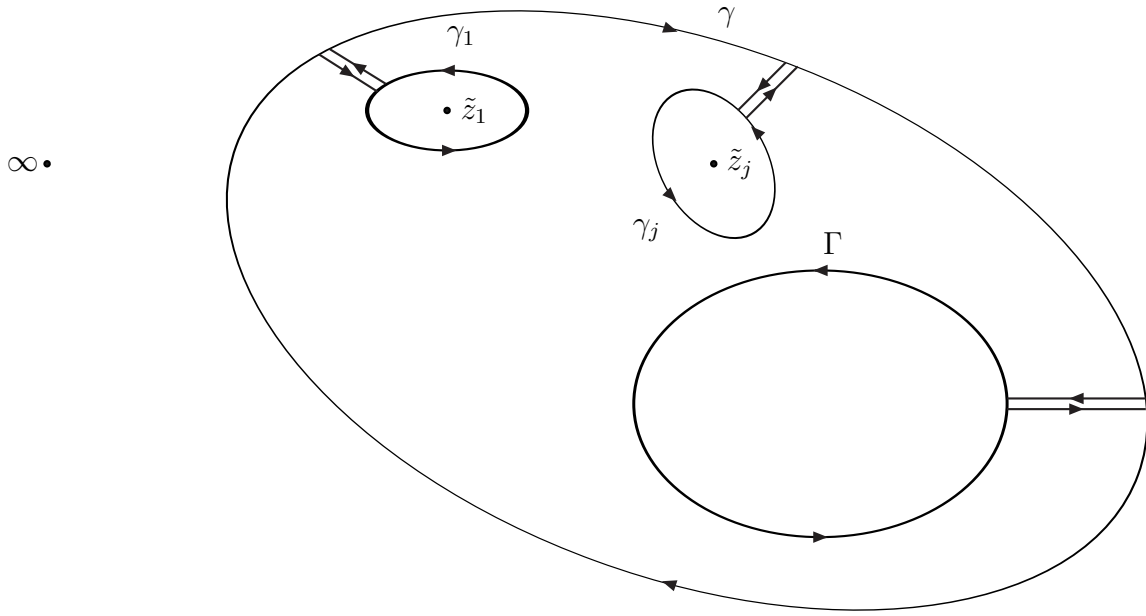
**NB** Il residuo all'infinito è dato dal residuo in  $\zeta = 0$  della  $\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ . Ammettendo anche che la  $f(z)$  non sia singolare nel punto all'infinito, può comunque darsi che il residuo all'infinito sia non nullo. Ciò è dovuto alla presenza dell'extra-fattore  $1/\zeta^2$  che moltiplica la  $f$ . Quindi se  $f(z)$  è regolare all'infinito, o addirittura ha ivi uno zero di ordine 1, il suo residuo all'infinito è non nullo.

L'inclusione del punto all'infinito nella trattazione dei residui permette di estendere la validità del teorema dei residui alle singolarità esterne ad un certo cammino  $\gamma$ .

**Teorema 5.16.2 (dei residui nelle singolarità esterne ad una curva)** Sia  $f(z)$  analitica in  $\mathbb{C}$  tranne un insieme finito di punti  $\{z_1, \dots, z_k\}$  in cui  $f(z)$  abbia delle singolarità isolate. Sia  $\Gamma$  un cammino semplice, regolare, chiuso percorso in senso antiorario, non passante per nessuna delle singolarità  $\{z_1, \dots, z_k\}$ . Siano  $\tilde{z}_n$ ,  $n$  delle  $k$  singolarità isolate e cadano al di fuori della curva  $\Gamma$ . Allora si ha

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \left( \text{Res}(f, \infty) + \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, \tilde{z}_j) \right). \quad (5.478)$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare il teorema si consideri il cammino in figura.



Se integriamo la  $f(z)$  sul cammino chiuso  $C$  composto dalle curve  $\Gamma$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_j$  e dai segmenti che uniscono la  $\gamma$  e la  $\Gamma$  alle  $\gamma_j$ , si ottiene per il teorema di Cauchy

$$\int_C f(z) dz = 0, \quad (5.479)$$

D'altra parte, facendo sì che i segmenti vadano a coincidere (e quindi il contributo dell'integrale su un segmento si elide con il contributo dell'integrale sullo stesso segmento percorso in senso opposto) si ha

$$\int_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (5.480)$$

e siccome

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, \tilde{z}_j), \quad (5.481)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, \infty), \quad (5.482)$$

ne segue l'assunto.

**Corollario 5.16.3** *Se la  $f(z)$  ha al più anche  $k$  singolarità isolate dentro al cammino  $\Gamma$ , si ha*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j), \quad (5.483)$$

e quindi se ne deduce che

$$\sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) + \text{Res}(f, \infty) + \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, \tilde{z}_j) = 0, \quad (5.484)$$

ovvero che la somma di tutti i residui della funzione  $f(z)$ , che abbia soltanto delle singolarità isolate in  $\mathbb{C}$ , deve essere nulla.

### 5.16.1 Esempio

Calcoliamo il seguente integrale

$$I = \int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad \gamma : t \rightarrow e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.485)$$

La funzione  $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$  ha in  $z = 0$  una singolarità isolata essenziale. Infatti, si avrà il seguente sviluppo di Laurent centrato in  $z = 0$ :

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots \quad (5.486)$$

Nel punto all'infinito, invece, la funzione è regolare. In particolare ha uno zero del primo ordine. Infatti

$$z \rightarrow \frac{1}{\zeta}, \quad (5.487)$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow \sin(\zeta) = \zeta + \dots \quad (5.488)$$

Si può risolvere l'integrale  $I$  considerando la singolarità interna alla curva  $\gamma$ , utilizzando il teorema dei residui:

$$\int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i, \quad (5.489)$$

poiché  $\text{Res}(f, 0) = 1$ .

Si può però anche utilizzare il residuo esterno. Infatti, nel punto all'infinito la funzione integranda è regolare, ma il suo residuo è non nullo:

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) \quad (5.490)$$

e

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta} + \dots \quad (5.491)$$



Quindi

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -1, \quad (5.492)$$

e in totale

$$\int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i. \quad (5.493)$$

Inoltre, si vede esplicitamente che  $\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$ .

### 5.16.2 Esempio

Calcoliamo il seguente integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz, \quad \gamma: t \rightarrow e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.494)$$

Questa volta la funzione  $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$  non ha una singolarità isolata in  $z = 0$ . Infatti, la

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} \quad (5.495)$$

è analitica tranne dove si annulla il denominatore, ovvero in

$$\frac{1}{z} = k\pi \implies z = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (5.496)$$

Allora per  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  i punti di singolarità si accumulano intorno a  $z = 0$ , che non è quindi un punto di singolarità isolata. La  $f(z)$  ha infinite singolarità contenute nel cerchio di raggio  $R = 1/\pi$

$k = 0$  corrisponde al punto all'infinito, per il quale

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\sin \zeta} = \frac{1}{\zeta} + \dots \quad (5.497)$$

che è quindi una singolarità polare di ordine 1. Siccome il punto all'infinito è una singolarità isolata della funzione integranda, possiamo applicare il teorema dei residui per questa singolarità esterna al cammino d'integrazione, ottenendo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right), \quad (5.498)$$

dove

$$\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2 \sin \zeta} = \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3! \zeta} + \dots \quad (5.499)$$

Quindi

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) = \frac{1}{6} \quad (5.500)$$

e

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz = \frac{\pi}{3} i. \quad (5.501)$$

### 5.16.3 Esempio

Consideriamo il seguente integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} dz, \quad \gamma : t \rightarrow 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.502)$$

La funzione da integrare è polidroma. In  $z = \pm 1$  ha due punti di diramazione, mentre il punto all'infinito è regolare:

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0. \quad (5.503)$$

Possiamo quindi porre il taglio della radice fra  $z = 1$  e  $z = -1$  (segmento dell'asse reale), che così è completamente contenuto nella traccia di  $\gamma$ , su cui dobbiamo integrare.

Siccome non abbiamo singolarità isolate interne alla curva su cui integriamo, ma un taglio, non possiamo utilizzare il teorema dei residui (con residui interni alla curva). Nella regione esterna alla curva non ci sono singolarità. Potremmo quindi utilizzare il teorema dei residui esterni alla curva  $\gamma$ , andando a calcolare il residui all'infinito della funzione  $f(z)$ . Si ha

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{\omega^2} f\left(\frac{1}{\omega}\right), 0\right) = \text{Res}\left(-\frac{1}{\omega \sqrt{1 - \omega^2}}, 0\right) = -1. \quad (5.504)$$

In totale quindi si ha

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i. \quad (5.505)$$

In questo caso l'integrale potrebbe essere risolto anche per altra via. Siccome gli unici punti di non analicità sono sul taglio, il cammino  $\gamma$  può essere ristretto in maniera continua fino a che non si riduce ad un cammino che prevede il segmento da  $z = 1$  a  $z = -1$  sopra il taglio, chiuso dal segmento fra  $z = -1$  e  $z = 1$  sotto al taglio (principio di deformazione dei cammini) e l'integrale non cambia. Dobbiamo quindi valutare la funzione  $f(z)$  sopra al taglio e sotto il taglio ed integrare la prima sul segmento  $[1, -1]$  e la seconda sul segmento  $[-1, 1]$ .

Sul taglio “da sopra” la funzione vale

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{1 - x^2}}, \quad (5.506)$$

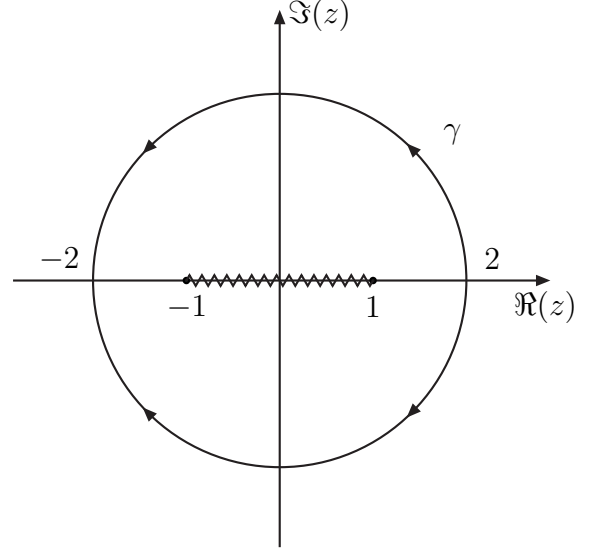
mentre sul taglio da sotto troviamo

$$f(z) = \frac{1}{-i\sqrt{1 - x^2}}. \quad (5.507)$$

L'integrale si riduce quindi a

$$I = \int_1^{-1} \frac{1}{i\sqrt{1 - x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{-i\sqrt{1 - x^2}} dx = 2i \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad (5.508)$$

$$= 2i \arcsin(x)|_{-1}^1 = 2\pi i. \quad (5.509)$$



### 5.16.4 Esempio

Calcoliamo, usando tecniche di variabile complessa, il seguente integrale

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}} dx. \quad (5.510)$$

Consideriamo la seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(z+1)^2(z-1)}}, \quad (5.511)$$

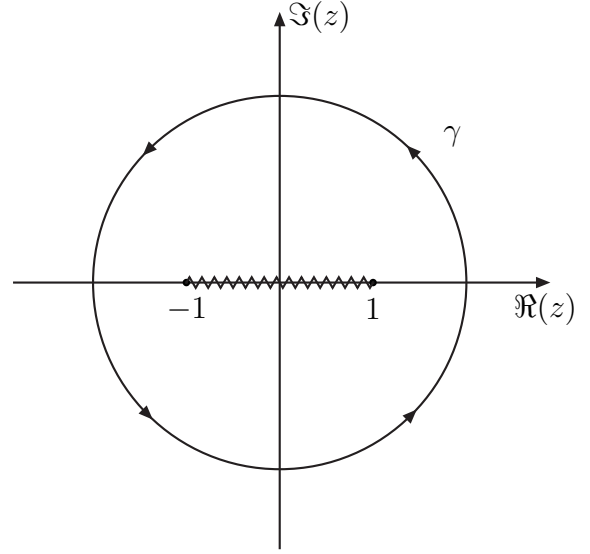
che è polidroma e ha due punti di diramazione al finito, in  $z = \pm 1$ . Il punto all'infinito non è un punto di diramazione ed inoltre è un punto regolare. Quindi possiamo pensare di mettere il taglio da  $z = -1$  a  $z = 1$  e sfruttare il taglio per fare l'integrale reale.

Integriamo la  $f(z)$  su un cammino come per esempio la circonferenza  $\gamma$  in figura:

$$\gamma : t \rightarrow Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R > 1. \quad (5.512)$$

Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= -2\pi i \text{Res}(f, \infty), \\ &= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right), \end{aligned}$$



dove

$$\text{Res}\left(\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), 0\right) = \text{Res}\left(\frac{1}{\zeta} \frac{1}{\sqrt[3]{(\zeta+1)^2(1-\zeta)}}, 0\right) = 1. \quad (5.513)$$

D'altra parte, per il principio di deformazione dei cammini, siccome non ci sono divergenze fra  $\gamma$  e il segmento  $-1 \leq x \leq 1$ , si può deformare la  $\gamma$  al percorso da  $x = 1 - r$  a  $x = -1 + r$  sopra il taglio, più il percorso formato dalla circonferenza centrata in  $x = -1$  di raggio  $r$  (con  $r \rightarrow 0$ , più il percorso da  $x = -1 + r$  a  $x = 1 - r$  sotto il taglio, più il percorso formato dalla circonferenza centrata in  $x = 1$  di raggio  $r$  (con  $r \rightarrow 0$ ). Gli integrali sulle due circonferenze sono tali che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{(re^{i\theta})^2(re^{i\theta} - 2)}} r i e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.514)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{(re^{i\theta} + 2)^2(re^{i\theta})}} r i e^{i\theta} d\theta = 0. \quad (5.515)$$

Inoltre, si ha:

$$\sqrt[3]{(z+1)^2(z-1)} = |z+1|^{\frac{2}{3}} |z-1|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2}{3}\theta_1 + i\frac{4}{3}\pi k_1} e^{i\frac{1}{3}\theta_2 + i\frac{2}{3}\pi k_2}, \quad (5.516)$$

dove, per esempio,  $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$  e  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ .

Sul taglio da sopra, si ha  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$  (con  $k_1 = k_2 = 0$  perché si sceglie il ramo principale della  $f(z)$ ). Quindi

$$\sqrt[3]{(z+1)^2(z-1)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}. \quad (5.517)$$

Sul taglio da sotto, si ha  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$ , ma  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0$ . Quindi

$$\sqrt[3]{(z+1)^2(z-1)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}. \quad (5.518)$$

Allora:

$$2\pi i = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_1^{-1} e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}} + \int_{-1}^1 e^{-i\frac{5\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}}, \quad (5.519)$$

ovvero

$$-e^{-i\frac{\pi}{3}} I + e^{-i\frac{5\pi}{3}} I = i\sqrt{3}I = 2\pi i. \quad (5.520)$$

Infine

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (5.521)$$

## 5.17 Integrali impropri e Valor Principale di Cauchy

Finora abbiamo calcolato integrali per i quali le eventuali singolarità della funzione integranda non giacevano sul cammino di integrazione. In questo paragrafo considereremo anche questa possibilità.

In analisi reale si definisce *integrale improprio* un integrale per il quale

1. l'intervallo di integrazione diventa infinito ,
2. la funzione integranda presenta delle singolarità all'interno dell'intervallo di integrazione.

L'integrale improprio si definisce attraverso un procedimento di limite. Per esempio

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx, \quad (5.522)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx, \quad (5.523)$$

oppure, se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} |f| = \infty, \quad (5.524)$$

si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_a^{b-r} f(x) dx. \quad (5.525)$$

Infine, se

$$\lim_{x \rightarrow c} |f| = \infty, \quad c \in [a, b], \quad (5.526)$$

si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{r_1 \rightarrow 0^+ \\ r_2 \rightarrow 0^+}} \left( \int_a^{c-r_1} f(x) dx + \int_{c+r_2}^b f(x) dx \right). \quad (5.527)$$

Se i limiti esistono, finiti, allora la  $f(x)$  è detta integrabile in senso improprio e l'integrale è definito dal limite.

**[Nota]** I limiti destro e sinistro sono in generale diversi. Ci si avvicina all'eventuale discontinuità della  $f(x)$  in maniera indipendente, da destra e da sinistra.

### 5.17.1 Valore Principale di Cauchy

Si dice valore principale di Cauchy di un integrale improprio in cui l'intervallo di integrazione sia infinito oppure su un intervallo finito all'interno del quale, in  $x = c$ , la  $f(x)$  diverga, il limite

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (5.528)$$

$$PV \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right). \quad (5.529)$$

Se esiste il limite, allora si dice che l'integrale converge secondo il valor principale di Cauchy.

**Nota** Questa volta i limiti destro e sinistro sono uguali. Ci si avvicina all'eventuale singolarità allo stesso modo da una parte e dall'altra.

Ovviamente se un integrale improprio è convergente, lo è anche in valor principale di Cauchy. Il viceversa non è vero.

#### Esempio

Si calcoli il seguente integrale

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx. \quad (5.530)$$

L'integrale è improprio, ma a  $\pm\infty$  non ha problemi di convergenza. Il problema viene dalla divergenza in  $x = 1$ , sull'asse dei reali, che fa sì che il corrispondente integrale improprio non converga. Se utilizziamo il valore principale, invece, l'integrale è convergente. Lo si può capire considerando che la funzione quando  $x \rightarrow 1^-$  tende a  $-\infty$  mentre per  $x \rightarrow 1^+$  tende a  $+\infty$ . Se regolarizziamo l'infinito con un parametro unico a sinistra e a destra della divergenza, sommando i due contributi il parametro della regolarizzazione sparirà. Nel caso di integrale improprio, invece, i due parametri che regolarizzano la divergenza da sinistra e da destra sono diversi, quindi a seconda di come si manda il parametro a zero, potremo avere  $+\infty$  o  $-\infty$  (e l'integrale non converge).

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^3 - 1}. \quad (5.531)$$

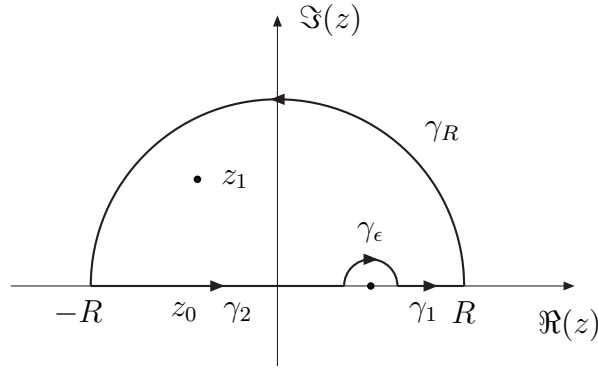
Questa si riduce alla  $f(x)$  sull'asse reale. È analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne in  $z^3 - 1 = 0$ , ovvero

$$z = \sqrt[3]{1} = e^{\frac{2}{3}k\pi i}, \quad (5.532)$$

che indichiamo con

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.533)$$

Tutti e tre i punti sono dei poli singoli.  $z_0 = 1$  è sul cammino d'integrazione. Quindi per valutare l'integrale scegliamo il cammino in figura in cui  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_\epsilon$ .



Per il teorema dei residui abbiamo

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1), \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z), \\
 &= 2\pi i \left( -\frac{1 + i\sqrt{3}}{6} \right). \tag{5.534}
 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_{\epsilon}} f(z) dz \right], \tag{5.535}$$

dove

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \right] = I, \tag{5.536}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta}}{R^3 e^{i3\theta} - 1} i R e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{i2\theta}}{R^3 e^{i3\theta} - 1} d\theta = 0, \tag{5.537}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\epsilon}} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = -\frac{\pi}{3} i. \tag{5.538}$$

In totale:

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx = -\frac{\pi}{3} i (1 + i\sqrt{3}) + \frac{\pi}{3} i = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \tag{5.539}$$

**Esempio.**

Si calcoli il seguente integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{5.540}$$

Notiamo che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è pari. Quindi consideriamo il seguente integrale  $J$  tale che

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} J. \tag{5.541}$$

Per calcolare  $J$  consideriamo il fatto che  $J$  è la parte immaginaria di

$$I' = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx, \quad (5.542)$$

dove abbiamo aggiunto il “ $PV$ ” poiché la parte reale ha un coseno a numeratore, che in  $x = 0$  vale 1 e quindi ha una divergenza polare sul cammino d’integrazione. L’integrale non converge se non in valor principale. Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}, \quad (5.543)$$

che è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tranne  $z = 0$ , dove ha un polo semplice. Integriamo la  $f(z)$  sul cammino chiuso in figura, in cui  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_\epsilon$ . Per il teorema di Cauchy si ha

$$0 = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz \right]. \quad (5.544)$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \right] = I', \quad (5.545)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0 \quad (\text{per il lemma di Jordan}), \quad (5.546)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = -i\pi \operatorname{Res}(f, 0) = -i\pi. \quad (5.547)$$

Quindi in totale

$$i\pi = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (5.548)$$

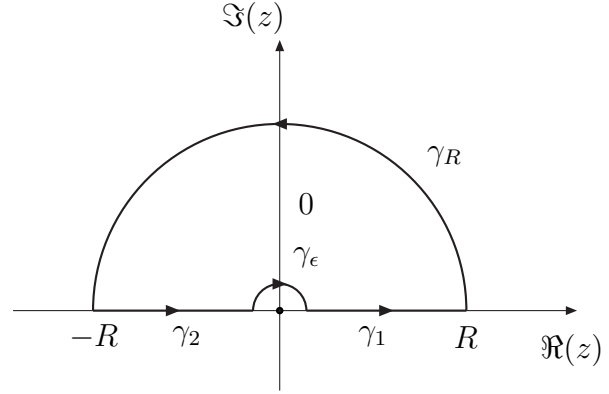
da cui

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad (\text{infatti la funzione è dispari}), \quad (5.549)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (5.550)$$

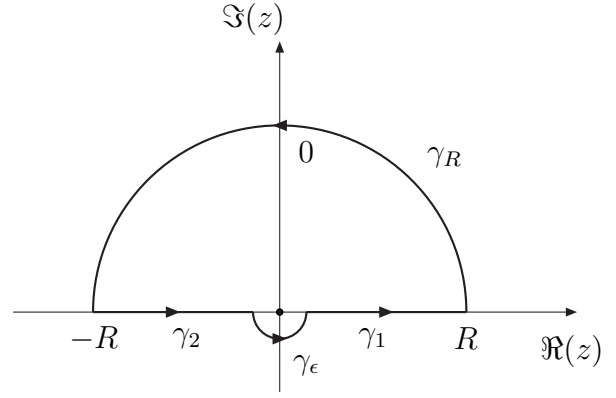
Quindi l'integrale di partenza è

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5.551)$$



**NOTA** Avremmo potuto chiudere il cammino in un altro modo. In particolare, avremmo potuto chiudere  $\gamma_\epsilon$  da sotto, come in figura. A questo punto però il cammino chiuso  $\gamma$  include la singolarità in  $z = 0$  e quindi dobbiamo utilizzare il teorema dei residui

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i. \quad (5.552)$$



D'altra parte

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz &= PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \pi i \operatorname{Res}(f, 0), \\ &= PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \pi i. \end{aligned} \quad (5.553)$$

Quindi alla fine, ovviamente, il risultato è lo stesso.

## 5.18 Integrali di funzioni polidrome

Consideriamo adesso integrali di funzioni che abbiano un taglio nel piano complesso. Molto spesso il taglio può essere utilizzato per fare l'integrale stesso, posizionandolo sul cammino d'integrazione.

Un esempio classico è il seguente

$$I = \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1, \quad (5.554)$$

con  $f(x)$  razionale, senza singolarità sulla semiretta reale  $[0, \infty)$  e tale che se integriamo la corrispondente funzione complessa sulla circonferenza di raggio  $R$  e mandiamo  $R \rightarrow \infty$ , si abbia che l'integrale si annulla.

Se consideriamo la funzione

$$g(z) = z^{a-1} f(z), \quad (5.555)$$

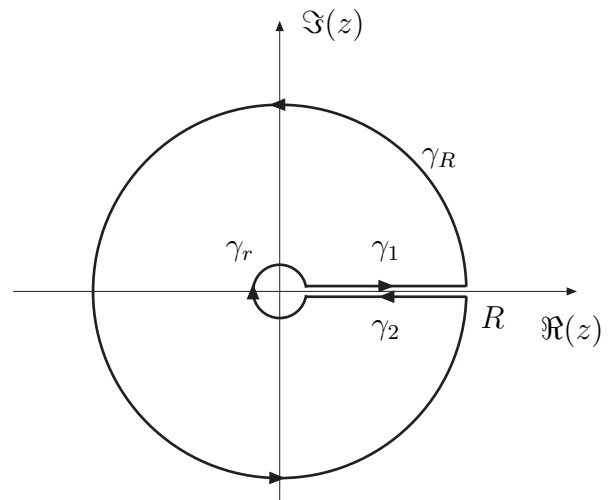
questa sarà polidroma (a causa della potenza complessa):

$$z^{a-1} = e^{(a-1) \log z}. \quad (5.556)$$

Scegliamo il ramo principale della funzione, prendendo il ramo principale del logaritmo. Inoltre, poniamo il taglio del logaritmo sul semiasse reale positivo, tale che

$$\log z = \log |z| + i\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (5.557)$$

Possiamo integrare la  $g(z)$  sul cammino chiuso in figura,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ , considerando





che in  $\text{Int}\{\gamma\}$  ci possano essere delle singolarità,  $\{z_1, \dots, z_k, \dots\}$ . Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_k \text{Res}(z^{a-1}f(z), z_k) &= \int_{\gamma} z^{a-1}f(z) dz, \\ &= \int_{\gamma_1} z^{a-1}f(z) dz + \int_{\gamma_R} z^{a-1}f(z) dz, \\ &\quad + \int_{\gamma_2} z^{a-1}f(z) dz + \int_{\gamma_r} z^{a-1}f(z) dz. \end{aligned} \quad (5.558)$$

L'integrale su  $\gamma_1$  è un'integrazione della funzione sul taglio “da sopra”, per il quale si abbia  $z = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} x e^{i\eta}$ . Mentre l'integrale su  $\gamma_2$  è un'integrazione della funzione sul taglio “da sotto”, per il quale  $z = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} x e^{i(2\pi-\eta)}$ . Consideriamo il caso in cui

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} z^{a-1}f(z) dz = 0, \quad (5.559)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} z^{a-1}f(z) dz = 0. \quad (5.560)$$

Inoltre si avrà:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} z^{a-1}f(z) dz = \int_0^{\infty} x^{a-1}f(x) dx, \quad (5.561)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} z^{a-1}f(z) dz &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_R^r x^{a-1} e^{i(2\pi-\eta)(a-1)} f(x e^{i(2\pi-\eta)}) dx, \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_R^r x^{a-1} e^{i(2\pi-\eta)(a-1)} f(x e^{i(2\pi-\eta)}) dx, = -e^{i2\pi a} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R x^{a-1} f(x) dx, \\ &= -e^{i2\pi a} \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx, \end{aligned} \quad (5.562)$$

da cui si ha

$$(1 - e^{i2\pi a}) I = 2\pi i \sum_k \text{Res}(z^{a-1}f(z), z_k), \quad (5.563)$$

ovvero

$$I = \frac{2\pi i}{(1 - e^{i2\pi a})} \sum_k \text{Res}(z^{a-1}f(z), z_k). \quad (5.564)$$

### 5.18.1 Esempio

Consideriamo il seguente integrale

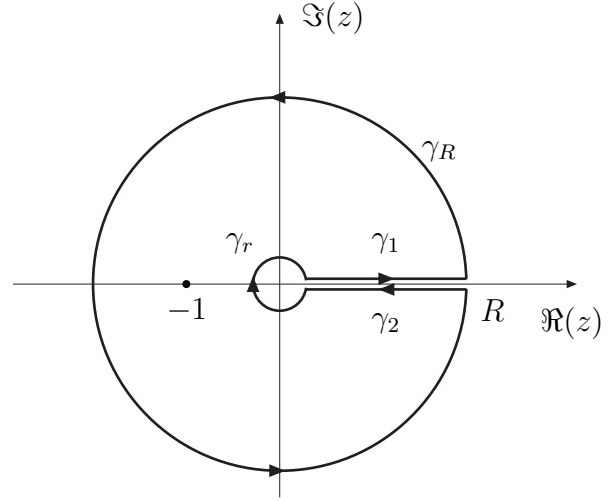
$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1. \quad (5.565)$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{z+1}, \quad (5.566)$$

che ha un punto di diramazione in  $z = 0$  e un polo singolo in  $z = -1$ . Consideriamo il cammino chiuso  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$  in figura, che include il polo della funzione. Si avrà, per il teorema dei residui

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1), \\ &= 2\pi i (-1)^{a-1} = 2\pi i e^{i\pi(a-1)}, \\ &= -2\pi i e^{i\pi a}. \end{aligned} \quad (5.567)$$



Avremo inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz &= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{r^{a-1} e^{i\theta(a-1)}}{r e^{i\theta} + 1} i r e^{i\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^a}{r e^{i\theta} + 1} e^{i\theta a} d\theta = 0, \\ &\text{poiché } a > 0, \end{aligned} \quad (5.568)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz = \int_0^{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^a}{R e^{i\theta} + 1} e^{i\theta a} d\theta = 0, \quad \text{poiché } a < 1, \quad (5.569)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{x^{a-1} e^{i\eta(a-1)}}{x e^{i\eta} + 1} e^{i\eta} dx = I, \quad (5.570)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{x^{a-1} e^{i(2\pi-\eta)(a-1)}}{x e^{i(2\pi-\eta)} + 1} e^{i(2\pi-\eta)} dx = -e^{i2\pi a} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{x^{a-1}}{x+1} dx, \\ &= -e^{i2\pi a} I. \end{aligned} \quad (5.571)$$

In totale

$$I = -2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{1 - e^{i2\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \quad (5.572)$$

## 5.18.2 Esempio

Consideriamo il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx. \quad (5.573)$$

Consideriamo la funzione

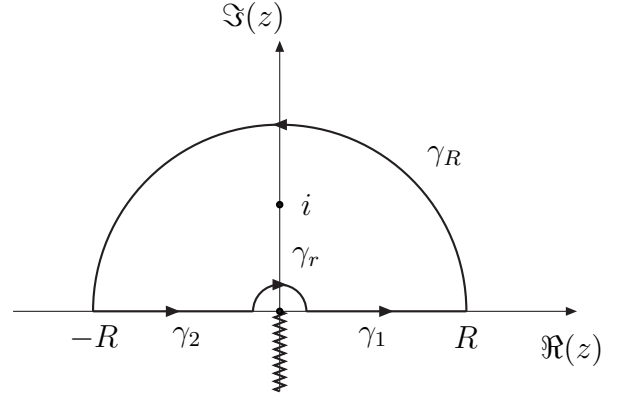
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)}, \quad (5.574)$$

polidroma (con un taglio che collega  $z = 0$  al punto all'infinito) e con due singolarità isolate di tipo polare in  $z = \pm i$ .

In questo caso, possiamo scegliere diversi cammini di integrazione, che ci permettano di ottenere la soluzione dell'integrale  $I$ .

Consideriamo per esempio il cammino in figura.

Ovvero poniamo il taglio per esempio sul semiasse immaginario negativo e chiudiamo l'integrazione nel semipiano immaginario positivo (potremmo anche mettere il taglio sul semi-asse dei reali positivi o negativi: così i due cammini  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$  sarebbero valutati sul taglio, da sopra). La curva chiusa su cui si integra è  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ . Utilizzando il teorema dei residui, abbiamo



$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i), \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\sqrt{z}}{(z + i)(z - i)} = \pi e^{i\frac{\pi}{4}}, \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 + i). \tag{5.575}
 \end{aligned}$$

Avremo inoltre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2 e^{i2\theta} + 1} i r e^{i\theta} d\theta = 0, \tag{5.576}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2 e^{i2\theta} + 1} i R e^{i\theta} d\theta = 0, \tag{5.577}$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = I, \tag{5.578}$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{\sqrt{x} e^{i\frac{\pi}{2}}}{x^2 + 1} e^{i\pi} dx = iI. \tag{5.579}$$

Quindi, in totale si ha

$$I(1 + i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 + i), \tag{5.580}$$

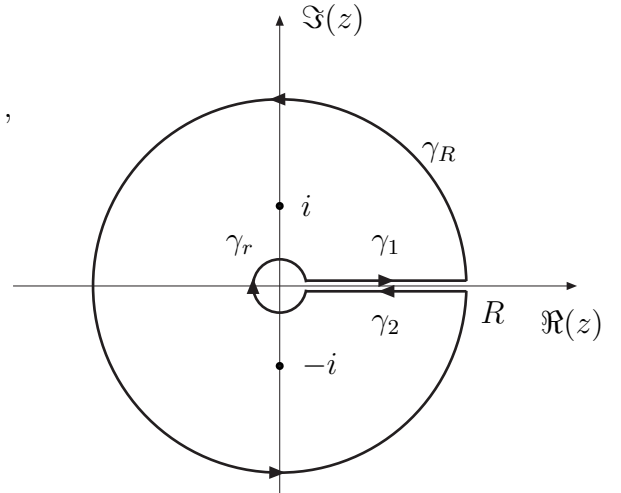
ovvero

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{5.581}$$

Si poteva utilizzare anche il cammino in figura.

Si avrà

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)], \\
 &= 2\pi i \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i} - \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2i} \right), \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 + i + 1 - i) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$



Gli integrali su  $\gamma_R$  e  $\gamma_r$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ , vanno a zero. L'integrale su  $\gamma_1$

riproduce  $I$ , mentre per l'integrale su  $\gamma_2$  si ha:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{\sqrt{x} e^{i\pi}}{x^2 + 1} e^{2\pi i} dx = I.$$

In totale

$$2I = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}, \quad (5.582)$$

ovvero il risultato (5.581).

### 5.18.3 Esempio

Consideriamo adesso una “piccola” variante, ovvero integriamo una funzione che abbia un polo sul cammino d'integrazione:

$$I = PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} dx. \quad (5.583)$$

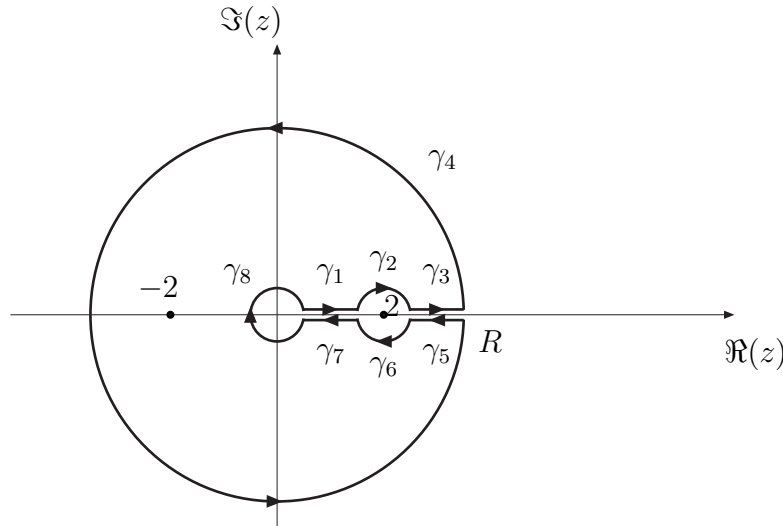
Per calcolare l'integrale consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 4}. \quad (5.584)$$

$f(z)$  ha un taglio dovuto alla radice e due poli semplici in

$$z = \pm 2. \quad (5.585)$$

Il polo  $z = 2$  giace sul cammino d'integrazione. Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$ , si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2) = 2\pi i \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \quad (5.586)$$

Per l'integrale su  $\Gamma$  si ha:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1 + \gamma_3} f(z) = PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} dx, \quad (5.587)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} f(z) = -i\pi \text{Res}(f, 2) = -i\pi \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (5.588)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R} e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2 e^{i2\theta} - 4} i R e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.589)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_5 + \gamma_6} f(z) = PV \int_\infty^0 \left( -\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} \right) dx = PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} dx, \quad (5.590)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_6} f(z) = -i\pi \text{Res}(\tilde{f}, 2) = i\pi \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (5.591)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_8} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2 e^{i2\theta} - 4} i r e^{i\theta} d\theta = 0. \quad (5.592)$$

La funzione  $\tilde{f}$  in Eq. (5.591) è la  $f(z)$  valutata sul taglio da sotto e quindi è

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}. \quad (5.593)$$

In totale, quindi, i contributi in  $z = 2$  si annullano e otteniamo

$$2 PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi, \quad (5.594)$$

ovvero

$$PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \quad (5.595)$$

#### 5.18.4 Esempio

Calcoliamo il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx. \quad (5.596)$$

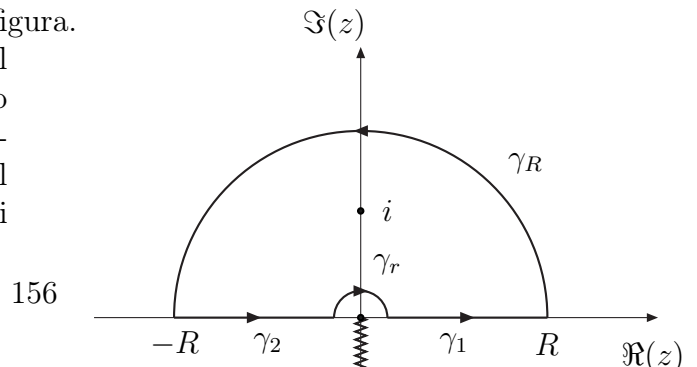
Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^2 + 1} = \frac{\ln(z)}{(z+i)(z-i)}, \quad (5.597)$$

polidroma (con un taglio che collega  $z = 0$  al punto all'infinito) e con due singolarità isolate di tipo polare in  $z = \pm i$ .

In questo caso, scegliamo il cammino in figura.

Ovvero poniamo il taglio per esempio sul semiasse immaginario negativo e chiudiamo l'integrazione nel semipiano immaginario positivo (potremmo anche mettere il taglio sul semi-asse dei reali positivi o negativi: così i



due cammini  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$  sarebbero valutati sul taglio, da sopra). La curva chiusa su cui si integra è  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ . Utilizzando il teorema dei residui, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i), \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\ln(z)}{(z + i)(z - i)} = i \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.598)$$

Avremo inoltre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{\ln(z)}{z^2 + 1} dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\ln r + i\theta}{r^2 e^{i2\theta} + 1} i r e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.599)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln(z)}{z^2 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\ln(R) + i\theta}{R^2 e^{i2\theta} + 1} i R e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.600)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} \frac{\ln(z)}{z^2 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx = I, \quad (5.601)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{\ln(z)}{z^2 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{\ln(x) + i\pi}{x^2 + 1} e^{i\pi} dx = I + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx. \quad (5.602)$$

In totale abbiamo

$$2I + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = i \frac{\pi^2}{2}, \quad (5.603)$$

ovvero

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx = 0, \quad (5.604)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5.605)$$

**[NB]** In questo caso non avremmo potuto integrare su un cammino circolare (come nell'esempio 5.18.2) la  $f(z)$  perché avremmo perso l'integrale stesso nella valutazione su  $\gamma_2$  e  $\gamma_2$ . Eventualmente avremmo potuto trovare la soluzione integrando invece del  $\ln(z)$  il  $\ln^2(z)$ , come nel prossimo esempio.

### 5.18.5 Esempio

Calcoliamo il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx. \quad (5.606)$$

Risolviamo l'integrale in due modi diversi.

Come prima cosa, consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} = \frac{\ln^2(z)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)}, \quad (5.607)$$

polidroma (con un taglio che collega  $z = 0$  al punto all'infinito) e con tre singolarità isolate di tipo polare in:

$$\begin{aligned}
z &= z_0 = -1, \\
z &= z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
z &= z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Utilizziamo il cammino in figura.

Si avrà

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} dz = 2\pi i \sum_{i=0}^2 \text{Res}(f, z_i),$$

con

$$\text{Res}(f, z_0) = -\frac{\pi^2}{3}, \quad (5.608)$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi^2}{27} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (5.609)$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \text{Res}(f, e^{i\frac{5\pi}{3}}) = -\frac{25\pi^2}{27} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (5.610)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il taglio sull'asse dei reali positivi fa sì che  $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ , e quindi che  $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ . Sui vari cammini si avrà:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} dz = -\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{(\ln r + i\theta)^2}{r^3 e^{i3\theta} + 1} i r e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.611)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\ln(R) + i\theta)^2}{R^3 e^{i3\theta} + 1} i R e^{i\theta} d\theta = 0, \quad (5.612)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{\ln^2(x)}{x^3 + 1} dx = J, \quad (5.613)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{\ln^2(z)}{z^3 + 1} dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{(\ln(x) + 2\pi i)^2}{x^3 + 1} dx, \quad (5.614)$$

$$= -J - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx. \quad (5.615)$$

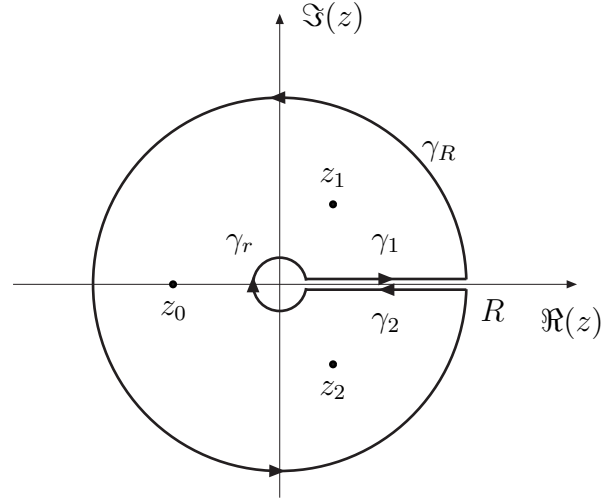
Si vede che nella somma l'integrale da cui eravamo partiti,  $J$ , si cancella. Rimaniamo quindi con una relazione che coinvolge l'integrale che volevamo calcolare, ovvero  $I$ , che riemerge dal doppio prodotto proveniente dal quadrato del logaritmo valutato su  $\gamma_2$ . In totale quindi si ha

$$-4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx = 2\pi i \left( \frac{4\pi^2}{27} - \frac{12\sqrt{3}\pi^2 i}{27} \right), \quad (5.616)$$

ovvero

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^3 + 1} dx = -\frac{2}{27}\pi^2, \quad (5.617)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi. \quad (5.618)$$

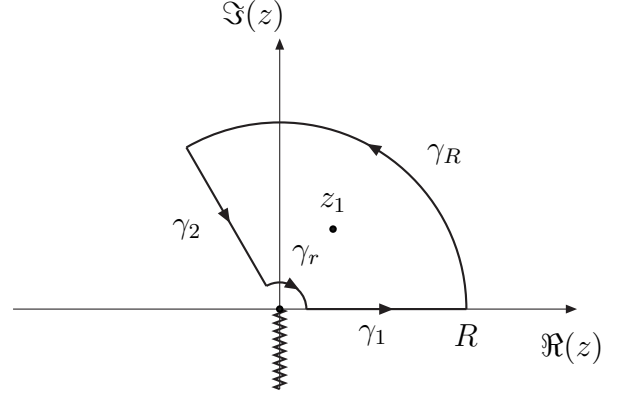


Si può risolvere l'integrale  $I$  utilizzando la funzione

$$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^3 + 1} = \frac{\ln(z)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)}, \quad (5.619)$$

integrandola su un altro cammino d'integrazione. Infatti consideriamo il cammino in figura. Si avrà

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\ln(z)}{z^3 + 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) \\ &= 2\pi i \left[ -\frac{i\pi}{9} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{9} + i\sqrt{3}\frac{\pi^2}{9}, \quad (5.620) \end{aligned}$$



Mentre gli integrali su  $\gamma_R$  e  $\gamma_r$ , nei rispettivi limiti, vanno comunque a zero, e l'integrale su  $\gamma_1$  riproduce l'integrale che vogliamo valutare, adesso bisogna discutere l'integrale su  $\gamma_2$ , che è la semiretta

$$\gamma_2 : t \rightarrow te^{i\frac{2}{3}\pi}. \quad (5.621)$$

Avremo, per esempio che  $z^3$  valutato su  $\gamma_2$  dà  $t^3 \left( e^{i\frac{2}{3}\pi} \right)^3 = t^3$  e quindi il denominatore dell'integrando riproduce quello dell'integrale da valutare.

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} \frac{\ln(z)}{z^3 + 1} dz &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_R^r \frac{\ln(t) + i\frac{2}{3}\pi}{t^3 + 1} e^{i\frac{2}{3}\pi} dt = \int_{\infty}^0 \frac{\ln(t) + i\frac{2}{3}\pi}{t^3 + 1} \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) dt, \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt + i\frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt - i\frac{\sqrt{3}}{2}I. \quad (5.622) \end{aligned}$$

Quindi, ponendo

$$I' = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt, \quad (5.623)$$

in totale si ha

$$\frac{3}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi I' + i\frac{\pi}{3}I' - i\frac{\sqrt{3}}{2}I = \frac{\pi^2}{9} + i\sqrt{3}\frac{\pi^2}{9}, \quad (5.624)$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi I' = \frac{\pi^2}{9} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}I + \frac{\pi}{3}I' = \sqrt{3}\frac{\pi^2}{9} \end{cases} \quad (5.625)$$

Risolviendo il sistema si ottiene

$$I = -\frac{2}{27}\pi^2. \quad (5.626)$$



## 5.19 Prolungamento analitico nel piano complesso

Supponiamo di avere una rappresentazione di una funzione analitica  $f(z)$  in un certo dominio dei complessi. Per esempio possiamo pensare ad una serie di potenze, che converge uniformemente in un disco di raggio  $R$ . Oppure,  $f(z)$  potrebbe essere nota come rappresentazione integrale e l'integrale potrebbe essere definito e convergente in una certa regione di  $\mathbb{C}$  (per esempio in un semipiano ...). Ci si chiede<sup>3</sup>:

1. Se sia possibile (e come) estendere il dominio di validità/analiticità in cui è definita la “forma iniziale” della  $f(z)$ ;
2. che libertà abbiamo di fare un'operazione del genere. Ovvero: se si riuscisse a trovare una “estensione” della  $f(z)$  ad un dominio più esteso, questa sarebbe unica?

Cominciamo col ribadire il fatto che gli zeri di una funzione analitica sono “zeri isolati”. Infatti, se  $f(z)$  è analitica in  $D$ , è sviluppabile in serie di Taylor per  $\forall z \in D$ . Supponiamo che  $z_0$  sia uno zero di  $f(z)$  e che in particolare sia uno zero di ordine  $m$ . Allora si avrà

$$f(z) = (z - z_0)^m (c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^m g(z), \quad (5.627)$$

con  $g(z)$  analitica e  $\neq 0$  in  $z = z_0$ . Ma allora in un intorno di  $z_0$  non ci sono altri zeri (soltanto  $z_0$ ) e non appena  $z \neq z_0$ , la  $f(z)$  è subito  $\neq 0$ .

Si ha il seguente teorema.

**Teorema 5.19.1** *Sia  $f(z)$  una funzione analitica all'interno di un dominio  $D$ . Se  $f(z)$  si annulla in  $D_1 \subset D$ , allora si annulla in tutto  $D$ .*

*Dimostrazione.* Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che  $f(z) \neq 0$  in  $D - D_1$ . Allora se  $z_0 \in D_1$  e  $z_1 \in D - D_1$ , congiungendo  $z_0$  a  $z_1$  con un segmento dovrà esistere uno  $z$  tale che nel tratto  $\overline{z_0 z}$  tutti i punti siano degli zeri di  $f(z)$  e nel tratto  $\overline{z z_1}$  invece  $f(z) \neq 0$ . Ma allora  $z$  è una radice di  $f(z)$  non isolata e questo contraddice l'ipotesi che  $f(z)$  sia analitica in  $D$ .

Il teorema è vero anche sotto ipotesi meno restrittive. Basta, per esempio, che  $f(z)$  sia nulla su tutta una curva contenuta in  $D$  oppure che le radici in  $D$  abbiano un punto di accumulazione, o, infine, che  $f(z)$  si annulli in uno  $z_0$  con tutte le sue derivate. Allora, se  $f(z)$  è analitica in  $D$ , si deve annullare in tutto  $D$ .

**Corollario 5.19.2** *Supponiamo che  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  siano analitiche in  $D$  e che coincidano in  $D_1 \subset D$ . Allora  $f_1(z) = f_2(z)$  su tutto  $D$ .*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal teorema di cui sopra applicato alla funzione  $F(z) = f_1(z) - f_2(z)$ .

Le due funzioni coincidono in tutto  $D$  anche se sono uguali su una curva in  $D$ , oppure se coincidono in  $z_0 \in D$  con tutte le loro derivate.

Allora, supponiamo di avere una certa rappresentazione di una funzione analitica  $f_1(z)$  in un certo dominio di  $\mathbb{C}$ ,  $D_1$ , e un'altra rappresentazione  $f_2(z)$  in  $D_2$ , con  $D_{12} = D_1 \cap D_2$  non

---

<sup>3</sup>Ovviamente, se la  $f(z)$  è espressa in forma chiusa in termini di funzioni elementari, abbiamo già la “continuazione massimale”. Cioè sappiamo studiare la regione di analiticità della  $f(z)$  in tutto  $\mathbb{C}$ .

vuoto. Supponiamo inoltre che  $f_1(z) = f_2(z)$  in  $D_{12}$ . Allora  $f_2(z)$  è il “prolungamento analitico” di  $f_1(z)$  a  $D_2$  tramite  $D_{12}$  e la funzione

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1 \\ f_2(z) & z \in D_2 \end{cases} \quad (5.628)$$

è analitica in  $D_1 \cup D_2$ .

Il prolungamento analitico è unico. Infatti se esistesse una  $\bar{f}_2$  tale che anche  $\bar{f}_2$  coincida con  $f_1$  in  $D_{12}$ , essa dovrebbe coincidere anche con  $f_2(z)$  e così sarebbe in tutto  $D_2$ .

Supponendo di avere una catena di domini  $D_1, D_2, \dots, D_n$  con intersezioni  $D_{12} = D_1 \cap D_2, \dots, D_{ij} = D_i \cap D_j$  diverse dall'insieme vuoto e con  $f_1(z)$  analitica in  $D_1$  e  $f_i(z)$  analitica in  $D_i$ , tali che  $f_i(z) = f_j(z)$  su  $D_{ij}$ , la funzione  $F(z) = f_i(z)$ , con  $z \in D_i$ , è analitica e costituisce il prolungamento analitico di  $f_1(z)$  a  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ .

### Prolungamento alla Weierstrass

Supponiamo adesso che le singole  $f_i(z)$  dell'esempio precedente siano date in forma di serie di Taylor (serie di potenze). Avremo

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (5.629)$$

uniformemente convergente in un disco  $D_0(z_0, R)$ , centrato in  $z_0$  con un certo raggio di convergenza  $R$ . Supponiamo che  $R < \infty$ . Ciò vuol dire che la funzione analitica alla quale la serie converge in  $D_0$  avrà una divergenza in  $z = z_s$  a distanza  $|z_s - z_0| = R$  da  $z_0$ . Supponiamo che  $z_s$  sia l'unica divergenza della funzione, analitica nel resto di  $\mathbb{C}$ . Se la serie converge uniformemente in tutto  $D_0(z_0, R)$ , potremo scrivere una serie di Taylor in  $z = z_1 \in D$  e  $z_1 \neq z_0$ , che riproduca la  $f_0(z)$  e tutte le sue derivate in  $z_1$ . Questa nuova serie centrata ora in  $z_1$ , individuerà una funzione analitica  $f_1(z)$  e avrà un suo raggio di convergenza,  $R_1$ , che sarà dato dalla distanza di  $z_1$  da  $z_s$ ,  $R_1 = |z_1 - z_s|$ . Sarà quindi uniformemente convergente a  $f_1(z)$  nel disco  $D_1(z_1, R_1)$  e tale che  $f_0(z) = f_1(z)$  in  $D_0 \cap D_1$ . Quindi la  $f_1(z)$  è il prolungamento analitico della  $f_0(z)$  a  $D = D_0 \cup D_1$ .

Se la  $f_0(z)$  è data dalla (5.629), la  $f_1(z)$  sarà tale che

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n, \quad (5.630)$$

dove i coefficienti della nuova serie si possono calcolare utilizzando la (5.629):

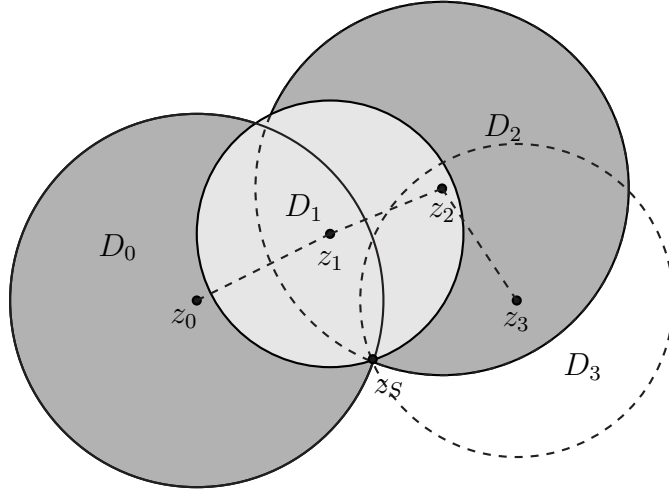
$$d_n = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \Big|_{z_1}, \quad (5.631)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} c_k (z_1 - z_0)^{k-n}, \quad (5.632)$$

$$= |k - n = j| \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)(j+n-1)(j+n-2)\dots(j+1)}{n!} c_{j+n} (z_1 - z_0)^j, \quad (5.633)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} c_{j+n} (z_1 - z_0)^j. \quad (5.634)$$

Possiamo proseguire il ragionamento e scrivere una nuova serie di Taylor in  $z_2 \in D_1$ , ma con  $z_2 \notin D_0$ . La nuova serie convergerà ad una  $f_2(z)$  in  $D_2(z_2, R_2)$ , tale che  $f_2(z) = f_1(z)$  in  $D_1 \cap D_2$ . Muovendosi in questo modo, possiamo coprire il piano complesso aggirando il punto di discontinuità  $z_S$  e mappando per dischi la funzione analitica che verrà rappresentata da una serie di Taylor in ogni disco.



### Esempio

Per capire meglio l'algoritmo di cui nel paragrafo precedente, consideriamo la serie centrata in  $z = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \quad (5.635)$$

Questa serie ha raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2. \quad (5.636)$$

Quindi la serie converge uniformemente nel disco  $|z| < 2$ . Ciò mi dice anche che a distanza 2 dal punto  $z = 0$  la funzione analitica a cui la serie converge avrà una divergenza. In questo caso è semplice capire che effettivamente è così in quanto la serie può essere banalmente risommata per trovare la seguente  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \right) = \frac{1}{2 - z}. \quad (5.637)$$

Siccome la (5.635) converge nel disco di raggio 2, convergerà anche in  $z = i$ , punto interno al disco. Possiamo allora contruire un prolungamento analitico della (5.635) con una serie centrata in  $z = i$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - i)^n, \quad (5.638)$$

dove

$$d_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} \Big|_{z=i}, \quad (5.639)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n! 2^{k+1}} i^{k-n}, \quad (5.640)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)(n+j-1)(n+j-2)\dots(j+1)}{n! 2^{n+j+1}} i^j, \quad (5.641)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)(n+j-1)(n+j-2)\dots(j+1)}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^j, \quad (5.642)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} \left(\frac{i}{2}\right)^j, \quad (5.643)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{j} \left(\frac{i}{2}\right)^j, \quad (5.644)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n-1}{j} \left(-\frac{i}{2}\right)^j, \quad (5.645)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{i}{2}\right)^{n+1}}, \quad (5.646)$$

$$= \frac{1}{(2-i)^{n+1}}. \quad (5.647)$$

Quindi la nuova serie si scrive come segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} \quad (5.648)$$

e rappresenta la continuazione analitica della (5.635) al disco centrato in  $z = i$  con raggio

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2-i|^{n+2}}{|2-i|^{n+1}} = |2-i| = \sqrt{5}. \quad (5.649)$$

In questo semplice esempio si capisce subito come la nuova serie sia un'altra rappresentazione della stessa funzione analitica (5.637). Infatti in  $|z-i| < |2-i|$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} = \frac{1}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} = \frac{1}{2-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{2-i}} = \frac{1}{2-z}. \quad (5.650)$$

### Esempio: rappresentazione integrale

Un altro modo di trovare il prolungamento analitico di una funzione analitica, data per esempio in forma di serie di potenze, è attraverso il passaggio ad una rappresentazione integrale.

Supponiamo di avere la seguente serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}. \quad (5.651)$$

Il raggio di convergenza è

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1. \quad (5.652)$$

Si può estendere il dominio di convergenza della  $f(z)$  passando ad una rappresentazione integrale, come segue. Poniamo

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt. \quad (5.653)$$

Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (tz)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (tz)^n dt = \text{per } |z| < 1 = \int_0^1 \frac{1}{1-tz} dt. \quad (5.654)$$

La rappresentazione integrale (5.654) ha un dominio di definizione che va ben oltre il disco centrato in  $z = 0$  di raggio  $R = 1$ . Infatti, la  $f(z)$  così definita è analitica tranne dove si annulla il denominatore della funzione integranda, ovvero  $z \neq \frac{1}{t}$  con  $t \in [0, 1]$  ovvero sull'asse reale con  $z \in [1, \infty)$ . Ciò ci dice che la  $f(z)$  avrà un taglio da  $z = 1$  al punto all'infinito.

In questo semplice caso si capisce cos'è successo, integrando direttamente la (5.654), trovando

$$f(z) = -\frac{1}{z} \ln(1-z), \quad (5.655)$$

che quindi è una funzione polidroma con taglio del  $\ln(1-z)$  (nel resto di  $\mathbb{C}$  è analitica).

### 5.19.1 Funzione $\Gamma(z)$ di Eulero

Una possibile rappresentazione dell'integrale di Eulero di seconda specie è la seguente

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad t \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.656)$$

Questo integrale non ha problemi per  $t \rightarrow \infty$  dove l'integrale converge senza problemi. Intorno a  $t = 0$  invece si ha

$$e^{-t} t^{z-1} \sim t^{z-1} \quad (5.657)$$

e

$$\int_0^x t^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \Big|_0^x, \quad (5.658)$$

che in 0 converge solo se  $\alpha > -1$ , ovvero, per l'integrale (5.656),  $\Re(z-1) > -1$  e quindi  $\Re(z) > 0$ . Cioè la rappresentazione integrale (5.656) definisce una funzione analitica nel semipiano  $\Re(z) > 0$ . È però possibile trovare una continuazione analitica della  $\Gamma(z)$  a tutto  $\mathbb{C}$  considerando che

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (5.659)$$

Il secondo integrale è analitico in  $z$  in tutto  $\mathbb{C}$ . Il primo integrale, invece, è quello che dà l'andamento in 0 "problematico". Però possiamo scrivere l'esponenziale in serie di potenze

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!}. \quad (5.660)$$

Quindi

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt, \quad (5.661)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} t^{z+n} \Big|_0^1, \quad (5.662)$$

$$= | \text{siccome } \Re(z) > 0 |$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}. \quad (5.663)$$

Si può dimostrare che questa serie è uniformemente convergente in tutto  $\mathbb{C}$ , tranne per  $z = -n$  in cui si hanno dei poli singoli. Il residuo dell' $n$ -esimo polo è  $(-1)^n/n!$ .

Quindi

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (5.664)$$

è il prolungamento analitico della (5.656) a tutto  $\mathbb{C}$ .

La  $\Gamma(z)$  è la “generalizzazione” del fattoriale a tutto  $\mathbb{C}$ . Infatti, si ha

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \quad (5.665)$$

e, per  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt, \quad (5.666)$$

$$= | \text{integrando per parti} |$$

$$= -e^{-t} t^n \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n e^{-t} t^{n-1} dt, \quad (5.667)$$

$$= | \text{integrando per parti} |$$

$$= n \left[ -e^{-t} t^{n-1} \Big|_0^{\infty} + (n-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-2} dt \right], \quad (5.668)$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-2} dt, \quad (5.669)$$

$$= | \text{integrando per parti } n \text{ volte} |$$

$$= n! \quad (5.670)$$

Una proprietà fondamentale è la seguente:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} n e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z), \quad (5.671)$$

formula molto utile per estrarre i poli della  $\Gamma$ .

### 5.19.2 Principio di riflessione di Schwartz

### 5.19.3 Continuazione alla Borel

Supponiamo che  $f_1(z)$  sia analitica in  $D_1 \subset \mathbb{C}$  dove

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (5.672)$$

e  $D_1 = D(0, R)$  dove  $R$  è il raggio di convergenza, finito, della serie.

Poniamo

$$f_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} h(z t) dt, \quad (5.673)$$

dove

$$h(z t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (z t)^k \quad (5.674)$$

è detta *funzione di Borel* della  $f_1(z)$ . Se  $R$  è finito, il raggio di convergenza della  $h(z t)$  è infinito. Per  $|z| < R$  si ha

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (z t)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \Gamma(k+1), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f_1(z). \end{aligned} \quad (5.675)$$

#### Esempio

Per vedere un'applicazione semplice, consideriamo la solita serie geometrica

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (5.676)$$

che converge uniformemente in  $|z| < 1$ . La sua funzione di Borel è

$$h(z t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (n!) (z t)^n = e^{z t}. \quad (5.677)$$

Quindi, la trasformata di Borel è data da

$$f_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} h(z t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} dt, \quad (5.678)$$

che quindi si riduce alla  $f_1(z)$  nel disco di raggio 1, ma ora converge per  $\Re(z) < 1$ . La  $f_2(z)$  è quindi la continuazione analitica della  $f_1(z)$  al semipiano  $\Re(z) < 1$ .

