Serie di potenze

1 Teorema di Cauchy-Hadamard

$\dots\dots$

2 La serie geometrica

La serie geometrica centrata in $z_0 = 0$ è definita:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

cioè una serie di potenze i cui coefficienti a_k sono tutti uguali a 1:

$$a_k = 1, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Possiamo quindi facilmente calcolare ora il raggio di convergenza con la formula di Cauchy-Hadamard:

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1.$$

La serie pertanto converge nel cerchio di raggio 1 centrato nell'origine $|z| < 1$.

Per la serie geometrica è possibile anche sommare la serie direttamente, calcolando il limite:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} z^k$$

Per farlo, consideriamo l'espressione:

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{k=0}^{N} z^k &= (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}+z^N)\\
&= (1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}+z^N) - z\,(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}+z^N)\\
&= (1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}+z^N) - (z+z^2+z^3+\cdots+z^N+z^{N+1})\\
&= 1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}+z^N - z - z^2 - z^3 - \cdots - z^N - z^{N+1}\\
&= 1 - z^{N+1}
\end{aligned}$$

Perciò abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{N} z^k = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$$

Da cui vediamo che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} z^k = \lim_{N\to+\infty}\frac{1-z^{N+1}}{1-z}.$$

Facciamo il limite ponendo $z=\rho e^{i\theta}$:

$$\lim_{N\to+\infty} z^{N+1} = \lim_{N\to+\infty}\rho^{N+1}\,e^{i\,N\theta} = \begin{cases}\infty & \text{se } \rho>1\\ 0 & \text{se } \rho<1\\ \text{indeterminato} & \text{se } \rho=1\end{cases}$$

Segue che:

$$\text{Se}\quad |z|<1,\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} z^k = \lim_{N\to+\infty}\frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z},$$