M.Nardi, M. Billò, R. Tateo

Esercizi di Relatività Ristretta

con soluzioni

Versione Preliminare

Si prega di segnalare eventuali errori di stampa inviando messaggi email a:
marzia.nardi@to.infn.it
billo@to.infn.it
roberto.tateo@unito.it

Abbreviazioni e Notazioni

- SR = Sistema/i di Riferimento.
- SRI = Sistema/i di Riferimento Inerziale.
- TL = Trasformazione/i di Lorentz.
- K, K' = Sistemi di Riferimento inerziali. Si intende che K' è in moto rispetto a K con velocità v nel verso positivo dell'asse x.
- $\alpha, \beta, \ldots$ = Gli indici greci indicano le coordinate nello spazio di Minkowski, con valori 0,1,2,3.
- $i, j, \ldots$ = Gli indici latini indicano le coordinate dello spazio tridimensionale, con valori 1,2,3.
- $a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$, indici ripetuti nello stesso termine si intendono sommati.
- $\eta_{\mu\nu}$ = tensore metrico. In questo libro useremo con prevalenza la metrica (+1,-1,-1,-1) ma, occasionalmente, mostreremo anche l'uso della metrica con segni opposti, a scopo didattico.
- m = massa a riposo. In questo libro per "massa" intenderemo sempre la "massa invariante" o "massa a riposo" di un corpo.
- $\mathcal{E}, \mathcal{K}$ = energia relativistica ed energia cinetica relativistica. La lettera E viene riservata per indicare il campo elettrico.
- $\mathbf{A}$ = il grassetto è usato per vettori dello spazio tridimensionale; qualora siano le componenti spaziali di un quadrivettore si intendono di tipo controvariante.
- $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ = (pseudo-)tensore di Levi-Civita, antisimmetrico per lo scambio di due qualunque dei suoi indici, con la convenzione $\epsilon^{0123} = +1$.
- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, l'operatore gradiente indica la derivazione rispetto alle componenti spaziali controvarianti, quindi esso è di natura covariante.
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}$, operatore di Laplace.
- $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \Delta$, operatore di d'Alembert.

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto:	$c = 299\,792\,458$ m/s	valore esatto
Costante di Planck:	$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J s $\simeq 4.1356678 \cdot 10^{-15}$ eV s	valore esatto
Costante di Planck ridotta:	$\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,817\ldots \cdot 10^{-34}$ J s	
carica elettrica unitaria	$1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C	valore esatto

Conversioni di unità di misura

Massa	1 kg $= 1.78 \cdot 10^{-36}$ eV$/c^2$	1 eV$/c^2$ $= 5.61 \cdot 10^{35}$ kg
Energia	1 J $= 6.24 \cdot 10^{12}$ MeV	1 eV $= 1.60 \cdot 10^{-19}$ J
Lunghezza	1 m $= 3.336 \cdot 10^{-9}$ sec-luce	1 sec-luce $= 2.998 \cdot 10^{8}$ m
$\hbar c$	$3.16 \cdot 10^{-26}$ J m	197.3 Mev fm

Masse delle principali particelle

nome	**simbolo**	**massa** [Mev$/c^2$]
fotone	γ	0
neutrino	$\nu, \bar{\nu}$	$\simeq 0$
elettrone positrone	e^- e^+	0.511
muone	$\mu^\pm$	106
pione carico pione neutro	$\pi^\pm$ π^0	139.6 135.0
kaone carico kaone neutro	$K^\pm$ $K_0, \bar{K}_0$	493 497
protone neutrone	p n	938.3 939.6

Capitolo 2

Trasformazioni di Lorentz per le coordinate

È consuetudine definire lo spazio-tempo in 4 dimensioni:
- una dimensione temporale: t o $x^0 = ct$;
- tre dimesioni spaziali: x, y, z oppure x^1, x^2, x^3; quest'ultima forma si scrive anche in modo compatto come x^i, sottintendendo $i = 1, 2, 3$.

Trasformazione di Lorentz pura (boost) in direzione x con velocità $v = \beta c$:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{0\prime} = \gamma\left(x^0 - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta x^0\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.1}$$

Boost con velocità $\mathbf{v} = \boldsymbol{\beta} c = \vec{\beta} c$ in direzione arbitraria:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right) \\ \mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma\left(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{v}t\right) \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{0\prime} = \gamma\left(x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}\right) \\ \mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma\left(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}\, x^0\right) \\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \end{cases} \tag{2.2}$$

Riscrivendo in forma compatta la trasformazione delle coordinate spaziali, si ottiene

$$\begin{cases} x^{0\prime} = \gamma\left(x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}\right) \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1)\dfrac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\, x^0 \end{cases} \tag{2.3}$$

In forma matriciale la trasformazione per un boost si scrive:

$$X' = \Lambda(\boldsymbol{\beta})X \tag{2.4}$$

dove X è una matrice a 4 righe e 1 colonna:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

e Λ è una matrice 4×4 che, nel case di un boost in direzione x ha la forma

$$\Lambda(\beta \mathbf{u}_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Si definisce **rapidità** il parametro Y tale che

$$\beta = \tanh Y.$$

Per un boost con vettore $\boldsymbol{\beta}$, il vettore rapidità $\mathbf{Y}$ è definito come

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{Y}}{Y} \tanh Y \qquad \text{dove} \qquad Y = |\mathbf{Y}|. \tag{2.7}$$

Esercizi

2.1

Ricavare la trasformazione delle coordinate data dall'Eq. (2.3) a partire dalle (2.2).

2.2

Partendo da una TL in direzione generica scritta nella forma (2.3) ricavare la matrice per un boost in direzione generica.

2.3

Usando la definizione $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dimostrare le seguenti proprietà:

$$\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} \qquad \mathrm{d}\gamma = \gamma^3 \beta \mathrm{d}\beta \qquad \mathrm{d}(\gamma\beta) = \gamma^3 \mathrm{d}\beta\,.$$

2.4

Utilizzando le TL nella forma (2.2) dimostrare l'invarianza di $\mathbf{x}^2 - (ct)^2$.

2.5

Consideriamo tre eventi A, B e C che, nel SRI K hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{array}{lllll} A: & x_A = a & y_A = z_A = 0 & t_A = t_0 & \\ B: & x_B = 2a & y_B = z_B = 0 & t_B = t_0 & \\ C: & x_C = a & y_C = z_C = 0 & t_C = 2t_0 & \text{con } a, t_0 > 0\,. \end{array}$$

(a) Calcolare le coordinate dei tre eventi in un SR K' in moto, rispetto a K con velocità costante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_x$.

(b) Dimostrare che per qualunque v la separazione spaziale tra A e B nel SR K' è maggiore che in K.

(c) Dimostrare che per qualunque v l'intervallo temporale tra A e C nel SR K' è maggiore che in K.

2.6

Consideriamo due eventi, A e B, che avvengono in un SR K simultaneamente ma in posizioni diverse:

$$\begin{array}{lll} \text{Evento } A: & t_A = t_0, & \mathbf{r}_A \\ \text{Evento } B: & t_B = t_0, & \mathbf{r}_B \neq \mathbf{r}_A \ . \end{array}$$

Si consideri un altro SRI K' in moto, rispetto a K, con velocità costante $\mathbf{v}$.

(a) In generale, i due eventi A e B **non** sono simultanei in K', tranne in una condizione particolare. Quale?

(b) Calcolare l'intervallo temporale tra i due eventi nel caso particolare: $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_x$

2.7

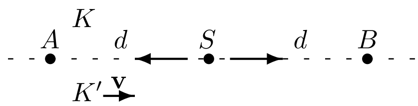
Partendo dalla TL definita da (2.1) ricavare la trasformazione inversa, cioè la trasformazione che esprime le coordinate $\{t, x, y, z\}$ in funzione delle $\{t', x', y', z'\}$. Scrivere la matrice di Lorentz corrispondente.

2.8

Nel SRI K gli eventi A e B sono simultanei ed avvengono in due punti sull'asse x a distanza L. In un altro SRI K', in moto relativo in direzione x, i due eventi avvengono in due punti distanti $2L$ e temporalmente separati da un intervallo $\Delta t'$. Calcolare la velocità relativa tra i due SR e l'intervallo di tempo $\Delta t'$.

2.9

In un SRI K una sorgente S emette segnali luminosi in tutte le direzioni al tempo $t = 0$. Due ricevitori A e B, fermi nel SR K, sono posizionati a distanza d da S, da parti opposte e sulla stessa retta.



Definiamo i seguenti eventi:

- evento A: il ricevitore A riceve il segnale.
- evento B: il ricevitore B riceve il segnale.

(a) Calcolare le coordinate spazio-temporali degli eventi A e B nel SR K.

Consideriamo un SR K' in moto, rispetto a K, con velcocià v parallela alla retta su cui sono posizionati i due ricevitori, come in figura.

(b) Calcolare le coordinate spazio-temporali degli eventi A e B nel SR K'.

Discutere i risultati ottenuti: cosa possiamo dire della simultaneità degli eventi?

2.10

È dato un Sistema di Riferimento inerziale K ed un altro sistema di riferimento K' in moto relativo, rispetto a K, con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_x$. All'istante $t = t' = 0$ le origini O e O' coincidono.

Si considerino due osservatori A e B: il primo solidale con K e posizionato in $x_A = L$,

$y_A = z_A = 0$, il secondo solidale con K' e la cui posizione all'istante $t = 0$ è, secondo K, $x_B(t = 0) = L$, $y_B = z_B = 0$. Al tempo $t = t' = 0$ un segnale luminoso viene emesso da O.

(a) Calcolare gli istanti t_A e t_B misurati in K in cui il segnale raggiunge i due osservatori e le loro posizioni d_A e d_B in questi istanti.

(b) Calcolare le analoghe quantità t'_A, t'_B e d'_A, d'_B secondo K'.

2.11

Dall'origine di un SRI K una sorgente emette un segnale luminoso in tutte le direzioni al tempo $t_0 = 0$. Dei ricevitori sono posizionati nei punti $M = (d, 0, 0)$, $N = (-d, 0, 0)$ e $P = (0, \frac{1}{2}d, 0)$, essendo d un parametro positivo. Un osservatore solidale con un SR K', in moto rispetto a K con velocità u parallela all'asse x, misura l'arrivo dei segnali luminosi in M, N, P. Calcolare, secondo il SR K':

(a) i tempi di arrivo dei tre segnali;

(b) quanto dovrebbe valere u affinché l'arrivo dei segnali in M ed in P sia simultaneo;

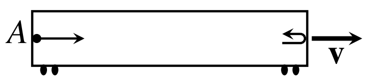
(c) quanto dovrebbe valere u affinché l'arrivo dei segnali in N ed in P sia simultaneo;

(d) quanto dovrebbe valere u affinché tra l'arrivo dei segnali in M ed in N trascorra un intervallo di tempo pari a $4d/3c$.

2.12

L'osservatore A si trova all'estremità di una carrozza di un treno che viaggia a velocità costante v.

A invia un segnale luminoso all'altra estremità del vagone (lunghezza propria L_0) da dove viene istantaneamente riflesso e torna ad A dopo un tempo, complessivo, δt.



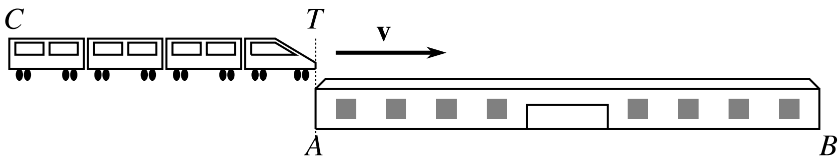
Qual è la distanza totale percorsa dal segnale e quanto vale l'intervallo di tempo tra emissione e ricezione secondo il SR della Terra?

2.13

Un treno, in moto con velocità uniforme $\mathbf{v}$, passa davanti a una stazione. Sia il treno che la stazione hanno lunghezza a riposo L_0. Due orologi, A e B, sono posizionati alle estremità della stazione e altri due orologi, T e C, sono posti sul treno, rispettivamente, in testa e in coda. Tutti gli orologi sono sincronizzati a coppie: A con B e T con C. Quando T e A si trovano l'uno di fronte all'altro (come in figura) segnano il tempo $t = t' = 0$. Determinare:

(a) l'ora segnata dagli orologi T e B quando si trovano l'uno davanti all'altro;

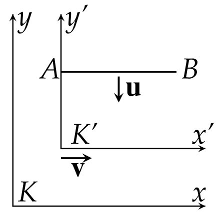
(b) l'ora segnata dagli orologi C e A quando si trovano l'uno davanti all'altro.



2.14

Sono dati tre Sistemi di Riferimento Inerziali: K, K' e K''.
K' è in moto rispetto a K con velocità $\mathbf{v}_1 = \frac{c}{2}\hat{\mathbf{u}}_x$.
K'' è in moto rispetto a K' con velocità $\mathbf{v}_2 = \frac{c}{3}\hat{\mathbf{u}}_{x'}$.
Scrivere la trasformazione tra K e K'' e verificare che ha la forma di una Trasformazione di Lorentz. Qual è la velocità relativa $\mathbf{V}$ tra K e K''?

2.15



Un'asta AB di lunghezza a riposo L_0 è orientata parallelamente all'asse x' del SR inerziale K' e si muove in direzione $-y'$ con velocità u. Il SR K', a sua volta, si muove rispetto an un altro SR inerziale K con velocità costante v, in direzione $+x$.
Calcolare l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x del SR K.

2.16

Un punto materiale nel SRI K si muove nello spazio con la legge oraria

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\,t \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x = u_x t \\ y = u_y t \\ y = u_z t \end{cases}$$

Dimostrare che nel SR K' in moto, rispetto a K, con velocità $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_x$ la legge oraria del punto è della forma $\mathbf{x}' = \mathbf{u}'t'$ e determinare il vettore $\mathbf{u}'$ in funzione di $\mathbf{u}$ e v.

2.17

In un SRI K, un corpo puntiforme A si muove con velocità $\mathbf{v}_A = \frac{3}{5}c\,\mathbf{u}_x$, mentre un altro corpo puntiforme B si muove con velocità $\mathbf{v}_B = -\frac{4}{5}c\,\mathbf{u}_x$. Scrivere:

- (a) la trasformazione di Lorentz (TL) da K al Sistema solidale con A (K');
- (b) la TL da K al Sistema solidale con B (K'') e la sua inversa;
- (c) la TL dal SR solidale con B al SR solidale con A;
- (d) qual è la velocità di A rispetto a B?

2.18

Dimostrare che la composizione di due TL pure collineari è ancora una TL pura parallela alle precedenti.

2.19

Dimostrare che la composizione di TL collineari gode della proprietà associativa.

2.20

Dimostrare che la rapidità è additiva per composizione di boost collineari.

2.21

Scivere la matrice di Lorentz per un boost in direzione y o in direzione z.

2.22

Dimostrare con un calcolo esplicito che
(a) due boost collineari commutano;
(b) due boost in direzioni ortogonali NON commutano.

2.23

Scrivere una TL in direzione x utilizzando la rapidità Y. Introducendo l'angolo immaginario $\phi = iY$ e la coordinata immaginaria $x^4 = ix^0 = i(ct)$ dimostrare che la TL si può scrivere formalmente come una rotazione di angolo ϕ nel piano $(x^4, x^1) = (ix^0, x)$.

2.24

Dimostrare che l'equazione di d'Alembert

$$\Box\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,,$$

dove ψ è una funzione scalare, è invariante per TL.

2.25

Per una TL in direzione x si definiscono le **variabili cono-luce** nel modo seguente (le coordinate y e z, trasversali rispetto al moto relativo, sono invariate):

$$x_+ = x + ct \qquad\qquad x_- = x - ct$$

Ricavare le TL per queste variabili, sia in funzione della velocità relativa β, che in funzione della rapidità. Dimostrare che il prodotto x_+x_- è invariante.

2.26

Dimostrare che tra la velocità β di una TL e la corrispondente rapidità Y sussistono le relazioni

$$\mathrm{e}^Y = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{1}{2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

2.27 **

Si considerino due SRI K e K' in moto, rispetto a K, con velocità costante $\mathbf{v} = \left(\frac{c}{3}, \frac{2c}{3}, 0\right)$.
Considerando come si trasformano le coordinate dei punti $O, (0,0,0)$, $A(\ell,0,0)$, $B(0,\ell,0)$ e $C(0,0,\ell)$ stabilire se i vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, nel SR K', formano una terna ortogonale.

Capitolo 3

Proprietà matematiche dello spazi-tempo. Causalità

Vettori, tensori
Invarianti
Cono-luce
Causalità
delta di Kronecker, tensore di levi-civita

Esercizi

3.1

Si considerino tre eventi A, B, C le cui coordinate spazio-temporali in un Sistema di Riferimento inerziale K sono:

$$\text{evento } A\text{:} \quad t_A = \frac{2d}{c}, \quad x_A = 2d, \quad y_A = 3d, \quad z_A = 0$$
$$\text{evento } B\text{:} \quad t_B = -\frac{d}{c}, \quad x_B = 2d, \quad y_B = d, \quad z_B = -2d$$
$$\text{evento } C\text{:} \quad t_C = 0\ , \quad x_C = 2d, \quad y_C = d, \quad z_C = 0$$

(d = parametro positivo, c = velocità della luce nel vuoto).

(a) Dimostrare che esiste un Sistema di Riferimento inerziale in cui due dei tre eventi dati (quali?) sono simultanei e calcolare, in tale Sistema di Riferimento, la loro distanza spaziale.

(b) Dimostrare che esiste un Sistema di Riferimento inerziale in cui due dei tre eventi dati (quali?) sono spazialmente coincidenti e calcolare, in tale Sistema di Riferimento, l'intervallo temporale tra di essi.

(c) Cosa si può dire della terza coppia di eventi ?

(d) Per quali coppie di eventi è possibile una connessione causale?

(e) È possibile trovare un Sistema di Riferimento K' in cui l'ordinamento cronologico di B e C è invertito? Se sì, trovarne almeno uno, specificando il modulo e la direzione della velocità relativa rispetto a K.

3.2

Sono dati tre eventi A, B e C connessi da una relazione causale tale che:

$$A \text{ è causa di } B\ , \qquad B \text{ è causa di } C\ .$$

Le coordinate spazio-temporali dei tre eventi sono, nel Sistema di Riferimento inerziale K:

$$\begin{array}{llll} A: & t_A = a/c & x_A = a & y_A = z_A = 0 \\ B: & t_B = ? & x_B = 2a & y_B = z_B = 0 \\ C: & t_C = 4a/c & x_C = ? & y_C = z_C = 0\ , \end{array}$$

essendo a un parametro positivo.
Determinare i possibili valori delle coordinate incognite t_B e x_C sapendo che:
i) nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $|\vec{v}| = \frac{3}{5}c$ in direzione x, gli eventi A e B sono spazialmente coincidenti;
ii) B e C sono separati da un intervallo di tipo luce.

3.3

Le coordinate spazio-temporali di due eventi A e B osservati nel Sistema di Riferimento inerziale K sono le seguenti :

$$\begin{array}{llll} \text{Evento } A: & x_A = a\ , & y_A = z_A = 0\ , & t_A = \dfrac{a}{c} \\ \text{Evento } B: & x_B = 2a, & y_B = z_B = 0\ , & t_B = \dfrac{a}{2c} \end{array}$$

essendo a una costante.
(a) Dimostrare che esiste un Sistema di Riferimento inerziale K' in cui questi eventi sono contemporanei e trovare la sua velocità rispetto a K (modulo, direzione e verso).
(b) Trovare il tempo t' in cui i due eventi avvengono secondo il sistema K'.

3.4

Due eventi accadono nello stesso punto di un SR inerziale e sono separati da un intervallo di tempo Δt. Qual è la loro separazione spaziale in un altro SR in cui l'intervallo di tempo è $\Delta t' = 2\Delta t$? Qual è la velocità relativa tra i due SR?

3.5

Dimostrare che se A^μ è un quadrivettore non nullo (cioè almeno una delle sue componenti è non nulla) ed è ortogonale ad un quadrivettore di tipo-tempo, allora A^μ è sicuramente un quadrivettore di tipo-spazio.
Dimostrare che non è vero il viceversa: un quadrivettore non nullo ortogonale ad un quadrivettore di tipo-spazio non è necessariamente di tipo-tempo.

3.6

Sia D^μ un quadrivettore di tipo tempo definito in un SR inerziale K. Dimostrare che il segno della sua componente temporale è lo stesso in ogni SR inerziale, cioè che nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $\vec{v}$ ($\vec{\beta} = \dfrac{\vec{v}}{c}$), la componente temporale del quadrivettore trasformato D'^{μ}:

$$D'^{0} = \gamma(v)\left(D^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{D}\right)$$

ha lo stesso segno di D^0.
Se il quadrivettore D^μ è la differenza tra le coordinate di due eventi A e B ($D^\mu = x^\mu_A - x^\mu_B$) separati da un intervallo di tipo tempo, spiegare quale conseguenza ha l'invarianza del segno di D^0 sull'ordine cronologico degli eventi stessi.

3.7

Dimostrare che per ogni coppia di quadrivettori A^μ, B^μ vale

$$A^\mu B^\nu = A^\nu B^\mu \qquad \text{se e solo se} \qquad B^\mu = \lambda A^\mu$$

dove λ è uno scalare.

Capitolo 4

Conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz sulla misura dello spazio e del tempo. Simultaneità

Esercizi

4.1

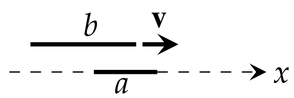
Calcolare la lunghezza propria di una sbarra sapendo che nel Sistema di Riferimento (SR) del laboratorio essa si muove con velocità $v = \frac{3}{\sqrt{10}}c$, la sua lunghezza è $L = 5$ m e l'angolo tra la sbarra e la direzione del suo moto è $\theta = \mathrm{atan}\frac{3}{4}$.

4.2

Un treno, in moto con velocità rettilinea e uniforme, passa davanti ad un osservatore O fermo a Terra. L'osservatore misura un intervallo di tempo Δt s tra il passaggio delle due estremità del treno davanti a lui. Nel SR solidale con il treno, l'osservatore O impiega un tempo $\Delta t' = 1.5\Delta t$ ns per percorrere il treno. A che velocità sta viaggiando il treno?

4.3

Nel SRI K la sbarretta b si muove parallelamente all'asse x con velocità v. La sbarretta a, di lunghezza a riposo L_a, è ferma sull'asse x.
Nel SR K il rapporto tra la lunghezza della sbarretta b rispetto alla sbarretta a è 1.6.
Nel SR solidale con la sbarretta b, lo stesso rapporto è 2.5.



Calcolare il rapporto tra le lunghezze a riposo delle due sbarrette e la velocità v.

4.4

Il muone è una particella instabile, con vita media pari a $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s, che viene creata nell'interazione tra particelle cosmiche e l'atmosfera terrestre ad una quota di circa 12 km rispetto al suolo. Supponendo che il muone sia diretto verso il centro della Terra e che decada esattamente dopo un tempo τ (nel proprio SR), calcolare la minima velocità che deve avere perché riesca a raggiungere il suolo.

4.5

Una particella instabile viene creata nel SR del laboratorio con velocità $v = 0.95\,c$ e decade dopo $\Delta t = 25$ ns.

(a) Qual è il tempo di decadimento della particella nel proprio SR?
(b) Che distanza percorre nel laboratorio prima di decadere?
(c) Che distanza percorre nel proprio SR prima di decadere?

4.6

Due osservatori O e O' hanno gli orologi sincronizzati a $t = t' = 0$ quando si trovano nella stessa posizione. O' viaggia con velocità v costante rispetto O. O invia un segnale luminoso verso O' al tempo t_1.

(a) A che tempo t'_1 avviene l'invio del segnale, secondo il SR di O'?
(b) A che tempo t'_2 O' riceve il segnale e a che tempo t_2, secondo il SR di O, corrisponde?

4.7

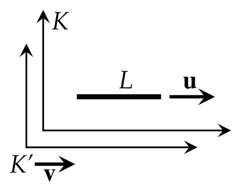
Due sbarre di lunghezza propria a_0 e b_0, parallele all'asse x, viaggiano in direzione $+x$ con velocità, rispettivamente $v_A = \frac{3}{5}c$ e $v_B = \frac{4}{5}c$ rispetto ad un SRI K. Le loro lunghezze, secondo una misura effettuata in K, sono uguali. Calcolare il rapporto a_0/b_0.

4.8

Due punti materiali A e B si muovono, nel SR K, con velocità costante u lungo l'asse x mantenendosi a distanza L.

(a) Qual è la loro distanza secondo un SR K' che si muove in direzione x con velocità v?
(b) Qual è la loro distanza secondo il SR in cui sono fermi?
(c) Rispondere nuovamente alla domanda (a) nel caso A e B siano due fotoni, in moto con velocità c.

4.9



Una sbarra si muove con velocità $u = (5/7)c$ nel SR K (vedi figura) ed ha, in tale SR, lunghezza $L = 10$ m.
Qual è la sua lunghezza misurata nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $v = (3/5)c$?

4.10

Anne e Ben sono due gemelli che si offrono volontari per il famoso esperimento: Anne partirà con un'astronave per un viaggio a velocità $v_1 = (3/5)c$, dopo un certo tempo invertirà la sua rotta e tornerà sulla Terra, dove si riunirà a suo fratello: i due confronteranno le loro età e stabiliranno di quanto Anne sarà più giovane di Ben.

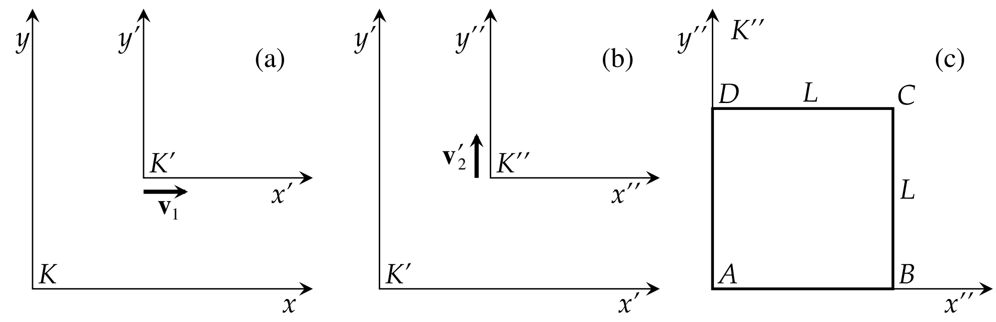


Figura 4.1: Esercizio 4.11

Le cose però non vanno esattamente secondo i piani, perché dopo un anno dalla partenza di Anne, Ben, sentendo troppo la mancanza della sorella, decide di partire a sua volta, con velocità $v_2 = (4/5)c$, per raggiungerla.

(a) Dopo quanto tempo Ben raggiunge Anne, secondo il SR della Terra?
(b) Quanto tempo è passato secondo Anne, quando il fratello la raggiunge?
(c) Quanto tempo è passato secondo Ben, quando raggiunge Anne?
(d) Rappresentare l'esperimento con un diagramma di Minkowski.

4.11 **

Consideriamo un SR K ed un altro SR K' in moto, rispetto a K, con velocità costante $\mathbf{v}_1 = \frac{3}{5}c$ in direzione $+x$ (fig. 4.1a). Un ulteriore SR K'' è in moto rispetto a K' con velocità costante $\mathbf{v}'_2 = \frac{3}{4}c$ in direzione $+y'$ (fig. 4.1b).
Il quadrato $ABCD$ è a riposo nel SRI K''. Le coordinate dei vertici, in tale SR sono:

$$\begin{array}{llll} x''_A = 0 & x''_B = L & x''_C = L & x''_D = 0 \\ y''_A = 0 & y''_B = 0 & y''_C = L & y''_D = L \\ z''_A = 0 & z''_B = 0 & z''_C = 0 & z''_D = 0 \end{array} \tag{4.1}$$

essendo L un parametro positivo (fig. 4.1c).
Determinare come si trasforma il quadrato $ABCD$ nei SR K' e K.

4.12 **

Questo esercizio è molto simile al precedente, i boost in direzioni ortogonali vengono eseguiti in ordine inverso. Il SR K' si muove , rispetto a K, con velocità costante $\mathbf{w}_1 = \frac{3}{5}c$ in direzione $+y$ (fig. 4.2a).
Il SR K'' è in moto rispetto a K' con velocità costante $\mathbf{w}'_2 = \frac{3}{4}c$ in direzione $+x'$ (fig. 4.2b). Il quadrato $ABCD$ è a riposo nel SRI K'' e le coordinate dei suoi vertici sono, come

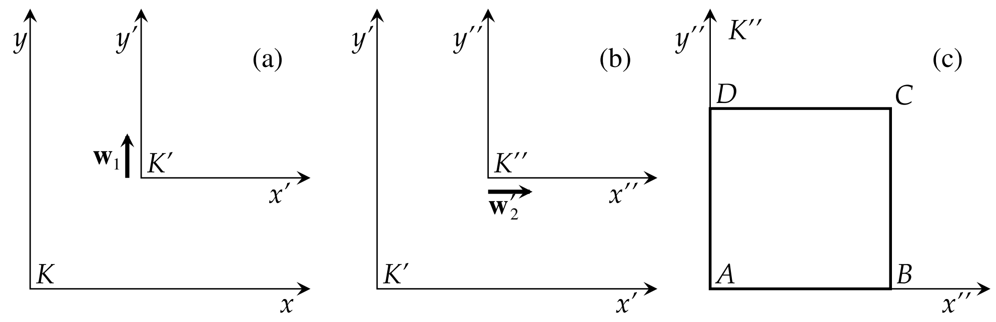


Figura 4.2: Esercizio 4.12

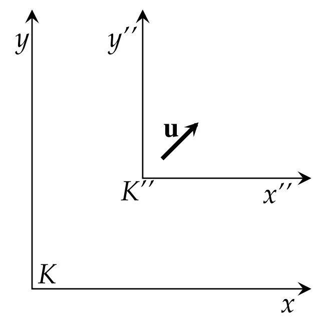
nell'esercizio precedente,

$$\begin{array}{llll} x''_A = 0 & x''_B = L & x''_C = L & x''_D = 0 \\ y''_A = 0 & y''_B = 0 & y''_C = L & y''_D = L \\ z''_A = 0 & z''_B = 0 & z''_C = 0 & z''_D = 0 \end{array} \tag{4.2}$$

essendo L un parametro positivo (fig. 4.2c).
Determinare come si trasforma il quadrato $ABCD$ nei SR K' e K.

4.13 **

Questo esercizio è una ulteriore variante dei due esercizi precedenti. Consideriamo ancora il quadrato $ABCD$ a riposo nel SR K'', con le coordinate date dalle (4.1) di pag. 14.
Il SR K'' si muove rispetto al SR K con velocità $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}c, \frac{3}{5}c, 0\right)$.
Determinare come si trasforma il quadrato $ABCD$ nel SR K.



Capitolo 5

Trasformazione delle velocità. Quadrivelocità

Si consideri un punto materiale P in moto, nel SR K, con (tri-)velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Le componenti della sua velocità $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ nel SR K' in moto, rispetto a K, con velocità v in direzione $+x$ sono date da (vedere esercizio 2.16)

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} = \dfrac{u_x - v}{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)} = \dfrac{u_y}{\gamma(v)\,(1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)} = \dfrac{u_z}{\gamma(v)\,(1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2)} \end{cases} \tag{5.1}$$

Se invece il SR K' è in moto con velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ la velocità $\mathbf{u}'$ risulta (esercizio 5.7):

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \big(\gamma(v) - 1\big)\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\ . \tag{5.2}$$

La seguente relazione è molto utile (per la dimostrazione si vedano gli esercizi 5.4 e 5.5):

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\ . \tag{5.3}$$

Per una particella in moto con (tri)-velocità $\mathbf{u}$ in un SR si definisce **quadrivelocità** il (quadri)-vettore:

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (c\gamma(u), \gamma(u)\mathbf{u})\ , \tag{5.4}$$

La quadrivelocità è un vettore di tipo tempo, con norma al quadrato fissa (esercizio 5.2):

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$U^\mu U_\mu = -c^2$	$U^\mu U_\mu = c^2$ (5.5)

Per due punti materiali in moto con quadrivelocità, rispettivamente, U^μ_A e U^μ_B si può calcolare il modulo della (tri-)velocità relativa con la relazione (esercizio 5.13)

$$u_{rel} = c\sqrt{1 - \frac{c^4}{(U_A \cdot U_B)^2}}\,. \tag{5.6}$$

Esercizi

5.1

Dimostrare che per piccole velocità ($v, u \ll c$) le (5.2) si riducono alle Trasformazioni di Galileo per le velocità.

5.2

Dimostrare le seguenti proprietà della quadrivelocità:

(a) Ricavare l'espressione dell'ultimo membro della (5.4) (pag. 16) a partire dalla definizione di quadrivelocità.

(b) La quadrivelocità è un vettore di tipo tempo e la sua norma al quadrato è una costante.

5.3

Utilizzando le regole di trasformazione della (tri)-velocità (5.1) dimostrare che la quadrivelocità si trasforma come un quadrivettore controvariante.

5.4

Si dimostri la relazione (5.3) usando la regola di trasformazione (5.1).

5.5

Si dimostri la relazione (5.3) utilizzando il vettore quadrivelocità.

5.6

Dimostrare che la velocità ottenuta componendo due velocità secondo la regola relativistica non può mai superare c.

5.7

Ricavare la regola di trasformazione della velocità per un boost in direzione qualsiasi (5.2).

5.8 *

Due punti materiali P_1 e P_2 si muovono, in un SRI K con velocità, rispettivamente, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

(a) Calcolare la velocità $\mathbf{v}_{21}$ di P_2 nel SR solidale con P_1.

(b) Calcolare la velocità $\mathbf{v}_{12}$ di P_1 nel SR solidale con P_2.

(c) Osservare che in generale, diversamente da quanto avviene in Meccanica Classica, si ha $\mathbf{v}_{21} \neq -\mathbf{v}_{12}$, cioè le due velocità relative non sono parallele tra loro! Dimostrare però che i loro moduli sono uguali e sono dati da

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \frac{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2}{c^2}}}{1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}} \tag{5.7}$$

(d) Nel caso particolare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ parallele tra loro, dimostrare che $\mathbf{v}_{21} = -\mathbf{v}_{12}$.

5.9

Due punti materiali P_1 e P_2 si muovono, in un SRI K con velocità, rispettivamente, $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}c, 0, 0\right)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{5}c, 0\right)$. Calcolare la velocità di P_1 rispetto a P_2 e la velocità di P_2 rispetto a P_1, verificando che non sono parallele, ma sono uguali in modulo.

5.10

Due sbarrette AA' e BB' sono in moto, longitudinalmente, nel SR K con velocità $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ parallele. Le lunghezze delle due sbarrette, misurate in K, risultano $\overline{AA'} = \frac{1}{2}\overline{BB'}$.
Sapendo che la loro velocità relativa è $v = \frac{4}{5}c$ e che le loro lunghezze a riposo sono uguali $\overline{AA'}_0 = \overline{BB'}_0 = L_0$, calcolare v_A e v_B.

5.11

Nel SR K due punti materiali A e B si muovono con velocità (costanti), rispettivamente $u_A = \frac{3}{5}c$ e $u_B = \frac{4}{5}c$ nella stessa direzione. Calcolare la velocità v, rispetto a K, di un SR K' in cui A e B hanno velocità uguali (in modulo) ed opposte.

5.12 *

Ripetere l'esercizio 5.11 per velocità u_A e u_B generiche in modulo, ma aventi stessa direzione e stesso verso. Risolvere utilizzando sia la regola di composizione delle velocità, sia la rapidità.

5.13

Dati due punti materiali in moto con quadrivelocità, rispettivamente, U_A^μ e U_B^μ dimostrare che il modulo della (tri-)velocità relativa è

$$u_{rel} = c\sqrt{1 - \frac{c^4}{(U_A \cdot U_B)^2}} \tag{5.8}$$

5.14

Una particella P si muove con velocità $\vec{u} = (0, c/\alpha, 0)$ (α =parametro positivo) rispetto ad un sistema di riferimento inerziale K. Un altro sistema di riferimento inerziale K' è in moto, rispetto a K, con velocità v in direzione $+x$.

(a) Sapendo che nel sistema di riferimento K' la particella P si muove parallelamente alla direzione della diagonale del secondo quadrante del piano $x'y'$, calcolare v.

(b) Calcolare le componenti ed il modulo della velocità di P in K'.

5.15

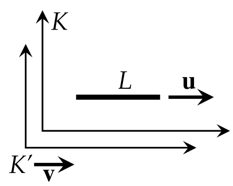
In un SR inerziale K, una particella si muove nel piano xy con velocità $\vec{u}$ nella direzione che forma un angolo α con l'asse x. In un altro SR inerziale K', in moto rispetto a K con velocità $\vec{v}$ in direzione x, la particella si muove con velocità parallela all'asse y'.

(a) Sapendo che $u = 0.8\,c$ e $v = 0.4\,c$, calcolare l'angolo α.

(b) Calcolare la velocità della particella in K'.

5.16

Una sbarretta in moto nel SRI K con velocità u incognita (vedi figura) ha, in tale SR, lunghezza L. Nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $v = \frac{4}{5}c$ parallela alla velocità della sbarretta, la lunghezza misurata è $L' = \frac{3}{2}L$.



Calcolare la velocità u e la lunghezza propria della sbarretta.

5.17

Nel SR inerziale K, la particella A ha velocità costante $\mathbf{u}_A = \frac{2}{3}c\hat{\mathbf{u}}_x + \frac{1}{3}c\hat{\mathbf{u}}_y + \frac{1}{3}c\hat{\mathbf{u}}_z$. Calcolare la sua quadrivelocità nel SR K e nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $\mathbf{v} = \frac{c}{2}\hat{\mathbf{u}}_y$.

5.18

Dimostrare che la velocità della luce è invariante per le trasformazioni di velocità.

5.19

Un segnale luminoso si muove, nel SR K nella direzione del versore $\hat{\mathbf{u}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Calcolare in che direzione si muove in un SR K' in moto in direzione $+z$ rispetto a K.

5.20 *

Aberrazione stellare

Consideriamo una stella (E) molto lontana, la cui posizione sia individuata dall'angolo θ_0 rispetto al piano dell'orbita terrestre (Fig. 5.1). A causa della velocità finita della luce e del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, la posizione della stella osservata dalla Terra cambia durante l'anno.

Quando la Terra si trova nei punti A e C della sua orbita, la stella appare nelle posizioni A' e C', rispettivamente. In queste posizioni, l'angolo tra il segnale luminoso proveniente dalla stella e la velocità della Terra è di $\frac{\pi}{2}$, ma dalla Terra appare un angolo leggermente diverso (aberrazione) $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, con $\alpha_1 = \alpha_A = \alpha_C$.
Quando invece la Terra si trova nei punti B e D, la stella appare nelle posizioni B' e D', l'angolo tra il segnale luminoso proveniente dalla stella e la velocità della Terra è di θ_0 e dalla Terra l'angolo apparente è modificato dall'aberrazione $\theta' = \theta_0 \pm \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_B = \alpha_D$.
Calcolare gli angoli di aberrazione α_1 e α_2.

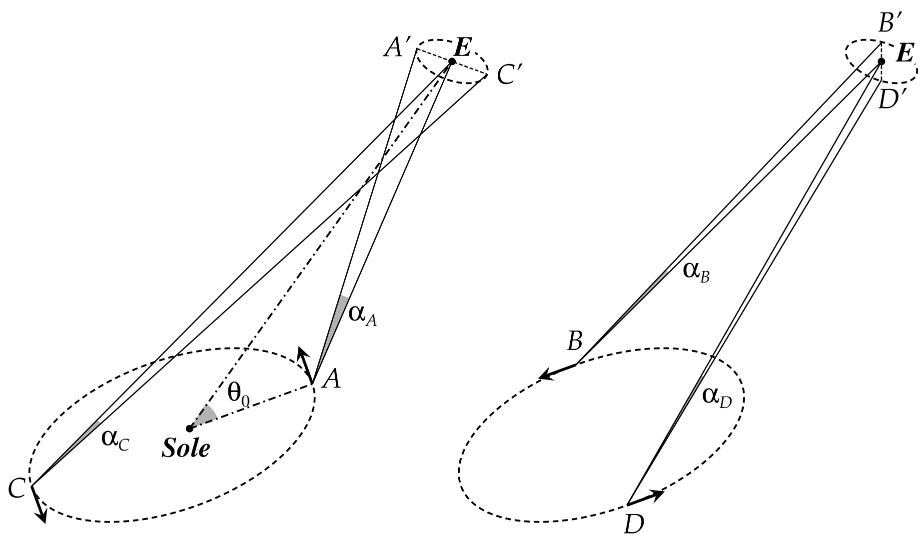


Figura 5.1: Aberrazione stellare. L'ellisse tratteggiata rappresenta l'orbita terrestre. I punti A, B, C, D della Terra corrispondono alle posizioni apparenti A', B', C', D' della stella E.

5.21 **

Composizione di Boost in direzioni ortogonali: Esempio
Consideriamo 3 Sistemi di Riferimento inerziali:

- K_0
- K_1, in moto rispetto a K_0 con velocità $\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{3}{5}\hat{\mathbf{u}}_x$ (Fig. 5.2a)
- K_2, in moto rispetto a K_1 con velocità $\boldsymbol{\beta}'_2 = \frac{4}{5}\hat{\mathbf{u}}_y$ (Fig. 5.2b)

In questo esercizio dimostreremo che la composizione di queste due TL pure in direzioni ortogonali tra loro **NON È** una TL pura, ma la combinazione di una TL pura con una rotazione spaziale (Fig. 5.2c).

(a) Scrivere le matrici di Lorentz per la TL da K_0 a K_1 (Λ_1) e da K_1 a K_2 (Λ_2) e calcolare il prodotto $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$. Questa è la matrice che descrive la trasformazione da K_0 a K_2. Scrivere esplicitamente la trasformazione.

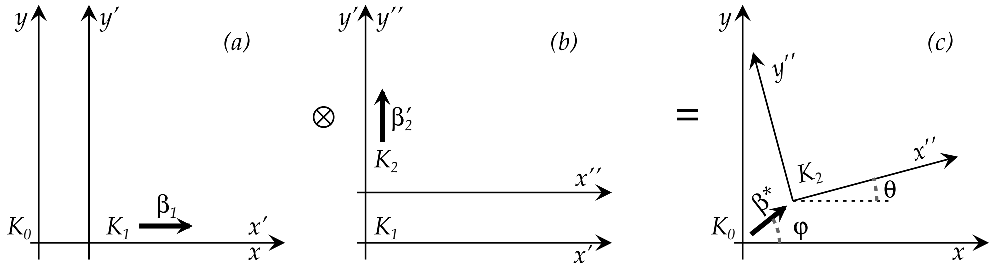


Figura 5.2: Composizione di Boost in direzioni ortogonali

(b) Calcolare la velocità di K_2 rispetto a K_0, usando le regole di composizione delle velocità. Si otterrà una velocità $\boldsymbol{\beta}^*$ obliqua rispetto agli assi x, y. Scrivere la matrice di Lorentz Λ^* corrispondente a questa trasformazione.

(c) Le matrici $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$ e Λ^* sono diverse: evidentemente un boost obliquo calcolato con la velocità relativa tra K_2 e K_0 non basta a rendere la trasformazione da K_0 a K_2. Dimostrare che è possibile trovare un angolo θ tale che una rotazione nel piano xy combinata con la Λ^* permette di ottenere la trasformazione $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$.

5.22 ***

Composizione di Boost in direzioni ortogonali: Caso generale

Seguendo il procedimento dell'esercizio 5.21, ripetere i calcoli per valori di β_1 e β_2' generici. Ricavare i valori di $\boldsymbol{\beta}^*$ e di θ in funzione di questi parametri.

5.23

Una particella P ha, nel sistema di riferimento inerziale K, quadrivelocità data da:

$$U^\mu = (U^0, \vec{U}) = (\,2\,c\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,c\,,\ 0\,,\ U^3\,) \qquad\qquad U^3 > 0\,.$$

(a) Calcolare la componente mancante U^3 e la tri-velocità di P nel SR K.

(b) Nel SR K', in moto rispetto a K in direzione z, la particella P si muove parallelamente all'asse x. Calcolare la rapidità della TL tra i due SR.

(c) Calcolare la quadrivelocità e la tri-velocità di P nel SR K'.

5.24

Un punto materiale ha, nel SR inerziale K, velocità costante $\vec{u} = (\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c, 0)$. Calcolare la sua velocità nel SR K' in moto, rispetto a K, con velocità $\vec{v} = (0, \frac{1}{8}c, 0)$.

Calcolare inoltre il vettore quadrivelocità nei due SR e verificare che si trasforma come un quadrivettore.

Capitolo 6

Quantità di moto ed energia. Quadrimomento

Per un corpo materiale (puntiforme) di massa a riposo m che si muove, in un SR K, con velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ si definisce la quadrivelocità:

$$U^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\,\gamma(u)c\,,\,\gamma(u)u_x\,,\,\gamma(u)u_y\,,\,\gamma(u)u_z\,) \qquad (\mu = 0,1,2,3, \quad u = |\mathbf{u}|) \tag{6.1}$$

Il quadrimpulso è definito da:

$$P^\mu = mU^\mu = (\,m\gamma(u)c\,,\,m\gamma(u)\mathbf{u}\,) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\,,\,\mathbf{p}\right) \tag{6.2}$$

avendo definito l'energia (relativistica) $\mathcal{E} = m\gamma(u)c^2$ e il tri-impulso (relativistico) $\mathbf{p} = m\gamma u$. Le norme della quadrivelocità e del quadrimpulso sono date da (conseguenza delle loro definizioni):

$$U^\mu U_\mu = -c^2 \qquad\qquad P^\mu P_\mu = -m^2c^2 \tag{6.3}$$

Energia relativistica:

$$\mathcal{E} = m\gamma(u)c^2 = \sqrt{mc^4 + \mathbf{p}^2c^2} \tag{6.4}$$

Energia di riposo (per ogni particella, con massa non nulla, nel proprio sistema di riferimento a riposo):

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \tag{6.5}$$

Energia *cinetica* relativistica

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = mc^2(\gamma - 1) \tag{6.6}$$

Per una particella in moto con velocità di modulo u si definisce la **rapidità** Y (vedere esercizi (6.6),(6.8)):

$$Y = \operatorname{atanh}\frac{u}{c} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{u}{c} = \tanh Y\,.$$

Le seguenti formule, conseguenze delle definizioni date, sono molto utili:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c}\boldsymbol{\beta} \qquad\qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{c\,\mathbf{p}}{\mathcal{E}} \qquad\qquad \gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \tag{6.7}$$

Per un fotone (particella con massa a riposo nulla) si possono definire energia e impulso nel modo seguente:

$$\mathcal{E} = |\mathbf{p}|c \qquad p = |\mathbf{p}| = \frac{\mathcal{E}}{c} \tag{6.8}$$

L'energia di un fotone è proporzionale alla sua frequenza:

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{6.9}$$

Il fattore di proporzionalità è la **costante di Planck**, una costante fondamentale della fisica che vale:

$$h = 6.6260693(11) \cdot 10^{-34}\text{J s}$$

Si definisce *"h tagliato"*

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0551 \cdot 10^{-34}\text{J s}$$

Esercizi

6.1 **

Quantità di moto relativistica

Sappiamo che ogni proprietà di simmetria dello spazio implica l'esistenza di una grandezza fisica conservata. In particolare l'omogeneità dello spazio (invarianza per traslazioni), implica la conservazione della quantità di moto per sistemi isolati. Questo vale in Meccanica Classica (MC) e deve valere anche in Relatività.
Supponiamo di non conoscere l'espressione per la quantità di moto relativistica e di volerla ricavare in modo che sia compatibile con le TL e che, per un sistema isolato, sia garantita la sua conservazione in tutti i SR. Nel limite non relativistico (NR), ovvero per piccole velocità, dovrà ridursi all'espressione classica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Prima di tutto verifichiamo se l'espressione classica può andare bene.
Consideriamo una collisione tra due particelle uguali di massa m. Siano le quantità di moto dello stato iniziale, in un SRI K, $\mathbf{p}_A = m\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{p}_B = m\mathbf{u}_B$. Siano le corrispondenti quantità di moto dello stato finale $\mathbf{q}_A = m\mathbf{w}_A$ e $\mathbf{q}_B = m\mathbf{w}_B$ e supponiamo che valga, in K, la conservazione della quantità di moto totale:

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B \qquad \text{ovvero} \qquad m\mathbf{u}_A + m\mathbf{u}_B = m\mathbf{w}_A + m\mathbf{w}_B\,.$$

(a) Dimostrare che nel SR K' in moto, rispetto a K, con velocità v in direzione $+x$ si ha, in generale, $m\mathbf{u}'_A + m\mathbf{u}'_B \neq m\mathbf{w}'_A + m\mathbf{w}'_B$ ossia la quantità di moto definita come nella MC non è compatibile con le TL.

Cerchiamo allora quale debba essere la nuova espressione per la quantità di moto per un corpo puntiforme che si muove, in un SRI K, con velocità $\mathbf{u}$. Deve essere un tri-vettore, dato che lo è in MC (caso a cui vogliamo ricondurci nel limite NR) e non può dipendere dalle coordinate del corpo, per l'omogeneità dello spazio. L'unico vettore disponibile è perciò $\mathbf{u}$ stesso e non resta che assumere che $\mathbf{p}$ sia proporzionale ad $\mathbf{u}$. La costante di proporzionalità dovrà allora essere una quantità scalare, per non rovinare il carattere vettoriale di $\mathbf{p}$; può solo essere una funzione (scalare) del modulo di $\mathbf{u}$. Scriviamo dunque :

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}(u)\mathbf{u}\,. \tag{6.10}$$

(b) Quali proprietà deve avere la funzione $\mathcal{M}(u)$?

(c) Si consideri l'urto *elastico* tra due particelle identiche di massa m. In MC in tale situazione si conservano sia la quantità di moto totale che l'energia *cinetica* totale. Assumiamo che l'energia cinetica relativistica sia una funzione $\mathcal{K}(u)$ con le stesse proprietà di $\mathcal{M}(u)$ (in questo esercizio non occorre conoscere l'espressione esplicita di $\mathcal{K}$, questa sarà l'argomento di un prossimo esercizio).
Imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica totali nel SR del laboratorio, in cui una delle particelle è ferma, e nel SR del centro di massa, dedurre la funzione $\mathcal{M}(u)$ e quindi l'espressione relativistica della quantità di moto.

6.2 **

Energia relativistica

Supponiamo di non conoscere l'espressione relativistica dell'energia per una particella di massa m in moto con velocità $\mathbf{u}$, ma sappiamo che la sua quantità di moto si esprime come $\mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{u}$, per averla ricavata nell'esercizio 6.1.
L'energia deve dipendere dal modulo della velocità della particella, perché è una grandezza scalare. Inoltre deve dipendere dalla massa della particella in modo lineare, poiché è una grandezza estensiva, in altre parole se una particella ha una massa doppia di un'altra particella, a parità di velocità la prima particella deve avere un'energia doppia della seconda. Supponiamo perciò che l'energia abbia una forma del tipo

$$\mathcal{E}(m, u) = m\, g(u)\,, \tag{6.11}$$

dove $g(u)$ è una funzione della velocità che vogliamo determinare.

(a) Che proprietà deve avere la funzione $g(u)$?

Consideriamo un urto anelastico tra una particella A di massa m, in moto nel SR del laboratorio K con velocità $\mathbf{u}_A$, ed una particella B, anch'essa di massa m ma inizialmente ferma. Dopo l'urto si forma un'unica particella finale C di massa M, che si muove con velocità $\mathbf{v}$.

(b) Scrivere le condizioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia totali nel SR K e nel SR del centro di massa K'.

(c) Ricavare la funzione $g(u)$ imponendo che l'energia si conservi in entrambi i SR, ed abbia il giusto limite non relativistico.

6.3

La velocità limite

Nel 1962 W. Bertozzi effettuò un esperimento di misura della velocità di elettroni accelerati a velocità relativistiche tramite l'applicazione di una differenza di potenziale ΔV, ottenuta con un generatore di Van der Graaf a cui faceva seguito un acceleratore lineare (linac). L'energia cinetica era facilmente ricavabile dalla differenza di potenziale ΔV applicata:

$$\mathcal{K} = e\,\Delta V$$

(e è la carica dell'elettrone).
La velocità si ricavava misurando il tempo di volo della particella su una distanza $L = 8.4$ m. I risultati dell'esperimento sono riportati in tabella.

En. cinetica	$\mathcal{K}$, MeV	0.5	1.0	1.5	4.5	15
tempo di volo	t_v, 10^{-8} s	3.23	3.08	2.92	2.84	2.80

(a) Calcolare la velocità degli elettroni in due modi:

1. dal tempo di volo:
$$v_{tv} = \frac{L}{t_v}$$
2. dalla relazione classica $\mathcal{K} = \frac{1}{2}mv^2$ da cui:
$$v_{cl} = \sqrt{\frac{2\mathcal{K}}{m}}$$

Le velocità calcolate in questi due modi sono in accordo tra loro?

(b) Calcolare la velocità degli elettroni usando l'espressione relativistica per l'energia cinetica. Confrontare questa velocità con quella stimata dal tempo di volo.

[Film: *The Ultimate Speed*, W. Bertozzi, Education Development Center, Newton, Mass. 1962.
W. Bertozzi, *Am.J.Phys.*,**32**, 551-555 (1964)].

6.4

Due particelle di massa m ed energie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ si muovono lungo l'asse x in direzioni opposte.

(a) Calcolare la velocità del centro di massa (cm) in funzione di $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$.

(b) Calcolare le energie $\mathcal{E}_1'$ ed $\mathcal{E}_2'$ nel SR del cm in funzione di $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$.

(c) Ripetere il calcolo nel caso di fotoni ($m = 0$).

6.5

Due particelle A e B di masse, rispettivamente $m_A = m$ ed $m_B = 3m$ sono in moto in un SR K con velocità che formano un angolo $\theta = \mathrm{acos}\frac{1}{\sqrt{6}}$ tra loro. Entrambe hanno la stessa energia: $E_A = E_B = 5mc^2$. Calcolare il modulo della loro velocità relativa.

6.6

Negli esperimenti di fisica delle particelle è molto comodo usare la variabile rapidità per caratterizzare la cinematica dell'interazione.

(a) Una particella dello stato iniziale ha un'unica componente non nulla della quantità di moto in direzione z (convenzionalmente scelto come direzione del fascio). La rapidità è definita come $Y = \tanh(v/c)$, essendo v la velocità della particella. Esprimere il quadrimpulso in termini di Y e della massa m.

(b) Una particella dello stato finale ha, in generale, una componente della quantità di moto nella direzione del fascio iniziale p_z (momento longitudinale) e una componente nel piano xy, chiamata per brevità "momento trasverso" $\mathbf{p}_\perp$. Se v_z è la velocità in direzione z, si usa definire la rapidità come $Y = \tanh(v_z/c)$. Si definisce "*massa trasversa*" la seguente espressione, dipendente dalla massa a riposo e dal momento trasverso:
$$m_T = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_\perp/c)^2}\,.$$
Esprimere il quadrimpulso della particella in termini di m_T, di $\mathbf{p}_\perp$ e di Y.

6.7

All'*Hadron–Electron Ring Accelerator* (HERA) di Amburgo si sono svolti esperimenti di collisioni tra elettroni (o positroni) e protoni. Nel SR del laboratorio ogni elettrone (o positrone) veniva accelerato fino a $p_e = 27.5$ GeV/c, mentre il protone veniva accelerato fino a $p_p = 920$ GeV/c.

(a) Calcolare l'energia totale per ogni collisione $e - p$ nel SR del centro di massa.

(b) Calcolare la velocità del SR del centro di massa rispetto al SR del laboratorio.

(c) Calcolare l'energia dell'elettrone nel SR solidale con il protone.

6.8

Consideriamo ancora la cinematica degli esperimenti di collisioni elettrone-protone svolti all'HERA.

(a) Calcolare la rapidità, nel SR del laboratorio, di un protone accelerato a $p_p = 920$ GeV/c in direzione $+z$, e di un elettrone accelerato a $p_e = 27.5$ GeV/c in direzione $-z$.

(b) Calcolare l'energia totale nel SR del centro di massa tramite le rapidità.

(c) Calcolare il tri-impulso di ogni particella nel SR del centro di massa.

(d) Calcolare la velocità relativa tra elettrone e protone.

Capitolo 7

Effetto Doppler

Effetto Doppler
Definizione: **Red-shift**

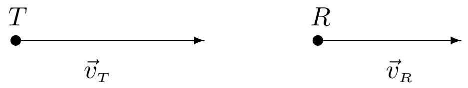
$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{emessa}}{\lambda_{emessa}} = \frac{\nu_{emessa} - \nu_{osservata}}{\nu_{osservata}} \tag{7.1}$$

Esercizi

7.1

Dimostrazione alternativa dell'Eff. Doppler Longitudinale
Consideriamo, in un SR inerziale K un trasmettitore T di segnali luminosi ed un ricevitore, entrambi in moto lungo l'asse x con leggi orarie, rispettivamente:

$x_T(t) = v_T t$ e $x_R(T) = v_R t + d_0$



T emette segnali luminosi ad intervalli regolari Δt (misurati nel SR K).
Il ricevitore R riceve i segnali ad intervalli regolari $\Delta t'$ (misurati nel proprio SR).
Ricavare la relazione tra Δt e $\Delta t'$.

7.2

Secondo la Legge di Hubble, la velocità di allontanamento di una galassia è proporzionale alla sua distanza dalla nostra galassia: $v = Hd$, dove H è un parametro costante (*costante di Hubble*).
Se una galassia ha un valore di red-shift pari a 0.1, stimare la sua velocità di allontanamento e la sua distanza.

7.3

Una sorgente, a riposo nell'origine di un SRI K, emette fotoni con $\lambda_0 = 600$ nm (luce verde).

(a) A che velocità v deve muoversi un osservatore O per vedere luce rossa ($\lambda = 700$ nm)? In che direzione?

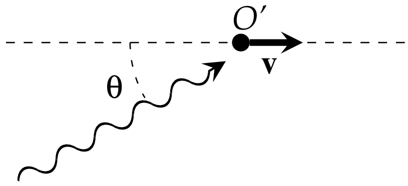
(b) A che velocità v deve muoversi un osservatore O per vedere luce viola ($\lambda = 400$ nm)? In che direzione?

7.4

Un'astronave viaggia, con velocità v costante allontanandosi dalla Terra. Dalla Terra viene inviato, verso l'astronave, un segnale luminoso che viene ricevuto e, istantaneamente, reinviato verso Terra da due dispositivi situati, rispettivamente, nella prua e nella poppa dell'astronave, a distanza $L_0 = 100$ m tra loro (misurata nel SR dell'astronave).
I segnali riflessi vengono ricevuti a Terra 100 secondi dopo l'invio, con un ritardo di $\delta t = 1\,\mu$s tra loro.
A che distanza dalla Terra si trova l'astronave, e a che velocità sta viaggiando?

7.5

Una sorgente, in quiete nel SR K emette un segnale luminoso di frequenza ν che raggiunge con angolo θ un osservatore O' in moto con velocità costante $v = \beta c$.



(a) Ricavare la relazione tra la frequenza ν della sorgente e la frequenza ν' ricevuta da O'.

(b) Ricavare l'angolo θ' (direzione del segnale nel SR di O') in funzione di θ e β. Stabilire quando si ha $\theta > \theta'$ e quando $\theta < \theta'$.

(c) Dimostrare che tra gli angoli θ e θ' sussiste la relazione

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}$$

7.6

Un ateroide si sta dirigendo verso la Terra con velocità incognita. Da Terra vengono inviati segnali elettromagnetici ad intervalli di tempo $\Delta t_1 = 1$s che vengono riflessi dalla superficie dell'asteroide e tornano a Terra ad intervalli $\Delta t_2 = 0.98$ s. Qual è la velocità dell'asteroide?

7.7

La *serie di Balmer*, in fisica atomica, è una sequenza di lunghezze d'onda corrispondenti alle righe spettrali dello spettro dell'atomo di idrogeno, secondo la formula

$$\lambda_m = \frac{Bm^2}{m^2-4}$$

dove $B = 364.6$ nm è una costante, ed $m = 3, 4, 5, \ldots$
La serie di Balmer è molto utilizzata in astronomia, a causa dell'abbondanza dell'idrogeno nell'universo, per stimare la velocità radiale di oggetti astronomici.

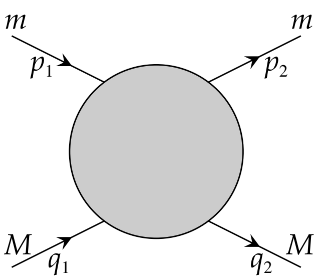
Se una stella presenta un red-shift medio delle prime righe di Balmer pari a $z = -0.000334$, stimare la sua velocità radiale.

Capitolo 8

Collisioni e Decadimenti

Esercizi

8.1



Si consideri un processo di collisione elastica tra una particella di massa a riposo m ed una particella di massa a riposo M. Siano p_1^μ e p_2^μ i quadrimpulsi, iniziale e finale, della particella di massa m e q_1^μ e q_2^μ le analoghe quantità per la particella di massa M. Questa reazione viene rappresentata, simbolicamente, come mostra la figura.
Vale la relazione (conservazione del quadrimpulso):

$$p_1^\mu + q_1^\mu = p_2^\mu + q_2^\mu \; .$$

(a) Dimostrare che valgono le identità:

$$p_1^\mu\, q_{1\mu} = p_2^\mu\, q_{2\mu} \qquad\qquad p_1^\mu\, q_{2\mu} = p_2^\mu\, q_{1\mu}$$

(b) Calcolare il valore dell'espressione: $\quad q_1^\mu\, q_{2\mu} - p_1^\mu\, p_{2\mu}$

(c) Definiti i quadrivettori

$$A^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu \qquad \text{e} \qquad B^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu \; ,$$

dimostrare che sono ortogonali tra loro.

(d) Dimostrare che A^μ è di tipo tempo. Stabilire se B^μ è di tipo tempo o spazio.

8.2

Una particella A di massa a riposo m si muove con velocità $\vec{u}_A = \left(\frac{3}{5}c, 0, 0\right)$ in un SR K e urta in modo inelastico una seconda particella B, di massa a riposo $\frac{7}{4}m$, ferma nel SR K, formando una nuova particella C. Calcolare, in funzione di m, la massa, la velocità ed il quadrimpulso della particella finale C.

8.3

Una particella di massa M è a riposo nel SR K. Essa decade in 3 particelle uguali di massa (a riposo) $m = M/5$.

(a) se le particelle finali hanno tutte la stessa velocità v (in modulo), quanto vale v?

(b) se una delle particelle finali è ferma e le altre due hanno la stessa velocità w (in modulo), quanto vale w?

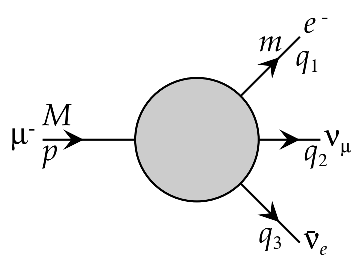
8.4

Nel SR inerziale K un pacchetto di muoni μ^- si muove con velocità $v = 0.995\,c$ nella direzione positiva dell'asse x. Nel tempo di decadimento $t_0 = 2.20 \cdot 10^{-5}$ s il numero di muoni diminuisce di un fattore e.

(a) Quanto vale il tempo di decadimento τ_0 dei muoni nel SR di riposo dei muoni stessi?

Denotiamo con M la massa del muone e con m quella dell'elettrone, mentre il neutrino muonico ν_μ e l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$ sono praticamente a massa nulla.

Consideriamo ora un singolo decadimento e ci poniamo nel SR di riposo del muone, scegliendo le direzioni degli assi spaziali coincidenti con quelli del SR K. Usiamo le notazioni indicate in figura per i quadrimpulsi.



Il decadimento dei muoni avviene tramite il processo

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \,.$$

Supponiamo che le componenti spaziali degli impulsi dell'elettrone e del neutrino muonico abbiano la seguente forma:

$$\mathbf{q}_1 = q(0,1,0)\,, \qquad \mathbf{q}_2 = q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

dove $q = |\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2|$.

(b) Qual è il tri-impulso $\mathbf{q}_3$ dell'antineutrino elettronico?

(c) Quanto valgono, in funzione di q, le energie $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$ delle tre particelle finali?

(d) Calcolare il valore di q.

8.5 *

Una particella A di massa m, in moto nel Sistema di Riferimento (SR) del laboratorio con velocità v_A, urta una particella B, di massa αm ($\alpha > 0$), a riposo.

Calcolare, in funzione di v_A e α:

(a) la velocità v^* del SR del centro di massa (cm) relativa al laboratorio;

(b) le energie, velocità e quantità di moto delle due particelle iniziali nel SR del cm;

La collisione provoca la creazione di N particelle di tipo C e massa a riposo ρm, ($\rho > 0$) secondo la reazione $A + B \to A + B + NC$.

(c) Qual è il numero massimo particelle C che si possono formare?

(d) Se $\alpha = 1$ e $\rho = 4$, è possibile la formazione di 2 particelle C nello stato finale?

8.6

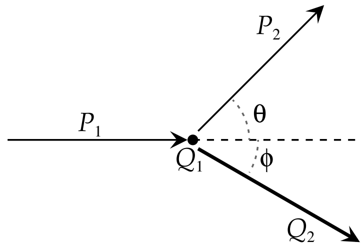
Consideriamo un processo di collisione elastica tra due particelle A e B. Inizialmente la particella B (di massa a riposo M) è ferma nel SR del laboratorio, e la particella A si muove lungo l'asse x. Dopo l'urto entrambe le particelle si muovono nel piano xy.
Usare le notazioni indicate in figura:

Quadrimpulso iniziale di A: $P_1 = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, p_1, 0, 0\right)$

Quadrimpulso iniziale di B: $Q_1 = (Mc, 0, 0, 0)$

Quadrimpulso finale di A: $P_2 = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c}, p_2 \cos\theta, p_2 \sin\theta, 0\right)$

Quadrimpulso finale di B: $Q_2 = \left(\frac{E_2}{c}, q_2 \cos\phi, -q_2 \sin\phi, 0\right)$



Vale la conservazione del quadrimpulso:

$$P_1^\mu + Q_1^\mu = P_2^\mu + Q_2^\mu$$

che equivale a

$$Q_2^\mu = P_1^\mu + Q_1^\mu - P_2^\mu$$

(a) Se la particella A ha massa a riposo m dimostrare, calcolando la norma di Q_2:

$$M(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - p_1 p_2 \cos\theta - m^2c^2$$

(b) Supponendo ora che la particella A sia un fotone ($m = 0$), ricavare dall'equazione precedente la formula dell'*Effetto Compton*:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{Mc}(1 - \cos\theta)\,.$$

8.7

Una particella di massa M, a riposo nel Sistema di Riferimento (SR) K, decade in due particelle identiche di massa $m = M/3$.

(a) Con quale impulso e con quale velocità si allontanano le due particelle prodotte?

(b) Qual è la loro energia cinetica nel SR K?

(c) Qual è la loro velocità relativa?

8.8

Due particelle, osservate in un Sistema di Riferimento inerziale K, si muovono lungo l'asse x con velocità $u_1 = -\frac{3}{5}c$ e $u_2 = \frac{4}{5}c$. Le due particelle hanno masse a riposo, rispettivamente, $m_1 = m$ ed $m_2 = \frac{3}{4}m$ e sono i prodotti di decadimento di una particella di massa a riposo M. Determinare il rapporto M/m e la velocità della particella di massa M in K.

8.9

Due particelle uguali, A e B, di massa a riposo m, si muovono in un sistema di riferimento inerziale K con (tri-)velocità, rispettivamente

$$\vec{v}_A = \left(\frac{3}{4}c\,,\,0\,,\,0\right) \qquad\qquad \vec{v}_B = \left(\frac{c}{3}\,,\,\frac{c}{3}\,,\,0\right)\ .$$

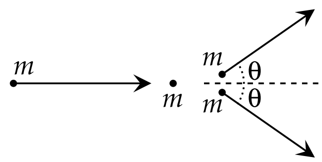
(a) Calcolare la velocità di B (componenti e modulo) nel sistema di riferimento solidale con A.

(b) Calcolare l'energia totale e la quantità di moto totale nel sistema di riferimento K.

(c) Calcolare l'energia ed il modulo della velocità di ognuna delle due particelle nel sistema di riferimento del centro di massa.

8.10

Una particella di massa a riposo m ed rapidità Y urta una particella identica ferma. La collisione è elastica e le due particelle emergono in direzioni simmetriche, ad angolo θ, rispetto alla direzione della particella incidente. Calcolare, in funzione di Y ed m, l'angolo θ e le energie ed impulsi delle particelle finali.



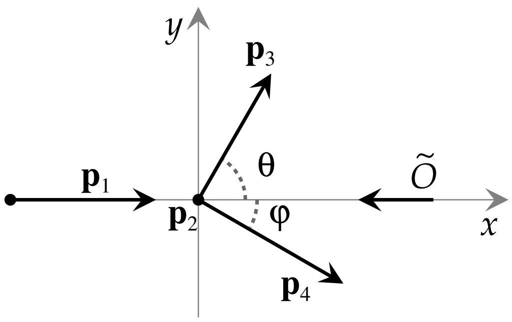
8.11

Un fotone compie uno scattering Compton su un elettrone. Nel S.R. in cui l'elettrone è riposo, denotiamo con $p_1 = (\mathcal{E}_1/c, \vec{p}_1)$ il quadrimpulso del fotone incidente, con $p_2 = (\mathcal{E}_2/c, \vec{p}_2 = \vec{0})$ quello dell'elettrone a riposo, con $p_3 = (\mathcal{E}_3/c, \vec{p}_3)$ quello del fotone uscente ed infine con $p_4 = (\mathcal{E}_4/c, \vec{p}_4)$ quello dell'elettrone uscente.

I tri-impulsi sono disposti come in figura, con $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/6$.

(a) Esprimere $\mathcal{E}_1$, $|\vec{p}_1|$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\vec{p}_3$, $\mathcal{E}_4$ e $|\vec{p}_4|$ in termini della massa m dell'elettrone.

(b) Ricordando la relazione $p = \hbar k$ tra il quadrimpulso p di un fotone e il suo quadrivettore numero d'onda k, calcolare la lunghezza d'onda λ_1 del fotone entrante con quadrimpulso p_1 e la lungheza d'onda λ_3 del fotone uscente con quadrimpulso p_3.



Un'osservatore $\widetilde{O}$, che mantiene l'orientazione degli assi spaziali come in figura, si muove verso sinistra lungo l'asse x con velocità relativa all'elettrone inizialmente fermo corrispondente ad un valore $\beta = 4/5$.

(c) Esprimere il quadrimpulso $\widetilde{p}_3$ del fotone uscente nel sistema di riferimento dell'osservatore $\widetilde{O}$. In particolare, quanto valgono l'energia $\widetilde{\mathcal{E}}_3$, e quindi la lunghezza d'onda $\widetilde{\lambda}_3$ del fotone uscente e il suo angolo di uscita $\widetilde{\theta}$ secondo $\widetilde{O}$?

8.12

Una particella A, di massa a riposo m, collide con una particella B, di massa a riposo $2m$, ferma nel SR K. La collisione è totalmente anelastica e si genera una particella finale C di massa M.

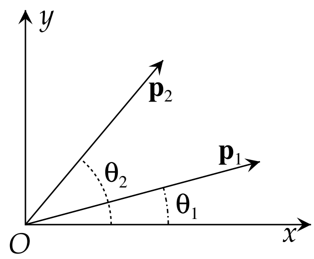
(a) Quale deve essere il valore minimo della velocità di A affinché la massa di C possa essere $M \geq 5m$?

(b) Se $v_A = \frac{4}{5}c$ calcolare il rapporto M/m e la velocità di C nel SR K

8.13

Un pione neutro (π^0), di massa m_π, decade in due fotoni (γ) secondo la reazione:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$



Nel SR del laboratorio il decadimento avviene nell'origine O, i due γ hanno impulsi p_1 e p_2 e sono emessi nel piano xy, rispettivamente, ad angoli θ_1 e θ_2 rispetto all'asse x.

(a) Calcolare la velocità del π^0 iniziale, in modulo e componenti, nel SR del laboratorio, in funzione di $m_\pi, p_1, p_2, \theta_1, \theta_2$.

(b) Dimostrare che vale la relazione

$$m_\pi^2\, c^2 = 2p_1p_2\big(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\big)\,.$$

8.14 *

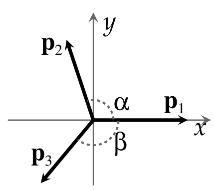
Un protone (massa a riposo $m_p = 938\mathrm{MeV}/c^2$) ha, nel SR del laboratorio, un'energia di 10 GeV (1 GeV = 1000 MeV) e collide con un altro protone a riposo.

(a) Quali sono la velocità e l'energia cinetica del protone incidente nel SR del laboratorio?

(b) Calcolare la velocità e l'energia di ogni protone nel SR del centro di massa della coppia.

(c) La collisione provoca la creazione di N pioni (massa a riposo $m_\pi = 140\mathrm{MeV}/c^2$), secondo la reazione $p + p \to p + p + N\pi$. Qual è il numero massimo di pioni che si possono formare?

8.15



La $\omega(782)$ è una particella instabile, di massa $M = 782$ MeV, che può decadere in 3 fotoni[a]. Ponendosi nel SR solidale con la ω, determinare le energie dei fotoni in funzione degli angoli α, β mostrati in figura e della massa M. Usare, per gli impulsi, le notazioni indicate.

[a] S. Navas *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D110, 030001 (2024)

8.16

Due protoni si muovono, nel SR del laboratorio, l'uno verso l'altro con velocità $3c/5$.

(a) Calcolare l'energia totale e l'energia cinetica totale nel SR del laboratorio.

(b) Calcolare l'energia totale e l'energia cinetica totale nel SR solidale con una delle due particelle.

8.17

Un protone ha, nel SR del laboratorio K un'energia cinetica di 20.0 GeV e urta un altro protone a riposo. Qual è l'energia totale nel centro di massa?

8.18

Al *Large Hadron Collider* (LHC) del CERN, si accelerano due fasci di protoni, uno contro l'altro, a $p = 7$ TeV/c ciascuno. Se invece si volesse realizzare una collisione tra un protone-proiettile ed un protone-bersaglio fermo, a quale energia dovrebbe essere accelerato il proiettile per ottenere la stessa energia del centro di massa?

8.19

Nel SR K una particella di massa m_1 ha velocità v_1. Che velocità deve avere una particella di massa m_2 affinchè il SR K coincida con il SR del centro di massa delle due particelle?

8.20

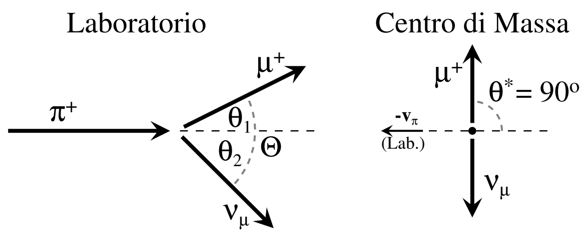
Un pione carico, in moto con energia $\mathcal{E}_\pi$ nel SR del laboratorio, decade in un muone e un neutrino, secondo la reazione

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \,.$$

Siano M ed m le masse, rispettivamente, del pione e del muone (il neutrino ha massa trascurabile). Calcolare i valori minimo e massimo dell'energia del muone nel SR del laboratorio in funzione delle masse e dell'energia $\mathcal{E}_\pi$.

8.21

Un pione π^+, inizialmente in moto nel SR del laboratorio con impulso $\mathbf{p}_\pi$, decade in μ^+ e ν_μ. Nel SR in cui il pione è a riposo, le particelle finali vengono emesse ortogonalmente alla direzione di moto del SR del laboratorio.



Calcolare l'energia del muone nel SR del laboratorio, la sua velocità in entrambi i SR e l'angolo di apertura tra Θ tra le direzioni di emissione delle particelle finali nel laboratorio. Calcolare le suddette quantità in modo analitico e, successivamente, nel caso numerico $p_\pi = |\mathbf{p}_\pi| = 500$ MeV/c. I valori delle masse delle particelle sono dati nella tabella a pagina 2.

8.22

Si consideri il processo di produzione

$$A + B \to B + X$$

in cui la particella proiettile A, di massa m, urta la particella bersaglio B, di massa M, inizialmente a riposo nel SR del laboratorio. Nello stato finale si ha, oltre alla particella B, un sistema X di una o più particelle di massa invariante complessiva m_X.

Calcolare l'energia cinetica di soglia della particella incidente A, nel SR del laboratorio.

Capitolo 9

Accelerazione e Forza

Consideriamo due SR inerziali K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità relativa costante in direzione $+x$.
Un corpo puntiforme si muove, rispetto a K, con velocità (non uniforme) $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e (tri-)accelerazione $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Nel SR K' l'accelerazione $\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$ ha componenti date da (esercizio 9.1):

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x}{\gamma^3(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \\ a'_y &= \frac{a_y}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_y v/c^2}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \\ a'_z &= \frac{a_z}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_z v/c^2}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{9.1}$$

In modo analogo alla quadrivelocità (cap. 5), si definisce la **quadriaccelerazione**:

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{9.2}$$

che, in termini della tri-velocità e della tri-accelerazione si esprime come (esercizio 9.2)

$$A^\mu = \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{a}\,,\ \gamma^2(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}}{c^2} + \mathbf{a}\right)\,. \tag{9.3}$$

In analogia con la Meccanica Classica, la (tri-)forza relativistica si definisce come la derivata temporale della quantità di moto:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m\gamma(u)\mathbf{u}\Big)\,. \tag{9.4}$$

È importante notare che in Relatività, in generale, i tri-vettori accelerazione e forza **non** sono paralleli, come si vede dalle relazioni (esercizi 9.3 e 9.4):

$$\mathbf{f} = m\gamma(u)\mathbf{a} + m\gamma^3(u)\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}}{c^2}\,, \tag{9.5}$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma(u)}\left(\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}}{c^2}\right) . \tag{9.6}$$

La regola di trasformazione della tri-forza tra due SR inerziali K e K' è data da (esercizio 9.10):

$$f'_x = \frac{f_x - \frac{v}{c^2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} \qquad f'_y = \frac{f_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)} \qquad f'_z = \frac{f_z}{\gamma(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)} \tag{9.7}$$

Si definisce la **quadriforza** come la derivata del quadrimomento rispetto al tempo proprio:

$$F^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = mA^\mu . \tag{9.8}$$

Esplicitando le componenti, la quadriforza risulta (esercizio 9.12):

$$F^\mu = \left(\gamma(u)\mathbf{f}\cdot\frac{\mathbf{u}}{c}\,,\,\gamma(u)\mathbf{f}\right) \tag{9.9}$$

Esercizi

9.1

Consideriamo due SR inerziali K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità relativa costante in direzione $+x$.
Un corpo puntiforme si muove, rispetto a K, con velocità (non uniforme) $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e accelerazione $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

(a) Dimostrare che l'accelerazione $\mathbf{a}'$, nel SR K' è data dalle (9.1).

(b) È evidente che in relatività l'accelerazione non è invariante, mentre lo è nelle Trasformazioni di Galileo. Verificare che nel limite non relativistico ($|\mathbf{u}| \ll c$, $v \ll c$) si ottiene il risultato classico: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$.

9.2

Per un corpo puntiforme in moto, in un SRI K, con velocità istantanea $\mathbf{u}$ e accelerazione $\mathbf{a}$, dimostrare che la quadriaccelerazione è data dalla (9.3).

9.3

Ricavare l'espressione della tri-forza relativistica (9.5) calcolando la derivata temporale della quantità di moto relativistica.
Osservare che, in generale, $\mathbf{f}$ ed $\mathbf{a}$ non sono parallele tranne che in alcuni casi particolari, come ad esempio:

- quando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}$ sono paralleli;
- quando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}$ sono perpendicolari.

9.4

Ricavare la (9.6) a partire dalla (9.5).

9.5

Dimostrare che i quadrivettori accelerazione e velocità sono ortogonali.

9.6 **

Utilizzando le regole di trasformazione della (tri)-accelerazione (9.1) dimostrare che la quadriaccelerazione si trasforma come un vettore controvariante.

9.7

Calcolare la norma della quadriaccelerazione in funzione della velocità istantanea e della tri-accelerazione. Esaminare il caso generale ed il caso particolare di moto unidimensionale.

9.8

Per un punto materiale in moto unidimensionale con velocità $\mathbf{u}$ e accelerazione $\mathbf{a}$ in un SR K, si calcoli il modulo della triaccelerazione nel SR in cui il corpo è momentaneamente a riposo.

9.9

Scrivere la regola di trasformazione della tri-accelerazione per un boost in direzione qualsiasi. Verificare che per un boost in direzione $+x$ si ritrovano le relazioni (9.1).

9.10

Ricavare la regola di trasformazione (9.7) della tri-forza relativistica per un boost in direzione $+x$. Generalizzando per un boost in direzione qualsiasi, scrivere la regola di trasformazione per le componenti della forza parallela e perpendicolare alla direzione del boost.

9.11 **

Consideriamo un punto materiale in moto con velocità $\mathbf{u}$ in un SRI K e sottoposto alla forza $\mathbf{f}$. Consideriamo un altro SRI K' in moto rispetto a K con velocità relativa costante in direzione $+x$. Dimostrare:

(a) Nel caso di moto unidimensionale in direzione x, $\mathbf{f} = (f_x, 0, 0)$ e $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$, la forza è invariante.

(b) Nel SR in cui il punto materiale è a riposo, la componente della forza perpendicolare al moto relativo dei due SR ha il valore massimo.

9.12

Partendo dalla definizione di quadriforza, dimostrare la (9.9).

9.13

Dimostrare che per un corpo con massa a riposo costante e con quadrivelocità U^μ, sottoposto alla quadriforza F^μ, si ha

$$F^\mu U_\mu = 0\,.$$

9.14

Nel sistema di riferimento inerziale K il punto materiale P si muove lungo l'asse x con velocità

$$v(t) = c\sqrt{at(2-at)} \ ,$$

dove a è una costante dimensionale e $t \in [0, 1/a)$.

(a) Scrivere le quantità $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ corrispondenti a tale velocità al generico istante $t \in [0, 1/a)$ e disegnarne il grafico. Cosa succede per $t \to 1/a$?

(b) Scrivere la quadrivelocità $u^\mu(t)$ in funzione del tempo coordinato t.

(c) Esprimere l'incremento infinitesimo di tempo proprio $d\tau$ per il punto P in termini dell'incremento di tempo coordinato dt ad un generico istante t nell'intervallo considerato e determinare esplicitamente la funzione $\tau(t)$. Quanto vale $\lim_{t\to 1/a} \tau(t)$? Invertendo tale funzione, esprimere t in funzione di τ.

(d) Scrivere la quadrivelocità u^μ in funzione di τ e calcolare la quadri-accelerazione $a^\mu(\tau)$.

(e) Il sistema di riferimento $\hat{K}$ è in moto relativo uniforme rispetto al sistema K nella direzione dell'asse x con velocità $\hat{v}$. Determinare l'espressione della quadrivelocità $\hat{u}^\mu$ in tale sistema.

9.15

Studiare il moto di una particella carica di massa m, inizialmente in moto con quantità di moto $\mathbf{p} = (p_0, 0, 0)$, in un campo di forza uniforme e costante in direzione y: $\mathbf{f} = (0, f, 0)$. Ricavare la legge oraria del moto e l'equazione della traiettoria. Verificare che nel limite non relativistico la traiettoria si riduce ad una parabola.

9.16

Un'astronave parte da Terra con accelerazione costante (nel proprio SR) α. Calcolare, in funzione del tempo sulla Terra (e trascurando gli effetti della gravità terrestre), l'accelerazione dell'astronave misurata nel SR della Terra, la sua velocità e la distanza percorsa. Discutere i risultati ottenuti confrontandoli con il limite non relativistico.

9.17 **

Un razzo, di massa iniziale M_0 parte dalla Terra al tempo $t = 0$. Il razzo parte con il serbatoio pieno di carburante e lo brucia emettendo gas nella direzione opposta al moto. Nel SR solidale con il razzo, il gas viene emesso con velocità $\tilde{u}$ ed in quantità costante nel tempo. Calcolare la velocità del razzo nel SR della Terra in funzione della sua massa. Trascurare l'effetto della gravità terrestre.

Capitolo 10

Elettromagnetismo

Tensore e.m., trasformazione dei campi e.m., Invarianti e.m.
Eq.Maxwell in forma covariante.

Esercizi

10.1 *

Accelerazione di Fermi
Consideriamo una particella di massa a riposo m e carica q, di energia $\mathcal{E}$ e impulso $\mathbf{p}$, sottoposta al campo elettrico e al campo magnetico. Il suo impulso varia secondo la forza di Lorentz : $\dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

(a) Mostrare che l'energia della particella può aumentare solo grazie al contributo del campo elettrico, in quanto il campo magnetico non compie lavoro.

Nel 1949 Fermi propose un meccanismo per l'accelerazione di particelle in ambito astrofisico basato sull'idea di 'specchi magnetici'. In tale modello, le particelle guadagnano energia quando vengono riflesse da una 'nuvoletta' magnetizzata che si muove.

Consideriamo un sistema di rifermento K in cui una nube magnetica si muove con velocità non relativistica u nella direzione positiva sull'asse x e una particella di velocità $v \gg u$ che si muove nella direzione negativa sull'asse x. L'interazione nube-particella è modellizzata come un urto elastico nel sistema di riferimento K' in cui la nube è ferma (si assume che la nube non rincula). In tale riferimento c'è solo il campo magnetico $\mathbf{B}'$ associato alla nuvoletta.

(b) Cosa succede a energia e impulso della particella in K' durante l'interazione?

(c) Calcolare il guadagno energetico della particella $G = (\mathcal{E}_f - \mathcal{E})/\mathcal{E}$ nel sistema di riferimento K ($\mathcal{E}_f$ = energia finale della particella). Si usi la relazione $\gamma_u^2 + \beta_u^2\gamma_u^2 - 1 = 2\beta_u^2\gamma_u^2$ per le quantità associate alla nube e $v = pc^2/\mathcal{E}$ per la velocità della particella.

(d) Nel limite in cui $u \ll c$ ($\gamma_u \sim 1$), e $v \gg u$, determinare se il guadagno energetico è positivo o negativo a seconda che la particella si muova verso sinistra (scontro frontale) o verso destra. Inoltre, sempre in questo limite, stimare il guadagno nel caso di scontro frontale e con $u = 30$ km/s e $\beta_v \sim 1$.

(e) Nel riferimento della nube il campo magnetico non cambia l'energia della particella, e in generale abbiamo visto che serve un campo elettrico per cambiare l'energia (si veda il punto a). Che cosa determina la variazione di energia ?

10.2

Studiare il moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme e costante in direzione z: $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

10.3

Forza di Lorentz
Studiare il moto di una particella carica soggetta alla forza di Lorentz nei seguenti casi:

(a) particella ferma nell'origine al tempo $t = 0$ e soggetta a un campo elettrico uniforme e costante diretto lungo l'asse x

(b) paricella con velocità a $t = 0$ data da $v_z = v_\parallel$ e $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_\perp$, $x = y = z = 0$ a $t = 0$, e soggetta a un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse z

(c) poniamoci nel caso di una particella NON relativistica, in presenza di un campo elettrico e magnetico ortogonali tra loro, uniformi e costanti. Mostrare che la particella ha una velocità di drift

$$\mathbf{v_d} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

ortogonale sia a $\mathbf{E}$ che $\mathbf{B}$.

10.4

Ricavare le leggi di trasformazione per il campo elettrico $\mathbf{E}$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}$ per una TL con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Generalizzare per un boost in direzione arbitraria.

10.5

Verificare esplicitamente l'invarianza di $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ e di $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ per TL.

10.6

Consideriamo un filo infinito, uniformemente carico con densità lineare λ, stazionario nel SR K.

(a) Calcolare i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ generati da tale distribuzione di carica nel SR K.

(b) Calcolare i campi elettrico $\mathbf{E}'$ e magnetico $\mathbf{B}'$ osservati in un SR K' in moto, rispetto a K con velocità $\mathbf{v}$ parallela al filo carico.

10.7

In un SR inerziale K esiste un campo e.m., uniforme e costante, della seguente forma:

$$\vec{E} = E_0 \mathbf{\hat{u}_x} \qquad \vec{B} = b_1 \mathbf{\hat{u}_y} + b_2 \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{z}$$

inoltre tra i moduli vale la seguente relazione: $|\vec{B}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \dfrac{E_0}{2c}$.

`(a)` È possibile trovare un SR inerziale in cui i campi trasformati siano paralleli tra loro? In caso affermativo fornire almeno un esempio.

`(b)` È possibile trovare un SR inerziale in cui esista solo il campo magnetico? In caso affermativo, calcolarne il modulo.

`(c)` È possibile trovare un SR inerziale in cui esista solo il campo elettrico? In caso affermativo, calcolarne il modulo.

usare gli invarianti del campo elettromagnetico

Capitolo 2

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 2.1

La componente di $\mathbf{x}$ parallela alla velocità $\boldsymbol{\beta}$ si può scrivere come

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta}\frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} = \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}$$

La componente ortogonale sarà allora:

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$$

Possiamo scrivere la trasformazione delle componenti spaziali di $\mathbf{x}$ in forma compatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{x}'_{\parallel} + \mathbf{x}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta}\,x^0) + \mathbf{x}_{\perp} = \\
&= \gamma\mathbf{x}_{\parallel} - \gamma\boldsymbol{\beta}\,x^0 + \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x} + (\gamma-1)\mathbf{x}_{\parallel} - \gamma\boldsymbol{\beta}\,x^0 = \\
&= \mathbf{x} + (\gamma-1)\frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\,x^0
\end{aligned}$$

Soluzione 2.2

Esaminiamo con attenzione il termine $(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/\beta^2$ nella (2.3). Il prodotto $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}$ equivale a $x\beta_x + y\beta_y + z\beta_z$, e la velocità $\boldsymbol{\beta}$ equivale a $\beta_x\mathbf{u}_x + \beta_y\mathbf{u}_y + \beta_z\mathbf{u}_z$, per cui

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} &= (x\beta_x + y\beta_y + z\beta_z)(\beta_x\mathbf{u}_x + \beta_y\mathbf{u}_y + \beta_z\mathbf{u}_z) = \\
&= (x\beta_x^2 + y\beta_x\beta_y + z\beta_x\beta_z)\mathbf{u}_x + (x\beta_x\beta_y + y\beta_y^2 + z\beta_y\beta_z)\mathbf{u}_y + (x\beta_x\beta_z + y\beta_y\beta_z + z\beta_z^2)\mathbf{u}_z
\end{aligned}$$

La trasformazione della componente temporale è semplicemente

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})$$

Si vede allora che si può scrivere la trasformazione in forma matriciale

$$X' = \Lambda X$$

se la matrice Λ ha la forma

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}) \equiv \Lambda(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_x^2 & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_x\beta_y & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_x\beta_y & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_y^2 & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_x\beta_z & \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_y\beta_z & 1 + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\beta_z^2 \end{pmatrix} \tag{S.2.1}$$

È facile verificare che con $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{u}_x$ si ritrova la matrice di una TL in forma “standard”.

Soluzione 2.3

$$\begin{aligned} \gamma\beta &= \gamma\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \gamma\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ \mathrm{d}\gamma &= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{d}\beta = -\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-3/2}(-2\beta)\mathrm{d}\beta = \gamma^3\beta\mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}(\gamma\beta) &= \beta\mathrm{d}\gamma + \gamma\mathrm{d}\beta = \gamma^3\beta^2\mathrm{d}\beta + \gamma\mathrm{d}\beta = \gamma(\gamma^2\beta^2 + 1)\mathrm{d}\beta = \gamma^3\mathrm{d}\beta \end{aligned}$$

Soluzione 2.4

Separiamo le componenti di $\mathbf{x}$ parallele ed ortogonali alla direzione del boost:

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_\parallel^2 + \mathbf{x}_\perp^2$$

Applichiamo le TL date da (2.2) (pag. 3):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^2 - (ct')^2 &= \mathbf{x}'^2_\parallel + \mathbf{x}'^2_\perp - (ct')^2 = \gamma^2\left(\mathbf{x}_\parallel - \boldsymbol{\beta}\, ct\right)^2 + \mathbf{x}_\perp^2 - \gamma^2\left(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}_\parallel\right)^2 = \\ &= \gamma^2\left(\mathbf{x}_\parallel^2 - 2ct\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}_\parallel + \beta^2(ct)^2\right) + \mathbf{x}_\perp^2 - \gamma^2\left((ct)^2 - 2ct\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}_\parallel + (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}_\parallel)^2\right) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{x}_\parallel$ sono paralleli, quindi $(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}_\parallel)^2 = \beta^2\mathbf{x}_\parallel^2$ e

$$\mathbf{x}'^2 - (ct')^2 = \gamma^2\mathbf{x}_\parallel^2(1 - \beta^2) + \mathbf{x}_\perp^2 - \gamma^2(ct)^2(1 - \beta^2) = \mathbf{x}_\parallel^2 + \mathbf{x}_\perp^2 - (ct)^2 = \mathbf{x}^2 - (ct)^2\,.$$

Soluzione 2.5

(a) Applichiamo le TL in forma “standard” (le coordinate y e z, invariate nella trasformazione, vengono omesse):

$$\begin{aligned} x'_A &= \gamma(v)\,(x_A - vt_A) = \gamma(a - vt_0) \\ t'_A &= \gamma(v)\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) = \gamma\left(t_0 - \frac{v}{c^2}a\right) \\ x'_B &= \gamma(v)\,(x_B - vt_B) = \gamma(2a - vt_0) \\ t'_B &= \gamma(v)\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \gamma\left(t_0 - 2\frac{v}{c^2}a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_C &= \gamma(v)\,(x_C - vt_C) = \gamma(a - 2vt_0) \\ t'_C &= \gamma(v)\left(t_C - \frac{v}{c^2}x_C\right) = \gamma\left(2t_0 - \frac{v}{c^2}a\right) \end{aligned}$$

(b) In K gli eventi A e B sono simultanei ($t_A = t_B$) ma in K' non lo sono ($t'_A \neq t'_B$). In K la distanza spaziale tra di essi è $d = x_B - x_A = a$, mentre in K':

$$d' = x'_B - x'_A = \gamma(2a - vt_0) - \gamma(a - vt_0) = \gamma a > d\,.$$

(c) In K gli eventi A e C avvengono nella stessa posizione ($x_A = x_C$, $y_A = y_C$, $z_A = z_C$) ma in K' le loro coordinate spaziali sono diverse ($x'_A \neq x'_C$). In K l'intervallo temporale tra di essi è $\delta t = t_C - t_A = t_0$, mentre in K':

$$\delta t' = t'_C - t'_A = \gamma\left(2t_0 - \frac{v}{c^2}a\right) - \gamma\left(t_0 - \frac{v}{c^2}a\right) = \gamma t_0 > \delta t\,.$$

Questo esercizio si può risolvere anche utilizzando l'intervallo invariante (vedere capitolo 3).

Soluzione 2.6

(a) Usiamo la regola di trasformazione della componente temporale data in (2.2):

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma(v)\left(t_A - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_A}{c^2}\right) = \gamma(v)\left(t_0 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_A}{c^2}\right) \\ t'_B &= \gamma(v)\left(t_B - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_B}{c^2}\right) = \gamma(v)\left(t_0 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_B}{c^2}\right) \\ t'_A - t'_B &= -\gamma(v)\frac{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)}{c^2} \end{aligned}$$

ed è evidente che $t'_A = t'_B$ solo se la velocità relativa tra i due SR è ortogonale alla separazione spaziale $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ tra i due eventi.

(b) Se $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_x$ allora

$$t'_A - t'_B = -\gamma(v)\frac{v\hat{\mathbf{u}}_x\cdot(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)}{c^2} = -\gamma(v)\frac{v}{c^2}(x_A - x_B)\,.$$

Soluzione 2.7

Per quanto riguarda le coordinate y, z, ortigonali alla direzione del motop relativo tra i due SR, si ha banalmente

$$y = y' \qquad\qquad z = z'\,.$$

Dalle altre due equazioni si ha

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{v}{c^2}x + \frac{t'}{\gamma}$$

per cui per la coordinata x si ottiene

$$x = v\left(\frac{v}{c^2}x + \frac{t'}{\gamma}\right) + \frac{x'}{\gamma}$$

$$x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{x}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma}\left(x'+vt'\right)$$
$$x=\gamma\left(x'+vt'\right)$$

e analogamente per la coordinata temporale

$$t=\frac{v}{c^2}\left(vt+\frac{x'}{\gamma}\right)+\frac{t'}{\gamma}$$
$$t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{t}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma}\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$$
$$t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$$

In conclusione si ha

$$\begin{cases} t=\gamma\left(t'+\dfrac{vx'}{c^2}\right)\\ x=\gamma\left(x'+vt'\right)\\ y=y'\\ z=z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x^0=\gamma\left(x^{0\prime}+\beta x'\right)\\ x=\gamma\left(x'+\beta x^{0\prime}\right)\\ y=y'\\ z=z' \end{cases}$$

La trasformazione da K' a K è formalmente identica alla trasformazione da K a K', con la sostituzione $v\to -v$.
La matrice di Lorentz corrispondente è

$$\Lambda(-\beta\mathbf{u}_x)=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{S.2.2}$$

Soluzione 2.8

Siano x_A e $x_B=x_A+L$ le posizioni spaziali dei due eventi, con $t_A=t_B$, secondo il SRI K. Secondo K', in moto con velocità v rispetto a K,

$$x'_A=\gamma\left(x_A-vt_A\right) \quad t'_A=\gamma\left(t_A-\frac{v}{c^2}x_A\right)$$
$$x'_B=\gamma\left(x_B-vt_B\right) \quad t'_B=\gamma\left(t_B-\frac{v}{c^2}x_B\right)$$

Deve essere $x'_B-x'_A=2L$:

$$x'_B-x'_A=\gamma(x_B-vt_B-x_A+vt_A)=\gamma(x_B-x_A)=\gamma L$$

da cui

$$\gamma=2 \qquad \Longrightarrow \qquad v=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

inoltre

$$\Delta t'=|t'_A-t'_B|=\gamma\left|t_A-\frac{v}{c^2}x_A-t_B+\frac{v}{c^2}x_B\right|=\gamma\frac{v}{c^2}(x_B-x_A)=\gamma\beta\frac{L}{c}=\sqrt{3}\frac{L}{c}\,.$$

Soluzione 2.9

(a) Scegliamo un sistema di assi cartesiani tale che S sia nell'origine, A e B siano lungo l'asse x. Il segnale emesso da S impiega un tempo $\Delta t = d/c$ per raggiungere i due ricevitori. Quindi possiamo scrivere le coordinate dei due eventi nel SR K come:

- evento A: $t_A = d/c, \quad x_A = -d, \quad y_A = z_A = 0$
- evento B: $t_B = d/c, \quad x_B = d, \quad y_B = z_B = 0$

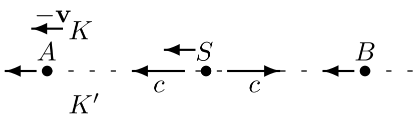
(b) Calcoliamo le coordinate dei due eventi nel SR K' usando le TL ($\beta = v/c$,$\gamma = \gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$). Per l'evento A:

$$\begin{cases} t'_A = \gamma\left(t_A - \dfrac{v}{c^2}x_A\right) = \gamma\left(\dfrac{d}{c} - \dfrac{v}{c}\dfrac{(-d)}{c}\right) = \gamma\dfrac{d}{c}(1+\beta) = \dfrac{d}{c}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \\ x'_A = \gamma\left(x_A - vt_A\right) = \gamma\left(-d - v\dfrac{d}{c}\right) = -\gamma d(1+\beta) = -d\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \\ y'_A = y_A = 0 \\ z'_A = z_A = 0 \end{cases}$$

Analogamente per l'evento B:

$$\begin{cases} t'_B = \gamma\left(t_B - \dfrac{v}{c^2}x_B\right) = \gamma\left(\dfrac{d}{c} - \dfrac{v}{c}\dfrac{d}{c}\right) = \gamma\dfrac{d}{c}(1-\beta) = \dfrac{d}{c}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \\ x'_B = \gamma\left(x_B - vt_B\right) = \gamma\left(d - v\dfrac{d}{c}\right) = \gamma d(1-\beta) = d\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \\ y'_B = y_B = 0 \\ z'_B = z_B = 0 \end{cases}$$

Come è evidente dai risultati ottenuti, i due eventi A e B, simultanei nel SR K, avvengono *a tempi diversi* nel SR K'. E precisamente B accade *prima* di A, poiché $t'_B < t'_A$.



Questo perché nel SR K A e B si muovono: B va incontro al segnale emesso da S, mentre A si allontana.
È importante sottolineare che *in entrambi i SR* i segnali luminosi viaggiano con velocità c.

Soluzione 2.10

(a) A è fermo in K. Il segnale luminoso lo raggiunge nella posizione $d_A = L$ al tempo $t_A = L/c$. B invece si muove con velocità v, quindi il segnale luminoso lo raggiunge al tempo t_B tale che

$$ct_B = L + vt_B \qquad \text{ossia} \qquad \mathrm{t}_B = \frac{L}{c-v},$$

e in questo istante B si trova in

$$d_B = L + vt_B = L\frac{c}{c-v} = \frac{L}{1-\beta}.$$

(b) Uso le TL:

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}d_A\right) = \gamma\frac{L}{c}(1-\beta) = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$d'_A = \gamma(d_A - vt_A) = \gamma(L - \beta L) = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}d_B\right) = \gamma\left(\frac{L}{c-v} - \frac{v}{c^2}\frac{cL}{c-v}\right) = \gamma\frac{L}{c}$$

$$d'_B = \gamma(d_B - vt_B) = \gamma\left(\frac{L}{1-\beta} - \frac{vL}{c-v}\right) = \gamma L\ .$$

È possibile calcolare t' e d' con un ragionamento analogo a quello seguito nel punto a), ma bisogna tener presente che in K': $\overline{O'B} = \gamma L$ e $\overline{O'A} = L/\gamma$ al tempo $t' = 0$, con A in moto in direzione $-x$.
Osservazione: per le distanze d_A e d'_A (come anche per d_B e d'_B) non vale la formula di contrazione delle lunghezze perché le posizioni degli estremi di d'_A non sono misurate simultaneamente in K'.

Soluzione 2.11

(a) L'arrivo del segnale nei punti M, N e P definisce i tre eventi che andremo a considerare. Nel SR K le coordinate sono:

Arrivo del segnale in M:	$x_M = d$	$y_M = 0$	$z_M = 0$	$t_M = d/c$
Arrivo del segnale in N	$x_N = -d$	$y_N = 0$	$z_N = 0$	$t_N = d/c$
Arrivo del segnale in P:	$x_P = 0$	$y_P = \frac{d}{2}$	$z_P = 0$	$t_M = d/(2c)$

Secondo K':

$$\begin{aligned} t'_M &= \gamma\left(t_M - \frac{v}{c^2}x_M\right) = \gamma\left(\frac{d}{c} - \frac{v}{c^2}d\right) = \gamma\frac{d}{c}(1-\beta) \\ t'_N &= \gamma\left(t_N - \frac{v}{c^2}x_N\right) = \gamma\left(\frac{d}{c} + \frac{v}{c^2}d\right) = \gamma\frac{d}{c}(1+\beta) \\ t'_P &= \gamma\left(t_P - \frac{v}{c^2}x_P\right) = \gamma\left(\frac{d}{2c} - 0\right) = \gamma\frac{d}{2c} \end{aligned}$$

(b) Deve essere $t'_M = t'_P$:

$$\gamma\frac{d}{c}(1-\beta) = \gamma\frac{d}{2c} \qquad 1-\beta = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2} \qquad \mathbf{v} = \frac{c}{2}\mathbf{u}_x$$

(c) Deve essere $t'_N = t'_P$:

$$\gamma\frac{d}{c}(1+\beta) = \gamma\frac{d}{2c} \qquad 1+\beta = \frac{1}{2} \qquad \beta = -\frac{1}{2} \qquad \mathbf{v} = -\frac{c}{2}\mathbf{u}_x$$

(d) Osservo che $\beta > 0$ implica $t'_N - t'_M > 0$

$$t'_N - t'_M = \gamma\left[(1+\beta) - (1-\beta)\right] = 2\gamma\beta\frac{d}{c}$$

Deve essere $t'_N - t'_M = \dfrac{4d}{3c}$:

$$2\gamma\beta\frac{d}{c} = \frac{4}{3}\frac{d}{c} \qquad \gamma\beta = \frac{2}{3} \qquad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{4}{9} \qquad \beta^2 = \frac{4}{13} \qquad \mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{13}}c\,\mathbf{u}_x$$

Soluzione 2.12

Sia K il SR della Terra e sia K' il SR del treno. Definiamo 3 eventi e le corrispondenti coordinate nel SR K' (treno):

evento 1:	A emette il segnale	$x'_1 = 0$	$t'_1 = 0$
evento 2:	riflessione del segnale	$x'_2 = L_0$	$t'_2 = L_0/c$
evento 3:	A riceve il segnale	$x'_3 = 0$	$t'_3 = \delta t = 2L_0/c$

Calcoliamo le corrispondenti coordinate nel SR della Terra, con una TL da K' a K:

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'_1) = 0$$
$$t_1 = \gamma\left(t_1 + \frac{v}{c^2}x_1\right) = 0$$
$$x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2) = \gamma\left(L_0 + v\frac{L_0}{c}\right) = \gamma(1+\beta)L_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,L_0$$
$$t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) = \gamma\left(\frac{L_0}{c} + \frac{v}{c^2}L_0\right) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\frac{L_0}{c}$$
$$x_3 = \gamma(x'_3 + vt'_3) = \gamma v\frac{2L_0}{c} = 2\gamma\beta L_0$$
$$t_3 = \gamma\left(t'_3 + \frac{v}{c^2}x'_3\right) = 2\gamma\frac{L_0}{c}$$

Secondo il SR della Terra il tempo complessivo tra emissione e ricezione del segnale è

$$\Delta t = \gamma\,\delta t\,.$$

mentre la distanza percorsa dalla luce è

$$\begin{aligned}\Delta L &= |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| = |2\gamma\beta L_0 - \gamma(1+\beta)L_0| + |\gamma(1+\beta)L_0 - 0| = \\ &= \gamma L_0|\beta - 1| + \gamma L_0|1+\beta| = \gamma L_0(1-\beta) + \gamma L_0(1+\beta) = 2\gamma L_0\end{aligned}$$

Osservazione: per l'intervallo di tempo vale la formula della dilatazione del tempo (vedere capitolo 4) perchè gli eventi 1 e 3 avvengono nella stessa posizione spaziale, quindi δt è il tempo proprio. Invece per la distanza NON vale la formula della contrazione delle lunghezze (in K infatti la lunghezza è dilatata!) perché le posizioni x_1, x_2, x_3 non sono misurate nello stesso istante.

Soluzione 2.13

Definiamo le coordinate di tutti gli orologi nei due SR, tenendo presente che nel SR K

(stazione) la lunghezza del treno è L_0/γ. Invece nel SR K' (treno) il treno ha lunghezza L_0, la stazione ha la lunghezza contratta L_0/γ e si muove con velocità $-\mathbf{v}$.

Nel SR K: $\quad x_A = 0, \quad x_B = L_0, \quad x_T = vt, \quad x_C = vt - L = vt - \dfrac{L_0}{\gamma}$

Nel SR K': $\quad x'_A = -vt', \quad x'_B = -vt' + \dfrac{L_0}{\gamma}, \quad x'_T = 0, \quad x'_C = -L_0$

(a) Secondo il SR K gli orologi B e T si trovano l'uno di fronte all'altro quando $x_B(t_B) = x_T(t_B)$ ossia $L_0 = vt_B$ ed il tempo è $t_B = L_0/v$.

Secondo il SR K' la stessa cosa avviene quando $x'_B(t'_T) = x'_T(t'_T)$ cioè $-vt'_T + \dfrac{L_0}{\gamma} = 0$ al tempo $t'_T = L_0/(\gamma v)$.

Ovviamente il tempo t'_T si può ottenere da t_B con una TL:

$$t'_T = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \gamma\left(\frac{L_0}{v} - \frac{v}{c^2}L_0\right) = \gamma\frac{L_0}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{L_0}{\gamma v} = \frac{t_B}{\gamma}.$$

È utile sottolineare che tra t'_T e t_B vale la formula di dilatazione del tempo: infatti il tempo misurato da T è un tempo proprio e quello misurato da B è dilatato di un fattore γ.

(b) Secondo il SR K gli orologi A e C si trovano l'uno di fronte all'altro quando $x_A(t_A) = x_C(t_A)$ cioè $0 = vt_A - \dfrac{L_0}{\gamma}$ ed il tempo è $t_A = L_0/(\gamma v)$.

Secondo il SR K' la stessa cosa avviene quando $x'_A(t'_C) = x'_C(t'_C)$ cioè $-vt'_C = -L_0$ al tempo $t'_C = L_0/v$.

Soluzione 2.14

Trasformazione da K a K', con $\beta_1 = \dfrac{1}{2}$, $\gamma_1 = \gamma(v_1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_1(x - v_1 t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{c}{2}t\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_1\left(t - \frac{v_1}{c^2}x\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{x}{2c}\right) \end{aligned}$$

Trasformazione da K' a K'', con $\beta_2 = \dfrac{1}{3}$, $\gamma_2 = \gamma(v_2) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_2(x' - v_2 t') = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(x' - \frac{c}{3}t'\right) \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \gamma_2\left(t' - \frac{v_2}{c^2}x'\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t' - \frac{x'}{3c}\right) \end{aligned}$$

Componiamo le due trasformazioni per ottenere la trasformazione da K a K'':

$$x'' = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{c}{2}t\right) - \frac{c}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{x}{2c}\right)\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{c}{2}t - \frac{c}{3}t + \frac{c}{3}\frac{x}{2c}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{7}{6}x-\frac{5}{6}ct\right)=\frac{7}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{7}ct\right)\\
y'' &= y'=y\\
z'' &= z'=z\\
t'' &= \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{x}{2c}\right)-\frac{1}{3c}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{c}{2}t\right)\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{x}{2c}-\frac{x}{3c}+\frac{1}{6}t\right)=\\
&= \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{7}{6}t-\frac{5x}{6c}\right)=\frac{7}{2\sqrt{6}}\left(t-\frac{5x}{7c}\right)
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\gamma\left(\frac{5}{7}c\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{49}}}=\frac{7}{\sqrt{24}}=\frac{7}{2\sqrt{6}}$$

quindi la trasformazione da K a K'' ha la forma di una TL con $V=\frac{5}{7}c$.

Soluzione 2.15

Nel SR K' l'asta AB si muove verticalmente verso il basso. Le posizioni dei suoi estremi, in funzione del tempo t' (misurato nello stesso SR) sono:

$$\begin{cases} x'_A = 0\\ y'_A=-ut'\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} x'_B = L_0\\ y'_B=-ut'\end{cases}$$

Calcoliamo la posizione di A nel SR K, in funzione di t ($\gamma\equiv\gamma(v)$):

$$\begin{aligned}
t &= \gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'_A\right)=\gamma t'\\
x_A &= \gamma\left(x'_A+vt'\right)=\gamma v t'=vt\\
y_A &= y'_A=-ut'=-\frac{u}{\gamma}t
\end{aligned}$$

Analogamente per l'estremo B:

$$\begin{aligned}
t &= \gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'_B\right)=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}L_0\right)\quad\Longrightarrow\quad t'=\frac{t}{\gamma}-\frac{v}{c^2}L_0\\
x_B &= \gamma\left(x'_B+vt'\right)=\gamma\left(L_0+vt'\right)=\gamma L_0+\gamma v\left(\frac{t}{\gamma}-\frac{v}{c^2}L_0\right)=\cdots=vt+\frac{1}{\gamma}L_0\\
y_B &= y'_B=-ut'=-\frac{u}{\gamma}t+\frac{uv}{c^2}L_0
\end{aligned}$$

Osserviamo che, nel SR K, ad ogni istante t si ha $y_A(t)\neq y_B(t)$, cioè gli estremi della sbarra si trovano ad altezze diverse: la sbarra è inclinata rispetto agli assi.
L'angolo θ di inclinazione rispetto all'asse x si trova con la formula di geometria:

$$\tan\theta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{uv}{c^2}L_0-\frac{u}{\gamma}t+\frac{u}{\gamma}t}{vt+\frac{L_0}{\gamma}-vt}=\frac{uv}{c^2}\gamma(v).$$

Soluzione 2.16

Consideriamo la componente del moto in direzione x e applichiamo le TL inverse:

$$x = u_x t \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v)(x' + vt') = u_x\,\gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$x' + vt' = u_x t' + \frac{u_x v}{c^2}x'$$

$$\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)x' = (u_x - v)t'$$

$$x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}t' = u'_x t' \qquad \Longrightarrow \qquad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

Consideriamo ora il moto in direzione y, utilizzando anche i risultati appena trovati:

$$y = u_y t \qquad \Longrightarrow \qquad y' = u_y\,\gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$y = u_y\gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2}u'_x t'\right) = u_y\gamma(v)\,t'\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}\right) = u_y\gamma(v)\,t'\,\frac{1 - v^2/c^2}{1 - u_x v/c^2}$$

e ricordando che $1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{\gamma^2(v)}$

$$y = \frac{u_y}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)}\,t' = u'_y t' \qquad \Longrightarrow \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)(1 - u_x v/c^2)}$$

Per il moto in direzione z i calcoli sono identici a quelli appena visti per la componente y, per cui

$$z = u_z t = \frac{u_z}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)}\,t' = u'_z t' \qquad \Longrightarrow \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)(1 - u_x v/c^2)}$$

I risultati ottenuti sono in accordo con la regola di trasformazione delle velocità ((2.1), pag. 3).

Soluzione 2.17

(a) $\beta_A = \dfrac{3}{5} \qquad \gamma_A = \dfrac{5}{4}$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_A(x - \beta_A ct) = \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}ct\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \\ t' &= \gamma_A\left(t - \frac{\beta_A x}{c}\right) = \frac{5}{4}\left(t - \frac{3}{5c}x\right) \end{aligned}$$

(b) $\beta_B = -\dfrac{4}{5} \qquad \gamma_B = \dfrac{5}{3}$

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_B(x - \beta_B ct) = \frac{5}{3}\left(x + \frac{4}{5}ct\right) \qquad y'' = y \qquad z'' = z \\ t'' &= \gamma_B\left(t - \frac{\beta_B x}{c}\right) = \frac{5}{3}\left(t + \frac{4}{5c}x\right) \end{aligned}$$

Trasformazione inversa:

$$x = \frac{5}{3}\left(x'' - \frac{4}{5}ct''\right) \qquad y = y'' \qquad z = z'' \qquad t = \frac{5}{3}\left(t'' - \frac{4}{5c}x''\right)$$

(c)

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}ct\right) = \frac{5}{4}\left[\frac{5}{3}\left(x'' - \frac{4}{5}ct''\right) - \frac{3}{5}c\frac{5}{3}\left(t'' - \frac{4}{5c}x''\right)\right] \\
&= \frac{5}{4}\left[\frac{37}{15}x'' - \frac{7}{3}ct''\right] = \frac{37}{12}\left(x'' - \frac{35}{37}ct''\right) \\
y' &= y'' \\
z' &= z'' \\
t' &= \frac{5}{4}\left[\frac{5}{3}\left(t'' - \frac{4}{5c}x''\right) - \frac{3}{5c}\frac{5}{3}\left(x'' - \frac{4}{5}ct''\right)\right] = \frac{5}{4}\left[\frac{37}{15}t'' - \frac{7}{3c}x''\right] = \frac{37}{12}\left(t'' - \frac{35}{37c}x''\right)
\end{aligned}$$

(d) $v_{AB} = \frac{35}{37}c$ a cui corrisponde $\gamma_{AB} = \frac{37}{12}$.
La velocità relativa si può anche ottenere con la regola di trasformazione delle velocità (capitolo 5).

Soluzione 2.18

Sia $\boldsymbol{\beta}_1$ la velocità relativa tra i due SRI K e K', e sia $\boldsymbol{\beta}_2$ la velocità relativa tra i due SRI K' e K''. Le due velocità, per ipotesi, sono parallele.
Senza perdita di generalità, definiamo gli assi cartesiani in modo che l'asse x sia parallelo a $\boldsymbol{\beta}_1$ e $\boldsymbol{\beta}_2$. Secondo la notazione standard scriveremo $\gamma_1 = \gamma(\beta_1)$ e $\gamma_2 = \gamma(\beta_2)$ Scriviamo la TL da K a K':

$$\begin{cases} ct' = \gamma_1\,(ct - \beta_1 x) \\ x' = \gamma_1\,(x - \beta_1\, ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{S.2.3}$$

e, analogamente, la TL da K' a K'':

$$\begin{cases} ct'' = \gamma_2\,(ct' - \beta_2 x') \\ x'' = \gamma_2\,(x' - \beta_2\, ct') \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \tag{S.2.4}$$

Vogliamo ricavare le coordinate di K'' in funzione delle coordinate di K, componendo le (S.2.3) e (S.2.4). Per la componente temporale:

$$\begin{aligned}
ct'' &= \gamma_2\,(ct' - \beta_2 x') = \gamma_2\,(\gamma_1\,(ct - \beta_1 x) - \gamma_1\beta_2\,(x - \beta_1\, ct)) = \\
&= \gamma_1\gamma_2\,(ct - \beta_1 x - \beta_2 x + \beta_1\beta_2\, ct) = \\
&= \gamma_1\gamma_2\,(1 + \beta_1\beta_2)\left(ct - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}x\right). \qquad \text{(S.2.5)}
\end{aligned}$$

Consideriamo il fattore nell'ultima equazione:

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) &= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_2^1\beta_2^2}} = \\ &= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1+2\beta_1\beta_2+\beta_2^1\beta_2^2)-(\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2)}} = \\ &= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta 2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}}\end{aligned} \tag{S.2.6}$$

Quindi possiamo definire una velocità β_{12} come

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \tag{S.2.7}$$

e il corrispondente fattore γ è dato dall'eq. (S.2.6), per cui possiamo scrivere la (S.2.5) come

$$ct'' = \gamma(\beta_{12})\,(ct-\beta_{12}x)$$

Per la componente parallela al moto relativo:

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_2\,(x'-\beta_2\,ct') = \gamma_2\,(\gamma_1\,(x-\beta_1\,ct)-\beta_2\,\gamma_1\,(ct-\beta_1 x)) = \\ &= \gamma_1\gamma_2\,(x-(\beta_1+\beta_2)ct+\beta_1\beta_2\,x) = \\ &= \gamma_1\gamma_2\,(1+\beta_1\beta_2)\left(x-\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}ct\right) = \gamma(\beta_{12})\,(x-\beta_{12}\,ct)\ ,\end{aligned}$$

avendo nuovamente utilizzato il risultato (S.2.6) e la definizione (S.2.7).
Per la componente ortogonale al moto relativo:

$$y'' = y' = y \qquad \text{e} \qquad z'' = z' = z\,.$$

In conclusione la trasformazione da K a K" ha proprio la forma di una TL con la velocità relativa $\boldsymbol{\beta}_{12}$ parallela alle due velocità date:

$$\begin{cases} x^{0\prime\prime} = \gamma_{12}\left(x^0-\boldsymbol{\beta}_{12}\cdot\mathbf{x}\right) \\ \mathbf{x}''_\parallel = \gamma_{12}\left(\mathbf{x}_\parallel-\boldsymbol{\beta}_{12}\,x^0\right) \\ \mathbf{x}''_\perp = \mathbf{x}_\perp \end{cases}$$

Utilizzando la forma matriciale potremo scrivere:

$$X' = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_1)X \qquad X'' = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_2)X' \quad\Longrightarrow\quad X'' = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_2)\Lambda(\boldsymbol{\beta}_1)X = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12})X\,,$$

ossia

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}_2) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_1) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12})$$

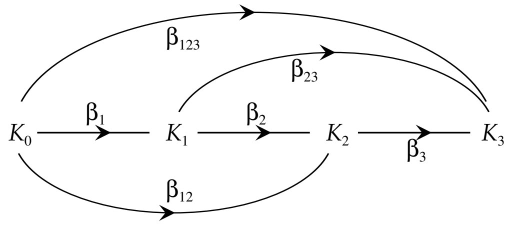
che significa che l'insieme delle matrici di Lorentz per boost collineari è chiuso rispetto alla composizione di trasformazioni.

<u>Osservazione 1:</u> la velocità $\boldsymbol{\beta}_{12}$ si può ottenere anche con la formula di composizione delle velocità (vedere capitolo 5).

<u>Osservazione 2:</u> È importante sottolineare che la composizione di due TL pure **non** collineari **non** è una TL pura ma, in generale, è una TL combinata con una rotazione spaziale, come si vedrà negli esercizi 5.21 e 5.22.

Soluzione 2.19

Consideriamo quattro SRI K_0, K_1, K_2 e K_3 in moto relativo con velocità tutte parallele ad un versore $\mathbf{u}$. Per le velocità relative usiamo le notazioni mostrate in figura.



Abbiamo visto nell'esercizio 2.18 che la composizione di due TL con velocità parallele $\boldsymbol{\beta}_1$ e $\boldsymbol{\beta}_2$ equivale ad una TL con velocità

$$\boldsymbol{\beta}_{12} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2},$$

sempre parallela alle precedenti, ossia

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}_2) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_1) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12}).$$

La composizione di $\Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12})$ con $\Lambda(\boldsymbol{\beta}_3)$ darà ancora una TL con velocità parallela alle precedenti:

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12}) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_3) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12,3})$$

dove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_{12,3} &= \frac{\boldsymbol{\beta}_{12} + \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_{12} \cdot \boldsymbol{\beta}_3} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2} + \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2} \cdot \boldsymbol{\beta}_3} = \\
&= \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + (1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2) \cdot \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 + (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) \cdot \boldsymbol{\beta}_3} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 + (\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3}
\end{aligned}$$

In modo analogo, la composizione di $\Lambda(\boldsymbol{\beta}_2)$ con $\Lambda(\boldsymbol{\beta}_3)$ dà

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}_2) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_3) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{23}) \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{\beta}_{23} = \frac{\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3},$$

che, composto a sua volta con $\Lambda(\boldsymbol{\beta}_1)$ dà:

$$\Lambda(\boldsymbol{\beta}_1) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{23}) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{1,23})$$

dove

$$\boldsymbol{\beta}_{1,23} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_{23}}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_{23}} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3}}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3}{1 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3}} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3)}{1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3}$$

Le velocità $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sono tutte parallele tra loro e parallele al versore $\mathbf{u}$. Possiamo scrivere $\boldsymbol{\beta}_i = \beta_i \mathbf{u}$ (β_i sarà positivo se l'angolo tra $\boldsymbol{\beta}_i$ e $\mathbf{u}$ è 0, mentre sarà negativo se l'angolo è π) perciò

$$(\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{\beta}_3 = (\beta_1 \beta_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\beta_3 \mathbf{u} = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \mathbf{u}.$$

Ma si ha anche

$$\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{\beta}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_3) = \beta_1 \mathbf{u}(\beta_2 \beta_3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \mathbf{u}.$$

Quindi

$$\boldsymbol{\beta}_{12,3} = \boldsymbol{\beta}_{1,23} = \boldsymbol{\beta}_{123} \qquad \text{ossia} \qquad \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{1,23}) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_{12,3}).$$

In conclusione

$$\big(\Lambda(\boldsymbol{\beta}_1) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_2)\big) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_3) = \Lambda(\boldsymbol{\beta}_1) * \big(\Lambda(\boldsymbol{\beta}_2) * \Lambda(\boldsymbol{\beta}_3)\big)$$

ed era ciò che si doveva verificare per dimostrare l'associatività delle TL collineari.

Osservazione: Consideriamo l'insieme delle TL pure con velocità relative parallele ad un versore $\mathbf{u}$ fissato (ma generico). Ovviamente la trasformazione identica si può considerare parte di questo insieme (la sua velocità relativa sarà $\boldsymbol{\beta} = 0\,\mathbf{u}$). Per ogni $\Lambda(\boldsymbol{\beta})$ anche $\Lambda(-\boldsymbol{\beta})$ fa parte di questo insieme. Nell'esercizio 2.18 abbiamo dimostrato che la composizione (moltiplicazione) di due boost paralleli equivale ad un boost nella stessa direzione. Infine, abbiamo appena dimostrato che la composizione di boost collineari è associativa. Quindi possiamo concludere che l'insieme delle TL pure collineari forma un **Gruppo** (sottogruppo del Gruppo di Lorentz).

Soluzione 2.20

Senza perdita di generalità consideriamo due boost in direzione x (la scelta degli assi cartesiani è arbitraria: è sempre possibile definirli in modo che l'asse x coincida con la direzione dei due boost). Abbiamo dimostrato nell'esercizio 2.18 che la composizione di due boost con velocità β_1 e β_2 nella stessa direzione è equivalente ad un boost, parallelo ai precedenti, con velocità

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}.$$

Per definizione, $\beta = \tanh Y$ quindi la relazione precedente diventa:

$$\tanh Y_{12} = \frac{\tanh Y_1 + \tanh Y_2}{1 + \tanh Y_1 \tanh Y_2} = \tanh(Y_1 + Y_2)$$

che implica, essendo la tangente iperbolica una funzione univoca, $Y_{12} = Y_1 + Y_2$.

Soluzione 2.21

Nel caso di boost in direzione y, le (2.2) diventano:

$$\begin{cases} x^{0\prime} = \gamma\left(x^0 - \beta y\right) \\ x' = x \\ y' = \gamma\left(y - \beta x^0\right) \\ z' = z \end{cases}$$

che in forma matriciale si possono scrivere:

$$X' = \Lambda X \qquad \text{con} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente per un boost in direzione z si ha

$$X' = \Lambda X \qquad \text{con} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Soluzione 2.22

(a) Consideriamo due boost in direzione x definiti dalle matrici $\Lambda(\beta_1)$ e $\Lambda(\beta_2)$:

$$\Lambda(\beta_i) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta_i) & -\gamma(\beta_i)\beta_i & 0 & 0 \\ -\gamma(\beta_i)\beta_i & \gamma(\beta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2$$

Dal risultato dell'esercizio 2.18 sappiamo che la composizione $\Lambda(\beta_1) * \Lambda(\beta_2)$ corrisponde ad un boost con velocità $\beta_{12} = (\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)$. Questa espressione per la velocità relativa è simmetrica, quindi anche la composizione $\Lambda(\beta_2) * \Lambda(\beta_1)$ corrisponde ad un boost con la stessa velocità. Quindi

$$\Lambda(\beta_1) * \Lambda(\beta_2) = \Lambda(\beta_2) * \Lambda(\beta_1) = \Lambda(\beta_{12})$$

(b) Consideriamo un boost in direzione x con velocità β_1, ed un boost in direzione y con velocità β_2. Le due matrici di Lorentz corrispondenti sono (scriviamo, per brevità $\gamma_i = \gamma(\beta_i)$, per $i = 1, 2$):

$$\Lambda_x(\beta_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_y(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice corrispondente alla trasformazione $\Lambda_x(\beta_1) * \Lambda_y(\beta_2)$

$$\Lambda_{xy} = \Lambda_x(\beta_1) * \Lambda_y(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\beta_1 & -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & \gamma_1 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quella corrispondente alla trasformazione $\Lambda_y(\beta_2) * \Lambda_x(\beta_1)$:

$$\Lambda_{yx} = \Lambda_y(\beta_2) * \Lambda_x(\beta_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È evidente che

$$\Lambda_{xy} \neq \Lambda_{yx}$$

Soluzione 2.23

Per definizione $\beta = \tanh Y$, allora si ha:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \tanh^2 Y} = \frac{\cosh^2 Y}{\cosh^2 Y - \sinh^2 Y} = \cosh^2 Y$$

quindi

$$\gamma = \cosh Y \qquad \text{e} \qquad \gamma\beta = \cosh Y \tanh Y = \sinh Y.$$

In conclusione

$$\begin{cases} x^{0\prime} = x^0 \cosh Y - x \sinh Y \\ x' = -x^0 \sinh Y + x \cosh Y \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh Y & -\sinh Y & 0 & 0 \\ -\sinh Y & \cosh Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poniamo ora $Y = -i\phi$ e utilizziamo le proprietà delle funzioni iperboliche:

$$\sinh(-i\phi) = -i\frac{\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi}}{2i} = -i \sin\phi \qquad \text{e} \qquad \cosh(-i\phi) = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} + \mathrm{e}^{-i\phi}}{2} = \cos\phi\,,$$

In questo modo la TL si riscrive come (omettiamo le coordinate y e z, invariate)

$$\begin{cases} x^{0\prime} = x^0 \cosh(-i\phi) - x^1 \sinh(-i\phi) = x^0 \cos\phi + ix^1 \sin\phi \\ x^{1\prime} = -x^0 \sinh(-i\phi) + x^1 \cosh(-i\phi) = ix^0 \sin\phi + x^1 \cos\phi \end{cases}$$

e moltiplicando per i la prima delle due equazioni si ottiene (con $x^4 = ix^0$)

$$\begin{cases} x^{4\prime} = x^4 \cos\phi - x^1 \sin\phi \\ x^{1\prime} = x^4 \sinh\phi + x^1 \cosh\phi \end{cases}$$

che ha esattamente la forma di una rotazione di angolo ϕ nel piano (x^4, x^1).

Soluzione 2.24

Senza perdita di generalità consideriamo una TL in direzione x (sfruttiamo la libertà di scelta di assi cartesiani, l'eq. di d'Alembert è invariante per rotazioni spaziali). Le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali sono

$$\begin{cases} ct' = \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad .$$

Si tratta di vedere come si trasforma l'equazione di d'Alembert con queste trasformazioni di coordinate.
Consideriamo le derivate parziali rispetto del primo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial (ct')}{\partial x}\frac{\partial}{\partial (ct')} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\beta\frac{\partial}{\partial (ct')}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial (ct')}{\partial y}\frac{\partial}{\partial (ct')} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial (ct')}{\partial z}\frac{\partial}{\partial (ct')} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial (ct)} = \frac{\partial x'}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial (ct')}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial (ct')} = -\gamma\beta\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial (ct')}$$

Per le derivate parziali del secondo ordine si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\beta\frac{\partial}{\partial (ct')}\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\beta\frac{\partial}{\partial (ct')}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\beta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial (ct')} + \gamma^2\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct')^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} &= \left(-\gamma\beta\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial (ct')}\right)\left(-\gamma\beta\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial (ct')}\right) = \\
&= \gamma^2\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\beta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial (ct')} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct')^2}
\end{aligned}
$$

L'eq. di d'Alembert diventa

$$
\begin{aligned}
\Box\psi &\equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial (ct)^2} = \\
&= \left(\gamma^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\beta \frac{\partial^2\psi}{\partial x' \partial (ct')} + \gamma^2\beta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial (ct')^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} + \\
&\quad + \frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2} - \left(\gamma^2\beta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\beta \frac{\partial^2\psi}{\partial x' \partial (ct')} + \gamma^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial (ct')^2}\right) = \\
&= \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial (ct')^2} \equiv \Box'\psi
\end{aligned}
$$

quindi, in conclusione, $\Box\psi = \Box'\psi = 0$ e l'eq. di d'Alembert è invariante per TL.

Soluzione 2.25

$$
\begin{aligned}
x'_+ &= x' + ct' = \gamma(x - \beta\, ct) + \gamma(ct - \beta\, x) = \gamma(1-\beta)(x + ct) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, x_+ \\
x'_- &= x' - ct' = \gamma(x - \beta\, ct) - \gamma(ct - \beta\, x) = \gamma(1+\beta)(x - ct) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, x_-
\end{aligned}
$$

Per scrivere queste trasformazioni in termini della rapidità, ricordiamo che $\beta = \tanh Y$, quindi

$$
x'_+ = \sqrt{\frac{1-\tanh Y}{1+\tanh Y}}\, x_+ = \sqrt{\frac{\cosh Y - \sinh Y}{\cosh Y + \sinh Y}}\, x_+ = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^Y + \mathrm{e}^{-Y} - \mathrm{e}^Y + \mathrm{e}^{-Y}}{\mathrm{e}^Y + \mathrm{e}^{-Y} + \mathrm{e}^Y - \mathrm{e}^{-Y}}}\, x_+ = \mathrm{e}^{-Y}\, x_+
$$

e analogamente

$$
x'_- = \mathrm{e}^Y\, x_- \,.
$$

È immediato dimostrare che il prodotto $x_+ x_-$ è invariante, infatti:

$$
x'_+ x'_- = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, x_+ \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, x_- = x_+ x_- \,.
$$

Soluzione 2.26

Per definizione $\beta = \tanh Y$. Usiamo la definizione della tangente iperbolica e le sue proprietà:

$$\beta = \tanh Y = \frac{\mathrm{e}^{Y} - \mathrm{e}^{-Y}}{\mathrm{e}^{Y} + \mathrm{e}^{-Y}} = \frac{\mathrm{e}^{2Y} - 1}{\mathrm{e}^{2Y} - 1}\,.$$

Dall'ultima relazione si ricava e^{2Y} in funzione di β:

$$\mathrm{e}^{2Y} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

da cui si ottengono le identità richieste

$$\mathrm{e}^{Y} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{1}{2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Soluzione 2.27

Si tratta di un boost obliquo rispetto agli assi cartesiani di K. Useremo la matrice di Lorentz (S.2.1) (pag. 44) ricavata nell'esercizio 2.2. Calcoliamo i parametri della matrice (tutti i termini con β_z sono nulli):

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{5}}{3}c \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \gamma(v) = \frac{3}{2}$$

$$\gamma\beta_x = \frac{3}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \qquad \gamma\beta_y = \frac{3}{2}\,\frac{2}{3} = 1$$

$$1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} = \frac{11}{10} \qquad 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} = \frac{7}{5} \qquad \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} = \frac{1}{5}$$

quindi la TL dal SR K al SR K' si scrive come:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 11/10 & 1/5 & 0 \\ -1 & 1/5 & 7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le coordinate trasformate dei punti A, B, C e dell'origine O. Dovremo confrontare tali coordinate trasformate **nello stesso istante** nel SR K', che significa che i corrispondenti istanti nel SR K non saranno coincidenti.

L'origine O, in un istante generico t_0, ha coordinate spaziotemporali $O(ct_0, 0, 0, 0)$ nel SR K, mentre nel SR K':

$$\begin{cases} ct_0' = \dfrac{3}{2}ct_0 \qquad \Longrightarrow \qquad ct_0 = \dfrac{2}{3}ct_0' \\ x_0' = -\dfrac{1}{2}ct_0 = -\dfrac{1}{3}ct_0' \\ y_0' = -ct_0 = -\dfrac{2}{3}ct_0' \\ z_0' = z_0 = 0 \end{cases}$$

Il punto A, nell'istante t_A ha coordinate, per il SR K, $A(ct_A, \ell, 0, 0)$, e per K':

$$\begin{cases} ct'_A = \dfrac{3}{2}ct_A - \dfrac{\ell}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad ct_A = \dfrac{2}{3}ct'_A + \dfrac{\ell}{3} \\ x'_A = -\dfrac{1}{2}ct_A + \dfrac{11}{10}\ell = -\dfrac{1}{3}ct'_A + \dfrac{14}{15}\ell \\ y'_A = -ct_A + \dfrac{\ell}{5} = -\dfrac{2}{3}ct'_A - \dfrac{2}{15}\ell \\ z'_A = z_A = 0 \end{cases}$$

Analogamente per i punti $B(ct_B, 0, \ell, 0)$ e $C(ct_C, 0, 0, \ell)$:

$$\begin{cases} ct'_B = \dfrac{3}{2}ct_B - \ell \\ \qquad \Longrightarrow \qquad ct_B = \dfrac{2}{3}ct'_B + \dfrac{2}{3}\ell \\ x'_B = -\dfrac{1}{2}ct_B + \dfrac{\ell}{5} = -\dfrac{1}{3}ct'_B - \dfrac{2}{15}\ell \\ y'_B = -ct_B + \dfrac{7}{5}\ell = -\dfrac{2}{3}ct'_B + \dfrac{11}{15}\ell \\ z'_B = z_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_C = \dfrac{3}{2}ct_C \\ \qquad \Longrightarrow \qquad ct_0 = \dfrac{2}{3}ct'_C \\ x'_C = -\dfrac{1}{2}ct_C = -\dfrac{1}{3}ct'_C \\ y'_C = -ct_C = -\dfrac{2}{3}ct'_C \\ z'_C = z_C = \ell \end{cases}$$

Osserviamo i punti O, A, B, C nello stesso istante nel SR K':

$$t'_0 = t'_A = t'_B = t'_C = 0\,,$$

le loro coordinate sono:

$$O(0,0,0,0) \qquad A\left(0, \frac{14}{15}\ell, -\frac{2}{15}\ell, 0\right) \qquad B\left(0, -\frac{2}{15}\ell, \frac{11}{15}\ell, 0\right) \qquad C(0,0,0,\ell)$$

Osserviamo che il punto C si trova sull'asse z' e il vettore $\vec{OC}$ ha componenti $= (0, 0, \ell)$. Invece A nel SR K' non si trova sull'asse x', e B non si trova sull'asse y'! I vettori $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ diventano:

$$\vec{OA} = \left(\frac{14}{15}\ell, -\frac{2}{15}\ell, 0\right) \qquad \text{e} \qquad \vec{OB} = \left(-\frac{2}{15}\ell, \frac{11}{15}\ell, 0\right)$$

Vediamo che

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -\frac{2}{9} \neq 0 \qquad \vec{OA}\cdot\vec{OC} = 0 \qquad \vec{OB}\cdot\vec{OC} = 0$$

Quindi gli assi x, y del SR K si trasformano, in K', in due rette che non sono ortogonali tra loro. Invece l'asse z si trasforma nell'asse z' (la velocità relativa tra i SR non ha una componente in direzione z).

Capitolo 3

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 3.1

Calcoliamo gli intervalli invarianti tra le tre coppie di eventi:

$$(s_{AB})^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 = 9d^2 - 0 - 4d^2 - 4d^2 = d^2 > 0$$

$$(s_{AC})^2 = 4d^2 - 0 - 4d^2 - 0 = 0$$

$$(s_{BC})^2 = d^2 - 0 - 0 - 4d^2 = -3d^2 < 0$$

`(a)` B e C sono connessi da un intervallo di tipo-spazio: è possibile quindi trovare un SR K' in cui essi siano simultanei. Indicando con apice le coordinate in questo nuovo SR, si ha $t'_B = t'_C$ e quindi:

$$(s_{BC})^2 = -3d^2 = c^2(\Delta t'_{BC})^2 - (L'_{BC})^2 = -(L'_{BC})^2 \qquad \text{ossia} \qquad L'_{BC} = \sqrt{3}d$$

`(b)` A e B sono connessi da un intervallo di tipo-tempo: è possibile quindi trovare un SR K' in cui essi siano spazialmente coincidenti. Procedendo in maniera analoga al punto precedente si trova:

$$(s_{AB})^2 = d^2 = c^2(\Delta t'_{AB})^2 - (L'_{AB})^2 = c^2(\Delta t'_{AB})^2 \qquad \text{ossia} \qquad \Delta t'_{AB} = \frac{d}{c}$$

`(c)` A e C sono connessi da un intervallo di tipo-luce. Non è possibile trovare un SR in cui essi siano simultanei o coincidenti perché bisognerebbe effettuare una TL a velocità c.

`(d)` Una connessione causale è possibile tra gli eventi A e C (ma solo con un segnale che viaggi a velocità c) e tra gli eventi A e B.

`(e)` B e C sono causalmente disconnessi, quindi il loro ordinamento cronologico non è invariante. Esistono sicuramente (infiniti) SR in cui $t'_B > t'_C$. Proviamo, per semplicità, ad effettuare una TL in direzione x con velocità $v{=}\beta c$. La trasformazione tra K ed il nuovo SR K' è data da:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad x' = \gamma(x - vt)$$

quindi

$$t'_C = \gamma\left(t_C - \frac{v}{c^2}x_C\right) = -2\gamma\beta\frac{d}{c} \qquad t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = -\gamma\frac{d}{c}(1 + 2\beta)$$

e la condizione da imporre è $t'_B > t'_C$, cioè

$$-\gamma\frac{d}{c}(1+2\beta) > -2\gamma\beta\frac{d}{c} \qquad \text{ossia} \qquad -2\beta - 1 > -2\beta$$

ma l'ultima disuguaglianza è impossibile. Non si può quindi trovare un SR K' con le caratteristiche volute effettuando una TL in direzione x.
Analogamente si verifica che non va bene neanche una TL in direzione y.
Con una TL in direzione z invece si trova:

$$t'_C = \gamma\left(t_C - \frac{v}{c^2}z_C\right) = 0 \qquad t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}z_B\right) = \gamma\left(-\frac{d}{c} + \frac{v}{c^2}2d\right) = \gamma\frac{d}{c}(2\beta - 1)$$

e quindi si ha $t'_B > t'_C$ se $2\beta - 1 > 0$, cioè per $\beta > \frac{1}{2}$ (ovviamente $\beta < 1$).

Soluzione 3.2

In K' gli eventi A e B sono spazialmente coincidenti: $x'_A = x'_B$. Di conseguenza per gli intervalli di tempo $\Delta t = t_B - t_A$ e $\Delta t' = t'_B - t'_A$ vale la dilatazione del tempo (t' è il tempo proprio): $\Delta t = \gamma(v)\Delta t'$, con $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 5/4$ cioè:

$$t'_B - t'_A = \frac{1}{\gamma}(t_B - t_A) = \frac{4}{5}(t_B - t_A)\ .$$

Utilizziamo l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale:

$$s^2_{AB} = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = c^2(t'_B - t'_A)^2$$

ossia

$$\frac{9}{25}c^2(t_B - t_A)^2 = (x_B - x_A)^2 = a^2$$

da cui, osservando che deve essere $t_B > t_A$, perché A è causa di B:

$$t_B - t_A = \frac{5a}{3c} \qquad \Longrightarrow \qquad t_B = t_A + \frac{5a}{3c} = \frac{8a}{3c}\ .$$

$$s^2_{BC} = c^2(t_C - t_B)^2 - (x_C - x_B)^2 = 0 \qquad (x_C - 2a)^2 = c^2\left(\frac{4a}{c} - \frac{8a}{3c}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

cioè

$$x_C - 2a = \pm\frac{4}{3}a \qquad \Longrightarrow \qquad x_C = 2a \pm \frac{4}{3}a$$

e sono possibili due soluzioni, entrambe accettabili:

$$x_C = \frac{10}{3}a \qquad\qquad x_C = \frac{2}{3}a$$

Soluzione 3.3

Calcoliamo l'intervallo invariante tra i due eventi:

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \frac{3}{4}a^2 > 0$	$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = -\frac{3}{4}a^2 < 0$

L'intervallo tra i due eventi ha il segno del contributo spaziale, quindi è di tipo spazio: questo significa che esiste un SR K' in cui essi sono simultanei. Usiamo le TL:

$$\begin{cases} x'_A = \gamma\ (x_A - vt_A) \\ t'_A = \gamma\ (t_A - \frac{v}{c^2}x_A) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_B = \gamma\ (x_B - vt_B) \\ t'_B = \gamma\ (t_B - \frac{v}{c^2}x_B) \end{cases}$$

Voglio $t'_B = t'_A$, quindi impongo $\quad t_A - \frac{v}{c^2}x_A = t_B - \frac{v}{c^2}x_B \quad$, cioè

$$t_A - t_B = \frac{v}{c^2}(x_A - x_B) \qquad \Longrightarrow \qquad v = -\frac{c}{2}\ ,$$

il SR K' si muove in direzione $-x$ con velocità $c/2$. Il tempo in K' è

$$t'_A = t'_B = \gamma\ (t_A - \frac{v}{c^2}x_A) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{a}{2c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{a}{c}\ .$$

Soluzione 3.4

Sia L la distanza spaziale tra i due eventi. Nel SR in cui i due eventi accadono nello stesso punto si ha $L = 0$ e l'intervallo temporale tra di essi è l'intervallo di tempo proprio: $\Delta t = \Delta\tau$. In un altro SR inerziale la distanza tra i due eventi è L'.

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + L^2 = -(c\Delta t')^2 + (L')^2$	$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - L^2 = (c\Delta t')^2 - (L')^2$

cioè

$$L' = \sqrt{c^2(\Delta t')^2 - c^2(\Delta t)^2} = \sqrt{3}\, c\Delta t$$

Si ha $\Delta t' = \gamma\Delta\tau$ e dal testo del problema: $\Delta t' = 2\Delta t = 2\Delta\tau$ quindi $\gamma = 2$, da cui si ricava la velocità relativa (in modulo) $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluzione 3.5

Sia B^μ un (quadri-)vettore di tipo tempo: $|B^0| > |\vec{B}|$).

<u>Primo metodo</u>:

Per ipotesi si ha $A^\mu B_\mu = A^0 B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ cioè

$$\begin{aligned} |A^0 B_0| &= |A^0|\,|B_0| = |\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}| \qquad \text{disug. di Schwarz} \\ \frac{|A_0|}{|\vec{A}|} &\leq \frac{|\vec{B}|}{|B_0|} < 1 \end{aligned}$$

quindi A^μ è di tipo spazio.
Secondo metodo:
Poiché B^μ è di tipo tempo, con una TL è possibile trovare un SR in cui le sue componenti spaziali sono nulle. Allora

$$A^\mu B_\mu = A'^\mu B'_\mu = A'^{\,0} B'_0 = 0$$

Siccome B'_0 non può essere 0 (altrimenti il vettore B non sarebbe di tipo tempo), deve essere necessariamente $A'^{\,0} = 0$, e allora A^μ è di tipo spazio.
Non è vero il viceversa: se A^μ è ortogonale ad un vettore di tipo spazio, non è necessariamente di tipo tempo. Si consideri infatti il seguente controesempio:

$$A^\mu = (0,1,0,0) \qquad\qquad B^\mu = (0,0,1,0)$$

i due vettori così definiti sono ortogonali e sono entrambi di tipo spazio.

Soluzione 3.6

Se D^μ è di tipo-tempo significa che $|D^0| > |\vec{D}|$.
Supponiamo $D^0 > 0$, allora si ha (per la disuguaglianza di Schwarz, e poiché $|\vec{\beta}| < 1$)

$$D'^0 = \gamma(D^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{D}) \geq \gamma(D^0 - |\vec{\beta}|\,|\vec{D}|) > \gamma(D^0 - |\vec{D}|) > 0$$

Supponiamo invece che sia $D^0 < 0$, allora

$$D'^0 = \gamma(D^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{D}) \leq \gamma(D^0 + |\vec{\beta}|\,|\vec{D}|) < \gamma(D^0 + |\vec{D}|) < 0$$

Osservazione: L'invarianza del segno della componente temporale di un quadrivettore di tipo tempo ha una conseguenza fisica molto importante: **non è possibile invertire l'ordine cronologico di due eventi A e B separati da un intervallo di tipo-tempo:** se, ad esempio, A precede temporalmente B in un certo SR, allora A precederà B in tutti i SR inerziali. In particolare, due eventi legati da una relazione di causa ed effetto non potranno mai essere temporalmente invertiti: in ogni SR inerziale la causa sarà sempre anteriore al suo effetto.

Soluzione 3.7

Si tratta di una condizione necessaria e sufficiente da dimostrare nei due sensi.
• Supponiamo che valga $A^\mu B^\nu = A^\nu B^\mu$. Poiché le componenti dei vettori sono dei numeri possiamo scrivere:

$$\frac{B^\nu}{A^\nu} = \frac{B^\mu}{A^\mu} = \lambda$$

da cui

$$B^\mu = \lambda A^\mu\,.$$

• Supponiamo ora che sia $B^\mu = \lambda A^\mu$, allora

$$A^\mu B^\nu = A^\mu(\lambda A^\nu) = A^\nu(\lambda A^\mu) = A^\nu B^\mu\,.$$

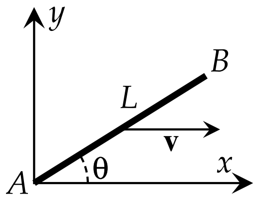
Capitolo 4

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 4.1

Nel SR del laboratorio, in cui la sbarra è in moto:

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{10}, \qquad \cos\theta = \dfrac{4}{5}\,, \quad \sin\theta = \dfrac{3}{5}.$



Occorre che nel SR del laboratorio (dove la sbarra è in movimento) le posizioni delle sue estremità siano misurate nello stesso istante t_0.

Definiamo le coordinate delle estremità A e B nel SR del laboratorio, all'istante t_0:

$$\begin{array}{llll} x_A = 0 & y_A = 0 & z_A = 0 & t_A = t_0 \\ x_B = L\cos\theta & y_B = L\sin\theta & z_B = 0 & t_B = t_0 \end{array}$$

Con una TL otteniamo le posizioni di A e B nel SR solidale con la sbarra:

$$\begin{array}{lll} x'_A = \gamma(x_A - vt_A) = \gamma\,(0 - vt_0) & y'_A = y_A = 0 & z'_A = z_A = 0 \\ x'_B = \gamma(x_B - vt_B) = \gamma\,(L\cos\theta - vt_0) & y'_B = y_B = L\sin\theta & z'_B = z_B = 0 \end{array}$$

Osserviamo che i tempi t'_A e t'_B, calcolati con una TL, sono diversi tra loro ma non ha importanza perché nel SR solidale con la sbarra le sue estremità hanno posizioni fisse, indipendenti dal tempo.

La lunghezza propria della sbarra si ottiene semplicemente con la formula della distanza:

$$\begin{aligned} L_0 &= \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2} = \sqrt{\gamma^2(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \\ &= \sqrt{\gamma^2 L^2\cos^2\theta + L^2\sin^2\theta} = L\sqrt{10\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{13}{5}L = 13\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Dalla formula appena ottenuta appare evidente che la sbarra è contratta in direzione x (parallela al moto) mentre è inalterata nella direzione y. In altre parole, al risultato precedente si può arrivare anche ragionando nel modo seguente: le proiezioni della sbarra nelle direzioni x e y, nel SR del laboratorio, sono

$$L_x = L\cos\theta \qquad\qquad L_y = L\sin\theta$$

e nel SR solidale con la sbarra:

$$L_{0x} = \gamma L_x \qquad\qquad L_{0y} = L_y$$

da cui

$$L_0 = \sqrt{L_{0x}^2 + L_{0y}^2} = \sqrt{\gamma^2 L_x^2 + L_y^2} = L\sqrt{\gamma^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta} = \ldots$$

Soluzione 4.2

Sia L_0 la lunghezza propria del treno e v la sua velocità rispetto all'osservatore O.
Nel SR di A la lunghezza del treno è contratta:

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)}$$

ed il tempo di passaggio del treno è

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L_0}{\gamma v}$$

Nel SR del treno l'osservatore O si muove con velocità v e percorre tutta la lunghezza del treno in

$$\Delta t' = \frac{L_0}{v}$$

Dal confronto delle due equazioni ottenute ricaviamo

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma \qquad \text{cioè} \qquad \Delta t' = \gamma \Delta t$$

Era logico aspettarsi questo risultato: il tempo Δt misurato dall'osservatore O è un *tempo proprio*, perchè misura l'intervallo tra due eventi (passaggio della testa del treno, passaggio della coda del treno) nella stessa posizione spaziale. Invece l'intervallo $\Delta t'$ non è un tempo proprio perché si riferisce ad eventi che avvengono in posizioni diverse.
Dai dati del problema $\gamma = \dfrac{\Delta t'}{\Delta t} = 1.5$ e la velocità del treno è

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.75\, c.$$

Soluzione 4.3

Sia L_b la lunghezza a riposo della sbarretta b. Nel SR K la sbarretta b è contratta e la sua lunghezza è $L'_b = L_b/\gamma$, essendo $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La sbarretta a, a riposo, ha invece lunghezza L_a. Il loro rapporto è

$$\frac{L'_b}{L_a} = \frac{L_b}{\gamma L_a} = 1.6 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{L_b}{L_a} = 1.6\,\gamma\,.$$

Nel SR solidale con b è la sbarretta a ad essere contratta:

$$L'_a = \frac{L_a}{\gamma}$$

mentre b ha la sua lunghezza a riposo. Il rapporto tra le due lunghezze risulta:

$$\frac{L_b}{L'_a} = \gamma \frac{L_b}{L_a} = 2.5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{L_b}{L_a} = \frac{2.5}{\gamma}\,.$$

Dal confronto delle due equazioni scritte otteniamo

$$1.6\,\gamma = \frac{2.5}{\gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma^2 = \frac{2.5}{1.6} = 1.5625$$

quindi

$$\gamma = 1.25 \qquad \text{e} \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.6\,c\,.$$

Andando a sostituire in una delle precedenti equazioni troviamo:

$$\frac{L_b}{L_a} = 1.6\,\gamma = 1.6 \cdot 1.25 = 2\,.$$

Soluzione 4.4

Sia $L_0 = 12$ km la distanza che il muone deve percorrere, rispetto al SR della Terra. Se la sua vita propria è τ, nel SR della Terra la sua durata è dilatata di un fattore $\gamma(v)$, essendo v la sua velocità rispetto al suolo:

$$\Delta t = \gamma(v)\tau.$$

Affinché il muone riesca a raggiungere il suolo prima di decadere occorre

$$v\,\Delta t \geq L_0 \qquad \text{cioè} \qquad \gamma(v)v\tau = \gamma\beta c\tau \geq L_0$$

$$\gamma\beta \geq \frac{L_0}{c\tau} \qquad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \geq \left(\frac{L_0}{c\tau}\right)^2$$

$$\beta \geq \frac{L_0/c\tau}{\sqrt{1 + (L_0/c\tau)^2}} = 0.9988$$

quindi la velocità minima richiesta è:

$$v_{min} = 0.9988\,c = 2.994 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Soluzione 4.5

(a)

Il tempo misurato nel SR solidale con la particella è il tempo proprio:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma(v)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t = 7.8 \cdot 10^{-9}\text{ s}.$$

(b) La distanza percorsa nel laboratorio è

$$L = v\,\Delta t = 7.1\,\mathrm{m}\,.$$

(c) Nel SR solidale con la particella è il laboratorio a muoversi con velocità v (nella direzione opposta). La distanza tra il punto di creazione e il punto di decadimento della particella, in tale SR, è:

$$L' = v\,\Delta\tau = v\frac{\Delta t}{\gamma(v)} = \frac{L}{\gamma(v)} = 2.2\,\mathrm{m}\,.$$

Soluzione 4.6

(a) Definiamo gli assi coordinati in modo che O' si muova in direzione $+x$ rispetto a O. L'avvio del segnale avviene dalla posizione, secondo il SR di O, $x = 0$ al tempo $t = t_1$. Secondo il SR di O' il tempo corrispondente è:

$$t'_1 = \gamma(v)\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma t_1$$

in accordo con la formula per la dilatazione del tempo (il tempo misurato da O è proprio).

(b) Secondo il SR di O' il segnale è partito al tempo t'_1 da una distanza $d' = vt'_1$, viaggiando a velocità c, quindi arriverà al tempo

$$t'_2 = t'_1 + \frac{d'}{c} = t'_1 + \frac{vt'_1}{c} = t'_1(1+\beta)$$

Secondo il SR di O il tempo di arrivo è

$$t_2 = \gamma t'_2 = \gamma t'_1(1+\beta) = \gamma^2(1+\beta)t_1 = \frac{t_1}{1-\beta}\,.$$

Allo stesso risultato si giunge ragionando nel modo seguente: secondo il SR di O il segnale viaggia con la legge oraria

$$x_s(t) = c(t - t_1)$$

mentre O' si muove con legge oraria:

$$x_{O'}(t) = vt$$

quindi il segnale raggiunge O' al tempo t_2 tale che

$$\begin{aligned} x_s(t_2) &= x_{O'}(t_2) \\ c(t_2 - t_1) &= vt_2 \\ t_2 &= \frac{t_1}{1-\beta} \end{aligned}$$

Al tempo t_2 l'osservatore O' si trova, secondo il SR di O nella posizione $x_{O'}(t_2) = vt_2$ e il tempo corrispondente t'_2 si trova con una TL:

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_{O'}(t_2)\right) = \gamma\left(t_2 - \frac{v^2}{c^2}t_2\right) = \frac{t_2}{\gamma}\,.$$

Soluzione 4.7

In K le misure delle due sbarrette sono:

$$a = \frac{a_0}{\gamma_A} \qquad b = \frac{b_0}{\gamma_B} \qquad a = b$$

quindi

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{\gamma_A}{\gamma_B} = \frac{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}$$

Soluzione 4.8

(a) Nel SR K le leggi orarie dei due punti sono:

$$x_A(t) = ut \qquad x_B(t) = ut + L$$

Nel SR K' si ha, usando le TL:

Per A

$$\begin{aligned} x'_A &= \gamma(v)\,(x_A - vt_A) = \gamma(ut_A - vt_A) = \gamma(u-v)t_A \\ t'_A &= \gamma(v)\left(x_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}ut_A\right) = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_A \end{aligned}$$

Per B

$$\begin{aligned} x'_B &= \gamma(v)\,(x_B - vt_B) = \gamma(ut_B + L - vt_B) = \gamma(u-v)t_B + \gamma(v)L \\ t'_B &= \gamma(v)\left(x_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}ut_B - \frac{v}{c^2}L\right) = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_B - \gamma(v)\frac{v}{c^2}L \end{aligned}$$

Nel SR K' bisogna osservare i due punti nello stesso istante:

$$t'_B = t'_A$$

che implica

$$t_A = t_B - \frac{vL/c^2}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

per cui la distanza è

$$L' = (x'_B - x'_A)_{t'_B = t'_A} = \gamma(u-v)t_B + \gamma(v)L - \gamma(u-v)\left(t_B - \frac{vL/c^2}{1 - uv/c^2}\right) = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$$

(b) Il SR in cui i due punti sono fermi si muove rispetto a K con velocità u. La distanza tra i punti in tale SR si ottiene con la formula precedente ponendo $v = u$:

$$L_0 = \frac{L}{\gamma(u)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = L\gamma(u)$$

ed è, ovviamente la distanza propria tra i due punti.

`(c)` Utilizziamo nuovamente la formula ricavata nel punto `(a)` ponendo $u = c$:

$$L' = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{cv}{c^2}\right)} = \frac{L}{\gamma(v)(1-\beta)} = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Soluzione 4.9

Orientiamo l'asse x nella direzione del moto della sbarra e del SR K' rispetto a K. Siano A e B le estremità della sbarra. Le loro posizioni nel SR K sono definite da:

$$x_A(t) = ut \qquad\qquad x_B(t) = ut + L\,.$$

e nel SR sono date da una TL con velocità v in direzione $+x$:

$$\begin{aligned}
x'_A &= \gamma(v)\,(x_A - vt_A) = \gamma(v)(ut_A - vt_A) = \gamma(v)(u-v)t_A \\
t'_A &= \gamma(v)\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) = \gamma(v)\left(t_A - \frac{v}{c^2}ut_A\right) = \gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_A \\
x'_B &= \gamma(v)\,(x_B - vt_B) = \gamma(v)(ut_B + L - vt_B) = \gamma(v)(u-v)t_B + \gamma(v)L \\
t'_B &= \gamma(v)\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \gamma(v)\left(t_B - \frac{v}{c^2}(ut_B + L)\right) = \gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_B - \gamma(v)\frac{v}{c^2}L
\end{aligned}$$

La lunghezza della sbarra nel SR K' si ottiene misurando la posizione degli estremi A e B nello stesso istante $t'_A = t'_B$:

$$t'_A = t'_B \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_A = \gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)t_B - \gamma(v)\frac{v}{c^2}L$$

ossia

$$t_B = t_A + \frac{vL/c^2}{1 - uv/c^2}\,.$$

Quindi la lunghezza della sbarra in K' è

$$\begin{aligned}
L' &= \left(x'_B - x'_A\right)\big|_{t'_A = t'_B} = \gamma(v)\left[(u-v)t_B + L - (u-v)t_A\right] \\
&= \gamma(v)\left[(u-v)\frac{vL/c^2}{1-uv/c^2} + L\right] = \\
&= \gamma(v)L\,\frac{\frac{uv}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{uv}{c^2}}{1 - uv/c^2} = \gamma(v)L\,\frac{1}{\gamma(v)^2}1 - uv/c^2 = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - uv/c^2\right)}
\end{aligned}$$

e, inserendo i valori numerici,

$$L' = \frac{7}{5}L = 14\,\mathrm{m}\,.$$

<u>Osservazione:</u> Questo esercizio si può risolvere anche applicando direttamente la formula di contrazione delle lunghezze. Se in K la lunghezza della sbarretta è L, vuol dire che la sua lunghezza propria è $L_0 = L\gamma(v)$. Ma per calcolare la sua lunghezza in K' occorre conoscere la velocità della sbarretta in K', che si ottiene con la regola di composizione delle velocità che vedremo nel capitolo 5. Si veda anche l'esercizio 5.16.

Soluzione 4.10

(a) Assumiamo che Anne parta al tempo $t = 0$. La legge oraria del suo viaggio, secondo il SR K (Terra), è:

$$x_A(t) = v_1 t$$

Ben parte dopo un tempo $t_0 = 1$ anno, quindi la sua legge oraria è

$$x_B(t) = v_2(t - t_0)\,.$$

Secondo il SR K Ben raggiunge Anne al tempo t_r:

$$x_A(t_r) = x_B(t_r) \qquad \Longrightarrow \qquad t_r = \frac{v_2}{v_2 - v_1} t_0 = 4\,t_0 = 4\,\text{anni}\,.$$

Si tratta di un tempo calcolato a partire da $t = 0$, quindi dal momento della partenza di Anne. Il tempo di viaggio di Ben, secondo il SR K è quindi $\Delta t = t_r - t_0 = 3\,t_0 = 3$ anni.

(b) Nel SR di Anne (K') la partenza al tempo $t' = t = 0$ e l'arrivo di Ben al tempo t'_r avvengono nella stessa posizione spaziale, quindi è un intervallo di tempo proprio:

$$t_A = t'_r = \frac{t_r}{\gamma(v_1)} = \frac{4}{5} t_r = 3.2\,\text{anni}\,.$$

(c) Il tempo di viaggio nel SR K'' di Ben è un tempo proprio:

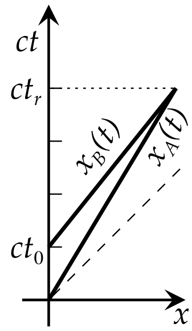
$$\Delta t'' = \frac{\Delta t}{\gamma(v_2)} = \frac{3}{5}\,3\,t_0 = \frac{9}{5} t_0\,.$$

Secondo Ben quindi, quando raggiunge Anne sono passati

$$t_B = \Delta t'' + t_0 = \frac{14}{5} t_0 = 2.8\,\text{anni}$$

Quindi al monento del ricongiungimento dei fratelli, Ben è più giovane di Anne, a causa della velocità maggiore del suo viaggio.

(d) La rappresentazione in un diagramma di Minkowski è data in figura.



Soluzione 4.11

In tutte le trasformazioni considerate la coordinata z resta invariata. Per brevità verrà omessa nello svolgimento dell'esercizio.
Scriviamo le TL dal SR K'' al SR K':

$$\begin{cases} t' = \gamma(v'_2)\left(t'' + \dfrac{v'_2}{c^2} y''\right) \\ x' = x'' \\ y' = \gamma(v'_2)\,(y'' + v'_2 t'') \end{cases} \tag{S.4.1}$$

Analogamente la TL dal SR K' al SR K si scrive come:

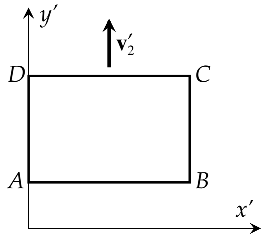
$$\begin{cases} t = \gamma(v_1)\left(t' + \dfrac{v_1}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(v_1)\left(x' + v_1 t'\right) \\ y = y' \end{cases} \tag{S.4.2}$$

e per ottenere la TL diretta dal SR K'' al SR K componiamo le due trasformazioni scritte:

$$\begin{cases} t = \gamma(v_1)\gamma(v_2')t'' + \gamma(v_1)\dfrac{v_1}{c^2}x'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\dfrac{v_2'}{c^2}y'' \\ x = \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 t'' + \gamma(v_1)x'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\dfrac{v_1 v_2'}{c^2}y'' \\ y = \gamma(v_2')v_2' t'' + \gamma(v_2')y'' \end{cases} \tag{S.4.3}$$

Studiamo ora come si trasforma il quadrato $ABCD$.

Nel SR K' il quadrato diventa un rettangolo, come mostrato nella figura a fianco, con i lati paralleli alla velocità $\mathbf{v}_2'$ contratti e gli altri inalterati:



$$\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{L}{\gamma(v_2')} = \frac{\sqrt{7}}{4}L \qquad\qquad \overline{AB} = \overline{CD} = L\,,$$

come si può verificare utilizzando le equazioni di trasformazione (S.4.1).

Per andare nel SR K usiamo le (S.4.3): bisogna calcolare le posizioni di tutti i vertici in uno stesso istante nel SR K. Consideriamo la prima equazione delle (S.4.3), che dà il tempo misurato in K in corrispondenza delle posizioni spaziali dei vertici e usiamo le coordinate dei vertici date dal testo del problema ((4.1) pag. 14):

$$\begin{aligned} t_A &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')t_A'' + \gamma(v_1)\frac{v_1}{c^2}x_A'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}y_A'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2')t_A'' \\ t_B &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')t_B'' + \gamma(v_1)\frac{v_1}{c^2}x_B'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}y_B'' = \gamma(v_1)\left(\gamma(v_2')t_B'' + \frac{v_1}{c^2}L\right) \\ t_C &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')t_C'' + \gamma(v_1)\frac{v_1}{c^2}x_C'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}y_C'' = \gamma(v_1)\left(\gamma(v_2')t_C'' + \frac{v_1}{c^2}L + \gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}L\right) \\ t_D &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')t_D'' + \gamma(v_1)\frac{v_1}{c^2}x_D'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}y_D'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2')\left(t_D'' + \frac{v_2'}{c^2}L\right)\,. \end{aligned}$$

Bisogna imporre che i tempi t_i ($i = A, B, C, D$) siano tutti uguali tra loro e uguali ad un tempo (arbitrario) t_0.

Poniamo

$$t_A = t_0 = \gamma(v_1)\gamma(v_2')T$$

dove abbiamo posto, per comodità di scrittura, $t_A'' = T$. Vediamo quali condizioni devono valere per gli altri tempi:

$$t_B = t_0 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(v_1)\left(\gamma(v_2')t_B'' + \frac{v_1}{c^2}L\right) = \gamma(v_1)\gamma(v_2')T \quad\Longrightarrow\quad t_B'' = T - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\,;$$

$$t_C = t_0 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(v_1)\left(\gamma(v_2')t_C'' + \frac{v_1}{c^2}L + \gamma(v_2')\frac{v_2'}{c^2}L\right) = \gamma(v_1)\gamma(v_2')T$$

$$\Longrightarrow\quad t_C'' = T - \frac{v_2'}{c^2}L - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\,;$$

$$t_D = t_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(v_1)\gamma(v_2')\left(t_D'' + \frac{v_2'}{c^2}L\right) = \gamma(v_1)\gamma(v_2')T \quad \Longrightarrow \quad t_D'' = T - \frac{v_2'}{c^2}L\,.$$

Calcoliamo ora le coordinate dei vertici nel SR K al tempo t_0, usando le (S.4.3) e le relazioni tra i tempi appena trovate:

$$x_A(t_0) = \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 t_A'' + \gamma(v_1)x_A'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}y_A'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 T = v_1 t_0$$

$$\begin{aligned} x_B(t_0) &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 t_B'' + \gamma(v_1)x_B'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}y_B'' = \\ &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1\left(T - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\right) + \gamma(v_1)L = v_1 t_0 + \frac{L}{\gamma(v_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_C(t_0) &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 t_C'' + \gamma(v_1)x_C'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}y_C'' = \\ &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1\left(T - \frac{v_2'}{c^2}L - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\right) + \gamma(v_1)L + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}L = v_1 t_0 + \frac{L}{\gamma(v_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_D(t_0) &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1 t_D'' + \gamma(v_1)x_D'' + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}y_D'' = \\ &= \gamma(v_1)\gamma(v_2')v_1\left(T - \frac{v_2'}{c^2}L\right) + \gamma(v_1)\gamma(v_2')\frac{v_1 v_2'}{c^2}L = v_1(t_0) \end{aligned}$$

$$y_A(t_0) = \gamma(v_2')v_2' t_A'' + \gamma(v_2')y_A'' = \gamma(v_2')v_2' T = \frac{v_2'}{\gamma(v_1)}t_0 = v_{2y}t_0$$

avendo definito $v_{2y} = v_2'/\gamma(v_1)$, ovvero la componente verticale della velocità di K'' rispetto a K (in accordo con la regola di composizione delle velocità, cap. 5)

$$y_B(t_0) = \gamma(v_2')v_2' t_B'' + \gamma(v_2')y_B'' = \gamma(v_2')v_2'\left(T - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\right) = v_{2y}t_0 - \frac{v_1 v_2'}{c^2}L$$

$$\begin{aligned} y_C(t_0) &= \gamma(v_2')v_2' t_C'' + \gamma(v_2')y_C'' = \gamma(v_2')v_2'\left(T - \frac{v_2'}{c^2}L - \frac{v_1}{c^2\gamma(v_2')}L\right) + \gamma(v_2')L = \\ &= v_{2y}t_0 + \frac{L}{\gamma(v_2')} - \frac{v_1 v_2'}{c^2}L \end{aligned}$$

$$y_D(t_0) = \gamma(v_2')v_2' t_D'' + \gamma(v_2')y_D'' = \gamma(v_2')v_2'\left(T - \frac{v_2'}{c^2}L\right) + \gamma(v_2')L = v_{2y}t_0 + \frac{L}{\gamma(v_2')}$$

Con i valori numerici dati dal testo del problema otteniamo infine:

$$\begin{aligned} x_A(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 & y_A(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 \\ x_B(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 + \frac{4}{5}L & y_B(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 - \frac{9}{20}L \\ x_C(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 + \frac{4}{5}L & y_C(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 + \frac{\sqrt{7}}{4}L - \frac{9}{20}L \\ x_D(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 & y_D(t_0) &= \frac{3}{5}ct_0 + \frac{\sqrt{7}}{4}L \end{aligned}$$

Esaminiamo i risultati ottenuti. Tutti i vertici si muovono nel SR K con 3-velocità $\mathbf{v}_2 = \frac{3}{5}c\,\hat{\mathbf{u}}_x + = \frac{3}{5}c\,\hat{\mathbf{u}}_y$: si può verificare che questa è la velocità del SR K'' rispetto al SR K,

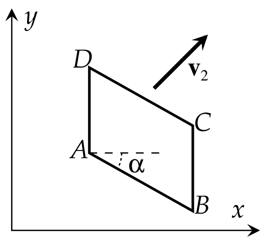
ottenibile con la regola di composizione delle velocità (ved. capitolo 5).
In ogni istante t_0 si ha $x_A = x_D$ e $x_B = x_C$: i lati AD e BC nel SR K sono paralleli all'asse y. La loro lunghezza è

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= y_D(t_0) - y_A(t_0) = \frac{L}{\gamma(v_2')} = \frac{\sqrt{7}}{4}L \\ \overline{BC} &= y_C(t_0) - y_B(t_0) = \frac{L}{\gamma(v_2')} = \frac{\sqrt{7}}{4}L\end{aligned}$$

ossia è contratta, esattamente come nel SR K', in accordo con il fatto che in un boost in direzione x, le coordinate y restano inalterate.
Per i lati AB e CD invece la situazione è diversa. Si ha

$$\Delta x = x_B - x_A = x_C - x_D = \frac{L}{\gamma(v_1)} = \frac{4}{5}L$$

$$\Delta y = y_B - y_A = y_C - y_D = -\frac{v_1 v_2'}{c^2}L = -\frac{9}{20}L\,.$$



Possiamo concludere che i lati AB e CD sono paralleli tra di loro, ma **NON** sono paralleli all'asse x: essi sono ruotati di un angolo α tale che

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\gamma(v_1)\frac{v_1 v_2'}{c^2} = -\frac{9}{16}\,,$$

in analogia con il risultato del problema 2.15. Nel SR K perciò $ABCD$ è un parallelogramma in moto con velocità $\mathbf{v}_2$, come mostrato in figura.

Soluzione 4.12

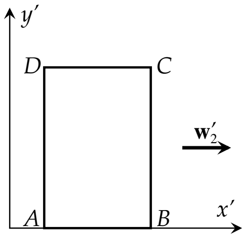
Procediamo come nell'esercizio precedente, scrivendo le TL dal SR K'' a K', da K' a K e la TL diretta da K'' a K (la coordinata z, invariata in tutte le TL, viene omessa)

$$\begin{cases} t' = \gamma(w_2')\left(t'' + \dfrac{w_2'}{c^2}x''\right) \\ x' = \gamma(w_2')\left(x'' + w_2' t''\right) \\ y' = y'' \end{cases} \tag{S.4.4}$$

$$\begin{cases} t = \gamma(w_1)\left(t' + \dfrac{w_1}{c^2}y'\right) \\ x = x' \\ y = \gamma(w_2')\left(y'' + w_2' t''\right) \end{cases} \tag{S.4.5}$$

$$\begin{cases} t = \gamma(w_1)\gamma(w_2')t'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\dfrac{w_2'}{c^2}x'' + \gamma(w_1)\dfrac{w_1}{c^2}y'' \\ x = \gamma(w_2')w_2' t'' + \gamma(w_2')x'' \\ y = \gamma(w_1)\gamma(w_2')w_1 t'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\dfrac{w_1 w_2'}{c^2}x'' + \gamma(w_1)y'' \end{cases} \tag{S.4.6}$$

Studiamo ora come si trasforma il quadrato $ABCD$.
Nel SR K' il quadrato diventa un rettangolo, come mostrato nella figura a fianco, con i lati paralleli alla velocità $\mathbf{w}'_2$ contratti, e gli altri inalterati:



$$\overline{AD} = \overline{BC} = L \qquad \overline{AB} = \overline{CD} = \frac{L}{\gamma(w'_2)} = \frac{\sqrt{7}}{4} L \,,$$

Nel SR K dobbiamo calcolare le posizioni di tutti i vertici in uno stesso istante. Consideriamo la prima equazione delle (S.4.6) per determinare le relazioni tra i tempi nel SR K'' che corrispondono allo stesso istante in K:

$$\begin{aligned}
t_A &= \gamma(w_1)\gamma(w'_2)t''_A + \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}x''_A + \gamma(w_1)\frac{w_1}{c^2}y''_A = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)t''_A \\
t_B &= \gamma(w_1)\gamma(w'_2)t''_B + \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}x''_B + \gamma(w_1)\frac{w_1}{c^2}y''_B = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\left(t''_B + \frac{w'_2}{c^2}L\right) \\
t_C &= \gamma(w_1)\gamma(w'_2)t''_C + \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}x''_C + \gamma(w_1)\frac{w_1}{c^2}y''_C = \\
&\quad = \gamma(w_1)\left(\gamma(w'_2)t''_C + \gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}L + \frac{w_1}{c^2}L\right) \\
t_D &= \gamma(w_1)\gamma(w'_2)t''_D + \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}x''_D + \gamma(w_1)\frac{w_1}{c^2}y''_D = \gamma(w_1)\left(\gamma(w'_2)t''_D + \frac{w_1}{c^2}L\right) .
\end{aligned}$$

Bisogna imporre che i tempi t_i $(i = A, B, C, D)$ siano tutti uguali tra loro e uguali ad un tempo (arbitrario) t_0. Come nel problema precedente poniamo $t''_A = T$ e

$$t_A = t_0 = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)T$$

Ricaviamo le condizioni per gli altri tempi:

$$t_B = t_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(w_1)\gamma(w'_2)\left(t''_B + \frac{w'_2}{c^2}L\right) = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)T \quad \Longrightarrow \quad t''_B = T - \frac{w'_2}{c^2}L\,;$$

$$t_C = t_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(w_1)\left(\gamma(w'_2)t''_C + \gamma(w'_2)\frac{w'_2}{c^2}L + \frac{w_1}{c^2}L\right) = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)T$$

$$\Longrightarrow \quad t''_C = T - \frac{w'_2}{c^2}L - \frac{w_1}{c^2\gamma(w'_2)}L\,;$$

$$t_D = t_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(w_1)\left(\gamma(w'_2)t''_D + \frac{w_1}{c^2}L\right) = \gamma(w_1)\gamma(w'_2)T \quad \Longrightarrow \quad t''_D = T - \frac{w_1}{c^2\gamma(w'_2)}L\,.$$

Calcoliamo i vertici $ABCD$ nel SR K al tempo t_0:

$$x_A(t_0) = \gamma(w'_2)\,(x''_A + w'_2 t''_A) = \gamma(w'_2)w'_2 T = \frac{w'_2}{\gamma(w_1)}t_0 = w_{2x}t_0$$

essendo $w_{2x} = w'_2/\gamma(w_1)$ la componente orizzontale della velocità di K'' rispetto a K,

$$x_B(t_0) = \gamma(w'_2)\,(x''_B + w'_2 t''_B) = w_{2x}t_0 + \frac{L}{\gamma(w'_2)}$$

$$x_C(t_0) = \gamma(w'_2)\,(x''_C + w'_2 t''_C) = w_{2x}t_0 + \frac{L}{\gamma(w'_2)} - \frac{w_1 w'_2}{c^2}L$$

$$x_D(t_0) = \gamma(w_2')\,(x_D'' + w_2' t_D'') = w_{2x} t_0 - \frac{w_1 w_2'}{c^2} L$$

$$y_A(t_0) = \gamma(w_1)\gamma(w_2') w_1 t_A'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\frac{w_1 w_2'}{c^2} x_A'' + \gamma(w_1) y_A'' = \gamma(w_1)\gamma(w_2') w_1 T = w_1 t_0$$

$$y_B(t_0) = \gamma(w_1)\gamma(w_2') w_1 t_B'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\frac{w_1 w_2'}{c^2} x_B'' + \gamma(w_1) y_B'' = w_1 t_0$$

$$y_C(t_0) = \gamma(w_1)\gamma(w_2') w_1 t_C'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\frac{w_1 w_2'}{c^2} x_C'' + \gamma(w_1) y_C'' = w_1 t_0 + \frac{L}{\gamma(w_1)}$$

$$y_D(t_0) = \gamma(w_1)\gamma(w_2') w_1 t_D'' + \gamma(w_1)\gamma(w_2')\frac{w_1 w_2'}{c^2} x_D'' + \gamma(w_1) y_D'' = w_1 t_0 + \frac{L}{\gamma(w_1)}$$

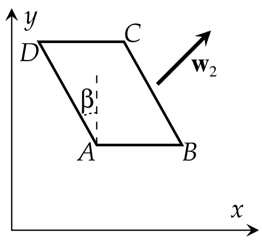
Con i valori numerici dati dal testo del problema otteniamo infine:

$$x_A(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 \qquad y_A(t_0) = \frac{3}{5} c t_0$$

$$x_B(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 + \frac{\sqrt{7}}{4} L \qquad y_B(t_0) = \frac{3}{5} c t_0$$

$$x_C(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 + \frac{\sqrt{7}}{4} L - \frac{9}{20} L \qquad y_C(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 + \frac{4}{5} L$$

$$x_D(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 - \frac{9}{20} L \qquad y_D(t_0) = \frac{3}{5} c t_0 + \frac{4}{5} L$$



Ragionando come nel problema precedente si arriva alla conclusione che $ABCD$, nel SR K, è un parallelogramma con i lati AB e CD paralleli all'asse x (e contratti), mentre i lati AD e BC sono inclinati, rispetto all'asse y, di un angolo β tale che

$$\tan\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\gamma(w_1)\frac{w_1 w_2'}{c^2} = -\frac{9}{16}\,.$$

Soluzione 4.13

Questa volta determinare la trasformazione del quadrato $ABCD$ è molto semplice: nella direzione parallela al moto relativo tra i due SR si ha la contrazione delle lunghezze, mentre nella direzione ortogonale le lunghezze sono inalterate.

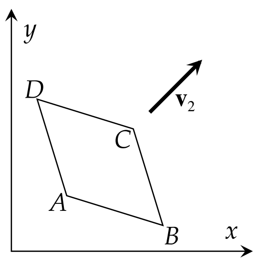
Quindi la diagonale AC del quadrato nel SR K si contrae con il fattore di Lorentz

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}}} = \frac{5}{\sqrt{7}}$$

e la diagonale BD ha la lunghezza invariata. In conclusione:

$$\overline{AC} = \frac{L\sqrt{2}}{\gamma(u)} = \frac{\sqrt{14}}{5} L \qquad \overline{BD} = L\sqrt{2}\,.$$

Nel SR K il poligono $ABCD$ è un rombo, come mostrato in figura.



Capitolo 5

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 5.1

Il risultato si ottiene immediatamente, osservando che per piccole velocità:

$$\gamma(v) \to 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}|}{c^2} \ll 1$$

per cui

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \big(\gamma(v)-1\big)\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}}{\gamma(v)\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\;.} \underset{u,v\ll c}{\longrightarrow} \mathbf{u}-\mathbf{v}\,.$$

Soluzione 5.2

(a) Per un corpo materiale in moto, in un SRI K, con (tri-)velocità $\mathbf{u}$ la quadrivelocità è definita come

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

essendo τ il tempo proprio, ossia il tempo misurato nel SR solidale con il corpo in esame. Tra un intervallo di tempo $\mathrm{d}\tau$ e il corrispondente $\mathrm{d}t$ misurato nel SR K sussiste la relazione:

$$\mathrm{d}t = \gamma(u)\mathrm{d}\tau$$

quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

e la quadrivelocità risulta

$$\begin{aligned} U^\mu &= \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\mu = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct,x,y,z) = \gamma(u)\left(c,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \\ &= \gamma(u)\,(c,u_x,u_y,u_z) = (\gamma(u)c,\gamma(u)\mathbf{u})\;. \end{aligned}$$

(b) Calcoliamo la norma al quadrato della quadrivelocità

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= -U^{0^2} + \mathbf{U}^2 = \\ &= -\gamma^2(u)c^2 + \gamma^2(u)u^2 = \\ &= -c^2\,\gamma^2(u)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = -c^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= U^{0^2} - \mathbf{U}^2 = \\ &= \gamma^2(u)c^2 - \gamma^2(u)u^2 = \\ &= c^2\,\gamma^2(u)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = c^2 \end{aligned}$

Nella quadrivelocità la componente dominante è quella temporale ($\gamma(u)c$ è sempre maggiore di $\gamma(u)u$) per cui la quadrivelocità è un vettore di tipo tempo e la sua norma al quadrato è un valore costante legato a c^2 (il segno dipende dalla metrica scelta).

Soluzione 5.3

Consideriamo due SRI K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità v in direzione $+x$. Consideriamo un punto materiale in moto, nel SR K, con velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Sappiamo che nel SR K' la sua (tri-)velocità ha componenti:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)}$$

Scriviamo il vettore quadrivelocità nel SR K:

$$U^\mu = (\gamma(u)c\,,\ \gamma(u)u_x, \gamma(u)u_y, \gamma(u)u_z)$$

e nel SR K':

$$U'^{\,\mu} = \left(\gamma(u')c\,,\ \gamma(u')u'_x, \gamma(u')u'_y, \gamma(u')u'_z\right)$$

Per $\gamma(u')$ usiamo la (5.3):

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right) = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right).$$

Esaminiamo le componenti di U'^μ

$$\begin{aligned}
U'^{\,0} &= \gamma(u')c = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \gamma(v)\left(\gamma(u)c - \frac{v}{c}\gamma(u)u_x\right) = \gamma(v)\left(U^0 - \frac{v}{c}U^x\right) \\
U'^{\,x} &= \gamma(u')u'_x = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} = \gamma(v)\left(\gamma(u)u_x - \frac{v}{c}\gamma(u)c\right) = \\
&= \gamma(v)\left(U^x - \frac{v}{c}U^0\right) \\
U'^{y/z} &= \gamma(u')u'_{y/z} = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\frac{u_{y/z}}{\gamma(v)\,(1 - u_x v/c^2)} = \gamma(u)u_{y/z}
\end{aligned}$$

Possiamo riassumere le precedenti regole di trasformazione usando la matrice di Lorentz (2.6) (pag. 4):

$$U' = \Lambda U \qquad \text{o anche} \qquad U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu\,,$$

da cui è evidente che la quadrivelocità si trasforma come un vettore controvariante.

Soluzione 5.4

Per la regola di composizione delle velocità:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Per la definizione del fattore γ:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma^2(u')} &= 1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{{u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2}{c^2} = 1 - \frac{\dfrac{(u_x - v)^2}{c^2} + \dfrac{1}{\gamma^2(v)}\dfrac{u_y^2 + u_z^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{1 - 2\dfrac{vu_x}{c^2} + \dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{u_x^2}{c^2} - \dfrac{u_x^2}{c^2} + 2\dfrac{vu_x}{c^2} - \dfrac{v^2}{c^2} + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\dfrac{u_y^2 + u_z^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{1 - \dfrac{u^2}{c^2} - \dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2(u)}\frac{1}{\gamma^2(v)}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

ossia

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right). \tag{S.5.1}$$

Poiché in questo caso la velocità relativa v è diretta lungo l'asse x, il prodotto vu_x non è altro che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e la relazione (S.5.1) coincide con la (5.3).

Soluzione 5.5

Consideriamo due punti materiali in moto, nel SRI K con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; le quadrivelocità corrispondenti, nel SR K sono:

$$\begin{aligned}
U_1^\mu &= (\gamma(v_1)c\,,\ \gamma(v_1)\mathbf{v}_1) \\
U_2^\mu &= (\gamma(v_2)c\,,\ \gamma(v_2)\mathbf{v}_2)\,.
\end{aligned}$$

Nel SR K' in moto, rispetto a K con velocità $\mathbf{v}_2$ le quadrivelocità sono:

$$\begin{aligned}
{U'_1}^\mu &= (\gamma(v'_1)c\,,\ \gamma(v'_1)\mathbf{v}'_1) \\
{U'_2}^\mu &= (c\,,\ \mathbf{0})\,,
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{v}'_1$ è la velocità di $\mathbf{v}_1$ trasformata nel SR K', ottenuta quindi componendo (relativisticamente) le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ Per l'invarianza del prodotto scalare:

$${U'_1}^\mu U'_{2\mu} = U_1^\mu U_{2\mu}$$

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$-\gamma(v'_1)c\,c = -\gamma(v_1)c\,\gamma(v_2)c + \gamma(v_1)\mathbf{v}_1 \cdot \gamma(v_2)\mathbf{v}_2$	$\gamma(v'_1)c\,c = = \gamma(v_1)c\,\gamma(v_2)c - \gamma(v_1)\mathbf{v}_1 \cdot \gamma(v_2)\mathbf{v}_2$

$$\gamma(v)c^2 = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\left(c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2\right)$$

da cui, dividendo per c^2, si ottiene la relazione

$$\gamma(v_1') = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right) \tag{S.5.2}$$

Soluzione 5.6

Consideriamo un punto materiale in moto con velocità $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ nel SR K. Sia $u \equiv |\mathbf{u}| < c$. Calcoliamo il modulo della velocità dello stesso punto materiale in un altro SR K'. Usando le regole di trasformazione delle velocità troviamo:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \qquad u_y' = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Questa velocità è sicuramente minore di c^2, infatti nell'esercizio 5.4 abbiamo trovato:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)^2} .$$

Il secondo membro è sicuramente positivo, poiché sia v che u sono minori di c, quindi anche il primo membro è positivo, ossia u' è minore di c.
In conclusione, qualunque sia la velocità u, non esiste un SR in cui il corpo si muova con velocità maggiore di c; c è la velocità limite per ogni corpo materiale.

Soluzione 5.7

La TL per un boost con velocità $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ si scrive come (vedere (2.3), pag. 3):

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}\right) \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\,ct \end{cases}$$

Per una variazione infinitesima si ha

$$\begin{cases} c\,\mathrm{d}t' = \gamma\left(c\,\mathrm{d}t - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\ \mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathrm{d}\mathbf{x} + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}\,c\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

da cui

$$\frac{\mathbf{u}'}{c} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\mathbf{u}}{c} + \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{\mathbf{u}}{c}\right)\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}}{\gamma\left(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\dfrac{\mathbf{u}}{c}\right)}$$

e si ottiene la regola di trasformazione della velocità:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \left(\gamma(v) - 1\right)\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)} . \tag{S.5.3}$$

Soluzione 5.8

Definiamo, come di consueto: $\gamma_1 = \gamma(v_1)$ e $\gamma_2 = \gamma(v_2)$.

(a) Usiamo la (S.5.3), ricavata nell'esercizio 5.7, per calcolare la velocità della particella P_2 nel SR solidale con la particella P_1. In questo caso $\mathbf{u} = \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ ($\mathbf{v}_1$ è la velocità relativa tra il SR iniziale e quello solidale con P_1):

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{\mathbf{v}_2 + \dfrac{\gamma_1 - 1}{v_1^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_1 - \gamma_1 \mathbf{v}_1}{\gamma_1 (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 / c^2)} \tag{S.5.4a}$$

(b) Usiamo nuovamente la (S.5.3) scambiando i ruoli delle due particelle: $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{\mathbf{v}_1 + \dfrac{\gamma_2 - 1}{v_2^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_2 - \gamma_2 \mathbf{v}_2}{\gamma_2 (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 / c^2)} \tag{S.5.4b}$$

(c) Le due velocità $\mathbf{v}_{12}$ e $\mathbf{v}_{21}$ in generale non sono parallele (si veda l'esempio numerico dell'esercizio 5.9. Calcoliamone il modulo (poniamo, per comodità $D \equiv 1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 / c^2$):

$$\begin{aligned} v_{21}^2 = |\mathbf{v}_{2,1}|^2 = \frac{1}{\gamma_1^2 D^2}\Bigg[& v_2^2 + \frac{(\gamma_1 - 1)^2}{v_1^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 + \gamma_1^2 v_1^2 + 2\frac{\gamma_1 - 1}{v_1^2}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 + \\ & -2\gamma_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 2(\gamma_1 - 1)\gamma_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\Bigg] = \\ = \frac{1}{\gamma_1^2 D^2} & \left[\frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{v_1^2}\left(\gamma_1^2 - 1\right)\right) - 2\gamma_1^2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + v_2^2 + \gamma_1^2 v_1^2\Bigg] = \end{aligned}$$

ricordiamo che $\gamma_1^2 - 1 = \beta_1^2 \gamma_1^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\gamma_1^2 D^2}\left[\frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{v_1^2}\gamma_1^2 \frac{v_1^2}{c^2} - 2\gamma_1^2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + v_2^2 + \gamma_1^2 v_1^2\right] = \\ &= \frac{1}{D^2}\left[\frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{c^2} - 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \frac{v_2^2}{\gamma_1^2} + v_1^2\right] = \end{aligned}$$

usiamo $1/\gamma_1^2 = 1 - \beta_1^2$, inoltre definiamo l'angolo α tra i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, scrivendo il prodotto scalare del primo termine come: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos\alpha$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{D^2}\left[\frac{v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}{c^2} - 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + v_2^2 - v_2^2 \frac{v_1^2}{c^2} + v_1^2\right] = \\ &= \frac{1}{D^2}\left[\left(v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + v_2^2\right) - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}\left(1 - \cos^2\alpha\right)\right] \end{aligned}$$

Nella prima parentesi riconosciamo il quadrato di $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, mentre $v_1^2 v_2^2 \sin^2\alpha$ è il quadrato del modulo del prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, quindi

$$v_{21}^2 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \dfrac{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right)^2} .$$

L'espressione ottenuta è simmetrica in $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, quindi lo stesso risultato vale anche per il modulo di $\mathbf{v}_{12}$, come è possibile verificare ripetendo il procedimento. Dunque i due vettori $\mathbf{v}_{12}$ e $\mathbf{v}_{21}$ hanno lo stesso modulo, pur non essendo paralleli: si pssono ottenere l'uno dall'altro con una rotazione spaziale.

(d) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono parallele esiste un versore $\hat{\mathbf{u}}$ tale che $\mathbf{v}_1 = v_1\hat{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{v}_2 = v_2\hat{\mathbf{u}}$, dove v_1 e v_2 non sono i moduli, ma le proiezioni dei rispettivi vettori sulla direzione di $\hat{\mathbf{u}}$ (in altre parole, se $\mathbf{v}_1$ ha lo stesso verso di $\hat{\mathbf{u}}$, allora v_1 è positivo, altrimenti è negativo, lo stesso vale per $\mathbf{v}_2$). Il prodotto scalare diventa $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2$. Quindi

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{v_2 + \dfrac{\gamma_1 - 1}{v_1^2} v_1^2 v_2 - \gamma_1 \mathbf{v}_1}{\gamma_1 \left(1 - v_1 v_2/c^2\right)}\hat{\mathbf{u}} = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2/c^2}\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{v}_{12}$$

in accordo con la regola di composizione delle velocità in forma standard.

Osservazione: è interessante notare che se consideriamo il limite non relativistico delle equazioni (S.5.4a,b), che consiste nel porre $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ e nel trascurare $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2$ a denominatore, si ottiene il risultato della Meccanica Classica $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_{12}$.

Soluzione 5.9

Utilizziamo le notazioni consuete:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, 0\right) \qquad \gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2} = 3$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\right) \qquad \gamma_2 = 1/\sqrt{1-\beta_2^2} = 5$$

La velocità di P_1 rispetto a P_2 si ottiene con la regola di composizione delle velocità, con un boost in direzione y:

$$\beta_{12,x} = \frac{\beta_{1x}}{\gamma_2 \left(1 - \beta_{2y}\beta_{1y}\right)} = \frac{\beta_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{2}}{15}$$

$$\beta_{12,y} = \frac{\beta_{1y} - \beta_{2y}}{1 - \beta_{2y}\beta_{1y}} = -\beta_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{12} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{15}, -\frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\right)$$

mentre la velocità di P_2 rispetto a P_1 si ottiene con un boost in direzione x:

$$\beta_{21,x} = \frac{\beta_{2x} - \beta_{1x}}{1 - \beta_{1x}\beta_{2x}} = -\beta_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta_{21,y} = \frac{\beta_{2y}}{\gamma_1 \left(1 - \beta_{1x}\beta_{2x}\right)} = \frac{\beta_2}{\gamma_1} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{21} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{15}, 0\right).$$

I due vettori $\boldsymbol{\beta}_{12}$ e $\boldsymbol{\beta}_{21}$ non sono paralleli, infatti il loro prodotto vettoriale non è zero. I loro moduli però sono uguali, come è immediato verificare:

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{4\sqrt{14}}{15} .$$

Calcoliamo l'angolo compreso tra le loro direzioni tramite il prodotto scalare:

$$\boldsymbol{\beta}_{12} \cdot \boldsymbol{\beta}_{21} = \beta_{12}^2 \cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{2}\,, \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi\,.$$

Soluzione 5.10

Definiamo l'asse x nella direzione del moto delle due sbarrette. La loro velocità relativa è data da

$$v = \frac{v_A - v_B}{1 - v_A v_B/c^2}$$

Invertiamo la precedente relazione per ricavare v_B in funzione di v_A e di v. Otteniamo

$$v_B = \frac{v_A - v}{1 - v_A v/c^2}$$

Nel SR K le due sbarrette hanno lunghezze contratte:

$$\overline{AA'} = \frac{L_0}{\gamma(v_A)} \qquad \text{e} \qquad \overline{BB'} = \frac{L_0}{\gamma(v_B)}$$

per cui, usando la (5.3):

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{\gamma(v_B)}{\gamma(v_A)} = \frac{\gamma(v_A)\gamma(v)\left(1 - \frac{v_A v}{c^2}\right)}{\gamma(v_A)} = \gamma(v)\left(1 - \frac{v_A v}{c^2}\right)$$

da cui si può ricavare v_A:

$$v_A = \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma(v)}\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}\right) = c\frac{5}{4}\left(1 - \frac{3}{5}\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}c\,,$$

e, di conseguenza, anche v_B:

$$v_B = \frac{v_A - v}{1 - \frac{v_A v}{c^2}} = \frac{\frac{7}{8}c - \frac{4}{5}c}{1 - \frac{7}{8}\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}c\,.$$

Soluzione 5.11

Assumiamo che A e B si muovano in direzione $+x$.
Mostreremo due metodi di risoluzione del problema.

<u>Primo metodo: Trasformazione delle velocità</u>
Useremo la regola di trasformazione delle velocità

$$u'_A = \frac{u_A - v}{1 - \frac{u_A v}{c^2}} \qquad\qquad u'_B = \frac{u_B - v}{1 - \frac{u_B v}{c^2}}$$

Le velocità in K' devono essere uguali ed opposte cioè

$$u'_A = -u'_B$$
$$\frac{u_A - v}{1 - \dfrac{u_A v}{c^2}} = -\frac{u_B - v}{1 - \dfrac{u_B v}{c^2}}$$
$$(u_A - v)\left(1 - \frac{u_B v}{c^2}\right) = (v - u_B)\left(1 - \frac{u_A v}{c^2}\right)$$
$$(u_A + u_B)v^2 - 2(c^2 + u_A u_B)v + c^2(u_A + u_B) = 0 \quad .$$

L'equazione si risolve fornendo:

$$v = \frac{c^2 + u_A u_B \pm \sqrt{c^2(c^2 - u_A^2)(c^2 - u_B^2)}}{u_A + u_B} = c\,\frac{1 + \dfrac{u_A u_B}{c^2} \pm \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{(u_A + u_B)/c}. \tag{S.5.5}$$

ossia, inserendo i valori numerici,

$$v = \frac{c^2 + \dfrac{12}{25}c^2 \pm \dfrac{12}{25}c^2}{\dfrac{7}{5}c} = \begin{cases} \dfrac{7}{5}c & \text{non accettabile} \\ \dfrac{5}{7}c & \end{cases}$$

Quindi il SR K' ha velocità $v = \dfrac{5}{7}c$.

<u>Secondo metodo: Rapidità</u>
Usiamo la proprietà della rapidità di essere additiva per TL collineari.
In K le rapidità di A e B sono date da:

$$\beta_A = \frac{u_A}{c} = \tanh Y_A \qquad\qquad \beta_B = \frac{u_B}{c} = \tanh Y_B$$

Nel SR K', in moto con velocità v e rapidità $\beta = \dfrac{v}{c} = \tanh Y$, si avrà

$$\frac{u'_A}{c} = \tanh Y'_A = \tanh(Y_A - Y) \qquad\qquad \frac{u'_B}{c} = \tanh Y'_B = \tanh(Y_B - Y)$$

Deve essere $u'_A = -u'_B$ cioè

$$Y'_A = -Y'_B \qquad \Longrightarrow \qquad Y_A - Y = Y - Y_B \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \frac{1}{2}(Y_A + Y_B)$$

da cui

$$v = c \tanh Y = \frac{5}{7}c\,.$$

Soluzione 5.12

Procedendo come nell'esercizio 5.11 si arriva al risultato dell'equazione (S.5.5).
La velocità v deve essere,in modulo, minore di c, per verificarlo calcoliamo $1 - \dfrac{v}{c}$ (useremo le notazioni $\beta_A = u_A/c$, $\beta_B = u_B/c$):

$$1 - \frac{v}{c} = 1 - \frac{1 + \beta_A\beta_B \pm \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{\beta_A + \beta_B} = \frac{-(1 - \beta_A)(1 - \beta_B) \mp \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{\beta_A + \beta_B}$$

Il primo termine a numeratore è sicuramente negativo, poiché u_A e u_B sono minori di c (per ipotesi sono le velocità di due punti materiali nel SR K). Quindi il risultato con il segno superiore (che corrisponde al segno '+' nella (S.5.5)) non è accettabile, perché dà un risultato negativo ($\beta > 1!$).
Invece il risultato con il segno inferiore (che corrisponde al segno '-' nella (S.5.5)) si può riscrivere come :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v}{c} &= \frac{-(1-\beta_A)(1-\beta_B) + \sqrt{(1-\beta_A^2)(1-\beta_B^2)}}{(\beta_A + \beta_B)} \\ &= \sqrt{(1-\beta_A)(1-\beta_B)}\,\frac{\left(-\sqrt{(1-\beta_A)(1-\beta_B)} + \sqrt{(1+\beta_A)(1+\beta_B)}\right)}{\beta_A + \beta_B} \end{aligned}$$

che è sicuramente positivo. L'unica soluzione accettabile dunque è

$$v = c\,\frac{1 + \dfrac{u_A u_B}{c^2} - \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{(u_A + u_B)/c} = c\,\frac{1 + \beta_A\beta_B - \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{\beta_A + \beta_B}.$$

Con il metodo della rapidità, utilizzando le stesse notazioni dell'esercizio 5.11 si ha

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh Y = \tanh \frac{1}{2}(Y_A + Y_B)$$

da cui, utilizzando le identità delle funzioni iperboliche (tra cui $\tanh\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cosh\alpha - 1}{\sinh\alpha}$) si ottiene

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\cosh(Y_A + Y_B) - 1}{\sinh(Y_A + Y_B)} = \frac{\cosh Y_A \cosh Y_B + \sinh Y_A \sinh Y_B - 1}{\sinh Y_A \cosh Y_B + \cosh Y_A \sinh Y_B} = \\ &= \frac{1 + \tanh Y_A \tanh Y_B - \dfrac{1}{\cosh Y_A \cosh Y_B}}{\tanh Y_A + \tanh Y_B} = \frac{1 + \beta_A\beta_B - \dfrac{1}{\gamma(u_A)\gamma(u_B)}}{\beta_A + \beta_B} \end{aligned}$$

Soluzione 5.13

Il prodotto scalare delle quadrivelocità è

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$U_A \cdot U_B = U_A^\mu U_{B\mu} = = -c^2\gamma(u_A)\gamma(u_B) + \gamma(u_A)\gamma(u_B)\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{u}_B = = -c^2\gamma(u_A)\gamma(u_B)\left(1 - \dfrac{\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{u}_B}{c^2}\right)$	$U_A \cdot U_B = U_A^\mu U_{B\mu} = = c^2\gamma(u_A)\gamma(u_B) - \gamma(u_A)\gamma(u_B)\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{u}_B = = c^2\gamma(u_A)\gamma(u_B)\left(1 - \dfrac{\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{u}_B}{c^2}\right)$

Quindi, usando la (5.3),

$$\gamma(u_{rel}) = \gamma(u_A)\gamma(u_B)\left(1 - \frac{\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{u}_B}{c^2}\right) = \frac{|U_A \cdot U_B|}{c^2}$$

e, di conseguenza,

$$u_{rel} = c\beta_{rel} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(u_{rel})}} = c\sqrt{1 - \frac{c^4}{(U_A\cdot U_B)^2}}\,.$$

Da questo risultato appare evidente che il modulo della velocità relativa tra due corpi è un invariante.

Soluzione 5.14

(a) La particella si muove in K' con velocità $\vec{u'}$, che si ottiene con le trasformazioni di Lorentz per la velocità ($\beta = v/c$):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = -v = -\beta c$$
$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{c}{\alpha\gamma(v)}$$
$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = 0\ .$$

Se la velocità $\vec{u'}$ è parallela alla bisettrice del secondo quadrante significa che $u'_x = -u'_y$, cioè:

$$\beta c = \frac{c}{\alpha\gamma(v)} \qquad \gamma\beta = \frac{1}{\alpha} \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\alpha}$$

e si trova:

$$v = c\beta = \frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad \gamma = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$$

(b) La risposta segue immediatamente dai risultati del punto precedente:

$$u'_x = -c\beta = -\frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad u'_y = \frac{c}{\alpha\gamma(v)} = \frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad u'_z = 0$$

$$u' = \sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2} = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Soluzione 5.15

(a) $u = 0.8\,c \qquad v = 0.4\,c \qquad \gamma(v) = \dfrac{5}{\sqrt{21}}$

Nel SR K le componenti della velocità sono:

$$u_x = u\cos\alpha \qquad u_y = u\sin\alpha \qquad u_z = 0$$

Nel SR K' le componenti della velocità sono:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = 0$$

Ma nel SR K' la particella si muove lungo l'asse y, quindi

$$u'_x = 0 \qquad u_x = u\cos\alpha = v \qquad \cos\alpha = \frac{v}{u} = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 60^\circ$$

(b)

$$u' = u'_y = \frac{u \sin\alpha}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{7}} c = 0.76\, c$$

Soluzione 5.16

La lunghezza propria della sbarretta è legata alla lunghezza misurata in K dalla relazione $L_0 = L\gamma(u)$. La velocità u' della sbarretta in K' è la velocità relativa tra la sbarretta e il SR K' e si ottiene dalla regola di composizione delle veocità:

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}\,;$$

la lunghezza della sbarretta in K' risulta:

$$L' = \frac{L_0}{\gamma(u')} = L\frac{\gamma(u)}{\gamma(u')}$$

per $\gamma(u')$ usiamo la relazione (5.3):

$$L' = L\frac{\gamma(u)}{\gamma(u)\gamma(v)(1 - uv/c^2)} = \frac{L}{\gamma(v)(1 - uv/c^2)}$$

Il risultato è, ovviamente, in accordo con quello trovato nell'esercizio 4.9.
Risolviamo per ottenere u:

$$\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) = \frac{L}{L'} = \frac{1}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad u = \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{1}{\alpha\gamma}\right) = \frac{3}{4}c$$

È immediato ora calcolare la lunghezza propria della sbarretta:

$$L_0 = L\gamma(u) = \frac{4}{\sqrt{7}}L\,.$$

Soluzione 5.17

La tri-velocità di A è:

$$\vec{u}_A = \left(\frac{2}{3}c, \frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c\right) \qquad |\vec{u}_A| = \sqrt{\frac{2}{3}}c \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(u_A) = \sqrt{3}$$

quindi la quadrivelocità risulta:

$$U_A^\mu = (\gamma(u_A)c, \gamma(u_A)\vec{u}_A) = \left(\sqrt{3}c\,,\ \frac{2}{\sqrt{3}}c\,,\ \frac{c}{\sqrt{3}}\,,\ \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

Ricaviamo la quadrivelocità nel SR K' con una TL in direzione y, con $v = c/2$ ($\gamma(v) = 2/\sqrt{3}$):

$$\begin{aligned} U'^0_A &= \gamma(v)\left(U^0_A - \beta U^y_A\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}c - \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{3}c \\ U'^x_A &= U^x_A = \frac{2}{\sqrt{3}}c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U'^y_A &= \gamma(v)\left(U^y_A - \beta U^0_A\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{c}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{3}c\right) = -\frac{c}{3} \\
U'^z_A &= U^z_A = \frac{c}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Soluzione 5.18

Consideriamo un segnale luminoso che si muove, nel SR K in una direzione generica individuata dagli angoli θ, φ. La sua velocità ha componenti

$$u_x = c\sin\theta\cos\varphi \qquad u_y = c\sin\theta\sin\varphi \qquad u_z = c\cos\theta$$

Vogliamo calcolare la velocità di questo segnale in un SR K' in moto, rispetto a K, con velocità $v = \beta c$ in direzione $+z$ (questa scelta di una TL in direzione non è restrittiva: data una TL in direzione arbitraria si può sempre definire un sistema di assi cartesiani tali che l'asse z sia parallelo alla direzione del moto relativo dei SR).

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_z v}{c^2}\right)} = \frac{c\sin\theta\cos\varphi}{\gamma(v)(1-\beta\cos\theta)} \\
u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_z v}{c^2}\right)} = \frac{c\sin\theta\sin\varphi}{\gamma(v)(1-\beta\cos\theta)} \\
u'_z &= \frac{u_z - v}{1 - \frac{u_z v}{c^2}} = \frac{c(\cos\theta - \beta)}{1-\beta\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il modulo della velocità trasformata:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}'^2 &= {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2 = \\
&= \frac{c^2\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right)}{\gamma^2(v)\,(1-\beta\cos\theta)^2} + \frac{c^2(\cos\theta-\beta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \\
&= c^2\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta + (\cos\theta-\beta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} = c^2\frac{\sin^2\theta - \beta^2\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\beta\cos\theta + \beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} = \\
&= c^2\frac{1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = c^2
\end{aligned}
$$

Quindi anche nel SR K' la velocità della luce è c.

Soluzione 5.19

Sia $\mathbf{u}$ la velocità del segnale in K:

$$\mathbf{u} = (c\sin\theta\cos\varphi, c\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta)$$

e sia $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_z = c\beta\,\hat{\mathbf{u}}_z$ la velocità relativa tra i due SR. Applichiamo le formule di trasformazione delle velocità ricavata nell'esercizio 5.7:

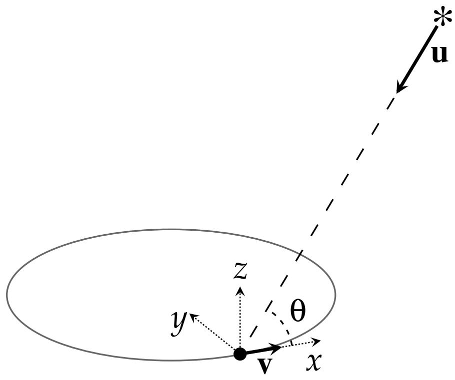
$$u'_x \equiv c\sin\theta'\cos\varphi' = \frac{c\sin\theta\cos\varphi}{\gamma(v)(1-\beta\cos\theta)}$$

$$u'_y \equiv c \sin\theta' \sin\varphi' = \frac{c \sin\theta \sin\varphi}{\gamma(v)(1-\beta\cos\theta)}$$
$$u'_z \equiv c\cos\theta' = \frac{c(\cos\theta - \beta)}{1-\beta\cos\theta}$$

per cui

$$\tan\varphi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$
$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{{u'_x}^2 + {u'_y}^2}}{u'_z} = \frac{\sin\theta}{\gamma(v)(\cos\theta - \beta)}$$

Soluzione 5.20



Se la posizione reale della stella è ad angolo θ rispetto al piano dell'orbita terrestre, la velocità della luce nel SR della stella ha componenti:

$$u_x = -c\cos\theta \qquad u_y = 0 \qquad u_z = -c\sin\theta$$

Le componenti nel SR della Terra sono quindi:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{-c\cos\theta - v}{1 + \frac{c\cos\theta v}{c^2}} = \frac{-c(\cos\theta+\beta)}{1+\beta\cos\theta} \\ u'_y &= 0 \\ u'_z &= \frac{-c\sin\theta}{\gamma(v)(1+\beta\cos\theta)} \end{aligned}$$

Quindi l'angolo di osservazione dalla Terra θ' è dato da:

$$\cos\theta' = -\frac{u'_x}{c} = \frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta} = (\cos\theta+\beta)(1-\beta\cos\theta+\mathcal{O}(\beta^2)) \simeq \cos\theta + \beta\sin^2\theta$$

l'approssimazione usata è valida poiché la velocità della Terra è molto piccola rispetto a c. L'angolo θ' differisce da θ_0 per l'angolo di aberrazione α: $\theta' = \theta - \alpha$; essendo α molto piccolo, si possono usare altre approssimazioni :

$$\cos\theta' = \cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \simeq \cos\theta + \alpha\sin\theta\,,$$

sostituendo nell'equazione precedente si trova

$$\alpha = \beta\sin\theta.$$

Nei punti A e C dell'orbita terrestre $\theta = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\alpha_{max} = \alpha_A = \alpha_C = \beta\,.$$

Nei punti B e D dell'orbita terrestre $\theta = \theta_0$, quindi

$$\alpha_{min} = \alpha_B = \alpha_D = \beta\sin\theta_0\,.$$

La stella quindi appare percorrere un'orbita ellittica nel corso dell'anno, con i semiassi proporzionali ad α_{max} e α_{min}.

Soluzione 5.21

(a) La trasformazione da K_0 a K_1 si scrive facilmente

$$\begin{cases} ct' = \gamma(\beta_1)\,(ct - \beta_1\, x) = \dfrac{5}{4}\left(ct - \dfrac{3}{5}x\right) = \dfrac{5}{4}ct - \dfrac{3}{4}x \\ x' = \gamma(\beta_1)\,(x - \beta_1\, ct) = \dfrac{5}{4}\left(x - \dfrac{3}{5}ct\right) = -\dfrac{3}{4}ct + \dfrac{5}{4}x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{S.5.6}$$

ossia, in forma matriciale,

$$X' \quad = \Lambda_1 X \qquad \text{con} \qquad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente la trasformazione per la trasformazione da K_1 a K_2 si ha

$$\begin{cases} ct'' = \gamma(\beta_2')\,(ct' - \beta_2'\, x') = \dfrac{5}{3}\left(ct' - \dfrac{4}{5}x'\right) = \dfrac{5}{3}ct' - \dfrac{4}{3}y' \\ x'' = x' \\ y'' = \gamma(\beta_2')\,(y' - \beta_2'\, ct') = \dfrac{5}{3}\left(y' - \dfrac{4}{5}ct'\right) = -\dfrac{4}{3}ct' + \dfrac{5}{3}y' \\ z'' = z' \end{cases} \tag{S.5.7}$$

$$X'' \quad = \Lambda_2 X' \qquad \text{con} \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composizione delle due TL si ottiene dal prodotto delle matrici:

$$\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 25/12 & -5/4 & -4/3 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, in forma esplicita:

$$\begin{aligned} ct'' &= \frac{25}{12}ct - \frac{5}{4}x - \frac{4}{3}y \\ x'' &= -\frac{3}{4}ct + \frac{5}{4}x \\ y'' &= -\frac{5}{3}ct + x + \frac{5}{3}y \\ z'' &= z \end{aligned}$$

come si può verificare anche sostituendo le (S.5.6) nelle (S.5.7).

(b) Per calcolare la velocità di K_2 rispetto a K_0 occorre applicare le trasformazioni delle velocità, tenendo presente che K_0 si muove rispetto a K_1 con velocità $-\boldsymbol{\beta}_1$:

$$\beta_x^* = \frac{\beta'_{2x} - (-\beta_1)}{1 - \beta'_{2x}(-\beta_1)} = \frac{0 + \beta_1}{1 - 0 \cdot \beta_1} = \beta_1 = \frac{3}{5}$$

$$\beta_x^* = \frac{\beta'_{2y}}{\gamma(\beta_1)(1 - \beta'_{2x}(-\beta_1))} = \frac{\beta'_2}{\gamma(\beta_1)} = \frac{4}{5}\frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

$$\beta_z^* = 0$$

Il modulo della velocità β^* risulta

$$\beta^* = \sqrt{{\beta_x^*}^2 + {\beta_y^*}^2} = \frac{\sqrt{481}}{25}$$

e quindi

$$\gamma^* = \gamma(\beta^*) = \frac{1}{\sqrt{1 - {\beta^*}^2}} = \frac{25}{12}\,.$$

La matrice Λ^* si ottiene dalla (S.2.1) con $\beta_x = \beta_x^*$, $\beta_y = \beta_y^*$, $\beta_z = 0$:

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} 25/12 & -5/4 & -4/3 & 0 \\ -5/4 & 223/148 & 20/37 & 0 \\ -4/3 & 20/37 & 175/111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è palesemente diversa da $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$.

(c) Notiamo che sia la trasformazione composta $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$ che la trasformazione Λ^* lasciano invariato z. Quindi dobbiamo cercare una rotazione nel piano xy (cioè attorno all'asse z) che renda le due trasformazioni coincidenti. La matrice di rotazione sarà della forma

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avendo introdotto la notazione (comoda) $\cos\theta = c$, $\sin\theta = s$. Ci sono due possibilità:

$$\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = \Lambda^* \cdot R_3 \qquad \text{oppure} \qquad \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = R_3 \cdot \Lambda^*$$

Proviamo con la prima ipotesi. La matrice prodotto $\Lambda^* \cdot R_3$ risulta

$$\Lambda^* \cdot R_3 = \begin{pmatrix} 25/12 & -5/4 & -4/3 & 0 \\ -5/4 & 223/148 & 20/37 & 0 \\ -4/3 & 20/37 & 175/111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/12 & \dots \\ -5/4 & \dots \\ -4/3 & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

è inutile completare il calcolo perché gli elementi della prima colonna sono costanti (non dipendono da θ) e sono diversi dai corrispondenti elementi di $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$. Non è possibile quindi trovare un valore di θ che renda uguali i due prodotti di matrici.
Proviamo nel secondo modo:

$$R_3 \cdot \Lambda^* \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/12 & -5/4 & -4/3 & 0 \\ -5/4 & 223/148 & 20/37 & 0 \\ -4/3 & 20/37 & 175/111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25/12 & -5/4 & -4/3 & 0 \\ -\dfrac{5}{4}c + \dfrac{4}{3}s & \dfrac{223}{148}c - \dfrac{20}{37}s & \dfrac{20}{37}c - \dfrac{175}{111}s & 0 \\ -\dfrac{5}{4}s - \dfrac{4}{3}c & \dfrac{223}{148}s + \dfrac{20}{37}c & \dfrac{20}{37}s + \dfrac{175}{111}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{S.5.8}$$

Ora la prima riga di $R_3 \cdot \Lambda^*$ ha elementi costanti e uguali ai corrispondenti elementi di $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$. Anche l'ultima riga e l'ultima colonna coincidono. Cerchiamo un valore di θ che renda uguali anche gli altri elementi. Consideriamo la prima colonna:

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{4}c + \dfrac{4}{3}s = -\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{5}{4}s - \dfrac{4}{3}c = -\dfrac{5}{3} \, . \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$c = \cos\theta = \frac{35}{37}\,, \qquad s = \sin\theta = \frac{12}{37} \qquad \text{con} \qquad s^2 + c^2 = 1\,.$$

È facile verificare che, sostituendo i valori c, s appena trovati nella matrice (S.5.8), anche gli altri elementi vengono a coincidere con i corrispondenti elementi di $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$.
Abbiamo così dimostrato che

$$\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = R_3(\theta) \cdot \Lambda^*\,,$$

ossia la composizione di due boost in direzioni ortogonali equivale alla composizione di un boost seguito da una rotazione spaziale.

Osservazione 1: L'angolo θ di rotazione tra gli assi di K_0 e K_2 è, in generale, diverso dall'angolo φ della velocità relativa rispetto all'asse x (Fig. 5.2c, pag. 21).

Osservazione 2: Questo esempio dimostra che l'insieme delle TL pure non ha la struttura di Gruppo.

Soluzione 5.22

Scriviamo, per semplicità $\gamma_1 = \gamma(\beta_1)$ e $\gamma_2' = \gamma(\beta_2')$.
Scriviamo le TL da K_0 a K_1 e da K_1 a K_2:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(\beta_1)\,(ct - \beta_1\, x) = \gamma_1 ct - \gamma_1\beta_1 x \\ x' &= \gamma(\beta_1)\,(x - \beta_1\, ct) = -\gamma_1\beta_1 ct + \gamma_1 x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ct'' &= \gamma(\beta_2')\,(ct' - \beta_2'\, x') = \gamma_2' ct' - \gamma_2'\beta_2' x' \\ x'' &= x' \\ y'' &= \gamma(\beta_2')\,(y' - \beta_2'\, ct') = -\gamma_2'\beta_2' ct' + \gamma_2' x' \\ z'' &= z' \end{aligned}$$

e le matrici di Lorentz corrispondenti sono

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2' & 0 & -\gamma_2'\beta_2' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2'\beta_2' & 0 & \gamma_2' & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto delle matrici risulta

$$\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2' & -\gamma_1\gamma_2'\beta_1 & -\gamma_2'\beta_2' & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2'\beta_2' & \gamma_1\gamma_2'\beta_1\beta_2' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la velocità di K_2 rispetto a K_0:

$$\beta_x^* = \frac{\beta_{2x}' - (-\beta_1)}{1 - \beta_{2x}'(-\beta_1)} = \frac{0 + \beta_1}{1 - 0 \cdot \beta_1} = \beta_1$$

$$\beta_x^* = \frac{\beta_{2y}'}{\gamma(\beta_1)(1 - \beta_{2x}'(-\beta_1))} = \frac{\beta_2'}{\gamma(\beta_1)}$$

$$\beta_z^* = 0$$

Quindi

$$\beta^* = \sqrt{{\beta_x^*}^2 + {\beta_y^*}^2} = \sqrt{\beta_1^2 + {\beta_2'}^2/\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_1}\sqrt{\beta_1^2\gamma_1^2 + {\beta_2'}^2} = \sqrt{\beta_1^2 + {\beta_2'}^2 - \beta_1^2{\beta_2'}^2}$$

$$\gamma^* = \gamma(\beta^*) = \frac{1}{\sqrt{1 - {\beta^*}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - {\beta_2'}^2)}} = \gamma_1\gamma_2',$$

e la matrice Λ^* è

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \gamma^* & -\gamma^*\beta_x^* & -\gamma^*\beta_y^* & 0 \\ \gamma^*\beta_x^* & 1 + \dfrac{(\gamma^* - 1){\beta_x^*}^2}{{\beta^*}^2} & \dfrac{(\gamma^* - 1)\beta_x^*\beta_y^*}{{\beta^*}^2} & 0 \\ -\gamma^*\beta_y^* & \dfrac{(\gamma^* - 1)\beta_x^*\beta_y^*}{{\beta^*}^2} & 1 + \dfrac{(\gamma^* - 1){\beta_y^*}^2}{{\beta^*}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2' & -\gamma_1\gamma_2'\beta_1 & -\gamma_2'\beta_2' & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2'\beta_1 & \dfrac{{\beta_2'}^2 + {\gamma_1}^3\gamma_2'{\beta_1}^2}{{\gamma_1}^2{\beta^*}^2} & \dfrac{(\gamma_1\gamma_2' - 1)\beta_1\beta_2'}{\gamma_1{\beta^*}^2} & 0 \\ -\gamma_2'\beta_2' & \dfrac{(\gamma_1\gamma_2' - 1)\beta_1\beta_2'}{\gamma_1{\beta^*}^2} & \dfrac{\gamma_1{\beta_1}^2 + \gamma_2'{\beta_2'}^2}{\gamma_1{\beta^*}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo una matrice di rotazione nel piano xy $R_3(\theta)$ tale che

$$\Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = R_3 \cdot \Lambda^*$$

(è facile vedere che $\Lambda^* \cdot R_3$ non potrà mai essere uguale a $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$).
La matrice R_3 avrà la forma

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \qquad \begin{matrix} c \equiv \cos\theta \\ s \equiv \sin\theta \end{matrix}$$

Calcoliamo gli elementi della matrice $R_3 \cdot \Lambda^*$

$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{00} = \gamma^* = \gamma_1\gamma_2'$$

$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{01} = -\gamma^* \beta^*_x = -\gamma_1 \gamma'_2 \beta_1$$
$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{02} = -\gamma^* \beta^*_y = -\gamma'_2 \beta'_2$$
$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{03} = 0$$

quindi gli elementi sulla prima riga di $R_3 \cdot \Lambda^*$ sono costanti (indipendenti da θ) e uguali ai corrispondenti elementi di $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$.
Anche gli elementi sulla quarta colonna e sulla quarta riga sono uguali (sono tutti 0 o 1).
Esaminiamo i restanti elementi sulla prima colonna di $R_3 \cdot \Lambda^*$:

$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{10} = -c\gamma^* \beta^*_x + s\gamma^* \beta^*_y = -c\gamma_1 \gamma'_2 \beta_1 + s\gamma'_2 \beta'_2$$
$$(R_3 \cdot \Lambda^*)_{20} = -s\gamma^* \beta^* - c\gamma^* \beta^*_y = -s\gamma_1 \gamma'_2 \beta_1 - c\gamma'_2 \beta'_2$$

ed imponiamo che siano uguali ai corrispondenti elementi di $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$:

$$-\gamma_1 \gamma'_2 \beta_1 \, c + \gamma'_2 \beta'_2 \, s = -\gamma_1 \beta_1$$
$$-\gamma'_2 \beta'_2 \, c - \gamma_1 \gamma'_2 \beta_1 \, s = -\gamma_1 \gamma'_2 \beta'_2$$

Il sistema si risolve fornendo

$$\begin{aligned} c = \cos\theta &= \frac{1}{\beta^{*2}} \left(\frac{\beta_1^2}{\gamma'_2} + \frac{\beta_2'^{\,2}}{\gamma_1} \right) = \gamma_1 \frac{\beta_x^{*2} + \gamma^* \beta_y^{*2}}{\gamma^* \beta^{*2}} \\ s = \sin\theta &= \frac{\beta_1 \beta'_2}{\beta^{*2}} \frac{\gamma_1 \gamma'_2 - 1}{\gamma_1 \gamma'_2} = \gamma_1 \frac{(\gamma^* - 1)\beta^*_x \beta^*_y}{\gamma^* \beta^{*2}} \end{aligned} \tag{S.5.9}$$

Si verifica che $s^2 + c^2 = 1$, quindi l'angolo θ è ben definito. In questo modo gli elementi sulla prima colonna della matrice $R_3 \cdot \Lambda^*$ coincidono con i corrispondenti della matrice $\Lambda_2 \cdot \Lambda_1$. Si può verificare (con molta pazienza!) che, con l'angolo θ definito dalle (S.5.9), anche gli altri elementi delle matrici vengono a coincidere, per cui

$$R_3 \cdot \Lambda^* = \Lambda_2 \cdot \Lambda_1$$

e possiamo concludere che la composizione di due TL pure in direzioni ortogonali risulta essere una TL pura combinata con una rotazione spaziale.

Soluzione 5.23

(a) Primo metodo: definizione della quadrivelocità

$$U^\mu = (\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}) = (U^0, \vec{U}) = \left(2\,c\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,c\,,\ 0\,,\ U^3 \right)$$

Dalla componente temporale ricaviamo

$$\gamma = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per le altre componenti abbiamo: $u^1 = \dfrac{U^1}{\gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}c, \quad u^2 = 0$

$$|\vec{u}| = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad u^3 = \frac{3}{4}c$$

quindi la terza componente spaziale della quadrivelocità è

$$U^3 = \gamma u^3 = \frac{3}{2}c$$

La tri-velocità è

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c\,,\, 0\,,\, \frac{3}{4}c \right)$$

Secondo metodo: proprietà della quadrivelocità

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
La quadrivelocità ha la norma (quadrata) pari a $-c^2$. È quindi immediato calcolare la componente mancante: $$U^\mu U_\mu = -c^2 = -(U^0)^2 + \vec{U}^2 = -4c^2 + \frac{3}{4}c^2 + (U^3)^2$$	La quadrivelocità ha la norma (quadrata) pari a c^2. È quindi immediato calcolare la componente mancante: $$U^\mu U_\mu = c^2 = (U^0)^2 - \vec{U}^2 = 4c^2 - \frac{3}{4}c^2 - (U^3)^2$$

quindi

$$U^3 = \frac{3}{2}c$$

Per il calcolo della tri-velocità si procede come nel metodo precedente

(b) Nel SR K' la componente z della velocità è nulla:

$$u'^3 = \frac{u^3 - v}{1 - \frac{vu^3}{c^2}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v = u^3 = \frac{3}{4}c$$

Per definizione la rapidità Y è legata alla velocità relativa dalla relazione

$$\beta = \tanh Y \qquad \Longrightarrow \qquad Y = (\tanh)^{-1}\beta = \frac{1}{2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} = 0.973$$

(c) TL da K a K' con $\beta = \frac{3}{4}$, ($\gamma = \frac{4}{\sqrt{7}}$):

$$\begin{aligned} U'^0 &= \gamma(U^0 - \beta U^3) = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(2c - \frac{3}{4}\frac{3}{2}c\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}c \\ U'^1 &= U^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}c \\ U'^2 &= U^2 = 0 \\ U'^3 &= \gamma(U^3 - \beta U^0) = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(\frac{3}{2}c - \frac{3}{4}2c\right) = 0 \end{aligned}$$

Per la tri-velocità possiamo usare le formule di composizione delle velocità:

$$u'^1 = \frac{u^1}{\gamma(v)\left(1 - \frac{vu^3}{c^2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{7}}c$$

$$
\begin{aligned}
u'^2 &= \frac{u^2}{\gamma(v)\left(1-\dfrac{vu^3}{c^2}\right)} = 0 \\
u'^3 &= \frac{u^3 - v}{\left(1-\dfrac{vu^3}{c^2}\right)} = 0
\end{aligned}
$$

oppure si può, come prima, usare la definizione della quadrivelocità:

$$
\gamma(u') = \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad u' = \sqrt{\frac{3}{7}}c = u'^1 \qquad u'^2 = u'^3 = 0
$$

Soluzione 5.24

Trasformazione di Lorentz per la velocità $\vec{u}$, con $\beta_v = \frac{1}{8}$, $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_v^2}} = \frac{8}{3\sqrt{7}}$:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x}{\gamma(v)\left(1-\dfrac{u_y v}{c^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{8}{3\sqrt{7}}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)} = \frac{3\sqrt{7}}{8}\,\frac{1}{2}c\,\frac{16}{15} = \frac{\sqrt{7}}{5}c \\
u'_y &= \frac{u_y - v}{1-\dfrac{u_y v}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2}c - \frac{1}{8}c}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{3}{8}c\,\frac{16}{15} = \frac{2}{5}c \\
u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1-\dfrac{u_y v}{c^2}\right)} = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $\vec{u}\,' = (\frac{\sqrt{7}}{5}c, \frac{2}{5}c, 0)$, $u' = |\vec{u}\,'| = \frac{\sqrt{11}}{5}c$

Quadrivelocità in K, con $u = |\vec{u}| = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $\gamma(u) = (1-\frac{u^2}{c^2})^{-1/2} = \sqrt{2}$

$$
U^\mu = (\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}) = \left(\sqrt{2}\,c, \sqrt{2}\frac{c}{2}, \sqrt{2}\frac{c}{2}, \sqrt{2}\cdot 0\right) = \left(\sqrt{2}\,c\,,\ \frac{c}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{c}{\sqrt{2}}\,,\ 0\right)
$$

Quadrivelocità in K', con $u' = \frac{\sqrt{11}}{5}c$, $\gamma(u') = \frac{5}{\sqrt{14}}$:

$$
U'^\mu = \left(\gamma(u')c, \gamma(u')\vec{u}\,'\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{14}}\,c\,,\ \frac{5}{\sqrt{14}}\,\frac{\sqrt{7}}{5}c\,,\ \frac{5}{\sqrt{14}}\,\frac{2}{5}c\,,\ 0\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{14}}c, \frac{1}{\sqrt{2}}c, \sqrt{\frac{2}{7}}c, 0\right)
$$

Il vettore quadrivelocità si trasforma secondo le Trasformazioni di Lorentz, infatti:

$$
U'^0 = \gamma(v)\left(U^0 - \beta_v\,U^y\right) = \frac{8}{3\sqrt{7}}\left(\sqrt{2}\,c - \frac{1}{8}\,\frac{1}{\sqrt{2}}c\right) = \frac{5}{\sqrt{14}}c
$$

$$\begin{aligned}
U'^x &= U^x = \frac{1}{\sqrt{2}}c \\
U'^y &= \gamma(v)\left(U^y - \beta_v\, U^0\right) = \frac{8}{3\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}c - \frac{1}{8}\sqrt{2}\,c\right) = \sqrt{\frac{2}{7}}c \\
U'^z &= U^z = 0
\end{aligned}$$

Capitolo 6

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 6.1

(a) Usando l'espressione classica per quantità di moto per le particelle dello stato iniziale e finale, la conservazione della quantità di moto totale nel SR K è

$$m\mathbf{u}_A + m\mathbf{u}_B = m\mathbf{w}_A + m\mathbf{w}_B$$

ovvero, esplicitando le componenti

$$\begin{aligned} mu_{Ax} + mu_{Bx} &= mw_{Ax} + mw_{Bx} \\ mu_{Ay} + mu_{By} &= mw_{Ay} + mw_{By} \\ mu_{Az} + mu_{Bz} &= mw_{Az} + mw_{Bz} \end{aligned}$$

Nel SR K' si ha, usando le (5.1) (pag. 16), per la quantità di moto totale nello stato iniziale ($i = y, z$):

$$\begin{aligned} P'_x &= mu'_{Ax} + mu'_{Bx} = m\frac{u_{Ax} - v}{1 - vu_{Ax}/c^2} + m\frac{u_{Bx} - v}{1 - vu_{Bx}/c^2} \\ P'_i &= mu'_{Ai} + mu'_{Bi} = m\frac{u_{Ai}}{\gamma(v)\,(1 - vu_{Ax}/c^2)} + m\frac{u_{Ai}}{\gamma(v)\,(1 - vu_{Ax}/c^2)} \end{aligned}$$

e nello stato finale:

$$\begin{aligned} Q'_x &= mw'_{Ax} + mw'_{Bx} = m\frac{w_{Ax} - v}{1 - vw_{Ax}/c^2} + m\frac{w_{Bx} - v}{1 - vw_{Bx}/c^2} \\ Q'_i &= mw'_{Ai} + mw'_{Bi} = m\frac{w_{Ai}}{\gamma(v)\,(1 - vw_{Ax}/c^2)} + m\frac{w_{Ai}}{\gamma(v)\,(1 - vw_{Ax}/c^2)} \end{aligned}$$

Come è evidente, in generale si ha $\mathbf{P}' \neq \mathbf{Q}'$, a parte il caso banale $\mathbf{u}_{A,B} = \mathbf{w}_{A,B}$ in cui lo stato finale è identico allo stato iniziale.
Quindi l'espressione classica per la quantità di moto non è compatibile con la Teoria della Relatività.

(b) Nel limite NR la nuova espressione per la quantità di moto deve ridursi alla definizione classica:

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}(u)\mathbf{u} \underset{u \ll c}{\longrightarrow} m\mathbf{u}$$

quindi deve essere

$$\mathcal{M}(0) = m\,. \tag{S.6.1}$$

Data una velocità $\mathbf{u}$, la quantità di moto $\mathcal{M}(u)\mathbf{u}$ deve essere ben definita e deve crescere, in modulo, al crescere di u. Quindi $\mathcal{M}(u)$, per un dato corpo, deve essere una funzione monodroma (cioè ad un solo valore) e monotonicamente crescente.

(c) Osserviamo, innanzi tutto, che per due particelle identiche la funzione $\mathcal{M}$ deve essere la stessa per entrambe. Lo stesso vale per l'energia cinetica $\mathcal{K}$.
La conservazione della quantità di moto, sia in MC che in Relatività, implica che un urto a due corpi avviene in un piano. Assumiamo che la particella incidente A si muova in direzione $+x$ e che nello stato finale le particelle si muovano nel piano xy. Nel SR del laboratorio K la particella B è inizialmente ferma. Nel SR del centro di massa K' la quantità di moto iniziale è zero, cioè $\mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B = 0$, ossia $|\mathbf{p}'_A| = |\mathbf{p}'_B|$ e

$$\mathcal{M}(u'_A)|\mathbf{u}'_A| = \mathcal{M}(u'_B)|\mathbf{u}'_B|\,.$$

Per l'ipotesi di monotonicità della funzione $\mathcal{M}(u)$ questo implica che, in K', $u'_A = u'_B \equiv u'$.
Vogliamo che la quantità di moto totale sia conservata in tutti i SR, quindi se era zero nello stato iniziale, dovrà esserlo anche nello stato finale in K': $\mathbf{q}'_A + \mathbf{q}'_B = 0$ da cui, ragionando come prima, si deduce $w'_A = w'_B \equiv w'$.
Definiamo quindi le velocità delle particelle nel modo seguente (fig. 6.1):

Velocità iniziali nel SR del laboratorio:

$$\mathbf{u}_A = (u_{Ax}, 0, 0) \qquad\qquad \mathbf{u}_B = (0, 0, 0)$$

Velocità finali nel SR del laboratorio:

$$\mathbf{w}_A = (w_{Ax}, w_{Ay}, 0) \qquad\qquad \mathbf{w}_B = (w_{Bx}, w_{By}, 0)$$

Velocità iniziali nel SR del centro di massa:

$$\mathbf{u}'_A = (u', 0, 0) \qquad\qquad \mathbf{u}'_B = (-u', 0, 0)$$

Velocità finali nel SR del centro di massa:

$$\mathbf{w}'_A = (w'\cos\theta', w'\sin\theta', 0) \qquad\qquad \mathbf{w}'_B = (-w'\cos\theta', -w'\sin\theta', 0)$$

Scriviamo le condizioni di conservazione della quantità di moto totale nel SR del laboratorio:

$$p_{Ax} + p_{Bx} = q_{Ax} + q_{Bx} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{M}(u_A)u_{Ax} = \mathcal{M}(w_A)w_{Ax} + \mathcal{M}(w_B)w_{Bx} \tag{S.6.2a}$$
$$p_{Ay} + p_{By} = q_{Ay} + q_{By} \quad\Longrightarrow\quad 0 = \mathcal{M}(w_A)w_{Ay} + \mathcal{M}(w_B)w_{By} \tag{S.6.2b}$$

Nel SR del centro di massa K' la quantità di moto totale è zero, per quanto detto prima.
Scriviamo la conservazione dell'energia cinetica totale in K':

$$\mathcal{K}(u'_A) + \mathcal{K}(u'_B) = 2\mathcal{K}(u') = 2\mathcal{K}(w')\ .$$

Anche $\mathcal{K}$ deve essere univocamente definita e monotona, quindi la condizione $\mathcal{K}(u') = \mathcal{K}(w')$

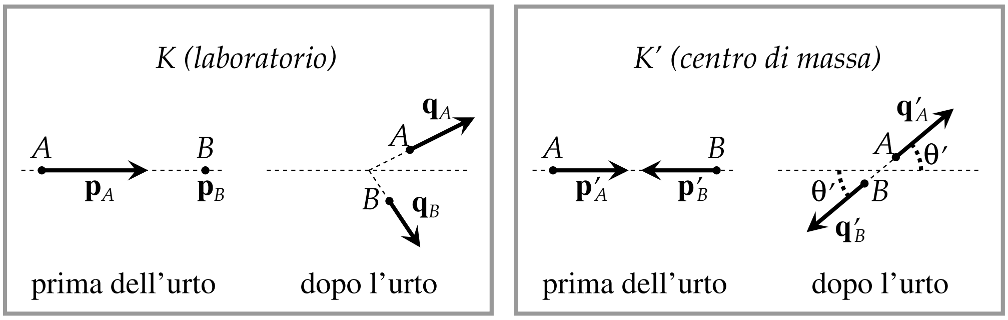


Figura 6.1: Collisione elastica tra particelle identiche (esercizio 6.1)

implica

$$u' = w' \ .$$

In conclusione, in un urto elastico nel SR del centro di massa, le due particelle mantengono invariato il modulo della velocità e della quantità di moto (e quindi anche l'energia cinetica), esattamente come accade in MC.
La velocità relativa v tra K e K' si ottiene dalla relazione:

$$0 = u_{Bx} = \frac{u'_{Bx} + v}{1 + vu'_{Bx}/c^2} = \frac{-u' + v}{1 - vu'/c^2} \qquad \Longrightarrow \qquad v = -u'_{Bx} = u'$$

quindi tutte le velocità delle particelle nel SR del laboratorio si scrivono come (usiamo $\beta = v/c$)

$$u_{Ax} = \frac{u'_{Ax} + v}{1 + vu'_{Ax}/c^2} = \frac{2u'}{1 + v^2/c^2} = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2} \tag{S.6.3a}$$

$$u_{Bx} = u_{Ay} = u_{By} = 0 \tag{S.6.3b}$$

$$w_{Ax} = \frac{w'_{Ax} + v}{1 + \dfrac{w'_{Ax} v}{c^2}} = \frac{w' \cos\theta' + v}{1 + \dfrac{vw' \cos\theta'}{c^2}} = \frac{c\beta(1 + \cos\theta')}{1 + \beta^2 \cos\theta'} \tag{S.6.3c}$$

$$w_{Ay} = \frac{w'_{Ay}}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{w'_{Ax} v}{c^2}\right)} = \frac{w' \sin\theta'}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{vw' \sin\theta'}{c^2}\right)} = \frac{c\beta \sin\theta'}{\gamma(v)\,(1 + \beta^2 \cos\theta')} \tag{S.6.3d}$$

$$w_{Bx} = \frac{w'_{Bx} + v}{1 + \dfrac{w'_{Bx} v}{c^2}} = \frac{-w' \cos\theta' + v}{1 - \dfrac{vw' \cos\theta'}{c^2}} = \frac{c\beta(1 - \cos\theta')}{1 - \beta^2 \cos\theta'} \tag{S.6.3e}$$

$$w_{By} = \frac{w'_{By}}{\gamma(v)\left(1 + \dfrac{w'_{Bx} v}{c^2}\right)} = \frac{-w' \sin\theta'}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{vw' \sin\theta'}{c^2}\right)} = \frac{-c\beta \sin\theta'}{\gamma(v)\,(1 - \beta^2 \cos\theta')} \tag{S.6.3f}$$

Sostituiamo nella (S.6.2b):

$$0 \quad = \quad \mathcal{M}(w_A) w_{Ay} + \mathcal{M}(w_B) w_{By} =$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{M}(w_A)\frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(v)\,(1+\beta^2\cos^2\theta')} + \mathcal{M}(w_B)\frac{-c\beta\sin\theta'}{\gamma(v)\,(1-\beta^2\cos\theta')} = \\ &= \frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(v)}\left(\frac{\mathcal{M}(w_A)}{1+\beta^2\cos^2\theta'} - \frac{\mathcal{M}(w_B)}{1-\beta^2\cos^2\theta'}\right) \end{aligned}$$

quindi deve essere

$$\frac{\mathcal{M}(w_A)}{1+\beta^2\cos^2\theta'} = \frac{\mathcal{M}(w_B)}{1-\beta^2\cos^2\theta'}$$

Questa condizione deve essere verificata per ogni valore dell'angolo θ'. Riscriviamola nel caso particolare di $\theta' = 0$:

$$\frac{\mathcal{M}(w_A)}{1+\beta^2} = \frac{\mathcal{M}(w_B)}{1-\beta^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{M}(w_A) = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\mathcal{M}(w_B)\,, \tag{S.6.4}$$

ma per $\theta' = 0$ le (S.6.3c-f) danno

$$\left.\begin{aligned} w_{Ax} &= \frac{2c\beta}{1+\beta^2} = u_{Ax} \\ w_{Ay} &= 0 = u_{Ay} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad w_A = u_A = \frac{2c\beta}{1+\beta^2}$$

$$w_{Bx} = w_{By} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w_B = u_B = 0$$

quindi otteniamo dalla (S.6.4), ricordando la (S.6.1):

$$\mathcal{M}(u_A) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\mathcal{M}(0) = m\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\,.$$

Dalla (S.6.3a) ricaviamo:

$$\gamma(u_A) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u_A^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \tag{S.6.5}$$

e possiamo concludere:

$$\mathcal{M}(u_A) = m\gamma(u_A)$$

quindi una plausibile definizione per la quantità di moto di una particella con velocità $\mathbf{u}$, è

$$\mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{u}\,.$$

Osservazione: ovviamente la derivazione presentata qui **non** è una dimostrazione. La definizione della quantità di moto come $\mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{u}$ è un **postulato**, e la sua validità viene confermata dalle osservazioni sperimentali. Abbiamo verificato che la quantità di moto così definita è compatibile con le TL in un particolare fenomeno (urto elastico a due corpi) e in due particolari SR. La dimostrazione che questa definizione è compatibile con le TL in ogni altra situazione viene dal carattere di (quadri)vettore controvariante del quadrimpulso, di cui questa $\mathbf{p}$ costituisce la parte spaziale.

Soluzione 6.2

(a) La funzione $g(u)$ deve avere, evidentemente, le dimensioni del quadrato di una velocità. Dal punto di vista matematico deve essere monodroma e monotona strettamente crescente.

Nel limite non relativistico deve permette di riottenere l'espressione classica per l'energia cinetica $\mathcal{K}_{cl} = \frac{1}{2}mu^2$ a meno, eventualmente, di una costante additiva:

$$\mathcal{E}(m,u) = m\,g(u) \underset{u \ll c}{\longrightarrow} \text{cost.} + \frac{1}{2}mu^2 \tag{S.6.6}$$

La funzione $g(u)$ deve dipendere solo dalla velocità di una particella e non dalla sua massa, quindi deve essere identica per tutte le particelle.

(b) Osserviamo innanzi tutto che, per la conservazione della quantità di moto, nel SR del laboratorio la particella finale si muove nella stessa direzione (e verso) della particella incidente. Scegliamo gli assi cartesiani in modo che il processo avvenga lungo l'asse x. Scriviamo le quantità di moto per le particelle A, B, C nel SR K (indichiamo solo le componenti x, le uniche rilevanti):

$$p_A = m\gamma(u_A)u_A \qquad p_B = 0 \qquad p_C = M\gamma(v)v$$

e del centro di massa K'

$$p'_A = m\gamma(u')u' \qquad p'_B = -m\gamma(u')u' \qquad p'_C = 0$$

Scriviamo la condizione di conservazione della quantità di moto totale nel SR del laboratorio:

$$p_A + p_B = p_C \qquad \Longrightarrow \qquad m\gamma(u_A)u_A = M\gamma(v)v \tag{S.6.7}$$

La condizione di conservazione della quantità di moto totale nel SR del centro di massa è banalmente $\mathbf{p'}_A + \mathbf{p'}_B = 0$, che è automaticamente soddisfatta per come abbiamo definito le quantità di moto delle singole particelle. Scriviamo ora le condizioni di conservazione dell'energia relativistica in K, utilizzando l'*Ansatz* proposto (6.11) di pag. 24:

$$m\,g(u_A) + m\,g(0) = M\,g(v)\,.$$

Dalla S.6.6 vediamo che $g(0)$ deve essere una costante. Poniamo $g(0) = \alpha$, per cui

$$m\,(g(u_A) + \alpha) = M\,g(v) \tag{S.6.8}$$

La conservazione dell'energia in K' si scrive come:

$$2m\,g(u') = M\,g(0) = M\alpha \tag{S.6.9}$$

La velocità della particella finale C è la velocità del centro di massa nel SR del laboratorio, cioè è la velocità relativa tra i SR K e K', per cui le regole di trasformazione delle velocità danno:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u' = v \\ u_A &= \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2c\beta}{1 + \beta^2} \end{aligned} \tag{S.6.10}$$

Dalla (S.6.9) ricaviamo, usando anche le relazioni appena trovate,

$$g(u') = g(v) = \frac{\alpha M}{2m}$$

che sostituito nella (S.6.8) dà

$$m\,(g(u_A) + \alpha) = M\frac{\alpha M}{2m} \qquad \Longrightarrow \qquad g(u_A) = \alpha\left(\frac{M^2}{2m^2} - 1\right)\,.$$

Dalla conservazione della quantità di moto (S.6.7) si ha, usando la (S.6.10)

$$\frac{M}{m} = \frac{\gamma(u_A)u_A}{\gamma(v)v} = \frac{\gamma(u_A)}{\gamma(v)}\frac{2}{1+\beta^2}$$

per cui

$$g(u_A) = \alpha\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma^2(u_A)}{\gamma^2(v)}\frac{4}{(1+\beta^2)^2} - 1\right)$$

Dalla (S.6.10) inoltre, con gli stessi passaggi visti in (S.6.5):

$$\gamma(u_A) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

quindi

$$g(u_A) = \alpha\left(\frac{2}{1-\beta^2} - 1\right) = \alpha\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \alpha\gamma(u_A)$$

Abbiamo quindi trovato che la funzione incognita $g(u)$ coincide, a meno di una costante moltiplicativa (dalle dimensioni di una velocità al quadrato) con il fattore di Lorentz $\gamma(u)$. Esaminiamo il limite non relativistico dell'energia:

$$\mathcal{E}(m,u) = \alpha\, m\gamma(u) \underset{u \ll c}{\longrightarrow} m\alpha + \frac{1}{2}m\alpha\frac{u^2}{c^2}$$

da cui si vede che scegliendo $\alpha = c^2$ si ottiene proprio l'espressione classica voluta (S.6.6). Quindi l'energia relativistica si definisce come

$$\mathcal{E}(m,u) = m\gamma(u)c^2\,. \tag{S.6.11}$$

Osservazione 1: il termine additivo costante mc^2 è l'**energia di riposo** di una particella di massa m. L'energia cinetica relativistica si definisce sottraendo questo termine all'energia (S.6.11), in modo che si annulli per una particella ferma e che nel limite non relativistico riproduca esattamente la definizione classica. È facile verificare che in un urto elastico, come ad esempio quello dell'esercizio 6.1, l'energia cinetica così definita è conservata.

Osservazione 2: vale la stessa considerazione fatta nell'esercizio 6.1 a proposito della quantità di moto. Questa non è una dimostrazione della definizione di energia relativistica, ma solo una giustificazione intuitiva. La definizione è un postulato, che deve essere confermato dal confronto con i dati sperimentali.

Soluzione 6.3

(a) Calcolando la velocità degli elettroni nei due modi suggeriti dal testo si ottiene la tabella:

En. cinetica	$\mathcal{K}$, MeV	0.5	1.0	1.5	4.5	15
tempo di volo	t_v, 10^{-8} s	3.23	3.08	2.92	2.84	2.80
	v_{tv}, 10^8 m/s	2.60	2.73	2.88	2.96	~ 3
	v_{cl}, 10^8 m/s	4.19	5.93	7.26	12.6	23.0

È evidente che le due velocità ottenute in questo modo sono incompatibili.

La velocità calcolata con la formula classica v_{cl} cresce indefinitamente al crescere di $\mathcal{K}$, proporzionalmente a $\sqrt{\mathcal{K}}$, mentre v_{tv} tende asintoticamente a c.

(b) La definizione relativistica dell'energia cinetica è

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} - mc^2 = m\gamma c^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

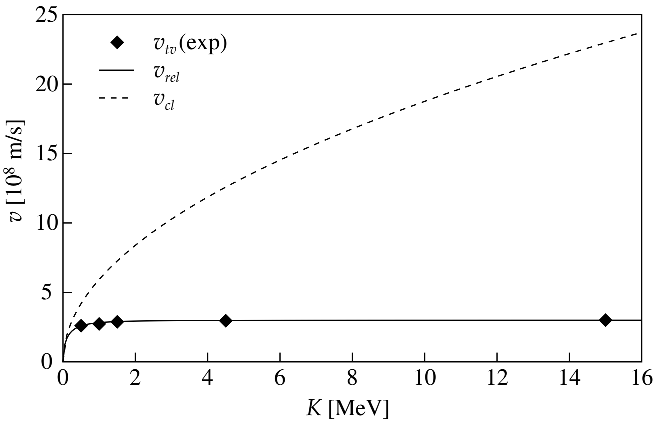
da cui

$$\gamma = \frac{\mathcal{K} + mc^2}{mc^2}$$

e la velocità, secondo la Teoria della Relatività, è

$$v_{rel} = c\beta = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{K} + mc^2}\right)^2}$$

Nel grafico a fianco sono illustrati gli andamenti delle velocità v_{rel} (linea continua) e v_{cl} (linea tratteggiata) in funzione di $\mathcal{K}$, insieme con i valori delle velocità v_{tv} ricavati dai dati sperimentali sul tempo di volo.
È evidente che le velocità ottenute sperimentalmente misurando il tempo di volo sono in ottimo accordo con la formula relativistica, confermando che c è la **velocità limite**.



Soluzione 6.4

(a) I quadrimpulsi delle due particelle sono:

$$p_1^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, p_1, 0, 0\right) \qquad \text{con} \qquad p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4}$$
$$p_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c}, -p_2, 0, 0\right) \qquad \text{con} \qquad p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4}$$

Il quadrimpulso totale è:

$$P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{c}, p_1 - p_2, 0, 0\right) .$$

Nel SR del centro di massa le componenti spaziali del quadrimpulso totale sono nulle:

$$P'^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2}{c}, 0, 0, 0\right) .$$

Sia β la velocità del centro di massa, si ha:

$$P'^x = 0 = \gamma\left(P^x - \beta P^0\right)$$

da cui

$$\beta = \frac{P^x}{P^0} = \frac{c(p_1 - p_2)}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4} - \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}\,.$$

(b) Usiamo le TL per ricavare le energie nel cm:

$$\frac{\mathcal{E}_1'}{c} = \gamma\left(\frac{\mathcal{E}_1}{c} - \beta p_1\right)$$

dove

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\sqrt{(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)^2 - \left(\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4} - \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4}\right)^2}} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\sqrt{2}\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + m^2c^4 + \sqrt{(\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4)(\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4)}}}\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1' &= \gamma(\mathcal{E}_1 - \beta c p_1) = \gamma\left(\mathcal{E}_1 - \frac{\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4} - \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4}\right) = \\ &= \gamma\,\frac{\cancel{\mathcal{E}_1^2} + \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - \cancel{\mathcal{E}_1^2} + m^2c^4 + \sqrt{(\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4)(\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4)}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + m^2c^4 + \sqrt{(\mathcal{E}_1^2 - m^2c^4)(\mathcal{E}_2^2 - m^2c^4)}}\end{aligned}$$

e con un calcolo analogo si trova

$$\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_1'\,.$$

(c) Nel caso di fotoni le precedenti relazioni si semplificano notevolmente. Ponendo $m = 0$:

$$\beta = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

che si può riscrivere, ricordando che l'energia di un fotone è proporzionale alla sua frequenza ($\mathcal{E} = h\nu$), come

$$\beta = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\,.$$

inoltre le energie nel cm risultano

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_2' = \sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \qquad \text{ovvero} \qquad \nu_1' = \nu_2' = \sqrt{\nu_1\nu_2}\,.$$

È facile verificare che questo risultato si ottiene anche con la formula dell'Effetto Doppler longitudinale (cap. 7).

Soluzione 6.5

Risolveremo il problema in due modi.
Primo metodo: usando la (5.6) (pag. 17).

Ricordando la definizione $p^\mu = mU^\mu$, la relazione (5.6) può essere riscritta nel modo seguente:

$$u_{rel} = c\sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{U_A \cdot U_B}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_A m_B c^2}{p_A \cdot p_B}\right)^2}. \tag{S.6.12}$$

Calcoliamo i tri-impulsi usando la relazione di mass-shell:

$$p_A = \sqrt{\frac{E_A^2}{c^2} - m_A^2 c^2} = \sqrt{(5mc)^2 - (mc)^2} = 2\sqrt{6}\, mc$$

$$p_B = \sqrt{\frac{E_B^2}{c^2} - m_B^2 c^2} = \sqrt{(5mc)^2 - (3mc)^2} = 4\, mc$$

È semplice, a questo punto, calcolare il prodotto scalare dei quadrimpulsi delle due particelle:

$$p_A \cdot p_B = p_A^\mu\, p_{B\mu} = \frac{E_A}{c}\frac{E_B}{c} - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B =$$

$$= \frac{E_A E_B}{c^2} - p_A p_B \cos\theta = (5mc)^2 - 2\sqrt{6}mc\, 4mc\, \frac{1}{\sqrt{6}} = 17\, m^2 c^2$$

quindi otteniamo, per la velocità relativa,

$$u_{rel} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m\, 3m\, c^2}{17\, m^2 c^2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{70}}{17} c \simeq 0.894\, c\,.$$

<u>Secondo metodo</u>: usando la (5.7) (pag. 18) dimostrata nell'esercizio 5.8.
Calcoliamo i moduli delle velocità delle due particelle:

$$E_A = m_A \gamma(u_A) c^2 = m\,\gamma(u_A) c^2 = 5mc^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(u_A) = 5, \qquad u_A = \frac{2\sqrt{6}}{5} c$$

$$E_B = m_B \gamma(u_B) c^2 = 3m\,\gamma(u_B) c^2 = 5mc^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(u_B) = \frac{5}{3}, \qquad u_B = \frac{4}{5} c$$

Assumiamo che la particella A si muova in direzione x e che la particella B si muova nel piano xy. Scriviamo le tri-velocità:

$$\mathbf{u}_A = \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} c, 0, 0\right)$$

$$\mathbf{u}_B = (u_B \cos\theta, u_B \sin\theta, 0) = \left(\frac{4}{5\sqrt{6}} c, \frac{4}{\sqrt{30}} c, 0\right)$$

e calcoliamo le espressioni occorrenti per la (5.7)

$$\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B = c\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{4}{5\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{30}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5} c$$

$$\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_B = \frac{2\sqrt{6}}{5} c\, \frac{4}{5\sqrt{6}} c = \frac{8}{25} c^2$$

$$|\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B| = \frac{2\sqrt{6}}{5} c\, \frac{4}{\sqrt{30}} c = \frac{8}{5\sqrt{5}} c^2$$

e infine

$$u_{rel} = c\frac{\sqrt{\left(\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left|\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B\right|^2}}{1 - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_B} = \frac{2\sqrt{70}}{17}c\,.$$

Soluzione 6.6

(a) Per una particella di massa m e velocità v in direzione z il quadrimpulso è

$$p_\mu = (m\gamma(v)c, 0, 0, m\gamma(v)v)\ .$$

Se $v = c\tanh Y$ allora

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 Y}} = \cosh Y \qquad \text{e} \qquad \gamma(v)v = c\sinh Y$$

quindi abbiamo

$$p^\mu = (mc\cosh Y, 0, 0, mc\sinh Y)\ . \tag{S.6.13}$$

Se la particella iniziale è ferma nel SR del laboratorio, la sua rapidità è 0 ed il suo quadrimpulso è semplicemente $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$.

(b) La quantità di moto è

$$\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{p}_\perp^2 + p_z^2}$$

e l'energia, per la relazione di mass-shell, si scrive come

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}_\perp^2c^2 + p_z^2c^2 = m_T^2c^4 + p_z^2c^2 =$$

Ma abbiamo anche

$$\mathcal{E} = m\gamma(v)c^2 \qquad \text{e} \qquad p_z = m\gamma(v)\,v_z = m\gamma(v)c\tanh Y = \frac{\mathcal{E}}{c}\tanh Y$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= m_T^2c^4 + \mathcal{E}^2\tanh^2 Y \\
\mathcal{E}^2(1-\tanh^2 Y) &= m_T^2c^4 \\
\mathcal{E} &= \frac{m_Tc^2}{\sqrt{1-\tanh^2 Y}} = m_Tc^2\cosh Y \\
p_z &= \frac{\mathcal{E}}{c}\tanh Y = m_Tc\cosh Y\,\tanh Y = m_Tc\sinh Y
\end{aligned}$$

ed il quadrimpulso si scrive come:

$$p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right) = (m_Tc\cosh Y, \mathbf{p}_\perp, m_Tc\sinh Y) \tag{S.6.14}$$

<u>Osservazione:</u> L'energia della particella si può esprimere con la rapidità (riferita alla componente longitudinale della quantità di moto) e la massa trasversa:

$$\mathcal{E} = m_Tc^2\cosh Y = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}_\perp^2c^2}\cosh Y\,.$$

Se la particella ha momento trasverso nullo, la massa trasversa si riduce alla massa a riposo, e l'energia è

$$\mathcal{E} = mc^2 \cosh Y \,.$$

Soluzione 6.7

(a) Per l'elettrone (o positrone):

$$\mathcal{E}_e = m_e \gamma(v_e) c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v_e) = \frac{\mathcal{E}_e}{m_e c^2} = 5.4 \cdot 10^4$$

e per il protone:

$$\mathcal{E}_p = m_p \gamma(v_p) c^2 = \sqrt{p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v_p) = \frac{\mathcal{E}_p}{m_p c^2} = 980$$

Scriviamo i quadrimpulsi delle due particelle, assumendo che il protone si muova in direzione $+x$ e l'elettrone in direzione $-x$:

$$p_p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_p}{c}, p_p, 0, 0\right) \qquad\qquad p_e^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_e}{c}, -p_e, 0, 0\right)$$

Il quadrimpulso totale è

$$P_{tot}^\mu = p_p^\mu + p_e^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p}{c}, p_p - p_e, 0, 0\right)$$

Nel SR del centro di massa (CM) il quadrimpulso totale ha la forma

$$P_{tot}^{*\,\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}_{tot}^*}{c}, \mathbf{0}\right)$$

Per l'invarianza del quadriprodotto:

$$\begin{aligned} P_{tot}^{*\,\mu} P_{tot\,\mu}^* &= P_{tot}^\mu P_{tot\,\mu} \\ \mathcal{E}^* &= c^2 \sqrt{(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_p)^2 - c^2 (p_p - p_e)^2} = 318\,\mathrm{GeV}\,. \end{aligned}$$

(b) La velocità del CM nel SR del laboratorio si può ricavare con una TL:

$$P_{tot}^{*x} = \gamma(\beta_{cm}) \left(P_{tot}^x - \beta_{cm} \frac{\mathcal{E}_{tot}}{c}\right)$$

ma, per definizione, $P_{tot}^{*x} = 0$ quindi

$$\beta_{cm} = \frac{c P_{tot}^x}{\mathcal{E}_{tot}} = \frac{c(p_p - p_e)}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_e} = 0.94$$

(c) Indichiamo con apice le grandezze misurate nel SR solidale con il protone. I quadrimpulsi delle due particelle in tale SR sono:

$$p'^\mu_p = (m_p c, \mathbf{0}) \qquad\qquad p'^\mu_e = (\mathcal{E}'_e / c, m_e \gamma(v'_e) v'_e, 0, 0)$$

Utilizziamo ancora l'invarianza del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} p'^\mu_p p'_{e\mu} &= p_p^\mu p_{e\mu} \\ \frac{\mathcal{E}'}{c} m_p c &= \frac{\mathcal{E}_e}{c} \frac{\mathcal{E}_e}{c} + p_e p_p \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}'_e = \frac{1}{m_p c^2}\left(\mathcal{E}_e\mathcal{E}_p + p_e p_p c^2\right) = 54\,\text{TeV}.$$

Soluzione 6.8

(a) Per il protone:

$$p_p = m_p\gamma(v_p)v_p = m_p c\sinh Y_p \qquad \Longrightarrow \qquad \sinh Y_p = \frac{p_p}{m_p c}$$

Per l'elettrone (che si muove in direzione $-z$, quindi ha rapidità negativa):

$$p_e = m_e\gamma(v_e)v_e = -m_e c\sinh Y_e \qquad \Longrightarrow \qquad \sinh Y_e = -\frac{p_e}{m_e c}$$

Quindi

$$Y_p = \log\left(\frac{p_p}{m_p c} + \sqrt{\left(\frac{p_p}{m_p c}\right)^2 + 1}\right) = 7.58\,, \qquad Y_e = -11.59\,.$$

(b) Scriviamo i quadrimpulsi nel SR del laboratorio, nella forma (S.6.13) (esercizio 6.6):

$$\begin{aligned} p_p^\mu &= (m_p c\cosh Y_p, 0, 0, m_p c\sinh Y_p) \\ p_e^\mu &= (m_e c\cosh Y_e, 0, 0, m_e c\sinh Y_e) \end{aligned} \tag{S.6.15}$$

Il quadrimpulso totale nel SR del laboratorio è:

$$P^\mu = p_p^\mu + p_e^\mu$$

e nel SR del centro di massa (CM):

$$P^{*\mu} = (\mathcal{E}^*_{tot}/c, \mathbf{0})$$

Sfruttiamo l'invarianza del prodotto scalare:

$$P^\mu P_\mu = P^{*\mu}P^*\mu$$

$$\frac{(\mathcal{E}^*_{tot})^2}{c^2} = (p_p^\mu + p_e^\mu)(p_{p\mu} + p_{e\mu}) = m_p^2c^2 + m_e^2c^2 + 2p_p\cdot p_e$$

$$p_p\cdot p_e = m_p m_e c^2\left(\cosh Y_p\cosh Y_e - \sinh Y_p\sinh Y_e\right) = m_p m_e c^2\cosh(Y_p - Y_e)$$

o anche, definendo $\Delta Y = Y_p - Y_e = Y_p + |Y_e| = 19.17$:

$$p_p\cdot p_e = m_p m_e c^2\cosh\Delta Y$$

quindi

$$\mathcal{E}^*_{tot} = c^2\sqrt{m_p^2 + m_e^2 + 2m_p m_e\cosh\Delta Y} = 318\,\text{GeV}$$

(c) Siano $p_p^{*\mu}$ e $p_e^{*\mu}$ i quadrimpulsi delle due particelle nel SR del CM. Abbiamo:

$$p^{*\mu}P^*_\mu = p_p^\mu P_\mu$$

$$\frac{\mathcal{E}^*_p}{c}\frac{\mathcal{E}^*_{tot}}{c} = p_p^\mu(p_{p\mu} + p_{e\mu}) = m_p^2c^2 + p_p\cdot p_e = c^2(m_p^2 + m_p m_e\cosh\Delta Y)$$

$$\mathcal{E}_p^* = \frac{c^2(m_p^2 + m_p m_e \cosh \Delta Y)}{\mathcal{E}_{tot}^*} = \frac{c^2(m_p^2 + m_p m_e \cosh \Delta Y)}{\sqrt{m_p^2 + m_e^2 + 2m_p m_e \cosh \Delta Y}}$$

ed in modo analogo si trova

$$\mathcal{E}_e^* = \frac{c^2(m_e^2 + m_p m_e \cosh \Delta Y)}{\sqrt{m_p^2 + m_e^2 + 2m_p m_e \cosh \Delta Y}}$$

Ma è anche

$$\mathcal{E}_p^* = m_p c^2 \cosh Y_p^* \qquad\qquad \mathcal{E}_e^* = m_e c^2 \cosh Y_e^*$$

da cui

$$\cosh Y_p^* = \frac{\mathcal{E}_p^*}{m_p c^2} \qquad\qquad \sinh Y_p^* = \sqrt{\cosh^2 Y_p^* - 1} = \frac{m_e c^2 \sinh \Delta Y}{\mathcal{E}_{tot}^*}$$

$$\cosh Y_e^* = \frac{\mathcal{E}_e^*}{m_e c^2} \qquad\qquad \sinh Y_e^* = \frac{m_p c^2 \sinh \Delta Y}{\mathcal{E}_{tot}^*}$$

da cui ricaviamo la quantità di moto nel SR del CM:

$$p_p^* = m_p c^2 \sinh Y^* p = \frac{m_e m_p c^2 \sinh \Delta Y}{\mathcal{E}_{tot}^*}$$

$$p_e^* = m_e c^2 \sinh Y^* e = \frac{m_e m_p c^2 \sinh \Delta Y}{\mathcal{E}_{tot}^*}$$

e ovviamente si ha, come deve essere,

$$p_p^* = p_e^* = p^* = 159\,\mathrm{GeV}\,.$$

(d) Usiamo la (S.6.12) ricavata nell'esercizio 6.5 (pag. 107):

$$\beta_{rel} = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \Delta Y}} = \tanh \Delta Y \sim 1 \qquad \Longrightarrow \qquad v_{rel} \sim c\,.$$

Osserviamo che vale anche $\beta_{rel} = \tanh Y_{rel}$ per cui

$$Y_{rel} = \Delta Y = Y_p - Y_e$$

confermando che la rapidità è additiva per TL.

Capitolo 7

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 7.1

Consideriamo due segnali successivi emessi da T, rispettivamente, al tempo t_1 e al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$.
Il primo segnale viene emesso al tempo t_1 dalla posizione

$$d_1 = x_T(t_1) = v_T t_1$$

e raggiunge R al tempo $\tilde{t_1}$ tale che

$$d_1 + c(\tilde{t_1} - t_1) = v_R \tilde{t_1} + d_0$$

$$(c - v_R)\tilde{t_1} = ct_1 + d_0 - d_1 = ct_1 + d_0 - v_T t_1 = d_0 + (c - v_T)t_1$$

$$\tilde{t_1} = \frac{d_0 + (c - v_T)t_1}{c - v_R} = \frac{(1 - \beta_T)t_1 + \dfrac{d_0}{c}}{1 - \beta_R}$$

Lo stesso ragionamento vale per il secondo segnale, emesso da T al tempo t_2 e ricevuto da R al tempo $\tilde{t_2}$:

$$\tilde{t_2} = \frac{(1 - \beta_T)t_2 + \dfrac{d_0}{c}}{1 - \beta_R}$$

quindi l'intervallo tra la ricezione dei due segnali risulta:

$$\Delta\tilde{t} = \tilde{t_2} - \tilde{t_1} = \frac{(1 - \beta_T)(t_2 - t_1)}{1 - \beta_R} = \frac{1 - \beta_T}{1 - \beta_R}\Delta t$$

Tutti questi valori sono misurati nel SR K.
La formula dell'Effetto Doppler lega l'intervallo di tempo (o la frequenza, che è l'inverso) nei SR solidali, rispettivamente con T e con R.
Se in K l'intervallo tra l'emissione di due segnali è Δt, nel SR solidale con T tale intervallo sarà (tempo proprio!):

$$\Delta\tau_T = \frac{1}{\gamma(\beta_T)}\Delta t$$

e l'intervallo tra la ricezione dei due segnali nel SR solidale con R sarà (anche questo è un tempo proprio!):

$$\Delta\tau_R = \frac{1}{\gamma(\beta_R)}\Delta\tilde{t}$$

quindi

$$\gamma(\beta_R)\Delta\tau_R = \frac{1-\beta_T}{1-\beta_R}\gamma(\beta_T)\Delta\tau_T$$

$$\Delta\tau_R = \sqrt{\frac{1-\beta_T}{1+\beta_T}}\sqrt{\frac{1+\beta_R}{1-\beta_R}}\Delta\tau_T$$

È possibile scrivere l'equazione precedente introducendo una nuova velocità β:

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\beta_T}{1+\beta_T}}\sqrt{\frac{1+\beta_R}{1-\beta_R}}$$

L'espressione di β in funzione di β_T, β_R si ottiene risolvendo la precedente equazione rispetto a β:

$$(1-\beta)(1+\beta_T)(1-\beta_R) = (1+\beta)(1-\beta_T)(1+\beta_R) \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{\beta_T - \beta_R}{1-\beta_R\beta_T}$$

Cioè β è la velocità di T misurata nel SR di R (velocità relativa).
In conclusione, otteniamo la formula dell'Effetto Doppler per la frequenza $f = 1/\Delta t$

$$\Delta\tau_R = \Delta\tau_T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \Longrightarrow \qquad f_R = f_T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Soluzione 7.2

Soluzione 7.3

(a) La frequenza ν' ricevuta dall'osservatore è legata alla frequenza ν della sorgente dalla formula dell'Effetto Doppler longitudinale: (ricordare $c = \nu\lambda$)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{\lambda}{\lambda'}\,.$$

Applichiamo la formula con $\lambda = \lambda_0$ e $\lambda' = \lambda_1 = 700$ nm e invertiamo per ricavare β:

$$\beta = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2} = -\frac{13}{85}$$

Quindi l'osservatore O deve muoversi con velocità $v = \dfrac{13}{85}c$ allontanandosi dalla sorgente (red-shift).

(b) Procediamo come nel caso precedente, con $\lambda' = \lambda_2 = 400$:

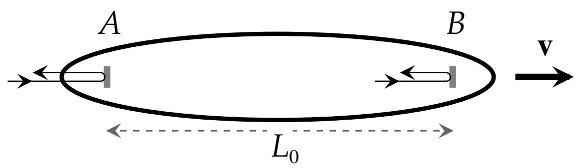
$$\beta = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_2^2}{\lambda_0^2 + \lambda_2^2} = \frac{5}{13}$$

In questo caso l'osservatore O deve muoversi con velocità $v = \frac{5}{13}c$ avvicinandosi alla sorgente (blue-shift).

Soluzione 7.4

Se l'astronave si trova a distanza D dalla Terra, il tempo necessario perché il segnale la raggiunga e torni indietro è

$$\Delta t = 2\frac{D}{c} \qquad \text{quindi} \qquad D = \frac{c\Delta t}{2} = 15 \cdot 10^9\,\text{m}\,.$$



Nel SR dell'astronave il segnale viene ricevuto (e ritrasmesso) da A ad un certo istante t'_0. Il segnale arriva in B al tempo $t'_0 + L_0/c$, viene riflesso e ripassa da A al tempo $t'_0 + 2L_0/c$.
In pratica è come se due segnali venissero emessi da A con un intervallo temporale $\delta t' = 2L_0/c$.
Applichiamo la formula dell'Effetto Doppler per calcolare l'intervallo di tempo tra la ricezione dei due segnali a Terra

$$\delta t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\delta t' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{2L_0}{c}\,. \tag{S.7.1}$$

Invertiamo la relazione per ricavare β:

$$\beta = \frac{(c\,\delta t)^2 - 4L_0^2}{(c\,\delta t)^2 + 4L_0^2} = 0.38$$

quindi la velocità dell'astronave è

$$v = 0.38\,c = 1.15 \cdot 10^8\,\text{m/s}\,.$$

<u>Metodo alternativo</u>
Allo stesso risultato si perviene ragionando nel modo seguente.
Supponiamo che il segnale venga emesso dalla Terra al tempo $t = 0$, quando l'astronave si trova a distanza d. I ricevitori A e B si muovono, secondo il SR della Terra, con leggi orarie:

$$x_A(t) = vt + d \qquad\qquad x_B(t) = vt + \frac{L_0}{\gamma} + d$$

(ricordare che nel SR della Terra la distanza tra A e B è contratta!) Il segnale raggiunge il ricevitore A al tempo t_1 tale che

$$c(t_1) = x_A(t_1) = vt_1 + d \qquad \text{cioè} \qquad t_1 = \frac{d}{c-v}$$

e raggiunge la Terra al tempo $2t_1$.

Analogamente per B il tempo di ricezione è t_2:

$$c(t_2) = x_B(t_2) = vt_2 + \frac{L_0}{\gamma} + d \qquad \text{cioè} \qquad t_2 = \frac{d + L_0/\gamma}{c - v}$$

ed il segnale riflesso torna a Terra al tempo $2t_2$. Dunque l'intervallo tra la ricezione a Terra dei segnali riflessi è

$$\delta t = 2t_2 - 2t_1 = 2\frac{L_0/\gamma}{c-v} = 2\frac{L_0/c}{\gamma(1-\beta} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{2L_0}{c}$$

che coincide con l'eq. (S.7.1).

Soluzione 7.5

(a) Definiamo l'asse x lungo la direzione del moto di O'.
Scriviamo il quadrimpulso del fotone (segnale luminoso) nel SR della sorgente:

$$p^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}\,,\ \frac{h\nu}{c}\cos\theta\,,\ \frac{h\nu}{c}\sin\theta\,,\ 0\right)$$

Nel SR di O' il quadrimpulso del fotone è:

$$p'^\mu = \left(\frac{h\nu'}{c}\,,\ \frac{h\nu'}{c}\cos\theta'\,,\ \frac{h\nu'}{c}\sin\theta'\,,\ 0\right)$$

Usiamo le TL:

$$\frac{h\nu'}{c} = \gamma(v)\left(\frac{h\nu}{c} - \beta\frac{h\nu}{c}\cos\theta\right) \quad\Longrightarrow\quad \nu' = \nu\,\gamma(1-\beta\cos\theta) \tag{S.7.2a}$$

$$\frac{h\nu'}{c}\cos\theta' = \gamma(v)\left(\frac{h\nu}{c}\cos\theta - \beta\frac{h\nu}{c}\right) \quad\Longrightarrow\quad \nu'\cos\theta' = \nu\,\gamma(\cos\theta - \beta) \tag{S.7.2b}$$

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta' = \frac{h\nu}{c}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \nu'\sin\theta' = \nu\sin\theta \tag{S.7.2c}$$

(b) Dalla (S.7.2a) si ottiene

$$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma(1-\beta\cos\theta)$$

e dalla (S.7.2b):

$$\cos\theta' = \frac{\nu}{\nu'}\gamma(\cos\theta - \beta) = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} \tag{S.7.3}$$

che esprime l'angolo θ' in funzione di β e θ. Calcoliamo:

$$\cos\theta' - \cos\theta = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} - \cos\theta = -\frac{\beta\sin^2\theta}{1-\beta\cos\theta}\,.$$

Dalla precedente relazione si deduce che

- $\cos\theta' = \cos\theta$, cioè $\theta' = \theta$ solo se $\beta = 0$ (l'osservatore è fermo rispetto alla sorgente) o se $\theta = 0, \pi$ (in questo caso si ha comunque $\nu' \neq \nu$). A parte questi casi particolari si ha $\theta' \neq \theta$ (aberrazione).
- Se $\beta > 0$, cioè se O' si allontana dalla sorgente, si ha $\cos\theta' < \cos\theta$ ossia $\theta' > \theta$.
- Se $\beta < 0$, cioè se O' si avvicina alla sorgente, si ha $\cos\theta' > \cos\theta$ ossia $\theta' < \theta$.

(c) Da una nota identità trigonometrica:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \frac{1-\cos\theta'}{\sin\theta'}$$

Dalla (S.7.3) otteniamo

$$1-\cos\theta' = 1 - \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} = \frac{(1+\beta)(1-\cos\theta)}{1-\beta\cos\theta}$$

e dalle (S.7.2c) e (S.7.2a):

$$\sin\theta' = \frac{\nu}{\nu'}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

per cui

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \frac{1-\cos\theta'}{\sin\theta'} == \frac{(1+\beta)(1-\cos\theta)}{1-\beta\cos\theta}\,\frac{\gamma(1-\beta\cos\theta)}{\sin\theta} =$$

$$= \gamma(1+\beta)\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}\,.$$

e anche da questa relazione si può dedurre che $\theta' > \theta$ se $\beta > 0$, eccetera.

Soluzione 7.6

Sia β la velocità dell'asteroide. I segnali inviati da Terra vengono ricevuti dall'asteroide ad intervalli $\Delta t'$, ricavati dalla formula dell'Effetto Doppler:

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta t_1$$

I segnali riflessi partono dall'asteroide ad intervalli $\Delta t'$ e ricevuti a Terra ad intervalli Δt_2:

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta t' = \frac{1-\beta}{1+\beta}\Delta t_1\,.$$

Si noti che abbiamo applicato *due volte* la formula dell'Effetto Doppler!
Invertendo l'ultima relazione per ricavare β:

$$\beta = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2 + \Delta t_2} = 0.01.$$

Dunque l'asteroide sta viaggiando verso la Terra a velocità $0.01\,c = 3\cdot 10^6$ m/s.

Soluzione 7.7

Si ha, per definizione

$$z = \frac{\lambda'_m - \lambda_m}{\lambda_m}$$

dove λ_m e λ'_m sono, rispettivamente, le lunghezze d'onda emessa dalla stella e osservata sulla

Terra. Per l'effetto Doppler:

$$\lambda'_m = \lambda_m \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = z + 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

da cui (tenendo conto che z è molto piccolo rispetto a 1)

$$\beta = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \simeq \frac{z}{z+1} \simeq z \qquad \Longrightarrow \qquad v \simeq zc \simeq -10^5 \text{ m/s}\,.$$

Quindi la stella si sta avvicinando ad una velocità di circa 100 km/s.

Capitolo 8

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 8.1

(a) Calcoliamo (il quadrato del)la norma:

$$\begin{aligned} (p_1^\mu + q_1^\mu)(p_{1\mu} + q_{1\mu}) &= (p_2^\mu + q_2^\mu)(p_{2\mu} + q_{2\mu}) \\ p_1^\mu p_{1\mu} + 2p_1^\mu q_{1\mu} + q_1^\mu q_{1\mu} &= p_2^\mu p_{2\mu} + 2p_2^\mu q_{2\mu} + q_2^\mu q_{2\mu} \end{aligned}$$

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$-m^2c^2 + 2p_1^\mu q_{1\mu} - M^2c^2 =$ $= -m^2c^2 + 2p_2^\mu q_{2\mu} - M^2c^2$	$m^2c^2 + 2p_1^\mu q_{1\mu} + M^2c^2 =$ $= m^2c^2 + 2p_2^\mu q_{2\mu} + M^2c^2$

$$\Longrightarrow \qquad p_1^\mu q_{1\mu} = p_2^\mu q_{2\mu}$$

Da $p_1^\mu + q_1^\mu = p_2^\mu + q_2^\mu$ si ottiene $p_1^\mu - q_2^\mu = p_2^\mu - q_1^\mu$ da cui, calcolando la norma:

$$(p_1^\mu - q_2^\mu)(p_{1\mu} - q_{2\mu}) = (p_2^\mu - q_1^\mu)(p_{2\mu} - q_{1\mu})$$

$-m^2c^2 - 2p_1^\mu q_{2\mu} - M^2c^2 =$ $= -m^2c^2 - 2p_2^\mu q_{1\mu} - M^2c^2$	$m^2c^2 - 2p_1^\mu q_{2\mu} + M^2c^2 =$ $= m^2c^2 - 2p_2^\mu q_{1\mu} + M^2c^2$

$$\Longrightarrow \qquad p_1^\mu q_{2\mu} = p_2^\mu q_{1\mu}$$

(b) Da $p_1^\mu + q_1^\mu = p_2^\mu + q_2^\mu$ si ottiene $p_1^\mu - p_2^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$

$$(p_1^\mu - p_2^\mu)(p_{1\mu} - p_{2\mu}) = (q_2^\mu - q_1^\mu)(q_{2\mu} - q_{1\mu})$$

$-m^2c^2 - 2p_1^\mu p_{2\mu} - m^2c^2 =$ $= -M^2c^2 - 2q_2^\mu q_{1\mu} - M^2c^2$ $\Longrightarrow \quad q_2^\mu q_{1\mu} - p_1^\mu p_{2\mu} = -c^2(M^2 - m^2)$	$m^2c^2 - 2p_1^\mu p_{2\mu} + m^2c^2 =$ $= M^2c^2 - 2q_2^\mu q_{1\mu} + M^2c^2$ $\Longrightarrow \quad q_2^\mu q_{1\mu} - p_1^\mu p_{2\mu} = c^2(M^2 - m^2)$

(c) Utilizzando le relazioni dimostrate al punto (a):

$$A^\mu B_\mu = (q_1^\mu + q_2^\mu)(p_{1\mu} - p_{2\mu}) = q_1^\mu p_{1\mu} - q_1^\mu p_{2\mu} + q_2^\mu p_{1\mu} - q_2^\mu p_{2\mu} = 0\,.$$

(d)

$$A^\mu A_\mu = (q_1^\mu + q_2^\mu)(q_{1\mu} + q_{2\mu}) =$$

$\begin{aligned} &= -2M^2c^2 + 2q_1^\mu q_{2\mu} = \\ &= -2M^2c^2 - \frac{2}{c^2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + 2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \\ &\leq -2M^2c^2 - \frac{2}{c^2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + 2\vert\mathbf{q}_1\vert\vert\mathbf{q}_2\vert < 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= 2M^2c^2 + 2q_1^\mu q_{2\mu} = \\ &= 2M^2c^2 + \frac{2}{c^2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - 2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \\ &\geq 2M^2c^2 + \frac{2}{c^2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - 2\vert\mathbf{q}_1\vert\vert\mathbf{q}_2\vert > 0 \end{aligned}$

avendo utilizzato la disuguaglianza di Schwarz, ed $\mathcal{E}_i = \sqrt{M^2c^4 + \mathbf{q}_i^2c^2} > |\mathbf{q}_i c|$ $(i = 1, 2)$.
Quindi A^μ è di tipo tempo.
Il quadrivettore B^μ, ortogonale ad un vettore di tipo tempo, è sicuramente di tipo spazio (vedere esercizio 3.5).

Soluzione 8.2

Il quadrimpulso della particella A si scrive come

$$P_A^\mu = (m\gamma(u_A)c, m\gamma(u_A)\vec{u}_A) = \left(\frac{5}{4}mc, \frac{3}{4}mc, 0, 0\right),$$

dove $\gamma(u_A) = \frac{5}{4}$.
Per le particelle B e C il quadrimpulso è

$$P_B^\mu = (\frac{7}{4}mc, 0, 0, 0)\,, \qquad P_C^\mu = (M\gamma(u_C)c, M\gamma(u_C)u_C, 0, 0)$$

Imponiamo la conservazione del quadrimpulso:

$$\begin{aligned} M\gamma(u_C)c &= \frac{5}{4}mc + \frac{7}{4}mc = 3mc \\ M\gamma(u_C)u_C &= \frac{3}{4}mc \end{aligned}$$

da cui, dividendo membro a membro

$$\frac{u_C}{c} = \frac{3}{4}mc\frac{1}{3mc} = \frac{1}{4}\,, \qquad \gamma(u_C) = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

e sostituendo nelle equazioni precedenti

$$M\gamma(u_C)c = M\frac{4}{\sqrt{15}}c = 3mc \qquad \Longrightarrow \qquad M = \frac{3\sqrt{15}}{4}m$$

e il quadrimpulso della particella finale è:

$$P_C^\mu = \left(3mc, \frac{3}{4}mc, 0, 0\right)$$

Soluzione 8.3

(a) Se le particelle finali hanno la stessa velocità in modulo, allora hanno anche la stessa energia. Imponiamo la conservazione dell'energia:

$$Mc^2 = 3m\gamma(v)c^2 = 3\frac{M}{5}\gamma(v)c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v) = \frac{5}{3}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(v)^2}} = \frac{4}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{4}{5}c$$

(b) Siano A, B, C le particelle finali. A è ferma, B e C hanno velocità $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$, con $|\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}_C| = w$.
Quadrimpulsi delle particelle finali:

$$\begin{array}{rcl} P_A^\mu & = & (mc, \mathbf{p}_A) = (mc, \mathbf{0}) \\ P_B^\mu & = & (m\gamma_B c, \mathbf{p}_B) \\ P_C^\mu & = & (m\gamma_C c, \mathbf{p}_C) \end{array}$$

La conservazione del quadrimpulso, componenti spaziali, dà:

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_C \equiv \mathbf{p}$$

Essendo identiche ed avendo lo stesso impulso (in modulo, ma opposto in verso), le particelle B e C hanno la stessa velocità w e quindi la stessa energia: $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}_C = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = m\gamma(w)c^2$
Conservazione dell'energia:

$$Mc^2 = mc^2 + 2m\gamma(w)c^2$$

da cui, ricordando che $m = M/5$,

$$\frac{2}{5}\gamma(w) = \frac{4}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(w) = 2$$

e la velocità delle particelle B e C è $w = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

Soluzione 8.4

(a) La vita media dei muoni nel S.R. di O è maggiore di quella misurata nel S.R. di riposo dei muoni stessi per la dilatazione relativistica del tempo, secondo la relazione:

$$t_0 = \gamma(v)\tau_0\,.$$

Dai dati del problema:

$$\beta = 0.995 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10$$

quindi

$$\tau_0 = \frac{t_0}{\gamma(v)} = 2.20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}.$$

(b) Nel S.R. del muone il suo tri-impulso è zero: $\mathbf{p} = 0$. Il suo quadrimpulso, di conseguenza, è: $p^\mu = (Mc, 0, 0, 0)$.

Vale la conservazione del quadrimpulso. In particolare la relazione di conservazione delle componenti spaziali consente di determinare, in funzione di q, il tri-impulso dell'antineutrino elettronico.

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$$

o, in componenti:

$$0 = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} q + q_{3x} \qquad \Rightarrow \qquad q_{3x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} q \tag{S.8.1}$$

$$0 = q - \frac{1}{2} q + q_{3y} \qquad \Rightarrow \qquad q_{3y} = -\frac{1}{2} q \tag{S.8.2}$$

$$0 = 0 + 0 + q_{3z} \qquad \Rightarrow \qquad q_{3z} = 0 \tag{S.8.3}$$

(c) Le energie delle particelle finali sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sqrt{m^2c^4 + q^2c^2} \\ \mathcal{E}_2 &= qc \\ \mathcal{E}_3 &= qc \end{aligned}$$

(d) Il valore di q si determina imponendo la conservazione dell'energia (o della componente temporale del quadrimpulso):

$$Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = \sqrt{m^2c^4 + q^2c^2} + 2qc$$

$$Mc^2 - 2qc = \sqrt{m^2c^4 + q^2c^2}$$

Nella relazione appena scritta, il secondo membro (che corrisponde all'energia $\mathcal{E}_1$) deve essere positivo, quindi bisogna imporre la condizione $Mc - 2q > 0$.

$$M^2c^4 - 4Mqc^3 + 4q^2c^2 = m^2c^4 + q^2c^2$$

$$3q^2 - 4Mcq + (M^2 - m^2)c^2 = 0$$

$$q \equiv q_\pm = \frac{2M \pm \sqrt{M^2 + 3m^2}}{3} c \tag{S.8.4}$$

Abbiamo ottenuto due soluzioni, controlliamo se verificano la condizione $Mc - 2q > 0$:

$$Mc - 2q_+ = Mc - 2\frac{2M + \sqrt{M^2 + 3m^2}}{3} c = \frac{-M - 2\sqrt{M^2 + 3m^2}}{3} c < 0 \qquad \text{non accettabile!}$$

$$Mc - 2q_- = Mc - 2\frac{2M - \sqrt{M^2 + 3m^2}}{3} c = \frac{-M + 2\sqrt{M^2 + 3m^2}}{3} c > 0$$

da cui si vede che solo la soluzione q_- nella (S.8.4) è accettabile.

Soluzione 8.5

(a) Scegliamo gli assi cartesiani in modo che il moto della particella incidente A sia lungo l'asse x.

Scriviamo i quadrimpulsi delle due particelle nel SR del laboratorio, con le notazioni usuali $\beta_A \equiv v_A/c, \gamma_A \equiv \gamma(v_A)$:

$$\begin{aligned} p_A^\mu &= (m\gamma_A c\,,\ m\gamma_A v_A\,,\ 0\,,\ 0) = (m\gamma_A c\,,\ m\gamma_A \beta_A c\,,\ 0\,,\ 0) \\ p_B^\mu &= (\alpha m c\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0) \end{aligned}$$

Il quadrimpulso totale è

$$P^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_{tot}}{c}\,,\ m\gamma_A v_A\,,\ 0\,,\ 0\right) = \Big(m(\gamma_A+\alpha)c\,,\ m\gamma_A\beta_A c\,,\ 0\,,\ 0\Big)$$

Nel SR del cm il quadrimpulso totale si scrive come

$$P^{*\mu} = \left(\frac{\mathcal{E}^*_{tot}}{c}\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\right)$$

Il cm è in moto, rispetto al laboratorio, con velocità v^* in direzione x. Scriviamo la trasformazione di Lorentz per la componente x del quadrimpulso totale ($\beta^* \equiv v^*/c$, $\gamma^* \equiv \gamma(v^*)$):

$$P^{*x} = \gamma^*\left(P^x - \beta^* P^0\right)$$

ma è anche $P^{*x} = 0$, quindi

$$P^x - \beta^* P^0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^* = \frac{P^x}{P^0} = \frac{\gamma_A\beta_A}{\gamma_A+\alpha}$$

<u>Osservazione :</u> se $\alpha = 1$ (particelle identiche) la velocità del centro di massa NON è $v^* = \frac{1}{2}v_A$, come nel caso della fisica classica, ma si ha $v^* = \dfrac{\gamma_A v_A}{\gamma_A+1}$.
Il risultato classico si riottiene nel limite $v_A \to 0$, in cui $\gamma_A \to 1$.

(b) È istruttivo calcolare le energie delle particelle iniziali, nel SR del cm, in due modi.

<u>Primo metodo: Trasformazioni di Lorentz</u>
Avendo ricavato la velocità del cm rispetto al laboratorio è possibile scrivere le trasformazioni di Lorentz per i quadrimpulsi delle due particelle. Prima di tutto ricaviamo:

$$\gamma^* = \gamma(v^*) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^{*2}}} = \frac{\gamma_A+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+2\gamma_A\alpha+\alpha^2-\beta_A^2\gamma_A^2}} = \frac{\gamma_A+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}}$$

Per la particella A:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_A^*}{c} &= \gamma^*\left(\frac{\mathcal{E}_A}{c} - \beta^* p_A^*\right) = \gamma^*\left(m\gamma_A c - \beta^*\, m\gamma_A\beta_A c\right) = \gamma^*\, m\gamma_A c\,(1-\beta^*\beta_A) \\ \mathcal{E}_A^* &= \gamma^*\, m\gamma_A c^2\left(1 - \frac{\gamma_A\beta_A^2}{\gamma_A+\alpha}\right) = \gamma^*\, m\gamma_A c^2\frac{\gamma_A+\alpha-\gamma_A\beta_A^2}{\gamma_A+\alpha} = \gamma^*\, m\gamma_A c^2\frac{\dfrac{1}{\gamma_A}+\alpha}{\gamma_A+\alpha} = \\ &= \frac{\gamma_A+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}} m\gamma_A c^2\frac{1+\gamma_A\alpha}{\gamma_A(\gamma_A+\alpha)} = \frac{(1+\gamma_A\alpha)\,mc^2}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}} \end{aligned} \tag{S.8.5}$$

Per la particella B

$$\frac{\mathcal{E}_B^*}{c} = \gamma^*\left(\frac{\mathcal{E}_B}{c} - \beta^* p_B^*\right) = \gamma^*\frac{\mathcal{E}_B}{c} = \gamma^*\alpha m c = \frac{\alpha(\gamma_A+\alpha)mc}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}}$$

$$\mathcal{E}_B^* = \frac{\alpha(\gamma_A+\alpha)\,mc^2}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}} \tag{S.8.6}$$

Si verifica facilmente che nel cm vale $\mathcal{E}_A^* + \mathcal{E}_B^* = \mathcal{E}_{tot}^*$, come deve essere.

<u>Secondo metodo: Prodotti invarianti</u>
Usiamo l'invarianza del prodotto scalare di quadrivettori

$$P^\mu P_\mu = P^{*\mu} P_\mu^*$$

$$m^2(\gamma_A+\alpha)^2c^2 - m^2\gamma_A^2\beta_A^2c^2 = \frac{1}{c^2}(\mathcal{E}_{tot}^*)^2$$

$$(\mathcal{E}_{tot}^*)^2 = m^2c^4\left(\gamma_A^2+2\gamma_A\alpha+\alpha^2-\gamma_A^2\beta_A^2\right) = m^2c^4\left(\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha\right)$$

$$\mathcal{E}_{tot}^* = mc^2\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}$$

Prodotto scalare del quadrimpulso totale con il quadrimpulso della particella B

$$P^\mu p_{B\mu} = P^{*\mu} p_{B\mu}^*$$

$$m(\gamma_A+\alpha)c\cdot\alpha mc = \frac{\mathcal{E}_{tot}^*}{c}\frac{\mathcal{E}_B^*}{c}$$

$$\mathcal{E}_B^* = \frac{c^2}{\mathcal{E}_{tot}^*}mc^2\alpha(\gamma_A+\alpha) = \frac{\alpha(\gamma_A+\alpha)\,mc^2}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}}$$

che coincide con il risultato trovato con il primo metodo, eq. (S.8.6).
L'energia della particella A si può ottenere in due modi: dalla differenza

$$\mathcal{E}_A^* = \mathcal{E}_{tot}^* - \mathcal{E}_B^*$$

oppure con il prodotto invariante $P^\mu p_{A\mu} = P^{*\mu} p_{A\mu}^*$
È facile verificare che con entrambi i modi suggeriti si ottiene, per $\mathcal{E}_A^*$, il risultato della (S.8.5).

Una volta ottenute, con uno dei due metodi, le energie delle particelle iniziali nel cm si può calcolare la quantità di moto con la relazione di mass-shell.
Per la particella A:

$$p_A^* = \frac{1}{c}\sqrt{\mathcal{E}_A^{*2} - m^2c^4} = mc\sqrt{\frac{(1+\gamma_A\alpha)^2}{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha} - 1} = \frac{\gamma_A\beta_A\alpha\,mc}{\sqrt{\alpha^2+1+2\gamma_A\alpha}}$$

Nel centro di massa le due particelle hanno quantità di moto uguali in modulo (opposte in verso): $p_A^* = p_B^* \equiv p^*$.
Con la relazione di mass-shell per la particella B si ottiene per p_B^* la stessa espressione ottenuta per p_A^*.
Le velocità delle due particelle nel SR del centro di massa si possono ricavare da

$$\beta_A^* = \frac{cp^*}{\mathcal{E}_A^*} = \frac{\gamma_A\beta_A\alpha}{1+\gamma_A\alpha} \qquad\qquad \beta_B^* = \frac{cp^*}{\mathcal{E}_B^*} = \frac{\gamma_A\beta_A}{\gamma_A+\alpha}$$

<u>Osservazione 1:</u> nel SR del centro di massa il tri-impulso totale è zero: in un decadimento a due corpi le due particelle prodotte avranno, in modulo, la stessa quantità di moto, indipendentemente dalle loro masse. Se le masse sono uguali ($\alpha = 1$), saranno uguali, nel centro di

massa, anche le energie e le velocità. Ma se le masse sono diverse, energie e velocità saranno diverse (la particella più leggera avrà velocità maggiore).

<u>Osservazione 2:</u> Con il secondo metodo (prodotti invarianti) abbiamo ricavato i risultati voluti senza usare la velocità del centro di massa. Da qui appare evidente il vantaggio di questo metodo, utilizzabile anche quando la velocità relativa del centro di massa non è facile da calcolare, o quando non è parallela ad uno degli assi cartesiani (il calcolo della TL sarebbe molto complicato!). Il primo metodo (Trasformazioni di Lorentz) invece è il modo più diretto quando la velocità relativa tra i due SR è nota ed è parallela ad uno degli assi cartesiani

(c) Per la conservazione dell'energia, per le particelle finali si deve avere

$$\mathcal{E}^*_{tot} = \mathcal{E}^*_{A,fin} + \mathcal{E}^*_{B,fin} + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}^*_{Ci}$$

Le particelle finali nel centro di massa devono avere, ciascuna, energia maggiore o oguale alla propria energia di riposo, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*_{tot} &\geq mc^2 + \alpha mc^2 + N\rho mc^2 \\ N &\leq \frac{\mathcal{E}^*_{tot} - (\alpha+1)mc^2}{\rho mc^2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1 + 2\gamma_A \alpha} - (\alpha+1)}{\rho} \end{aligned}$$

(d) Nello stato finale è possibile la formazione di un numero qualsiasi di particelle C (fatte salve le eventuali altre leggi di conservazione, regole di selezione etc, che qui non consideriamo) purché l'energia nel centro di massa sia sufficientemente alta, ovvero la particella incidente sia sufficientemente veloce. Infatti, se $\alpha = 1$ e $\rho = 4$ la conservazione dell'energia nel cm si scrive come:

$$\mathcal{E}^{tot} = \mathcal{E}^*_{A,fin} + \mathcal{E}^*_{B,fin} + \mathcal{E}^*_{C,1} + \mathcal{E}^*_{C,2} \geq mc^2 + mc^2 + 4mc^2 + 4mc^2 = 12mc^2$$

cioè

$$mc^2\sqrt{2(1+\gamma_A^2)} \geq 12mc^2$$

da cui

$$\gamma_A \geq 71 \qquad \text{e} \qquad \beta_A \geq \beta_{min} = \sqrt{1 - \frac{1}{71^2}} = 0.9999\,.$$

Quindi per la formazione, nello stato finale, di due particelle di tipo C occorre che la velocità della particella incidente sia maggiore o uguale a $v_{min} = c\beta_{min}$.

Soluzione 8.6

(a)

$$\begin{aligned} &Q_2^\mu Q_{2\mu} = (P_1^\mu + Q_1^\mu - P_2^\mu)^2 \\ &\cancel{M^2c^2} = m^2c^2 + \cancel{M^2c^2} + m^2c^2 + 2P_1^\mu Q_{1\mu} - 2P_1^\mu P_{2\mu} - 2P_2^\mu Q_{1\mu} \\ &P_1^\mu Q_{1\mu} - P_2^\mu Q_{1\mu} = P_1^\mu P_{2\mu} - m^2c^2 \\ &Mc\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{c} = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - p_1p_2\cos\theta - m^2c^2 \end{aligned}$$

$$M(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{c^2} - p_1p_2\cos\theta - m^2c^2$$

(b) Nel caso di fotoni: $m = 0$, $\mathcal{E}_{1,2} = h\nu_{1,2}$, $p_{1,2} = \dfrac{h\nu_{1,2}}{c}$, inoltre $\lambda_{1,2} = \dfrac{c}{\nu_{1,2}}$, quindi:

$$\begin{aligned}
Mh(\nu_1 - \nu_2) &= \frac{h^2\nu_1\nu_2}{c^2} - \frac{h^2\nu_1\nu_2}{c^2}\cos\theta \\
M\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1\nu_2}\right) &= \frac{h}{c^2}(1-\cos\theta) \\
\left(\frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1}\right) &= \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{Mc}(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

Soluzione 8.7

(a) Sia v la velocità delle particelle finali nel SR K. La conservazione dell'energia comporta:

$$Mc^2 = m\gamma(v)c^2 + m\gamma(v)c^2 = 2m\gamma(v)c^2 \qquad M = 2\frac{M}{3}\gamma(v) \qquad \gamma(v) = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$$

Quantità di moto delle particelle finali:

$$p = m\gamma(v)v = \frac{\sqrt{5}}{6}Mc$$

(b)

$$\mathcal{K} = m\gamma(v)c^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{1}{6}Mc^2$$

(c)

$$v_{rel} = \frac{2v}{1 + \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}c$$

Soluzione 8.8

Bisogna imporre la conservazione del quadrimpulso. Nel SR K, per le due particelle finali si ha:

$$p_1^\mu = (m_1\gamma(u_1)c\,,\, m_1\gamma(u_1)u_1\,,\, 0\,,\, 0) \qquad p_2^\mu = (m_2\gamma(u_2)c\,,\, m_2\gamma(u_2)u_2\,,\, 0\,,\, 0)$$

e per la particella iniziale:

$$P^\mu = (M\gamma(u_{\scriptscriptstyle M})c\,,\, M\gamma(u_{\scriptscriptstyle M})u_{\scriptscriptstyle M}\,,\, 0\,,\, 0)\ .$$

Utilizzando i dati del problema:

$$
\begin{aligned}
\gamma(u_1) &= \frac{5}{4} \\
p_1^\mu &= \left(m\frac{5}{4}c\,,\,-m\frac{5}{4}\frac{3}{5}c\,,\,0\,,\,0\right) = \left(\frac{5}{4}mc\,,\,-\frac{3}{4}mc\,,\,0\,,\,0\right) \\
\gamma(u_2) &= \frac{5}{3} \\
p_2^\mu &= \left(\frac{3}{4}m\frac{5}{3}c\,,\,\frac{3}{4}m\frac{5}{3}\frac{4}{5}c\,,\,0\,,\,0\right) = \left(\frac{5}{4}mc\,,\,mc\,,\,0\,,\,0\right)
\end{aligned}
$$

Imponiamo la conservazione del quadrimpulso:

$$P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$$

ossia per la componente temporale (energia):

$$M\gamma(u_M)c = \frac{5}{4}mc + \frac{5}{4}mc = \frac{5}{2}mc$$

mentre per la componente spaziale lungo l'asse x (le altre componenti spaziali sono nulle):

$$M\gamma(u_M)u_M = -\frac{3}{4}mc + mc = \frac{1}{4}mc$$

Si ottiene un sistema nelle due incognite M/m ed u_M che può essere risolto:

$$u_M = \frac{c}{10} \qquad M/m = \frac{3\sqrt{11}}{4}$$

Il rapporto M/m si può ottenere anche calcolando la norma del quadrimpulso:

`(metrica -1,+1,+1,+1)`	`(metrica +1,-1,-1,-1)`
$P^\mu P_\mu = -M^2c^2$	$P^\mu P_\mu = M^2c^2$
$= -(P^0)^2 + (P^1)^2$	$= (P^0)^2 - (P^1)^2$
$-M^2c^2 = -(P^0)^2 + (P^1)^2$	$M^2c^2 = (P^0)^2 - (P^1)^2$

quindi

$$\frac{M^2}{m^2} = \frac{99}{16} \qquad \frac{M}{m} = \frac{3\sqrt{11}}{4}$$

Soluzione 8.9

`(a)` La particella A si muove in direzione x, utilizziamo perciò le formule di trasformazione delle velocità per un boost in direzione x con velocità relativa v:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)}$$

In questo caso abbiamo

$$v = v_{Ax} = \frac{3}{4}c \qquad u_x = v_{Bx} = \frac{c}{3} \qquad u_y = v_{By} = \frac{c}{3} \qquad u_z = v_{Bz} = 0$$

quindi

$$u'_x = v'_{Bx} = -\frac{5}{9}c \qquad u'_y = v'_{By} = \frac{\sqrt{7}}{9}c \qquad u'_z = v'_{Bz} = 0$$

Il modulo della velocità di B nel SR di A è $v'_B = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}c$

(b) Energia totale: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B = m\gamma(v_A)c^2 + m\gamma(v_B)c^2$. Dai dati del problema:

$$\gamma(v_a) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \gamma(v_B) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

(si noti che $v_B = |\vec{v}_B| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}c$) per cui: $\mathcal{E} = \sqrt{7}mc^2$.
Quantità di moto totale, componente x:

$$p_x = p_{Ax} + p_{Bx} = m\gamma(v_A)v_{Ax} + m\gamma(v_B)v_{Bx} = \frac{4}{\sqrt{7}}mc\ ,$$

componente y:

$$p_y = p_{Ay} + p_{By} = m\gamma(v_B)v_{By} = \frac{1}{\sqrt{7}}mc\ ,$$

(c) Il quadrimpulso totale nel SR K è:

$$P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right) = \left(\sqrt{7}mc\,,\ \frac{4}{\sqrt{7}}mc\,,\ \frac{1}{\sqrt{7}}mc\,,\ 0\right)$$

Nel centro di massa la quantità di moto totale è nulla per cui il quadrimpulso totale è (indicheremo con un segno ˜ tutte le quantità fisiche misurate nel centro di massa):

$$\tilde{P}^\mu = \left(\frac{\tilde{\mathcal{E}}}{c}\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\right)$$

I quadrivettori P^μ e $\tilde{P}^\mu$ si ricavano l'uno dall'altro con una TL (sono la stessa grandezza fisica misurata in due diversi SR inerziali). Sarebbe complicato però calcolare $\tilde{P}^\mu$ in questo modo, perché bisognerebbe effettuare una TL in direzione obliqua rispetto agli assi cartesiani. Conviene perciò utilizzare la proprietà di invarianza del prodotto scalare:

$$\tilde{P}^\mu \tilde{P}_\mu = P^\mu P_\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{c^2} = 7m^2c^2 - \frac{16}{7}m^2c^2 - \frac{1}{7}m^2c^2 = \frac{32}{7}m^2c^2$$

cioè $\tilde{\mathcal{E}} = 4\sqrt{\frac{2}{7}}mc^2$. Questa è l'energia totale delle due particelle nel sistema del centro di massa, ed è quindi la somma delle energie delle singole particelle: $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_A + \tilde{\mathcal{E}}_B$.
Sappiamo che le due particelle sono uguali, quindi nel centro di massa devono avere la stessa velocità (in modulo, ma con direzioni opposte) $\tilde{u}$ e di conseguenza la stessa energia:

$$\tilde{\mathcal{E}}_A = \tilde{\mathcal{E}}_B = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{2} = 2\sqrt{\frac{2}{7}}mc^2\ .$$

L'energia può essere espressa anche come: $\tilde{\mathcal{E}}_A = m\gamma(\tilde{u})c^2$ per cui

$$\gamma(\tilde{u}) = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{u} = \frac{c}{2\sqrt{2}}\ .$$

Allo stesso risultato si può arrivare anche utilizzando il prodotto $\tilde{P}_A^\mu \tilde{P}_\mu = P_A^\mu P_\mu$, oppure $\tilde{P}_A^\mu \tilde{P}_{\mu B} = P_A^\mu P_{\mu B}$.

Soluzione 8.10

Indichiamo con p_1 e p_2, q_1 e q_2 i quadrimpulsi, rispettivamente, iniziali e finali delle due particelle. Ricordiamo che la rapidità di una particella è legata alla sua energia dalla relazione $\mathcal{E} = mc\gamma(u) = mc\cosh Y$ e la sua velocità u è data da $u = c\tanh Y$.
Scegliamo gli assi cartesiani in modo che la velocità $\mathbf{u}$ della particella incidente sia lungo l'asse x. Si ha

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= (m\gamma(u)c\,,\ m\gamma(u)u\,,\ 0\,,\ 0) = mc(\cosh Y, \sinh Y, 0, 0) \\ p_2^\mu &= (mc\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0)\,. \end{aligned}$$

Indicando con w_1 e w_2 le velocità delle particelle finali, i quadrimpulsi finali sono:

$$\begin{aligned} q_1^\mu &= (m\gamma(w_1)c\,,\ m\gamma(w_1)w_1\cos\theta\,,\ m\gamma(w_1)w_1\sin\theta\,,\ 0) \\ q_2^\mu &= (m\gamma(w_2)c\,,\ m\gamma(w_2)w_2\cos\theta\,,\ -m\gamma(w_2)w_2\sin\theta\,,\ 0) \end{aligned}$$

Vale la conservazione del quadrimpulso:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu\,.$$

Consideriamo la componente y:

$$0 = m\left(\gamma(w_1)w_1 - \gamma(w_2)w_2\right)\sin\theta$$

cioè $\gamma(w_1)w_1 = \gamma(w_2)w_2$ che implica $w_1 = w_2 = w$. Le due particelle finali, essendo identiche (stessa massa) ed avendo la stessa velocità avranno anche la stessa energia.
Dalla conservazione della componente temporale del quadrimpulso si ottiene

$$mc(\cosh Y + 1) = 2mc\gamma(w) \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma(w) = \frac{\cosh Y + 1}{2}$$

per cui l'energia delle particelle finali è

$$\mathcal{E}_f = m\gamma(w)c^2 = mc^2\frac{\cosh Y + 1}{2},$$

ed il loro (tri-)impulso è

$$q = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_f^2}{c^2} - m^2c^2} = \frac{mc}{2}\sqrt{\cosh^2 Y + 2\cosh Y - 3}$$

Ma è anche $q = m\gamma(w)w$ per cui

$$w = \frac{q}{m\gamma(w)} = c\frac{\sqrt{\cosh^2 Y + 2\cosh Y - 3}}{\cosh Y + 1}$$

Infine, dalla conservazione della componente x del quadrimpulso si ha:

$$mc\sinh Y = 2m\gamma(w)w\cos\theta$$

da cui

$$\cos\theta = \frac{\sinh Y}{2\gamma(w)(w/c)} = \frac{\sinh Y}{(\cosh Y + 1)(w/c)} = \frac{\sinh Y}{\sqrt{\cosh^2 Y + 2\cosh Y - 3}} = \sqrt{\frac{\cosh Y + 1}{\cosh Y + 3}}\,.$$

Soluzione 8.11

(a) Fotone iniziale: $p_1 = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, \vec{p}_1\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c}, p_1, 0, 0\right)$

Elettrone iniziale: $p_2 = \left(mc, \vec{0}\right)$

Fotone finale: $p_3 = \left(\frac{\mathcal{E}_3}{c}, \vec{p}_3\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_3}{c}, \frac{1}{2}p_3, \frac{\sqrt{3}}{2}p_3, 0\right)$

Elettrone finale: $p_4 = \left(\frac{\mathcal{E}_4}{c}, \vec{p}_4\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_4}{c}, \frac{\sqrt{3}}{2}p_4, -\frac{1}{2}p_4, 0\right)$

Inoltre valgono le seguenti relazioni per i fotoni:

$$\mathcal{E}_1 = p_1 c \qquad p_1 = \hbar k = \frac{h}{\lambda_1} \qquad \mathcal{E}_3 = p_3 c \qquad p_3 = \hbar k' = \frac{h}{\lambda_3}$$

mentre per l'elettrone:

$$\mathcal{E}_4 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}_4^{\,2}}$$

Impongo la conservazione del 4-impulso.
Componente y:

$$0 = p_3 \sin\frac{\pi}{3} - p_4 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}p_3 - \frac{1}{2}p_4 \qquad \Longrightarrow \qquad p_4 = \sqrt{3}\, p_3$$

Componente x:

$$p_1 = p_3 \cos\frac{\pi}{3} + p_4 \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}p_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\, p_3 = 2p_3 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 2\, p_3\,, \quad \lambda_3 = 2\lambda_1$$

Conservazione della componente temporale ($\propto$ energia):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}_1}{c} + mc &= \frac{\mathcal{E}_3}{c} + \frac{\mathcal{E}_4}{c} \\
p_1 + mc &= p_3 + \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}_4^{\,2}} \\
2\, p_3 + mc &= p_3 + \sqrt{m^2c^2 + 3\,\vec{p}_3^{\,2}} \\
p_3 + mc &= \sqrt{m^2c^2 + 3\vec{p}_3^{\,2}} \\
p_3^2 + \cancel{m^2c^2} + 2mc\, p_3 &= \cancel{m^2c^2} + 3\, p_3^2 \\
\cancel{2}\, mc\, \cancel{p_3} &= \cancel{2}\, p_3^{\cancel{2}}
\end{aligned}$$

quindi i moduli dei 3-impulsi sono:

$$p_3 = mc \qquad p_1 = 2\, mc \qquad p_4 = \sqrt{3}\, mc$$

di conseguenza l'elettrone finale ha energia $\mathcal{E}_4 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}_4^{\,2}} = 2\, mc^2$
I quadrimpulsi delle particelle sono:

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= (2\, mc\,, 2\, mc\,, 0\,, 0) \\
p_2^\mu &= (mc\,, 0\,, 0\,, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3^\mu &= \left(mc\,, \frac{1}{2}mc\,, \frac{\sqrt{3}}{2}mc\,, 0 \right) \\ p_4^\mu &= \left(2\,mc\,, \frac{3}{2}mc\,, -\frac{\sqrt{3}}{2}mc\,, 0 \right) \end{aligned}$$

(b) Dai risultati appena ottenuti:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{2mc} = 1.21 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}, \qquad \lambda_3 = 2\lambda_1 = 2.42 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

(c) $\beta = \dfrac{4}{5} \qquad \gamma = \dfrac{5}{3}$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_3^0 &= \gamma\left(p_3^0 + \beta p_3^x\right) = \frac{5}{3}\left(mc + \frac{4}{5}\frac{1}{2}mc\right) = \frac{7}{3}mc \\ \tilde{p}_3^x &= \gamma\left(p_3^x + \beta p_3^0\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}mc + \frac{4}{5}mc\right) = \frac{13}{6}mc \\ \tilde{p}_3^y &= p_3^y = \frac{\sqrt{3}}{2}mc \\ \tilde{p}_3^z &= p_3^z = 0 \end{aligned}$$

Come verifica calcolo il modulo del 3-vettore: $|\vec{\tilde{p}}_3| = mc\sqrt{\left(\dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{7}{3}mc = \tilde{p}_3^0$ (ok!)

$$\tilde{\mathcal{E}}_3 = \tilde{p}_3^0\, c = \frac{7}{3}mc^2 \qquad \tilde{\lambda}_3 = \frac{h}{|\vec{\tilde{p}}_3|} = \frac{3h}{7mc} = 1.04 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

$$\sin\tilde{\theta} = \frac{\tilde{p}_3^y}{\tilde{p}_3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}mc}{\frac{7}{3}mc} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{\theta} = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14} \simeq 0.38\,\mathrm{rad} = 21.8^\circ$$

Soluzione 8.12

(a) Scegliamo l'asse x nella direzione del moto della particella iniziale A.
Scriviamo i quadrimpulsi delle particelle iniziali:

$$P_A^\mu = (m\gamma_A c, m\gamma_A v_A, 0, 0) \qquad P_B^\mu = (2mc, 0, 0, 0)$$

Il quadrimpulso della particella finale C sarà:

$$P_C^\mu = (M\gamma_C c, M\gamma_C v_C, 0, 0)$$

Deve valere la conservazione del quadrimpulso: $P_A^\mu + P_B^\mu = P_C^\mu$.
Usiamo la relazione del mass-shell:

$$P_C^\mu P_{C\mu} = (P_A^\mu + P_B^\mu)(P_{A\mu} + P_{B\mu})$$

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$-M^2c^2 = -m^2c^2 - (2m)^2c^2 + 2P^\mu_A P_{B\mu}$ $-M^2c^2 = -5m^2c^2 - 2(m\gamma_A c)(2mc)$	$M^2c^2 = m^2c^2 + (2m)^2c^2 + 2P^\mu_A P_{B\mu}$ $M^2c^2 = 5m^2c^2 + 2(m\gamma_A c)(2mc)$

$$4\gamma_A = \frac{M^2}{m^2} - 5 \geq 20$$

$$\gamma_A \geq 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta_A \geq \frac{2\sqrt{6}}{5} \simeq 0.98$$

La minima velocità affinché $M \geq 5m$ è $v_{A,\min} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}c$.

(b) $\beta_A = \dfrac{4}{5} < v_{A,\min}/c$ quindi il rapporto M/m sarà minore di 5.
Conservazione dell'energia:

$$M\gamma_C c = m\gamma_A c + 2mc = \frac{5}{3}mc + 2mc = \frac{11}{3}mc \qquad \Longrightarrow \qquad M\gamma_C = \frac{11}{3}m$$

Conservazione dell'impulso:

$$M\gamma_C v_C = m\gamma_A v_A = \frac{5}{3}\frac{4}{5}mc \qquad \Longrightarrow \qquad M\gamma_C\beta_C = \frac{4}{3}m$$

Dalle due equazioni precedenti si ottiene:

$$\beta_C = \frac{4}{11} \qquad \text{e} \qquad \frac{M}{m} = \sqrt{\frac{35}{3}}$$

Soluzione 8.13

(a) Indichiamo con $\mathbf{v} = c(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ la velocità del pione iniziale. Sia $\gamma = 1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$. Il quadrimpulso del pione si scrive come

$$P^\mu_\pi = (m_\pi\gamma c\,,\ m\gamma\beta_x c\,,\ m\gamma\beta_y c\,,\ m\gamma\beta_z c)$$

Per i fotoni, la relazione tra energia e quantità di moto è $\mathcal{E} = pc$, quindi possiamo scrivere i quadrimpulsi dei fotoni finali come

$$p^\mu_1 = (p_1\,,\ p_1\cos\theta_1\,,\ p_1\sin\theta_1\,,\ 0) \qquad p^\mu_2 = (p_2\,,\ p_2\cos\theta_2\,,\ p_2\sin\theta_2\,,\ 0)$$

Vale la conservazione del quadrimpulso: $P^\mu_\pi = p^\mu_1 + p^\mu_2$.
Dalle componenti temporali si ricava $\quad m_\pi\gamma c = p_1 + p_2 \quad$ da cui

$$\gamma = \frac{p_1 + p_2}{m_\pi c} \qquad \text{e} \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{m_\pi^2 c^2}{(p_1+p_2)^2}}$$

Dalle componenti spaziali si ricava:

$$\begin{aligned} m_\pi\gamma\beta_x c &= p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \\ m_\pi\gamma\beta_y c &= p_1\sin\theta_1 + p_2\sin\theta_2 \\ m_\pi\gamma\beta_z c &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricavano le componenti della velocità del pione:

$$\begin{aligned} v_x &= c\beta_x = \frac{p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2}{m_\pi\gamma} \\ v_y &= c\beta_y = \frac{p_1\sin\theta_1 + p_2\sin\theta_2}{m_\pi\gamma} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

(b) Dalla relazione di conservazione del quadrimpulso, calcolando la norma, si ottiene

$$\begin{aligned} (P^\mu)^2 &= (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 \\ m_\pi^2 c^2 &= 2p_1\cdot p_2 = 2p_1p_2 - 2p_1p_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - 2p_1p_2\sin\theta_1\sin\theta_2 = \\ &= 2p_1p_2\big(1-\cos(\theta_1 - \cos\theta_2)\big) \end{aligned}$$

Soluzione 8.14

(a) Distinguiamo i due protoni iniziali usando l'indice a per il protone incidente, l'indice b per quello a riposo $\mathcal{E}_a = m_p\gamma_a c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_a = \dfrac{\mathcal{E}}{m_pc^2} = \dfrac{10}{0.938} = 10.661$

$\Longrightarrow \qquad v_p = c\beta_a = c\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma_a^2}} = 0.9956\,c = 2.985\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\mathcal{K}_a = \mathcal{E}_a - m_pc^2 = (10-0.938)\,\mathrm{GeV} = 9.062\,\mathrm{GeV}$

(b) Orientiamo l'asse x nella direzione del moto del protone incidente. Indicheremo con un asterisco le grandezze relative alle due particelle misurate nel centro di massa.
Presentiamo qui diversi metodi di soluzione.

<u>Primo metodo: Trasformazioni di Lorentz</u>
Nel SR del laboratorio i quadrimpulsi dei due protoni sono:

$$P_a^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_a}{c}, p_a, 0, 0\right) \qquad\qquad P_b^\mu = (m_pc, 0, 0, 0)$$

Per passare nel SR del centro di massa occorre effettuare una TL in direzione x, con velocità (incognita) v_{cm}. Poiché la particella B è a riposo nel SR del laboratorio, è ovvio che (in modulo) $v_{cm} = v^*$. I quadrimpulsi nel SR del c.m. si scrivono come:

$$P^{*\mu}_a = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & -\gamma_{cm}\beta_{cm} & 0 & 0 \\ -\gamma_{cm}\beta_{cm} & \gamma_{cm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_a/c \\ p_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm}\left(\dfrac{\mathcal{E}_a}{c} - \beta_{cm}p_a\right) \\ \gamma_{cm}\left(p_a - \beta_{cm}\dfrac{\mathcal{E}_a}{c}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{*\mu}_b = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & -\gamma_{cm}\beta_{cm} & 0 & 0 \\ -\gamma_{cm}\beta_{cm} & \gamma_{cm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_pc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm}m_pc \\ -\gamma_{cm}\beta_{cm}m_pc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo la velocità incognita v imponendo che la quantità di moto totale nel SR del centro di massa sia 0:

$$\gamma_{cm}\left(p_a - \beta_{cm}\frac{\mathcal{E}_a}{c}\right) - \gamma_{cm}\beta_{cm}m_p c = 0$$

$$\beta_{cm}\left(\frac{\mathcal{E}_a}{c} + m_p c\right) = p_a$$

$$\beta^* = \beta_{cm} = \frac{p_a c}{\mathcal{E}_a + m_p c^2} = \frac{\mathcal{E}_a\beta_a}{\mathcal{E}_a + m_p c^2} = \frac{\gamma_a m_p c^2 \beta_a}{(\gamma_a+1)m_p c^2} = \frac{\gamma_a\beta_a}{\gamma_a+1} = 0.910$$

$$\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\gamma_a^2\beta_a^2}{(\gamma_a+1)^2}}} = \frac{\gamma_a+1}{\sqrt{\gamma_a^2(1-\beta_a^2)+2\gamma_a+1}} = \sqrt{\frac{\gamma_a+1}{2}} = 2.41$$

(ricordare che $\gamma_a^2(1-\beta_a^2) = 1$) quindi

$$v^* = v_{cm} = c\beta_{cm} = 2.729\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Secondo metodo: Prodotto invariante

Scriviamo i quadrimpulsi totali nel SR del laboratorio e del cm, ricordando che nel cm l'impulso totale è nullo e i due protoni hanno la stessa energia

$$\begin{aligned} P^\mu_{tot} &= P^\mu_a + P^\mu_b = \left(\frac{\mathcal{E}_a}{c} + m_p c, p_a, 0, 0\right) = (m_p\gamma_a c + m_p c, p_a, 0, 0) = \\ &= (m_p c(\gamma_a+1), m_p\gamma_a\beta_a c, 0, 0) \\ P^{*\,\mu}_{tot} &= P^{*\mu}_a + P^{*\mu}_b = (\mathcal{E}^*_a + \mathcal{E}^*_b, 0,0,0) = (2\mathcal{E}^*, 0,0,0) = (2m_p\gamma^* c, 0,0,0) \end{aligned}$$

Calcoliamo il quadrato del quadrimpulso, che è un invariante relativistico:

$$P^\mu_{tot}P_{tot\,\mu} = P^{*\,\mu}_{tot}P^*_{tot\,\mu}$$

(metrica -1,+1,+1,+1)	(metrica +1,-1,-1,-1)
$(m_p c(\gamma_a+1))^2 + (m_p\gamma_a\beta_a c)^2 = -(2m_p\gamma^* c)^2$	$(m_p c(\gamma_a+1))^2 - (m_p\gamma_a\beta_a c)^2 = (2m_p\gamma^* c)^2$

Sviluppando i calcoli a primo membro si trova

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{\gamma_a+1}{2}}.$$

Terzo metodo: Rapidità

La rapidità Y di una TL con velocità relativa β è definita dalla relazione: $\tanh Y = \beta$ o, equivalentemente, da $\cosh Y = \gamma$. Una proprietà molto importante della rapidità è di essere additiva per TL.

Da γ_a si ricava $Y_a = \mathrm{acosh}(\gamma_a) = 3.0575$, da cui è immediato[1]:

$$Y^* = Y_{cm} = \frac{1}{2}Y_a \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma^* = \gamma_{cm} = \cosh\frac{Y_a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cosh Y_a}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma_a+1}{2}}$$

Tutti i metodi danno lo stesso risultato per γ^* per cui:

[1] La Y_{cm} in questo caso è la metà della Y_a perché le due particelle hanno la stessa massa di riposo

$$\mathcal{E}_a^* = \mathcal{E}_b^* = m_p \gamma^* c^2 = 2.26 \text{ GeV}$$

(c) Deve valere la conservazione dell'energia nel SR del centro di massa per lo stato finale; inoltre ognuna delle particelle finali deve avere, nel SR del centro di massa, un'energia almeno pari alla propria massa a riposo, cioè

$$\mathcal{E}_{tot}^* = \mathcal{E}_{a,fin}^* + \mathcal{E}_{b,fin}^* + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_{\pi,i}^* \geq 2m_p c^2 + N m_\pi c^2$$

quindi

$$N \leq \frac{\mathcal{E}_{tot}^* - 2m_p c^2}{m_\pi c^2} = 18.9$$

Il numero massimo di pioni che si possono creare è 18.

Soluzione 8.15

Per i fotoni la relazione energia-impulso è $\mathcal{E} = |\mathbf{p}|c$, perché hanno massa nulla.
Scriviamo i quadrimpulsi delle particelle:

$$\begin{array}{rl} \omega: & P^\mu = (Mc\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0) \\ \text{fotone 1}: & p_1^\mu = p_1(1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0) \\ \text{fotone 2}: & p_2^\mu = p_2(1\,,\ \cos\alpha\,,\ \sin\alpha\,,\ 0) \\ \text{fotone 3}: & p_3^\mu = p_3(1\,,\ \cos\beta\,,\ -\sin\beta\,,\ 0) \end{array}$$

Vale la conservazione del quadrimpulso:

$$P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu\,.$$

Per la componente y si ha:

$$0 = p_2 \sin\alpha - p_3 \sin\beta \qquad \text{da cui} \qquad p_3 = p_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Per la componente x:

$$0 = p_1 + p_2 \cos\alpha + p_3 \cos\beta = p_1 + p_2 \left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\beta \right) = p_1 + p_2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

da cui

$$p_1 = -p_2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\,.$$

Infine, dalla componente temporale:

$$Mc = p_1 + p_2 + p_3 = p_2 \left(-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} + 1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \right) = p_2 \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

Introducendo l'angolo γ tra i fotoni 2 e 3 la precedente espressione assume una forma più simmetrica, poiché $\gamma = 2\pi - (\alpha+\beta)$ e $\sin\gamma = \sin(2\pi - \alpha - \beta) = -\sin(\alpha+\beta)$ Quindi le energie dei fotoni sono:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}_1 = cp_1 &= \frac{Mc^2 \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \\ \mathcal{E}_2 = cp_2 &= \frac{Mc^2 \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \\ \mathcal{E}_3 = cp_2 &= \frac{Mc^2 \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}\end{aligned}\right\} \qquad \text{con} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

Soluzione 8.16

(a) Posto $v = \dfrac{3}{5}c$, si ha $\gamma(v) = \dfrac{5}{4}$. L'energia totale è

$$\mathcal{E}_{tot} = 2m\gamma(v)c^2 = \frac{5}{2}mc^2 = 2.35\,\text{GeV}.$$

L'energia cinetica totale è

$$\mathcal{K}_{tot} = 2mc^2(\gamma(v) - 1) = \frac{1}{2}mc^2 = 0.47\,\text{GeV}.$$

(b) Nel SR di riferimento di uno dei protoni, la velocità dell'altro (velocità relativa tra i protoni) è

$$v_{rel} = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} = \frac{15}{17}c \qquad \text{quindi} \qquad \gamma(v_{rel}) = \frac{17}{8}\,.$$

L'energia totale è

$$\mathcal{E}'_{tot} = mc^2 + m\gamma(v_{rel})c^2 = \frac{25}{8}mc^2 = 2.93\,\text{GeV}.$$

Allo stesso risultato si perviene effettuando una TL con velocità v (velocità relativa tra il SR del laboratorio ed il SR solidale con uno dei protoni), osservando che nel SR del laboratorio la quantità di moto totale è zero:

$$\frac{\mathcal{E}'_{tot}}{c} = \gamma(v)\left(\frac{\mathcal{E}_{tot}}{c} - \frac{v}{c}p_{tot}\right) = \gamma(v)\frac{\mathcal{E}_{tot}}{c} = \frac{5}{4}\frac{5}{2}mc = \frac{25}{8}mc\,.$$

L'energia cinetica totale, in questo SR, è dovuta solo alla particella in moto:

$$\mathcal{K}'_{tot} = mc^2\,(\gamma(v_{rel} - 1) = \frac{9}{8}mc^2 = 1.06\,\text{GeV}.$$

Occorre notare che l'energia cinetica nel SR solidale con uno dei protoni **non si può** ottenere con una TL, poichè l'energia cinetica **non è** la componente di un quadrivettore.

Soluzione 8.17

L'energia cinetica del protone proiettile è

$$\mathcal{K} = mc^2(\gamma(v) - 1)$$

da cui

$$\gamma(v) = \frac{\mathcal{K}}{mc^2} + 1 = 22.3 \qquad \text{e} \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.999\, c$$

Scriviamo il quadrimpulso del protone proiettile e del protone bersaglio, assumendo che il proiettile si muova lungo l'asse x:

$$p_1^\mu = (m\gamma(v)c, m\gamma(v)v, 0, 0) \qquad p_2^\mu = (mc, 0, 0, 0)\,.$$

Il quadrimpulso totale nel SR del laboratorio è

$$P_{tot}^\mu = (mc(\gamma(v)+1), m\gamma(v)v, 0, 0)\ .$$

Nel SR del centro di massa, il quandrimpulso totale ha le componenti spaziali nulle:

$${P_{tot}^*}^\mu = (\mathcal{E}_{tot}^*/c, 0, 0, 0)\ .$$

Per l'invarianza del quadriprodotto:

$$\begin{aligned} {P_{tot}^*}^\mu P_{tot\,\mu}^* &= P_{tot}^\mu P_{tot\,\mu} \\ \frac{\mathcal{E}^{*2}}{c^2} &= m^2c^2(\gamma(v)+1)^2 - m^2\gamma^2(v)v^2 = m^2c^2\left(\gamma^2(v) + 2\gamma(v) + 1 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2(v)\right) = \\ &= m^2c^2\left(\gamma^2(v)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2\gamma(v) + 1\right) = 2m^2c^2(\gamma(v)+1) \end{aligned}$$

e l'energia totale nel SR del centro di massa risulta:

$$\mathcal{E}_{tot}^* = mc^2\sqrt{2(\gamma(v)+1)} = 6.4\,\mathrm{GeV} \tag{S.8.7}$$

Soluzione 8.18

L'energia di ogni protone, nel SR del laboratorio, è $\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.
Scriviamo i quadrimpulsi dei due protoni, assumendo che si muovano lungo l'asse delle x:

Nel SR del laboratorio che, in questo caso, coincide con il centro di massa:

$$p_1^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, p, 0, 0\right) \qquad p_2^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -p, 0, 0\right)$$

Nel SR solidale con il protone 2:

$${p_1'}^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}, p', 0, 0\right) \qquad {p_2'}^\mu = (mc, \mathbf{0})$$

Per l'invarianza del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} {p_1'}^\mu p'_{2\mu} &= p_1^\mu p_{2\mu} \\ \frac{\mathcal{E}'}{c}mc &= \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + p^2 \\ \mathcal{E}' &= \frac{\mathcal{E}^2 + m^2p^2}{mc^2} \simeq 10^5\ \mathrm{TeV}\,. \end{aligned}$$

Soluzione 8.19

La quantità di moto della particella 1, assumendo che si muova in direzione $+x$, è

$$\mathbf{p}_1 = m_1\gamma(v_1)\mathbf{v}_1 = (m_1\gamma(v_1)v_1, 0, 0)$$

Nel SR del centro di massa la quantità di moto totale è zero, quindi la quantità di moto della particella 2 sarà

$$\mathbf{p}_2 = m_2\gamma(v_2)\mathbf{v}_2 = -\mathbf{p}_1 \,.$$

La particella 2 deve quindi muoversi in direzione $-x$ ed il modulo della sua velocità v_2 deve essere tale che

$$m_1\gamma(v_1)v_1 = m_2\gamma(v_2)v_2$$

da cui si ricava v_2 in funzione delle masse e di v_1

$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{v_1^2}{c^2}\left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)}}$$

Soluzione 8.20

Definiamo un sistema di coordinate in modo che il moto del pione iniziale sia lungo l'asse x e che il muone venga emesso nel piano xy. Studiamo la reazione nel SR del centro di massa (CM), ossia nel SR solidale con il pione iniziale. Le particelle finali vengono emesse in direzioni opposte, ad angolo θ^* rispetto all'asse x' (coincidente con l'asse x). I quadrimpulsi delle particelle sono (l'indice del quadrivettore verrà indicato con α, per non creare confusione con il suffisso μ che indica il muone):

$$\begin{aligned}
p_\pi^{*\alpha} &= \left(\frac{\mathcal{E}_\pi^*}{c}, 0, 0, 0\right) = (Mc, 0, 0, 0) \\
p_\mu^{*\alpha} &= \left(\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}, \mathbf{p}^*\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}, p^*\cos\theta^*, p^*\sin\theta^*, 0\right) \\
p_\nu^{*\alpha} &= \left(\frac{\mathcal{E}_\nu^*}{c}, -\mathbf{p}^*\right) = \left(\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}, -p^*\cos\theta^*, -p^*\sin\theta^*, 0\right)
\end{aligned}$$

Le relazioni di mass-shell per il muone e per il neutrino (che ha massa trascurabile) sono:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\mu^* &= \sqrt{p^{*2}c^2 + m^2c^4} \\
\mathcal{E}_\nu^* &= p^*c
\end{aligned}$$

Per la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\pi^* &= \mathcal{E}_\mu^* + \mathcal{E}_\nu^* \\
Mc^2 &= \sqrt{p^{*2}c^2 + m^2c^4} + p^*c \\
Mc - p^* &= \sqrt{p^{*2} + m^2c^2} \,.
\end{aligned}$$

Quest'ultima relazione richiede la condizione aggiuntiva $Mc - p^* > 0$, affinchè il secondo membro, che è $\mathcal{E}^*_\mu/c$, sia positivo. Elevando al quadrato si ottiene:

$$p^* = \frac{M^2 - m^2}{2M}c \tag{S.8.8a}$$

che soddisfa la condizione $Mc - p^* > 0$, quindi

$$\mathcal{E}^*_\nu = p^*c = \frac{M^2 - m^2}{2M}c^2 \tag{S.8.8b}$$

$$\mathcal{E}^*_\mu = \sqrt{m^2c^2 + \frac{(M^2 - m^2)^2}{4M^2}c^4} = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2 \,. \tag{S.8.8c}$$

È possibile ora ricavare l'energia del muone nel SR del laboratorio effettuando una TL. Il pione iniziale aveva velocità $v_\pi = c\beta_\pi$ che possiamo ricavare dalla sua energia:

$$\gamma_\pi = \frac{\mathcal{E}_\pi}{Mc^2}$$

quindi

$$\beta_\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_\pi^2}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_\pi^2 - M^2c^4}}{\mathcal{E}_\pi} \,.$$

Quindi per passare dal SR del CM al SR del laboratorio occorre effettuare una TL con velocità $-v_\pi$:

$$\frac{\mathcal{E}_\mu}{c} = \gamma_\pi \left(\frac{\mathcal{E}^*_\mu}{c} + \beta_\pi p^* \cos\theta^* \right) = \frac{\gamma_\pi}{c} \left(\mathcal{E}^*_\mu + \beta_\pi p^* c \cos\theta^* \right)$$

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{\mathcal{E}_\pi}{Mc^2} \left(\mathcal{E}^*_\mu + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_\pi^2 - M^2c^4}}{\mathcal{E}_\pi} \frac{M^2 - m^2}{2M} c^2 \cos\theta^* \right) =$$

$$= \mathcal{E}_\pi \frac{M^2 + m^2}{2M^2} + \sqrt{\mathcal{E}_\pi^2 - M^2c^4}\, \frac{M^2 - m^2}{2M^2} \cos\theta^* \tag{S.8.9}$$

L'energia del muone nel SR del laboratorio è data dalla somma di due termini: il primo dipende solo dalle masse e dall'energia del pione iniziale, il secondo dipende dall'angolo θ^* moltiplicato per un coefficiente positivo. L'energia minima si ottiene quando $\cos\theta^* = -1$, cioè $\theta^* = \pi$, ossia il muone è emesso all'indietro rispetto alla direzione del pione iniziale. L'energia massima si avrà invece per $\cos\theta^* = 1$, cioè $\theta^* = 0$, con il muone emesso in avanti rispetto al pione iniziale.

$$E_{\mu(\min)} = \mathcal{E}_\pi \frac{M^2 + m^2}{2M^2} - \sqrt{\mathcal{E}_\pi^2 - M^2c^4}\, \frac{M^2 - m^2}{2M^2}$$

$$E_{\mu(\max)} = \mathcal{E}_\pi \frac{M^2 + m^2}{2M^2} + \sqrt{\mathcal{E}_\pi^2 - M^2c^4}\, \frac{M^2 - m^2}{2M^2}$$

Soluzione 8.21

Scriviamo i quadrimpulsi delle particelle nel SR del centro di massa (CM), in cui il pione iniziale è fermo. Indicheremo con M la massa del pione e con m quella del muone, la massa del neutrino è trascurabile.

$$p_\pi^{*\alpha} = (Mc, 0, 0, 0)$$

$$p_\mu^{*\alpha} = \left(\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}, 0, p^*, 0\right)$$
$$p_\nu^{*\alpha} = \left(\frac{\mathcal{E}_\nu^*}{c}, 0, -p^*, 0\right) = (p^*, 0, -p^*, 0)$$

Usiamo i risultati (S.8.8a-c) dell'esercizio 8.20:

$$p^* = \frac{M^2 - m^2}{2M} c \qquad \mathcal{E}_\nu^* = p^* c = \frac{M^2 - m^2}{2M} c^2 \qquad \mathcal{E}_\mu^* = \frac{M^2 + m^2}{2M} c^2$$

e ricaviamo le velocità del muone nel SR del CM:

$$v_\mu^* = c\beta_\mu^* = c\frac{cp^*}{\mathcal{E}_\mu^*} = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\, c\,.$$

Un pione con impulso p_π nel SR del laboratorio ha energia e velocità date da:

$$\mathcal{E}_\pi = \sqrt{p_\pi^2 c^2 + M^2 c^4} = M\gamma_\pi c^2$$
$$\beta_\pi = \frac{cp_\pi}{\mathcal{E}_\pi} = \frac{p_\pi}{\sqrt{p_\pi^2 + M^2 c^2}}$$

Calcoliamo l'energia del muone nel SR del laboratorio con una TL con velocità $-v_\pi$ (si può anche usare la S.8.9 dell'esercizio (8.20) con $\theta^* = 90°$:)

$$\frac{\mathcal{E}_\mu}{c} = \gamma_\pi\left(\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c} + \beta_\pi p_\mu^{*x}\right) = \gamma_\pi \frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}$$
$$\mathcal{E}_\mu = \gamma_\pi \mathcal{E}_\mu^* = \frac{\mathcal{E}_\pi}{Mc^2}\mathcal{E}_\mu^* = \frac{M^2 + m^2}{2M^2}\sqrt{p_\pi^2 c^2 + M^2 c^4}$$

e la sua velocità

$$v_\mu = c\beta_\mu = \frac{cp_\mu}{\mathcal{E}_\mu} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_\mu^2 - m^2 c^4}}{\mathcal{E}_\mu}\,.$$

Per ricavare l'angolo di apertura Θ dobbiamo calcolare gli angoli θ_1 e θ_2, usando le componenti della quantità di moto nel SR del laboratorio:

$$p_\mu^x = p_\mu \cos\theta_1 = \gamma_\pi\left(p_\mu^{*x} + \beta_\pi \frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c}\right) = \gamma_\pi\beta_\pi\frac{\mathcal{E}_\mu^*}{c} = p_\pi\frac{M^2 + m^2}{2M^2}$$
$$p_\mu^y = p_\mu \sin\theta_1 = p_\mu^{*y} = p^* = \frac{M^2 - m^2}{2M}\, c$$
$$\tan\theta_1 = \frac{p_\mu^y}{p_\mu^x} = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\,\frac{Mc}{p_\pi}$$
$$p_\nu^x = p_\mu \cos\theta_2 = \gamma_\pi\left(p_\nu^{*x} + \beta_\pi\frac{\mathcal{E}_\nu^*}{c}\right) = \gamma_\pi\beta_\pi p^* = \frac{p_\pi}{Mc}p^*$$
$$p_\nu^y = -p_\nu \sin\theta_2 = p_\nu^{*y} = -p^*$$
$$\tan\theta_2 = \frac{-p_\nu^y}{p_\nu^x} = \frac{1}{\gamma_\pi\beta_\pi} = \frac{Mc}{p_\pi}$$

L'angolo di apertura si ottiene con la nota formula di trigonometria:

$$\tan\Theta = \tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\dfrac{Mc}{p_\pi}\left(\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}+1\right)}{1-\left(\dfrac{Mc}{p_\pi}\right)^2\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}} =$$

$$= \frac{2M^2}{\dfrac{p_\pi}{Mc}(M^2+m^2)-\dfrac{Mc}{p_\pi}(M^2-m^2)}\,.$$

Inserendo i valori numerici otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\mu &= 409\,\mathrm{MeV}\\
v^*_\mu &= 0.269\,c = 8.052\cdot 10^7\,\mathrm{m/s}\\
v_\mu &= 0.966\,c = 2.896\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\\
\tan\Theta &= 0.362\\
\Theta &= 19.9^\circ = 0.347\,\mathrm{rad.}
\end{aligned}$$

Soluzione 8.22

Nel SR del laboratorio i quadrimpulsi delle particelle iniziali, assumendo che la particella incidente si muova in direzione $+x$, sono:

$$p^\mu_A = \left(\frac{\mathcal{E}_A}{c}, p_A, 0, 0\right) \qquad\qquad p^\mu_B = (Mc, \mathbf{0})$$

Calcoliamo la massa invariante del sistema iniziale:

$$W^2 = (p^\mu_A + p^\mu_B)^2 = m^2c^2 + M^2c^2 + 2M\mathcal{E}_A \tag{S.8.10}$$

Per la conservazione del quadrimpulso, detti p^μ_{Bf} e p^μ_X i quadrimpulsi finali, si ha

$$p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_{Bf} + p^\mu_X$$

quindi

$$W^2 = (p^\mu_{Bf} + p^\mu_X)^2$$

Ma W^2 è un invariante, quindi si può calcolare nel SR del centro di massa, dove la quantità di moto totale è nulla: $W^2 = \left(\dfrac{\mathcal{E}_{Bf}}{c} + \dfrac{\mathcal{E}_X}{c}\right)^2$.

Il valore minimo possibile per W si ha quando le particelle finali sono tutte a riposo nel SR del centro di massa:

$$W_{min} = (M + m_X)c$$

e a questo valore minimo corrisponde, in base alla (S.8.10), l'energia di soglia della particella incidente:

$$W^2_{min} = m^2c^2 + M^2c^2 + 2M\mathcal{E}_{A,th}$$

$$\mathcal{E}_{A,th} = \frac{c^2}{2M}\left((M+m_X)^2 - m^2 - M^2\right) =$$

$$= \frac{c^2}{2M}\left(2Mm_X + m_X^2 - m^2\right)$$

L'energia cinetica di soglia è

$$\mathcal{K}_{A,th} = \mathcal{E}_{A,th} - mc^2 = \frac{c^2}{2M}\left(2Mm_X + m_X^2 - m^2 - 2Mm\right) =$$
$$= (m_X - m)\left(1 + \frac{m_X + m}{2M}\right)c^2$$

che si può anche riscrivere, introducendo la differenza di massa $\Delta m = m_X - m$:

$$\mathcal{K}_{A,th} = \Delta m\left(1 + \frac{\Delta m}{2M} + \frac{m}{M}\right)c^2$$

Capitolo 9

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 9.1

(a) L'accelerazione è la derivata temporale della velocità:

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$$

Dalla trasformazione della velocità per la componente x: $u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$ si ottiene (ricordare che v, velocità relativa tra i due SR, è costante):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}\right) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right) - (u_x - v)\left(-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)}{(1 - u_x v/c^2)^2} = \\
&= \frac{a_x\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2} + \dfrac{u_x v}{c^2} - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{a_x\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{a_x}{\gamma^2(v)\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Dalla trasformazione di Lorentz per la coordinata temporale: $t' = \gamma(v)(t - vx/c^2)$ si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma(v)\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

per cui

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{a_x}{\gamma^3(v)\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

Per le componenti trasverse rispetto al moto relativo dei due SR si ha, procedendo in modo analogo ($i = y, z$),

$$\frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_i}{1 - u_x v/c^2}\right) = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{\dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right) - u_i\left(-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{a_i}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} + \frac{a_x u_i v/c^2}{\gamma(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}$$

e infine

$$a'_i = \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{a_i}{\gamma^2(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_i v/c^2}{\gamma^2(v)\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^3}\,.$$

(b) Per $v \ll c$ si ha $\gamma(v) \simeq 1$. Trascurando tutti i termini con c a denominatore è immediato ottenere $a'_x = a_x$, $a'_y = a_y$ e $a'_z = a_z$, cioè l'accelerazione è invariante nelle Trasformazioni di Galileo.

Soluzione 9.2

Dalla definizione $A^\mu = \mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}\tau$, osservando che il tempo misurato nel SR (istantaneo) solidale con il corpo in esame è il tempo proprio ed è legato al tempo misurato in K da

$$\mathrm{d}t = \gamma(u)\mathrm{d}\tau$$

si ottiene

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\gamma(u)c\,,\,\gamma(u)\mathbf{u}\Big)\,.$$

La derivata di $\gamma(u)$ è data da (vedere esercizio 2.3)

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(u)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma^3(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}$$

per cui

$$\begin{aligned} A^\mu &= \gamma(u)\left(\gamma^3(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\,c\,,\,\gamma^3(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\mathbf{u} + \gamma(u)\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right) = \\ &= \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\,,\,\gamma^2(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\mathbf{u} + \mathbf{a}\right)\,. \end{aligned}$$

Soluzione 9.3

Per definizione

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(m\gamma(u)\mathbf{u}\Big) = m\gamma^3(u)\left(\frac{\mathbf{u}}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)\mathbf{u} + m\gamma(u)\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \tag{S.9.1}$$

$$= m\gamma(u)\mathbf{a} + m\gamma^3(u)\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\mathbf{u}. \tag{S.9.2}$$

La tri-forza è composta da un termine parallelo all'accelerazione, con coefficiente $m\gamma(u)$, ed un termine parallelo alla velocità, con coefficiente $m\gamma^3(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}/c^2$. È evidente che, in generale, la tri-forza risultante non sarà parallela all'accelerazione (ricordiamo che nel caso non relativistico forza e accelerazione sono sempre parallele, per la seconda legge di Newton). Inoltre, vale la pena di osservare che a parità di (tri-)forza, l'accelerazione di un corpo materiale dipende esplicitamente dal suo stato di moto, cioè dalla velocità $\mathbf{u}$.

Consideriamo alcuni casi particolari importanti.

Nel moto rettilineo, in cui $\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}$ sono sempre paralleli, anche la forza risulta parallela a velocità ed accelerazione. Infatti posto $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{n}}$, essendo $\hat{\mathbf{n}}$ il versore comune, si ha

$$\mathbf{f} = m\gamma(u)a\,\hat{\mathbf{n}} + m\gamma^3(u)\frac{au}{c^2}u\,\hat{\mathbf{n}} = m\gamma(u)a\left(1+\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}\right)\hat{\mathbf{n}} = m\gamma^3(u)a\,\hat{\mathbf{n}}$$

e la forza risulta parallela all'accelerazione, con coefficiente $m\gamma^3(u)$.
Nel caso in cui l'accelerazione è perpendicolare alla velocità si ha

$$\mathbf{f} = m\gamma(u)\mathbf{a}$$

e anche in questo caso la forza è parallela all'accelerazione, con coefficiente $m\gamma(u)$. In questo caso la velocità del corpo non aumenta in modulo (la forza non compie lavoro) ma cambia solo in direzione.

Osservazione: in Meccanica Classica l'inerzia di un corpo materiale è sempre m, qualunque sia la direzione della forza a cui è sottoposto. In Relatività invece un corpo materiale presenta un'inerzia maggiore ($m\gamma^3$) se la forza cerca di accelerarlo in direzione parallela alla sua velocità, facendogli quindi aumentare la velocità in modulo. Se invece la forza tende soltanto a modificare la direzione della velocità senza aumentarne il modulo, l'inerzia è minore ($m\gamma$).

Soluzione 9.4

Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri della (9.5) per la velocità $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = m\gamma(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + m\gamma^3(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\frac{u^2}{c^2} = m\gamma(u)\left(1+\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}\right)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = m\gamma^3(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$$

quindi

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}}{m\gamma^3(u)}\,.$$

Sostituiamo nella (9.5):

$$\mathbf{f} = m\gamma(u)\mathbf{a} + m\gamma^3(u)\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}}{mc^2\gamma^3(u)}\mathbf{u} = m\gamma(u)\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}}{c^2}$$

da cui

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma(u)}\left(\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}}{c^2}\right)\,.$$

Anche da questa relazione risulta evidente che accelerazione e forza, in generale, non sono paralleli e che l'accelerazione dipende dalla velocità.

Soluzione 9.5

Dimostriamo che

$$U^\mu A_\mu = 0$$

in due modi.
Primo metodo

Calcoliamo la derivata di $U^\mu U_\mu$ rispetto al tempo proprio e utilizziamo la proprietà (5.5) (pag. 16):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(U^\mu U_\mu) &= 2U^\mu \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = U^\mu A_\mu \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(c^2) = 0\end{aligned}$$

da cui

$$U^\mu A_\mu = 0\,.$$

<u>Secondo metodo</u>
Calcoliamo il prodotto scalare in modo esplicito, utilizzando le definizioni in termini di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ date dalle (9.3) e (5.4) (pag. 16) e la metrica `(+1,-1,-1,-1)`

$$\begin{aligned}U^\mu A_\mu &= \gamma(u)c\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - \gamma(u)\mathbf{u}\cdot\left[\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\mathbf{u} + \gamma^2(u)\mathbf{a}\right] = \\ &= \gamma^5(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} - \gamma^5(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\frac{u^2}{c^2} - \gamma^3(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \gamma^5(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) - \gamma^3(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \\ &= \gamma^5(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\frac{1}{\gamma^2(u)} - \gamma^3(u)\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0\end{aligned}$$

Con la metrica `(-1,+1,+1,+1)` tutti i termini a secondo membro cambiano segno e il risultato è sempre zero.

<u>Osservazione:</u> Dal fatto che la quadriaccelerazione è ortogonale alla quadrivelocità (che è un vettore di tipo tempo) si deduce che la quadriaccelerazione è un vettore di tipo spazio (vedere esercizio 3.5). Alla stessa conclusione si può giungere anche calcolando direttamente la norma $A^\mu A_\mu$ a partire dalla (9.3) (esercizio 9.7).

Soluzione 9.6

Consideriamo due SRI K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità v in direzione $+x$. Per un punto materiale in moto, nel SR K, con velocità e accelerazioni istantanee $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ la quadriaccelerazione è data dalla 9.3:

$$A^\mu = \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{a}\,,\,\gamma^2(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}}{c^2} + \mathbf{a}\right)\,.$$

Nel SR K', per lo stesso punto materiale si ha

$$A'^\mu = \gamma^2(u')\left(\gamma^2(u')\frac{\mathbf{u}'}{c}\cdot\mathbf{a}'\,,\,\gamma^2(u')\frac{(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{a}')\mathbf{u}'}{c^2} + \mathbf{a}'\right)\,,$$

dove le componenti (a'_x, a'_y, a'_z) sono date dalle (9.1) e le (u'_x, u'_y, u'_z) sono date dalle (5.1) (pag. 16).
Consideriamo la componente temporale di A':

$$A'^0 = \gamma^4(u')\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{a}'}{c} =$$

usiamo la (5.3) (pag. 16) e poniamo, per comodità di scrittura, $D \equiv 1 - u_x v/c^2$

$$= \gamma^4(v)\gamma^4(u)D^4\frac{1}{c}\left[\frac{a_x(u_x - v)}{\gamma^3(v)D^4} + \frac{u_y a_y + u_z a_z}{\gamma^3(v)D^3} + \frac{a_x(u_y^2 + u_z^2)v}{c^2\gamma^3(v)D^4}\right] =$$
$$= \gamma(v)\gamma^4(u)\frac{1}{c}\left[a_x(u_x - v) + (u_y a_y + u_z a_z)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + a_x v\frac{u^2 - u_x^2}{c^2}\right] =$$
$$= \gamma(v)\gamma^4(u)\frac{1}{c}\left[\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} - a_x v - \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\frac{u_x v}{c^2} + \frac{a_x v u^2}{c^2}\right] =$$
$$= \gamma(v)\gamma^4(u)\left[\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) - \frac{a_x v}{c}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right] =$$
$$= \gamma(v)\left[\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - \frac{v}{c}\left(\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_x + \gamma^2(u)a_x\right)\right] = \gamma(v)\left(A^0 - \frac{v}{c}A^x\right)$$

Analogamente per la componente A'^x si ha

$$A'^x = \gamma^4(u')\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{a}'}{c}\frac{u'_x}{c} + \gamma^2(u')a'_x =$$

per il primo termine usiamo il risultato appena trovato per A'^0, poi procediamo come prima

$$= \gamma(v)\left(A^0 - \frac{v}{c}A^x\right)\frac{u'_x}{c} + \gamma^2(u')a'_x =$$
$$= \gamma(v)\left(A^0 - \frac{v}{c}A^x\right)\frac{u_x - v}{cD} + \gamma^2(v)\gamma^2(u)D^2\frac{a_x}{\gamma^3(v)D^3} =$$
$$= \gamma(v)\left[\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - \frac{v}{c}\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_x - \frac{v}{c}\gamma^2(u)a_x\right]\frac{u_x - v}{cD} + \gamma^2(u)\frac{a_x}{\gamma(v)D} =$$
$$= \gamma(v)\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{u_x - v}{c} - \gamma(v)\gamma^2(u)a_x\frac{v(u_x - v)}{c^2 D} + \gamma^2(u)\frac{a_x}{\gamma(v)D} =$$
$$= \gamma(v)\left[\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_x - \frac{v}{c}\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - \gamma^2(u)\frac{a_x}{D}\left(\frac{u_x v - v^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2(v)}\right)\right]$$

l'espressione nella parentesi tonda è uguale a $-D$, semplificando e raggruppando i termini si ottiene

$$A'^x = \gamma(v)\left[\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_x + \gamma^2(u)a_x - \frac{v}{c}\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\right] = \gamma(v)\left(A^x - \frac{v}{c}A^0\right).$$

Infine per la componente A'^y (la componente z è identica) si ha

$$A'^y = \gamma^4(u')\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{a}'}{c}\frac{u'_y}{c} + \gamma^2(u')a'_y = \gamma(v)\left(A^0 - \frac{v}{c}A^x\right)\frac{u'_y}{c} + \gamma^2(u')a'_y =$$
$$= \gamma(v)\left(\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - \frac{v}{c}\gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_x - \frac{v}{c}\gamma^2(u)a_x\right)\frac{u_y}{c\gamma(v)D} +$$
$$+ \gamma^2(v)\gamma^2(u)D^2\left(\frac{a_y}{\gamma^2(v)D^2} + \frac{a_x u_y v}{c^2\gamma^2(v)D^3}\right) =$$
$$= \gamma^4(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}u_y + \gamma^2(u)a_y = A^y$$

Quindi anche per la quadriaccelerazione, come avevamo in precedenza verificato per la quadrivelocità (esercizio 5.3) vale la legge di trasformazione di un quadrivettore controvariante.

$$A' = \Lambda A \qquad \text{ossia} \qquad A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu\,,$$

Soluzione 9.7

Usiamo la (9.3):

$$\begin{aligned}A^\mu A_\mu &= \gamma^4(u)\left\{\gamma^4(u)\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2 - \left[\gamma^2(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\mathbf{u}+\mathbf{a}\right]^2\right\} = \\ &= \gamma^4(u)\left\{\gamma^4(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})^2}{c^2} - \gamma^4(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})^2}{c^2}\frac{u^2}{c^2} - 2\gamma^2(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})^2}{c^2} - a^2\right\} = \\ &= -\gamma^4(u)\left(a^2+\gamma^2(u)\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})^2}{c^2}\right). \qquad \text{(S.9.3)}\end{aligned}$$

Il risultato dimostra che la quadriaccelerazione è un vettore di tipo spazio, come visto anche nell'esercizio 9.5.
Nel caso di moto unidimensionale:

$$A^\mu A_\mu = -\gamma^4(u)\left(a^2+\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}a^2\right) = -\gamma^4(u)\left(1+\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}\right)a^2 = -\gamma^6(u)a^2 \qquad \text{(S.9.4)}$$

Soluzione 9.8

Utilizziamo il risultato (S.9.4) dell'esercizio 9.7 per la norma (al quadrato) della quadriaccelerazione:

$$A^\mu A_\mu = -\gamma^6(u)a^2\,.$$

Nel SR in cui il punto è istantaneamente a riposo ($\mathbf{u}=\mathbf{0}$) la quadraccelerazione ha la forma:

$$A'^\mu = (0,\mathbf{a}')$$

La norma di A^μ è un invariante, quindi deve avere lo stesso valore in ogni SR:

$$A^\mu A_\mu = A'^\mu A'_\mu \qquad \Longrightarrow \qquad -\gamma^6(u)a^2 = -a'^2\,.$$

Quindi l'accelerazione che il corpo misura nel proprio SR, detta anche "*accelerazione propria*" a_0, è

$$a_0 = a' = \gamma^3(u)a\,.$$

Osserviamo che questo risultato è valido solo per il moto unidimensionale, nel caso generale infatti invece della relazione (S.9.4) si dovrebbe usare la (S.9.3).

Soluzione 9.9

Partiamo dalla regola di trasformazione per la velocità trovata nell'esercizio 5.7 (pag. 81):

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}+\big(\gamma(v)-1\big)\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}}{\gamma(v)\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\,.$$

Per l'accelerazione nel SR K' si ha

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}\,.$$

Dalla trasformazione per la coordinata temporale si ha:

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)$$

quindi, ricordando che $\mathbf{v}$ è la velocità relativa tra i due SR ed è costante (altrimenti almeno uno dei due SR non sarebbe inerziale!)

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{1}{\gamma(v)}\left\{\frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \left(\gamma(v)-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}}{1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} + \frac{\mathbf{u} + \left(\gamma(v)-1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left\{\left[\mathbf{a} + \left(\gamma(v)-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right]\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\mathbf{u} + \left(\gamma(v)-1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(v)\mathbf{v}\right]\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left\{\mathbf{a}\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) + \left(\gamma(v)-1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}}{v^2} - \cancel{\left(\gamma(v)-1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2c^2}} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{u}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2} + \cancel{\left(\gamma(v)-1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}}{v^2c^2}} - \gamma(v)\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\right\} =$$

$$= \frac{\mathbf{a}\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) + \gamma(v)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\left(-\frac{\mathbf{v}}{v^2} + \frac{\mathbf{u}}{c^2}\right)}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}$$

Quindi l'accelerazione nel SR K' è data da

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma(v)}\right) + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}}{c^2}}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\,.$$

Verifichiamo che, con un boost in direzione $+x$ si ottengono le relazioni (9.1) (pag. 36). In tal caso:

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0) \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = vu_x \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = va_x$$

Per la componente parallela al moto relativo tra i SR:

$$a'_x = \frac{a_x\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) - a_x\left(1 - \frac{1}{\gamma(v)}\right) + a_x v\frac{u_x}{c^2}}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3} = \frac{a_x}{\gamma^3(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

cioè esattamente la prima delle (9.1). Per una componente perpendicolare al moto relativo ($i = y, z$):

$$a'_i = \frac{a_i\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) + \frac{a_x v u_i}{c^2}}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3} = \frac{a_i}{\gamma^2(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_i v}{c^2\gamma^2(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

anche questa coincide con la corrispondente delle (9.1).

Soluzione 9.10

Consideriamo due SR K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità v in direzione $+x$. Se nel SR K è definita la (tri-)forza $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, nel SR K' la forza $\mathbf{f}'$ si ottiene nel modo seguente:

$$f'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}p_x - \dfrac{v}{c^2}\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t - \dfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{f_x - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}}{1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} = \frac{f_x - \dfrac{v}{c^2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}}{1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$$

$$f'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma(v)\left(\mathrm{d}t - \dfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right)} = \frac{f_y}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}$$

Per un boost con velocità $\mathbf{v}$ in direzione qualsiasi, le componenti della forza parallela e perpendicolare al boost si trasformano come:

$$\mathbf{f}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{f}_{\parallel} - \dfrac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\mathbf{v}}{1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} \qquad\qquad \mathbf{f}'_{\perp} = \frac{\mathbf{f}_{\perp}}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}$$

Soluzione 9.11

Utilizziamo le regole di trasformazione delle componenti della forza date dalle (9.7).

(a) Se $\mathbf{f} = (f_x, 0, 0)$ ed il moto è in direzione x, allora $\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = f_x u_x$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = v u_x$ e si ha

$$f'_x = \frac{f_x - \dfrac{v}{c^2} f_x u_x}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} = f_x \qquad\qquad f'_y = 0 \qquad\qquad f'_z = 0$$

In questo caso particolare quindi $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$.

(b) Supponiamo che il punto materiale sia fermo nel SR K: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Allora $(i = y, z)$:

$$f'_i = \frac{f_i}{\gamma(v)} \qquad \text{cioè} \qquad f_i = \gamma(v) f'_i\,.$$

Se invece il punto materiale è fermo nel SR K', usando la regola di trasformazione della velocità (inversa delle (5.1), pag. 16):

$$f'_i = \frac{f_i}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{v u_x}{c^2}\right)} = \frac{f_i}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}\right)}$$

ma, per ipotesi, $u'_x = 0$ quindi

$$f'_i = \frac{f_i}{\gamma(v)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)} = \gamma(v) f_i$$

In conclusione, la componente trasversale della forza (rispetto al moto relativo del SR) nel SR solidale con il punto materiale è maggiore che nel SR in cui il corpo è in moto.

Soluzione 9.12

Per un punto materiale di massa m, in moto in un SR K con velocità (istantanea) $\mathbf{u}$, il quadrimpulso è

$$P^\mu = \big(m\gamma(u)c, m\gamma(u)\mathbf{u}\big) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right) .$$

Per definizione la quadriforza è la derivata di P^μ rispetto al tempo proprio τ ossia il tempo misurato nel SR solidale con il punto materiale. La velocità $\mathbf{u}$, in generale, non è costante, quindi in ogni istante si dovrà considerare un diverso SR solidale con il corpo.

$$F^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Per la derivata del tri-impulso usiamo il risultato (S.9.2) dell'esercizio 9.3:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f} = m\gamma(u)\mathbf{a} + m\gamma^3(u)\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\mathbf{u} \tag{S.9.5}$$

La derivata dell'energia è

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma(u)c^2) = m\gamma^3(u)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}c^2 = m\gamma^3(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$$

Moltiplicando scalarmente la (S.9.5) per $\mathbf{u}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} &= m\gamma(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + m\gamma^3(u)\frac{u^2}{c^2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = m\gamma(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\left(1+\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}\right) = \\ &= m\gamma^3(u)\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Quindi la quadriforza si può scrivere come

$$F^\mu = \left(\gamma(u)\mathbf{f}\cdot\frac{\mathbf{u}}{c}\, , \, \gamma(u)\mathbf{f}\right) .$$

Osservazione 1: La parte spaziale della quadriforza **non** concide con la tri-forza $\mathbf{f}$, ma include il fattore moltiplicativo $\gamma(u)$.

Osservazione 2: La componente temporale della quadriforza, pari al prodotto scalare della forza (moltiplicata per $\gamma(u)$) per la velocità, ha il significato fisico di *potenza*, in analogia con il caso non relativistico.

Soluzione 9.13

La dimostrazione è immediata ricordando che, se la massa è costante, la quadriforza è proporzionale alla quadriaccelerazione, che è sempre ortogonale alla quadrivelocità, come abbiamo già visto nell'esercizio 9.5. Ma si può facilmente verificare in modo esplicito calcolando il prodotto scalare:

$$F^\mu U_\mu = \gamma^2(u)\left(\mathbf{f}\cdot\frac{\mathbf{u}}{c}c - \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\right) = 0\, .$$

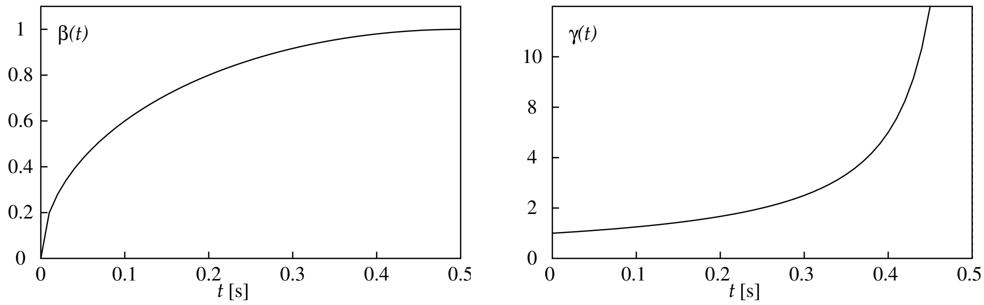


Figura 9.1: Le funzioni $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ dell'esercizio 9.14, per $a = 2\,\mathrm{s}^{-1}$

Soluzione 9.14

(a) Si ha

$$\beta(t) = \sqrt{at(2-at)} = \sqrt{1-(1-at)^2}\ ,$$

da cui segue facilmente

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \frac{1}{1-at}\ .$$

I grafici di $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, per un valore particolare di a, sono mostrati in fig. 9.1. Per $t \to 1/a$ la velocità del punto materiale tende a quella della luce.

(b) La quadrivelocità è data da

$$u^\mu(t) = \gamma(t)(c, v(t), 0, 0) = \frac{c}{1-at}(1, \sqrt{1-(1-at)^2)}, 0, 0)\ .$$

(c) La relazione tra $d\tau$ e dt è

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} = (1-at)dt\ .$$

Integrando tale relazione otteniamo

$$\tau(t) = \int_0^t dt'\,(1-at') = t - \frac{a}{2}t^2\ .$$

Da ciò segue che, se il punto riesce a seguire la legge di velocità sopra descritta fino al tempo $t = a$, per lui passa uin tempo proprio pari alla metà del tempo coordinato:

$$\tau(1/a) = \frac{1}{2a}\ .$$

Per invertire la relazione tra τ e t dobbiamo risolvere l'equazione di secondo grado

$$\frac{a}{2}t^2 - t + \tau = 0\ .$$

Le soluzioni sono

$$t_\pm = \frac{1}{a}\left(1 \pm \sqrt{1-2a\tau}\right)$$

e dobbiamo scegliere quella che tende a zero per $\tau \to 0$, quindi

$$t(\tau) = \frac{1}{a}\left(1 - \sqrt{1 - 2a\tau}\right)$$

(d) Sostituendo tale legge nelle espressioni di $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ otteniamo facilmente

$$\beta(\tau) = \sqrt{2a\tau}\ , \quad \gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-2a\tau}}\ .$$

Pertanto

$$u^\mu(\tau) = c\gamma(\tau)(1, \beta(\tau), 0, 0) = \frac{c}{\sqrt{1-2a\tau}}(1, \sqrt{2a\tau}, 0, 0)\ .$$

La quadri-accelerazione è ottenuta semplicemente come

$$a^\mu(\tau) = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{ac}{(1-2a\tau)^{3/2}}(1, 1/\sqrt{2a\tau}, 0, 0)\ .$$

(e) Siccome u^μ è un tensore, nel sistema di riferimento K' si avrà semplicemente

$$\hat{u}^\mu(\tau) = \hat{\Lambda}^\mu{}_\nu u^\nu(\tau)\ ,$$

dove, denotando $\hat{\beta} = \hat{v}/c$ e $\hat{\gamma} = 1/\sqrt{1-\hat{v}^2}$, la matricxe di Lorentz è

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} & -\hat{\beta}\hat{\gamma} & 0 & 0 \\ -\hat{\beta}\hat{\gamma} & \hat{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Dunque otteniamo, con semplice algebra,

$$\hat{u}^\mu = c\hat{\gamma}\,\gamma(\tau)(1-\hat{\beta}, \beta(\tau)-\hat{\beta}, 0, 0) = \ldots$$

Soluzione 9.15

Risolviamo le equazioni differenziali per le componenti della quantità di moto, con le opportune condizioni iniziali:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{p}_x = 0 \\ \dot{p}_y = f \\ \dot{p}_z = 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} p_x = p_{0x} = p_0 \\ p_y = ft + p_{0y} = ft \\ p_z = p_{0z} = 0 \end{array}\right.$$

L'energia della particella in funzione del tempo è

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p_0^2c^2 + f^2c^2t^2 + m^2c^4} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + f^2c^2t^2}$$

essendo $\mathcal{E}_0 = \sqrt{p_0^2c^2 + m^2c^4}$ l'energia della particella al tempo $t = 0$.
Possiamo scrivere la velocità della particella come

$$\mathbf{u} = c\boldsymbol{\beta} = \frac{c^2\mathbf{p}}{\mathcal{E}}$$

quindi

$$u_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + f^2c^2t^2}} \qquad u_y = \frac{c^2p_y}{\mathcal{E}} = \frac{c^2ft}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + F^2c^2t^2}} \qquad u_z = \frac{c^2p_z}{\mathcal{E}} = 0$$

Notiamo che la componente x della velocità **diminuisce** con il passare del tempo, nonostante la forza agisca solo in direzione y! Quindi l'accelerazione non è parallela alla forza! Il modulo della velocità è dato da

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c\sqrt{\frac{c^2 p_0^2 + f^2 c^2 t^2}{\mathcal{E}_0^2 + f^2 c^2 t^2}}$$

e tende a c per $t \to \infty$. Notiamo che se $m = 0$ (che implica $\mathcal{E}_0 = p_0 c$) il modulo della velocità è sempre c. Integriamo nuovamente per ottenere il vettore posizione in funzione del tempo (supponiamo che la particella si trovi nell'origine degli assi al tempo $t = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x \qquad x(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + f^2 c^2 t'^2}} = \frac{p_0 c}{f} \operatorname{arcsinh} \frac{cft}{\mathcal{E}_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y \qquad y(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{c^2 f t'}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + f^2 c^2 t'^2}} = \frac{1}{f}\left(\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + f^2 c^2 t^2} - \mathcal{E}_0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_z \qquad z(t) = 0$$

Osserviamo che il moto avviene nel piano xy.
Eliminando t tra le prime due equazioni si ottiene la traiettoria della particella

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{cf} \sinh \frac{fx}{p_0 c} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{\mathcal{E}_0}{f}\left(\cosh \frac{fx}{p_0 c} - 1\right)$$

Nel limite non relativistico ($c \to \infty$) l'equazione della traiettoria diventa

$$y = \frac{mf}{2p_0^2} x^2$$

cioè la ben nota parabola.

Soluzione 9.16

Sia K il SR della Terra e sia K' un SRI solidale all'istante t con l'astronave.
In questo istante, nel SR K' l'astronave è ferma ma subisce l'accelerazione $a' = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'} = \alpha$, quindi nell'intervallo di tempo infinitesimo $\mathrm{d}t'$ acquista la velocità $\mathrm{d}u'$.
Nel SR della Terra al tempo t l'astronave viaggia con velocità u. Dopo un tempo $\mathrm{d}t$ la sua velocità diventa $u + \mathrm{d}u$. Tra la velocità nel SR K' e la velocità in K vale la regola di composizione delle velocità. Sviluppiamo al primo ordine negli infinitesimi:

$$u + \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u' + u}{1 + (u\mathrm{d}u')/c^2} \simeq (\mathrm{d}u' + u)\left(1 - \frac{u\mathrm{d}u'}{c^2}\right) \simeq \mathrm{d}u' + u - \frac{u^2}{c^2}\mathrm{d}u' = u + \frac{\mathrm{d}u'}{\gamma^2(u)}$$

da cui otteniamo la relazione tra gli incrementi di velocità nei due SR:

$$\mathrm{d}u' = \gamma^2(u)\mathrm{d}u$$

Il tempo misurato in K' è il tempo proprio, per cui

$$\mathrm{d}t = \gamma(v)\mathrm{d}t'$$

e troviamo l'accelerazione nel SR K in funzione della velocità:

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma^2(u)}\frac{\mathrm{d}u'}{\gamma(u)\mathrm{d}t'} = \frac{a'}{\gamma^3(u)} = \frac{\alpha}{\gamma^3(u)} \tag{S.9.6}$$

Quindi, nonostante l'accelerazione nel SR dell'astronave sia costante, l'accelerazione misurata nel SR della Terra diminuisce all'aumentare della sua velocità.
Calcoliamo la velocità dell'astronave, nel SR K, in funzione del tempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\gamma^3(u)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \alpha \mathrm{d}t$$

Integriamo l'equazione differenziale imponendo la condizione iniziale $u(0) = 0$. È utile il cambio di variabile $\sin\varphi = u/c$:

$$\alpha\, t = \int_0^{\varphi} c\frac{\mathrm{d}\varphi}{cos^2\varphi} = c\,\tan\varphi = \frac{u}{1-u^2/c^2}\,,$$

da cui, risolvendo rispetto alla velocità si trova:

$$u(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 t^2}{c^2}}}\,.$$

Abbiamo così ottenuto la veloicità dell'astronave nel SR della Terra, in funzione del tempo terrestre. Questo ci permette di ricavare l'accelerazione, sostituendo in (S.9.6):

$$a(t) = \frac{\alpha}{\gamma^3(u)} = \frac{\alpha}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}} = \alpha\left(1-\frac{\alpha^2t^2/c^2}{1+\alpha^2t^2/c^2}\right)^{3/2} = \frac{\alpha}{\left(1+\dfrac{\alpha^2t^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

da cui si vede chiaramente che l'accelerazione, secondo il SR della Terra, diminuisce nel tempo.
Calcoliamo ora la distanza percorsa in funzione del tempo, integrando la velocità:

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2t^2}{c^2}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}x = \alpha\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\alpha^2t^2/c^2}}$$

da cui (con $x(0) = 0$):

$$x(t) = \alpha\left[\frac{c^2}{\alpha^2}\sqrt{1+\frac{\alpha^2t^2}{c^2}}\right]_0^t = \frac{c^2}{\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2t^2}{c^2}}-1\right)\,.$$

La legge oraria $x(t)$ è un moto iperbolico, infatti si può riscrivere come:

$$\left(\frac{\alpha x}{c^2}+1\right)^2 - \frac{\alpha^2t^2}{c^2} = 1$$

che è l'equazione di un'iperbole.
Il limite non relativistico si ottiene nell'approssimazione $u \ll c$ e $\alpha t \ll c$ (l'astronave parte da ferma, quindi per piccoli t il prodotto αt, che ha le dimensioni di una velocità, è molto

minore di c). Si trova:

$$\begin{cases} a = \dfrac{\alpha}{\gamma^3(u)} \\ u = \dfrac{\alpha t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 t^2}{c^2}}} \\ x = \dfrac{c^2}{\alpha}\left(\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - 1\right) \end{cases} \quad \xrightarrow[\alpha t \ll c]{u \ll c} \quad \begin{cases} a_{NR} = \alpha = a' \\ u_{NR} = \alpha t \\ x_{NR} = \dfrac{1}{2}\alpha^2 t^2 \,. \end{cases}$$

Si ritrovano quindi tutti i risultati, ben noti, della Meccanica Classica.
Nel limite opposto, cioè per $t \to \infty$, si vede che $a \to 0$, $u \to c$, $x \sim ct$.

Soluzione 9.17

Il gas viene emesso, in ogni istante, nella direzione opposta al moto: non ci sono forze trasversali al moto, quindi il moto è unidimensionale: assumiamo che avvenga in direzione x.
Consideriamo il razzo in un istante t generico secondo il SR della Terra, quando la sua velocità è $v(t)$ e la sua massa è M. Scriviamo il suo quadrimpulso in questo istante:

$$P^\mu_R(t) = (\,M(t)\gamma(v)c\,,\; M(t)\gamma(v)\,v(t)\,,\;0\,,\;0)$$

Nell'istante $t+\delta t$ il razzo ha massa $M+\delta M$ e la sua velocità è $v+\delta v$, il suo quadrimpulso quindi è

$$P^\mu_R(t+\delta t) = (\,(M+\delta M)\gamma(v+\delta v)c\,,\;(M+\delta M)\gamma(v+\delta v)(v+\delta v)\,,\;0\,,\;0)$$

Nello stesso intervallo di tempo però il razzo ha espulso una massa di gas pari a δm con velocità $u' = -\tilde{u}$, secondo il proprio SR. In meccanica classica si avrebbe $\delta m = -\delta M$ ma in Relatività si può avere trasformazione di massa in energia e viceversa, quindi non si può assumere questa uguaglianza.
Nel SR della Terra la velocità del gas è data dalla legge di composizione delle velocità (con un boost con velocità $-v$):

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = \frac{-\tilde{u}+v}{1-\tilde{u}v/c^2}\,, \tag{S.9.7}$$

ed il quadrimpulso del gas è

$$P^\mu_g(t+\delta t) = (\,\delta m\gamma(u)c\,,\;\delta m\gamma(u)\,u\,,\;0\,,\;0)\;.$$

Nell'intervallo di tempo δt il razzo ed il gas emesso in quello stesso intervallo costituiscono un sistema isolato per il quale, come è noto, vale la conservazione del quadrimpulso:

$$P^\mu_R(t) = P^\mu_R(t+\delta t) + P^\mu_g(t+\delta t)$$

La conservazione della componente spaziale dà:

$$M\gamma(v)v = (M+\delta M)\gamma(v+\delta v)(v+\delta v) + \delta m\gamma(u)\,u$$

Sviluppiamo i calcoli fermandoci all'ordine più basso delle variazioni. Osserviamo che

$$\gamma(v+\delta v) \;=\; \left(1-\frac{(v+\delta v)^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq \left(1-\frac{v^2}{c^2}-2\frac{v\delta v}{c^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2v\delta v/c^2}{1 - v^2/c^2}\right)^{-1/2} \simeq \gamma(v)\left(1 + \gamma^2(v)\frac{v\delta v}{c^2}\right)$$

Quindi

$$M\gamma(v)v = (M + \delta M)\gamma(v)\left(1 + \gamma^2(v)\frac{v\delta v}{c^2}\right)(v + \delta v) + \delta m\gamma(u)\, u$$

$$M\gamma(v)v = (M + \delta M)\gamma(v)\left(v + \delta v + \gamma^2(v)\frac{v^2}{c^2}\delta v\right) + \delta m\gamma(u)\, u$$

ma $\quad 1 + \gamma^2(v)v^2/c^2 = \gamma^2(v)$

$$\cancel{M\gamma(v)v} = \cancel{M\gamma(v)v} + M\gamma^3(v)\delta v + \delta M\gamma(v)\, v + \delta m\gamma(u)\, u \tag{S.9.8}$$

Procedendo in modo analogo, dalla conservazione della componente temporale del quadrimpulso si ottiene:

$$M\gamma(v) = (M + \delta M)\gamma(v + \delta v) + \delta m\gamma(u)$$

$$M\gamma(v) = (M + \delta M)\gamma(v)\left(1 + \gamma^2(v)\frac{v\delta v}{c^2}\right) + \delta m\gamma(u)$$

$$\cancel{M\gamma(v)} = \cancel{M\gamma(v)} + M\gamma^3(v)\frac{v\delta v}{c^2} + \delta M\gamma(v) + \delta m\gamma(u)$$

da cui

$$\delta m\gamma(u) = -\delta M\gamma(v) - M\gamma^3(v)\frac{v\delta v}{c^2}$$

che si può sostituire nella (S.9.8), ottenendo

$$0 = M\gamma^3(v)\delta v + \delta M\gamma(v)\, v - \delta M\gamma(v)u - M\gamma^3(v)\frac{v\delta v}{c^2}u$$

$$-\gamma(v)(v - u)\delta M = M\gamma^3(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\delta v$$

$$-\frac{u - v}{1 - uv/c^2}\delta M = M\gamma^2(v)\delta v$$

e usando la (S.9.7)

$$-\tilde{u}\,\delta M = M\gamma^2(v)\delta v$$

Si vede chiaramente che una variazione negativa della massa del razzo corrisponde ad un aumento della sua velocità. Possiamo impostare un'equazione differenziale e risolverla con le condizioni iniziali: $M = M_0$ per $v = 0$:

$$-\tilde{u}\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}M}{M} = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{1 - (v/c)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad -\tilde{u}\log\frac{M}{M_0} = c\tanh^{-1}\frac{v}{c}$$

$$v = c\,\tanh\left(\frac{\tilde{u}}{c}\log\frac{M_0}{M}\right). \tag{S.9.9}$$

La tangente iperbolica tende a 1 quando il suo argomento tende ad infinito, quindi $v \to c$. Abbiamo ricavato la velocità del razzo in funzione della sua massa, come richiesto. La massa in funzione della velocità si ottiene invertendo la relazione precedente, ottenendo:

$$M = M_0\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{c/2\tilde{u}}$$

<u>Osservazione:</u> il razzo parte da fermo, quindi all'inizio il suo moto può essere descritto con l'approssimazione non relativistica. Infatti dalla (S.9.9), per $M \simeq M$ si ha $\log(M_0/M) \ll 1$ e la tangente iperbolica si può sviluppare in serie, ottenendo il noto risultato della Meccanica Classica

$$v \simeq \tilde{u} \log \frac{M_0}{M}$$

Capitolo 10

Soluzioni degli esercizi

Soluzione 10.1

Soluzione 10.2

La forza agente su una particella soggetta a questo campo magnetico è la forza di Lorentz (senza il contributo del campo elettrico, che qui non c'è). Le equazioni del moto sono:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = eB\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{k}}$$

Il campo magnetico non compie lavoro, quindi l'energia della particella resta costante durante il moto. Conviene perciò esprimere l'impulso come $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$. Le equazioni del moto, scritte in componenti, diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{ec^2B}{E}v_y = \Omega v_y \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{ec^2B}{E}v_x = -\Omega v_x \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

avendo definito $\Omega = ec^2B/E$.
La terza equazione dà, banalmente, $v_z(t) = v_{z0}$ e $z(t) = z_0 + v_{z0}t$ (z_0 e v_{z0} costanti di integrazione).
Ricavando v_y dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima:

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\Omega^2 v_x$$

la cui soluzione generale è, con le costanti di integrazione $v_{0\perp}$ e ϕ:

$$v_x(t) = v_{0\perp}\cos(\Omega t + \phi).$$

È immediato ricavare $v_y(t)$

$$v_y(t) = \frac{1}{\Omega}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\Omega}v_{0\perp}\Omega\sin(\Omega t + \phi) = -v_{0\perp}\sin(\Omega t + \phi).$$

Integrando ancora otteniamo le leggi orarie del moto:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\Omega}\sin(\Omega t + \phi) = x_0 + R\sin(\Omega t + \phi) \\
y(t) &= y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\Omega}\cos(\Omega t + \phi) = y_0 + R\cos(\Omega t + \phi) \\
z(t) &= z_0 + v_{z0} t
\end{aligned}$$

La traiettoria della particella è un'elica, il cui asse è parallelo al campo magnetico e il cui raggio R è:

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\Omega} = \frac{v_{0\perp} E}{ec^2 B}$$

Nel limite non relativistico $E \simeq mc^2$ e si ottiene il risultato classico: $R_{NR} = \dfrac{mv_{0\perp}}{eB}$.

Soluzione 10.3

Soluzione 10.4

Ricordiamo la definizione del tensore elettromagnetico:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per una TL in direzione x con velocità v esso si trasforma secondo:

$$F_{\mu\nu} \quad \to \quad F'_{\mu\nu} = {\Lambda^{-1}}^{T}{}_{\mu}^{\ \alpha}\, F_{\alpha\beta}\, {\Lambda^{-1}}^{\beta}{}_{\nu}$$

quindi (ricordare che $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$)

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -E'_1 & -E'_2 & -E'_3 \\ E'_1 & 0 & cB'_3 & -cB'_2 \\ E'_2 & -cB'_3 & 0 & cB'_1 \\ E'_3 & cB'_2 & -cB'_1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma\beta E_1 & -\gamma E_1 & -\gamma E_2 + \gamma\beta cB_3 & -\gamma E_3 - \gamma\beta cB_2 \\ \gamma E_1 & -\gamma\beta E_1 & -\gamma\beta E_2 + \gamma cB_3 & -\gamma\beta E_3 - \gamma cB_2 \\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -\gamma E_2 + \gamma\beta cB_3 & -\gamma E_3 - \gamma\beta cB_2 \\ E_1 & 0 & -\gamma\beta E_2 + \gamma cB_3 & -\gamma\beta E_3 - \gamma cB_2 \\ \gamma E_2 - \gamma\beta cB_3 & \gamma\beta E_2 - \gamma cB_3 & 0 & cB_1 \\ \gamma E_3 + \gamma\beta cB_2 & \gamma\beta E_3 + \gamma cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dal confronto con la prima riga si ricava:

$$\begin{aligned}
E_1' &= E_1 \\
E_2' &= \gamma\,(E_2 - \beta c B_3) = \gamma\,(E_2 + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})_2) \\
E_3' &= \gamma\,(E_3 + \beta c B_2) = \gamma\,(E_3 + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclclcl}
cB_1' &=& cB_1 & \Rightarrow & B_1' &=& B_1 \\
cB_2' &=& \gamma\,(cB_2 + \beta E_3) & \Rightarrow & B_2' &=& \gamma\left(B_2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)_2\right) \\
cB_3' &=& \gamma\,(cB_3 - \beta E_2) & \Rightarrow & B_3' &=& \gamma\left(B_3 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)_3\right)
\end{array}$$

In generale, distinguendo le componenti dei campi parallele e perpendicolari alla direzione del moto relativo dei due SR, si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E}_\parallel' &= \mathbf{E}_\parallel \\
\mathbf{B}_\parallel' &= \mathbf{B}_\parallel
\end{aligned}\right\} \qquad \text{componenti parallele alla direzione del boost}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E}_\perp' &= \gamma\,(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \\
\mathbf{B}_\perp' &= \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{componenti perpendicolari alla direzione del boost}$$

Soluzione 10.5

Dobbiamo dimostrare:

$$\mathcal{I}_1 = \mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{I}_2 = \mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$$

Utilizziamo le formule di trasformazione dei campi ricavate nell'esercizio 10.4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' &= \mathbf{E}_\parallel'\cdot\mathbf{B}_\parallel' + \mathbf{E}_\perp'\cdot\mathbf{B}_\perp' = \\
&= \mathbf{E}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel + \gamma^2\,(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right) = \\
&= \mathbf{E}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel + \gamma^2\left[\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\,(\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}) + (\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{c^2}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{E})\right]
\end{aligned}$$

Osserviamo:

$$\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp\cdot\left(\underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\parallel}_{=0} + \mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp\right) = \mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp = 0$$

analogamente:

$$\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0\,.$$

L'ultimo termine è

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{E}) &= \varepsilon_{ijk}v_jB_k\;\varepsilon_{imn}v_mE_n = \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,v_jv_mB_kE_n = \\
&= \mathbf{v}^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{B})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) = v^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} - v^2B_\parallel E_\parallel = \\
&= v^2\mathbf{B}_\perp\cdot E_\perp
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' &= \mathbf{E}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel+\gamma^2\left[\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp-\frac{v^2}{c^2}\mathbf{B}_\perp\cdot E_\perp\right]=\mathbf{E}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel+\gamma^2(1-\beta^2)\mathbf{B}_\perp\cdot E_\perp=\\
&= \mathbf{E}_\parallel\cdot\mathbf{B}_\parallel+\mathbf{B}_\perp\cdot E_\perp=\\
&= \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \qquad\qquad \text{c.v.d.}
\end{aligned}$$

Per calcolare il secondo invariante, cominciamo con il calcolare i quadrati dei campi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'^2 &= \mathbf{E}'^2_\parallel+\mathbf{E}'^2_\perp=\\
&= \mathbf{E}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{E}_\perp+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^2=\mathbf{E}^2_\parallel+\gamma^2\left[\mathbf{E}^2_\perp+2\left(\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)+\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Seguendo gli stessi ragionamenti di prima si trova:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B} &= \mathbf{E}_\perp\cdot\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\parallel+\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp\right)=\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp\\
(\mathbf{v}\times\mathbf{B})^2 &= (\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp)^2=v^2\mathbf{B}^2_\perp
\end{aligned}$$

per cui

$$\mathbf{E}'^2=\mathbf{E}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{E}^2_\perp+2\,\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp+v^2\mathbf{B}^2_\perp\right)\,.$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}'^2 &= \mathbf{B}'^2_\parallel+\mathbf{B}'^2_\perp=\\
&= \mathbf{B}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{B}_\perp-\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)^2=\mathbf{B}^2_\parallel+\gamma^2\left[\mathbf{B}^2_\perp-\frac{2}{c^2}\left(\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)+\frac{1}{c^4}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)^2\right]=\\
&= \mathbf{B}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{B}^2_\perp-\frac{2}{c^2}\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp+\frac{v^2}{c^4}\mathbf{E}^2_\perp\right)\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'^2-c^2\mathbf{B}'^2 &= \mathbf{E}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{E}^2_\perp+2\,\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp+v^2\mathbf{B}^2_\perp\right)+\\
&\quad -c^2\left[\mathbf{B}^2_\parallel+\gamma^2\left(\mathbf{B}^2_\perp-\frac{2}{c^2}\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp+\frac{v^2}{c^4}\mathbf{E}^2_\perp\right)\right]=\\
&= \mathbf{E}^2_\parallel+\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\mathbf{E}^2_\perp-c^2\mathbf{B}^2_\parallel+\gamma^2\left(v^2-c^2\right)\mathbf{B}^2_\perp+\\
&\qquad +2\left(\underbrace{\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp+\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp}_{=0}\right)=\\
&= \mathbf{E}^2_\parallel+\mathbf{E}^2_\perp-c^2\mathbf{B}^2_\parallel-\gamma^2\left(1-\beta^2\right)c^2\mathbf{B}^2_\perp=\\
&= \mathbf{E}^2-c^2\mathbf{B}^2 \qquad\qquad \text{c.v.d.}
\end{aligned}$$

Soluzione 10.6

(a) Assumiamo che la carica sia distribuita lungo l'asse z.
Nel SR K si ha un campo elettrico statico che si calcola con il teorema di Gauss. Il campo $\mathbf{E}$ ha simmetria cilindrica, è diretto radialmente ed ha componente lungo z nulla. Il suo modulo è

$$E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Il campo magnetico, in tale SR, è nullo: $\mathbf{B} = 0$

(b) Nel SR K' la distribuzione di carica è in moto in direzione $-\mathbf{v}$. Il campo elettrico è dato da:

$$
\begin{aligned}
E'_z &= E_z = 0 \\
\mathbf{E}'_\perp &= \gamma\left(\mathbf{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \gamma \mathbf{E}_\perp = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}
\end{aligned}
$$

essendo $\lambda' = \gamma\lambda$ la densità lineare di carica misurata nel SR K (conseguenza della contrazione delle lunghezze).
Il campo magnetico è dato da:

$$
\begin{aligned}
B'_z &= B_z = 0 \\
\mathbf{B}'_\perp &= \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right) = -\gamma\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\mathbf{u}_\theta = -\frac{\gamma\lambda v}{\varepsilon_o c^2 \pi r}\mathbf{u}_\theta = -\frac{\mu_0\lambda' v}{2\pi r}\mathbf{u}_\theta = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi r}\mathbf{u}_\theta
\end{aligned}
$$

cioè la legge di Biot-Savart che descrive il campo magnetico generato da una corrente $I' = \lambda' v$.

Soluzione 10.7

Bisogna calcolare gli invarianti del campo e.m.

$$\mathcal{I}_1 = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{E^2}{c^2} - B^2 = \frac{3E_0^2}{4c^2} > 0$$

a) No, perché $\mathcal{I}_1$ non sarebbe 0.
b) No, perché $\mathcal{I}_2$ sarebbe negativo.
a) Sì, esiste un SR in cui $\vec{B}' = 0$ e allora:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{{E'}^2}{c^2} - {B'}^2 = \frac{{E'}^2}{c^2} = \frac{3E_0^2}{4c^2} \qquad \Longrightarrow \qquad E' = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0$$