Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

21/02/2022

Esercizio 1

Un condensatore piano, di spessore 10 mm, ha come dielettrico due lastre di materiali diversi, di spessore $x_1 = 4$ mm e $x_2 = 6$ mm e costante dielettrica relativa $\kappa_1 = 5$ e $\kappa_2 = 3$ rispettivamente.
Calcolare:

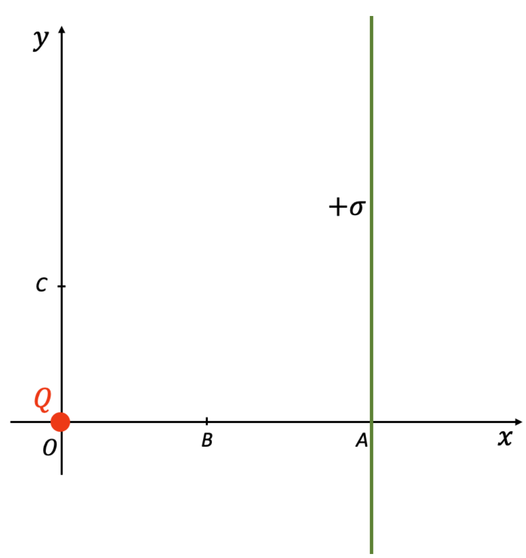
1) la densità di carica di polarizzazione sulla superficie di separazione tra i due dielettrici se la d.d.p. applicata al condensatore è $V_0 = 10^3$ V:

2) la capacità del condensatore se l'area delle armature è $\Sigma = 9$ cm^2;

3) l'aumento di energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore qualora la d.d.p. sia raddoppiata.

Esercizio 2

Data la lamina piana, infinitamente estesa, uniformemente carica positivamente con densità superficiale $\sigma = 10^{-6}$ C/m^2, passante per il punto $A = (2\text{m}, 0)$ e la cui sezione è parallela all'asse y, e la carica positiva $Q = 2 \cdot 10^{-6}$ C, posta nell'origine degli assi in figura, si determini:



1) in quale punto P dell'asse x (si indichi con d l'ascissa del punto P) debba essere posta una carica puntiforme positiva $q = +10^{-8}$ C, perché q risulti in equilibrio;

2) il lavoro che la risultante delle forze elettrostatiche compie, quando la carica q viene spostata dal punto $B = (1\text{m}, 0)$ al punto $C = (0, 1\text{m})$;

3) l'energia elettrostatica per unità di volume nel punto A, nella configurazione in cui la carica q sia posta nel punto P.

N.B. Si trascuri la forza peso.

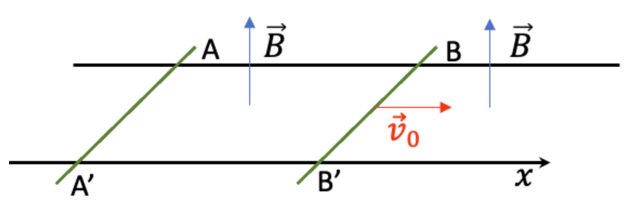
Esercizio 3

Due rotaie conduttrici parallele, poste in un piano orizzontale, distanti $\ell = 10$ cm, di resistenza elettrica trascurabile, sono immerse in un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale al piano delle rotaie, di modulo $B = 0.5$ T. Due sbarrette conduttrici AA' e BB' eguali, di massa $m = 10$ g, resistenza $R = 0.1\,\Omega$, possono scorrere senza attrito sulle rotaie. Ad un certo istante, mediante un impulso, la sbarretta BB' viene messa in moto con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s nella direzione x.

1) Calcolare la risultante delle forze che agiscono sul sistema delle due sbarrette;

2) usando il risultato del punto precedente, trovare la legge con cui variano le velocità v_A e v_B delle due sbarrette nel tempo;

3) calcolare l'energia dissipata in totale per effetto Joule.



Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

21/02/2022

Soluzioni

Esercizio 1

Il campo elettrico è uniforme nei due dielettrici ed è ortogonale alle armature. La componente normale del vettore $\vec{D}$ si conserva al passaggio tra i due dielettrici. Pertanto abbiamo che

$$\kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 \quad \Longrightarrow \quad E_1 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} E_2$$

Supponendo che l'armatura che si affaccia sul dielettrico (1) sia a potenziale maggiore, la differenza di potenziale tra le armature è

$$E_1 x_1 + E_2 x_2 = V_0$$

Da queste relazioni segue che

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} E_2 x_1 + E_2 x_2 = E_2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} x_1 + x_2 \right) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2}$$

e quindi

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2}$$

Le densità di carica di polarizzazione sulle facce dei due dielettrici sono:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \epsilon_0(\kappa_1 - 1)E_1 = \epsilon_0 \kappa_2 (\kappa_1 - 1) \frac{V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} = 25.28 \cdot 10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \\
\sigma_2 &= \epsilon_0(\kappa_2 - 1)E_2 = \epsilon_0 \kappa_1 (\kappa_2 - 1) \frac{V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} = 21.07 \cdot 10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}
\end{aligned}$$

Visto che assumiamo che l'armatura che si affaccia sul dielettrico (1) sia a potenziale maggiore, la densità di carica sulla superficie di interfaccia è in valore e segno pari a

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\epsilon_0 \left(\kappa_1 - \kappa_2\right) V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} = 4.21 \cdot 10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

La capacità del condensatore è pari alla capacità di due condensatori a facce piane parallele, di spessori x_1 e x_2 aventi dielettrici di costante dielettrica relativa pari a κ_1 e κ_2 rispettivamente, disposti in serie. Infatti, se indichiamo con Q la carica collocata sulle arrmature con densità superficiale di carica σ, abbiamo:

$$\frac{\sigma}{\kappa_1\epsilon_0}x_1 + \frac{\sigma}{\kappa_2\epsilon_0}x_2 = V_0 \quad \Longrightarrow \quad Q\left(\frac{x_1}{\Sigma\kappa_1\epsilon_0} + \frac{x_2}{\Sigma\kappa_2\epsilon_0}\right) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = V_0$$

con

$$C_1 = \frac{\Sigma\kappa_1\epsilon_0}{x_1} = 9.96 \text{ pF} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\Sigma\kappa_2\epsilon_0}{x_2} = 3.98 \text{ pF}$$

Quindi la capacità del condensatore è

$$C = \frac{Q}{V_0} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2.84 \text{ pF}$$

Se la d.d.p. tra le armature viene raddoppiata, l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore aumenta di

$$\Delta U = \frac{1}{2}C4V_0^2 - \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{3}{2}CV_0^2 = 4.27 \ \mu\text{J}$$

Esercizio 2

Il punto di equilibrio P della carica positiva q si trova sull'asse x con coordinata compresa tra l'origine del sistema di riferimento O e il punto A: $0 < d < 2$. La coordinata si trova imponendo che la risultante delle forse che agiscono su q sia nulla:

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2} - \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = \sqrt{\frac{Q}{2\pi\sigma}} = 56.42 \text{ cm}$$

Per quanto riguarda la seconda domanda, osserviamo che i punti B e C sono alla stessa distanza da O, per cui l'energia potenziale elettrostatica di q nel campo generato da Q è la stessa. Il lavoro è quindi quello compiuto dalla forza elettrostatica esercitata dalla lamina sulla carica q:

$$L_L = \int_{x=1}^{x=0} F_x dx = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0}\int_0^1 dx = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0} = 5.65 \cdot 10^{-4} \ J$$

Per calcolare la densità di energia elettrostatica in A con q nella posizione di equilibrio, è opportuno notare che, dalla condizione di equilibrio stessa, abbiamo che

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi d^2}$$

Se poniamo $L = \overline{OA} = 2$ m, il campo elettrico in A vale

$$\vec{E} = \frac{\hat{u}_x}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{L^2} + \frac{q}{(L-d)^2} - \frac{Q}{d^2}\right)$$

A partire dal campo elettrico, valutiamo la densità di energia elettrostatica come:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0}\left[\frac{Q}{L^2} + \frac{q}{(L-d)^2} - \frac{Q}{d^2}\right]^2 = 0.01196 \text{ J/m}^3$$

Esercizio 3

Nel tratto BB', per effetto del movimento della sbarretta nel verso positivo dell'asse x, compare un campo elettromotore $\vec{E} = \vec{v}_B \times \vec{B}$ diretto da B a B'. La forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E}_B = \int_B^{B'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = B\ell v_B$$

con B' a tensione maggiore rispetto a B. Per effetto di questa forza elettromotrice, nel circuito $BB'A'A$ scorre una corrente i, in verso orario nel disegno. Di conseguenza, sulla sbarretta AA' agisce una forza, diretta nel verso positivo dell'asse x, che la mette in movimento. Visto che il moto della sbarretta AA' è concorde con quello della sbarretta BB', anche su di essa verrà indotta un forza elettromotrice, con A' a tensione maggiore di A, dal valore

$$\mathcal{E}_A = \int_A^{A'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = B\ell v_A$$

La f.e.m. indotta complessivamente nel circuito è

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_B^{B'} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{A'}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A = B\ell\,(v_B - v_A)$$

La corrente che fluisce nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{B\ell}{2R}\,(v_B - v_A)$$

Le forze sulle due sbarrette valgono

$$\vec{F}_B = i\overrightarrow{BB'} \times \vec{B} = -i\ell B\hat{u}_x = -\frac{B^2\ell^2}{2R}\,(v_B - v_A)\,\hat{u}_x$$

$$\vec{F}_A = i\overrightarrow{A'A} \times \vec{B} = i\ell B\hat{u}_x = \frac{B^2\ell^2}{2R}\left(v_B - v_A\right)\hat{u}_x$$

La risultante delle forze sulle due sbarrette è nulla e quindi la quantità di moto totale del sistema si conserva:

$$mv_0 = mv_A + mv_B \qquad \Longrightarrow \qquad v_B = v_0 - v_A$$

L'equazione del moto per la sbarretta AA' è

$$m\frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2\ell^2}{2R}\left(v_0 - 2v_A\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2\ell^2}{2mR}\left(v_0 - 2v_A\right)$$

È un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che può essere risolta come segue:

$$\frac{dv_A}{2v_A - v_0} = -\frac{B^2\ell^2}{2mR}dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_{-v_0}^{2v_A - v_0}\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\tau}\int_0^t dt$$

dove si è posto $z = 2v_A - v_0$ e

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2} = 0.4 \text{ s}$$

La soluzione è

$$v_A = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 5\left(1 - e^{-2.5t}\right)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi

$$v_B = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 5\left(1 + e^{-2.5t}\right)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Asintoticamente $v_A = v_B = 5$ m/s e quindi la f.e.m. tende asintoticamente a 0 e con essa la corrente che fluisce nel circuito. La f.e.m. può essere espressa esplicitamente in funzione del tempo come

$$\mathcal{E} = B\ell\left(v_B - v_A\right) = B\ell v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5e^{-2.5t} \text{ V}$$

L'energia dissipata complessivamente per effetto Joule vale

$$W = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{2R}dt = \frac{B^2\ell^2 v_0^2}{2R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{B^2\ell^2 v_0^2 \tau}{4R} = \frac{1}{4}mv_0^2 = 0.25 \text{ J}$$