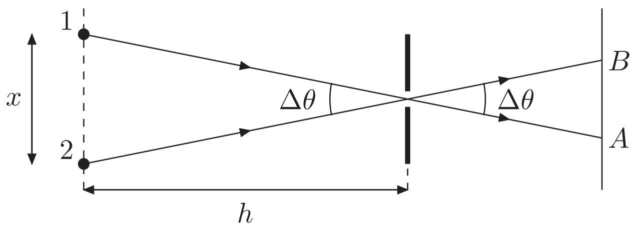
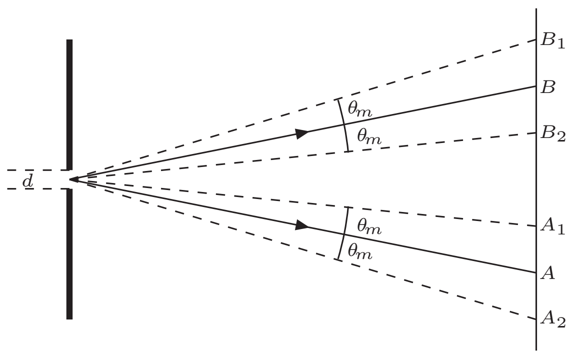
Esercizio 15

Con un telescopio a terra, il cui obiettivo ha diametro $d = 5\,cm$, si vuole osservare una coppia di piccoli satelliti artificiali che si muovono a distanza fissa x l'uno dall'altro, orbitando ad un'altezza $h = 1000\,km$ dal suolo. Quale deve essere la minima distanza x_m tra i due satelliti affinché possano essere distinti dal telescopio, osservando luce di lunghezza d'onda $\lambda = 600\,nm$?

Soluzione



Il raggio luminoso proveniente dal satellite 1 crea una figura di diffrazione con massimo centrale in A, mentre la figura di diffrazione del raggio luminoso proveniente dal satellite 2 ha massimo centrale in B.



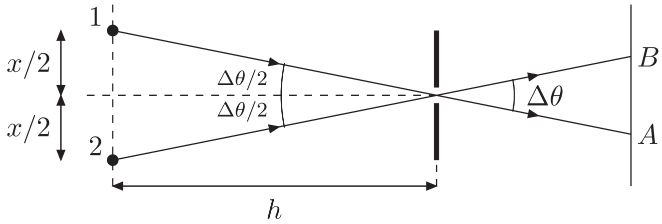
I primi minimi delle due figure di diffrazione (nei punti A_1, A_2, B_1, B_2) si trovano ad angoli $\pm\theta_m$ rispetto ai massimi centrali A e B. La formula di Rayleigh per fenditura circolare asserisce che (per θ_m piccoli, come nel nostro caso):

$$\theta_m \sim \sin\theta_m = 1.22\,\frac{\lambda}{d},$$

dove d è il diametro del foro circolare. Se l'angolo di separazione $\Delta\theta$ tra i massimi A e B è minore di θ_m, le due figure di diffrazione sono troppo sovrapposte per poter risolvere i due massimi A e B. Quindi affinché i due satelliti possano essere distinti dal telescopio, deve essere:

$$\Delta\theta \geq \theta_m \sim 1.22\,\frac{\lambda}{d}.$$

Il legame tra $\Delta\theta$ e la distanza x tra i satelliti è (per $\Delta\theta$ piccoli):



$$\frac{\Delta\theta}{2} \sim \tan\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{x/2}{h}, \qquad \Rightarrow \qquad x \sim \Delta\theta\, h.$$

da cui segue che, affinché i due satelliti possano essere distinti dal telescopio, deve essere:

$$x \sim \Delta\theta\, h \geq h\,\theta_m \sim 1.22\,\frac{\lambda\, h}{d}.$$

cioè

$$x_{\min} \sim 1.22\,\frac{\lambda\, h}{d} = 1.22\,\frac{(6\cdot 10^{-7}\, m)(10^{6}\, m)}{5\cdot 10^{-2}\, m} = 15\, m.$$

Esercizio 16

Lo spettro di emissione del sodio è caratterizzato dalla presenza di due righe (doppietto giallo del sodio) le cui lunghezze d'onda sono molto vicine ($\lambda_a = 5.890 \cdot 10^{-7}\, m$ e $\lambda_b = 5.896 \cdot 10^{-7}\, m$). Una sorgente al sodio emette un'onda che incide normalmente su un reticolo di diffrazione e la luce emergente viene raccolta su uno schermo posto a distanza $l = 1\, m$ dal reticolo. Se si riescono a risolvere su una lastra fotografica, posta sullo schermo, due righe a distanza $\delta x = 0.1\, mm$, quale deve essere il passo D del reticolo perché il doppietto del sodio sia risolto al secondo ordine?

Soluzione

I massimi della figura di diffrazione del reticolo si verificano ad angoli $\theta^{(m)}_{\max}(\lambda)$ (m è l'ordine del massimo), tali che:

$$\sin\theta^{(m)}_{\max}(\lambda) = m\,\frac{\lambda}{D} \qquad\qquad m \in \mathbb{Z}.$$

I massimi di ogni ordine dipendono dalla lunghezza d'onda (a parte il massimo di ordine $m = 0$: $\theta^{(0)}_{\max} = 0,\ \forall\lambda$). Quindi onde con diversa lunghezza d'onda hanno massimi ad angoli diversi e quindi posizioni diverse sulla lastra. Si possono quindi usare i reticoli di diffrazione per misurare le lunghezze d'onda, andando a misurare le posizioni dei massimi di un certo ordine (diverso dall'ordine $m = 0$). Derivando l'espressione per $\sin\theta^{(m)}_{\max}(\lambda)$ rispetto a λ, si ottiene lo spostamento angolare infinitesimo $d\theta^{(m)}_{\max}$ del massimo di ordine m, per una variazione infinitesima della lunghezza d'onda $d\lambda$:

$$\frac{d\theta^{(m)}_{\max}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{m}{D\,\cos\theta^{(m)}_{\max}(\lambda)}.$$

Questa è la relazione di dispersione angolare di un reticolo. Per i massimi di ordine 2 abbiamo:

$$\sin\theta^{(2)}_{\max}(\lambda) = 2\,\frac{\lambda}{D}, \qquad\qquad \frac{d\theta^{(2)}_{\max}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2}{D\,\cos\theta^{(2)}_{\max}(\lambda)}.$$

Chiamando $\theta^{(2)}_a$ e $\theta^{(2)}_b$ i massimi di ordine 2 per le due lunghezze d'onda del sodio $\lambda_a = 5.890 \cdot 10^{-7}\, m$ e $\lambda_b = 5.896 \cdot 10^{-7}\, m$, abbiamo

$$\sin\theta_a = \sin\theta^{(2)}_{\max}(\lambda_a) = 2\,\frac{\lambda_a}{D}, \qquad\qquad \sin\theta_b = \sin\theta^{(2)}_{\max}(\lambda_b) = 2\,\frac{\lambda_b}{D}.$$

Immaginiamo che la differenza tra le due lunghezze d'onda

$$\Delta\lambda = \lambda_b - \lambda_a = 6 \cdot 10^{-10}\, m$$

sia piccola rispetto a D (non conosciamo ancora D, ma supponiamo che soddisfi $D \gg \Delta\lambda$, cosa che verificheremo alla fine). Possiamo quindi immaginare che la separazione angolare dei due massimi $\Delta\theta = \theta^{(2)}_b - \theta^{(2)}_a$ sia anche piccola e possiamo sostituire $d\lambda \to \Delta\lambda$, $d\theta \to \Delta\theta$ nella relazione di dispersione angolare e ottenere per $\Delta\theta$:

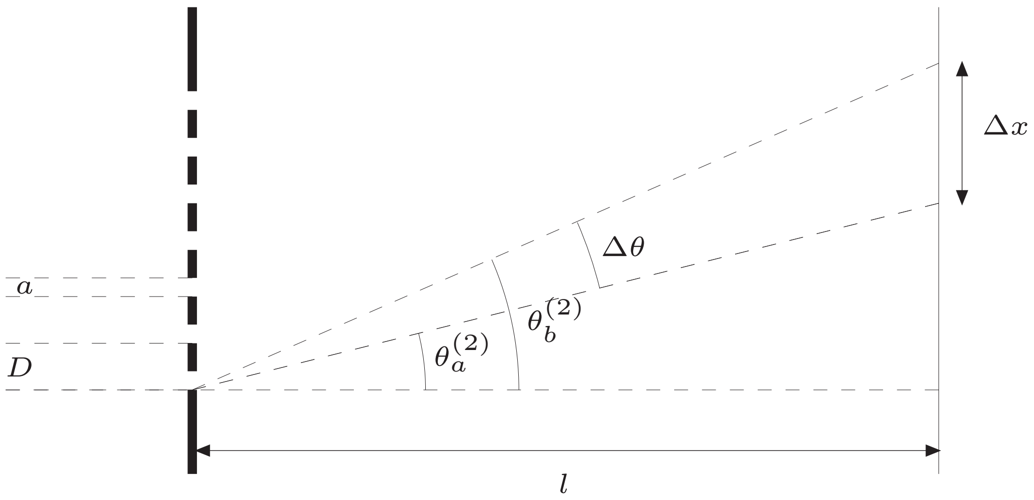
$$\Delta\theta \sim \frac{2}{D\,\cos\theta^{(2)}_{\max}(\lambda^*)}\Delta\lambda, \qquad\qquad \Delta\theta = \theta^{(2)}_b - \theta^{(2)}_a.$$

Nella formula precedente abbiamo introdotto $\theta^{(2)}_{\max}(\lambda^*)$ che è l'angolo del massimo di ordine 2 corrispondente ad una lunghezza d'onda λ^* dell'ordine di λ_a e λ_b. Il valore preciso di λ^* non ci interessa, se supponiamo che sia molto più piccolo di D (non conosciamo ancora D, ma supponiamo che soddisfi $D \gg \lambda^*$; alla fine verificheremo anche questa supposione):

$$\sin\theta^{(2)}_{\max}(\lambda^*) = 2\,\frac{\lambda^*}{D} \sim 0, \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta^{(2)}_{\max}(\lambda^*) \sim 1.$$

Con queste approssimazioni l'angolo tra i massimi di ordine 2 per le due lunghezze d'onda del sodio diventa:

$$\Delta\theta \sim \frac{2\,\Delta\lambda}{D} \qquad\qquad \Delta\theta = \theta^{(2)}_b - \theta^{(2)}_a.$$



Se lo schermo è posto a $l = 1\,m$, avremo che la separazione spaziale Δx tra i due massimi è (per angoli $\Delta\theta$ piccoli):

$$\Delta x \sim l\,\Delta\theta \sim l\,\frac{2\,\Delta\lambda,}{D}.$$

Per poter distinguire i due massimi sulla lastra fotografica, Δx deve essere maggiore o uguale alla risoluzione $\delta x = 0.1\,mm$ della lastra:

$$\delta x \leq \Delta x \sim l\,\frac{2\,\Delta\lambda,}{D}.$$

Da cui segue che il passo reticolare D deve soddisfare:

$$\delta x \leq l\,\frac{2\,\Delta\lambda,}{D}, \qquad \Rightarrow \qquad D \leq l\,\frac{2\,\Delta\lambda,}{\delta x} = (1\,m)\,\frac{2\cdot(6\cdot 10^{-10}\,m)}{10^{-4}\,m} = 12\,\mu m.$$

Il valore trovato soddisfa quindi le supposizioni fatte su D. Prendendo infatti non troppo lontano da $12\,\mu m$ abbiamo:

$$\frac{\Delta\lambda}{D} \sim \frac{6\cdot 10^{-10}\,m}{1.2\cdot 10^{-5}\,m} = 5\cdot 10^{-4}, \qquad\qquad \frac{\lambda^*}{D} \sim \frac{5.9\cdot 10^{-7}\,m}{1.2\cdot 10^{-5}\,m} \sim 5\cdot 10^{-2}.$$

Dall'ultimo risultato si capisce che per D molto più piccolo di $12\,\mu m$, l'approsimazione non è più valida.

Esercizio 17

Per un raggio di luce non polarizzata che, provenendo dall'aria, incide sul vetro ($n = 1.50$) all'angolo di polarizzazione, il 7.4% dell'intensità incidente viene riflesso, mentre il 92.6% viene rifratto. Determinare il grado di polarizzazione *a*) del raggio riflesso e *b*) del raggio rifratto.

Soluzione

a) Poichè la luce incide all'angolo di polarizzazione, tutta la luce riflessa è polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza, per cui $P = 1$.

b) Possiamo trattare il raggio incidente non polarizzato (di intensità I_i) come se metà della sua intensità fosse polarizzata parallelamente al piano di incidenza e l'altra metà perpendicolarmente al piano di incidenza. Tutta la parte del raggio incidente che è polarizzata parallelamente al piano di incidenza viene rifratta, dal momento che non viene affatto riflessa. Pertanto, se indichiamo con $I_\parallel$ l'intensità del raggio rifratto polarizzata parallelamente al piano di incidenza, risulta $I_\parallel = 0.500\ I_i$. Ora sia $I_\perp$ l'intensità del raggio rifratto polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza. Siccome tutta la luce riflessa (7.4%) è polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza, $I_\perp = (0.500 - 0.074)I_i$. Il suo grado di polarizzazione sarà:

$$P = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp} = \frac{0.500I_i - 0.426I_i}{0.500I_i + 0.426I_i} = \frac{0.074}{0.926} = 0.080.$$

Il raggio rifratto è polarizzato all'8%. Nonostante la polarizzazione al 100% del raggio riflesso, il raggio rifratto ha un grado di polarizzazione piuttosto basso. La ragione sta nel fatto che soltanto una piccola frazione della luce viene riflessa, mentre gran parte di essa viene rifratta.

Esercizio 17 bis

Per un raggio di luce non polarizzata che provenendo dall'aria incide sul vetro ($n = 1.50$) all'angolo di Brewster, il 7.4 % dell'intensità incidente viene riflesso, mentre il 92.6 % viene rifratto. Determinare il grado di polarizzazione (a) del raggio riflesso e (b) del raggio rifratto.

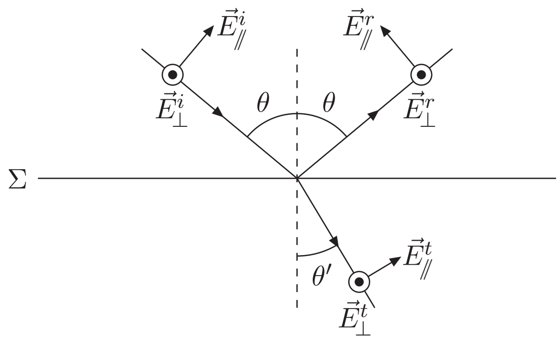
Soluzione

Un'onda non polarizzata si può considerare come sovrapposizione incoerente di due raggi con polarizzazioni perpendicolari, ognuno dei quali ha intensità uguali a metà dell'intensità del raggio non polarizzato:

$$\vec{E} = \vec{E}_{/\!/} + \vec{E}_{\perp} = \vec{E}_{/\!/0} \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) + \vec{E}_{\perp 0} \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta(\vec{r}, t)\right)$$

$$I_{/\!/} = \frac{\vec{E}^2_{/\!/0}}{2Z}, \qquad I_{\perp} = \frac{\vec{E}^2_{\perp 0}}{2Z}, \qquad I_{/\!/} = I_{\perp} = \frac{I}{2}, \qquad I = I_{/\!/} + I_{\perp} = \text{intensità del raggio } \vec{E}.$$

Nel caso in questione, conviene considerare come raggi quello perpendicolare e quello parallelo al piano di incidenza, cioè il piano dove giacciono i raggi incidente, riflesso e trasmesso:



Essendo i campi elettrici dei raggi $/\!/$ e $\perp$ perpendicolari tra loro, per le intensità vale:

$$I^i = I^i_{/\!/} + I^i_{\perp}, \qquad I^r = I^r_{/\!/} + I^r_{\perp}, \qquad I^t = I^t_{/\!/} + I^t_{\perp}.$$

Inoltre per la conservazione dell'energia per i raggi $/\!/$ e $\perp$, deve valere:

$$I^i_{/\!/} \cos\theta = I^r_{/\!/} \cos\theta + I^t_{/\!/} \cos\theta', \qquad I^i_{\perp} \cos\theta = I^r_{\perp} \cos\theta + I^t_{\perp} \cos\theta'.$$

La definizione di grado di polarizzazione, per un raggio scomposto nei raggi $/\!/$ e $\perp$, è:

$$P = \frac{|I_{\perp} - I_{/\!/}|}{I_{\perp} + I_{/\!/}}.$$

Nel nostro caso, il raggio incidente non è polarizzato, per cui avremo

$$I^i_{/\!/} = I^i_{\perp} = \frac{I^i}{2}, \qquad P^i = \frac{|I^i_{\perp} - I^i_{/\!/}|}{I^i_{\perp} + I^i_{/\!/}} = 0.$$

a) Nell'esercizio, inoltre, l'angolo d'incidenza è l'angolo di Brewster. Questo significa che il raggio riflesso non ha componente $/\!\!/$ ed è completamente polarizzato nella direzione $\perp$:

$$I^r_{/\!\!/} = 0, \qquad\qquad I^r_{\perp} = I^r.$$

Il suo grado di polarizzazione è quindi:

$$P^r = \frac{|I^r_\perp - I^r_{/\!\!/}|}{I^r_\perp + I^r_{/\!\!/}} = \frac{I^r_\perp}{I^r_\perp} = 1.$$

b) Per il raggio trasmesso avremo:

$$I^t_{/\!\!/} = \left(I^i_{/\!\!/} - I^r_{/\!\!/}\right) \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = \frac{I^i}{2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}, \qquad I^t_\perp = \left(I^i_\perp - I^r_\perp\right) \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = \left(\frac{I^i}{2} - I^r\right) \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}.$$

Il raggio riflesso ha il 7.4% dell'intensità del raggio incidente, per cui:

$$I^r = 0.074\, I^i.$$

Mettendo tutto insieme, per il grado di polarizzazione del raggio trasmesso otteniamo:

$$P^t = \frac{|I^t_\perp - I^t_{/\!\!/}|}{I^t_\perp + I^t_{/\!\!/}} = \frac{|(0.5\, I^i - 0.074\, I^i) - 0.5\, I^i|}{(0.5\, I^i - 0.074\, I^i) + 0.5\, I^i} = \frac{0.074\, I^i}{0.926\, I^i} = \frac{0.074}{0.926} = 0.08.$$

Esercizio 18

Un raggio parzialmente polarizzato può essere considerato come sovrapposizione di due raggi incoerenti con intensità diverse e piani di polarizzazione perpendicolari. Sia I_1 l'intensità del raggio più intenso e I_2 l'intensità del raggio meno intenso.

a) Dimostrare che quando un raggio parzialmente polarizzato incide su un polarizzatore ideale l'intensità trasmessa è

$$I' = (I_1 - I_2)\cos^2\theta + I_2$$

dove θ è l'angolo compreso tra l'asse di trasmissione del polarizzatore e il piano di polarizzazione del raggio più intenso.

b) Dimostrare che l'intensità trasmessa può essere scritta come

$$I' = I_1 \frac{1 + P\cos 2\theta}{1 + P}$$

dove P è il grado di polarizzazione del raggio.

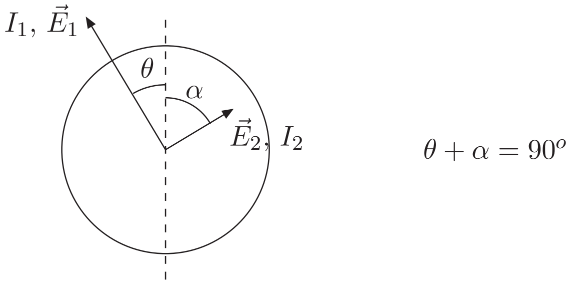
Soluzione

a) Siano I_1, I_2 e I rispettivamente le intensità del raggio 1, del raggio 2 e del raggio formato dalla loro sovrapposizione, prima del polarizzatore. Essendo i campi elettrici dei raggi 1 e 2 perpendicolari tra loro, avremo:

$$I = I_1 + I_2.$$

Similemente, siano I_1', I_2' e I' rispettivamente le intensità del raggio 1, del raggio 2 e del raggio formato dalla loro sovrapposizione, dopo il polarizzatore. Essendo nuovamente i campi elettrici dei raggi 1 e 2 perpendicolari tra loro, avremo:

$$I' = I_1' + I_2'.$$



La polarizzazione del raggio 1 forma un angolo θ con l'asse del polarizzatore, per cui dalla legge di Malus segue:

$$I_1' = I_1 \cos^2\theta.$$

La polarizzazione del raggio 2, perpendicolare a quella del raggio 1, formerà quindi un angolo $\alpha = 90^o - \theta$ con l'asse del polarizzatore, per cui dalla legge di Malus segue:

$$I_2' = I_2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = I_2 \sin^2\theta = I_2\,(1 - \cos^2\theta).$$

Quindi l'intensità totale del raggio dopo il polarizzatore è:

$$I' = I_1' + I_2' = I_1 \cos^2\theta + I_2\,(1 - \cos^2\theta) = (I_1 - I_2) \cos^2\theta + I_2.$$

b) Per dimostrare la formula, dobbiamo esprimere I_2 in funzione di P:

$$P = \frac{|I_1 - I_2|}{I_1 + I_2} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}, \qquad\qquad (I_1 > I_2),$$

$$P\,I_1 + P\,I_2 = I_1 - I_2, \qquad I_2 + P\,I_2 = I_1 - P\,I_1, \qquad I_2 = I_1\,\frac{1-P}{1+P}.$$

Quindi:

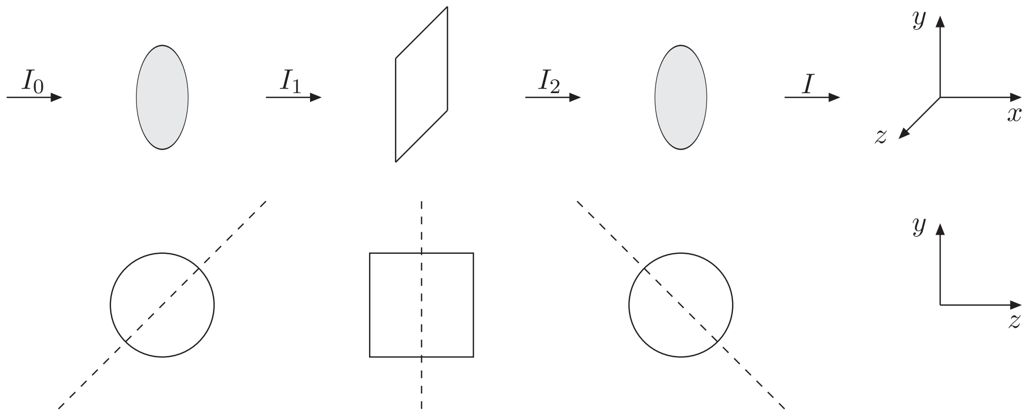
$$\begin{aligned} I' &= I_1' + I_2' = (I_1 - I_2) \cos^2\theta + I_2 = \left(I_1 - I_1\,\frac{1-P}{1+P}\right) \cos^2\theta + I_1\,\frac{1-P}{1+P} \\ &= I_1\,\frac{[1 + P - (1 - P)] \cos^2\theta + 1 - P}{1+P} = I_1\,\frac{2\,P \cos^2\theta + 1 - P}{1+P} = \\ &= I_1\,\frac{1 + P\,(2 \cos^2\theta - 1)}{1+P} = I_1\,\frac{1 + P \cos 2\theta}{1+P}. \end{aligned}$$

Esercizio 19

Un pezzo di cristallo di quarzo, avente indici di rifrazione $n_{ord} = 1.544$ e $n_{str} = 1.553$ è lavorato in forma di lamina sottile, di spessore $0.12\,mm$ in modo che il suo asse ottico sia parallelo alle facce della lamina. La lamina è posta tra due polaroidi incrociati in modo che il suo asse ottico sia a 45° con quelli dei polaroidi.

Quali lunghezze d'onda della luce visibile ($400 - 750\,nm$) saranno trasmesse attraverso il sistema con la massima intensità?

Soluzione



Dopo la lamina, raggi con diverse lunghezze d'onda hanno polarizzazione diversa. I raggi che escono dal secondo polarizzatore con intensità massima sono quelli con polarizzazione lineare lungo l'asse ottico del secondo polarizzatore, cioè a 45^o rispetto all'asse x. I raggi che escono dal primo polarizzatore hanno però polarizzazione lineare perpendicolare all'asse del secondo polarizzatore. Quindi i raggi più intensi sono quelli che escono dalla lamina con polarizzazione opposta a quella con cui sono entrati. L'unica lamina che trasforma un raggio polarizzato linearmente in un altro sempre polarizzato linearmente, ma con angolo diverso è la lamina a mezz'onda. Vediamo se una lamina a mezz'onda è in grado di generare la polarizzazione uscente desiderata.

In generale la lamina a mezz'onda trasforma un raggio entrante polarizzato linearmente in una direzione che forma un angolo θ con il suo asse ottico, in un'onda polarizzata linearmente in una direzione che forma un angolo $-\theta$ con il suo asse ottico. Se quindi il raggio incidente è polarizzato a 45^o rispetto all'asse ottico della lamina (come nel nostro caso), il raggio uscente dalla lamina è polarizzato a -45^o rispetto all'asse ottico della lamina, cioè proprio nella direzione del secondo polarizzatore. Si noti che nel caso di incidenza a 45^o (e solo nel caso di incidenza a 45^o), la lamina a mezz'onda cambia di 90^o (cioè al massimo) la polarizzazione del raggio.

Visto che le proprietà delle lamine birifrangenti dipendono dalla lunghezza d'onda del raggio, avremo che solo per alcune lunghezze d'onda la lamina dell'esercizio si comporta come lamina a mezz'onda. Tali lunghezze d'onda, viste le considerazioni fatte, usciranno dalla lamina polarizzate lungo l'asse del secondo polarizzatore e avranno intensità I massima.

Cerchiamo per quali lunghezze d'onda del visibile la lamina è una lamina a mezz'onda. La condizione che la lamina sia a mezz'onda [3] è:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\, d}{\lambda}\Delta n = (2\,m + 1)\,\pi, \qquad\qquad m \in \mathbb{Z}.$$

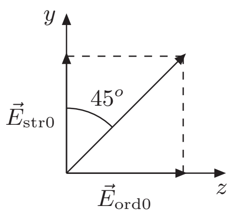
Vediamo ora per quali lunghezze d'onda la condizione della lamina a mezz'onda è soddisfatta:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\, d}{\lambda}\Delta n = (2\,m + 1)\,\pi, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\,d\,\Delta n}{2\,m+1} = \lambda(m), \qquad\qquad m \in \mathbb{Z}.$$

[3] Controlliamo che se questa condizione è soddisfatta, abbiamo un raggio uscente polarizzato lungo l'asse del secondo polarizzatore. Il raggio I_1 incidente sulla lamina può essere visto come la sovraposizione di un raggio straordinario (polarizzato lungo l'asse ottico della lamina, cioè lungo y nella figura) e di un raggio ordinario (polarizzato lungo z nella figura). La lamina, di spessore d, sia posta tra x_0 e $x_0 + d$; per $x \le x_0$ le equazioni dell'onda straordinaria e di quella ordanaria sono:

$$\vec{E}_{\rm str} = \vec{E}_{\rm str0}\,\cos(kx - \omega t), \quad \vec{E}_{\rm ord} = \vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx - \omega t), \qquad \vec{E}_{\rm str0} = E_0\,\hat{y}, \quad \vec{E}_{\rm ord0} = E_0\,\hat{z}, \qquad\qquad \text{per } x \le x_0.$$

L'ampiezza delle due onde è uguale, essendo la polarizzazione a 45^o.



Dopo la lamina ($x \ge x_0 + d$) i campi elettrici straordinario e ordinario avranno equazione:

$$\vec{E}'_{\rm str} = \vec{E}_{\rm str0}\,\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t), \qquad \vec{E}'_{\rm ord} = \vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm ord} - k)\,d - \omega t), \qquad \text{per } x \ge x_0 + d.$$

Lo sfasamento tra i due raggi dopo la lamina è quindi:

$$\Delta\phi = (k_{\rm str} - k_{\rm ord})\,d = \frac{2\pi\,d}{\lambda}(n_{\rm str} - n_{\rm ord}) = \frac{2\pi\,d}{\lambda}\Delta n.$$

La condizione di lamina a mezz'onda implica che:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\,d}{\lambda}\Delta n = (2\,m+1)\,\pi, \qquad \Rightarrow \qquad k_{\rm ord} = k_{\rm str} + (2\,m+1)\,\frac{\pi}{d},$$

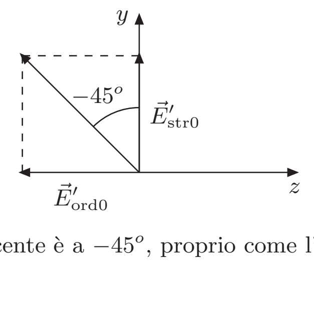
$$\begin{aligned}
\vec{E}'_{\rm ord} &= \vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm ord} - k)\,d - \omega t) \\
&= \vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t + (2\,m+1)\,\pi) \\
&= -\,\vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t),
\end{aligned}$$

per cui

$$\vec{E}'_{\rm str} = \vec{E}'_{\rm str0}\,\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t), \qquad \vec{E}'_{\rm ord} = \vec{E}'_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t), \qquad \text{per } x \ge x_0 + d.$$

con

$$\vec{E}'_{\rm str0} = \vec{E}_{\rm str0} = E_0\,\hat{y}, \qquad\qquad \vec{E}'_{\rm ord0} = -\vec{E}_{\rm ord0} = -E_0\,\hat{z}.$$



cioè la polarizzazione dell'onda uscente è a -45^o, proprio come l'asse del secondo polarizzatore.

Ora dobbiamo cercare per quali valori di m si ha

$$400\,nm = \lambda_{\min} \leq \lambda(m) = \frac{2\,d\,\Delta n}{2\,m+1} \leq \lambda_{\max} = 750\,nm.$$

Risolvendo la disuguaglianza per m, si ha

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min} \leq \lambda(m) = \frac{2\,d\,\Delta n}{2\,m+1} \leq \lambda_{\max}, \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda_{\max}} \leq \frac{2\,m+1}{2\,d\,\Delta n} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}}, \\
&\Rightarrow \qquad \frac{d\,\Delta n}{\lambda_{\max}} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{d\,\Delta n}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mettendo i valori numerici, otteniamo:

$$\frac{d\,\Delta n}{\lambda_{\max}} - \frac{1}{2} = \frac{(1.2\cdot 10^{-4}\,m)\,(1.553-1.544)}{7.5\cdot 10^{-7}\,m} - \frac{1}{2} = 0.95,$$

$$\frac{d\,\Delta n}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{2} = \frac{(1.2\cdot 10^{-4}\,m)\,(1.553-1.544)}{4\cdot 10^{-7}\,m} - \frac{1}{2} = 2.2.$$

Quindi la lamina è a mezz'onda per $\lambda(m)$, con m che soddisfa:

$$0.95 \leq m \leq 2.2, \qquad\qquad m \in \mathbb{Z}.$$

cioè

$$m = 1,\ 2.$$

A questi valori di m corrispondono le lunghezze d'onda:

$$\begin{aligned}
\lambda(m=1) \quad &= \quad \frac{2\,d\,\Delta n}{3} = \frac{2\,(1.2\cdot 10^{-4}\,m)\,(1.553-1.544)}{3} = 720\,nm; \\
\lambda(m=2) \quad &= \quad \frac{2\,d\,\Delta n}{5} = \frac{2\,(1.2\cdot 10^{-4}\,m)\,(1.553-1.544)}{5} = 432\,nm.
\end{aligned}$$

Queste sono le lunghezze d'onda per cui la lamina è a mezz'onda e sono quindi le lunghezze d'onda trasmesse con la massima intensità attraverso il sistema.

$\boxed{\textbf{Esercizio 20}}$

Una lamina sottile di calcite ($n_{ord} = 1.6584$, $n_{str} = 1.4864$) è a quarto d'onda per la luce con $\lambda = 0.6\,\mu m$. Un'onda con tale lunghezza d'onda e intensità $600\,W/m^2$ incide perpendicolarmente alla lamina in direzione ortogonale all'asse ottico. L'onda ha la seguente espressione

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t), \qquad E_z = \sqrt{3}\,E_0 \sin(kx - \omega t),$$

essendo l'asse y parallelo all'asse ottico del cristallo.

a) Calcolare lo spessore minimo della lamina.

b) Calcolare lo stato di polarizzazione dell'onda uscente.

c) Se ortogonalmente all'onda uscente viene posto un polarizzatore il cui asse forma un angolo di 90^o con l'asse y, calcolare l'intensità emessa dal polarizzatore.

Soluzione

a) La condizione che la lamina sia a quarto d'onda è che lo sfasamento tra onda straordinaria e onda ordinaria dopo la lamina sia:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\,d}{\lambda}\Delta n = (2\,m+1)\,\frac{\pi}{2}, \qquad \Delta n = |n_{ord} - n_{str}|, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Risolvendo per d la condizione per la lamina a quarto d'onda, si ottiene

$$d = (2\,m+1)\,\frac{\lambda}{4\,\Delta n}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Il valore minimo (positivo) per d si ha per $m = 0$ e vale:

$$d_{\min} = d(m=0) = \frac{\lambda}{4\,\Delta n} = \frac{6\cdot 10^{-7}\,m}{4\,(1.6584 - 1.4864)} = 0.872\,\mu m.$$

b) La lamina, di spessore d, sia posta tra x_0 e $x_0 + d$. Poiché l'asse ottico è parallelo all'asse y, per $x \le x_0$ le equazioni dell'onda straordinaria e di quella ordanaria sono:

$$\vec{E}_{\rm str} = E_y\,\hat{y} = \vec{E}_{\rm str0}\cos(kx - \omega t), \qquad \vec{E}_{\rm ord} = E_z\,\hat{z} = \vec{E}_{\rm ord0}\sin(kx - \omega t), \qquad x \le x_0;$$

$$\vec{E}_{\rm str0} = E_0\,\hat{y}, \qquad \vec{E}_{\rm ord0} = \sqrt{3}\,E_0\,\hat{z}.$$

che corrisponde ad un'onda con polarizzazione ellittica. Dopo la lamina ($x \ge x_0 + d$) i campi elettrici straordinario e ordinario avranno equazione:

$$\vec{E}'_{\rm str} = \vec{E}_{\rm str0}\cos(kx + (k_{\rm str} - k)\,d - \omega t), \qquad \vec{E}'_{\rm ord} = \vec{E}_{\rm ord0}\sin(kx + (k_{\rm ord} - k)\,d - \omega t), \qquad x \ge x_0 + d.$$

Lo sfasamento tra onda straordinaria e onda ordinaria dovuto alla lamina è quindi:

$$\Delta\phi = (k_{\rm ord} - k_{\rm str})\,d = \frac{2\pi\,d}{\lambda}(n_{\rm ord} - n_{\rm str}) = \frac{2\pi\,d}{\lambda}\Delta n.$$

Con la condizione di quarto d'onda, abbiamo:

$$\Delta\phi = (k_{\rm ord} - k_{\rm str})\,d = (2\,m+1)\,\frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad k_{\rm ord} = k_{\rm str} + (2\,m+1)\,\frac{\pi}{2\,d}.$$

L'equazione dell'onda ordinaria dopo la lamina diventa quindi:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\rm ord} &= \vec{E}_{\rm ord0}\,\sin(kx + (k_{\rm ord}-k)\,d - \omega t)\\ &= \vec{E}_{\rm ord0}\,\sin\left(kx + (k_{\rm str}-k)\,d - \omega t + (2\,m+1)\,\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{E}_{\rm ord0}\,\cos(kx + (k_{\rm str}-k)\,d - \omega t).\end{aligned}$$

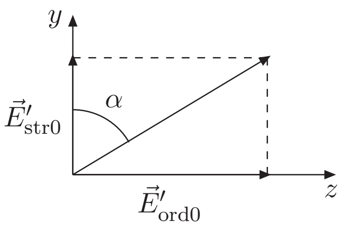
per cui

$$\vec{E}'_{\rm str} = \vec{E}'_{\rm str0}\,\cos(kx+(k_{\rm str}-k)\,d-\omega t), \qquad \vec{E}'_{\rm ord} = \vec{E}'_{\rm ord0}\,\cos(kx+(k_{\rm str}-k)\,d-\omega t), \qquad x \ge x_0+d.$$

con

$$\vec{E}'_{\rm str0} = \vec{E}_{\rm str0} = E_0\,\hat{y}, \qquad \vec{E}'_{\rm ord0} = \vec{E}_{\rm ord0} = \sqrt{3}\,E_0\,\hat{z}.$$

L'onda straordinaria e l'onda ordinaria sono dopo la lamina completamente in fase; l'onda uscente dalla lamina è quindi polarizzata linearmente.

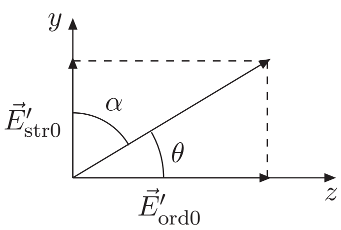


L'angolo α tra la direzione di polarizzazione e l'asse ottico della lamina si può ottenere dal rapporto delle ampiezze:

$$\tan\alpha = \frac{E'_{\rm ord0}}{E'_{\rm str0}} = \frac{\sqrt{3}\,E_0}{E_0} = \sqrt{3}, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60^o.$$

c) L'asse del polarizzatore forma un angolo di 90^o con l'asse y, quindi è parallelo all'asse z. L'angolo tra la direzione di polarizzazione e l'asse del polarizzatore è quindi:

$$\theta = 90^o - \alpha = 30^o.$$



Secondo la legge di Malus, l'intensità dell'onda uscente dal polarizzatore è quindi:

$$I = I_0\,\cos^2\theta = (600\,W/m^2)\,\cos^2(30^o) = (600\,W/m^2)\,\frac{3}{4} = 450\,W/m^2.$$

dove abbiamo trascurato l'assorbimento nella lamina (cioè l'intensità del raggio prima e dopo la lamina è sempre I_0).