Serie di Taylor e di Laurent

1 Sviluppo in serie di potenze di Taylor

Esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni olomorfe e le funzioni analitiche, cioè le funzioni a cui convergono le serie di potenze. Per essere più precisi si possono dimostrare i seguenti teoremi.

1.1 Teorema di Weierstrass

Se la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

converge uniformemente alla funzione $f(z)$ in un cerchio $\mathcal{C}$,

allora $f(z)$ è olomorfa in $\mathcal{C}$.

La dimostrazione è semplice, basta infatti dimostrare che esiste la derivata di $f(z)$ in ogni punto di $\mathcal{C}$. Ma questo è banale, infatti vale:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (z - z_0)^k, \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \frac{d}{dz}(z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, k \, (z - z_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Nel penultimo passaggio abbiamo potuto invertire derivata e sommatoria, grazie alla convergenza uniforme della serie a $f(z)$. Inoltre, con la formula di Cauchy-Hadamard, si dimostra che il cerchio di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a'_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, k \, (z - z_0)^{k-1}$$

è sempre $\mathcal{C}$. Infatti:

$$\begin{aligned} &\text{Dato} \qquad \rho = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \neq 0, \\ &\text{allora} \qquad \rho' = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a'_k}{a'_{k+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k \, k}{a_{k+1}(k+1)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = \rho. \end{aligned}$$

1.2 Teorema di Taylor

Se la funzione $f(z)$ è olomorfa in una certa regione D,

allora esiste una serie di potenze

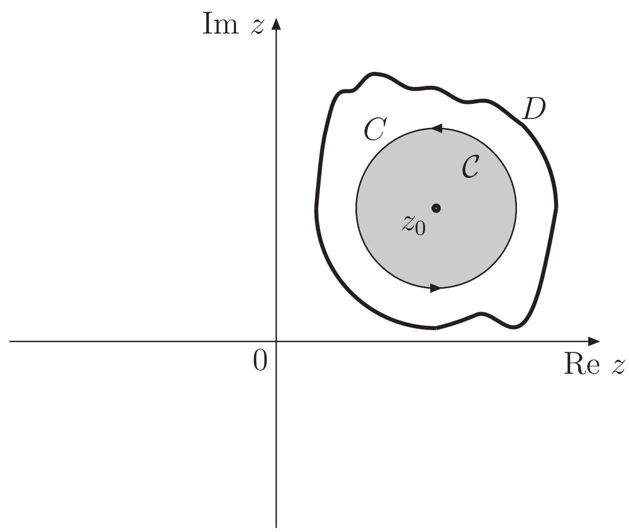
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

che converge uniformemente a $f(z)$ in ogni cerchio $\mathcal{C}$ tutto contenuto in D e centrato in z_0.

Questo teorema si dimostra trovando esplicitamente i coefficienti a_k della serie. Si parte dalla rappresentazione integrale di Cauchy per $f(z)$ nel cerchio $\mathcal{C}$ (semplicemente connesso per definizione):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} \, dz',$$

dove C è la circonferenza percorsa in senso antiorario sul bordo del cerchio $\mathcal{C}$.



A questo punto usiamo la somma della serie geometrica per scrivere:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{z' - z - z_0 + z_0} = \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} \\
&= \frac{1}{z' - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^k .
\end{aligned}$$

Questa operazione è legittima solo se la serie converge. Nel nostro caso, poichè z è dentro il cerchio $\mathcal{C}$, mentre z' è sul bordo C del cerchio $\mathcal{C}$, allora $|z - z_0|$ (= distanza di z dal centro z_0) è sicuramente minore di $|z' - z_0|$ (= distanza di z' dal centro z_0), cioè

$$|z - z_0| < |z' - z_0| \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1.$$

Essendo quindi il modulo della variabile $\frac{z-z_0}{z'-z_0}$ della serie geometrica inferiore al raggio di convergenza $\rho = 1$ della serie, allora la serie converge sicuramente.
Se inseriamo questa serie nella rappresentazione integrale di Cauchy, otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{z'-z_0} \right)^k \frac{f(z')}{z'-z_0}\, dz' = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{k=0}^{+\infty} (z-z_0)^k \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}}\, dz' \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}}\, dz', \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo potuto invertire integrale e sommatoria, grazie alla convergenza uniforme della serie geometrica. Abbiamo quindi scritto la $f(z)$ come una serie di potenze centrate in z_0:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, (z-z_0)^k \qquad \text{con} \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz} \tag{1}$$

Questa serie è detta **serie di Taylor** o **sviluppo di Taylor** di $f(z)$.

Grazie alla rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate, abbiamo che i coefficienti della serie di Taylor sono legati alle derivate di $f(z)$ dalla stessa relazione che c'è in $\mathbb{R}$:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(z)}{dz^k} \right|_{z=z_0}} \tag{2}$$

1.3 Funzioni olomorfe e funzioni analitiche

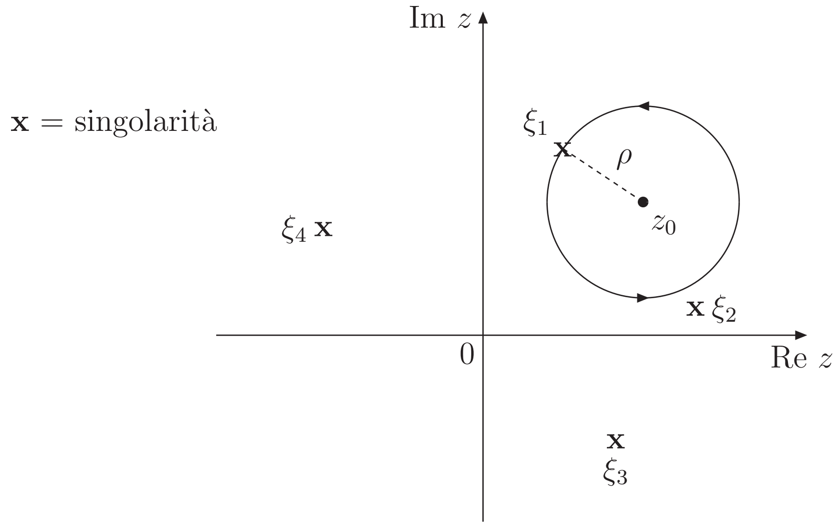
Il teorema di Weierstrass e il teorema di Taylor sostanzialmente dimostrano l'equivalenza tra funzioni olomorfe (cioè funzioni derivabili in un intorno di un punto z_0) e funzioni analitiche (cioè funzioni che ammettono uno sviluppo in serie di Taylor centrato in z_0). Le due terminologie vengono pertanto considerate interscambiabili.

1.4 Convergenza della serie di Taylor

La dimostrazione dello sviluppo in serie di Taylor si basa sulla rappresentazione integrale di Cauchy (e sulla serie geometrica). Quindi le condizioni di validità dello sviluppo in serie di Taylor sono intimamente legate alle condizioni di validità della rappresentazione integrale di Cauchy, cioè alle proprietà di olomorficità della funzione.

- Prima di tutto lo sviluppo di Taylor si può fare solo intorno ad un punto regolare z_0 della funzione, non intorno ad un punto singolare.

- Lo sviluppo rimane poi valido, cioè converge alla funzione $f(z)$, in ogni cerchio, centrato in z_0, tutto contenuto nel dominio di olomorficità D di $f(z)$. Se quindi vogliamo trovare fin dove lo sviluppo di Taylor è valido, cioè trovarne il raggio di convergenza, basta allargare il cerchio fino a quando esso non incontra una singolarità di $f(z)$. Lì bisogna fermarsi e il raggio ρ del cerchio che ne risulta è il raggio di convergenza dello sviluppo di Taylor:



Quindi il raggio di convergenza della serie di Taylor è dato dalla distanza tra z_0 e la singolarità ξ_1 più vicina a z_0:

$$\rho = |\xi_1 - z_0|, \qquad\qquad \xi_1 = \text{singolarità di } f(z) \text{ più vicina a } z_0.$$

Il raggio di convergenza della serie calcolato in questo modo deve naturalmente coincidere con il raggio di convergenza calcolato con le formule di Cauchy-Hadamard:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left|\frac{a_n}{a_{n+2}}\right|}.$$

2 Sviluppo in serie di potenze di Laurent

Lo sviluppo di Taylor è uno sviluppo in serie di potenze intorno ad un punto regolare di $f(z)$. Anche intorno ad un punto singolare si può definire uno sviluppo in serie di potenze, a patto che il punto singolare sia una singolarità isolata.

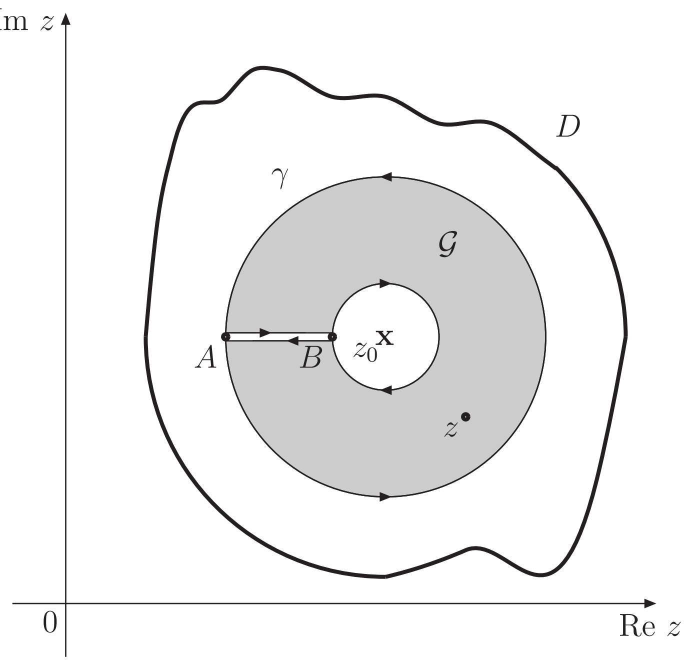
> *Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è detto* **singolarità isolata** *di una funzione $f(z)$, se e solo se*
>
> - *la funzione $f(z)$ non è analitica in z_0;*
> - *esiste un intorno bucato di z_0 (cioè un intorno di z_0 a cui è stato tolto il punto z_0 stesso) in cui la funzione $f(z)$ è analitica.*

Quando ci troviamo nell'intorno di una singolarità isolata vale il teorema di Laurent.

2.1 Teorema di Laurent

> *Se la funzione $f(z)$ è olomorfa in una certa regione D, tranne in un suo punto z_0 in cui ha una singolarità isolata,*
>
> *allora esiste una serie di potenze*
>
> $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\,(z-z_0)^k$$
>
> *che converge uniformemente a $f(z)$ in ogni cerchio $\mathcal{C}$ bucato*[1] *tutto contenuto in D e centrato in z_0.*

Questo teorema si dimostra similmente al teorema di Taylor, trovando esplicitamente i coefficienti d_k della serie.
Differentemente dal teorema di Taylor, non possiamo applicare la rappresentazione integrale di Cauchy nel cerchio bucato $\mathcal{C}$, perché non è semplicemente connesso. In questo caso consideriamo la curva chiusa γ e la sua regione interna $\mathcal{G}$ disegnate in figura

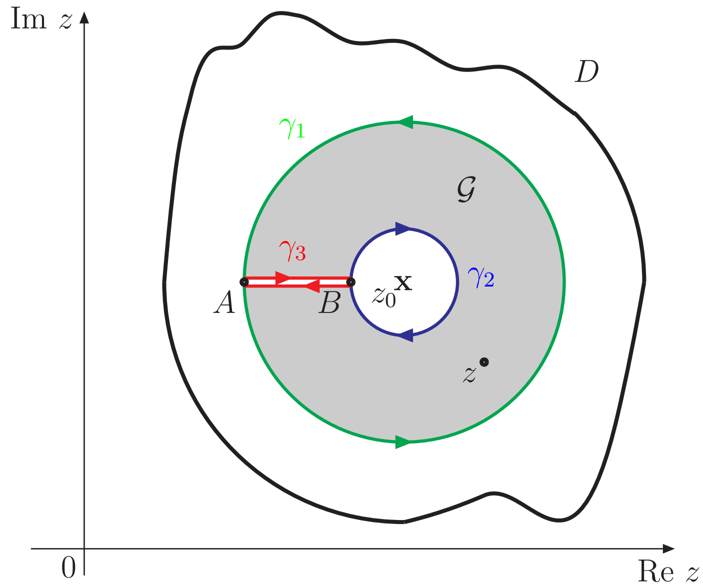


La regione $\mathcal{G}$ è semplicemente connessa e al suo interno la funzione $f(z)$ è olomorfa, quindi possiamo scrivere:

$$\forall\ z \in \mathcal{G} \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'.$$

Ora dividiamo l'integrale su γ nella somma degli integrali sulle tre curve chiuse γ_1, γ_2 , γ_3

[1] Un cerchio bucato centrato in z_0 è un cerchio a cui è stato tolto il punto z_0.



dove γ_1 è la circonferenza centrata in z_0 percorsa in senso antiorario passante per A, γ_2 è la circonferenza centrata in z_0 percorsa in senso orario passante per B e γ_3 è una curva chiusa percorsa in senso orario passante per A e per B:

$$\forall\ z \in \mathcal{G} \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_3} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz'.$$

Nella regione interna alla curva chiusa γ_3 la funzione $f(z)$ è olomorfa e inoltre la differenza $z'-z$ non si annulla mai (essendo z esterno alla curva γ_3) e pertanto l'ultimo integrale è nullo per il teorema di Cauchy. Se portiamo inoltre tutti gli integrali su curve percorse in senso antiorario, otteniamo:

$$\forall\ z \in \mathcal{G} \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_2} \frac{f(z')}{z'-z}\, dz'.$$

A questo punto procediamo in maniera analoga al teorema di Taylor usando la serie geometrica:

$$z' \in \gamma_1: \qquad \frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{z'-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}} = \frac{1}{z'-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^k,$$

$$z' \in \gamma_2: \qquad -\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z-z_0-(z'-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^k.$$

Notiamo che abbiamo ricavato due serie geometriche con diversi argomenti, perché solo con questi argomenti le due serie geometriche convergono. Infatti, per $z' \in \gamma_1$, $|z-z_0|$ (= distanza di z da z_0) è sicuramente minore di $|z'-z_0|$ (= distanza di z' da z_0), mentre per $z' \in \gamma_2$, $|z-z_0|$ è sicuramente maggiore di $|z'-z_0|$. Abbiamo cioè

$$z' \in \gamma_1: \qquad |z-z_0| < |z'-z_0| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1,$$

$$z' \in \gamma_2: \qquad |z-z_0| > |z'-z_0| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right| < 1.$$

Inserendo questa serie nella rappresentazione integrale di Cauchy, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^k\frac{f(z')}{z'-z_0}\,dz' + \frac{1}{2\pi i}\oint_{-\gamma_2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^k\frac{f(z')}{z-z_0}\,dz' \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}}\,dz' + \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^{-k-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{-\gamma_2}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{-k}}\,dz'.
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo potuto invertire integrali e sommatorie, grazie alla convergenza uniforme della serie geometrica.

A questo punto rinominiamo nella prima serie $n = k$, mentre nella seconda serie facciamo il cambio di indice $n = -k-1$ $(k = -n-1)$, ottenendo:

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz' + \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{-\gamma_2}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz'.
$$

Notiamo a questo punto che gli argomenti delle due serie differiscono solo per la curva su cui facciamo gli integrali. Però, poiché l'unica eventuale singolarità dell'integrando $\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}$ è il punto z_0 interno a entrambe le circonferenze γ_1 e $-\gamma_2$, le due curve sono omotopicamente equivalenti. Pertanto, chiamando C la circonferenza

$$
C = \gamma_1 \sim -\gamma_2,
$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz' + \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz' \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz'.
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi scritto la $f(z)$ come una serie di potenze (non solo positive, ma anche negative) centrate in z_0:

$$
\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\,(z-z_0)^k \qquad \text{con} \qquad d_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz} \tag{3}
$$

Questa serie è detta **serie di Laurent** o **sviluppo di Laurent** di $f(z)$ in z_0.

Come si può notare la formula integrale per il calcolo dei coefficienti della serie di Laurent coincide con la formula dei coefficienti della serie di Taylor. A differenza però dei coefficienti della serie di Taylor, i coefficienti della serie di Laurent non possono essere calcolati direttamente dalle derivate della funzione $f(z)$ in z_0, perchè, essendo z_0 una singolarità di $f(z)$, la funzione non è olomorfa in z_0 e quindi le sue derivate non sono ivi definite.

3 Zeri, poli e singolarità essenziali

- Il punto regolare z_0 si definisce **zero** della funzione $f(z)$ se la funzione si annulla in z_0, cioè se:

  $$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0.$$

  Uno zero si dice di ordine n se nello sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0

  $$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

  i coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ si annullano, e il coefficiente a_n è diverso da zero:

  $$\boxed{z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 0, \ \ \forall\, k < n, \quad a_n \neq 0} \qquad (4)$$

  Visto il legame (2) tra i coefficienti dello sviluppo di Taylor e le derivate di $f(z)$ in z_0, questo equivale a dire che

  $$\boxed{z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{d^k f}{dz^k}\right|_{z=z_0} = 0, \quad \forall\, k < n, \quad \left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z=z_0} \neq 0} \qquad (5)$$

  Uno zero di ordine 1 si dice *zero semplice*, uno zero di ordine 2 *zero doppio* e così via. Nell'intorno di uno zero di ordine n lo sviluppo di Taylor si riduce quindi a

  $$f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

  e, mediante il cambiamento di indice $k \to k' = k - n$, abbiamo

  $$f(z) = \sum_{k'=0}^{+\infty} a_{k'+n} (z - z_0)^{k'+n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k.$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato $k' \to k$. Definiamo ora

  $$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k.$$

  La funzione $g(z)$ è data da uno sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0; essa è pertanto regolare in z_0. Inoltre $g(z)$ è diversa da zero in z_0, infatti:

  $$g(z_0) = a_n \neq 0 \ .$$

  Pertanto

  $$\boxed{z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \begin{array}{l} g(z) \text{ regolare} \\ \text{e non nulla in } z_0 \end{array}} \qquad (6)$$

- La singolarità isolata z_0 si definisce **polo** della funzione $f(z)$ se lo sviluppo in serie di Laurent intorno a z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\,(z-z_0)^k$$

possiede un numero *finito* n di potenze negative. Un polo si dice di ordine n se i coefficienti $\ldots, d_{-n-2}, d_{-n-1}$ si annullano, e il coefficiente d_{-n} è diverso da zero:

$$\boxed{z_0 \text{ è polo di ordine } n \text{ di } f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(z-z_0)^k \quad \Leftrightarrow \quad d_k = 0,\ \ \forall\, k < -n, \quad d_{-n} \neq 0} \tag{7}$$

Un polo di ordine 1 si dice *polo semplice*, un polo di ordine 2 *polo doppio* e così via. Nell'intorno di un polo di ordine n lo sviluppo di Laurent si riduce quindi a

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} d_k(z-z_0)^k$$

e, mediante il cambiamento di indice $k \to k' = k+n$, abbiamo

$$f(z) = \sum_{k'=0}^{+\infty} d_{k'-n}(z-z_0)^{k'-n} = (z-z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} d_{k-n}(z-z_0)^k.$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato $k' \to k$. Definiamo ora

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_{k-n}(z-z_0)^k.$$

La funzione $g(z)$ è data da uno sviluppo in serie di Taylor intorno a z_0; essa è pertanto regolare in z_0. Inoltre $g(z)$ è diversa da zero in z_0, infatti:

$$g(z_0) = d_{-n} \neq 0 \ .$$

Pertanto

$$\boxed{z_0 \text{ è polo di ordine } n \text{ di } f(z) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}, \quad \begin{array}{l} g(z) \text{ regolare} \\ \text{e non nulla in } z_0 \end{array}} \tag{8}$$

- La singolarità isolata z_0 si definisce **singolarità essenziale** della funzione $f(z)$ se lo sviluppo in serie di Laurent intorno a z_0 possiede un numero *infinito* di potenze negative.