

Parte 3: Meccanica hamiltoniana

3.1	Trasformazione di Legendre ed equazioni di Hamilton	1
3.2	Parentesi di Poisson	6
3.3	Trasformazioni canoniche	9
3.3.1	Coordinate canoniche	9
3.3.2	La forma symplettica	13
3.3.3	Campi vettoriali hamiltoniani come generatori di trasformazioni canoniche	15
3.3.4	Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche	17
3.3.5	Coordinate azione–angolo e sistemi completamente integrabili	21
3.4	La forma di Poincaré–Cartan e il principio variazionale di Hamilton	27
3.4.1	Forma di Poincaré–Cartan nello spazio delle velocità	29
3.5	Il metodo di Hamilton–Jacobi	31
3.5.1	Il metodo di Hamilton–Jacobi come ricerca di coordinate canoniche adattate al flusso	33
3.5.2	Esistenza di soluzioni per l’equazione di Hamilton–Jacobi	34
3.5.3	Integrazione dell’equazione di Hamilton–Jacobi per separazione di variabili	35
3.5.4	Hamiltoniane indipendenti dal tempo e coordinate azione–angolo	39

3.1 Trasformazione di Legendre ed equazioni di Hamilton

Le equazioni di Lagrange, scritte nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \\ \dot{q}^\mu = u^\mu, \end{cases} \quad (3.1)$$

determinano l'evoluzione nel tempo delle coordinate q^μ e dei momenti coniugati $\frac{\partial L}{\partial u^\mu}$.

Abbiamo già incontrato i momenti coniugati in diversi contesti. Sono le funzioni che si conservano se la corrispondente coordinata q^μ è ciclica; più in generale, le costanti del moto associate a simmetrie attraverso il teorema di Noether sono combinazioni lineari di queste quantità. Essi compaiono anche nella definizione di energia generalizzata.

Se la lagrangiana L è quadratica nelle velocità u^μ , come avviene in meccanica classica, allora i momenti coniugati dipendono *linearmente* dalle velocità lagrangiane u^μ ; più in generale, la corrispondenza fra velocità e momenti è *invertibile* se

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} \right| \neq 0. \quad (3.2)$$

Se la (3.2) è soddisfatta, si dice che la lagrangiana è **regolare**; in tal caso lo stato del sistema meccanico in un dato istante può essere descritto tanto dalle $2n$ funzioni coordinate (q^μ, u^ν) quanto dalle $2n$ funzioni $\left(q^\mu, \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right)$.

Come abbiamo già visto, il significato fisico dei momenti coniugati dipende dalla scelta delle coordinate. Dal punto di vista matematico, però, l'insieme degli n momenti coniugati ha un significato intrinseco ben preciso. Per un sistema olonomo e scleronomo, in cui l'energia cinetica T è una forma quadratica (quindi omogenea di grado due) nelle velocità u^μ , si ha (indipendentemente dalle coordinate scelte)

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} u^\mu = 2T.$$

I momenti coniugati sono quindi le componenti di una *forma lineare*, che associa a ciascun vettore tangente allo spazio delle configurazioni Q il corrispondente valore dell'energia cinetica (moltiplicato per due). Questa forma lineare è dunque un elemento del *fibrato cotangente* T^*Q .

Dunque, descrivere lo stato di un sistema meccanico usando le q^μ e i momenti coniugati, anziché le q^μ e le u^μ , non corrisponde a un semplice cambiamento di coordinate nello spazio delle velocità, ma impone invece di rappresentare il sistema in uno spazio (matematico) diverso: T^*Q invece di TQ (in meccanica analitica, il fibrato cotangente allo spazio delle configurazioni è detto **spazio delle fasi**). La rappresentazione dello stato del sistema nello spazio delle velocità è puramente cinematica, mentre quella nello spazio delle fasi include anche le proprietà inerziali del sistema, ossia la distribuzione delle masse. Non sappiamo ancora se questa diversa rappresentazione potrà risultare vantaggiosa, ma per intanto proseguiamo su questa strada.

Nel fibrato cotangente T^*Q , si definisce un sistema di *coordinate naturali* analogamente a quanto si è fatto per il fibrato tangente.

Lo *spazio cotangente* in un punto di Q è infatti il duale dello spazio tangente. Per i vettori tangenti a Q abbiamo introdotto, dato un sistema di coordinate q^μ su Q , la *base naturale* data dagli operatori di derivazione parziali rispetto alle coordinate, $\frac{\partial}{\partial q^\mu}$ (che non sono altro che i vettori tangenti alle curve coordinate); analogamente, su ciascuno spazio cotangente prendiamo come base l'insieme dei *differenziali delle coordinate*, dq^μ . Poiché

$$\langle dq^\mu, \frac{\partial}{\partial q^\nu} \rangle = \frac{\partial q^\mu}{\partial q^\nu} = \delta_\nu^\mu,$$

questa è esattamente la *base duale* a quella naturale nello spazio tangente.

Le componenti di un generico covettore rispetto a questa base, insieme con le coordinate lagrangiane q^μ , saranno dunque le coordinate naturali su T^*Q , e le denoteremo con (q^μ, p_μ) . L'indice in basso per le coordinate p denota il fatto che, sotto un cambiamento di coordinate lagrangiane $q^\mu \mapsto Q^\nu$, le p si trasformano linearmente con la matrice jacobiana *inversa*:

$$\begin{cases} q^\mu = q^\mu(Q^\nu) \\ p_\mu = \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu} P_\nu, \end{cases} \quad (3.3)$$

Rappresentare lo stato di un sistema meccanico utilizzando i momenti coniugati, dunque, significa associare a ciascun vettore tangente a Q (che rappresenta uno stato istantaneo del sistema) il covettore di componenti

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu}. \quad (3.4)$$

Da quanto detto, dovrebbe essere chiaro che la (3.4) *non* è una definizione delle coordinate p_μ : è invece la rappresentazione in coordinate naturali di una funzione $\Phi_L : TQ \rightarrow T^*Q$, che chiameremo ***mappa di Legendre***¹. Questa funzione dipende dalla lagrangiana del sistema, ma non dalle coordinate lagrangiane scelte: cambiando coordinate lagrangiane, la stessa mappa avrà ancora la forma (3.4):

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \Rightarrow \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu} P_\nu = \frac{\partial L}{\partial U^\nu} \frac{\partial U^\nu}{\partial u^\mu} = \frac{\partial L}{\partial U^\nu} \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu} \Rightarrow P_\nu = \frac{\partial L}{\partial U^\nu},$$

poiché la matrice jacobiana di un cambiamento di coordinate è, per ipotesi, non degenera. Applicando la mappa di Legendre, i membri sinistri delle equazioni di Lagrange (3.1) diventano precisamente le derivate temporali delle coordinate (q^μ, p_μ) su T^*Q . Per ottenere un sistema di equazioni differenziali ordinarie nello spazio delle fasi, a questo punto, si tratta solo di scrivere i membri destri delle stesse equazioni in funzione delle stesse coordinate (q^μ, p_μ) .

L'espressione delle velocità lagrangiane u^μ in funzione di (q^μ, p_μ) è esattamente l'inversa della mappa di Legendre, inversa che esiste – almeno localmente – se è soddisfatta la condizione (3.2) di regolarità di L , come abbiamo già detto. Se la mappa di Legendre è *globalmente* invertibile, si dice che la lagrangiana L è ***iperregolare***; ad esempio, se la lagrangiana ha la forma $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + U(q^\lambda)$, allora $p_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$, e questa relazione è globalmente invertibile.

¹La mappa di Legendre lascia invariate le coordinate q^λ .

Per maggiore chiarezza nelle formule che seguiranno, denotiamo con

$$u^\lambda = \mathcal{U}^\lambda(q^\mu, p_\mu)$$

la rappresentazione in coordinate della mappa di Legendre inversa Φ_L^{-1} , che soddisfa l'identità

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \circ \Phi_L^{-1} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \Big|_{u^\lambda = \mathcal{U}^\lambda(q^\mu, p_\mu)} \equiv p_\mu. \quad (3.5)$$

Le equazioni della dinamica sullo spazio delle fasi sono quindi

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = \mathcal{U}^\mu(q^\nu, p_\nu) \\ \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \circ \Phi_L^{-1}, \end{cases} \quad (3.6)$$

ma possono essere riscritte in modo molto più interessante. Nell'equazione per \dot{p}_μ , il membro destro si ottiene derivando la lagrangiana rispetto alla coordinata q^μ e poi sostituendo nel risultato $u^\lambda = \mathcal{U}^\lambda(q^\mu, p_\mu)$. Proviamo invece a invertire l'ordine delle due operazioni, ossia a calcolare $\frac{\partial}{\partial q^\mu} (L \circ \Phi_L^{-1})$. Denotiamo con $\tilde{L} : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ il *pull-back* della lagrangiana sullo spazio delle fasi, $\tilde{L} \equiv L \circ \Phi_L^{-1}$:

$$\tilde{L}(q^\mu, p_\mu) = L(q^\mu, \mathcal{U}^\nu(q^\mu, p_\mu)).$$

Si trova subito che

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\mu} = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \circ \Phi_L^{-1} + \frac{\partial \mathcal{U}^\nu}{\partial q^\mu} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} \circ \Phi_L^{-1};$$

usando la (3.5) e il fatto che le q^μ e le p_μ sono coordinate indipendenti sullo spazio delle fasi, quindi $\frac{\partial p_\nu}{\partial q^\mu} \equiv 0$, si ottiene allora

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \circ \Phi_L^{-1} = \frac{\partial}{\partial q^\mu} (\tilde{L} - p_\nu \mathcal{U}^\nu). \quad (3.7)$$

Nel contesto lagrangiano, avevamo definito l'energia generalizzata \mathcal{H} con la formula

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} u^\mu - L;$$

il *pull-back* di questa sullo spazio delle fasi, che denoteremo con H , è proprio

$$H = \mathcal{H} \circ \Phi_L^{-1} = p_\nu \mathcal{U}^\nu - \tilde{L}. \quad (3.8)$$

Quindi la (3.7) diventa

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \circ \Phi_L^{-1} = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}.$$

Se ora calcoliamo la derivata di H anche rispetto alle p_μ otteniamo

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \frac{\partial (p_\nu \mathcal{U}^\nu)}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_\mu} = \mathcal{U}^\mu + \frac{\partial \mathcal{U}^\nu}{\partial p_\mu} p_\nu - \frac{\partial \mathcal{U}^\nu}{\partial p_\mu} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} \circ \Phi_L^{-1} = \mathcal{U}^\mu,$$

dove abbiamo usato ancora una volta la (3.5). In conclusione, introducendo nello spazio delle fasi la funzione H , definita da (3.8) e detta **funzione di Hamilton** o **hamiltoniana**, le equazioni del moto su T^*Q assumono la forma

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \end{cases} \quad (3.9)$$

Le equazioni (3.9) sono dette **equazioni di Hamilton**; la trasformazione che conduce dalla lagrangiana L alla corrispondente hamiltoniana H è detta **trasformazione di Legendre**.

Osservazione – Il fisico–matematico francese Adrien–Marie Legendre (1752–1833) introdusse la trasformazione che porta il suo nome in un diverso contesto. Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la sua trasformata di Legendre è la funzione $f^*(p)$, $p \in \mathbb{R}$, definita in questo modo:

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x)).$$

Il valore di $f^*(p)$ è dunque il valore dell'espressione $(px - f(x))$ calcolata in un punto di massimo assoluto (rispetto alla variabile x), dove deve valere l'equazione $p - f'(x) = 0$. Se si applica a f^* la stessa trasformazione, ossia si calcola $\sup_{p \in \mathbb{R}} (p f^*(p) - f^*(p))$, si riottiene $f(x)$: la relazione $x(p) = df^*/dp$ è l'inversa di $p(x) = df/dx$ (la relazione fra f e f^* , a meno di una costante, si potrebbe derivare proprio da quest'ultima condizione)

Si può interpretare la trasformata di Legendre f^* , dal punto di vista geometrico, nel modo seguente. Supponiamo che la funzione $f(x)$ sia strettamente convessa, ossia $f'' > 0$ in tutti i punti. L'equazione della retta tangente al grafico di f in un punto fissato x_0 è $y = p(x - x_0) + f(x_0)$, con $p = f'(x_0)$. Se la funzione è convessa, ad ogni p corrisponde un unico punto x in cui la retta tangente a $f(x)$ ha il coefficiente angolare p , quindi conoscendo la trasformata di Legendre $f^*(p)$ si possono ottenere tutte le rette tangenti al grafico di f , ognuna delle quali ha equazione $y = px - f^*(p)$. Geometricamente, questo corrisponde a rappresentare il grafico di f come involuppo convesso da una famiglia di rette parametrizzata da p mediante la funzione $f^*(p)$.

Quest'interpretazione geometrica si può estendere al caso di più variabili, ma da qui a capire perché lagrangiana e hamiltoniana sono connesse proprio da una trasformazione di Legendre ce ne corre, e non faremo ulteriori commenti su questo².

Chiariamo piuttosto un'altra questione: l'operazione che è stata fatta nella sezione precedente ha trasformato un sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO) del primo ordine sullo spazio delle velocità in un sistema di EDO, pure del primo ordine, sullo spazio delle fasi. Sotto l'ipotesi (3.2) di regolarità della lagrangiana L , le equazioni di Lagrange possono essere messe in forma normale, e quindi definiscono un campo vettoriale su TQ , che abbiamo denotato con \mathbf{X}_L .

In generale, data una mappa invertibile e differenziabile (in entrambe le direzioni) fra due varietà,

²Un modo di spiegare la comparsa della trasformata di Legendre in meccanica analitica e in diversi altri contesti della Fisica (ad esempio in termodinamica) si basa sul moderno concetto di *funzioni generatrici di sottovarietà lagrangiane di una varietà симплекtica*.

ossia un diffeomorfismo $\Phi : A \rightarrow B$, è possibile “trasportare” su B un campo vettoriale preventivamente definito su A . Per questo scopo si utilizza la mappa tangente $T\Phi$, che come sappiamo manda un vettore tangente ad A nel punto x in un vettore tangente a B nel punto $\Phi(x)$. Dato un campo vettoriale X su A , per definire un campo vettoriale su B , a ciascun punto y di B si assegna il vettore

$$\Phi_* X(y) = T\Phi(X(\phi^{-1}(y)));$$

questa operazione è detta **push-forward** del campo X attraverso il diffeomorfismo Φ .

Ciò che è stato fatto nella sezione precedente non è altro che il push-forward del campo X_L attraverso la mappa di Legendre Φ_L . Il campo che abbiamo ottenuto come immagine è il campo vettoriale su T^*Q

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \frac{\partial}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial p_\lambda}. \quad (3.10)$$

Per quale ragione, nel calcolo, non abbiamo avuto bisogno di considerare la mappa tangente $T\Phi_L$? Perché le equazioni di Lagrange, da cui siamo partiti, definiscono già la derivata temporale di quelle che risulteranno le coordinate di arrivo della trasformazione, q^λ e p_λ . Se avessimo prima messo le equazioni di Lagrange in forma normale per ricavare \mathbf{X}_L , avremmo poi dovuto applicare la mappa tangente per ottenere le componenti corrette: e avremmo semplicemente riottenuto i membri destri delle (3.1). Invece, partendo dalle equazioni di Lagrange, per ottenere X_H è sufficiente esprimere i membri destri come funzioni delle coordinate (q^λ, p_λ) anziché delle (q^λ, u^λ) , che è ciò che abbiamo fatto.

3.2 Parentesi di Poisson

La forma particolare delle equazioni di Hamilton (3.8), o equivalentemente del vettore X_H (3.10), fa sì che la derivata di una qualsiasi funzione $f : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ lungo le curve di moto (le curve integrali del campo X_H) risulti essere

$$\dot{f} = X_H(f) = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda}. \quad (3.11)$$

Se in questa relazione scambiassimo le due funzioni H e f , il risultato cambierebbe semplicemente di segno: possiamo, in effetti, immaginare di associare a qualunque funzione f definita su T^*Q il campo vettoriale

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} \frac{\partial}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \frac{\partial}{\partial p_\lambda}, \quad (3.12)$$

e con questa definizione si ha che

$$X_f(g) = -X_g(f)$$

per qualsiasi coppia di funzioni f, g . I campi vettoriali della forma X_f sono detti **campi hamiltoniani**.

Con questa definizione, X_f è nullo se f è una funzione costante, ossia se $df = 0$. In effetti, X_f si ottiene applicando al differenziale di f un'operatore lineare \mathcal{P} , rappresentato da questa matrice $2n \times 2n$:

$$\begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

(dove 0_n denota la matrice nulla e $\mathbb{1}_n$ la matrice identità, entrambe in dimensione n ; nel seguito ometteremo il pedice n , dato che sarà chiaro dal contesto).

Chiameremo questo operatore lineare **tensore di Poisson**. Esso fornisce una mappa che ad ogni covettore tangente a T^*Q associa un vettore tangente (sempre a T^*Q , nello stesso punto). Il campo X_f è l'immagine del differenziale df sotto questa mappa:

$$X_f = \mathcal{P}(df).$$

Il tensore di Poisson definisce anche una forma bilineare sui covettori: in particolare, a una coppia di funzioni (f, g) possiamo associare la funzione

$$\langle dg, \mathcal{P}(df) \rangle = \langle dg, X_f \rangle = X_f(g) :$$

essa rappresenta la derivata direzionale di g rispetto al campo vettoriale X_f (o, col segno meno, la derivata direzionale di f lungo il campo X_g). L'operazione così definita, che associa a ogni coppia di funzioni sullo spazio delle fasi una terza funzione, è detta **parentesi di Poisson**, e denotata con parentesi graffe:

$$\{f, g\} = X_f(g) = -X_g(f) = \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \frac{\partial g}{\partial p_\lambda}. \quad (3.14)$$

Per ora abbiamo dato la definizione di parentesi di Poisson solo in coordinate, ma si può verificare con un calcolo diretto (ancorché piuttosto noioso) che il risultato è lo stesso per qualunque sistema

di coordinate naturali su T^*Q ; più oltre vedremo in che senso il tensore di Poisson ha un significato intrinseco nello spazio delle fasi.

Dalla definizione date si possono ricavare facilmente queste proprietà, per ogni terna di funzioni (f, g, h) sullo spazio delle fasi e per ogni coppia di numeri reali (λ, μ) :

linearità: $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda \{f, h\} + \mu \{g, h\}$

antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$

regola di Leibnitz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$.

A causa dell'antisimmetria, la linearità e la regola di Leibnitz valgono anche per il secondo argomento della parentesi di Poisson. Con passaggi un po' più lunghi si può dimostrare una quarta proprietà:

identità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \equiv 0$

Tra le funzioni a cui possiamo applicare le parentesi di Poisson vi sono anche le coordinate stesse: dalla definizione si ricava direttamente che

$$\begin{aligned}\{q^\lambda, q^\mu\} &= 0 \\ \{p_\lambda, q^\mu\} &= \delta_\lambda^\mu \\ \{p_\lambda, p_\mu\} &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

Le (3.15) sono dette **parentesi di Poisson canoniche**. La loro importanza sta in questo: per una qualunque forma bilineare \mathcal{B} su uno spazio vettoriale, gli elementi di matrice della sua rappresentazione in un dato sistema di coordinate si ottengono applicando \mathcal{B} ai vettori della base: $\mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}(e_i, e_j)$. Una base per i covettori su T^*Q , come sappiamo, è data dai differenziali delle coordinate, (dq^λ, dp_λ) . Quindi gli elementi della matrice che rappresenta \mathcal{P} sono dati da $\langle dq^\mu, \mathcal{P}(dq^\lambda) \rangle = \{q^\lambda, q^\mu\}$, $\langle dq^\mu, \mathcal{P}(dp_\lambda) \rangle = \{p_\lambda, q^\mu\} = -\langle dp_\lambda, \mathcal{P}(dq^\mu) \rangle$, $\langle dp_\mu, \mathcal{P}(dp_\lambda) \rangle = \{p_\lambda, p_\mu\}$. Le parentesi di Poisson canoniche (3.15) descrivono pertanto la matrice (3.13). Questo ci sarà utile nel seguito.³

A che cosa servono le parentesi di Poisson? Possiamo usarle per scrivere l'equazione che rappresenta la variazione nel tempo di una qualsiasi funzione definita sullo spazio delle fasi sulle curve di moto del sistema:

$$\dot{f} = \{H, f\};$$

³La notazione matriciale per le componenti di una generica forma bilineare \mathcal{B} pone un problema. Se consideriamo una forma bilineare che agisce su una coppia di vettori, la matrice che la rappresenta è moltiplicata a destra per un vettore colonna e a sinistra per un vettore riga: il secondo rappresenta la trasposta di un vettore colonna (anche nel caso del tensore di Poisson, che agisce su una coppia di covettori, uno dei due deve essere rappresentato come riga e l'altro come colonna). Si deve decidere, quindi, se il vettore che viene trasposto nella notazione matriciale è il primo o il secondo, fra i due a cui si applica la forma bilineare: cambiando la scelta, la rappresentazione matriciale delle componenti della forma risulta trasposta. Se la forma bilineare è simmetrica, questo non ha alcun effetto; ma se, come nel caso del tensore di Poisson e della forma simplettica che incontreremo più oltre, si tratta di forme antisimmetriche, la matrice risultante cambia segno. Le due scelte possibili corrispondono al fatto che si supponga, per i due indici delle componenti della forma, che il primo sia l'indice di riga della matrice e il secondo sia l'indice di colonna, oppure l'inverso.

se la grandezza che ci interessa dipende anche esplicitamente dal tempo, la sua variazione lungo una curva di moto (“derivata totale”) è data da

$$\dot{f} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

In particolare, ne consegue se l’hamiltoniana è indipendente dal tempo allora è una costante del moto:

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0$$

a causa dell’antisimmetria delle parentesi di Poisson.

Invero, queste ultime equazioni si sarebbero anche potute scrivere usando la definizione di X_H , senza bisogno di introdurre la notazione (3.14). Per contro, le proprietà delle parentesi di Poisson ci permettono di ottenere facilmente un risultato non banale: se f e g sono due costanti del moto per l’hamiltoniana H , allora anche la loro parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è una costante del moto. Infatti, applicando l’identità di Jacobi alle funzioni H, f, g e tenendo conto dell’asimmetria, si trova

$$\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{H, g\}\} - \{g, \{H, f\}\} = 0,$$

dato che per ipotesi $\{H, g\} = 0 = \{H, f\}$. Quindi la derivata della funzione $\{f, g\}$ lungo il campo X_H è nulla. In questo modo, note due costanti del moto, potremmo sempre produrne una terza calcolando la parentesi di Poisson di quelle. Tuttavia, nulla garantisce che $\{f, g\}$ non sia una funzione costante, o addirittura nulla; in altri casi, la funzione $\{f, g\}$ potrebbe essere funzionalmente dipendente da f e da g , e quindi non essere un *nuovo* integrale primo.

Se due funzioni hanno parentesi di Poisson identicamente uguale a zero, si dice che sono **in involuzione**. In particolare, una funzione f su T^*Q è una costante del moto per il sistema descritto dall’hamiltoniana H se e solo se f è in involuzione con H .

è utile notare che dalla definizione (3.14) segue che per qualsiasi funzione f si ha

$$\begin{aligned} \{p_\lambda, f\} &= \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} & \Leftrightarrow & \quad X_{p_\lambda} = \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \\ \{q^\lambda, f\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_\lambda} & \Leftrightarrow & \quad X_{q^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial p_\lambda} \end{aligned}$$

Si ottiene anche facilmente (verificare per esercizio) il lemma che segue:

Proposizione 1. *Siano F e G due funzioni tali che F dipenda solo da k coordinate q^λ e dai corrispondenti k momenti coniugati p_λ , e G dipenda solo dalle restanti $n - k$ coordinate q^μ e dai restanti $n - k$ momenti coniugati p_μ : allora F e G sono necessariamente in involuzione, $\{F, G\} = 0$.*

Questo lemma è particolarmente importante, perché se ne ricava che quando un’hamiltoniana si può decomporre nella somma di due termini, $H = H_1 + H_2$, che dipendano da gradi di libertà diversi – ad esempio, in un sistema con $n = 2$ si abbia $H = H_1(q^1, p_1) + H_2(q^2, p_2)$ – allora i due termini H_1 e H_2 sono separatamente costanti del moto. Infatti, $\{H, H_1\} = \{H_1 + H_2, H_1\} = \{H_2, H_1\} = 0$, e lo stesso vale per $\{H, H_2\}$. Di conseguenza, quando l’hamiltoniana di un sistema risulta completamente disaccoppiata, l’energia di ciascun grado di libertà si conserva (ovvero non si ha passaggio di energia da un grado di libertà all’altro).

3.3 Trasformazioni canoniche

3.3.1 Coordinate canoniche

Passare dalle equazioni di Lagrange alle equazioni di Hamilton, in genere, non comporta di per sé un particolare progresso dal punto di vista della possibilità di integrare il sistema e ottenere le curve di moto. E dunque, che cosa ci si guadagna? In primo luogo, come ora vedremo, nello spazio delle fasi abbiamo a disposizione un maggior numero di sistemi di coordinate utilizzabili per scrivere le equazioni del moto.

Abbiamo già visto che in alcuni casi le equazioni di Lagrange possono essere risolte trovando delle coordinate in cui le equazioni per i diversi gradi di libertà si disaccoppiano: se, in particolare, grazie alla conoscenza di integrali primi è possibile ricondurre il sistema ad equazioni del primo ordine, il disaccoppiamento dei gradi di libertà conduce ad equazioni che si possono (in linea di principio) integrare per separazione di variabili. Tuttavia, ***nella rappresentazione lagrangiana della dinamica i possibili cambiamenti di coordinate sono solo quelli sullo spazio delle configurazioni*** (con i loro rilevamenti naturali al fibrato tangente).

Per chiarire (e dimostrare) quest'affermazione, supponiamo per un momento di applicare un cambiamento di coordinate che mescoli fra loro coordinate e velocità lagrangiane, ossia un cambiamento della forma

$$\begin{cases} q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu, U^\mu) \\ u^\lambda = u^\lambda(Q^\mu, U^\mu). \end{cases} \quad (3.16)$$

anziché un cambiamento di “coordinate naturali” su TQ , che - ricordiamo - ha la forma

$$\begin{cases} q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu) \\ u^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\mu} U^\mu. \end{cases} \quad (3.17)$$

(NOTA BENE: un generico cambiamento di coordinate (3.16) è compatibile con la struttura di varietà differenziabile di TQ , ma si “dimentica” della struttura di fibrato tangente. In questo caso la suddivisione in due gruppi di n coordinate, Q^λ e U^λ , risulta del tutto arbitraria: non è più vero, infatti, che le prime sono coordinate sulla varietà di base Q e le seconde coordinate su ciascuno spazio tangente $T_q Q$).

Data una generica funzione di Lagrange $L = L(q^\lambda, u^\lambda)$, usando le nuove coordinate si otterrebbe

$$\frac{\partial L}{\partial Q^\lambda} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial Q^\lambda} + \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\lambda}, \quad \frac{\partial L}{\partial U^\lambda} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial U^\lambda} + \frac{\partial L}{\partial q^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial U^\lambda};$$

ora verifichiamo sotto quali condizioni sulla trasformazione (3.16) si potrebbe avere che, *per qualsiasi lagrangiana*,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial U^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q^\lambda} = 0 \\ \dot{Q}^\mu = U^\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0 \\ \dot{q}^\mu = u^\mu \end{cases}$$

dove nell'equazione di destra si siano semplicemente sostituite in L le vecchie coordinate in funzione delle nuove. Osserviamo innanzitutto che per una trasformazione generica (3.16) l'equazione $\dot{q}^\mu = u^\mu$ implica

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} \dot{Q}^\nu + \frac{\partial q^\mu}{\partial U^\nu} \dot{U}^\nu = u^\mu(Q^\lambda, U^\lambda).$$

Su ogni soluzione delle equazioni di Lagrange si deve avere $\dot{Q}^\nu = U^\nu$, ma il valore di \dot{U}^ν (in funzione di Q^λ e U^λ) dipende invece dalla scelta di L ; quindi affinché questa uguaglianza possa valere per qualunque lagrangiana si deve necessariamente avere $\frac{\partial q^\mu}{\partial U^\nu} \equiv 0$; ne consegue $\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} U^\nu = u^\mu(Q^\lambda, U^\lambda)$. Quindi l'unica possibilità è che la trasformazione abbia proprio la forma (3.17), ossia sia una trasformazione naturale. Abbiamo quindi dimostrato che il campo vettoriale X_L generato da una lagrangiana regolare sullo spazio delle velocità TQ continua ad essere descritto dalle equazioni di Lagrange se e solo se si usano coordinate naturali.

Se invece consideriamo il campo vettoriale X_H rappresentato dalle equazioni di Hamilton sullo spazio delle fasi T^*Q , mostreremo ora che esso può risultare descritto dalle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana H anche in coordinate diverse da quelle naturali.

Infatti, abbiamo visto che tale campo è l'immagine del differenziale della funzione H attraverso il tensore di Poisson: $X_H = \mathcal{P}(dH)$. Abbiamo anche osservato che le componenti del tensore di Poisson coincidono con le parentesi di Poisson delle coordinate. Supponiamo dunque di costruire $2n$ nuove funzioni differenziabili su T^*Q ,

$$\begin{cases} Q^\lambda = Q^\lambda(q^\mu, p_\mu) \\ P_\lambda = P_\lambda(q^\mu, p_\mu) \end{cases} \quad \text{tali che} \quad \begin{cases} \{Q^\lambda, Q^\mu\} = 0 \\ \{P_\lambda, Q^\mu\} = \delta_\lambda^\mu \\ \{P_\lambda, P_\mu\} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

e che le nuove funzioni siano tutte indipendenti fra loro. Prendendo le (Q^λ, P_λ) come nuove coordinate locali, il tensore di Poisson \mathcal{P} sarà ancora rappresentato dalla matrice a blocchi costante $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, e pertanto il campo X_H e il sistema di equazioni differenziali ordinarie ad esso associato, nelle nuove coordinate, saranno rispettivamente

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} \frac{\partial}{\partial Q^\mu} - \frac{\partial H}{\partial Q^\mu} \frac{\partial}{\partial P_\mu}, \quad \begin{cases} \dot{Q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} \\ \dot{P}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial Q^\mu} \end{cases} \quad (3.19)$$

Quindi, quale che sia l'hamiltoniana H , le equazioni di Hamilton conservano la loro forma (con la medesima hamiltoniana H , espressa in funzione delle nuove coordinate) in qualunque sistema di coordinate su T^*Q che soddisfi le parentesi di Poisson canoniche (3.18). Coordinate con questa proprietà sono dette **coordinate canoniche**: la loro suddivisione in due gruppi non è adattata alla fibrazione cotangente, ma è determinata dalle parentesi di Poisson canoniche.

Tutte le coordinate naturali sul fibrato cotangente sono canoniche, ma per convincersi che vi sono anche altre coordinate, non naturali, per cui le relazioni (3.18) sono soddisfatte, basta considerare

l'esempio (banale)

$$\begin{cases} Q^\lambda = p_\lambda \\ P_\lambda = -q^\lambda. \end{cases} \quad (3.20)$$

Beninteso, esistono esempi più rilevanti (e utili) di questo. Consideriamo ad esempio $Q = \mathbb{R}$, e su un opportuno aperto di $T^*Q = \mathbb{R}^2$ definiamo il seguente cambiamento di coordinate (contenente un arbitrario parametro reale ω):

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin(Q) \\ p = \sqrt{2P\omega} \cos(Q). \end{cases} \quad (3.21)$$

dove (q, p) sono coordinate naturali. Per verificare che le nuove coordinate (Q, P) sono canoniche, dovremmo ora invertire la (3.21) e verificare che $\{P, Q\} = 1$,⁴ invece, dimostreremo più avanti che la trasformazione (3.21) è canonica utilizzando una proprietà equivalente, che non richiede di invertire la trasformazione. È evidente che le coordinate (Q, P) non sono naturali, perché se lo fossero dovrebbe essere $q = q(Q)$, mentre invece q dipende sia da Q che da P .

A che cosa potrebbero servire queste nuove coordinate canoniche? Supponiamo di dover studiare il comportamento dell'oscillatore armonico unidimensionale descritto dall'hamiltoniana

$$H = H(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q. \end{cases} \quad (3.22)$$

Nelle coordinate (Q, P) si ha

$$H = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \\ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

e queste equazioni si integrano immediatamente: $Q(t; Q_0) = \omega t + Q_0$ e $P(t; P_0) = P_0$. Sostituendo queste soluzioni nelle (3.21) otteniamo immediatamente la soluzione generale delle equazioni del moto anche nelle coordinate di partenza. Quindi, le trasformazioni (3.21), che sono canoniche *indipendentemente dall'hamiltoniana del sistema*, risultano utili per trasformare la particolare hamiltoniana (3.22) in una forma in cui una delle coordinate è ciclica. Notiamo che con una trasformazione di coordinate naturali questo non sarebbe stato possibile: con un solo grado di libertà, se l'unica coordinata di configurazione q fosse ciclica il potenziale sarebbe necessariamente costante, quindi non potremmo avere forze attive. Nemmeno potrebbe risultare ciclica la componente p dell'impulso, perché in tal caso l'energia cinetica risulterebbe degenera. Il "trucco", qui, è che la variabile ciclica Q non è una coordinata di configurazione, né una componente dell'impulso, bensì una funzione (non lineare) di entrambe.

Sappiamo bene che la soluzione generale delle equazioni del moto dell'oscillatore armonico si poteva facilmente trovare anche nelle coordinate (q, p) ; ma il punto è che per trovare la trasformazione (3.21) *non abbiamo usato* la conoscenza di tale soluzione, quindi possiamo

⁴Per $n = 1$ questa è l'unica condizione da controllare, dato che $\{Q, Q\} \equiv 0$ e $\{P, P\} \equiv 0$ per antisimmetria

aspettarci di riuscire a fare qualcosa di analogo anche in casi che non apparirebbero risolubili nelle coordinate naturali di partenza.

Ecco dunque il vantaggio di aver scritto le equazioni del moto nella forma di Hamilton, trasportandole nello spazio delle fasi: in questo spazio possiamo sperare di trovare nuovi sistemi di coordinate che consentano di integrarle. Le strategie per trovare trasformazioni canoniche utili a questo scopo sono l'oggetto dei capitoli che seguono.

3.3.2 La forma simplettica

Studiando la struttura delle equazioni di Hamilton, che abbiamo trovato come immagine delle equazioni di Lagrange sotto la mappa di Legendre, ci siamo imbattuti in un oggetto, il tensore di Poisson, che definisce sullo spazio delle fasi una regola per associare ad ogni funzione su T^*Q un campo vettoriale.

Su una generica varietà differenziabile M qualunque forma bilineare, ossia qualunque campo tensoriale di tipo $(0, 2)$, permette di associare un campo vettoriale al differenziale di una funzione: se la forma bilineare è non degenere, questa corrispondenza è anche iniettiva.

Un caso ben noto è quello di un tensore metrico su M : questo permette di associare ad ogni funzione f il suo gradiente $\nabla f = (df)^\#$. In questo caso si usa una forma bilineare simmetrica, che però deve essere definita espressamente: la struttura metrica non è “contenuta” intrinsecamente nella struttura di varietà differenziabile, e una stessa varietà può ammettere infinite metriche diverse. In altri termini, non vi sono su una varietà differenziabile coordinate che siano “intrinsecamente ortogonali”: ogni sistema di coordinate può essere ortogonale per una particolare metrica, e non esserlo per un'altra.

Il tensore di Poisson su T^*Q , invece, è una forma bilineare *antisimmetrica*, e ha una peculiarità: in ogni sistema di coordinate naturali la matrice delle sue componenti ha la forma “canonica” $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$. Quindi deve esistere una relazione intrinseca fra il tensore di Poisson e la struttura stessa di fibrato cotangente, dato che è quest'ultima che individua univocamente le coordinate naturali. Ora descriveremo questa relazione, che risulterà molto utile anche ai fini pratici.

Su ogni fibrato cotangente T^*Q esiste un particolare campo di covettori (o 1-forma differenziale), la *1-forma di Liouville*, usualmente denotata con θ e definita nel modo seguente. Sia π è la proiezione $T^*Q \rightarrow Q$, che associa ad ogni covettore il punto in cui esso è applicato. Usando la mappa tangente, $T\pi : T(T^*Q) \rightarrow TQ$, possiamo proiettare ogni vettore tangente a T^*Q in un vettore tangente a Q . La 1-forma θ su T^*Q è definita in questo modo: per ogni vettore \mathbf{X} tangente a T^*Q nel punto (q, p) :

$$\langle \theta(p), \mathbf{X} \rangle = \langle p, T\pi(\mathbf{X}) \rangle.$$

In coordinate naturali, la 1-forma di Liouville è semplicemente

$$\theta = p_\mu dq^\mu \quad (3.24)$$

NOTA BENE: non si deve confondere l'espressione (3.24) con la rappresentazione di una generica 1-forma su Q . Quest'ultima sarebbe una sezione del fibrato T^*Q , ossia una mappa che ad ogni punto q^μ associa un covettore rappresentato da $p_\mu(q^\lambda) dq^\mu$; invece, la forma di Liouville è una 1-forma su T^*Q , non su Q . Una generica 1-forma su T^*Q – ossia, se non vi fa venire mal di testa, una sezione di $T^*(T^*Q)$ – si rappresenta in coordinate in questo modo: $\alpha_\mu(q^\lambda, p_\lambda) dq^\mu + \beta^\mu(q^\lambda, p_\lambda) dp_\mu$. Per la 1-forma di Liouville si ha $\alpha_\mu(q^\lambda, p_\lambda) \equiv p_\mu$ e $\beta^\mu(q^\lambda, p_\lambda) \equiv 0$.

Infatti, ecco come agisce θ su un generico vettore $\mathbf{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + Y_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$. Innanzitutto, $T\pi(\mathbf{X})$ è semplicemente il vettore $X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}$, tangente a Q : quindi $\langle p, T\pi(\mathbf{X}) \rangle = p_\mu X^\mu$. Ma questo è proprio quello che si ottiene applicando la 1-forma $p_\mu dq^\mu$ a $X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + Y_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$: $\langle p_\mu dq^\mu, X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + Y_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \rangle = p_\mu X^\mu$, poiché $\langle dq^\mu, \frac{\partial}{\partial p_\nu} \rangle \equiv 0$ e $\langle dq^\mu, \frac{\partial}{\partial q^\nu} \rangle = \delta^\mu_\nu$.

Dunque la 1-forma di Liouville è un oggetto intrinsecamente associato alla struttura di fibrato cotangente: la sua definizione si basa sul fatto che un *punto* della varietà T^*Q è, per definizione, un *covettore* sulla varietà Q .

Il *differenziale esterno* della forma θ è una 2-forma su T^*Q , che in qualunque sistema di coordinate *naturali* ha l'espressione

$$d\theta = dp_\mu \wedge dq^\mu \quad (3.25)$$

Questa 2-forma è detta **forma simplettica (canonica)** sul fibrato cotangente T^*Q , ed è indicata con ω .

(In generale, una *forma simplettica* su una varietà M è una 2-forma *chiusa* e *non degenere*; quella che abbiamo appena introdotto è una particolare forma simplettica *esatta* che esiste *intrinsecamente* su ciascun fibrato cotangente, e per questa ragione è detta “canonica”).

Da (3.25) si ricava che la matrice delle componenti di ω è $\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$: questa matrice è l'inversa di quella che (nelle stesse coordinate) rappresenta il tensore di Poisson \mathcal{P} .

In effetti, la forma simplettica ω permette di trasformare un vettore tangente a T^*Q in un covettore: $X \mapsto \omega(X, \cdot)$. Ebbene, questa mappa lineare $T(T^*Q) \rightarrow T^*(T^*Q)$ è (a meno del segno, per la ragione spiegata nella nota al fondo di pag.7) l'inversa della mappa $T^*(T^*Q) \rightarrow T(T^*Q)$ definita dal tensore di Poisson \mathcal{P} (abbiamo già visto, infatti, che la matrice che rappresenta ω è l'inversa della matrice che rappresenta \mathcal{P}). In particolare, per qualunque funzione $f : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ e per qualunque campo vettoriale Y su T^*Q

$$\omega(X_f, Y) = \omega(\mathcal{P}(df), Y) = -\langle df, Y \rangle, \quad (3.26)$$

e per due funzioni qualsiasi f, g

$$\omega(X_f, X_g) = \omega(\mathcal{P}(df), \mathcal{P}(dg)) = -\langle df, \mathcal{P}(dg) \rangle = \{f, g\}. \quad (3.27)$$

Ecco dunque che il tensore di Poisson non è altro che l'inverso della forma simplettica canonicamente associata alla struttura di fibrato cotangente. Oltre a mettere in luce la natura “intrinseca” del tensore di Poisson su un fibrato cotangente, la relazione con la forma simplettica permette una caratterizzazione alternativa delle coordinate canoniche: **le coordinate canoniche** (Q^μ, P_μ) **sono tutte e sole le coordinate in cui la forma simplettica canonica ha l'espressione** $\omega = dP_\mu \wedge dQ^\mu$. Le trasformazioni che legano due sistemi di coordinate canoniche sono quindi diffeomorfismi locali (passivi) che conservano la forma simplettica canonica, e sono dette **trasformazioni canoniche**.

Come prima applicazione di questo risultato, dimostriamo che le coordinate (3.21), che avevamo introdotto a titolo di esempio nella sezione precedente, sono effettivamente canoniche. Senza bisogno di invertire la trasformazione, scriviamo

$$dp \wedge dq = \left(\frac{\partial p}{\partial Q} dQ + \frac{\partial p}{\partial P} dP \right) \wedge \left(\frac{\partial q}{\partial Q} dQ + \frac{\partial q}{\partial P} dP \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} \right) dP \wedge dQ$$

(dato che è $n = 1$, e $dQ \wedge dQ = dP \wedge dP \equiv 0$ per antisimmetria). Dalla (3.21) si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \sqrt{\frac{\omega}{2P}} \cos(Q) \cdot \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos(Q) + \sqrt{2P\omega} \sin(Q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2P\omega}} \sin(Q) = 1$$

e pertanto $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$. La (3.21) è quindi una trasformazione canonica.

3.3.3 Campi vettoriali hamiltoniani come generatori di trasformazioni canoniche

Introduciamo ora una notazione che risulterà comoda nel seguito.

Data una qualunque p -forma F , denotiamo con $i_X F$ la $(p-1)$ -forma che si ottiene applicando F al campo vettoriale X : per una 2-forma, ad esempio, avremo per definizione $\langle i_X F, Y \rangle = F(X, Y)$. Con questa notazione, per ogni campo hamiltoniano X_f vale la relazione

$$i_{X_f} \omega = -df.$$

Consideriamo un flusso ϕ_ϵ di diffeomorfismi sul fibrato cotangente, generato da un campo vettoriale X . Questo flusso conserva la forma symplettica canonica se

$$\phi_\epsilon^* \omega = \omega \quad \forall \epsilon.$$

Si può dimostrare, in generale, che per una qualsiasi p -forma F e per il flusso ϕ_ϵ generato da un qualsiasi campo vettoriale X si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi_\epsilon^* F - F) = i_X dF + d(i_X F) \quad (3.28)$$

(formula di Cartan). Il limite (3.28) definisce la **derivata di Lie** della forma F rispetto al campo X .

La forma symplettica è esatta, quindi $d\omega = 0$; se inoltre il campo X è hamiltoniano, allora $i_X \omega = -df$ per qualche funzione f , e allora $d(i_X \omega) = 0$, quindi la derivata di Lie della forma symplettica lungo un campo hamiltoniano è sempre nulla. Da questo deriva che *il flusso di qualsiasi campo hamiltoniano conserva la forma symplettica*: i campi hamiltoniani sono dunque *generatori infinitesimi di flussi di trasformazioni canoniche*.

Ciò fornisce anche un criterio per determinare se un dato campo vettoriale X su T^*Q è hamiltoniano, ossia se esiste una funzione f tale che $X = X_f$. Infatti in questo caso la 1-forma $i_X \omega$ dovrebbe essere esatta, e quindi deve essere chiusa: $d(i_X \omega) = 0$ è *condizione necessaria* perché sia $X = X_f$. Tale condizione è anche localmente sufficiente: se $d(i_X \omega) = 0$ allora per ogni punto di T^*Q esiste un intorno su cui $X = X_f$ per una funzione definita su tale intorno⁵. In coordinate, se il campo X ha la rappresentazione

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + Y_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$$

allora la condizione $d(i_X \omega) = 0$ diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial X^\mu}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial X^\lambda}{\partial p_\mu} = 0 \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial Y_\lambda}{\partial p_\mu} = 0 \\ \frac{\partial Y_\mu}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial Y_\lambda}{\partial q^\mu} = 0 \end{cases}$$

⁵in tal caso si dice che X è un campo **localmente hamiltoniano**. La funzione f è sempre determinata a meno di una costante additiva.

Una proprietà importante connette il *commutatore* di due campi hamiltoniani con le parentesi di Poisson delle funzioni a cui sono associati:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

Questa proprietà si può dimostrare direttamente usando l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= -\{h, \{f, g\}\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f,g\}}(h), \end{aligned}$$

e dato che questo vale per ogni funzione h , la relazione è dimostrata.

Quando una funzione f è in involuzione con l'hamiltoniana H , ossia è una costante del moto, ne consegue che il campo hamiltoniano X_f genera una trasformazione di simmetria per le equazioni di Hamilton del sistema.

Questa proprietà è il corrispettivo, nello spazio delle fasi, della corrispondenza fra costanti del moto e simmetrie che nello spazio delle velocità è descritta dal teorema di Noether. Nello spazio delle velocità, i generatori di una simmetria noetheriana sono i campi vettoriali \hat{X} tali che

1. \hat{X} è il rilevamento tangente di un campo vettoriale X su Q ;
2. $\hat{X}(L) = 0$.

Nello spazio delle fasi, invece, i generatori delle simmetrie sono campi vettoriali X tali che

1. X è hamiltoniano;
2. $X(H) = 0$.

Le simmetrie noetheriane, quindi, corrispondono a generatori di trasformazioni *naturali*, mentre le simmetrie hamiltoniane possono includere anche campi che generano flussi di trasformazioni canoniche *non puntuali*. Dunque potranno esistere nello spazio delle fasi simmetrie che non hanno un corrispettivo noetheriano. D'altra parte, le costanti del moto noetheriane sono necessariamente *funzioni lineari* dei momenti coniugati, quindi corrisponderanno nello spazio delle fasi a funzioni lineari nelle coordinate (naturali) p_μ . Eventuali costanti del moto che dipendano in modo non lineare dalle p_μ , pertanto, corrisponderanno a simmetrie nello spazio delle fasi ma non nello spazio delle velocità.

Dati due integrali primi f e g , sappiamo che la loro parentesi di Poisson è ancora in involuzione con H ; si ottiene in questo modo un integrale primo non banale se e solo se i due campi non commutano. In generale, le parentesi di Poisson fra gli integrali primi riflettono le relazioni di commutazione fra i diversi flussi di simmetria ammessi dal sistema, e queste sono a loro volta l'immagine della struttura algebrica complessiva del *gruppo di simmetria* che agisce sul sistema. Dalle parentesi di Poisson fra gli integrali primi si può riconoscere se le simmetrie del sistema hanno (nello spazio delle fasi!) la natura di traslazioni (in questo caso tutte le simmetrie commutano), di rotazioni, ecc., indipendentemente dalle coordinate scelte.

3.3.4 Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche

Il fatto di aver caratterizzato le trasformazioni canoniche come trasformazioni che conservano la forma simplettica canonica apre la possibilità di costruirle mediante *funzioni generatrici*.

Sia ϕ il diffeomorfismo locale che connette due carte (non necessariamente naturali) su T^*Q . La trasformazione $\phi : (Q^\mu, P_\mu) \mapsto (q^\mu, p_\mu)$ è dunque canonica se e solo se $\phi^*\omega = \omega$. Poiché $\omega = d\theta$, e il differenziale esterno commuta con il *pullback*, per una trasformazione canonica si ha

$$\phi^*d\theta = d\theta \quad \Rightarrow \quad d(\phi^*\theta - \theta) = 0, \quad (3.29)$$

quindi se ϕ è canonica allora la differenza fra la 1-forma di Liouville e il suo *pullback* sotto ϕ è una forma chiusa. Localmente, ogni forma chiusa coincide con il differenziale di una funzione, quindi (localmente)

$$\theta - \phi^*\theta = dS, \quad \text{in coordinate:} \quad p_\mu dq^\mu - P_\mu dQ^\mu = dS \quad (3.30)$$

La relazione $p_\mu dq^\mu - P_\mu dQ^\mu = dS$ si può scrivere tanto nelle coordinate (Q^μ, P_μ) , nelle quali $p_\mu dq^\mu = p_\mu(Q^\lambda, P_\lambda) \left(\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} dQ^\nu + \frac{\partial q^\mu}{\partial P_\nu} dP_\nu \right)$ e $dS = \frac{\partial S}{\partial Q^\nu} dQ^\nu + \frac{\partial S}{\partial P_\nu} dP_\nu$, quanto (*mutatis mutandis*) nelle coordinate (q^μ, p_μ) .

Per esercizio, consideriamo gli esempi di trasformazioni canoniche non naturali che abbiamo visto più sopra.

Nel caso (3.20), abbiamo che $PdQ = -qdp$, quindi $pdq - PdQ = pdq + qdp = d(pq)$: dunque $S = pq + \text{cost.}$ (S è sempre definita a meno di una costante additiva). Nelle coordinate (Q, P) abbiamo ovviamente $S = -PQ + \text{cost.}$

Nel caso (3.21), abbiamo invece

$$pdq = \sqrt{2P\omega} \cos(Q) \cdot \left(\sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos(Q) dQ + \sqrt{\frac{1}{2P\omega}} \sin(Q) dP \right)$$

quindi deve essere

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial Q} = (2 \cos^2(Q) - 1)P \\ \frac{\partial S}{\partial P} = \sin(Q) \cos(Q), \end{cases} \quad (3.31)$$

da cui $S = P \cos(Q) \sin(Q) + \text{cost.}$

NOTA BENE: Nel caso di un cambiamento di coordinate naturali (3.3) la 1-forma di Liouville è conservata, $p_\mu dq^\mu = P_\mu dQ^\mu$, quindi $dS = 0$. I cambiamenti di coordinate naturali sul fibrato cotangente, in questo contesto, sono anche detti **trasformazioni canoniche puntuali**. Quanto abbiamo discusso fin qui mostra che un interesse della formulazione hamiltoniana delle equazioni del moto sta precisamente nel fatto che essa è invariante per trasformazioni che lasciano invariata la 2-forma simplettica, e non solo per quelle che lasciano invariata la 1-forma di Liouville.

Scopriremo ora che la relazione $p_\mu dq^\mu - P_\mu dQ^\mu = dS$ fornisce un modo per *costruire* trasformazioni canoniche, attraverso un singolare “trucco”: usare come variabili indipendenti metà delle coordinate vecchie e metà delle coordinate nuove. A questo scopo premettiamo un lemma, che enunciamo senza dimostrazione:

Proposizione 2. *Dati due sistemi di coordinate (non necessariamente canoniche) su T^*Q , (Q^μ, P_μ) e (q^μ, p_μ) , nell'intersezione dei loro domini è sempre vera **almeno una** delle seguenti affermazioni:*

- (I): *le $2n$ funzioni (q^μ, Q^μ) sono tutte indipendenti fra loro;*
- (II): *le $2n$ funzioni (q^μ, P_μ) sono tutte indipendenti fra loro;*
- (III): *le $2n$ funzioni (p_μ, Q^μ) sono tutte indipendenti fra loro;*
- (IV): *le $2n$ funzioni (p_μ, P_μ) sono tutte indipendenti fra loro;*

Le quattro proprietà considerate possono anche verificarsi tutte contemporaneamente, ma questo non avviene in generale. Ad esempio, nel caso di due sistemi di coordinate *naturali* su T^*Q si ha sempre $q^\mu = q^\mu(Q^\nu)$, quindi in questo caso la (I) non può essere vera. Per la trasformazione (3.20) si vede immediatamente che sono vere la (I) e la (IV), ma non la (II) e la (III).

Supponiamo ora di trovarci nel caso (I). Allora S può essere scritta in funzione delle $2n$ variabili (q^μ, Q^μ) ; la (3.30) diventa

$$p_\mu dq^\mu - P_\mu dQ^\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial S}{\partial Q^\mu} dQ^\mu \quad (3.32)$$

e questa uguaglianza, poiché per ipotesi i differenziali dq^ν e dQ^ν sono tutti linearmente indipendenti, implica

$$\begin{cases} p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial Q^\mu}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Invertendo una (a scelta) delle due relazioni $p_\mu = p_\mu(q^\nu, Q^\nu)$ e $P_\mu = P_\mu(q^\nu, Q^\nu)$ ottenute in questo modo, ad esempio in modo da avere $q^\mu = q^\mu(Q^\nu, P_\nu)$ (dalla seconda delle due), e successivamente si sostituisce questa relazione nell'altra, si ricostruisce completamente il cambiamento di coordinate $q^\mu = q^\mu(Q^\nu, P_\nu)$, $p_\mu = p_\mu(Q^\nu, P_\nu)$.

La scoperta importante, però, è che in questo modo non si determina la funzione S a partire dalla conoscenza della trasformazione canonica, come abbiamo fatto sopra nel caso (3.31), ma al contrario *si ottiene la trasformazione canonica a partire dalla funzione S* . Infatti, se

1. si prende una *qualsiasi* funzione $S(q^\mu, Q^\mu)$, con l'unica condizione che la matrice $\frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial Q^\nu}$ abbia determinante diverso da zero;
2. si scrive il sistema (3.33);
3. si inverte una delle due equazioni, il che è possibile sotto la condizione richiesta $\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial Q^\nu} \right| \neq 0$;
4. si ricostruisce in questo modo un cambiamento di coordinate $q^\mu = q^\mu(Q^\nu, P_\nu)$, $p_\mu = p_\mu(Q^\nu, P_\nu)$ (o equivalentemente la trasformazione inversa),

allora la (3.32) *garantisce* che la trasformazione così ottenuta è canonica. La funzione $S(q^\mu, Q^\mu)$ è detta *funzione generatrice di I specie* della trasformazione.

Qualunque funzione delle coordinate q^μ , che dipenda anche da n parametri Q^μ in modo da soddisfare la condizione $\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial Q^\nu} \right| \neq 0$, può essere usata come funzione generatrice di una trasformazione canonica.

Osservazione: la condizione sulle derivate seconde esclude che le nuove n variabili Q^μ possano comparire come costanti additive, e più in generale che si possa prendere $S = f(q^\mu) + g(Q^\mu)$.

In questo modo si costruiscono trasformazioni canoniche per cui vale la proprietà (I). Per costruire trasformazioni in cui vale invece la proprietà (II) si può procedere nel modo seguente. Dato che in questo caso saranno i differenziali dP_ν e dq^ν a dover risultare indipendenti fra loro, si usa la regola di Leibnitz $d(P_\mu Q^\mu) = Q^\mu dP_\mu + P_\mu dQ^\mu$ per riscrivere la (3.30) così:

$$p_\mu dq^\mu - d(P_\mu Q^\mu) + Q^\mu dP_\mu = dS \quad \Rightarrow \quad p_\mu dq^\mu + Q^\mu dP_\mu = d(P_\mu Q^\mu + S) = dA. \quad (3.34)$$

Presa ora una qualsiasi funzione $A(q^\mu, P_\mu)$ tale che $\det \left| \frac{\partial^2 A}{\partial q^\mu \partial P_\nu} \right| \neq 0$, si scrive il sistema

$$\begin{cases} p_\mu = \frac{\partial A}{\partial q^\mu} \\ Q^\mu = \frac{\partial A}{\partial P_\mu} \end{cases} \quad (3.35)$$

e anche in questo caso, invertendo la seconda equazione del sistema (3.35) e sostituendo il risultato nella prima, si ricava una trasformazione $q^\mu = q^\mu(Q^\nu, P_\nu)$, $p_\mu = p_\mu(Q^\nu, P_\nu)$ che risulta automaticamente canonica. La funzione A è allora detta *funzione generatrice di II specie* della trasformazione ottenuta.

È facile capire, a questo punto, come adattare il metodo per i restanti casi (III) e (IV).

Anche per le trasformazioni canoniche puntuali (3.3) si può trovare una funzione generatrice: ovviamente, non di I specie. Siccome queste trasformazioni conservano la 1-forma di Liouville, per esse si può porre $S \equiv 0$, quindi la funzione generatrice di II specie di una trasformazione canonica puntuale, corrispondente a un cambio di coordinate $Q^\mu = Q^\mu(q^\nu)$ sullo spazio delle configurazioni, è semplicemente $A(q^\nu, P_\nu) = Q^\mu(q^\nu) P_\mu$. Perfino la trasformazione identica ha una funzione generatrice di II specie: $A = q^\nu P_\nu$.

È interessante chiedersi: dato che la composizione di due trasformazioni canoniche è ancora una trasformazione canonica, come si compongono le corrispondenti funzioni generatrici? Se una prima trasformazione $(q^\mu, p_\mu) \mapsto (Q^\mu, P_\mu)$ è generata dalla funzione di prima specie $S(q^\mu, Q^\mu)$ e una seconda trasformazione $(Q^\mu, P_\mu) \mapsto (Q'^\mu, P'_\mu)$ è generata dalla funzione $S'(Q^\mu, Q'^\mu)$, quale sarà la funzione generatrice $S''(q^\mu, Q'^\mu)$ che genera la trasformazione composta $(q^\mu, p_\mu) \mapsto (Q'^\mu, P'_\mu)$? Dalle relazioni

$$\begin{cases} p_\mu dq^\mu - P_\mu dQ^\mu = dS \\ P_\mu dQ^\mu - P'_\mu dQ'^\mu = dS' \end{cases} \quad \text{segue che} \quad p_\mu dq^\mu - P'_\mu dQ'^\mu = d(S + S'),$$

quindi la funzione generatrice S'' deve essere la somma di S e S' . Ma S'' deve essere scritta in funzione delle coordinate (q^μ, Q'^μ) : a tale scopo dobbiamo eliminare la dipendenza della somma

$S + S'$ dalle Q^μ . In sostanza, date le coordinate di partenza (q^μ, p_μ) e quelle di arrivo (Q'^μ, P'_μ) dobbiamo identificare, in funzione di queste, quali sono le coordinate (Q^μ, P_μ) corrispondenti alla trasformazione intermedia fra le due. Osserviamo che confrontando le due trasformazioni canoniche si deve avere

$$P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial Q^\mu} = \frac{\partial S'}{\partial Q^\mu},$$

quindi il valore delle Q^μ da sostituire nella somma $S + S'$ è quello per cui si abbia $\frac{\partial S}{\partial Q^\mu} + \frac{\partial S'}{\partial Q^\mu} = 0$. La funzione generatrice cercata si ottiene dunque ponendo

$$S''(q^\mu, Q'^\mu) = S(q^\mu, Q^\mu) + S'(Q^\mu, Q'^\mu), \quad \text{con } Q^\mu \text{ tali che } \frac{\partial(S + S')}{\partial Q^\mu} = 0$$

Questa relazione si può generalizzare alla composizione di tre o più funzioni generatrici: in tutti i casi la funzione generatrice della trasformazione composta è data dalla somma di tutte le funzioni generatrici, calcolata nei valori delle coordinate intermedie che rendono stazionaria la somma medesima.

Attraverso le funzioni generatrici, abbiamo dunque un metodo generale per produrre infinite trasformazioni canoniche in un dato spazio delle fasi. Noi però vorremmo saper trovare, a seconda del particolare sistema meccanico che ci interessa, una trasformazione canonica *che semplifichi la forma dell'hamiltoniana del sistema*. Come fare?

3.3.5 Coordinate azione–angolo e sistemi completamente integrabili

Finora, l'unico esempio che abbiamo incontrato di una trasformazione canonica *non puntuale* che permette di semplificare la forma di un'hamiltoniana è la trasformazione (3.21): cerchiamo allora di capire come è stato possibile costruirla, per vedere se la stessa strategia si possa applicare ad hamiltoniane diverse da quella dell'oscillatore armonico unidimensionale.

Per l'hamiltoniana (3.22) noi conosciamo una costante del moto: l'hamiltoniana stessa. Quindi sappiamo che ogni curva di moto giacerà interamente su un insieme di livello di H . Nella fattispecie, ogni $c > 0$ è un valore regolare per H e la controimmagine è una sottovarietà unidimensionale di T^*Q , e precisamente l'ellisse $p^2 + \omega^2 q^2 = 2c$. Dato che stiamo cercando un sistema di coordinate (Q, P) in cui Q sia ciclica, dovremo avere $H = H(P)$, e quindi gli insiemi di livello della coordinata P saranno gli stessi della funzione H . Su ogni ellisse, la coordinata P sarà costante e il suo valore sarà tale che $H(P) = c$, mentre la coordinata Q dovrà parametrizzare l'ellisse. Questo suggerisce di porre:

$$\begin{cases} q = \frac{\sqrt{2H}}{\omega} \sin(Q) \\ p = \sqrt{2H} \cos(Q). \end{cases} \quad (3.36)$$

Resta da individuare $H = H(P)$ in modo che le coordinate (Q, P) siano canoniche. Imponendo $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$ si trova subito che deve essere $\frac{dH}{dP} = \omega$, quindi $H(P) = \omega P$. Si ottiene così la trasformazione (3.21). Tuttavia, in un caso più generale (e con $n > 1$) la condizione di canonicità si tradurrebbe in un'equazione differenziale che potrebbe non essere facilmente risolvibile. Vediamo se la teoria delle funzioni generatrici ci aiuta.

Gli elementi da cui partire sono:

- abbiamo individuato una costante del moto (l'energia totale H);
- gli insiemi di livello $H = c$, per $c > 0$, sono tutti diffeomorfi alla circonferenza S^1 ;
- abbiamo individuato una parametrizzazione (3.36) di questi insiemi di livello, in funzione del valore della costante del moto H e di una coordinata angolare Q .

Con questi elementi, se proviamo a integrare la 1-forma di Liouville $p dq$ su un'ellisse $H = c$, troviamo un risultato interessante:

$$\oint_{H=c} p dq = \int_0^{2\pi} \frac{2H}{\omega} \cos^2(Q) dQ = \frac{2\pi H}{\omega},$$

quindi per la coordinata P che abbiamo trovato vale l'identità

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (3.37)$$

dove l'integrale è calcolato su una curva chiusa su cui H è costante. Questa formula potrebbe allora fornire la relazione fra H e P , in alternativa alla condizione di canonicità $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$:

infatti, per calcolare questo integrale ci basta conoscere una parametrizzazione della curva in funzione di una coordinata angolare Q e del valore costante dell'energia H , non abbiamo bisogno di aver già trovato la coordinata coniugata P . È proprio la teoria delle funzioni generatrici a suggerire che questa formula possa valere in generale. Dato che le nuove coordinate (Q, P) devono essere canoniche, su qualunque curva γ nello spazio delle fasi si deve avere

$$\int_{\gamma} pdq = \int_{\gamma} PdQ + \int_{\gamma} dS;$$

ma l'integrale del differenziale dS è, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, uguale alla differenza fra i valori di S negli estremi di integrazione. Se l'integrale è fatto su una curva chiusa, gli estremi di integrazione coincidono e dobbiamo avere

$$\oint pdq = \oint PdQ$$

(in realtà, le cose stanno esattamente in questi termini solo se la curva è definita su un aperto omeomorfo a \mathbb{R}^2 , ma per semplicità sorvoliamo sugli aspetti topologici della questione). Poiché per ipotesi deve essere $P = \text{cost.}$ sulla curva di integrazione (infatti abbiamo supposto $H = H(P)$, quindi gli insiemi di livello di H coincidono con gli insiemi di livello di P) e l'integrazione è per $Q \in [0, 2\pi]$, ne segue che $\oint pdq = 2\pi P$ su ciascuna curva di livello di H . Da qui deriva la validità generale (per $n = 1$) della formula (3.37). Dato che l'integrale che definisce P ha le dimensioni di un'azione, e Q è una coordinata angolare, le coordinate (P, Q) sono dette **coordinate azione-angolo**. La coordinata Q è ciclica per l'hamiltoniana H , dato che per costruzione si ha $H = H(P)$, e quindi le equazioni di Hamilton in coordinate azione-angolo diventano

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{dH}{dP} \\ \dot{P} = 0, \end{cases}$$

e poiché $\frac{dH}{dP}$, essendo funzione solo di P , è necessariamente costante sulle curve di moto, la soluzione generale è $Q(t; Q_0) = \omega(P_0)t + Q_0$ e $P(t; P_0) = P_0$, con $\omega(P) \equiv \frac{dH}{dP}$. Ciò che cambia, rispetto al caso particolare dell'oscillatore armonico, è che in generale ω è funzione di P , quindi la frequenza caratteristica del moto dipende dalle condizioni iniziali (mentre l'oscillatore armonico è isocrono).

Riassumendo, per ottenere le coordinate azione-angolo per un sistema unidimensionale autonomo si deve

1. trovare i valori c tali che gli insiemi di livello dell'hamiltoniana, $H = c$, siano curve chiuse;
2. parametrizzare il generico insieme di livello con una coordinata angolare Q ;
3. calcolare l'integrale (3.37), che fornisce P in funzione del valore di H ;
4. invertire tale relazione per trovare $H = H(P)$.

Nella pratica, non è detto che si riesca a scrivere l'integrale (3.37) in termini di funzioni elementari, e quindi invertirlo: in molti casi non si riesce ad integrare il sistema con questo metodo.

D'altro canto, se $n = 1$ le equazioni del moto per un sistema autonomo si possono sempre ricondurre a un'equazione di Weierstrass, nella sola coordinata q , e anche così si ricondurrebbe l'integrazione delle equazioni del moto al calcolo di un integrale e all'inversione della funzione risultante. Dunque non abbiamo trovato nulla di realmente utile? Vediamo se questo metodo si può generalizzare al caso di n gradi di libertà.

Supponiamo che per un sistema con n gradi di libertà siano noti n integrali primi (costanti del moto) indipendenti. Denotiamo questi n integrali primi con f_λ ; nel loro insieme, essi definiscono una mappa da T^*Q in \mathbb{R}^n . Dove gli integrali primi sono indipendenti, la matrice delle componenti dei loro differenziali ha rango n , quindi vale il teorema del valore regolare: gli insiemi di livello comuni degli integrali primi sono sottovarietà di T^*Q di dimensione $2n - n = n$. Essendo le f_λ costanti del moto, ogni traiettoria giacerà interamente su una di queste sottovarietà. Ognuna di queste sottovarietà, che denoteremo genericamente con Σ , è quindi invariante sotto il flusso del campo X_H .

Tutte le funzioni f_λ , per ipotesi, sono in involuzione con l'hamiltoniana H del sistema: $\{H, f_\lambda\} = 0$ (tipicamente, la funzione H stessa sarà una delle f_λ). Facciamo ora un'ipotesi aggiuntiva, e cioè che tutte le f_λ siano anche *in involuzione fra loro*: $\{f_\mu, f_\nu\} = 0, \forall \mu, \nu$. Questa ipotesi ha un significato geometrico abbastanza evidente: significa che le f_μ sono anche integrali primi per tutti i campi hamiltoniani X_{f_ν} , il che equivale a dire che *tutti i campi X_{f_ν} sono tangenti alle sottovarietà di livello Σ* . Oltre a questo, la condizione di involutività delle costanti del moto implica che *tutti i campi X_{f_ν} commutano fra loro*. Sulla base di queste proprietà, è stato possibile dimostrare (V.I. Arnol'd) che ogni sottovarietà Σ così definita è diffeomorfa al prodotto cartesiano di p rette e $n - p$ circonferenze, per qualche p ; in particolare, se Σ è compatta allora è necessariamente diffeomorfa al prodotto cartesiano di n circonferenze, ovvero al toro n -dimensionale T^n . Per questa ragione, gli insiemi di livello comuni degli n integrali primi, quando sono compatti, sono detti **tori di Arnold** o **tori invarianti**.

È quindi possibile, su ogni toro invariante Σ , definire un sistema di coordinate tale che ciascuna coordinata α^μ corrisponde alla coordinata angolare su uno dei cerchi il cui prodotto cartesiano forma il toro. Dato un generico punto $(\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n)$ su un toro n -dimensionale T^n , le n curve coordinate per tale punto,

$$\gamma_{(\mu)} : t \mapsto (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^\mu + t, \dots, \alpha_0^n)$$

hanno la proprietà di essere curve chiuse che non possono essere deformate l'una nell'altra: esse formano un insieme di generatori del *gruppo fondamentale* (o *primo gruppo di omotopia*) del toro.

Una volta parametrizzato un toro invariante con le coordinate angolari α^μ , si ottengono le coordinate di azione (che tradizionalmente si denotano con I_μ) calcolando gli integrali della forma di Liouville sulle curve $\gamma_{(\mu)}$:

$$I_\mu = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_{(\mu)}} p_\lambda dq^\lambda. \quad (3.38)$$

Questa formula fornisce la coordinata I_μ in funzione dei valori delle costanti del moto f_λ , che definiscono il toro su cui si è calcolato l'integrale. Invertendo le definizioni delle coordinate di azione si possono dunque (in linea di principio) esprimere tutte le f_λ , e in particolare l'hamiltoniana H , in funzione delle I_μ . A questo punto, nota $H = H(I_\mu)$, nelle coordinate azione-angolo le

equazioni del moto assumono la forma

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^\mu = \frac{dH}{dI_\mu} \\ \dot{I}_\mu = 0, \end{cases} \Rightarrow \alpha^\mu(t) = \omega^\mu t + \alpha_0^\mu, \quad \text{con} \quad \omega^\mu = \left. \frac{dH}{dI_\mu} \right|_{I_\mu = I_\mu(0)}$$

Queste equazioni di Hamilton descrivono curve in cui ciascun angolo sul toro dipende linearmente dal tempo. I moti sono quindi *eliche sul toro invariante*, che in alcuni casi possono essere chiuse (ciò avviene solo se tutte le *frequenze caratteristiche* ω^μ sono razionalmente dipendenti), o altrimenti riempire densamente il toro: poiché le frequenze caratteristiche dipendono dalle variabili di azione (che identificano il toro invariante), per un sistema hamiltoniano generico possiamo aspettarci che per *quasi tutti* i valori delle costanti del moto i rapporti fra le frequenze caratteristiche siano irrazionali. Fanno eccezione i casi in cui esistono altre costanti del moto oltre alle n in involuzione che definiscono il toro: in questo caso, infatti, ogni orbita deve giacere su una sottovarietà del toro invariante, e pertanto non può riempirlo densamente. Nel caso di potenziali centrali nel piano, questo avviene per il potenziale elastico $U(r) \propto r^2$ e per il potenziale newtoniano $U(r) \propto r^{-1}$.

Ricordiamo che tutto questo si riferisce al caso in cui gli insiemi di livello comuni delle costanti del moto sono compatti. Quando la varietà invariante definita dalle costanti del moto non è compatta, possiamo avere orbite non limitate, oppure moti a meta asintotica. Si pensi al caso del pendolo piano: sullo spazio delle fasi (diffeomorfo a un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$) le curve di livello dell'hamiltoniana sono tutte compatte e diffeomorfe alla circonferenza, ad eccezione di quella corrispondente alla *separatrice*, l'insieme di livello che passa per il punto di equilibrio instabile. La separatrice è l'unione del punto di equilibrio e di due segmenti (aperti): su questi il moto non è periodico, bensì a meta asintotica.

Quanto visto finora è riassunto dal **teorema di Arnold–Liouville**:

Proposizione 3 (Arnold–Liouville). *Per un sistema hamiltoniano autonomo con n gradi di libertà, che ammetta n costanti del moto indipendenti e in involuzione, la soluzione generale delle equazioni del moto si può ottenere mediante quadrature e inversione di funzioni.*

I sistemi hamiltoniani con questa proprietà, cioè l'esistenza di n costanti del moto indipendenti e in involuzione, sono detti **sistemi completamente integrabili**.

In particolare, tutti i sistemi hamiltoniani autonomi con un solo grado di libertà sono completamente integrabili (dato che è sufficiente conoscere un solo integrale primo, l'hamiltoniana); sono pure completamente integrabili tutti i sistemi in due gradi di libertà per cui si conosce un secondo integrale primo, dato che questo è necessariamente in involuzione con H . Quindi, per tutti questi sistemi sappiamo sempre risolvere esplicitamente le equazioni del moto? In realtà no, poiché non è detto che gli integrali che definiscono le variabili d'azione si riescano a calcolare in modo esplicito. Tuttavia, l'esistenza dei tori invarianti e delle coordinate azione-angolo è concettualmente molto importante.

Quanto abbiamo visto, ad esempio, permette di rispondere alla domanda: *dato un sistema non lineare di equazioni di Hamilton, è sempre possibile trovare un cambiamento di coordinate che linearizzi esattamente il sistema?*

Se un sistema è completamente integrabile, allora sappiamo che le equazioni di Hamilton, in variabili azione-angolo, definiscono un campo *costante* su ciascun toro invariante.

Un sistema lineare, d'altra parte, è descritto da un'hamiltoniana quadratica omogenea: questa può sempre essere diagonalizzata, per cui si possono disaccoppiare i gradi di libertà; l'hamiltoniana si decompone allora in una somma di n hamiltoniane quadratiche, ciascuna relativa a un diverso grado di libertà. Queste hamiltoniane sono tutte costanti del moto indipendenti e in involuzione, quindi il sistema è completamente integrabile. Le sottovarietà invarianti sono compatte se i potenziali sono tutti attrattivi, nel qual caso il sistema è il prodotto di n oscillatori armonici disaccoppiati. Si possono allora costruire variabili azione-angolo per ciascun grado di libertà, con la stessa trasformazione che abbiamo visto per il caso di un oscillatore unidimensionale. È facile, a questo punto, notare la peculiarità di un sistema di questo tipo: *le frequenze caratteristiche risultano costanti in tutto lo spazio delle fasi*, non dipendono dalle variabili di azione. È per questo motivo che la combinazione lineare di due moti qualsiasi è ancora una soluzione delle equazioni del moto: tutti i moti hanno le stesse frequenze (per ciascun grado di libertà).

Viceversa, per un generico sistema integrabile le frequenze caratteristiche *non sono costanti*, e dipendono invece dai valori delle costanti del moto (quindi sono costanti su ciascun toro invariante, ma cambiano da un toro all'altro): in questo caso il sistema è *intrinsecamente non lineare*. Si noti che in variabili azione-angolo *le coordinate angolari evolvono indipendentemente l'una dall'altra su ciascun toro*, ma l'hamiltoniana, che dipende da tutte le variabili d'azione, non è detto che risulti disaccoppiata (ossia somma di n hamiltoniane dipendenti da una sola variabile I_μ).

Un'ultima domanda che sorge in conclusione di questa discussione è la seguente: *che cosa caratterizza un sistema hamiltoniano che non è completamente integrabile?* È possibile che ogni sistema hamiltoniano ammetta sempre n costanti del moto indipendenti e in involuzione, anche se noi non riusciamo ad individuarle?

È la caratterizzazione geometrica dei sistemi completamente integrabili che ci permette di dare una risposta. In un sistema completamente integrabile, lo spazio delle fasi risulta fogliettato in sottovarietà invarianti n -dimensionali. Questo corrisponde all'esistenza di n integrali primi indipendenti. Se consideriamo un generico sistema hamiltoniano autonomo, sappiamo che esiste un fogliettamento invariante⁶ in insiemi di livello dell'hamiltoniana, che (genericamente) hanno dimensione $2n - 1$. Se esiste un secondo integrale primo indipendente, allora ogni orbita deve essere contenuta in una sottovarietà invariante di dimensione $(2n - 2)$; se esiste un terzo integrale primo le varietà invarianti avranno dimensione $(2n - 3)$, e così via. Se invece esiste almeno un'orbita che *riempie densamente* l'insieme di livello dell'energia, allora *non può esistere nessun'altra costante del moto globale*: infatti una funzione continua che sia costante su un insieme denso deve essere *identicamente costante* su tutta la sottovarietà, e quindi non potrebbe essere indipendente dall'hamiltoniana. Se esistono k costanti del moto indipendenti, ed esiste un'orbita del sistema che riempie densamente la corrispondente varietà invariante $(2n - k)$ -dimensionale, allora non possono esistere ulteriori costanti del moto indipendenti.

Quindi la completa integrabilità del sistema è una proprietà geometrica intrinseca, che non dipende dalla nostra capacità di trovare le costanti del moto: un sistema è completamente integrabile se e solo se esiste un fogliettamento in sottovarietà invarianti di dimensione n (e se inoltre tali varietà

⁶“fogliettamento invariante” per il sistema hamiltoniano significa che il flusso delle equazioni di Hamilton conserva il fogliettamento, dato che ogni orbita giace interamente in una sola foglia.

invarianti sono *sottovarietà lagrangiane*, ossia la forma symplettica si annulla su ogni coppia di vettori tangenti a una stessa foglia: questo è il corrispettivo geometrico dell'ipotesi che le costanti del moto siano tutte in involuzione fra loro).

Si noti che un sistema hamiltoniano può ammettere più di n costanti del moto: potrebbero esistere fino a $2n - 1$ costanti del moto indipendenti, ma al più n di queste possono essere tutte in involuzione fra loro.

Nel caso dei moti centrali in \mathbb{R}^3 , ad esempio, sono costanti del moto indipendenti l'hamiltoniana e le tre componenti (L_1, L_2, L_3) del momento angolare: queste ultime, però, non sono in involuzione fra loro: $\{L_1, L_2\} = L_3$. Per ottenere due costanti del moto in involuzione, oltre all'hamiltoniana, si considerano la norma euclidea del momento angolare, $J = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$, e una sola componente di quest'ultimo, ad esempio L_3 . Si noti che la meccanica quantistica (nel modello dell'atomo di idrogeno, ad esempio) si fa esattamente la stessa cosa: per individuare lo stato di un sistema attraverso un insieme di *numeri quantici* è necessario trovare un *insieme completo di osservabili che commutano fra loro*, e queste sono esattamente le costanti del moto in involuzione del corrispondente modello classico (che, quindi, deve essere completamente integrabile).

Il caso diametralmente opposto a quello dei sistemi completamente integrabili è quello dei sistemi in cui le orbite sono dense sugli insiemi di livello dell'energia totale: questa situazione, lungi dall'essere "patologica", è esattamente quella ipotizzata nell'ambito della *meccanica statistica classica*, che a (grazie ai lavori di Boltzmann e Gibbs) permette di dedurre le equazioni della termodinamica dalla meccanica hamiltoniana.

Nelle prossime sezioni illustreremo un ulteriore metodo per la soluzione delle equazioni di Hamilton, ottenuto generalizzando ulteriormente le trasformazioni di coordinate che si possono utilizzare: considereremo, infatti, trasformazioni dipendenti anche dal tempo. A questo scopo, partiremo dall'osservazione che anche le equazioni di Hamilton si possono derivare da un principio variazionale.

3.4 La forma di Poincaré-Cartan e il principio variazionale di Hamilton

Sappiamo che le equazioni di Eulero–Lagrange si possono derivare da un principio variazionale, basato sull'integrale di azione

$$A[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(q^\mu(t), \dot{q}^\mu(t), t) dt. \quad (3.39)$$

Definiamo più accuratamente gli oggetti che compaiono in quest'espressione. La 1-forma che figura nell'integrale è data dalla funzione $L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per il differenziale dt , quindi è una particolare 1-forma sulla varietà $TQ \times \mathbb{R}$.

Nella base naturale dei differenziali delle coordinate, una generica 1-forma su $TQ \times \mathbb{R}$ si decompone in questo modo :

$$\alpha_\mu(q^\lambda, u^\lambda, t) dq^\mu + \beta_\mu(q^\lambda, u^\lambda, t) du^\mu + \rho(q^\lambda, u^\lambda, t) dt;$$

per la 1-forma che stiamo considerando abbiamo $\alpha_\mu = \beta_\mu = 0$ e $\rho = L(q^\lambda, u^\lambda, t)$. Da notare che $L dt$ è necessariamente definita su $TQ \times \mathbb{R}$, anche nel caso di sistemi autonomi per i quali la lagrangiana L non dipende dal tempo.

La 1-forma $L dt$ può essere integrata su una curva nella varietà $TQ \times \mathbb{R}$ su cui essa stessa è definita. Data una curva sullo spazio delle configurazioni, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Q$, definiamo il suo prolungamento $j^1\gamma : \mathbb{R} \rightarrow TQ \times \mathbb{R}$ in questo modo:⁷ $j^1\gamma : t \mapsto (q^\mu(t), \dot{q}^\mu(t), t)$. Ciò che compare nell'integrale di azione non è altro che il *pull-back* sulla curva $j^1\gamma$ della 1-forma $L(q^\mu(t), u^\mu(t), t) dt$:

$$A[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} (j^1\gamma)^*(L dt). \quad (3.40)$$

Si è già visto che per variazioni a estremi fissi della curva γ l'integrale di azione è stazionario se e solo se γ è soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange. Ora possiamo chiederci se un principio variazionale equivalente può essere formulato sullo spazio delle fasi.

A questo scopo dobbiamo definire una 1-forma sullo “spazio delle fasi esteso” $T^*Q \times \mathbb{R}$, tale che il suo integrale sull'immagine di una curva $j^1\gamma$ sotto la mappa di Legendre (che si può estendere banalmente a una mappa $\tilde{\Phi}_L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow T^*Q \times \mathbb{R}$) coincida con l'azione $A[\gamma]$. Consideriamo la 1-forma θ_H su $T^*Q \times \mathbb{R}$ definita in questo modo:

$$\theta_H = p_\mu dq^\mu - H(q^\lambda, p_\lambda, t) dt; \quad (3.41)$$

l'immagine di una curva $j^1\gamma$ sotto la mappa di Legendre sarà

$$\tilde{\Phi}_L(j^1\gamma) : t \mapsto (q^\mu(t), p_\mu(t), t),$$

⁷tecnicamente, si deve considerare la varietà prodotto della retta dei tempi per lo spazio delle configurazioni, $\tilde{Q} = TQ \times \mathbb{R}$, come un fibrato sulla retta dei tempi; una curva di moto si può allora intendere come una sezione di tale fibrato. La varietà $TQ \times \mathbb{R}$, denotata anche con $J^1\tilde{Q}$, si chiama **fibrato degli 1-getti su \tilde{Q}** . Da questo deriva la notazione $j^1\gamma$. Per maggiori dettagli, cfr. cap.2 del testo di G. Sardanashvily, <https://arxiv.org/pdf/0908.1886v2.pdf>.

con

$$p_\mu(t) = \left. \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right|_{q^\lambda = q^\lambda(t), u^\lambda = \dot{q}^\lambda(t)}.$$

Pertanto

$$\tilde{\Phi}_L(j^1\gamma)^*\theta_H = p_\mu(t) \dot{q}^\mu(t) dt - H(q^\lambda(t), p_\lambda(t)) dt = (j^1\gamma)^*(L dt). \quad (3.42)$$

Definiamo allora in questo modo il funzionale d'azione nello spazio delle fasi esteso: per una generica curva $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow T^*Q \times \mathbb{R}$,

$$A[\tilde{\gamma}] = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^* \theta_H. \quad (3.43)$$

Imponiamo ora che per una variazione della curva $\tilde{\gamma}$,

$$\tilde{\gamma}_\varepsilon : t \mapsto (q^\lambda(t) + \varepsilon \delta q^\lambda(t), p_\lambda(t) + \varepsilon \delta p_\lambda(t), t), \quad \text{con} \quad \delta q^\lambda(t_0) = \delta q^\lambda(t_1) = 0, \quad (3.44)$$

il funzionale d'azione sia stazionario:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A[\tilde{\gamma}_\varepsilon] - A[\tilde{\gamma}]}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left(p_\mu \frac{d}{dt} \delta q^\mu + \dot{q}^\mu \delta p_\mu - \frac{\partial H}{\partial q^\mu} \delta q^\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \delta p_\mu \right) dt \\ &= [p_\mu \delta q^\mu]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{q}^\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \right) \delta p_\mu - \left(\dot{p}_\mu + \frac{\partial H}{\partial q^\mu} \right) \delta q^\mu \right] dt. \end{aligned}$$

Dato che le variazioni δq^λ e δp_λ sono arbitrarie, ma le δq^λ si annullano per ipotesi negli estremi di integrazione, la condizione di stazionarietà è equivalente alle equazioni di Hamilton. Abbiamo quindi dimostrato che *le curve estremali del funzionale (3.43) sono tutte e sole le soluzioni delle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana H che compare nella forma di Poincaré–Cartan (3.41)*. È importante (per il seguito) osservare che nella dimostrazione non abbiamo mai fatto uso del fatto che le coordinate (q^μ, p_μ) sono canoniche.

Ora vediamo come si trasforma la forma di Poincaré–Cartan quando cambiamo coordinate.

- Se consideriamo una *trasformazione naturale*, ossia una *trasformazione canonica puntuale*,

$$q^\mu = q^\mu(Q^\lambda), \quad p_\mu = \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\mu} P_\lambda,$$

sappiamo che $p_\mu dq^\mu = P_\mu dQ^\mu$, per cui avremo

$$\begin{aligned} p_\mu dq^\mu - H(q^\lambda, p_\lambda, t) dt &= P_\mu dQ^\mu - H'(Q^\lambda, P_\lambda, t) dt, \\ \text{con} \quad H'(Q^\lambda, P_\lambda, t) &= H(q^\nu(Q^\lambda), p_\nu(Q^\lambda, P_\lambda)); \end{aligned}$$

quindi la forma di Poincaré–Cartan resta invariata (con l'hamiltoniana H scritta in funzione delle nuove coordinate);

- Se consideriamo una *trasformazione canonica generica*, sappiamo che localmente $p_\mu dq^\mu = P_\mu dQ^\mu + dS$ per una qualche funzione S . Ne segue che la forma di Poincaré–Cartan non resta invariata, ma si ha

$$\begin{aligned} p_\mu dq^\mu - H(q^\lambda, p_\lambda, t) dt &= P_\mu dQ^\mu - H'(Q^\lambda, P_\lambda, t) dt + dS, \\ \text{con} \quad H'(Q^\lambda, P_\lambda, t) dt &= H(q^\nu(Q^\lambda, P_\lambda), p_\nu(Q^\lambda, P_\lambda)). \end{aligned}$$

Tuttavia, gli *estremali* del nuovo funzionale d'azione $\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^*(\theta_{H'} + dS)$ sono gli stessi di (3.43), in quanto l'integrale $\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^*(dS) = \int_{t_0}^{t_1} d(S \circ \tilde{\gamma}) = S(\tilde{\gamma}(t_1)) - S(\tilde{\gamma}(t_0))$ dipende solo dagli estremi di integrazione e quindi la sua variazione è nulla. Quindi, come già sapevamo dalla teoria delle trasformazioni canoniche su T^*Q , nelle nuove coordinate gli estremali sono sempre soluzioni delle equazioni di Hamilton, con la medesima hamiltoniana (scritta in funzione delle nuove coordinate).

3.4.1 Forma di Poincaré–Cartan nello spazio delle velocità

Quando abbiamo introdotto la 1-forma di Poincaré–Cartan su $T^*Q \times \mathbb{R}$ abbiamo verificato, con la formula (3.42), che il suo integrale sull'immagine (attraverso la mappa di Legendre) di una curva di moto in $TQ \times \mathbb{R}$ coincide con l'integrale d'azione (3.39). Sembrerebbe quindi di poterne dedurre che i due funzionali (3.39) e (3.43) siano uno l'immagine dell'altro. E invece no: abbiamo truccato le carte!

Un sospetto potrebbe essere già venuto a chi avesse notato questo dettaglio: nella variazione del funzionale (3.39) quella che si considera *non* è una generica deformazione della curva in $TQ \times \mathbb{R}$. Le variazioni $\delta q^\mu(t)$ e $\delta u^\mu(t)$, infatti, non sono indipendenti: deve essere $\delta u^\mu = \frac{d}{dt} \delta q^\mu$. Questo corrisponde al fatto che la curva che viene deformata è quella nello spazio delle configurazioni esteso $\tilde{Q} = Q \times \mathbb{R}$: la deformazione in $TQ \times \mathbb{R}$ è semplicemente il prolungamento tangente della curva deformata. Per contro, quando consideriamo il funzionale (3.43) assumiamo che le variazioni $\delta q^\mu(t)$ e $\delta p_\mu(t)$ siano indipendenti: quindi stiamo considerando una variazione del tutto arbitraria in $T^*Q \times \mathbb{R}$ (a parte la solita condizione che la variazione delle q^μ sia nulla agli estremi). In altri termini, la deformazione della curva in $TQ \times \mathbb{R}$ è definita da n funzioni indipendenti, mentre quella in $T^*Q \times \mathbb{R}$ è definita da $2n$ funzioni indipendenti. Come è possibile che le equazioni risultanti siano equivalenti?

Per risolvere l'enigma bisogna chiedersi: la 1-forma $L dt$ è o non è il *pull-back* della forma di Poincaré–Cartan su $TQ \times \mathbb{R}$ attraverso la mappa di Legendre?

Vediamo: ricordando che

$$(\tilde{\Phi}_L)^* p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \quad \text{e} \quad (\tilde{\Phi}_L)^* H = \mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} u^\mu - L$$

$$\text{si trova } (\tilde{\Phi}_L)^* \theta_H = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} dq^\mu - \mathcal{H} dt = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} (dq^\mu - u^\mu dt) + L dt.$$

Quindi il *pull-back* della forma di Poincaré–Cartan **non** è la 1-forma $L dt$, bensì la 1-forma

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} (dq^\mu - u^\mu dt) + L dt.$$

Quando θ_L viene valutata su una generica curva $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TQ \times \mathbb{R}$, si ha

$$\hat{\gamma}^* \theta_L = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} (\dot{q}^\mu - u^\mu) dt + L dt;$$

se però $\hat{\gamma} = j^1 \gamma$, con $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R}$, allora $u^\mu(t) = \dot{q}^\mu(t)$ e la differenza rispetto a $L dt$ si annulla. Di conseguenza, il funzionale d'azione

$$A[\hat{\gamma}] = \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}^* \theta_L, \tag{3.45}$$

che è a tutti gli effetti l'immagine su $TQ \times \mathbb{R}$ del funzionale (3.43), si riduce a (3.39) se assumiamo che la curva $\hat{\gamma}$ sia il prolungamento $j^1\gamma$ di una curva nello spazio delle configurazioni.

Ma allora, quali equazioni si ottengono imponendo la stazionarietà del funzionale (3.45), senza assumere alcun vincolo sulle $\delta u^\mu(t)$? Ecco qui:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A[\hat{\gamma}_\varepsilon] - A[\hat{\gamma}]}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} \delta u^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} \delta q^\nu \right) (\dot{q}^\mu - u^\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \left(\frac{d}{dt} \delta q^\mu - \delta u^\mu \right) + \frac{\partial L}{\partial u^\nu} \delta u^\nu + \frac{\partial L}{\partial q^\nu} \delta q^\nu \right] dt = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \delta q^\mu \right]_{t_0}^{t_1} + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} (\dot{q}^\mu - u^\mu) \delta u^\nu + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial q^\nu} (\dot{q}^\mu - u^\mu) + \frac{\partial L}{\partial q^\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} \right) \delta q^\nu \right] dt. \end{aligned}$$

Ora le δu^μ e le δq^μ sono indipendenti, quindi devono annullarsi separatamente i coefficienti delle due variazioni. Da $\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} (\dot{q}^\mu - u^\mu) = 0$, se la lagrangiana è regolare, si trova che l'unica soluzione è

$$\dot{q}^\mu = u^\mu;$$

Sostituendo questa equazione nel coefficiente di δq^ν si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} = 0.$$

Quindi abbiamo ottenuto le equazioni di Lagrange nella forma di *sistema del primo ordine sullo spazio delle velocità*.

Tutto torna: il principio variazionale basato su (3.39) è un principio variazionale del primo ordine su $Q \times \mathbb{R}$ – infatti, $(j^1\gamma)^*(L dt)$ dipende dalle \dot{q}^μ – e genera equazioni del secondo ordine su $Q \times \mathbb{R}$. I funzionali d'azione (3.45) e (3.43) sono del primo ordine su $TQ \times \mathbb{R}$ e su $T^*Q \times \mathbb{R}$, rispettivamente, ma sono singolari: dipendono *linearmente* dalle \dot{q}^μ e non dipendono affatto dalle \dot{u}^μ o dalle \dot{p}_μ . Per questa ragione, anziché generare equazioni del secondo ordine su $TQ \times \mathbb{R}$ e su $T^*Q \times \mathbb{R}$, generano equazioni del primo ordine.

In questo senso sembra che ci sia una perfetta simmetria fra la descrizione lagrangiana in $TQ \times \mathbb{R}$ e quella hamiltoniana in $T^*Q \times \mathbb{R}$.

In effetti le due formulazioni (nel caso regolare) sono del tutto equivalenti; tuttavia, la forma di Poincaré–Cartan nello spazio delle fasi “contiene” la 1-forma di Liouville, e da questo discende la possibilità di effettuare trasformazioni canoniche, che per costruzione alterano θ_H solo per l'aggiunta di una forma chiusa, indipendentemente da quale sia la funzione H . Invece, in θ_L l'elemento “strutturale” (ossia legato alla geometria dello spazio delle velocità e non alla particolare lagrangiana considerata) è la 1-forma $dq^\mu - u^\mu dt$. Questa si chiama **forma di contatto** su $TQ \times \mathbb{R}$: la sua proprietà è precisamente quella di annullarsi su tutte e sole le curve che sono prolungamenti $j^1\gamma$.

La forma di contatto è conservata dai cambiamenti di coordinate naturali su $TQ \times \mathbb{R}$: la loro controparte nello spazio delle fasi sono le trasformazioni canoniche *puntuali*, che lasciano invariata

la 1-forma di Liouville. Se volessimo chiederci, però, quale classe più generale di trasformazioni di coordinate possa modificare θ_L solo per l'aggiunta di una forma chiusa (in modo da non cambiare gli estremali dell'azione), ci troveremmo di fronte al fatto che in θ_L il coefficiente della forma di contatto dipende a sua volta da L . Quindi non potremo trovare trasformazioni che abbiano la proprietà cercata *indipendentemente da L* , diversamente da quanto possiamo fare nello spazio delle fasi.

3.5 Il metodo di Hamilton–Jacobi

Ora siamo in condizione di rispondere a questa domanda: *qual è la più generale trasformazione di coordinate della forma $q^\mu = q^\mu(Q^\lambda, P_\lambda, t)$, $p_\mu = p_\mu(Q^\lambda, P_\lambda, t)$ tale che le curve estremali di (3.43) nelle nuove coordinate (Q^μ, P_μ) siano ancora descritte da equazioni di Hamilton, eventualmente con una diversa hamiltoniana $K(Q^\mu, P_\mu, t)$?*

Abbiamo visto sopra che le soluzioni delle equazioni di Hamilton per un'hamiltoniana $K(Q^\mu, P_\mu)$ sono gli estremali dell'integrale $\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\gamma}^* \theta_K$. Questi, a loro volta, coincidono con gli estremali di (3.43) se $\theta_H = \theta_K + dS$. Se supponiamo $S = S(q^\mu, Q^\mu, t)$ e sviluppiamo il differenziale dS , la condizione diventa

$$p_\mu dq^\mu - H dt = P_\mu dQ^\mu - K dt + \frac{\partial S}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial S}{\partial Q^\mu} dQ^\mu + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

da cui

$$\begin{cases} p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ P_\mu = -\frac{\partial S}{\partial Q^\mu} \end{cases} \quad (3.46)$$

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.47)$$

Quindi, prendendo qualsiasi funzione $S(q^\mu, Q^\mu, t)$ tale che $\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial Q^\nu} \right| \neq 0$, per ogni t la trasformazione di coordinate $(q^\lambda, p_\lambda) \mapsto (Q^\lambda, P_\lambda)$ – implicitamente definita dalle (3.46) – è canonica. Se S non dipende da t , l'hamiltoniana (quale che sia) resta invariata, in accordo con quanto abbiamo già visto. Se invece S dipende da t , allora nelle coordinate (Q^λ, P_λ) la nuova hamiltoniana si ottiene sommando alla funzione H (espressa nelle nuove coordinate) la funzione $\frac{\partial S}{\partial t}$ (che non dipende da quale sia la particolare hamiltoniana considerata).

Vediamo ora come questo risultato si può sfruttare per sostituire l'hamiltoniana di partenza con una nuova funzione che generi equazioni più semplici da integrare.

Data una specifica hamiltoniana H , consideriamo la seguente equazione alle derivate parziali nella funzione incognita S :

$$H \left(q^\mu, \frac{\partial S}{\partial q^\mu}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.48)$$

Supponiamo di riuscire a trovare un **integrale completo**, ossia una soluzione S della (3.48) che dipenda dalle n coordinate q^μ e da altri n parametri α^μ , in modo tale che $\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial \alpha^\nu} \right| \neq 0$.

Identificando i parametri α^μ con metà delle nuove coordinate, $Q^\mu = \alpha^\mu$, dalle (3.46) è possibile ricavare un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo

$$\begin{cases} q^\mu = q^\mu(Q^\lambda, P_\lambda, t) \\ p_\mu = p_\mu(Q^\lambda, P_\lambda, t) \end{cases} \quad (3.49)$$

per cui le nuove coordinate Q^λ e P_λ sono costanti del moto per il sistema hamiltoniano definito da H . Infatti in queste coordinate lo stesso sistema risulta hamiltoniano con hamiltoniana $K \equiv 0$, e pertanto le equazioni del moto si riducono a $\dot{Q}^\lambda = 0$ e $\dot{P}_\lambda = 0$.

È importante notare che un integrale completo si può anche interpretare come funzione generatrice di seconda specie, identificando i parametri α^μ con le coordinate P_μ (in effetti, questa è la scelta più comune). In questo caso, invece del sistema (3.46) avremo

$$\begin{cases} p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ Q_\mu = \frac{\partial S}{\partial P_\mu} \end{cases} \quad \text{con la condizione} \quad \det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^\mu \partial P_\nu} \right| \neq 0 \quad (3.50)$$

mentre la relazione (3.47) non cambia, e quindi la (3.48) resta invariata. La ragione per cui uno stesso integrale completo si può interpretare indifferentemente come funzione di prima o di seconda specie è che la differenza fra i due casi si riduce allo scambio $Q^\mu \rightarrow P_\mu$ e $P_\mu \rightarrow -Q^\mu$, che come sappiamo è una trasformazione canonica.

L'equazione (3.48) è detta **equazione di Hamilton–Jacobi**.

Il metodo di Hamilton–Jacobi per trovare la curva di moto per un sistema hamiltoniano, con un qualsiasi dato iniziale $(q^\lambda(0), p_\lambda(0))$, si articola dunque in questi passi:

1. data l'hamiltoniana H , scrivere l'equazione di Hamilton–Jacobi (3.48) e trovare un integrale completo;
2. usando l'integrale completo generare il cambiamento di coordinate (3.49), dalle (q^λ, p_λ) alle (Q^λ, P_λ) e viceversa;
3. convertire il dato iniziale nelle nuove coordinate, $(q^\lambda(0), p_\lambda(0)) \mapsto (Q^\lambda(0), P_\lambda(0))$; dato che la soluzione nelle nuove coordinate è $Q^\lambda(t) = Q^\lambda(0)$, $P_\lambda(t) = P_\lambda(0)$, l'espressione della curva di moto cercata, nelle coordinate di origine, si otterrà semplicemente applicando la (3.49):

$$\begin{cases} q^\mu(t) = q^\mu(Q^\lambda(0), P_\lambda(0), t) \\ p_\mu(t) = p_\mu(Q^\lambda(0), P_\lambda(0), t) \end{cases}$$

*Osservazione: un integrale completo S dell'equazione di Hamilton–Jacobi è anche detto **funzione principale di Hamilton**. Dato che vale la relazione $\theta_K = \theta_H + dS$, ma in questo caso $\theta_K \equiv P_\mu dQ^\mu$ poiché $K \equiv 0$, otteniamo*

$$\theta_H = P_\mu dQ^\mu + dS$$

*Integrando il pull-back di θ_H su una qualsiasi curva in $T^*Q \times \mathbb{R}$ fra due punti dati, si ottiene il valore dell'azione; se però la curva è una soluzione delle equazioni di Hamilton, nelle coordinate*

(Q^μ, P_μ) la sua equazione è $\dot{Q}^\mu = 0, \dot{P}_\mu = 0$. Il pull-back della forma $P_\mu dQ^\mu$, ossia $P_\mu \dot{Q}^\mu dt$, è quindi nullo, e l'integrale d'azione coincide con l'integrale di dS . Questo è uguale alla differenza fra i valori della funzione S negli estremi di integrazione. Quindi **il valore della funzione principale di Hamilton S lungo una curva di moto** (soluzione delle equazioni di Hamilton) **coincide con l'integrale d'azione** (calcolato a partire da un punto fissato della curva).

3.5.1 Il metodo di Hamilton–Jacobi come ricerca di coordinate canoniche adatte al flusso

Dato un campo vettoriale $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ su una generica varietà M , in un intorno aperto di un qualsiasi punto di M in cui il campo vettoriale non si annulli, esiste sempre un sistema di coordinate y^j tale che in queste coordinate $X = \frac{\partial}{\partial y^1}$ in tutto l'aperto. In queste coordinate, quindi, il flusso del campo vettoriale dato diventa semplicemente

$$y^1(t) = t + y^1(0), \quad y^2(t) = y^2(0), \quad \dots \quad y^n(t) = y^n(0)$$

Questa proposizione è detta **teorema del flow-box**, o **del raddrizzamento del flusso**, o **delle coordinate adatte a un flusso**. La dimostrazione dell'esistenza delle coordinate adatte y^i (esistono in realtà infiniti sistemi di coordinate locali con questa proprietà) si basa su un lemma: *dato un campo vettoriale X e preso un punto arbitrario x^* in cui X non si annulla, è possibile trovare un intorno aperto \mathcal{U} di x^* e una sottovarietà $\Sigma \subset \mathcal{U}$ di codimensione 1 tale che ogni curva integrale di X ristretto a \mathcal{U} intersechi Σ una e una sola volta.*

Una sottovarietà Σ con questa proprietà è detta **sezione del flusso**. Trovata una tale sottovarietà Σ , si scelga arbitrariamente un sistema di $n - 1$ coordinate (y^2, \dots, y^n) su Σ . Si può allora ricoprire \mathcal{U} con un sistema di coordinate così definito: dato un punto $x \in \mathcal{U}$, la curva integrale di X basata in x interseca Σ in un unico punto \tilde{x} , $x = \varphi_t(\tilde{x})$ per un dato t ; a x si assegna dunque tale valore t come coordinata y^1 , e per le restanti $n - 1$ le coordinate (y^2, \dots, y^n) del punto \tilde{x} . Con questa scelta di coordinate, lungo il flusso di X si ha $\dot{y}^1 = 1$ e $\dot{y}^i = 0$ per $i \geq 2$. Quindi il campo X coincide con $\frac{\partial}{\partial y^1}$ e la curva integrale per un punto è semplicemente la curva coordinata associata a y^1 .

Anche se l'esistenza di coordinate adatte è concettualmente importante (ad esempio, implica che intorno a un punto non critico di un campo vettoriale esistono sempre $n - 1$ costanti del moto locali indipendenti), tuttavia non fornisce un metodo per trovare le curve integrali del flusso: infatti non si saprebbe come costruire un sistema di coordinate adatte senza aver già integrato, per l'appunto, le equazioni del flusso.

Nel caso di un campo hamiltoniano, noi abbiamo considerato il flusso su $T^*Q \times \mathbb{R}$ generato dal campo vettoriale hamiltoniano “esteso”

$$\tilde{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial H}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} + \frac{\partial}{\partial t}$$

le cui curve integrali sono le $\tilde{\gamma}$ che descrivono il moto del sistema nello spazio delle fasi esteso. Si vede facilmente che, per ogni t_0 , la copia di T^*Q definita in $T^*Q \times \mathbb{R}$ fissando $t = t_0$ è una sezione del flusso di \tilde{X}_H . Ma tutte queste copie di T^*Q , ovvero le fibre della proiezione $T^*Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sono varietà simplettiche, e il flusso di \tilde{X}_H – che manda la fibra $t = t_0$ nella fibra $t = t_1$ – è un flusso di simplettomorfismi.

Da questo punto di vista, il metodo di Hamilton–Jacobi consente di trovare un sistema di coordinate adattate al flusso di \tilde{X}_H che siano anche coordinate canoniche per ciascun t fissato, e che quindi possano essere generate per ciascun t da una funzione generatrice S , la funzione principale di Hamilton. In altri termini, l’evoluzione temporale del sistema, anziché essere espressa da un flusso di simplettomorfismi *attivi* che spostano il punto rappresentativo del sistema nello spazio delle fasi, risulta espressa da un flusso di simplettomorfismi *passivi*, ossia di cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo.

*Osservazione: in meccanica classica, i punti dello spazio della fasi rappresentano gli **stati** del sistema meccanico. Le funzioni reali sullo spazio delle fasi rappresentano le **grandezze misurabili**, dette anche **osservabili**. Il valore di un’osservabile dipende dallo stato del sistema. In meccanica classica, usiamo un insieme di $2n$ osservabili indipendenti, e cioè le coordinate (q^μ, p_μ) , per individuare lo stato del sistema; allo stesso tempo, ogni osservabile è funzionalmente dipendente dalle coordinate. Per questo motivo la distinzione concettuale fra stati e osservabili non appare immediatamente evidente. In meccanica quantistica, invece, l’insieme delle osservabili e l’insieme degli stati di un sistema fisico sono legati da una relazione molto più complessa, e la loro rappresentazione matematica è del tutto diversa: l’insieme delle osservabili è rappresentato dagli operatori lineari hermitiani su uno spazio di Hilbert (complesso) infinito-dimensionale, gli stati del sistema sono rappresentati da rette nel medesimo spazio di Hilbert. Dato che ogni risultato sperimentale consiste nella misura del valore di un’osservabile in un certo stato del sistema, il fatto che la distribuzione dei valori misurati dipenda dal tempo si può attribuire tanto all’evoluzione nel tempo dello stato del sistema, quanto all’evoluzione delle osservabili. Le due rappresentazioni sono equivalenti e connesse da una trasformazione unitaria: la rappresentazione in cui ad evolvere sono gli stati è la **rappresentazione di Schrödinger**, quella in cui ad evolvere sono le osservabili (e lo stato del sistema resta invariato nel tempo) è la **rappresentazione di Heisenberg**. Questo, tuttavia, non è una peculiarità della meccanica quantistica: in meccanica classica, il metodo di Hamilton–Jacobi si può interpretare come il passaggio da una rappresentazione in cui evolve lo stato del sistema – ossia il punto dello spazio delle fasi individuato dalle coordinate (q^μ, p_μ) – a una rappresentazione in cui lo stato del sistema – rappresentato dalle coordinate (Q^λ, P_λ) – rimane costante nel tempo, ma i valori delle osservabili cambiano nel tempo per composizione con la trasformazione (3.49).*

3.5.2 Esistenza di soluzioni per l’equazione di Hamilton–Jacobi

L’equazione di Hamilton–Jacobi è un’equazione alle derivate parziali del primo ordine, non lineare, e per essa non esiste una formula risolutiva generale. In realtà, non è nemmeno detto che ammetta soluzioni. Abbiamo visto, infatti, che se esiste un integrale completo allora esiste un sistema di coordinate interamente formato da costanti del moto: quindi il flusso in $T^*Q \times \mathbb{R}$ ammette $2n$ costanti del moto. In almeno una di queste deve essere possibile invertire la definizione, in modo da esplicitare il tempo t in funzione delle restanti coordinate; sostituendo il risultato nella definizione delle altre coordinate si possono quindi ottenere $2n - 1$ costanti del moto *indipendenti dal tempo*. Dato che le Q^λ e le P_λ sono coordinate canoniche, fra queste $2n$ coordinate se ne potranno sicuramente trovare n in involuzione fra loro (se la costante del moto “sacrificata” per eliminare la dipendenza dal tempo nelle $2n - 1$ rimanenti è una delle P_λ , basterà prendere le Q^λ , o viceversa).

Quindi, se per l'equazione di Hamilton–Jacobi esiste un integrale completo, allora il sistema è completamente integrabile. Per contro, per un sistema che non è completamente integrabile (perché il flusso in T^*Q non ammette sottovarietà invarianti di dimensione n) l'equazione di Hamilton–Jacobi non può avere una soluzione completa.

Osservazione: in realtà, ogni sistema hamiltoniano è completamente integrabile localmente, ossia in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto dello spazio delle fasi. Tuttavia, a questo corrisponde l'esistenza di integrali completi dell'equazione di Hamilton–Jacobi definiti solo in un intorno di un generico punto, che in generale non si possono estendere neppure a un intorno di un'intera curva di moto. Peraltro, come vedremo nella prossima sezione, la possibilità pratica di trovare un integrale completo si basa su una proprietà dell'hamiltoniana – la separabilità – che è in realtà più stringente della stessa integrabilità nel senso di Liouville.

3.5.3 Integrazione dell'equazione di Hamilton–Jacobi per separazione di variabili

Per l'equazione di Hamilton–Jacobi non esiste una formula generale risolutiva, però in determinati casi è possibile ricondurla ad equazioni integrabili mediante *separazione additiva*.

Una prima separazione di variabili si può fare in tutti i casi in cui l'hamiltoniana è indipendente dal tempo. In questo caso possiamo porre

$$S(q^\mu, Q^\mu, t) = W(q^\mu, Q^\mu) - E t;$$

sostituendo nella (3.48) otteniamo

$$H\left(q^\mu, \frac{\partial W}{\partial q^\mu}, t\right) = E$$

(dove si capisce che la costante E è stata indicata con questa lettera perché il suo valore coincide con l'energia totale del sistema).

Supponiamo ora, in prima battuta, che l'hamiltoniana H sia la somma di n funzioni, ciascuna dipendente solo da una coppia di coordinate coniugate:

$$H(q^\mu, p_\mu) = H_1(q^1, p_1) + H_2(q^2, p_2) + \dots + H_n(q^n, p_n) \quad (3.51)$$

in questo caso poniamo

$$W(q^\mu) = W_1(q^1) + W_2(q^2) + \dots + W_n(q^n)$$

(dove, per semplicità, omettiamo di indicare la dipendenza dagli n parametri Q^μ). L'equazione di Hamilton–Jacobi diventa allora

$$H_1\left(q^1, \frac{dW_1}{dq^1}\right) + H_2\left(q^2, \frac{dW_2}{dq^2}\right) + \dots + H_n\left(q^n, \frac{dW_n}{dq^n}\right) = E. \quad (3.52)$$

Poiché ciascuno degli addendi dipende da una variabile diversa, affinché la (3.52) possa essere soddisfatta per qualunque valore delle coordinate q^μ tutti gli addendi devono essere costanti, ossia per ciascun μ si deve avere

$$H_\mu\left(q^\mu, \frac{dW_\mu}{dq^\mu}\right) = h_\mu, \quad \text{con} \quad \sum h_\mu = E.$$

Ciascuna di queste equazioni è un'equazione ordinaria del primo ordine nella funzione incognita W_μ , che dipende dall'unica variabile q^μ ; quest'equazione è, in linea di principio, integrabile (nel caso in cui l'hamiltoniana è una funzione quadratica delle velocità, che è quello che incontriamo normalmente in Meccanica, si tratta di un'equazione di Weierstrass). La soluzione dipenderà dal valore della costante h_μ . In questo modo possiamo (teoricamente) ottenere la funzione generatrice S in funzione delle coordinate q^μ e degli $(n + 1)$ valori (E, h_1, \dots, h_n) . Questi ultimi però sono legati dalla relazione $\sum h_\mu = E$, quindi possiamo farli dipendere, in modo arbitrario, da n variabili Q^μ , ottenendo in questo modo un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

Beninteso, per risolvere effettivamente le equazioni ordinarie del primo ordine si devono trovare le primitive delle funzioni risultanti dal procedimento e invertire tali primitive, analogamente a quanto abbiamo già osservato per l'equazione di Weierstrass nello spazio delle velocità. Solo in alcuni casi, quindi, siamo effettivamente in grado di scrivere una soluzione in forma analitica.

La situazione in cui è possibile procedere in questo modo, tuttavia, è più generale rispetto alla condizione (3.51). Può succedere, infatti, che l'equazione di Hamilton-Jacobi risulti separata in seguito alla moltiplicazione per un'ulteriore funzione. Un'hamiltoniana che ha questa proprietà in un dato sistema di coordinate si dice *separabile*.

Per capire concretamente come funziona il procedimento, consideriamo il caso elementare di un punto materiale libero, non soggetto a forze. L'hamiltoniana è

$$H(x, y, z, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

ed è manifestamente separata: l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ponendo $S = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) - Et$ si trovano subito le equazioni

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{dx} = \sqrt{2m h_1} & \Rightarrow & W_1 = x\sqrt{2m h_1} + c_1 \\ \frac{dW_2}{dy} = \sqrt{2m h_2} & \Rightarrow & W_2 = y\sqrt{2m h_2} + c_2 \\ \frac{dW_3}{dz} = \sqrt{2m h_3} & \Rightarrow & W_3 = z\sqrt{2m h_3} + c_3, \end{cases} \quad (3.53)$$

con $E = h_1 + h_2 + h_3$. Le costanti di integrazione *additive* c_1 , c_2 e c_3 possono essere poste tutte uguali a zero, dato che aggiungere una costante additiva alla funzione generatrice S non avrebbe alcun effetto. Nel mettere le equazioni di Weierstrass in forma normale abbiamo preso i valori positivi delle radici quadrate: con scelte diverse ci sarebbe qualche segno diverso nei vari passaggi, ma il risultato finale sarebbe lo stesso.

Dobbiamo ora identificare tre nuove coordinate con altrettante funzioni delle costanti di integrazione (h_1, h_2, h_3) . Per motivi di interpretazione fisica che risulteranno evidenti a posteriori, supponiamo che la funzione generatrice sia di seconda specie, $S = S(q^\mu, P_\mu)$, e scegliamo di identificare le coordinate P_λ in questo modo: $P_\lambda = \sqrt{2m h_\lambda}$. L'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi è quindi

$$S = xP_1 + yP_2 + zP_3 - \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) t.$$

La trasformazione canonica risultante si ricava immediatamente da (3.50):

$$P_\mu = p_\mu, \quad Q_1 = x - \frac{P_1}{m}t, \quad Q_2 = y - \frac{P_2}{m}t, \quad Q_3 = z - \frac{P_3}{m}t. \quad (3.54)$$

e quindi, in questo caso, le nuove coordinate/costanti del moto (Q^μ, P_μ) coincidono esattamente con i valori iniziali $(q^\mu(0), p_\mu(0))$. Questa è, a posteriori, la motivazione delle relazioni $P_\lambda = \sqrt{2m h_\lambda}$ che abbiamo assunto: facendo una diversa scelta, le coordinate risultanti sarebbero state delle funzioni differenti delle coordinate iniziali (scelte diverse delle coordinate di arrivo sono connesse fra loro da trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo). La soluzione generale delle equazioni di Hamilton del sistema si ricava immediatamente dalla trasformazione (3.54).

Passiamo a un esempio meno banale: un punto materiale soggetto alla forza peso. Scegliamo le coordinate cartesiane ortonormali in modo che z sia la coordinata verticale, orientata verso l'alto. L'hamiltoniana è ancora separata (poniamo $mg = k$):

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + kz.$$

ponendo $S = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) - Et$ si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{dx} = \sqrt{2m h_1} & \Rightarrow W_1 = x\sqrt{2m h_1} \\ \frac{dW_2}{dy} = \sqrt{2m h_2} & \Rightarrow W_2 = y\sqrt{2m h_2} \\ \frac{dW_3}{dz} = \sqrt{2m(h_3 - kz)} & \Rightarrow W_3 = \frac{2(h_3 - kz)\sqrt{2m(h_3 - kz)} + 2h_3\sqrt{2m h_3}}{3k}; \end{cases} \quad (3.55)$$

questa volta la costante additiva nella funzione $W_3(z)$ è stata scelta in modo che nel limite $k \rightarrow 0$ si riottienga la soluzione trovata in precedenza. Poniamo ancora $P_\mu = \sqrt{2m h_\mu}$. Dobbiamo supporre $kz \leq h_3$, altrimenti la terza eq. di Weierstrass non ha soluzioni: in effetti $z = \frac{h_3}{k}$ (punto di inversione del moto), è la massima quota che può essere raggiunta dal punto materiale. L'integrale completo che risulta è

$$S = P_1x + P_2y + \frac{(P_3^2 - 2mkz)^{3/2} - P_3^3}{3mk} - \frac{t}{2m} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2).$$

Applicando le (3.50), per le variabili Q^1, Q^2, p_1 e p_2 troviamo gli stessi risultati dell'esempio precedente, mentre per p_3 e Q^3 troviamo

$$p_3 = \sqrt{P_3^2 - 2kmz}, \quad Q^3 = -\frac{P_3}{m}t + \frac{1}{mk}P_3^2 - \frac{P_3\sqrt{P_3^2 - 2kmz}}{mk}.$$

Invertendo queste relazioni si trova che l'evoluzione di p_3 è descritta da un polinomio di primo grado in t , mentre l'evoluzione di z è descritta da un polinomio di secondo grado (moto uniformemente accelerato). Le coordinate Q^3 e P_3 sono delle funzioni razionali (che si possono calcolare esplicitamente) dei valori iniziali $z(0)$ e $p_3(0)$. Per integrare le equazioni del moto del sistema, in questo caso, il metodo di Hamilton-Jacobi risulta molto più laborioso

rispetto all'integrazione diretta delle equazioni di Hamilton. Vediamo quindi un esempio in cui l'applicazione del metodo di Hamilton-Jacobi è effettivamente vantaggiosa.

Si consideri, in coordinate polari nel piano, un'hamiltoniana della forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\rho^2} \right) + U(\rho) + \frac{f(\theta)}{\rho^2}.$$

Nel caso in cui $f(\theta) \equiv 0$ il potenziale è centrale, θ è una coordinata ciclica e sappiamo bene come ricondurre il problema a un'equazione di Weierstrass. Con una generica funzione $f(\theta)$, invece, non ci sono coordinate cicliche e non è facile individuare una seconda costante del moto. Il sistema, infatti, non ammette simmetrie noetheriane nello spazio delle configurazioni⁸.

L'equazione di Hamilton-Jacobi per questa hamiltoniana,

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] + U(\rho) + \frac{f(\theta)}{\rho^2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

non è separata ma è *separabile*: ponendo $S = W_1(\rho) + W_2(\theta) - Et$, basta moltiplicare l'equazione per ρ^2 per ottenere

$$\left[\frac{\rho^2}{2m} \left(\frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 + \rho^2(U(\rho) - E) \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 + f(\theta) \right] = 0,$$

In questo modo il problema è ricondotto all'integrazione di un'equazione di Weierstrass per l'evoluzione della coordinata radiale, come già avveniva nel caso dei moti centrali, e di una seconda equazione di Weierstrass per la coordinata angolare:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 + f(\theta) = h_2$$

con h_2 costante. La possibilità di integrare analiticamente questa equazione dipende, come al solito, dalla specifica funzione $f(\theta)$ che compare nell'hamiltoniana; ma anche quando non siamo in grado di integrarla esplicitamente, sappiamo che per un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi si ha $\frac{dW_2}{d\theta} = \frac{\partial S}{\partial \theta} = p_2$. Quindi possiamo affermare che la funzione

$$F(\theta, p_2) = p_2^2 + 2m f(\theta)$$

è una costante del moto per il sistema dato. A posteriori, lo si può verificare calcolando la parentesi di Poisson $\{H, F\}$.

Nel caso in cui $f(\theta) = 0$, otteniamo semplicemente il quadrato della legge di conservazione del momento angolare. Viceversa, nel caso generale la costante del moto F (quadratica nel momento angolare) non si sarebbe potuta trovare applicando il teorema di Noether, ed è possibile individuarla solo sfruttando la separabilità di H in coordinate polari.

Enunciamo in conclusione un utile criterio per la separabilità di un'hamiltoniana per un sistema olonomo autonomo:

⁸Una simmetria, infatti, dovrebbe mantenere separatamente invariati sia l'energia cinetica sia il potenziale (perché?): ma le uniche trasformazioni che conservano l'energia cinetica, in questo caso, sono le rotazioni e le traslazioni nel piano, e il potenziale dato non è invariante per nessuna di queste.

Proposizione 4. Sia $H(q^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu - U(q^\lambda)$ in un dato sistema (q^μ, p_μ) di coordinate canoniche **ortogonali**, ossia tali che $g^{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$. L'hamiltoniana H è separabile nelle coordinate (q^μ, p_μ) se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni seguenti:

1. La corrispondente hamiltoniana in assenza di forze, $H(q^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$, è separabile in queste coordinate;
2. Il potenziale U ha la forma $U = g^{11}f_1(q^1) + g^{22}f_2(q^2) + \dots + g^{nn}f_n(q^n)$. (NB ciascun coefficiente della metrica, $g^{\mu\mu}$, può dipendere da tutte le coordinate q^λ)

3.5.4 Hamiltoniane indipendenti dal tempo e coordinate azione–angolo

Consideriamo un'hamiltoniana indipendente dal tempo, $H(q^\lambda, p_\lambda)$. Abbiamo visto che in questo caso il primo passaggio per una possibile integrazione dell'equazione di Hamilton–Jacobi consiste nella separazione della variabile t , ottenuta ponendo $S(q^\lambda, P_\lambda, t) = W(q^\lambda, P_\lambda) - E(P_\lambda)t$, il che trasforma la (3.48) in

$$H\left(q^\mu, \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right) = E(P_\lambda) \quad (3.56)$$

Quest'equazione si può anche interpretare come la condizione per cui la funzione W genera una trasformazione canonica, indipendente dal tempo, tale che nelle nuove coordinate l'hamiltoniana ha n coordinate cicliche (le Q^λ): infatti nelle nuove coordinate si ha $H'(Q^\lambda, P_\lambda) = E(P_\lambda)$. Come sappiamo, questa è una caratteristica distintiva delle *coordinate azione-angolo* (le coordinate P_λ sarebbero in questo caso le coordinate di azione).

La funzione W che compare nella (3.56) è anche detta **funzione caratteristica di Hamilton**.

Consideriamo ad esempio un oscillatore armonico con un solo grado di libertà, $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. L'equazione (3.56) è in questo caso

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2E(P) - \omega^2 q^2;$$

un integrale completo di quest'equazione è

$$W(q, P) = \frac{E(P)}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega q}{\sqrt{2E(P) - \omega^2 q^2}}\right) + \frac{q}{2}\sqrt{2E(P) - \omega^2 q^2}.$$

Se si pone, in particolare, $E(P) = \omega P$ e si scrive la trasformazione canonica generata da W si ottiene proprio la trasformazione in coordinate azione-angolo per l'oscillatore armonico (la Q è in questo caso la variabile angolare, ossia la coordinata sul toro invariante, mentre P è la coordinata di azione).

Osservazione: per l'equazione di Hamilton–Jacobi non sono garantite né l'esistenza né l'unicità dell'integrale completo. Nel caso dell'oscillatore armonico, ad esempio, abbiamo fissato del tutto arbitrariamente la funzione $E(P)$ per ottenere W . Che cosa avremmo trovato con una scelta diversa? I calcoli si sarebbero complicati, ma si sarebbero effettivamente potuti ottenere altri sistemi di coordinate in cui l'hamiltoniana risulta dipendente solo da P . Tuttavia queste non sarebbero state vere coordinate azione-angolo, in quanto la coordinata Q così ottenuta non avrebbe avuto la corretta periodicità.