Prova Scritta di Elettricità e Magnetismo

26/04/2022

Esercizio 1

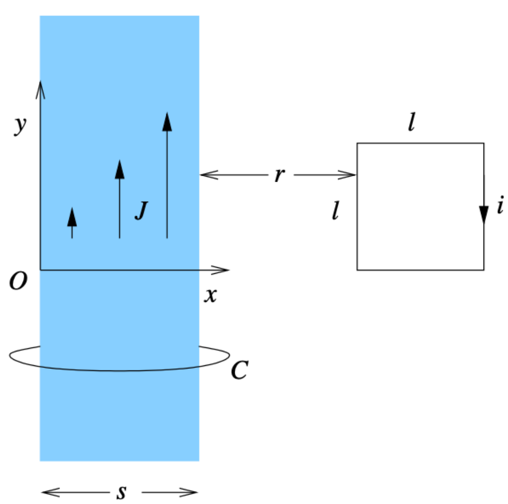
Un nastro conduttore non omogeneo indefinito di spessore trascurabile e larghezza $s = 6$ cm è percorso da una corrente I, distribuita non uniformemente sul nastro, con densità lineare di corrente $J(x) = ax$ e diretta lungo y, come rappresentato in figura. La circuitazione del campo $\vec{B}_0$ lungo una linea chiusa C concatenata con il nastro vale $1.9 \cdot 10^{-5}$ Wb/m. Si calcoli:

1) il valore della corrente I;

2) il valore della costante a;

3) l'espressione del campo B_0 nel piano del nastro (nella regione $x > s$) in funzione della distanza r dal bordo destro del nastro[1];

4) il valore della forza (specificando se attrattiva o repulsiva) che agisce su una spira quadrata di lato $\ell = s/2$, percorsa da una corrente $i = 2$ A circolante in senso orario e disposta sul piano del nastro a una distanza dal bordo $r = s/2$.



[1] si ricorra a una formula integrale.

Esercizio 2

Un solenoide toroidale di raggio b e resistenza elettrica R è costituito da N spire circolari di raggio $a \ll b$. Sull'asse di simmetria del toroide è posto un filo rettilineo infinito percorso da una corrente $I(t)$, con $I(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $I(t) = kt$ per $t > 0$ con k costante. Calcolare:

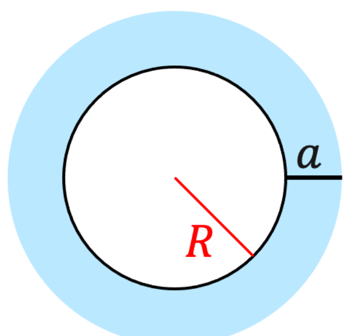
1) la corrente $i(t)$ indotta nel solenoide, trascurando l'autoinduzione;

2) il coefficiente di autoinduzione L del solenoide;

3) la corrente $i(t)$ indotta nel solenoide, *senza* trascurare l'autoinduzione.

Esercizio 3

Un conduttore sferico di raggio $R = 10$ cm è ricoperto da uno strato di spessore $a = 5$ cm di materiale isolante con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$. Determinare:



1) la capacità del conduttore;

2) l'energia occorrente per caricarlo a carica $Q = 4.2 \cdot 10^{-6}$ C.

Prova Scritta di Elettricità e Magnetismo

26/04/2022

Soluzioni

Esercizio 1

1) Dal teorema della circuitazione abbiamo:

$$\oint B_0 \cdot dl = \mu_0 I \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{1}{\mu_0}\oint B_0 \cdot dl = 15.1 \text{ A}$$

2) La corrente totale sarà l'integrale su tutto il nastro della densità di corrente superficiale, per cui possiamo scrivere:

$$I = \int_0^s J(x)\,dx = \frac{1}{2}as^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2I}{s^2} = 8390 \text{ A/m}^2$$

3) Consideriamo ora, sul nastro, una striscia infinitesima di larghezza dx e posizione x. La corrente su tale striscia è $dI = J(x)dx = (2Ix/s^2)dx$, per cui il campo infinitesimo da essa generato in un punto del piano distante r dal bordo (e quindi $r+s-x$ dalla striscia infinitesima) è:

$$dB_0(r) = \frac{\mu_0\,dI}{2\pi(r+s-x)} = \frac{\mu_0 Ix}{\pi s^2(r+s-x)}\,dx$$

diretto perpendicolarmente (con verso entrante) al piano del nastro. Il campo si ottiene integrando nella variabile x.

$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi s^2}\int_0^s \frac{x\,dx}{r+s-x} = \frac{\mu_0 I}{\pi s^2}\left[(r+s)\log\left(1+\frac{s}{r}\right) - s\right]$$

come si ottiene facilmente con il cambio di variabile $x' = r+s-x$.

4) La risultante della forza sulla spira è data dalla somma delle forze sui tratti di spira paralleli al nastro (di segno opposto).

$$F = il[-B_0(r) + B_0(l+r)] = -\frac{\mu_0 iIl}{\pi s^2}\left[(r+s)\log\left(1+\frac{s}{r}\right) - (r+l+s)\log\left(1+\frac{s}{r+l}\right)\right]$$

e sostituendo i valori del problema, si ottiene

$$F = -\frac{\mu_0 iI}{4\pi}(3\log 3 - 4\log 2) = -1.58\cdot 10^{-6}\text{N}$$

diretta verso il nastro, dunque attrattiva.

Esercizio 2

Il campo magnetico generato dal filo infinito percorso da corrente è dato dalla legge di Biot-Savart. Esso ha intensità

$$B(b) = \frac{\mu_0}{2\pi b} I(t)$$

Visto che la corrente I non è costante, anche il flusso di $\vec{B}$ attraverso le N spire del solenoide dipende dal tempo e, per $t \geq 0$ vale:

$$\Phi_B(t) = N\pi a^2 B(b) = \frac{\mu_0 N a^2}{2b} I(t) = \frac{\mu_0 N a^2}{2b} kt$$

La corrente indotta nel solenoide, trascurando l'autoinduzione, è data dall'equazione del circuito $\mathcal{E}_i = Ri(t)$:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 N a^2 k}{2bR}$$

Si tratta di una corrente costante, ma in realtà questa è la corrente che si osserva a regime, dopo che il transitorio dovuto all'induttanza del solenoide si esaurisce. Il coefficiente di autoinduzione del solenoide è dato dal rapporto tra il flusso Φ' del campo magnetico $B' = \mu_0 \frac{N}{2\pi b} i\left(t\right)$ dovuto alla corrente $i(t)$ che fluisce nel solenoide e la corrente stessa:

$$L = \frac{\Phi'}{i} = N\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{2\pi b} = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2b}$$

Se non si trascura l'induzione, l'equazione del circuito diventa

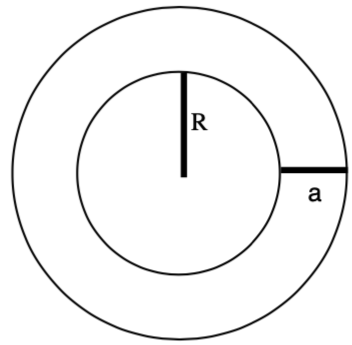
$$\mathcal{E}_i - L\frac{di}{dt} = Ri$$

che ha come soluzione

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = -\frac{\mu_0 N a^2 k}{2bR}\left(1 - e^{-\frac{2Rb}{\mu_0 N^2 a^2}t}\right)$$

Esercizio 3

Semplici applicazioni del teorema di Gauss permettono di calcolare il campo elettrostatico nelle differenti regioni di spazio



$E_1(r) = 0$ per $r < R$

$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$ per $R < r < R+a$

$E_3(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$ per $r > R+a$

Essendo, per definizione, la capacità data dal rapporto Q/V, occorre procurarsi l'espressione del potenziale del conduttore, ciòe della superficie sferica di raggio R, o meglio la d.d.p. tra questa superficie e l'infinito.

Si ha allora

$$|V| = \int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E dr = \int_R^{R+a} E_2 dr + \int_{R+a}^\infty E_3 dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R+a}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a+\varepsilon_r R}{\varepsilon_r R(R+a)}$$

da cui

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{R(R+a)}{a+\varepsilon_r R} = 13{,}4 \text{ pF}$$

Si osservi che il sistema proposto è equivalente a un condensatore sferico (con dielettrico) di raggi R e $R+a$, in serie con un condensatore nel vuoto di raggi $R+a$ e ∞.
Le capacità di questi due condensatori sono, rispettivamente,

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{R(R+a)}{a} \qquad \text{e} \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_o(R+a)$$

La loro capacità equivalente $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ coincide con quella sopra determinata.

Quando alla seconda domanda, basta osservare che l'energia spesa per caricare il conduttore si ritrova alla fine immagazzinata nel campo elettrostatico. Continuando a pensare in termini di condensatori, si scrive subito

$$E = \frac{Q^2}{2C} = 0{,}66 \text{ J}$$