Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

11/07/2023

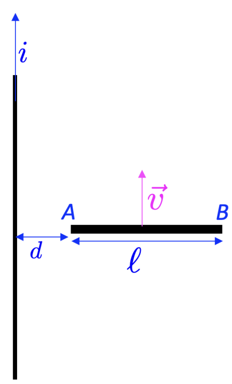
Esercizio 1

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente stazionaria i diretta come in figura. Una sbarretta metallica, ortogonale al filo e complanare a esso, si muove con velocità uniforme $v = 20$ m/s parallela al filo. Sapendo che la sbarretta è lunga $\ell = 30$ cm, che la distanza minima dal filo è $d = 1$ cm e che ai suoi capi è presente una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B = 0.7$ mV, si determini, in condizioni di equilibrio:

1) l'espressione del campo <u>elettrostatico</u> che si instaura sulla sbarretta in funzione della distanza r dal filo;

2) l'espressione della differenza di potenziale $V_A - V_B$ in funzione della corrente i;

3) l'intensità della corrente che scorre nel filo rettilineo indefinito.



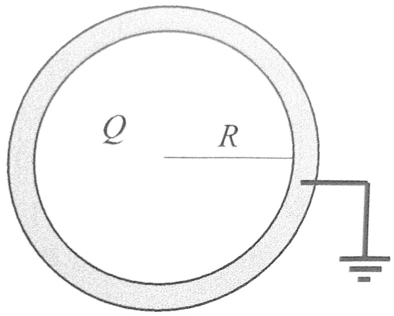
Esercizio 2

In una sfera di raggio R di materiale dielettrico (costante dielettrica relativa ϵ_r) è uniformemente distribuita una carica elettrica Q. La superficie esterna della sfera è ricoperta da un sottile strato metallico collegato a terra. Si calcolino:

1) il campo elettrostatico in funzione della distanza r dal centro della sfera;

2) il potenziale elettrostatico in funzione della distanza r dal centro della sfera;

3) la densità superficiale delle cariche indotte nel metallo.



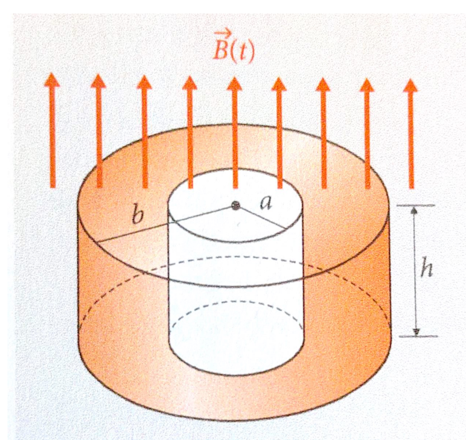
Esercizio 3

Un toro di materiale conduttore omogeneo di resistività ρ, raggio interno a, raggio esterno b e altezza h, è immerso in un campo di induzione magnetica di modulo $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$, uniforme e parallelo all'asse del toro, come mostrato in figura. Calcolare:

1) il campo elettrico indotto nel toro $\vec{E}(r, t)$;

2) la densità di potenza (u.m. W/m^3) dissipata istantaneamente per effetto Joule;

3) la potenza media dissipata in un periodo su tutto il toro.



Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

11/07/2023

Soluzioni

Esercizio 1

Il campo magnetico generato dalla corrente che percorre il filo è dato dalla legge di Biot-Savart, è diretto, nella regione compresa tra A e B ortogonalmente al piano del foglio con verso entrante. In modulo è:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Sulle cariche della sbarretta in movimento agisce la forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Sotto il suo effetto, le cariche negative vengono portate verso l'estremo B. Il campo elettromotore $\vec{E}_{em}$ determinato dalla forza di Lorentz vale:

$$\vec{E}_{em}(r) = \vec{v} \times \vec{B} = -vB(r)\hat{r}$$

dove $\hat{r}$ è il versore che indica la direzione della sbarretta, orientato da A a B. Il moto delle cariche sotto l'effetto del campo elettromotore dura fin tanto che il campo elettrostatico $\vec{E}$ generato dalla stessa distribuzione di cariche è uguale e opposto al campo elettromotore:

$$\vec{E} = -\vec{E}_{em}(r) = vB(r)\hat{r}$$

La differenza di potenziale si ottiene per integrazione del potenziale elettrostatico:

$$V_A - V_B = \int_A^B vB(r)\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = \int_d^{d+\ell} \frac{\mu_0 v i}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 v i}{2\pi} \ln\frac{d+\ell}{d}$$

La corrente che percorre il filo si ricava sapendo che $\Delta V = V_A - V_B = 0.7$ mV:

$$i = \frac{2\pi\Delta V}{\mu_0 v \ln\frac{d+\ell}{d}} = 50.96 \ \text{ A}$$

Esercizio 2

La carica Q è la carica libera (cioè non di polarizzazione) presente nel dielettrico. Per ipotesi è distribuita uniformemente con densità volumica

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Per trovare il campo elettrico, applichiamo il teorema di Gauss a una superficie sferica Σ di raggio r con $0 < r < R$, tenendo conto che il vettore di induzione elettrica $\vec{D}$ è radiale e ha la stessa intensità sulla superficie Σ considerata:

$$\Phi_\Sigma(\vec{D}) = 4\pi r^2 D(r) = Q(r)$$

dove

$$Q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

è la carica libera contenuta nel volume delimitato da Σ. Possiamo così trovare un'espressione per D:

$$4\pi r^2 D(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 \implies D(r) = \frac{Qr}{4\pi R^3}$$

Supponiamo ora che il guscio conduttore sia spesso δr. Se applichiamo il teorema di Gauss a una superficie sferica di raggio $R < r < R + \delta R$ all'interno dello strato metallico, dove $\vec{E}(r) = 0$, come pure $\vec{D}(r) = 0$, otteniamo che $Q(r) = 0$. In questo caso $Q(r)$ è dato dalla somma della carica libera distribuita nel dielettrico, Q, e della carica indotta sulla superficie interna del conduttore Q_{ind}. Ne segue che:

$$Q(r) = Q + Q_{ind} = 0 \implies Q_{ind} = -Q$$

Visto che il conduttore è collegato a terra, la sua superficie esterna è scarica. Ne segue che

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) &= 0 \text{ se } r > R \\ \vec{E}(r) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\hat{r} \quad r < R \end{aligned}$$

Il guscio sferico è collegato a terra, quindi $V(r) = 0$ se $r \geq R$. Per $r \leq R$ abbiamo

$$\int_{V(r)}^{0} dV = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\int_r^R r dr \implies V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\left(R^2 - r^2\right)$$

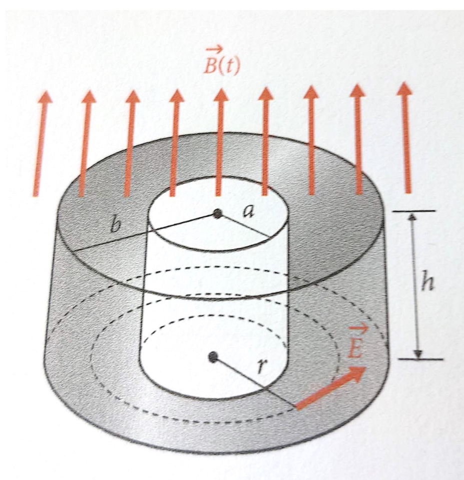
Nel metallo ci sono cariche indotte distribuite uniformemente sulla superficie interna. Su quella esterna non ci sono cariche perché il conduttore è collegato a terra. L'induzione, come abbiamo visto è completa. Quindi la densità superficiale delle cariche indotte nel conduttore è

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}$$

Esercizio 3

Si faccia riferimento alla figura. Il campo elettrico indotto è diretto come in figura e dipende soltanto da r. Il campo elettrico indotto può essere calcolato utilizzando la legge di Faraday Neumann su una circonferenza (indicata in figura) di raggio $a < r < b$:

$$-\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r,t) 2\pi r$$



Il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi(\vec{B}) = \pi r^2 B_0 \sin(\omega t)$$

Se inseriamo questa espressione in quella precedente troviamo:

$$-\pi r^2 B_0 \omega \cos(\omega t) = E(r,t) 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad E(r,t) = -\frac{B_0 \omega r}{2} \cos(\omega t)$$

La potenza spesa per unità di volume è

$$P_\tau(r,t) = Ej = \frac{E^2}{\rho} = \frac{B_0^2\omega^2 r^2}{4\rho}\cos^2(\omega t)$$

L'elemento di volume $d\tau$ localizzato intorno a un punto distante r dall'asse del fascio vale $d\tau = 2\pi r h dr$. La potenza istantanea dissipata sull'intero volume occupato dal toro vale

$$P(t) = \int_{\text{toro}} P_\tau d\tau = \frac{B_0^2\omega^2\pi h}{2\rho}\cos^2(\omega t)\int_a^b r^3 dr = \frac{B_0^2\omega^2\pi h\left(b^4-a^4\right)}{8\rho}\cos^2(\omega t)$$

La potenza media dissipata in un periodo è

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{B_0^2\omega^2\pi h\left(b^4-a^4\right)}{8\rho} = \frac{B_0^2\omega^2\pi h\left(b^4-a^4\right)}{16\rho}$$