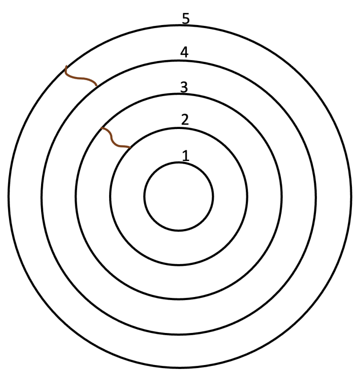
Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

16/06/2023

Esercizio 1

Cinque sottili fogli conduttori sferici, di raggi rispettivamente pari a 1, 2, 3, 4, 5 centimetri, sono concentrici e hanno inizialmente carica nulla. Come mostrato in figura il secondo e il terzo conduttore sono collegati tra loro da un filo conduttore e così pure il quarto e il quinto.
Una carica $q = 4 \cdot 10^{-9}$ C viene depositata sul conduttore più interno. Calcolare il valore della carica q_i su ogni conduttore e la differenza di potenziale tra quello più interno e quello più esterno.
Successivamente si pone una carica puntiforme $q = 4 \cdot 10^{-9}$ C a una distanza $d = 40$ cm dal centro del sistema. Calcolare la forza elettrostatica F_i su ogni conduttore e quella F sulla carica esterna nonché il lavoro necessario per portare la carica puntiforme all'infinito.
Si assuma che la presenza della carica puntiforme esterna perturbi in modo trascurabile la distribuzione di carica sui conduttori.



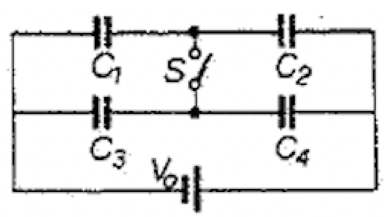
Esercizio 2

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico rettilineo di raggio $R_1 = 0.1$ cm, contenuto entro una guaina conduttrice cilindrica, coassiale al conduttore interno, di raggi $R_2 = 0.55$ cm e $R_3 = 0.60$ cm. Calcolare il campo magnetico B in tutto lo spazio, dandone il grafico, nell'ipotesi in cui il conduttore interno sia percorso da una corrente $i = 4$ A, considerando i due casi seguenti:

a) la corrente sia distribuita uniformemente solo sulla superficie del conduttore,
b) la corrente sia distribuita uniformemente su tutta la sezione del conduttore.
Si assuma che la stessa corrente percorra in senso inverso la guaina, con distribuzione uniforme sulla sua sezione.
Calcolare inoltre, per unità di lunghezza e nelle due ipotesi *a)* e *b)* sulla distribuzione della corrente nel conduttore interno, l'energia magnetica e il coefficiente di autoinduzione, nel caso limite in cui $R_3 = R_2$.
Si consideri il sistema indefinito.

Esercizio 3

Nel circuito in figura, la batteria fornisce una d.d.p. $V_0 = 12$ V. Le capacità dei condensatori sono $C_1 = 330$ pF, $C_2 = 470$ pF, $C_3 = 560$ pF, $C_4 = 1000$ pF.



Determinare la carica di ciascun condensatore e l'energia elettrostatica del sistema a seconda che l'interruttore S sia aperto o chiuso.

Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

16/06/2023

Soluzioni

Esercizio 1

Le superfici sferiche si caricano per induzione completa. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} q_2 &= q_4 = -q_1 \\ q_3 &= q_5 = q_1 \end{aligned}$$

Per effetto dei collegamenti, le superfici 2 e 3 sono allo stesso potenziale, come pure le superfici 4 e 5. La differenza di potenziale tra la superficie 1 e la superficie 5 si trova sommando le d.d.p. tra 1 e $2--3$ e tra $2--3$ e $4--5$:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right] = 2098 \text{ V}$$

La presenza di una carica esterna a distanza d non cambia il campo elettrico nella porzione di spazio che si trova a $r < R_5$, in quanto la superficie di raggio R_5 funge da schermo elettrostatico. Pertanto:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$$

La forza che agisce sul quinto guscio sferico, $\vec{F}_5$ è uguale in modulo e opposta in verso alla forza che le carica localizzata sulle sfere esercita sulla carica puntiforme. Il modulo vale:

$$F_5 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 8.99 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Il lavoro per portare la carica puntiforme dalla distanza iniziale d all'infinito vale

$$W = \int_d^\infty \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Esercizio 2

La presenza dei due conduttori cilindrici divide lo spazio in 4 zone:

$$
\begin{array}{ll}
1) & 0 < r \leq R_1 \\
2) & R_1 \leq r \leq R_2 \\
3) & R_2 \leq r \leq R_3 \\
4) & r \geq R_3
\end{array}
$$

Vista la simmetria del problema si può applicare la legge di Ampère. Nella regione esterna (la 4) il campo magnetico è nullo. Nella regione compresa tra i due conduttori il campo ha un valore che non dipende da come è distribuita la corrente nel conduttore interno. Quindi sia nel caso a) che nel caso b), nella regione 2) il campo è

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{per } R_1 \leq r \leq R_2$$

Nella regione 1) occorre differenziare i due casi:

a) $B = 0$.

b) La legge di Ampère per $0 < r \leq R_1$ è

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 \frac{i}{\pi R_1^2} r^2 = \mu_0 i \frac{r^2}{R_1^2}$$

che implica

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$$

il campo cresce linearmente dal valore nullo fino al valore fornito dall'espressione trovata per la regione 2) quando $r = R_1$.

Nella terza regione, all'interno della guaina, la densità di corrente è

$$j = \frac{i}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}$$

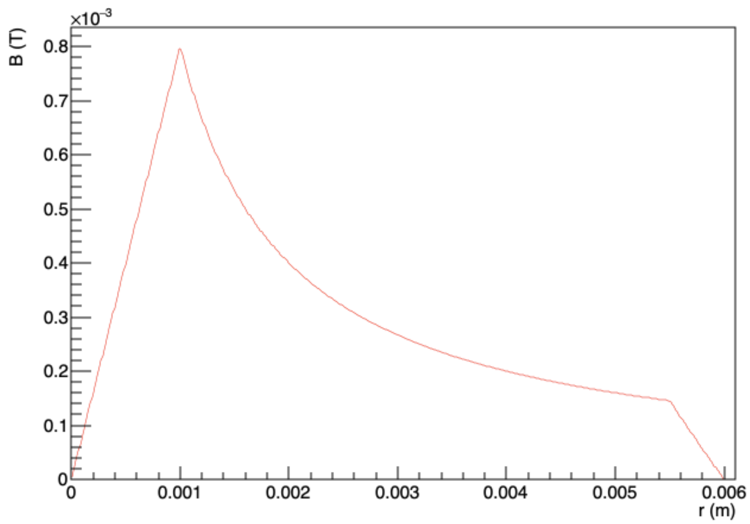
Pertanto la corrente concatenata da una circonferenza centrata sull'asse dei conduttori, ortogonale ad esso, di raggio $R_2 \leq r \leq R_3$, vale

$$i - j\pi\left(r^2 - R_2^2\right) = i - i\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = i\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Il campo B nella regione 3) vale quindi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Il campo si annulla per $r = R_3$ In figura è rappresentato l'andamento del campo nel caso b).



Per il calcolo dell'energia magnetica ipotizziamo che la guaina sia di spessore trascurabile. L'energia è quindi localizzata nella regione 2) e, nel caso b), nella regione 1). Cominciamo col valutare l'energia per unità di lunghezza nella regione 2) W_2, che ha lo stesso valore sia nel caso a) che nel caso b). La densità di energia magnetica è

$$w_2 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

Il valore di W_2 si trova integrando su un volume costituito da una guaina cilindrica, coassiale con il sistema di conduttori, di raggi R_1 e R_2, di altezza unitaria:

$$W_2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \int_{R_1}^{R^2} \frac{2\pi r}{r^2} dr = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Nel caso a), l'energia per unità di lunghezza è

$$W = W_2 = 2.73 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

Il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza corrispondente è:

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \;\longrightarrow\; L = \frac{2W}{i^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = 0.34 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Nel caso b) occorre aggiungere il contributo dato dal campo in regione 1), adottando lo stesso approccio.

$$W_1 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 R_1^4}\int_0^{R_1} r^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi}$$

Quindi l'energia per unità di lunghezza è

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right) = 3.13 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

e il coefficiente di autoinduzione è

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right) = 0.39 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Esercizio 3

Quando l'interruttore S è aperto, C_1 e C_2 sono in serie, come lo sono C_3 e C_4. Le capacità equivalenti sono $C_{12} = 193.9$ pF e $C_{34} = 359.0$ pF. Entrambe le serie sono sottoposte alla tensione di 12 V per cui le cariche collocate su di esse valgono rispettivamente $q_1 = q_2 = q_{12} = 2.33 \cdot 10^{-9}$ C e $q_3 = q_4 = q_{34} = 4.31 \cdot 10^{-9}$ C. L'energia elettrostatica del sistema si ricava notando che C_{12} e C_{34} sono in parallelo. Quindi:

$$W = \frac{1}{2}\left(C_{12} + C_{34}\right)V^2 = 39.8 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Nel caso in cui l'interruttore S sia chiuso, C_1 e C_3 sono in parallelo, come pure C_2 e C_4. I paralleli C_{13} e C_{24} sono a loro volta in serie. Se indichiamo con C_s la capacità della serie, abbiamo

$$\begin{aligned} C_{13} &= 890 \text{ pF} \\ C_{24} &= 1470 \text{ pF} \\ C_s &= 554.4 \text{ pF} \end{aligned}$$

La carica collocata sulla capacità C_s equivalente all'intero sistema, è $Q = C_s V_0 = 6.65 \cdot 10^{-9}$ C. Quindi l'energia elettrostatica del sistema di condensatori è

$$W = \frac{Q^2}{2C_s} = 39.9 \cdot 10^{-9} \quad \mathrm{J}$$

che è un valore diverso da quello ottenuto nell'altra configurazione, per quanto di poco. Le tensioni ai capi dei paralleli C_{13} e C_{24} sono rispettivamente $V_{13} = Q/C_{13} = 7.47$ V e $V_{24} = Q/C_{24} = 4.53$ V. Quindi:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V_{13} = 2.47 \text{ nC} \\ q_2 &= C_2 V_{24} = 2.13 \text{ nC} \\ q_3 &= C_3 V_{13} = 4.19 \text{ nC} \\ q_4 &= C_4 V_{24} = 4.53 \text{ nC} \end{aligned}$$

Si noti che effettivamente è $q_1 + q_3 = q_2 + q_4$.