Metodi Matematici per la Fisica

Riassunto del programma d'esame

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Gennaio 2025

Indice

1 Integrali

1.1 Integrali trigonometrici

1.2 Integrali sulla retta reale

2 Equazioni differenziali omogenee a paramentri non costanti

2.1 Soluzione nell'intorno di un punto regolare

2.2 Soluzione nell'intorno di una singolarità fuchsiana

3 Fuorier

Data L in $\mathbb{R}$ si definisce serie di Fourier di coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} \quad k_n = \frac{2\pi}{L} nl$$

3.1 Serie di Fourier

3.2 Trasformata di Fourier

C.D.E. Affinché $\mathscr{F}[f(x)]$ esista è **condizione sufficiente** che $f(x)$ sia **sommabile**. Inoltre il *Teorema di Dirichlet* assicura come nel caso della serie di Fourier, la convergenza puntuale della trasformata a $f(x_0)$ nei punti in cui $f(x)$ è continua e a metà dei punti di discontinuità dove $f(x)$ presenta dei salti.
Dunque affinché $f(x)$ sia sommabile devono essere rispettate **due condizioni**:

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) f(x) = 0 \qquad \forall x_0 \in]-\infty, +\infty[\tag{1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x f(x) = 0 \tag{2}$$

Più in generale però esistono funzioni non sommabili che ammettono trasformata di Fourier.
Un esempio molto importante è la funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{F}_k[f(x)] = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} & |x| = 1 \\ 0 \quad |x| > 1 \end{cases}$$

3.3 Antitrasformata di Fourier

4 Laplace

4.1 Trasformata di Laplace

Prendiamo $f(t), \;\; t \in R \;\;$ e $\;\; f(t)e^{\alpha t}, \;\; \alpha \in R$
Se $f(t)$ è un polinomio per $t \to +\infty \Longrightarrow \; f(t)e^{\alpha t} \to 0$, ma se $t \to -\infty$ la funzione esplode.
Si introduce allora la $\theta(t)$, detta **Theta di Heaviside**

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 \quad t \end{cases}$$

4.2 Antitraformata di Laplace