Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

20/02/2023

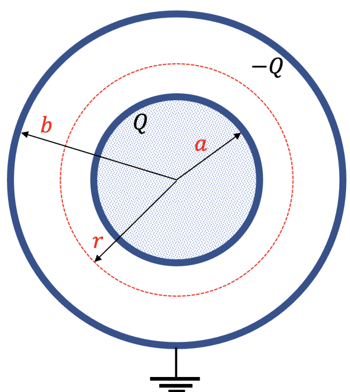
Esercizio 1

Si consideri un condensatore isolato le cui armature sono sfere concentriche di raggio rispettivamente $a = 2$ cm e $b = 2a$. Supponendo che la d.d.p. tra di esse sia $\Delta V = 100$ V e che la costante dielettrica relativa del materiale tra di esse valga $\epsilon_r = 4$, si calcoli

1) il campo e il potenziale elettrostatici in ogni regione dello spazio;

2) l'energia elettrostatica contenuta nella regione definita da $r \leq b$, dove r è la distanza dal centro del condensatore;

3) entro quale distanza dal centro del sistema sarebbe contenuta una frazione $f = 0.5$ dell'energia elettrostatica totale, una volta caricato il condensatore.



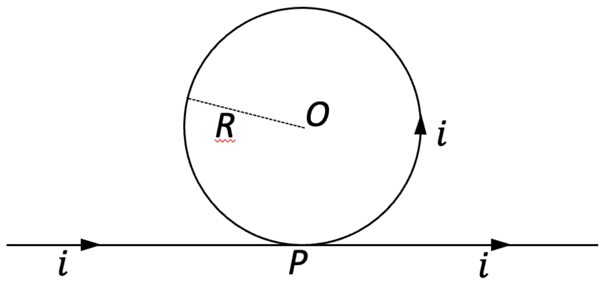
Esercizio 2

Un lungo filo percorso dalla corrente i è piegato come in figura, senza nodi in P. Determinare modulo, direzione e verso del vettore $\vec{B}$ generato nel centro O della parte circolare

1) nel caso presentato in figura;

2) quando la parte circolare è ruotata di 90^o attorno a un suo diametro, ponendosi con la normale parallela al tratto rettilineo del filo.

3) Nella configurazione di cui al punto 1), calcolare la distanza da O del punto dell'asse della spira in cui il campo generato da essa eguaglia in modulo quello generato dal filo.



Esercizio 3

Un condensatore con le armature quadrate, di capacità $C = 4.43$ nF, è collegato tramite una resistenza $R = 100$ MΩ a un generatore di f.e.m. continua $\mathcal{E} = 1000$ V, che inizia a caricarlo all'istante $t_0 = 0$. Trascorso un tempo $t = 1$ s, determinare:

1) la corrente di spostamento tra le armature;

2) il flusso del campo elettrico attraverso un quadrato di lato metà rispetto a quello delle armature, con il centro sull'asse del condensatore;

3) la circuitazione di $\vec{B}$ lungo il perimetro di tale quadrato.

Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

20/02/2023

Soluzioni

Esercizio 1 La capacità del condensatore è

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a} = 17.79 \text{ pF}$$

La carica collocata sulle armature è

$$Q = C\Delta V = 1.779 \text{ nF}$$

Il campo elettrico è diverso da zero solo per $a \leq r \leq b$ e si ricava applicando la legge di Gauss per il campo di induzione elettrica $\vec{D}$ usando come superficie di Gauss una sfera di raggio r, concentrica alle armature. Si ottiene:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \implies E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

Per il potenziale abbiamo, assumendo che l'armatura interna sia quella con carica positiva, per $a \leq r \leq b$:

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int \frac{dr}{r^2} + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} + K$$

la costante K si determina imponendo che $V(b) = 0$ e quindi

$$K = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r b}$$

Pertanto

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{C} = \Delta V$$

Si noti che $V(r) = \Delta V$ se $r \leq a$ e $V(r) = 0$ per $r \geq b$.

Tra le due armature la densità di energia è, in funzione di r, pari a

$$u(r) = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2}E^2(r) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon_r r^4}$$

Quindi l'energia elettrostatica nel condensatore è

$$U = 4\pi \int_a^{2a} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon_r r^4} r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_a^{2a}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_r a} = 8.9{\cdot}10^{-8}\ \mathrm{J}$$

che è pari a $\frac{1}{2}C\Delta V^2$. Se si calcola l'integrale fino a r invece di $b = 2a$ si trova l'espressione dell'energia in funzione di r, che è:

$$U(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)$$

Vogliamo determinare il valore di r per cui

$$U(r) = fU \ \longrightarrow\ U(r) - fU = 0 \ \longrightarrow\ \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}-\frac{f}{2a}\right) = 0$$

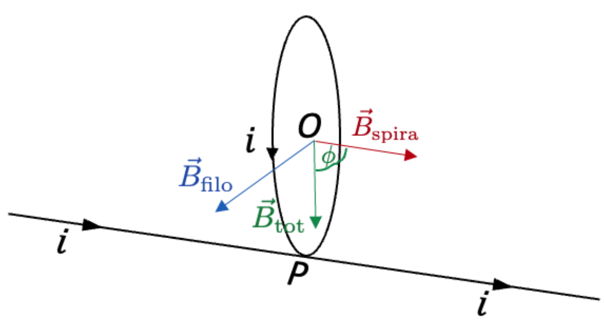
questo implica che

$$2r - 2a - rf = 0 \ \longrightarrow\ r = \frac{2a}{2-f} = 2.67\ \mathrm{cm}$$

Esercizio 2

Il campo è dato dalla somma del campo generato dal filo e di quello generato dalla spira. Entrambi i contributi sono normali al piano della spira e uscenti dal piano del foglio. L'intensità del campo è pari alla somma dei moduli:

$$B(O) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} + \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}(1+\pi)$$

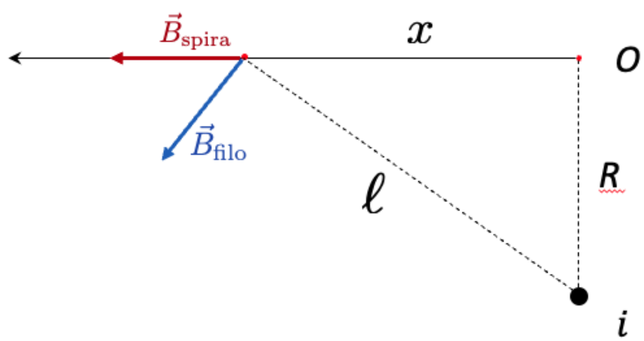


Nella configurazione 2) il campo $\vec{B}_{\text{spira}}$ è parallelo al filo mentre $\vec{B}_{\text{filo}}$ resta invariato ed è ora parallelo al piano della spira. I campi formano tra loro un angolo retto, come illustrato in figura. Il modulo del campo $\vec{B}_{\text{tot}}$ è quindi

$$B_{\text{tot}} = \sqrt{B^2_{\text{filo}} + B^2_{spira}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\sqrt{1+\pi^2}$$

Il campo risultante forma un angolo ϕ con la direzione del filo pari a

$$\tan\phi = \frac{B_{\text{filo}}}{B_{spira}} = \frac{1}{\pi} = 0.318 \quad \longrightarrow \quad \phi = 0.308 \text{ rad} = 17^o.6$$



Per quanto riguarda la terza domanda, facciamo riferimento alla figura, nella quale il filo è ortogonale al piano del foglio e la corrente è diretta verso l'osservatore. La spira non è disegnata in quanto giace in un piano ortogonale al foglio, a cui appartiene il filo. Abbiamo che

$$B_{spira} = \frac{\mu_0 i R^2}{2\ell^3} \quad \text{e} \quad B_{\text{filo}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\ell}$$

Ne segue che

$$\frac{R^2}{\ell^2} = \frac{1}{\pi} \quad \longrightarrow \quad \ell^2 = \pi R^2$$

Per x si trova quindi

$$x = \sqrt{\ell^2 - R^2} = \sqrt{\pi R^2 - R^2} = R\sqrt{\pi - 1}$$

Esercizio 3

La corrente di spostamento tra le armature del condensatore è pari alla corrente fornita dal generatore:

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

La costante RC del circuito è $\tau = 0.443$ s e quindi

$$i_s(1) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1/\tau} = 1.046 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

Il flusso del campo elettrico è:

$$\Phi[\vec{E}(t)] = \frac{V(t)}{d} \frac{L^2}{4}$$

Il rapporto L^2/d si può esprimere in termini di capacità:

$$C = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} \quad \longrightarrow \quad \frac{L^2}{d} = \frac{C}{\epsilon_0}$$

Quindi

$$\Phi[\vec{E}(t)] = \frac{V(t)}{4} \frac{C}{\epsilon_0} = \frac{C\mathcal{E}}{4\epsilon_0} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

A $t = 1$ s il flusso vale $\Phi = 0.112 \cdot 10^6$ V·m.

La circuitazione del campo magnetico sul perimetro Γ del quadrato si calcola utilizzando la legge di Ampère-Maxwell, considerando il flusso della corrente di spostamento concatenato con Γ:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_s(1) \frac{L^2/4}{L^2} = 3.29 \cdot 10^{-13} \text{ Tm}$$