

Parte 1: Meccanica lagrangiana

1.1	Moto di un punto materiale	1
1.2	I vincoli	4
1.3	Lo spazio delle configurazioni di un sistema olonomo	7
1.4	Moto di un punto materiale su una superficie liscia	11
1.5	Equazioni di Lagrange per sistemi olonomi	19
1.6	Equazioni di Lagrange e geometria	23
1.6.1	Esempio: lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido	23
1.6.2	L'accelerazione nello spazio delle configurazioni	24
1.7	Integrali primi	27
1.7.1	Integrali primi e fogliettamento invariante dello spazio delle velocità	28
1.7.2	Equazione di Weierstrass per sistemi con un grado di libertà	29
1.7.3	Equazione di Weierstrass per sistemi con due gradi di libertà: il caso dei moti centrali	32
1.7.4	Il teorema di Noether	35
1.8	Equilibrio, stabilità, piccole oscillazioni	40
1.9	Principio di azione stazionaria	48
1.10	Origini e applicazioni del calcolo variazionale	50
1.10.1	Moti geodetici e traiettorie geodetiche	53
1.10.2	Dimostrazione variazionale del teorema di Noether	56

1.1 Moto di un punto materiale

L'equazione fondamentale della meccanica newtoniana,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1.1.1)$$

lega l'accelerazione \mathbf{a} di un punto materiale (di massa m) alla forza \mathbf{F} che agisce sul punto stesso.¹ Usando questa legge possiamo affrontare i due problemi fondamentali della meccanica classica:

- **(problema diretto)** conoscendo le forze agenti sui punti di un sistema, determinarne il moto in funzione dello stato iniziale in cui il sistema è posto;
- **(problema inverso)** dall'osservazione dei moti di un sistema di punti materiali, determinare le forze agenti su di essi.

Nel seguito, discuteremo il primo dei due problemi. Supponiamo quindi che la forza agente sul punto materiale che consideriamo sia una funzione nota della posizione del punto stesso; a seconda dei sistemi fisici considerati potrebbe essere funzione anche della velocità, e/o variare nel tempo indipendentemente dal moto del punto.

Dunque, considerando la posizione del punto materiale rappresentata da tre coordinate cartesiane nello spazio fisico, (x, y, z) , e il suo moto rappresentato da altrettante funzioni del tempo $x(t), y(t), z(t)$, l'equazione (1.1.1) si traduce nel seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m} F_x(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t) \\ \ddot{y}(t) &= \frac{1}{m} F_y(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t) \\ \ddot{z}(t) &= \frac{1}{m} F_z(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t),\end{aligned} \quad (1.1.2)$$

¹Qui daremo per acquisito il concetto di **punto materiale** e il significato fisico dell'equazione (1.1.1). In realtà, non è immediatamente evidente se quest'ultima si debba considerare una legge fisica che lega tre grandezze *definite indipendentemente da essa*, oppure sia essa stessa la *definizione* del concetto di **massa** o del concetto di **forza** (l'**accelerazione**, da parte sua, è una grandezza cinematica che è ovvio definire indipendentemente da questa legge). In molti libri di testo di Fisica, la questione viene risolta supponendo che la *forza* sia definita separatamente come la grandezza che si misura con un *dinamometro*: quest'ultimo non misura un'accelerazione, bensì la *deformazione* di un corpo elastico. Seguendo questo approccio, ciò che l'equazione di Newton afferma è che l'accelerazione di un corpo è sempre proporzionale alla forza agente, e che la costante di proporzionalità identifica una proprietà fisica costante del punto materiale, la *massa*, che non dipende dal suo stato di moto.

Il punto debole di questo approccio è che un concetto fondamentale della meccanica classica, quello di *forza*, risulta definito mediante un fenomeno (la deformazione dei corpi elastici) che non è affatto un fenomeno fondamentale della meccanica (è, invece, un effetto delle interazioni elettromagnetiche che determinano la struttura cristallina dei solidi: la deformazione dipende linearmente dalla forza solo approssimativamente e solo per un intervallo di valori della forza).

Il fisico ed epistemologo Ernst Mach (1838–1916) ha mostrato che il concetto di *massa* può essere definito usando solo la proprietà (empiricamente osservabile) di *conservazione della quantità di moto totale* per sistemi isolati di punti materiali (anche interagenti fra loro), e pertanto *non dipende* dalla definizione di forza. Da questo punto di vista, più soddisfacente sul piano concettuale, la legge fondamentale della dinamica (1.1.1) *definisce* la forza come variazione istantanea della quantità di moto.

con la notazione, che useremo sempre, $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$.

Nel seguito scriveremo semplicemente x, y, z per indicare le funzioni incognite $x(t), y(t), z(t)$.² Inoltre, quando vorremo scrivere le equazioni in forma più compatta, useremo indici per distinguere le coordinate: denoteremo cioè le coordinate (x, y, z) con (x^1, x^2, x^3) , e lo stesso faremo per le componenti di velocità e accelerazione.³

Con queste notazioni, il sistema (1.1.2) assume la forma seguente:

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{m} F^i(x^j, \dot{x}^j, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3)$$

Si noti che ciascuna componente della forza può essere funzione di *tutte* le coordinate e velocità: come convenzione generale – sempre per rendere le formule più compatte – nell’indicare gli *argomenti* di una funzione f scriveremo sempre $f(x^j)$ per intendere $f(x^1, x^2, x^3)$, e così via. Nella (1.1.3), l’indice i che compare sia a destra che a sinistra dell’uguale “etichetta” l’equazione (una per ciascuna componente); l’indice j , invece – per questo abbiamo usato una lettera diversa – compare solo nell’argomento delle funzioni F^i e denota “collettivamente” tutti i valori 1, 2 e 3.

Supponendo che le tre funzioni $F^i(x^j, \dot{x}^j, t)$ siano note, per determinare il moto si tratta di trovare le soluzioni $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$ del sistema di equazioni differenziali ordinarie (1.1.3). Per questo non esiste una formula risolutiva generale; solo in casi particolarmente semplici è possibile scrivere la soluzione corrispondente a un generico dato iniziale, anche se sotto opportune condizioni (descritte dal teorema di Cauchy, che richiameremo nel seguito) sappiamo che la soluzione esiste ed è unica.

Denoteremo la soluzione generale corrispondente a una data posizione iniziale (x_0, y_0, z_0) e a una velocità iniziale con componenti $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ in questo modo:

$$x^i = x^i(t; x_0^j, \dot{x}_0^j).$$

Ad esempio, supponiamo che la forza agente sia una funzione lineare delle coordinate: questo avviene, in particolare, nel caso di una forza elastica attrattiva. In questo caso la forza è direttamente proporzionale alla distanza da un punto fisso (in cui, per facilitare i conti, porremo l’origine delle coordinate): le componenti della forza risultano essere

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx^1 \\ F_2 &= -kx^2 \\ F_3 &= -kx^3, \end{aligned}$$

dove k è la costante elastica ($k > 0$ per una forza attrattiva). Le equazioni del moto hanno quindi la forma

$$\ddot{x}^i = -\frac{k}{m} x^i. \quad (1.1.4)$$

La soluzione generale, in funzione del dato iniziale (x_0^i, \dot{x}_0^i) e di t , è allora

$$x^i(t; x_0^j, \dot{x}_0^j) = x_0^i \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0^i}{\omega} \sin(\omega t), \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.1.5)$$

²Questo può apparire un abuso di notazione. In realtà di “abusi” di questo tipo, in matematica, se ne fanno innumerevoli: sono perfettamente leciti finché – come in questo caso – non ne risulta nessuna ambiguità, giacché dalle formule è evidente quando la lettera x ha il significato di *coordinata* e quando ha il significato di *funzione di t* .

³La ragione per cui scegliamo di scrivere gli indici in alto (il che, apparentemente, potrebbe farli confondere con degli esponenti di potenze) sarà spiegata più avanti. Quando discuteremo esempi concreti anziché formule generali, tuttavia, spesso per comodità di lettura denoteremo le coordinate con le lettere (x, y, z) al modo usuale.

In questo caso (uno dei pochi) è stato possibile integrare direttamente le equazioni del moto (1.1.4), grazie al fatto che si tratta di equazioni differenziali lineari: in genere, invece, la soluzione non si trova immediatamente e questa è la ragione principale per cui sono stati sviluppati i metodi e la teoria che tratteremo.

In un sistema meccanico costituito da N punti materiali, questi potranno essere soggetti a **forze esterne** (come la forza peso), ossia a forze che agiscono separatamente su ciascuno dei punti materiali in funzione della sua posizione e velocità, e a **forze interne**, ossia forze che rappresentano la mutua interazione fra punti materiali appartenenti al sistema (come nel caso di una forza elastica che agisca fra due punti materiali, o della forza elettrica che si esercita fra due particelle dotate di carica elettrica) e che quindi dipendono dalle posizioni reciproche di tutti i punti che interagiscono.

La forma generale delle equazioni del moto sarà

$$\ddot{x}_A^i = \frac{1}{m_A} F_A^i(x_B^j, \dot{x}_B^j, t), \quad i = 1, \dots, 3, \quad A = 1, \dots, N, \quad (1.1.6)$$

dove denoteremo con x_A^i la i -esima coordinata dell' A -esimo punto materiale del sistema, con m_A la sua massa e con F_A^i la i -esima componente della forza agente su di esso (che a sua volta potrà essere la somma vettoriale di più forze, interne ed esterne). Avremo quindi in totale un sistema di $3N$ equazioni per altrettante funzioni incognite $x_A^i(t)$.

L'obiettivo della nostra trattazione è quello di riuscire, per un sistema di punti materiali (con le restrizioni che vedremo più oltre), a:

1. scrivere le equazioni del moto;
2. trovare la soluzione generale (in funzione dei dati iniziali), ovvero
3. anche quando non è possibile integrare direttamente le equazioni del moto (cioè in buona parte dei casi), ottenere delle informazioni e fare previsioni, quantitative o qualitative, esatte o approssimate, sul moto del sistema.

Proprio questi obiettivi sono stati oggetto di un'imponente attività di ricerca, iniziata nel XVII secolo e tuttora attiva, che ha prodotto buona parte della matematica che oggi conosciamo, in particolare nel campo dell'analisi matematica e in quello della geometria differenziale. Non a caso, i nomi dei matematici che hanno offerto contributi fondamentali in questa direzione (fra i quali Newton, Leibnitz, Bernoulli, d'Alembert, Eulero, Lagrange, Gauss, Cauchy, Dirichlet, Legendre, Laplace, Liouville, Poisson, Hamilton, Jacobi, Kowalewsky, Levi-Civita, Noether, Arnold e numerosi altri) sono gli stessi che ritroviamo come autori di molti dei teoremi fondamentali della matematica, tanto pura quanto applicata. Nel seguito cercheremo di illustrare, pur senza approfondire gli aspetti storici, alcuni passi fondamentali di questa ricerca.

1.2 I vincoli

I sistemi meccanici di cui dovremo occuparci possono essere soggetti a **vincoli**. Benché i vincoli, fisicamente, siano la manifestazione macroscopica di forze agenti a livello microscopico, tuttavia nella costruzione e nella descrizione di un sistema meccanico essi si presentano come *condizioni restrittive* a cui sono sottoposte le posizioni e le velocità dei punti materiali. Queste condizioni possono essere rappresentate da equazioni o da disequazioni. Ad esempio, il fatto che l' A -esimo punto materiale di un sistema sia vincolato a muoversi su una guida rettilinea coincidente con l'asse x^1 è rappresentato dalle due equazioni di vincolo $x_A^2 = 0$ e $x_A^3 = 0$. Un sistema in cui tutte le particelle⁴ debbano muoversi all'interno di un cubo di lato L allineato agli assi, invece, è rappresentato da $3N$ disequazioni della forma $0 \leq x_A^i \leq L$.

Un vincolo sulla posizione di una particella determina necessariamente un vincolo sulla sua velocità: ad esempio, dalla condizione $x_A^1 = 0$, che deve valere in ogni istante t , deriva necessariamente la condizione sulla velocità $\dot{x}_A^1 = 0$. Si potrebbero immaginare (e realizzare) anche sistemi meccanici in cui sono imposti vincoli sulle velocità che non derivano da vincoli sulle posizioni, ma nel seguito ci limiteremo ai casi in cui *non vi sono altri vincoli sulle velocità oltre a quelli che derivano dai vincoli sulle posizioni (vincoli posizionali)*. Inoltre, considereremo solo il caso di **vincoli bilaterali**, ossia vincoli rappresentabili con equazioni (non con disequazioni, che definiscono *vincoli unilaterali*).

Ad esempio, un **pendolo semplice** è un sistema costituito da un punto materiale, soggetto alla forza peso, che è vincolato a muoversi in un piano verticale, restando a distanza costante ℓ da un punto fisso dello stesso piano (punto di sospensione del pendolo). In questo caso avremo due equazioni di vincolo sulle coordinate x^i del punto materiale: scegliendo opportunamente il riferimento cartesiano (x, y, z, O) nello spazio tridimensionale (con l'origine O coincidente con il punto di sospensione e il piano xy coincidente con il piano del moto), le equazioni saranno

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Se scrivessimo solo la seconda delle (1.2.1), omettendo $z = 0$, definiremmo invece il sistema noto come **pendolo sferico**.

Un altro caso tipico è il **vincolo di rigidità**. Per due punti materiali, supponiamo che la loro distanza d non possa cambiare nel tempo: ciò corrisponde all'equazione di vincolo

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d^2 = 0 \quad (1.2.2)$$

(ricordiamo che gli indici in basso, in questa formula, etichettano le coordinate del primo o del secondo punto).

I vincoli imposti a un sistema possono anche dipendere dal tempo. Ad esempio, la condizione di un corpo appeso a una corda tesa che passa su una carrucola e che viene tirata progressivamente da un argano, può essere schematizzata in questo modo: detta $\ell(t)$ la funzione che descrive, al variare del tempo, la lunghezza del tratto di corda fra il corpo e la carrucola (se la corda viene tirata con velocità costante v si avrà $\ell(t) = \ell_0 - vt$, e così via), il vincolo sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell(t)^2 = 0, \quad (1.2.3)$$

ovvero l'equazione di vincolo dipenderà esplicitamente dal tempo. Un altro caso interessante è quello di un punto materiale vincolato a stare su un piano che ruota con velocità angolare uniforme ω intorno a una sua retta fissata: in questo caso, scegliendo come asse z la retta intorno a cui ruota il piano, potremo mettere il vincolo nella forma

$$x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) = 0. \quad (1.2.4)$$

⁴Ogni tanto, per ragioni puramente stilistiche, useremo il termine **particella** come sinonimo di *punto materiale*. Intendiamo naturalmente *particelle classiche*, ben distinte dalle *particelle quantistiche* che sono gli enti fisici fondamentali della meccanica quantistica.

È importante non fraintendere il concetto di **vincolo mobile**.

Generalizzando l'ultimo esempio, possiamo considerare un sistema di N punti materiali che sono vincolati a muoversi su un dato piano che si muove nello spazio con una legge assegnata, indipendentemente dal moto dei punti materiali: questo è un vincolo mobile.

Se invece in un sistema di N punti materiali imponiamo il vincolo che in ogni istante giacciono tutti sullo stesso piano, ma non imponiamo a priori la posizione di tale piano in funzione del tempo, allora questo è un vincolo fra le posizioni dei punti; le equazioni di vincolo non dipendono dal tempo e non si tratta di un vincolo mobile (le posizioni accessibili a ciascun punto dipendono infatti dalle posizioni degli altri punti, indipendentemente dall'istante di tempo).

Anche il vincolo di rigidità, che obbliga i punti materiali a restare a distanze costanti, è un vincolo fisso, non un vincolo mobile.

I vincoli posizionali di cui ci occuperemo avranno quindi la forma di un sistema di K equazioni nelle $3N$ coordinate dei punti materiali del sistema:

$$f_{\kappa}(x_A^i, t) = 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad A = 1, \dots, N, \quad \kappa = 1, \dots, K. \quad (1.2.5)$$

Se i vincoli non dipendono dal tempo, ossia sono descritti da equazioni della forma $f_{\kappa}(x_A^i) = 0$ valide per ogni t , sono detti vincoli **scleronomi**.

Dobbiamo ora chiarire il concetto di mutua **indipendenza** delle equazioni di vincolo. Illustriamo il problema con un paio di esempi.

Nel caso del pendolo semplice, abbiamo scritto due equazioni di vincolo (1.2.1). Avremmo potuto anche scrivere questo sistema, che è del tutto equivalente:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - \ell^2 = 0; \end{cases}$$

anche se geometricamente questo sistema descrive l'intersezione di un piano con un cilindro, mentre il sistema (1.2.1) descriveva l'intersezione di un piano con una sfera⁵, i punti che soddisfano questi due sistemi sono sempre quelli della medesima circonferenza di raggio ℓ posta nel piano $z = 0$. Se scrivessimo le tre condizioni

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \end{cases}$$

il vincolo sarebbe ancora esattamente lo stesso: rappresentarlo con tre equazioni invece che con due è manifestamente sovrabbondante.

In qualche caso, però, non è intuitivamente evidente quale sia il numero minimo di equazioni necessarie per rappresentare il vincolo. Consideriamo il vincolo di rigidità per un sistema di N punti materiali: per vincolare due punti a restare a distanza costante basta la singola equazione (1.2.2). Per imporre che le distanze reciproche fra tre punti restino costanti è necessario imporre tre equazioni della stessa forma, una per ciascuna coppia di punti. Se il sistema rigido è formato da quattro punti materiali, dobbiamo aggiungere altre tre equazioni di vincolo per garantire che tutte le distanze restino costanti, e così via: per l' n -esimo punto materiale che aggiungiamo al sistema, apparentemente, dovremmo aggiungere $(n - 1)$ condizioni per assicurare che restino costanti le distanze con tutti i punti già considerati. In realtà, una volta aggiunte per ogni nuovo punto tre equazioni che fissano le distanze da tre dei punti già considerati (purché non allineati fra loro), questo impone che restino costanti anche le distanze da tutti gli altri punti. Quindi, per imporre il vincolo di rigidità a un sistema di N punti, con $N > 2$, sono sufficienti $3(N - 2)$ equazioni: se ne scriviamo $\frac{N(N-1)}{2}$, cioè una per ogni coppia di punti distinti, una parte di queste saranno sovrabbondanti.

Per verificare matematicamente quante equazioni di vincolo sono effettivamente indipendenti, si può procedere in questo modo: supponendo che tutte le funzioni f_{κ} siano funzioni derivabili delle

⁵secondo l'uso comune in geometria differenziale, qui chiamiamo "sfera" e "cilindro" le superfici bidimensionali di una sfera e di un cilindro; faremo lo stesso quando ci riferiremo a ellissoidi, paraboloidi ecc.

$3N$ coordinate x_A^i , si scrive la **matrice jacobiana** formata dalle derivate parziali $\frac{\partial f_\kappa}{\partial x_A^i}$. Questa è una matrice rettangolare, $K \times 3N$; se il suo rango è uguale a K , allora le funzioni f_κ sono tutte indipendenti fra loro, e nessuna equazione di vincolo è sovrabbondante. Se invece il rango è minore di K , allora è possibile rappresentare lo stesso vincolo con un numero inferiore di equazioni, precisamente uguale al rango della matrice jacobiana in questione. Si noti che il rango della matrice dovrà sempre essere strettamente inferiore a $3N$: se fosse uguale a $3N$ le equazioni di vincolo definirebbero un insieme di punti isolati, e il sistema non potrebbe avere alcun moto. Nel seguito supporremo sempre che

1. le K funzioni f_κ che definiscono le equazioni di vincolo siano differenziabili in tutte le coordinate x_A^i (ed eventualmente nel tempo t);
2. il rango della matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial f_\kappa}{\partial x_A^i} \right\|$ sia uguale a K in *tutti* i punti che soddisfano le equazioni di vincolo.

Queste condizioni hanno un significato geometrico preciso, che chiariremo più oltre discutendo il *teorema del valore regolare*. I vincoli posizionali che soddisfano entrambe queste condizioni sono detti **vincoli olonomi**, e un sistema soggetto ad essi è detto **sistema olonomo**.

Proponiamo ancora un esempio che illustra questi concetti. Consideriamo un sistema formato da due punti materiali. Il primo punto è vincolato a muoversi su una guida rettilinea, che identifichiamo con l'asse x . Il secondo punto è vincolato a muoversi nel piano xy , restando a distanza ℓ costante dall'origine. Inoltre, la distanza fra i due punti materiali deve restare fissa e uguale a L . Questo sistema è detto **biella/manovella**, ed è equivalente (dal punto di vista cinematico) al sistema formato da un'asta di lunghezza ℓ (manovella) con un'estremità incernierata a un punto fisso e l'altra estremità (che deve muoversi su una circonferenza) incernierata a una seconda asta di lunghezza L (biella); l'altro estremo della biella scorre su una guida rettilinea allineata con il perno della manovella. Si tratta del sistema che permette di trasformare un moto rettilineo (alternato) in moto circolare, usato nei motori a pistoncini (a vapore o a scoppio). Le equazioni di vincolo sono cinque:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ (il primo punto scorre sull'asse } x) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ (il secondo punto si muove su una circonferenza posta nel piano } xy) \quad (1.2.6)$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2 = 0 \text{ (i due punti restano a distanza } L)$$

La matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial f_\kappa}{\partial x_A^i} \right\|$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 0 \\ 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 0 & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \end{pmatrix}$$

ed è genericamente di rango massimo (uguale a 5).

Se però fosse $\ell = L$, allora vi sarebbero due configurazioni, compatibili con i vincoli, in cui il primo punto si trova nell'origine e il secondo punto ha coordinate $(0, \pm\ell, 0)$. In quelle due configurazioni il rango della matrice jacobiana è 4 anziché 5: il sistema descritto, quindi, è olonomo solo se $\ell \neq L$. Domanda: dal punto di vista meccanico, che cosa succede di "anomalo" nel caso $\ell = L$?

1.3 Lo spazio delle configurazioni di un sistema olonomo

Consideriamo inizialmente un sistema olonomo con vincoli indipendenti dal tempo descritti dalle K equazioni

$$f_k(x_A^i) = 0 \quad (k = 1, \dots, K). \quad (1.3.1)$$

Chiamiamo **spazio delle configurazioni** del sistema l'insieme delle posizioni x_A^i compatibili con le equazioni di vincolo, che possiamo identificare con il luogo dei punti di \mathbb{R}^{3N} determinato dalle equazioni (1.3.1).

Sotto le condizioni di olonomia descritte nella sezione precedente, esso può essere descritto (almeno localmente) da una parametrizzazione

$$x_A^i = x_A^i(q^\lambda) \quad (\lambda = 1, \dots, n) \quad (1.3.2)$$

dove $n = 3N - K$ è il numero di **gradi di libertà** del sistema (nel seguito useremo sempre lettere greche per gli indici relativi allo spazio delle configurazioni, che variano da 1 a n). Le coordinate q^λ sono dette **coordinate lagrangiane** del sistema.

Le funzioni che descrivono la parametrizzazione devono soddisfare le seguenti condizioni:

1. le equazioni di vincolo sono identicamente soddisfatte: $f_k(x_A^i(q^\lambda)) \equiv 0$;
2. la matrice delle derivate parziali $\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda}$ ha rango massimo, cioè n .

Osservazione – In generale una parametrizzazione è solo **locale**: è definita su un dominio (più precisamente, su un aperto) di \mathbb{R}^n e la sua immagine non è l'intero spazio delle configurazioni, ma solo una parte. Per descrivere tutto lo spazio delle configurazioni, generalmente, servono più parametrizzazioni: ad esempio, lo spazio delle configurazioni di un pendolo sferico può essere parametrizzato da due angoli (con l'usuale parametrizzazione di una superficie sferica), ma nei due “poli” queste coordinate non sono definite, quindi serve una seconda parametrizzazione per descrivere il sistema nell'intorno di quei due punti. Questo aspetto sarà approfondito più avanti.

Scelta una parametrizzazione, ogni possibile moto del sistema sarà rappresentato da una *curva di moto*⁶ nello spazio delle configurazioni,

$$\gamma : t \mapsto q^\lambda(t); \quad (1.3.3)$$

ogni curva di questa forma, composta con la parametrizzazione (1.3.2), descrive un moto automaticamente compatibile con il vincolo. Detti c_1 , c_2 ed c_3 i tre versori della terna cartesiana di riferimento associata alle coordinate x^i , la velocità dell' A -esimo punto materiale del sistema risulterà

$$\mathbf{v}_A(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_A^i \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \mathbf{c}_i. \quad (1.3.4)$$

⁶Useremo sempre il termine **curva** per indicare una *funzione* da \mathbb{R} (o da un intervallo di valori reali) nello spazio considerato: chiameremo invece **traiettoria** l'immagine di questa funzione (ossia l'insieme dei punti attraversati dalla curva, senza riferimento alla legge di percorrenza).

Osservazione – Da qui in avanti, per semplificare la scrittura delle formule adottiamo la **convenzione di Einstein**: ogni volta che una formula conterrà una sommatoria su una coppia di indici ripetuti, il segno di sommatoria sarà sottinteso. La formula qui sopra, ad esempio, si scriverà più semplicemente

$$\mathbf{v}_A(t) = \dot{x}_A^i \mathbf{c}_i = \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \mathbf{c}_i.$$

Preciseremo meglio nel seguito questa convenzione (che richiede anche che gli indici sommati siano sempre uno in basso e uno in alto).

Quanto detto finora vale se le equazioni di vincolo sono indipendenti dal tempo (sistema **scleronomo**). Se invece le equazioni di vincolo dipendono dal tempo,

$$f_k(x_A^i, t) = 0, \quad (1.3.5)$$

allora la parametrizzazione dipenderà a sua volta dalla variabile tempo:

$$x_A^i = x_A^i(q^\lambda, t). \quad (1.3.6)$$

Anche in questo caso ogni moto del sistema sarà descritto da una curva (1.3.3), ma per la velocità di ciascun punto avremo

$$\mathbf{v}_A(t) = \dot{x}_A^i \mathbf{c}_i = \left(\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda + \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \right) \mathbf{c}_i. \quad (1.3.7)$$

Notiamo che la velocità di ciascun punto materiale risulta decomposta in due parti:

- il vettore $\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \mathbf{c}_i$ rappresenta la velocità del moto del punto *rispetto al vincolo*;
- il vettore $\frac{\partial x_A^i}{\partial t} \mathbf{c}_i$ è il termine aggiuntivo *dovuto al moto del vincolo*.

Infatti, se il sistema non si muove rispetto al vincolo, e quindi le sue coordinate lagrangiane restano costanti ($\dot{q}^\lambda = 0$), la velocità di ciascun punto materiale nello spazio risulta uguale a $\frac{\partial x_A^i}{\partial t} \mathbf{c}_i$.

Riassumendo, la curva di moto (1.3.3) di un singolo **punto rappresentativo** nello spazio delle configurazioni descrive i moti di *tutti* i punti materiali del sistema, e la velocità del punto rappresentativo, espressa dalle n componenti \dot{q}^λ , determina in ciascun istante tutte le N velocità \mathbf{v}_A dei singoli punti materiali : questo vale tanto nel caso scleronomo quanto nel caso di vincoli mobili.

Per fissare le idee, consideriamo alcuni casi di sistemi olonomi e descriviamo lo spazio delle configurazioni di ciascun sistema. Se il sistema è formato da un solo punto materiale ($N = 1$), allora può esserci una sola equazione di vincolo ($K = 1$), e in questo caso lo spazio delle configurazioni non è altro che la superficie in \mathbb{R}^3 descritta dall'equazione di vincolo; oppure possono esserci due equazioni di vincolo indipendenti ($K = 2$), e allora lo spazio delle configurazioni si riduce alla curva in \mathbb{R}^3 individuata dalle equazioni di vincolo. Nel primo caso si ha un sistema con due gradi di libertà, e occorreranno due coordinate lagrangiane per individuare una configurazione; nel secondo caso si ha un solo grado di libertà, e il sistema sarà parametrizzato da una sola coordinata lagrangiana.

Nel caso di un pendolo sferico l'equazione di vincolo è una sola: $x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0$. Questa sfera può essere parametrizzata con due angoli (la longitudine θ e la colatitudine ϕ):

$$\begin{cases} x = \ell \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = \ell \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \ell \cos(\phi), \end{cases} \quad (1.3.8)$$

ma si possono anche utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate x e y della proiezione del punto sul piano equatoriale:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \pm \sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

La (1.3.9) descrive in realtà due parametrizzazioni distinte, una per l'emisfero superiore ($z > 0$) e l'altra (col segno meno davanti alla radice) per l'emisfero inferiore; nessuna delle due ricopre l'equatore, dato che per $z = 0$ la matrice jacobiana diventa di rango 1 anziché 2.

Una variante (sempre per ciascun emisfero separatamente) consiste nel prendere sul piano equatoriale coordinate polari (r, θ) anziché coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \pm \sqrt{\ell^2 - r^2}. \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Un'altra parametrizzazione per la sfera è la proiezione stereografica, con coordinate X e Y :

$$\begin{cases} x = \frac{2\ell X}{1 + X^2 + Y^2} \\ y = \frac{2\ell Y}{1 + X^2 + Y^2} \\ z = \frac{\ell(X^2 + Y^2 - 1)}{1 + X^2 + Y^2}; \end{cases} \quad (1.3.11)$$

questa è raramente usata in problemi di meccanica, ma è concettualmente importante perché ricopre l'intera sfera, ad eccezione di un solo punto; inoltre la si può generalizzare (con la medesima proprietà) per sfere in dimensione qualunque.

Ogni spazio delle configurazioni ammette infinite parametrizzazioni possibili: benché dal punto di vista matematico siano tutte corrette, per studiare un sistema meccanico occorre scegliere oculatamente la parametrizzazione, come vedremo. Ad esempio, per studiare le oscillazioni del pendolo sferico attorno al punto $(0, 0, -\ell)$ occorre linearizzare le equazioni intorno a quel punto; ma la parametrizzazione (1.3.8) non è definita in quel punto, e lo stesso vale anche per la (1.3.10). Quindi queste due parametrizzazioni sono inadatte a quello scopo, mentre si potrà usare la (1.3.9).

Nel caso di un pendolo semplice (piano) le equazioni di vincolo indipendenti (1.2.1) sono due e lo spazio delle configurazioni è una circonferenza. La parametrizzazione di uso più comune, in questo caso, è

$$\begin{cases} x = \ell \sin(\theta) \\ y = -\ell \cos(\theta) \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.3.12)$$

(questa volta è l'asse y ad essere verticale: la coordinata lagrangiana è l'angolo θ a partire dalla posizione più bassa).

Vediamo ora qualche esempio di spazi delle configurazioni per sistemi di due punti materiali.

Consideriamo un sistema in cui entrambi i punti sono vincolati a restare su un piano; inoltre, il primo punto è vincolato a muoversi a distanza costante ℓ da un punto fisso O del piano, mentre il secondo punto è vincolato a restare a distanza L dal primo punto: questo sistema è detto **bipendolo**. Ponendo l'origine in O e l'asse z perpendicolare al piano del vincolo, le equazioni di vincolo sono:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ (x_1)^2 + (y_1)^2 - \ell^2 = 0 \\ z_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2 = 0; \end{cases} \quad (1.3.13)$$

il sistema ha dunque $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ gradi di libertà. Il primo punto può muoversi su un cerchio; anche il secondo punto può muoversi su un cerchio (centrato nel primo punto, anziché in un punto fisso). Si può quindi identificare la posizione dei due punti materiali con un elemento del prodotto cartesiano di due cerchi, ossia del toro bidimensionale $T^2 \equiv S^1 \times S^1$. Per parametrizzare il sistema, si possono scegliere come coordinate lagrangiane l'angolo θ^1 che il primo pendolo fa con la retta verticale passante per O (la identifichiamo con l'asse y), contato dalla posizione più bassa, e l'angolo θ^2 che il secondo pendolo fa con la retta verticale passante per il primo punto, sempre a partire dalla posizione più bassa:

$$\begin{cases} x_1 = \ell \sin(\theta^1) \\ y_1 = -\ell \cos(\theta^1) \\ z_1 = 0 \\ x_2 = L \sin(\theta^2) + \ell \sin(\theta^1) \\ y_2 = -L \cos(\theta^2) - \ell \cos(\theta^1) \\ z_2 = 0. \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Come ultimo esempio di questa sezione, consideriamo il sistema biella/manovella già descritto (1.2.6). Le equazioni di vincolo sono cinque, quindi il sistema ha un solo grado di libertà. Nelle concrete applicazioni meccaniche si ha $\ell < L$: in questo caso, il secondo punto (la manovella) si può muovere sull'intera circonferenza di centro O e raggio ℓ . Data una posizione del secondo punto, il primo punto può trovarsi in due posizioni distinte sull'asse x : una con $x > 0$ e l'altra con $x < 0$ (le due posizioni sono simmetriche rispetto alla proiezione del primo punto sull'asse x). Poiché $L > \ell$, si vede facilmente che nessun moto continuo può connettere una configurazione con la biella a destra di O con una con la biella a sinistra di O : il primo punto materiale, una volta posto su una delle due semirette (positiva o negativa), resterà sempre su quella. Pertanto, lo spazio delle configurazioni di questo sistema è dato dall'unione di due circonferenze disgiunte: ogni moto compatibile con i vincoli avviene interamente su una sola delle due circonferenze. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ corrispondente alla posizione del secondo punto, contato a partire dalla semiretta x positiva, si ha

$$\begin{cases} x_1 = \ell \cos(\theta) \pm \sqrt{L^2 - \ell^2 \sin^2(\theta)} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \\ x_2 = \ell \cos(\theta) \\ y_2 = \ell \sin(\theta) \\ z_2 = 0, \end{cases} \quad (1.3.15)$$

dove il segno più o meno nell'espressione di x_1 indica in quale delle due componenti disgiunte dello spazio delle configurazioni si trova il sistema.

Quando su uno stesso spazio delle configurazioni consideriamo due diverse parametrizzazioni, rispettivamente con coordinate q^μ e Q^μ , che si sovrappongono, deve esistere una funzione, definita su un aperto di \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{R}^n , che descrive la relazione fra i due sistemi di coordinate: $Q^\mu = Q^\mu(q^\lambda)$. Tale funzione è detta **funzione di transizione** o, più comunemente, **cambiamento di coordinate**. Per ogni cambiamento di coordinate, la matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\mu} \right\|$ deve avere ovunque rango massimo, ossia avere determinante non nullo, e quindi essere invertibile. Per il *teorema della funzione inversa*, la matrice inversa è a sua volta la jacobiana della trasformazione di coordinate inversa, $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$.

Ora dobbiamo costruire le equazioni del moto per il punto rappresentativo di un sistema olonomo nello spazio delle configurazioni. Il problema che dovremo risolvere non è solo quello di esprimere le grandezze cinematiche (velocità e accelerazione) usando la parametrizzazione in coordinate lagrangiane: quando un sistema è soggetto a vincoli, l'equazione della dinamica (1.1.1) *non è più valida*. Ricordiamo che nel modello che stiamo considerando i vincoli non sono determinati da forze note, ma solo da equazioni che limitano le configurazioni accessibili. Le forze note, da

parte loro, in generale produrrebbero accelerazioni *non compatibili con le equazioni di vincolo* (si pensi per esempio a un pendolo). Affinché il moto dei punti materiali risulti compatibile con i vincoli, occorre dunque introdurre le **reazioni vincolari** Φ , che sono definite proprio dalla differenza $\Phi = m\mathbf{a} - \mathbf{F}$. Di conseguenza l'equazione della dinamica diventa

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \Phi \quad (1.3.16)$$

dove abbiamo distinto le *forze attive* dalle reazioni vincolari. Il problema è che queste ultime non sono funzioni della posizione, anzi *non possono essere determinate a priori* se non si introducono ulteriori ipotesi sulle caratteristiche dei vincoli presenti (caratteristiche che *non sono* implicate dalle equazioni di vincolo). Il primo problema che si pone nello studio dei sistemi vincolati, quindi, è quello di derivare un sistema di equazioni differenziali dall'equazione (1.3.16).

Nella prossima sezione ci dedicheremo a un caso particolare: il moto di un singolo punto materiale su una superficie immersa in \mathbb{R}^3 . Questo ci permetterà di associare più facilmente un significato geometrico agli oggetti che costruiremo. Successivamente affronteremo il caso generale.

1.4 Moto di un punto materiale su una superficie liscia

Come abbiamo già osservato, se consideriamo un singolo punto materiale soggetto al vincolo scleronomo $f(x^i) = 0$, lo spazio delle configurazioni coincide con la superficie definita dall'equazione di vincolo, e il punto rappresentativo del sistema coincide con il punto materiale stesso.

La superficie è immersa nello spazio fisico, che rappresentiamo come uno **spazio affine euclideo**. Infatti, ad ogni **spostamento** nello spazio, cioè ad ogni coppia ordinata di punti P e P' possiamo associare un vettore di \mathbb{R}^3 , che denotiamo con l'espressione $P' - P$; di questi vettori possiamo anche calcolare il modulo (che rappresenta la distanza fra i punti P e P'), quindi supponiamo lo spazio \mathbb{R}^3 dotato di un prodotto scalare euclideo.

Un **riferimento cartesiano** nello spazio affine consiste nella scelta di un punto O e di una base di \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$. In questo modo, a ogni punto P dello spazio fisico associamo un **vettore posizione** che coincide con lo spostamento $P - O$, e decomponiamo tale vettore rispetto alla base \mathbf{c}_i , ottenendo come componenti le tre coordinate cartesiane x^i del punto.

Se consideriamo un moto nello spazio fisico, $P = P(t)$, e la sua rappresentazione in coordinate cartesiane $x^i = x^i(t)$, la **velocità istantanea** all'istante t è data dal limite del vettore spostamento $P(t+h) - P(t)$, diviso per h , quando $h \rightarrow 0$. La velocità \mathbf{v} di un moto nell'istante t è quindi un elemento di una copia dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con origine nel punto $P(t)$; usando la terna di riferimento \mathbf{c}_i , otteniamo l'espressione che abbiamo già usato nelle sezioni precedenti, $\mathbf{v} = \dot{x}^i \mathbf{c}_i$. Se la terna di riferimento è **ortonormale**, il modulo di \mathbf{v} (ossia la **velocità scalare** v) sarà dato da $v = \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}$.

Per un punto vincolato a muoversi sulla superficie, scelta una parametrizzazione $x^i = x^i(q^\lambda)$ avremo che le componenti della velocità si ottegono, come si è già visto, dalla formula

$$\mathbf{v} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \mathbf{c}_i. \quad (1.4.1)$$

in questo caso, però, possiamo costruire nel punto $P(t)$ una coppia di vettori, $\{e_1, e_2\}$, definiti da

$$e_\lambda = \frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda} c_i \quad (1.4.2)$$

La (1.4.1) diventa allora

$$v = \dot{q}^\lambda e_\lambda \quad (1.4.3)$$

I vettori e_λ dipendono dal punto P e dalla parametrizzazione scelta; poiché per ipotesi la matrice $\frac{\partial x^i}{\partial q^\lambda}$ deve avere rango 2, essi sono linearmente indipendenti. La (1.4.3) ci dice che tutte le velocità possibili nel punto P , *corrispondenti a moti sulla superficie*, sono combinazioni lineari di questi due vettori, e pertanto appartengono ad un sottospazio bidimensionale. Tale sottospazio è detto **piano tangente** alla superficie nel punto P .

Poiché i vettori e_λ dipendono dalla parametrizzazione scelta, ci si può chiedere se da questa dipende anche il piano tangente. Se si considera una seconda parametrizzazione con coordinate Q^μ , e si definisce la corrispondente coppia di vettori $E_\lambda = \frac{\partial x^i}{\partial Q^\lambda} c_i$ tali che $v = \dot{Q}^\lambda E_\lambda$, per la proprietà di derivazione di una funzione composta si trovano subito le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^\mu &= \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \\ e_\lambda &= \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\lambda} E_\mu \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

dunque la jacobiana del cambiamento di coordinate connette linearmente le **componenti lagrangiane della velocità** relative alle due diverse parametrizzazioni, nonché (in senso inverso) le due coppie di vettori e_λ e E_μ . Questo significa che le due coppie di vettori appartengono allo stesso piano: dunque *il piano tangente alla superficie non dipende dalla parametrizzazione scelta*.

Un generico *vettore tangente* alla superficie in un punto si potrà quindi scrivere come combinazione lineare dei vettori e_μ :

$$u = u^\lambda e_\lambda.$$

La base del piano tangente in P formata dai vettori e_μ è detta **base naturale** associata alle coordinate q^μ . La relazione con il sistema di coordinate può essere utilmente compresa nel modo seguente. Per il sistema di coordinate considerato, definiamo in un generico punto P della superficie le due curve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: t \mapsto (q_0^1 + t, q_0^2) \\ \gamma_2 &: t \mapsto (q_0^1, q_0^2 + t) \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

dette **curve coordinate** passanti per il punto (q_0^1, q_0^2) . Le curve coordinate per tutti i punti della superficie formano il **reticolo coordinato** associato alla parametrizzazione.

Ad esempio, prendendo la parametrizzazione (1.3.8) per la sfera le curve coordinate sono, rispettivamente, i paralleli e i meridiani. Se si considera un piano parametrizzato in coordinate polari, le curve coordinate sono rette radiali e circonferenze concentriche; se invece si usano coordinate cartesiane, le curve coordinate sono rette parallele agli assi coordinati.

Si vede subito che il vettore velocità in $t = 0$ (cioè in P) per la curva γ_1 ha componenti $(1, 0)$, mentre per γ_2 ha componenti $(0, 1)$. Questi due vettori velocità sono quindi, rispettivamente, proprio e_1 ed e_2 . *I vettori della base naturale sono i vettori velocità corrispondenti alle curve coordinate* (1.4.5). Questo rende molto semplice capire come sono disposti, punto per punto.

I vettori della base naturale, in generale, non sono ortonormali: non è neppure detto che siano ortogonali. Consideriamo la matrice dei prodotti scalari

$$\begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}; \quad (1.4.6)$$

questa matrice è sempre simmetrica. Se è diagonale, la base naturale è ortogonale, e le coordinate saranno dette *ortogonali*: questo corrisponde al fatto che le due curve coordinate in ciascun punto sono sempre ortogonali fra loro. Se la matrice dei prodotti scalari coincide con la matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora la base naturale è ortonormale.

Gli elementi di tale matrice si possono calcolare in questo modo:

$$A_{\mu\nu} \equiv e_\mu \cdot e_\nu = \frac{\partial x^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial q^\nu} c_i \cdot c_j; \quad (1.4.7)$$

se la terna cartesiana c_i nello spazio affine tridimensionale è ortonormale, allora la matrice (1.4.6) si ottiene facendo il prodotto matriciale fra la jacobiana della parametrizzazione e la sua trasposta. In generale, gli elementi di matrice $A_{\mu\nu}$ non sono costanti sulla superficie, bensì funzioni delle coordinate del punto.

È un utile esercizio trovare le curve coordinate e la matrice (1.4.6) per le diverse parametrizzazioni della sfera che abbiamo descritto nella sezione precedente: lo lasciamo al lettore. Si osserverà, in particolare, che le coordinate (1.3.8), (1.3.10) e (1.3.11) sono ortogonali ma non ortonormali, mentre le coordinate (1.3.9) non sono neppure ortogonali.

Quando dobbiamo calcolare il prodotto scalare di due vettori u e v , entrambi tangenti alla superficie nello stesso punto, troviamo

$$u \cdot v = u^\mu v^\nu e_\mu \cdot e_\nu = A_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (1.4.8)$$

Quindi la matrice (1.4.6) rappresenta, nelle coordinate scelte, la *forma bilineare* (simmetrica e definita positiva) che si ottiene come restrizione (ai vettori tangenti alla superficie) del prodotto scalare definito nello spazio affine euclideo tridimensionale. Questa forma bilineare è detta **prima forma fondamentale** (o **tensore metrico**, o semplicemente **metrica**) della superficie.

Il prodotto scalare di due vettori è indipendente dalle coordinate usate, ma la matrice che permette di calcolarlo in funzione delle loro componenti dipende dalle coordinate. Quando si cambiano coordinate, $q^\mu = q^\mu(Q^\nu)$, gli elementi di matrice $A'_{\mu\nu}$ nelle coordinate Q^ν sono legati a quelli nelle coordinate q^μ dalla relazione

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\mu} \frac{\partial q^\rho}{\partial Q^\nu} A_{\lambda\rho}. \quad (1.4.9)$$

Osservazione – Da quest'ultima formula e dalle (1.4.4) si comincia a intravedere la regola in base alla quale finora abbiamo scritto gli indici dei vari oggetti in alto o in basso. Gli indici in

basso, detti anche **indici covarianti**, sono assegnati a componenti che si trasformano con la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate. Gli indici sono invece scritti in alto per le coordinate e per le componenti che si trasformano con la matrice jacobiana inversa (si parla in questo caso di **indici controvarianti**). Si noti che in un'espressione come $\frac{\partial f}{\partial q^\lambda}$, l'indice λ è covariante: conta come indice in basso (perché?). In tutte le espressioni incontrate finora, quando vi sono sommatorie (sottintese) su un indice ripetuto, questo figurava una volta in basso e una volta in alto. Ciò non è accidentale: quando questo si verifica, siamo sicuri che la medesima espressione vale in qualunque sistema di coordinate. Infatti, sotto un cambio di coordinate compare una matrice jacobiana per ogni indice in basso, e una jacobiana inversa per ogni indice in alto: il loro prodotto genera la matrice identità, quindi la formula resta invariata (per capire come funziona, basta provare ad effettuare un cambiamento di coordinate nell'espressione (1.4.8) o in qualunque altra in cui vi siano sommatorie sottintese). Scrivere gli indici secondo questa regola, quindi, permette un immediato controllo sulla correttezza intrinseca delle formule che scriviamo.

Nota bene: fanno eccezione a questo discorso gli indici che individuano una singola particella in un sistema di N punti materiali, come l'indice A in x_A^i : questi non sono indici covarianti, sono semplici "etichette" (per le quali usiamo lettere maiuscole) e ovviamente i cambiamenti di coordinate non hanno alcun effetto su di essi: ogni volta che dovremo sommare su tutte le particelle di un sistema, per ottenere grandezze come l'energia totale o la quantità di moto totale, manterremo il segno di sommatoria.

Siamo ora in grado di scrivere l'**energia cinetica** T di un punto materiale che si muove sulla superficie, in funzione delle componenti lagrangiane \dot{q}^μ della velocità:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m A_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad (1.4.10)$$

Il prossimo passo è trovare una formula per l'**accelerazione** del punto materiale, che dovrà comparire nell'equazione del moto.

La definizione usuale di accelerazione in un istante t è

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}. \quad (1.4.11)$$

e poiché in coordinate cartesiane abbiamo $\mathbf{v}(t) = \dot{x}^i(t) \mathbf{c}_i$, se ne ricava immediatamente

$$\mathbf{a} = \ddot{x}^i \mathbf{c}_i,$$

formula che abbiamo già usato nella prima sezione di questo testo.

In realtà, questo ragionamento nasconde un inghippo. Abbiamo detto che la velocità nel punto $P(t)$ appartiene a una copia di \mathbb{R}^3 con origine in $P(t)$; ma se è così, i due vettori $\mathbf{v}(t+h)$ e $\mathbf{v}(t)$ appartengono a spazi diversi: come possiamo farne una combinazione lineare? Dato che siamo in uno spazio affine, è ben definita l'operazione di **traslazione** di un vettore spostamento: possiamo traslare uno spostamento $P - O$ in un uguale spostamento a partire da un diverso punto O' . Allo stesso modo, possiamo traslare una velocità in un punto P in una velocità (parallela e con lo stesso modulo) in un altro punto P' . Nella definizione (1.4.11), dunque, stiamo sottraendo il vettore $\mathbf{v}(t)$ non dal vettore $\mathbf{v}(t+h)$, ma piuttosto dal vettore $\mathbf{v}(t+h)$ *traslato nel punto* $P(t)$. La base \mathbf{c}_i rispetto a cui decomponiamo i vettori velocità, a sua volta, è ottenuta traslando in ciascun

punto P dello spazio affine la terna cartesiana che abbiamo assegnato nell'origine O . Quindi le componenti cartesiane di un vettore velocità traslato sono automaticamente uguali a quelle del vettore originale: ecco perché, nel derivare rispetto al tempo la rappresentazione in componenti della velocità, possiamo trattare i vettori c_i come costanti.

Se però partiamo dalla decomposizione della velocità di un moto sulla superficie secondo la base naturale associata a una qualsiasi parametrizzazione, $v(t) = \dot{q}^\lambda(t) e_\lambda$, dobbiamo renderci conto che i vettori e_i della base naturale nel punto $P(t)$ e quelli della base naturale nel punto $P(t+h)$ *non sono*, in generale, traslati parallelamente gli uni negli altri. Lo sarebbero *solo* se la superficie fosse un piano (affine) e le coordinate lagrangiane scelte fossero coordinate cartesiane: per superfici non planari, i piani tangenti alla superficie in punti diversi non sono neppure paralleli, quindi le basi naturali in punti diversi non potranno essere parallele fra loro, quale che sia la parametrizzazione scelta.

Di conseguenza, nel calcolare la variazione di velocità da un punto all'altro dobbiamo considerare sia la variazione delle componenti lagrangiane $\dot{q}^\lambda(t)$ sia la variazione da un punto all'altro dei vettori e_i della base naturale. In questo senso possiamo scrivere

$$a = \ddot{q}^\lambda e_\lambda + \dot{q}^\lambda \frac{d}{dt}(e_\lambda) \quad (1.4.12)$$

dove con $\frac{d}{dt}(e_\lambda)$ intendiamo il limite (per $h \rightarrow 0$) della differenza fra il vettore e_λ nel punto $P(t+h)$, traslato in $P(t)$, e il vettore e_λ definito nel punto $P(t)$, divisa per h .

Noi saremmo perfettamente in grado di calcolare i due vettori $\frac{d}{dt}(e_1)$ e $\frac{d}{dt}(e_2)$ a partire dalla formula (1.4.2):

$$\frac{d}{dt}(e_\mu) = \frac{\partial e_\mu}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda, \quad \text{con} \quad \frac{\partial e_\mu}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} c_i; \quad (1.4.13)$$

ma quella che vorremmo ottenere è una decomposizione nella base naturale e_μ , non nella base cartesiana c_i . Il guaio, però, è che se la superficie non è un piano, il traslato nel punto $P(t)$ di un vettore tangente nel punto $P(t+h)$ *non è più tangente alla superficie*. Quindi non possiamo supporre che i vettori $\frac{\partial e_\mu}{\partial q^\lambda}$ si possano scrivere come combinazioni lineari dei vettori della base naturale e_μ .

Di fatto, dobbiamo ben aspettarci che l'accelerazione di un punto in moto su una superficie non sia, in generale, tangente alla superficie stessa. Consideriamo un punto che si muova di moto circolare uniforme lungo l'equatore di una sfera: è facile vedere che in questo caso l'accelerazione del punto è diretta, in ogni istante, verso il centro della sfera, e pertanto è *perpendicolare* alla superficie.

Ciò che faremo, dunque, è completare in ciascun punto della superficie la base del piano tangente con un terzo vettore. Dato che la superficie è immersa in uno spazio affine euclideo tridimensionale, è ben definito il **prodotto vettoriale** di due vettori u e v , che denoteremo con $u \times v$. Per costruzione, il vettore risultante è perpendicolare al piano individuato dai vettori u e v (ed è nullo se questi ultimi sono paralleli). Definiamo dunque il **versore normale alla superficie** in un punto mediante la formula

$$N \equiv \frac{e_1 \times e_2}{\|e_1 \times e_2\|} \quad (1.4.14)$$

in questo modo, il versore normale alla superficie è definito indipendentemente dalla parametrizzazione (a meno del segno). Quale che sia il valore di $\frac{\partial e_\mu}{\partial q^\lambda}$ in un dato punto, questo

vettore si potrà decomporre nella terna formata dai tre vettori indipendenti $\{e_1, e_2, \mathbf{N}\}$. Detti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $B_{\mu\nu}$ i coefficienti (ancora da calcolare) di tale decomposizione,

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial q^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda + B_{\mu\nu} \mathbf{N}, \quad (1.4.15)$$

sostituendo quest'espressione in (1.4.13) e quindi nella (1.4.12) troviamo la formula

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \right) e_\lambda + B_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \mathbf{N} \quad (1.4.16)$$

ma dobbiamo ancora trovare il modo di calcolare tutti i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e $B_{\mu\nu}$ che compaiono in quest'espressione. Usando la (1.4.13), per intanto, possiamo osservare che deve essere

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \mathbf{c}_i = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda + B_{\mu\nu} \mathbf{N},$$

il che ci dice che i coefficienti Γ e B devono essere simmetrici nello scambio degli indici in basso: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ e $B_{\mu\nu} \equiv B_{\nu\mu}$.

Che l'accelerazione dipenda, in generale, non solo dalle derivate temporali seconde delle coordinate, ma anche (quadraticamente) dalle derivate prime, non è una conseguenza della presenza di un vincolo non lineare, ma semplicemente dell'uso di coordinate non cartesiane: questo implica che la base naturale in cui è decomposta la velocità dipenda dal punto (nel senso che non è traslata parallelamente da un punto all'altro). Per convincerci di questo, consideriamo il caso di un moto nel piano xy , descritto in coordinate polari (r, θ) . La parametrizzazione è semplicemente

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = 0. \end{cases} \quad (1.4.17)$$

La velocità del punto è

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{c}_1 + \dot{y} \mathbf{c}_2 = \left(\dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} \right) \mathbf{c}_1 + \left(\dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} \right) \mathbf{c}_2 = \dot{r} \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \mathbf{e}_2,$$

dove

$$\mathbf{e}_1 = \cos(\theta) \mathbf{c}_1 + \sin(\theta) \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{e}_2 = -r \sin(\theta) \mathbf{c}_1 + r \cos(\theta) \mathbf{c}_2,$$

in accordo con la definizione (1.4.2). Derivando la velocità rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{x} \mathbf{c}_1 + \ddot{y} \mathbf{c}_2 = \left(\ddot{r} \cos(\theta) - 2\dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} - r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - r \sin(\theta) \ddot{\theta} \right) \mathbf{c}_1 + \\ &+ \left(\ddot{r} \sin(\theta) + 2\dot{r} \cos(\theta) \dot{\theta} - r \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + r \cos(\theta) \ddot{\theta} \right) \mathbf{c}_2 = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \right) \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

In questo caso, dato che le velocità sono sempre complanari qualunque sia il moto, non c'è mai una componente dell'accelerazione normale al piano: i coefficienti $B_{\mu\nu}$, quali che siano le coordinate usate, sono sempre nulli. La formula generale (1.4.16), esplicitando i termini delle sommatorie (e ricordando che i coefficienti Γ sono simmetrici negli indici in basso), sarebbe

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} + \Gamma_{11}^1 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^1 \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_2 :$$

confrontando con l'espressione che abbiamo trovato, osserviamo facilmente che in coordinate polari nel piano si ha

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

Ora illustreremo un modo di calcolare i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ senza usare esplicitamente la parametrizzazione. Consideriamo come variano, in funzione delle coordinate, i coefficienti del tensore metrico $A_{\mu\nu}$ che abbiamo definito più sopra.

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial}{\partial q^\lambda}(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial q^\lambda} \cdot \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial q^\lambda};$$

sostituendo l'espressione (1.4.15), dato che $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N} = 0$ si ottiene la relazione

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\mu = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho A_{\rho\mu}.$$

Permutando ciclicamente i tre indici (μ, ν, λ) , sommando due delle permutazioni e sottraendo la terza, e infine utilizzando le simmetrie degli indici in $A_{\mu\nu}$ e in $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, con un po' di passaggi puramente noiosi otteniamo

$$A_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} \right);$$

se ora introduciamo le componenti $A^{\lambda\sigma}$ della **matrice inversa della metrica** (che convenzionalmente si indicano con la stessa lettera A , ma hanno gli indici in alto poiché si trasformano con legge controvariante), possiamo scrivere finalmente

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} A^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} \right). \quad (1.4.18)$$

Abbiamo quindi trovato che i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, detti **simboli di Christoffel**, si possono ricavare dai coefficienti della metrica e dalle loro derivate rispetto alle coordinate q^μ .

Quest'espressione ci dice, tra l'altro, che i simboli di Christoffel sono tutti nulli quando i coefficienti della metrica sono costanti: questo avviene, in particolare, quando si usano coordinate ortonormali. Da questo punto di vista, sembrerebbe desiderabile operare sempre in coordinate ortonormali; il fatto è che su una generica superficie può essere *impossibile* definire coordinate ortonormali, anche solo localmente. Ad esempio, si può dimostrare che su una sfera *non esistono* coordinate in cui la metrica risulti costante.

Per quanto riguarda i coefficienti $B_{\mu\nu}$, essi definiscono una forma bilineare detta **seconda forma fondamentale** (o **forma di curvatura estrinseca**) della superficie, e si potrebbero a loro volta calcolare (ma non solo in funzione della metrica); ma nel seguito non ne avremo bisogno, per la ragione che ora chiariremo.

Tornando al problema iniziale, cioè quello di ottenere le equazioni del moto per il punto vincolato, introduciamo una nuova ipotesi: che il moto del punto materiale sulla superficie sia **privo di attrito**. È in questo senso che definiamo la superficie *liscia* (e non solo per denotare il fatto che deve essere una superficie regolare, ossia priva di punti singolari).

In un moto privo di attrito, la reazione vincolare non dissipa energia cinetica, ovvero non compie lavoro per nessuno spostamento possibile sul vincolo. Nel caso di una superficie, questo implica che *la reazione vincolare Φ sia sempre perpendicolare alla superficie*. Sotto questa ipotesi

possiamo fare il prodotto scalare dell'equazione (1.3.16) con i due vettori della base naturale tangente alla superficie: poiché per ipotesi $\Phi \cdot e_\rho \equiv 0$, dalla (1.4.16) otteniamo le due equazioni

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\rho = m (\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) A_{\lambda\rho}, \quad \rho = 1, 2. \quad (1.4.19)$$

In un colpo solo, ci siamo liberati sia delle reazioni vincolari sia della componente normale dell'accelerazione. Siamo ormai in grado di calcolare tutti i termini che compaiono in queste equazioni, e siccome la matrice metrica $A_{\lambda\rho}$ è invertibile potremo sicuramente metterle nella forma di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, in forma normale, nelle due funzioni incognite $q^\mu(t)$. Per queste equazioni esisterà dunque una e una sola soluzione per ogni dato iniziale, ed essa determinerà univocamente il moto. Trovato il moto, saremo anche in grado di calcolare, a posteriori, le reazioni vincolari: basterà fare la differenza fra le forze attive \mathbf{F} e il prodotto $m\mathbf{a}$, che a quel punto conosceremo per ogni istante.

Come caso particolare, dalle (1.4.19) ricaviamo che il moto di un punto materiale, vincolato ad una superficie liscia e *non soggetto a forze attive*, obbedisce all'equazione

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 0. \quad (1.4.20)$$

Quest'equazione ci dice che l'accelerazione non ha componente tangente alla superficie; i moti con questa proprietà sono detti **moti geodetici**. Più avanti mostreremo che le traiettorie dei moti geodetici hanno la proprietà di essere le curve di minima lunghezza d'arco fra tutte quelle (giacenti sulla superficie) che connettono due punti dati.

Esiste almeno un problema meccanico (per un sistema vincolato non banale) che siamo ora in grado di risolvere completamente... senza fare alcun calcolo!

Consideriamo un pendolo sferico in assenza di peso. Per quanto abbiamo appena visto, il punto dovrà muoversi in modo tale che l'accelerazione sia in ogni istante perpendicolare alla superficie sferica.

Ora, se noi consideriamo un moto circolare uniforme, l'accelerazione è sempre diretta verso il centro della traiettoria circolare. Se, in particolare, consideriamo un moto uniforme su un cerchio massimo della sfera (ossia su una circonferenza centrata nel centro della sfera) l'accelerazione sarà sempre normale alla superficie sferica. Quindi ogni moto circolare uniforme su un cerchio massimo è un moto geodetico sulla sfera.

Potrebbero esistere sulla sfera altri moti geodetici? Dato un qualunque punto della sfera e data una qualunque velocità iniziale (non nulla) tangente alla sfera, esiste esattamente un moto circolare uniforme su un cerchio massimo con quel dato iniziale; poiché i moti che stiamo cercando sono soluzioni delle equazioni (1.4.20), e queste ammettono una e una sola soluzione per ogni dato iniziale, i moti circolari uniformi su cerchi massimi sono anche gli unici moti geodetici sulla sfera (quando la velocità iniziale è nulla, le equazioni (1.4.20) ammettono solo la soluzione costante, ossia il punto permane indefinitamente in quiete).

1.5 Equazioni di Lagrange per sistemi olonomi

Torniamo ora al caso generale di un sistema formato da N punti materiali, soggetti a K equazioni di vincolo che soddisfano le condizioni di olonomia, e supponiamo di aver parametrizzato il sistema con n coordinate lagrangiane q^λ .

L'energia cinetica totale del sistema sarà in generale

$$\begin{aligned}
 T(q^\lambda, \dot{q}^\lambda, t) &= \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \left(\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) \\
 &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(q^\lambda, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + g_{0\mu}(q^\lambda, t) \dot{q}^\mu + g_{00}(q^\lambda, t)
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

dove

$$g_{\mu\nu} = \sum_{A=1}^N m_A \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x_A^j}{\partial q^\nu} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j), \tag{1.5.2}$$

$$g_{0\mu} = \sum_{A=1}^N m_A \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial x_A^j}{\partial t} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j), \tag{1.5.3}$$

$$g_{00} = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N m_A \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \frac{\partial x_A^j}{\partial t} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j), \tag{1.5.4}$$

Nel caso di vincoli scleronomi, $\frac{\partial x_A^j}{\partial t} \equiv 0$ e l'energia cinetica si riduce a

$$T(q^\lambda, \dot{q}^\lambda) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(q^\lambda) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \tag{1.5.5}$$

con $g_{\mu\nu}$ sempre definito da (1.5.2). In questo caso l'energia cinetica è una *funzione omogenea di grado due* nelle velocità lagrangiane:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu} = g_{\mu\nu}(q^\lambda) \dot{q}^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu} \dot{q}^\mu = 2T \quad (\text{sistemi scleronomi}) \tag{1.5.6}$$

Osservazione – Se si considera il caso particolare di un singolo punto materiale che si muove su una superficie, trattato nella sezione precedente, la forma quadratica che rappresenta l'energia cinetica coincide con la metrica della superficie moltiplicata per la massa del punto: $g_{\mu\nu} = m A_{\mu\nu}$.

A questo punto formalizziamo l'ipotesi che i vincoli siano **privi di attrito**. Nel caso di vincoli scleronomi, questo significa che le reazioni vincolari non determinano una variazione dell'energia cinetica del sistema, ossia non compiono lavoro. Detta Φ_A la reazione vincolare sull' A -esimo punto materiale del sistema,

$$\Phi_A = m_A \mathbf{a}_A - \mathbf{F}_A, \tag{1.5.7}$$

l'ipotesi che le reazioni vincolari non compiano lavoro si traduce nella condizione

$$\sum_{A=1}^N (\Phi_A \cdot \mathbf{u}_A) = 0, \quad (1.5.8)$$

dove \mathbf{u}_A è un qualsiasi vettore che rappresenta uno spostamento infinitesimo, *compatibile con i vincoli*, di quel punto materiale. Lo chiamiamo “spostamento infinitesimo” anziché “velocità” – e lo denotiamo con \mathbf{u}_A anziché con \mathbf{v}_A – perché questo vettore non deve necessariamente coincidere con la velocità del punto nel suo moto: la condizione che stiamo descrivendo, infatti, è una condizione *geometrica* sulle reazioni vincolari e non dipende da come si sta effettivamente muovendo il punto materiale. La comprensione di questo aspetto è importante, perché le reazioni vincolari, in generale, non dipendono solo dalla configurazione del sistema ma anche dalla velocità dei punti materiali (si pensi al caso del pendolo). Quindi, se imponessimo la condizione $\sum_{A=1}^N (\Phi_A \cdot \mathbf{v}_A) = 0$ questa sarebbe diversa (e più debole) rispetto alla condizione (1.5.8). Quest'ultima, infatti, richiede che *qualunque siano le effettive velocità \mathbf{v}_A del punto, la reazione vincolare compia sempre lavoro nullo rispetto a qualsiasi direzione di moto compatibile con il vincolo (e non solo alla direzione \mathbf{v}_A)*.

Nel caso di vincoli dipendenti dal tempo, tuttavia, anche in assenza di attrito il vincolo può cedere o sottrarre energia al sistema meccanico. Si pensi ad un oggetto appoggiato sul pavimento di un ascensore, e si immagini che tale pavimento sia “perfettamente liscio”, ossia privo di attrito. Se l'ascensore è fermo, una volta che il corpo è in movimento sul pavimento la sua energia cinetica resta costante: la reazione vincolare è ortogonale a qualsiasi vettore tangente al pavimento. Se però l'ascensore si sta muovendo di moto accelerato (in direzione ortogonale al pavimento), allora – anche se il pavimento è del tutto privo di attrito – il corpo appoggiato su di esso varia la sua energia cinetica *a causa del moto del vincolo* (si pensi al caso in cui il corpo è fermo rispetto al pavimento: il corpo risulta ugualmente muoversi di moto accelerato nello spazio, dato che si muove il pavimento). In questa situazione, quindi, la condizione di assenza di attrito *non coincide* con l'ipotesi che le reazioni vincolari non compiano lavoro. L'assenza di attrito è ancora rappresentata dalla condizione (1.5.8), dove però si deve assumere che \mathbf{u}_A non rappresenti in un dato istante un possibile spostamento infinitesimo del punto materiale nello spazio tridimensionale, bensì un generico spostamento infinitesimo del punto *rispetto al vincolo*. Un tale spostamento, tradizionalmente detto *spostamento virtuale (infinitesimo)*, è descritto dall'equazione

$$\mathbf{u}_A = \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} u^\lambda \mathbf{c}_i \quad (1.5.9)$$

dove u^λ è un arbitrario vettore di \mathbb{R}^n (NB uno stesso vettore u^λ descrive lo spostamento di *tutti* i punti del sistema). Si noti che il corrispondente *spostamento reale (infinitesimo)* dell' A -esimo punto è dato da $\left(\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} u^\lambda + \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \right) \mathbf{c}_i$, cfr. eq.(1.3.7).

Riassumendo, la condizione che non vi sia attrito coincide con l'ipotesi che sia nullo il *lavoro virtuale* delle reazioni vincolari, ossia il prodotto scalare fra la reazione vincolare e ogni possibile spostamento *sul vincolo*, senza considerare lo spostamento dovuto al moto del vincolo stesso: questo si traduce ancora nell'equazione (1.5.8), con la definizione (1.5.9). Quest'ultima vale anche nel caso di sistemi scleronomi: se il vincolo è fisso, spostamento reale e spostamento virtuale coincidono.

Dalle equazioni (1.5.7) e (1.5.8) si ricava subito che per qualsiasi insieme di spostamenti virtuali (1.5.9) deve valere la condizione

$$\sum_{A=1}^N m_A \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{u}_A = \sum_{A=1}^N \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_A. \quad (1.5.10)$$

Per il membro sinistro dell'equazione si ha

$$\sum_{A=1}^N m_A \frac{d}{dt} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{u}_A = \left[\sum_{A=1}^N m_A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x_A^j}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) \right] u^\lambda. \quad (1.5.11)$$

Nel membro destro della (1.5.10) figura la proiezione delle forze attive lungo tutte le possibili direzioni di moto compatibili con i vincoli; ma quest'espressione si semplifica drasticamente se supponiamo che le forze attive siano **conservative**. In tal caso, infatti, le forze attive sono complessivamente descritte da un **potenziale** $\mathcal{U}(x_A^i)$, ossia

$$\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_A = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_A^i} u_A^i = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_A^i} \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} u^\lambda \quad (1.5.12)$$

(NB con le convenzioni di nomenclatura qui usate, l'**energia potenziale** delle forze attive coincide con il potenziale cambiato di segno: $V = -\mathcal{U}$).

Ora, se nell'espressione del potenziale \mathcal{U} sostituiamo la parametrizzazione del vincolo otteniamo una funzione delle coordinate lagrangiane, $U(q^\lambda) = \mathcal{U}(x_A^i(q^\lambda))$. Nel caso in cui le forze e/o i vincoli dipendono dal tempo, il potenziale potrà essere anche funzione del tempo, $U = U(q^\lambda, t)$. Applicando la consueta regola di derivazione delle funzioni composte, si vede facilmente che

$$\frac{\partial U}{\partial q^\lambda} = \sum_{A=1}^N \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_A^i} \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda}; \quad (1.5.13)$$

quindi abbiamo

$$\sum_{A=1}^N \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_A = \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} u^\lambda. \quad (1.5.14)$$

Il vettore u^λ è arbitrario, e le espressioni (1.5.11) e (1.5.14) possono essere uguali per qualsiasi scelta delle componenti u^λ se e solo se

$$\sum_{A=1}^N m_A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_A^i}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x_A^j}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) = \frac{\partial U}{\partial q^\lambda}. \quad (1.5.15)$$

Le (1.5.15) sono un sistema di n equazioni indipendenti, che sono equivalenti alle equazioni del moto del sistema. Infatti il sistema era originariamente descritto da $3N$ equazioni (N equazioni vettoriali, ognuna delle quali ha tre componenti), che però a causa delle K equazioni di vincolo non sono tutte indipendenti fra loro: le equazioni indipendenti sono $3N - K$, ossia n , e possono essere riformulate nella forma (1.5.15), in cui non figurano più le reazioni vincolari. A causa delle equazioni di vincolo, infatti, il moto *sul vincolo* – ossia nello spazio delle configurazioni – determina completamente il moto di tutti i punti nello spazio fisico (questo vale anche nel caso di

vincoli mobili, dato che il moto del vincolo è assegnato a priori); in assenza di attrito, il moto sul vincolo è completamente determinato solo dalle forze attive, in quanto le reazioni vincolari, per ipotesi, non hanno componente tangente al vincolo (1.5.8).

Le equazioni (1.5.15) possono essere scritte in forma più utile (ed elegante) utilizzando l'espressione dell'energia cinetica totale del sistema, che abbiamo già calcolato. A questo fine, da (1.5.1) si ricava che

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} = g_{\lambda\mu} \dot{q}^\mu + g_{0\lambda} = \sum_{A=1}^N m_A \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) &= \sum_{A=1}^N m_A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) \\ &\quad + \sum_{A=1}^N m_A \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) \frac{d}{dt} \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) \end{aligned}$$

La prima delle due sommatorie coincide esattamente con il membro sinistro delle equazioni (1.5.15). Esplicitiamo la derivata temporale nella seconda sommatoria:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^N m_A \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) \frac{d}{dt} \frac{\partial x_A^i}{\partial q^\lambda} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) &= \\ = \sum_{A=1}^N m_A \left(\frac{\partial x_A^j}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial x_A^j}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 x_A^i}{\partial q^\lambda \partial q^\nu} \dot{q}^\nu + \frac{\partial^2 x_A^i}{\partial q^\lambda \partial t} \right) (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j) &= \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} : \end{aligned}$$

abbiamo quindi dimostrato che le equazioni (1.5.15) si possono riscrivere in questa forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial U}{\partial q^\lambda}. \quad (1.5.16)$$

Introducendo ora la **funzione di Lagrange**, o **Lagrangiana**

$$L(q^\lambda, \dot{q}^\lambda, t) = T(q^\lambda, \dot{q}^\lambda, t) + U(q^\lambda, t), \quad (1.5.17)$$

e considerando il fatto che il potenziale U non dipende dalle velocità lagrangiane \dot{q}^λ , le equazioni (1.5.15) si possono mettere nella forma

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0} \quad (1.5.18)$$

(equazioni di Eulero–Lagrange). In questo modo abbiamo conseguito un primo importante obiettivo: scrivere le equazioni del moto per un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi e a forze conservative. Ora si apre il problema di risolvere queste equazioni per determinare il moto, o più in generale di formulare previsioni (quantitative o qualitative) sui moti del sistema.

1.6 Equazioni di Lagrange e geometria

Il caso di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie liscia, che abbiamo affrontato nella sezione 1.4, è evidentemente un caso particolare di sistema olonomo. È utile fare un confronto fra le due trattazioni che abbiamo presentato in successione. Nel caso del punto materiale su una superficie immersa in \mathbb{R}^3 , la metrica dell'energia cinetica è multipla della prima forma fondamentale della superficie, e il fattore di proporzionalità è la massa del punto, come abbiamo già osservato. Che relazione c'è fra le equazioni di Lagrange del sistema e l'espressione dell'accelerazione (1.4.16) che avevamo trovato in precedenza?

Nella sezione 1.4 abbiamo introdotto una base per i vettori tangenti a \mathbb{R}^3 in un punto, a partire dalla terna cartesiana a cui sono riferite le coordinate x^i : la nuova base, formata dai vettori (e_1, e_2, N) , è definita in ciascun punto della superficie attraverso le espressioni (1.4.2) e (1.4.14). Nel caso di un sistema olonomo generico, con N punti materiali, lo spazio delle configurazioni Q non è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 ; potremmo, eventualmente, vederlo come sottoinsieme (più precisamente, sottovarietà n -dimensionale) di \mathbb{R}^{3N} . Una volta fissata una terna cartesiana in \mathbb{R}^3 , potremmo usare N copie di questa per ottenere una base in \mathbb{R}^{3N} , e applicando a questa la matrice jacobiana della parametrizzazione del vincolo ottenere, in ciascun punto di Q , la base naturale per rappresentare i vettori tangenti a Q . Questo è perfettamente legittimo, ma vedere i vettori tangenti al vincolo come un sottospazio dei vettori tangenti a \mathbb{R}^{3N} non comporta alcun vantaggio pratico; non sarebbe immediato, ad esempio, definire in dimensione $3N$ un completamento di tale base con $3N - n$ vettori “ortogonali al vincolo” che giochino il ruolo del versore normale nel caso di una superficie. Più in generale, non è sempre utile considerare lo spazio delle configurazioni di un sistema olonomo come sottovarietà immersa in \mathbb{R}^{3N} . Per capire perché, vediamo l'esempio dello spazio delle configurazioni di un corpo rigido.

1.6.1 Esempio: lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido

Abbiamo già discusso, nella sezione 1.2, il fatto che il numero di gradi di libertà per un corpo rigido formato da N punti (non tutti allineati, e con $N \geq 3$) è uguale a 6, indipendentemente da N . Possiamo parametrizzare questo spazio senza bisogno di considerarlo come sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} , e prescindendo del tutto dal numero di punti materiali che costituiscono il sistema?

Si può fare così: si considera una *configurazione di riferimento* q_0 , scelta del tutto arbitrariamente fra le configurazioni possibili per il corpo rigido. In questa configurazione, e dato un riferimento cartesiano nello spazio fisico \mathbb{R}^3 , a ogni punto materiale del sistema corrisponde un vettore posizione. Ora, per una configurazione qualsiasi del corpo rigido, consideriamo la trasformazione affine in \mathbb{R}^3 che connette le due configurazioni. Questa trasformazione sarà la composizione di una *traslazione* (di un punto prestabilito solidale con il corpo rigido, ad esempio il suo baricentro) e di una *rotazione*. Ogni trasformazione di questo tipo potrà essere individuata da un vettore r di \mathbb{R}^3 (la traslazione) e da una matrice ortogonale A con determinante uguale a 1, che è un elemento del gruppo di matrici che si denota con $SO(3)$. Queste *rototraslazioni* sono tutte e sole le trasformazioni che conservano le distanze fra punti in \mathbb{R}^3 , quindi è evidente per quale ragione esse sono compatibili con il vincolo di rigidità. Una matrice A di $SO(3)$ è individuata da tre parametri (infatti i nove elementi di matrice sono vincolati dalla relazione di ortogonalità $A^T A = \mathbb{1}$, che corrisponde a sei equazioni indipendenti); questi si possono identificare, ad

esempio, con gli **angoli di Eulero**, angoli di rotazione rispetto a tre direzioni opportunamente scelte. In questo modo, con le tre componenti della traslazione e i tre angoli che descrivono la rotazione, si possono parametrizzare tutte le configurazioni del corpo rigido. Per ottenere la posizione in \mathbb{R}^3 di un qualsiasi punto materiale appartenente al corpo si deve semplicemente applicare la rototraslazione (\mathbf{A}, \mathbf{r}) al vettore posizione di quel punto nella configurazione di riferimento. È evidente che l'identificazione dello spazio delle configurazioni del corpo rigido con l'insieme delle rototraslazioni prescinde completamente dal numero di punti materiali N , e non determina un'immersione di Q in \mathbb{R}^{3N} . In questa sede non tratteremo in maggior dettaglio la dinamica del corpo rigido, ma ci limitiamo a osservare alcuni elementi:

- un vettore tangente a Q nella configurazione (\mathbf{A}, \mathbf{r}) è rappresentato da una coppia $(\dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{r}})$, dove $\dot{\mathbf{r}}$ è un generico vettore di \mathbb{R}^3 e rappresenta la velocità istantanea di traslazione, mentre $\dot{\mathbf{A}}$ è una matrice che deve soddisfare l'identità $\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = 0$, che implica che la matrice $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T$ sia antisimmetrica. Le tre componenti di questa matrice possono essere identificate con le componenti di un vettore $\boldsymbol{\omega}$: la **velocità angolare**. Questo punto sarà ripreso più avanti, quando tratteremo la cinematica relativa;
- la distribuzione delle masse nel corpo rigido (che ovviamente identifica anche quanti siano i punti materiali che ne fanno parte⁷) non è codificata nella struttura dello spazio delle configurazioni Q ; ⁸ essa determina, invece, la *metrica* di Q . Corpi rigidi con un diverso numero di punti e una diversa disposizione delle masse hanno energie cinetiche diverse, a parità di atto di moto. Per il *teorema di König*, l'energia cinetica totale del corpo rigido si decompone nella somma di una forma bilineare nella velocità di traslazione $\dot{\mathbf{r}}$ e di una forma bilineare nella velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$: la prima delle due forme dipende solo dalla massa totale M del corpo, mentre la seconda dipende dalla distribuzione delle masse nello spazio ed è detta **tensori d'inerzia** del corpo rigido.

Dunque in questo esempio anche la rappresentazione dei vettori tangenti a Q e quella del loro prodotto scalare sono totalmente indipendenti da una possibile immersione di Q in \mathbb{R}^{3N} .

1.6.2 L'accelerazione nello spazio delle configurazioni

Ritorniamo a considerare un generico sistema olonomo autonomo (ossia con vincoli e forze indipendenti dal tempo). La funzione di Lagrange, per quanto si è già visto, in questo caso ha la forma

$$L(q^\lambda, \dot{q}^\lambda) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + U(q^\lambda). \quad (1.6.1)$$

Scriviamo dunque esplicitamente le equazioni di Lagrange: poiché

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} = g_{\lambda\mu} \dot{q}^\mu, \quad \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \frac{\partial U}{\partial q^\lambda},$$

⁷eventualmente infiniti, nel caso di un corpo rigido continuo.

⁸questo è vero allo stesso modo per qualunque sistema olonomo: Q rappresenta solo l'informazione di natura *cinematica*, cioè i vincoli.

otteniamo le equazioni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = g_{\lambda\mu} \ddot{q}^\mu + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} = 0. \quad (1.6.2)$$

D'altra parte, vale l'identità

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \right),$$

poiché i due addendi tra parentesi differiscono solo per lo scambio dei nomi degli indici di sommatoria (μ, ν) . Denotando con $g^{\lambda\sigma}$ gli elementi della *matrice inversa* della metrica (similmente a quanto già visto nel caso della prima forma fondamentale di una superficie) otteniamo dunque che le (1.6.2) equivalgono alle equazioni in forma normale

$$\ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} \right) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = g^{\lambda\sigma} \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}. \quad (1.6.3)$$

Introducendo ora i **simboli di Christoffel** della metrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} \right),$$

le equazioni di Lagrange diventano

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = g^{\lambda\sigma} \frac{\partial U}{\partial q^\sigma}. \quad (1.6.4)$$

Nel membro di destra riconosciamo il gradiente del potenziale U ; il membro di sinistra rappresenta l'accelerazione del punto rappresentativo sullo spazio delle configurazioni.

Quest'equazione merita alcune considerazioni.

- Nel caso del punto materiale sulla superficie liscia, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sono esattamente i simboli di Christoffel della prima forma fondamentale $A_{\mu\nu}$: il fattore costante di proporzionalità m fra $g_{\mu\nu}$ e $A_{\mu\nu}$ è cancellato dal fattore m^{-1} fra le corrispondenti metriche inverse. Il gradiente del potenziale U rispetto alle coordinate sulla superficie, a sua volta, coincide esattamente con la proiezione della forza sul piano tangente alla superficie, divisa per la massa m (dato che il gradiente qui è calcolato rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$, non rispetto alla $A_{\mu\nu}$). Dunque in questo caso le equazioni di Lagrange coincidono con le equazioni (1.4.19), come ci aspettavamo.
- Per un sistema olonomo generico, l'equazione (1.6.4) ci dice che la corretta *definizione dell'accelerazione* del punto rappresentativo (corretta nel senso che *non dipende* dalla scelta delle coordinate lagrangiane) non è data dalla geometria affine dello "spazio ambiente" \mathbb{R}^{3N} in cui Q può essere immerso (ossia, come era nella sezione 1.4, dalla *traslazione parallela* di vettori in uno spazio affine), ma è invece *indotta dalla metrica dell'energia cinetica*, ossia dalle *proprietà inerziali* del sistema meccanico.

- Il vettore che ha come componenti i membri destri delle (1.6.4) è detto **accelerazione covariante**. Dal punto di vista geometrico, la sola struttura di varietà differenziabile non assegna una specifica definizione di accelerazione covariante; su una medesima varietà ci possono essere infiniti modi diversi di definire un'accelerazione covariante, ognuno dei quali corrisponde a una diversa assegnazione dei simboli di Christoffel. La definizione che applichiamo nel caso dei sistemi olonomi è quella in cui i simboli di Christoffel sono ricavati dalla metrica dell'energia cinetica. Per sistemi cinematicamente equivalenti (ossia con lo stesso spazio delle configurazioni Q), ma con proprietà inerziali differenti, la definizione di accelerazione del punto rappresentativo risulta diversa. In effetti, sistemi con proprietà inerziali diverse, sottoposti a un medesimo sistema di forze attive, accelerano in modo diverso!
- Ad esempio, è istruttivo paragonare il moto di una coppia di pendoli piani disaccoppiati con il moto di un bipendolo piano (per entrambi i sistemi lo spazio delle configurazioni Q è un toro bidimensionale). Questo dipende non solo dalla diversa forma dell'accelerazione covariante, ma anche dal fatto che il potenziale della forza peso genera due funzioni diverse su Q , a seconda che si consideri la parametrizzazione della coppia di pendoli o quella del bipendolo. Se si vuole osservare la differenza dovuta solo alla diversità dell'accelerazione covariante, si possono confrontare i moti dei due sistemi in assenza di peso (*moti spontanei*): in questo caso, l'equazione di Lagrange ha come soluzione i **moti geodetici** per la metrica dell'energia cinetica. Nel caso dei due pendoli disaccoppiati, è facile rendersi conto che i moti in assenza di forze sono moti circolari uniformi di entrambi i pendoli (con velocità angolari diverse e indipendenti fra loro): gli stessi moti, invece, non sono soluzioni delle equazioni dei moti spontanei per il bipendolo. Si può constatare, ad esempio, che non si può avere un moto in cui il pendolo “primario” resti fermo e il pendolo “secondario” ruoti uniformemente.
- I simboli di Christoffel sono l'unico “oggetto con indici” con cui avremo a che fare qui che non ha una legge di trasformazione lineare quando si cambiano coordinate. Sotto una trasformazione di coordinate $q^\lambda \mapsto Q^\mu$, denotando con $\hat{\Gamma}$ i simboli di Christoffel nelle nuove coordinate Q^μ si ha infatti

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\mu} \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\nu} \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial Q^\mu \partial Q^\nu}.$$

Il termine affine, che contiene le derivate seconde del cambiamento di coordinate, spiega perché può avvenire che le Γ in un dato punto siano tutte nulle in un certo sistema di coordinate, e siano non nulle in un altro (nel caso di una trasformazione puramente lineare questo sarebbe impossibile). Questo termine è indispensabile per garantire che le componenti dell'accelerazione covariante si trasformino come le componenti di un vettore: infatti esso cancella il termine, dipendente dalle derivate seconde della trasformazione, che è generato dalla presenza di \ddot{q}^λ .

1.7 Integrali primi

Gli **integrali primi** per un sistema olonomo, o **costanti del moto**, sono funzioni definite sullo spazio delle velocità TQ il cui valore resta costante su ciascuna curva di moto soluzione delle equazioni di Lagrange. Più in generale, un integrale primo potrebbe anche dipendere dal tempo: $f : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un integrale primo se

$$\dot{f} = \frac{d}{dt}f(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t), t) = \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\lambda} \ddot{q}^\lambda(t) + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0 \quad (1.7.1)$$

quando $\ddot{q}^\lambda(t)$ è determinato dalle equazioni di Lagrange. La (1.7.1) è detta **legge di conservazione** della funzione f . Quando le equazioni di Lagrange non possono essere integrate direttamente, praticamente tutte le informazioni che possiamo ottenere sul moto del sistema derivano dalla conoscenza di integrali primi.

Notiamo innanzitutto che ogni sistema olonomo *autonomo* (in cui la Lagrangiana non dipende dalla variabile t) ammette un integrale primo di particolare interesse, sia dal punto di vista fisico che ai fini dello studio del moto:

Proposizione 1. *Per un sistema olonomo descritto dalla Lagrangiana L , sia $\mathcal{H} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \dot{q}^\lambda - L : \quad (1.7.2)$$

su ogni soluzione delle equazioni di Lagrange si ha

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = -\frac{\partial L}{\partial t}; \quad (1.7.3)$$

In particolare, per ogni sistema autonomo ($\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$) la funzione \mathcal{H} è un integrale primo.

Questa proprietà si dimostra semplicemente applicando le definizioni e la regola di derivazione di un prodotto:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) \dot{q}^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \ddot{q}^\lambda - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \ddot{q}^\lambda - \frac{\partial L}{\partial t} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} \right] \dot{q}^\lambda - \frac{\partial L}{\partial t},$$

da cui segue l'enunciato. Nel caso di sistemi autonomi, per quanto visto finora la Lagrangiana ha la forma (1.6.1): in questo caso si ha $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} = g_{\lambda\mu} \dot{q}^\mu$, e

$$\mathcal{H}(q^\lambda, \dot{q}^\lambda) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - U(q^\lambda). \quad (1.7.4)$$

Sempre in questo caso, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \dot{q}^\lambda = 2T$, quindi $\mathcal{H} = 2T - L = T - U$. La funzione \mathcal{H} è la **somma** di energia cinetica ed energia potenziale, $\mathcal{H} = T + V$ (per una forza posizionale conservativa, l'energia potenziale V è uguale al potenziale cambiato di segno: $V = -U$): in questo caso, dunque, \mathcal{H} coincide con l'**energia totale** del sistema. In generale, \mathcal{H} è detta **energia generalizzata**.

Altri integrali primi possono essere ricavati quando la Lagrangiana, in un dato sistema di coordinate, risulta indipendente da una o più coordinate lagrangiane.

Notiamo innanzitutto che la funzione di Lagrange $L(q^\lambda, \dot{q}^\lambda, t)$ deve necessariamente dipendere da tutte le n velocità lagrangiane \dot{q}^λ , ossia non si può mai avere $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \equiv 0$ per alcun λ . Se così non fosse, infatti, la metrica dell'energia cinetica dovrebbe essere degenere, il che è escluso per definizione: l'energia cinetica è nulla se e solo se tutti i punti materiali del sistema sono in quiete; ma se la Lagrangiana non dipendesse da \dot{q}^λ per qualche λ , allora l'energia cinetica potrebbe avere valore nullo anche quando $\dot{q}^\lambda \neq 0$.

Per contro, la funzione di Lagrange può non dipendere da una o più coordinate lagrangiane q^λ . Le coordinate che non compaiono nella Lagrangiana sono allora dette **coordinate cicliche** o **ignorabili**. Ad esempio, la Lagrangiana di un singolo punto materiale non soggetto a vincoli né a forze si riduce alla sola energia cinetica: in coordinate cartesiane si ha $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ e quindi tutte e tre le coordinate (x, y, z) sono cicliche.

Proposizione 2. *La funzione $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}$ è detta **momento coniugato alla coordinata** q^λ . Se q^λ è una coordinata ciclica, la corrispondente equazione di Lagrange (1.5.18) è una legge di conservazione per il momento coniugato, che quindi è un integrale primo:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \right) = 0$$

Mentre l'energia generalizzata \mathcal{H} è una funzione quadratica (non omogenea) delle velocità lagrangiane, i momenti coniugati sono funzioni lineari delle velocità lagrangiane.

Osservazione – Il significato fisico dei momenti coniugati dipende dalla scelta delle coordinate: se si considera un singolo punto materiale, e si usano coordinate cartesiane, i tre momenti coniugati sono le tre componenti della **quantità di moto** $(m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$. Se invece si considera, ad esempio, un punto materiale nel piano descritto in coordinate polari, allora $T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$ e il momento coniugato alla coordinata angolare θ coincide con il **momento angolare** $m\rho^2\dot{\theta}$.

Vediamo ora in che modo la conoscenza di integrali primi può fornire informazioni sul moto del sistema.

1.7.1 Integrali primi e fogliettamento invariante dello spazio delle velocità

Supponiamo che un sistema olonomo con n gradi di libertà ammetta K integrali primi indipendenti fra loro, che non siano funzioni di t , $f_k : TQ \rightarrow \mathbb{R}$.

Assegnati K valori c_k di tali funzioni, chiamiamo **insieme di livello** il luogo dei punti di TQ individuato dalle equazioni $f_k(q^\lambda, \dot{q}^\lambda) = c_k$. Al variare dei valori c_k , tali insiemi di livello determinano una *partizione* di TQ che è detta **fogliettamento** indotto dalle funzioni f_k . Quando le funzioni f_k risultano indipendenti su tutti i punti di un insieme di livello, il teorema del valore regolare assicura che l'insieme di livello è una sottovarietà di TQ di dimensione $2n - K$. In generale esisteranno anche valori non regolari delle funzioni f_k : ad esempio, se una di queste funzioni ha un massimo o un minimo, in quel punto si avrà $df_k = 0$, quindi il corrispondente valore c_k non sarà regolare e l'insieme di livello potrà avere dimensione diversa, o avere dei punti di singolarità. Noi assumeremo che le funzioni f_k siano indipendenti *quasi ovunque*, ossia in un aperto denso di TQ (si noti che questo esclude dalla nostra discussione il caso di funzioni costanti su TQ : ogni funzione identicamente costante è banalmente una costante del moto, ma il suo differenziale è ovunque nullo).

Consideriamo ora un dato iniziale, rappresentato da un punto di TQ , $(q_0^\lambda, \dot{q}_0^\lambda)$. Sulla curva di moto (soluzione delle equazioni di Lagrange) corrispondente a tale dato iniziale si deve avere $f_k(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t)) = f_k(q_0^\lambda, \dot{q}_0^\lambda)$, per ogni t , dato che le f_k sono costanti del moto. Quindi ogni traiettoria del sistema in TQ deve appartenere all'insieme di livello delle funzioni f_k passante per il dato iniziale. La conoscenza di K integrali primi indipendenti, quindi, ci consente di “confinare” le traiettorie del sistema su sottovarietà di dimensione $2n - K$.

Se potessimo trovare esattamente $2n - 1$ integrali primi indipendenti, allora gli insiemi di livello sarebbero varietà unidimensionali, cioè curve, e avremmo in pratica individuato completamente le traiettorie del sistema. Questo avviene per tutti i sistemi autonomi con un solo grado di libertà, poiché in quel caso l'integrale primo dell'energia è sufficiente per determinare le traiettorie.

1.7.2 Equazione di Weierstrass per sistemi con un grado di libertà

Per sistemi autonomi con un solo grado di libertà, in effetti, la conservazione dell'energia totale consente anche di ricondurre il problema della determinazione del moto alla soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine, anziché del secondo. Infatti in questo caso avremo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}g(q)\dot{q}^2 - U(q);$$

detto $E = \mathcal{H}(q_0, \dot{q}_0)$ il valore iniziale dell'energia totale, si avrà per ogni t

$$\frac{1}{2}g(q)\dot{q}^2 - U(q) = E \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^2 = \frac{2(U(q) + E)}{g(q)}.$$

Un'equazione della forma

$$\boxed{\dot{q}^2 = W(q)} \tag{1.7.5}$$

è detta **equazione di Weierstrass**, e la funzione $W(q)$ è detta **funzione di Weierstrass** (per tale equazione)⁹.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione di Weierstrass contiene le soluzioni di due equazioni in forma normale,

$$\dot{q} = \sqrt{W(q)} \tag{1.7.6a}$$

$$\dot{q} = -\sqrt{W(q)}. \tag{1.7.6b}$$

Le soluzioni della prima equazione corrispondono a velocità iniziali positive, $\dot{q}_0 > 0$, mentre a $\dot{q}_0 < 0$ corrisponderanno soluzioni della seconda equazione (il caso $\dot{q}_0 = 0$ sarà considerato più oltre; come vedremo, in presenza di zeri della funzione W l'insieme delle soluzioni della (1.7.5) non coincide con l'unione delle soluzioni delle due equazioni in forma normale). Entrambe le equazioni si possono risolvere, formalmente, con il metodo generale di separazione delle variabili:

$$t(q, q_0) = \int_{q_0}^q \frac{ds}{\pm \sqrt{W(s)}}, \tag{1.7.7}$$

⁹Da non confondersi con la funzione, nota con lo stesso nome, che Weierstrass definì nel 1872 come esempio di funzione reale continua ovunque ma non derivabile in alcun punto.

da cui per inversione si ricava $q(t, q_0)$. La funzione $t(q, q_0)$ rappresenta il **tempo di percorrenza** necessario a raggiungere la configurazione q a partire dalla configurazione iniziale q_0 ; la funzione $t(q, q_0)$, come la stessa $W(q)$, dipende parametricamente dall'energia totale E , determinata a sua volta dallo stato iniziale (q_0, \dot{q}_0) del sistema. Il segno davanti alla radice deve essere scelto in base all'ordine fra q_0 e q : se $q_0 < q$, dobbiamo considerare soluzioni crescenti in t , che quindi soddisfino l'equazione (1.7.6a). Se invece $q_0 > q$, dovremo considerare il segno negativo. In entrambi i casi il tempo di percorrenza risulta positivo.

In realtà, solo in pochi casi è possibile scrivere una primitiva di $W(q)^{-1/2}$ in termini di funzioni note, quindi non è detto che per questa via si giunga a trovare effettivamente i moti del sistema. Tuttavia, l'equazione di Weierstrass permette sempre di determinare *qualitativamente* il moto del sistema. Nella configurazione iniziale q_0 , la funzione di Weierstrass è sicuramente non negativa, dato che deve essere $W(q_0) = \dot{q}_0^2 \geq 0$. Supponiamo ora che sia $W(q_0) > 0$. In questo caso, essendo W una funzione continua, essa è positiva in un intorno aperto di q_0 (che potrebbe essere l'intero spazio delle configurazioni Q , se $W(q)$ non ha zeri).

Se la funzione $W(q)$ è ovunque positiva su Q , ogni soluzione dell'equazione di Weierstrass è monotona; le soluzioni per velocità iniziali positive sono quelle dell'equazione (1.7.6a), per ogni velocità iniziale negativa vi sarà invece una soluzione dell'equazione (1.7.6b). Se lo spazio delle configurazioni è una retta avremo rispettivamente $q(t) \rightarrow \infty$ o $q(t) \rightarrow -\infty$. Se invece lo spazio delle configurazioni è un cerchio, le soluzioni saranno moti periodici che si avvolgono sul cerchio, rispettivamente in un verso o nell'altro, senza punti di inversione.

Supponiamo invece che la funzione $W(q)$ abbia uno zero a destra di q_0 , cioè si abbia $W(q) > 0$ per $q_0 \geq q > q^*$ e $W(q^*) = 0$. In questo caso, se $\dot{q}_0 > 0$ la soluzione $q(t; q_0)$ è monotona crescente finché non raggiunge q^* . In quanto tempo raggiungerà q^* ?

L'integrale (1.7.7), valutato in $q = q^*$, è un integrale improprio.

Se q^* è uno **zero semplice**, ossia $W'(q^*) \neq 0$, allora l'integrale converge, e il sistema raggiungerà la configurazione q^* in un tempo finito.

Se invece $W'(q^*) = 0$, ossia q^* è uno **zero doppio** (o con molteplicità superiore), l'integrale diverge e il sistema tenderà asintoticamente alla configurazione q^* senza mai raggiungerla.

Nel secondo caso (zero doppio) la soluzione è monotona crescente per tutti i $t > 0$, e si dice che il moto è **a meta asintotica**.

Nel caso di uno zero semplice, invece, la situazione è più complessa.

Se $W(q^*) = 0$, l'equazione (1.7.6a) ammette la soluzione costante $q(t) = q^*$. Se per tale equazione valessero le ipotesi del teorema di Cauchy, tale soluzione sarebbe unica, e il punto q^* non potrebbe essere raggiunto in un tempo finito partendo da una configurazione $q \neq q^*$. Ma se $W'(q^*) \neq 0$, allora la funzione $\sqrt{W(q)}$ ha derivata tendente a infinito per $q \rightarrow q^*$, quindi non soddisfa la condizione di Lipschitz; di conseguenza non vale l'unicità della soluzione¹⁰. Inoltre, poiché le soluzioni dell'equazione (1.7.6b) non sono altro che le soluzioni dell'equazione (1.7.6a) percorse all'indietro nel tempo ($t \mapsto -t$), è facile vedere che così come esiste una soluzione della (1.7.6a) che raggiunge q^* da q , esiste una soluzione della (1.7.6b) con dato iniziale q^* che raggiunge q dopo un uguale intervallo di tempo.

Le soluzioni della (1.7.5) per il dato iniziale q_0 , pertanto, sono infinite: la soluzione dell'equazione (1.7.6a), in un tempo finito T , raggiunge q^* ; il sistema può quindi permanere in quiete in q^* per

¹⁰Se $W'(q^*) = 0$, invece, la funzione $\sqrt{W(q)}$ è lipschitziana in q^* , e in effetti abbiamo già visto che in questo caso q^* non può essere raggiunto.

un tempo T^* arbitrariamente lungo, e infine (se $T^* < \infty$) uscire da q^* lungo la soluzione della (1.7.6b) che ripercorre all'indietro il segmento fra q^* e q_0 (mettendoci di nuovo il tempo T) e successivamente proseguire il moto a sinistra del valore iniziale. Nel caso di uno zero semplice possiamo quindi avere soluzioni di classe C^1 dell'equazione (1.7.5) che sono ottenute raccordando una soluzione della (1.7.6a) con una soluzione costante e poi con una soluzione della (1.7.6b).

Il fatto è che queste sono soluzioni della (1.7.5), ma *se il tempo T^* di permanenza in q^* è maggiore di zero, non sono soluzioni dell'equazione di Lagrange*. In effetti, noi abbiamo dimostrato che tutte le soluzioni dell'equazione di Lagrange sono anche soluzioni dell'equazione di Weierstrass (ossia della legge di conservazione dell'energia), ma non è vero l'inverso. Le infinite soluzioni della (1.7.5) che abbiamo costruito, passanti per uno zero semplice di $W(q)$, non sono di classe C^2 : l'accelerazione \ddot{q} , infatti, è nulla nell'intervallo di tempo in cui il sistema permane in q^* , ma è discontinua negli estremi di tale intervallo¹¹. L'unica soluzione di questo tipo che è effettivamente di classe C^2 , ed è soluzione dell'equazione di Lagrange, è quella in cui $T^* = 0$, ossia il sistema raggiunge q^* con velocità nulla e immediatamente inverte la direzione. Pertanto, uno zero semplice della funzione di Weierstrass costituisce un **punto di inversione** del moto.

Tutto questo si può ripetere, *mutatis mutandis*, nel caso di uno zero posto a sinistra del dato iniziale. Resta da esaminarlo il caso in cui la funzione di Weierstrass si annulla proprio nel punto iniziale, $W(q_0) = 0$. Anche in questo caso, si può vedere che se $W'(q_0) = 0$ (il punto iniziale è uno zero almeno doppio di W) allora la soluzione costante $q(t) = q_0$ è soluzione dell'equazione di Lagrange. Se invece lo zero è semplice, $W'(q_0) \neq 0$, l'accelerazione del punto non sarà nulla e il sistema si muoverà nella direzione in cui la funzione W diventa positiva (quindi verso destra se $W'(q_0) > 0$, verso sinistra se $W'(q_0) < 0$).

In conclusione, il solo studio della funzione di Weierstrass ci permette con facilità di determinare qualitativamente il moto del sistema, senza dover integrare l'equazione differenziale: una volta individuati gli zeri della funzione $W(q)$, e di conseguenza gli intervalli in cui $W(q)$ è positiva, sappiamo che il moto del sistema sarà confinato a uno di questi intervalli. Se entrambi gli estremi dell'intervallo corrispondono a zeri semplici di W , allora il moto sarà periodico, con periodo uguale al doppio del tempo di percorrenza fra i due punti di inversione, che si calcola con l'integrale (1.7.7). In tutti gli altri casi il moto sarà illimitato o tenderà a una meta asintotica. L'andamento qualitativo delle soluzioni dipenderà dal valore costante E dell'energia totale: si dovrà quindi studiare come varia il grafico di W al variare di E .

¹¹ Infatti, derivando la (1.7.5) si vede subito che quando $\dot{q} \neq 0$ si ha $2\ddot{q} = W'(q)$; dunque quando $q \rightarrow q^*$ si ha $\ddot{q} \rightarrow \frac{1}{2}W'(q^*) \neq 0$.

1.7.3 Equazione di Weierstrass per sistemi con due gradi di libertà: il caso dei moti centrali

Nel caso di sistemi con $n > 1$, la sola conservazione dell'energia non consente di arrivare a un'equazione di Weierstrass. Vediamo però che cosa avviene se sono note altre costanti del moto.

Un caso particolare è quello in cui non c'è alcuna interazione fra i gradi di libertà: le coordinate lagrangiane sono tali che

1. la matrice della metrica è diagonale, e ogni elemento diagonale dipende al più dalla coordinata corrispondente: ad esempio, nel caso $n = 2$, si ha $g_{11} = g_{11}(q^1)$, $g_{22} = g_{22}(q^2)$, $g_{12} = g_{21} = 0$.
2. il potenziale è la somma di n termini, ciascuno dipendente da una sola coordinata: $U(q^\lambda) = U_1(q^1) + U_2(q^2) + \dots + U_n(q^n)$.

Sotto queste condizioni, si vede facilmente che l'energia totale \mathcal{H} risulta la somma di n funzioni, $\mathcal{H}(q^\lambda, \dot{q}^\lambda) = \mathcal{H}_1(q^1, \dot{q}^1) + \mathcal{H}_2(q^2, \dot{q}^2) + \dots + \mathcal{H}_n(q^n, \dot{q}^n)$ e che le funzioni $\mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_n$ sono tutte separatamente costanti del moto. In questo caso si ottengono n leggi di conservazione che conducono ad altrettante equazioni di Weierstrass, una per ciascuna coordinata lagrangiana. Di fatto, se è possibile trovare un sistema di coordinate lagrangiane in cui siano soddisfatte le due condizioni di cui sopra, i gradi di libertà del sistema sono completamente disaccoppiati fra loro ed evolvono in modo indipendente: quindi il moto del sistema è la sovrapposizione di n moti unidimensionali. Questo avviene, ad esempio, quando si considera un sistema di punti soggetti solo a forze di tipo elastico (approfondiremo questo esempio più oltre, discutendo i moti di un sistema intorno a una configurazione di equilibrio stabile); in tal caso, tuttavia, le equazioni del moto sono tutte lineari, pertanto è sempre possibile diagonalizzarle e risolverle direttamente.

Nel caso di sistemi non lineari, una tipica situazione in cui si può ricondurre lo studio del moto a quello di un'equazione di Weierstrass si presenta per sistemi con due gradi di libertà per i quali esiste una coordinata ciclica in un sistema di coordinate *ortogonali*.

Per migliore leggibilità delle formule, qui di seguito denoteremo le due coordinate con (ρ, θ) – senza supporre che siano coordinate polari! – e di queste θ sarà la coordinata ciclica.

Il momento coniugato, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, dipenderà solo da ρ e (linearmente) da $\dot{\theta}$. Infatti, la Lagrangiana per ipotesi non dipende da θ , e se le coordinate sono ortogonali $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\rho} \partial \dot{\theta}} = g_{12} \equiv 0$.

Di conseguenza, la legge di conservazione del momento coniugato si potrà mettere nella forma

$$\dot{\theta} = \frac{J}{g_{22}(\rho)}, \quad (1.7.8)$$

dove J è il valore del momento coniugato a θ , calcolato sul dato iniziale. D'altra parte, per l'energia totale si avrà in questo caso

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(g_{11}(\rho) \dot{\rho}^2 + g_{22}(\rho) \dot{\theta}^2 \right) - U(\rho) = E;$$

in quest'espressione possiamo sostituire $\dot{\theta}$ utilizzando la (1.7.8), ottenendo una legge di conservazione in cui compaiono solo ρ e $\dot{\rho}$:

$$\frac{1}{2} \left(g_{11}(\rho) \dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{g_{22}(\rho)} \right) - U(\rho) = E; \quad (1.7.9)$$

Da questa potremo ricavare l'equazione di Weierstrass

$$\dot{\rho}^2 = \frac{1}{g_{11}(\rho)} \left(2E + 2U(\rho) - \frac{J^2}{g_{22}(\rho)} \right) = W(\rho; E, J) \quad (1.7.10)$$

A questo punto, l'evoluzione della coordinata ρ si può studiare come già visto nella sezione precedente. Se si riesce a integrare l'equazione di Weierstrass, $\rho(t)$ diventa una funzione nota, e si può sostituire nella (1.7.8): questa, a sua volta, a quel punto si integra immediatamente e in questo modo si determina anche $\theta(t)$.

Se invece non si riesce a scrivere la soluzione dell'equazione di Weierstrass (1.7.10) in termini di funzioni note, si può comunque determinare qualitativamente il moto: da un lato, lo studio del grafico di $W(\rho; E, J)$ permette di determinare sotto quali condizioni l'evoluzione della coordinata ρ può essere mononona illimitata, monotona a meta asintotica oppure periodica.

Dall'altro lato, la legge di conservazione (1.7.8) implica che θ resti costante se $J = 0$, oppure evolva in modo monotono (e periodico, se si tratta di una coordinata angolare) se $J \neq 0$. Infatti, g_{22} ha segno sempre positivo (essendo le coordinate ortogonali e la metrica definita positiva), quindi $\dot{\theta}$ ha sempre lo stesso segno di J .

A differenza del caso $n = 1$, se la funzione $W(\rho; E, J)$ ha uno zero doppio in ρ^* allora questo non corrisponde alla quiete (se $\rho_0 = \rho^*$) o a una traiettoria che tende asintoticamente a un punto (se $\rho_0 \neq \rho^*$) bensì, nel primo caso, a un moto lungo la *curva coordinata* $\rho = \rho^*$, o nel secondo caso a una traiettoria che tende asintoticamente a quella stessa curva coordinata (per $t \rightarrow \infty$ oppure per $t \rightarrow -\infty$, a seconda del segno di $\dot{\rho}_0$).

Se invece si ha in ρ^* uno zero semplice, la traiettoria interseca *tangenzialmente* la curva coordinata $\rho = \rho^*$ e “rimbalza” su di essa, restando dallo stesso lato.

Se l'intervallo in cui $W(\rho; E, J) \geq 0$ è compreso fra due zeri semplici ρ_{min} e ρ_{max} , allora la traiettoria è contenuta nella regione delimitata dalle due curve coordinate $\rho = \rho_{min}$ e $\rho = \rho_{max}$.

Ad esempio, nel caso di un potenziale centrale nel piano si ha

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - U(\rho) \quad (1.7.11)$$

(questa volta ρ e θ sono proprio coordinate polari); la conservazione del momento angolare e quella dell'energia totale generano un'equazione di Weierstrass per la coordinata radiale:

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m} (E + U(\rho)) - \frac{J^2}{m^2 \rho^2}. \quad (1.7.12)$$

Anche nel caso di un punto che si muove su una superficie di rotazione, con equazione $z = f(\rho)$ in coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , se il potenziale non dipende da θ possiamo applicare quanto detto: la parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = f(\rho), \end{cases} \quad (1.7.13)$$

quindi la Lagrangiana avrà la forma

$$L = \frac{m}{2} ([1 + f'(\rho)^2] \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - U(\rho) \quad (1.7.14)$$

e si dovrà studiare l'equazione

$$\dot{\rho}^2 = \frac{1}{1 + f'(\rho)^2} \left(2E + 2U(\rho) - \frac{J^2}{\rho^2} \right) \quad (1.7.15)$$

Sempre nel caso di due gradi di libertà si può osservare che la traiettoria del moto (ossia l'immagine della curva di moto in Q), se vale la (1.7.8), dovrà potersi esprimere attraverso una funzione $\rho = \rho(\theta)$. Per il teorema della funzione implicita, la derivata di questa funzione sarà data da

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta}} = \frac{g_{22}(\rho)\sqrt{W(\rho; E, J)}}{J};$$

anche questa equazione, in linea di principio, è integrabile per separazione di variabili.

Una situazione tipica, nel caso di moti centrali nel piano, è quella in cui la funzione di Weierstrass (per $\rho > 0$) è positiva in un intervallo finito compreso fra due zeri semplici. Questo avviene, ad esempio, nel caso del potenziale elastico $U = -\frac{k}{2}\rho^2$ (per qualsiasi valore di E e $J \neq 0$), o nel caso del potenziale newtoniano $U = -\frac{k}{\rho}$ (quando $J \neq 0$ e $E < 0$). In tal caso, come abbiamo visto, la funzione $\rho(t)$ varia con legge periodica fra i due zeri ρ_{\min} e ρ_{\max} . Per quanto riguarda il moto angolare, tuttavia, la (1.7.8) non implica affatto che la funzione $\theta(t)$ abbia il medesimo periodo.

Esaminiamo il caso del potenziale elastico. La funzione di Weierstrass in questo caso è

$$W(\rho; E, J) = \frac{2}{m} \left(E + \frac{k}{2}\rho^2 \right) - \frac{J^2}{m^2\rho^2}$$

e si annulla nei punti

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{km}} \sqrt{mE \pm \sqrt{m^2 E^2 - kmJ}}.$$

Una primitiva di $W(\rho; E, J)^{-1/2}$ è

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \arctan \left(\frac{E - k\rho^2}{\sqrt{km\rho^2 W(\rho; E, J)}} \right);$$

calcolando i valori della primitiva in corrispondenza dei due zeri di W , poiché l'argomento dell'arcotangente tende a infinito, si trova $\pm \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{m}{k}}$: il periodo T_ρ per il moto radiale è il doppio della differenza fra questi due valori, e quindi si trova che in questo caso $T_\rho = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, che è indipendente dai valori di E e J . Questo periodo è esattamente la metà del periodo del moto angolare (non sarebbe per nulla facile ricavarlo dalla (1.7.8): ma noi conosciamo benissimo la soluzione, visto che in coordinate cartesiane le equazioni di Lagrange si integrano immediatamente e danno, per x e y , due moti armonici di uguale periodo $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$). In questo caso, quindi, il rapporto fra periodo radiale e periodo angolare è sempre un numero razionale e le orbite sono curve chiuse.

Se però modifichiamo anche di poco il potenziale, ad esempio considerando una molla elastica con lunghezza a riposo L non nulla (in questo caso avremmo $U = -\frac{k}{2}(\rho - L)^2$), i due periodi – radiale e angolare – non risultano più indipendenti dai valori di E e J , e in generale il loro rapporto non è razionale: la traiettoria nel piano non è una curva chiusa, bensì una curva che riempie densamente la corona circolare compresa fra due circonferenze (corrispondenti ai due zeri semplici di W).

Per una discussione dettagliata di diversi esempi di studio del moto con l'equazione di Weierstrass (in particolare, del caso del potenziale newtoniano), si veda S. Benenti, *Lezioni di Meccanica Razionale a.a. 1994-95, Parte seconda*, p. 39–54.

1.7.4 Il teorema di Noether

Fin qui abbiamo mostrato che la conoscenza di integrali primi è fondamentale per lo studio di un sistema olonomo; ma finora siamo stati in grado di trovare integrali primi solo nei casi in cui la Lagrangiana non dipende dal tempo, o non dipende da una delle coordinate lagrangiane. Un fondamentale risultato dovuto a Emmy Noether (1882–1935)¹² collega l'esistenza di integrali primi non alla scelta del sistema di coordinate (che non è una proprietà intrinseca del sistema) ma alle proprietà di *simmetria*, ossia di *invarianza rispetto a trasformazioni che dipendono con continuità da un parametro*, della Lagrangiana che descrive il sistema.

Per ottenere questo risultato dobbiamo utilizzare le seguenti definizioni e proprietà.

- Un **flusso (di trasformazioni)** su una varietà M è una famiglia di mappe $\varphi_\epsilon : M \rightarrow M$ dipendenti da un parametro reale ϵ , tali che
 1. per ogni ϵ , φ_ϵ è una mappa invertibile e differenziabile in entrambi i sensi (ovvero un diffeomorfismo);
 2. la mappa φ_0 è la mappa identità su M ;
 3. dati due valori reali arbitrari α e β , $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$.

Si noti che le proprietà (2) e (3) implicano $(\varphi_\epsilon)^{-1} = \varphi_{-\epsilon}$.

- Dato un campo vettoriale \mathbf{X} su una varietà M , l'insieme delle curve integrali genera un flusso su M ; nel seguito denoteremo con ϵ , anziché con t , il parametro di evoluzione, dato che stiamo descrivendo le simmetrie di un sistema e non la sua evoluzione temporale. Detta $\gamma : \epsilon \mapsto \mathbf{x}(\epsilon; \mathbf{x}_0)$ la curva integrale con dato iniziale $\mathbf{x}_0 \in M$, il flusso generato dal campo vettoriale \mathbf{X} è dato da $\varphi_\epsilon : \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(\epsilon; \mathbf{x}_0)$. In altri termini, anziché considerare l'evoluzione di un singolo punto iniziale al variare di ϵ , si considera per ϵ fissato l'immagine di ciascun possibile punto di M . In generale, però, le curve integrali di un campo vettoriale non sono estese a tutto \mathbb{R} : l'intervallo massimale di \mathbb{R} in cui è definita ciascuna curva integrale può dipendere dal dato iniziale \mathbf{x}_0 . In questo caso si parla ancora di flusso, ma la proprietà (3) vale solo per i valori α e β del parametro per cui sono definite le tre mappe φ_α , φ_β e $\varphi_{\alpha+\beta}$. Un campo vettoriale è detto **completo** se tutte le sue curve integrali si estendono a tutto \mathbb{R} ; un teorema assicura che su una varietà *compatta* tutti i campi vettoriali sono completi. Per semplicità, nel seguito supporremo tacitamente che i flussi di cui parliamo siano definiti per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}$.
- Ogni flusso è generato da un campo vettoriale. Dalla definizione esplicita in coordinate di un flusso, $\varphi_\epsilon : q^\mu \mapsto q^\mu_\epsilon$, si può risalire al campo vettoriale corrispondente (detto **generatore infinitesimo** del flusso) mediante la formula

$$\mathbf{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} = \left. \frac{dq^\mu_\epsilon}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^\mu}. \quad (1.7.16)$$

¹²In occasione della morte di Emmy Noether, Albert Einstein la commemorò in un articolo sul *New York Times*, definendola “*the most significant creative mathematical genius thus far produced since the higher education of women began*”; il matematico Norbert Wiener la definì a sua volta *the greatest woman mathematician who has ever lived; and the greatest woman scientist of any sort now living, and a scholar at least on the plane of Madame Curie*. Oltre ai suoi risultati in fisica matematica, a Emmy Noether si devono fondamentali contributi nel campo dell'algebra astratta.

- Se due campi vettoriali \mathbf{X} e \mathbf{Y} commutano, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$, allora anche i rispettivi flussi commutano: denotando i due flussi con φ_ϵ e ψ_η rispettivamente, per ogni coppia di valori (ϵ, η) si ha $\varphi_\epsilon \circ \psi_\eta = \psi_\eta \circ \varphi_\epsilon$. Questo implica che l'immagine sotto ψ_η di una curva integrale di \mathbf{X} è ancora una curva integrale di \mathbf{X} ; analogamente, il flusso φ_ϵ manda curve integrali di \mathbf{Y} in curve integrali di \mathbf{Y} . In questo senso, due campi vettoriali che commutano agiscono ciascuno come *simmetria* per il flusso dell'altro.
- Una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è **invariante** per il flusso φ_ϵ se $f \circ \varphi_\epsilon = f$ per ogni ϵ . Una funzione f è invariante se e solo se la sua derivata direzionale lungo il generatore infinitesimo del flusso si annulla, $\mathbf{X}(f) = 0$. In altri termini, le funzioni invarianti sono costanti lungo ciascuna curva integrale del campo \mathbf{X} .
- Dato un flusso φ_ϵ su una varietà M , si può costruire un flusso corrispondente sul fibrato tangente TM . Questo flusso è detto **rilevamento tangente** del flusso ed è denotato con $\hat{\varphi}_\epsilon : TM \rightarrow TM$. La definizione è basata sul concetto di **mappa tangente**, e cioè sul fatto che una mappa differenziabile fra varietà, così come manda ciascun punto nella sua immagine, così manda una generica curva sulla varietà dominio in una curva sulla varietà codominio. Si può mostrare facilmente che se due curve sono tangenti nel dominio, le loro immagini sotto una mappa differenziabile sono tangenti nel codominio. Quindi la mappa manda le classi di equivalenza di curve tangenti in un punto (ossia i vettori tangenti in quel punto) in classi di equivalenza di curve tangenti (ovvero in vettori tangenti) nel punto immagine. Questa è la definizione di mappa tangente, che non è altro che la mappa lineare rappresentata dalla **matrice jacobiana** della mappa fra varietà. Se applichiamo questo concetto ai diffeomorfismi φ_ϵ di un flusso, otteniamo il suo rilevamento tangente, che in coordinate agisce in questo modo:

$$\hat{\varphi}_\epsilon : (q^\mu, u^\mu) \mapsto \left(q_\epsilon^\mu, u_\epsilon^\mu = \frac{\partial q_\epsilon^\mu}{\partial q^\lambda} u^\lambda \right) \quad (1.7.17)$$

- Il generatore infinitesimo del rilevamento tangente di un flusso, che denotiamo con $\hat{\mathbf{X}}$, ha dunque le seguenti componenti:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \left. \frac{dq_\epsilon^\mu}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \left. \frac{du_\epsilon^\mu}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial u^\mu} = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\partial q_\epsilon^\mu}{\partial q^\lambda} \right) \bigg|_{\epsilon=0} u^\lambda \frac{\partial}{\partial u^\mu} = \\ &= X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} u^\lambda \frac{\partial}{\partial u^\mu}, \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

dove le X^λ sono le componenti del generatore infinitesimo del flusso φ_ϵ su M , e l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $\frac{d}{d\epsilon} \frac{\partial q_\epsilon^\mu}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial^2 q_\epsilon^\mu}{\partial \epsilon \partial q^\lambda} = \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \frac{dq_\epsilon^\mu}{d\epsilon} = \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda}$.

Ora applichiamo questi concetti per definire una simmetria di un sistema olonomo:

Sia $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Lagrange e sia $\varphi_\epsilon : Q \rightarrow Q$ un flusso sullo spazio delle configurazioni Q ; sia $\mathbf{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}$ il suo generatore infinitesimo. Diciamo che φ_ϵ è una **simmetria** per la Lagrangiana L se per ogni ϵ si ha $L \circ \hat{\varphi}_\epsilon = L$, o equivalentemente se $\hat{\mathbf{X}}(L) = 0$.

Vi sono diversi aspetti che qui motivano l'uso del termine *simmetria*, che è sinonimo di *invarianza sotto una trasformazione*. La condizione $\hat{X}(L) = 0$ dice che la Lagrangiana è una funzione invariante sotto il flusso, e di conseguenza anche le equazioni di Lagrange risultano invarianti. Questo implica che per ogni curva di moto γ , soluzione delle equazioni di Lagrange, anche la sua immagine $\varphi_\epsilon \circ \gamma$ sotto il flusso, per ϵ qualunque, è soluzione delle stesse equazioni di Lagrange¹³.

D'altro lato, consideriamo il campo vettoriale che genera l'evoluzione temporale in TQ descritta dalle equazioni di Lagrange. Per una Lagrangiana della forma (1.6.1) questo campo, che denotiamo con X_L , è

$$X_L = u^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda} + \left(-\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu + g^{\lambda\mu} \frac{\partial U}{\partial q^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial u^\lambda}; \quad (1.7.19)$$

la condizione di simmetria $\hat{X}(L) = 0$ implica che il commutatore fra i due campi vettoriali si annulli: $[\hat{X}, X_L] = 0$.¹⁴ Quindi il flusso di simmetria generato da \hat{X} manda ogni curva di moto (ossia ogni curva integrale di X_L) in un'altra curva di moto. La conoscenza di una simmetria di un sistema olonomo permette dunque, in linea di principio, di costruire nuove soluzioni a partire da eventuali soluzioni note.

Tuttavia, nei casi in cui non si sanno integrare le equazioni del moto e tuttavia si è in grado di individuare soluzioni particolari, queste si riducono in genere alle soluzioni costanti (configurazioni di equilibrio) oppure alle soluzioni che godono esse stesse della medesima simmetria; in entrambi i casi, queste soluzioni non ne generano altre che non abbiano la medesima proprietà.

Ai fini sia teorici, sia pratici, ciò che rende importante la conoscenza di una simmetria è piuttosto la possibilità di individuare una costante del moto associata ad essa, grazie alla proprietà seguente:

Proposizione 3 (E. Noether).

Se un campo vettoriale $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}$ sullo spazio delle configurazioni Q genera una simmetria per la Lagrangiana L , allora sulle curve di moto del sistema olonomo la quantità $X^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu}$ è una costante del moto.

Infatti, se assumiamo $\hat{X}(L) = 0$ e consideriamo una qualsiasi soluzione delle equazioni di Lagrange per L , ossia una curva $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TQ$ tale che

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{X}(L) = X^\mu \frac{\partial L}{\partial q^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} u^\lambda \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = X^\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) + \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \\ &= X^\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) + \frac{dX^\mu}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{d}{dt} \left(X^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right); \end{aligned}$$

¹³Vedremo più oltre come questo si può facilmente dimostrare usando il formalismo variazionale. Più in generale, quando un'equazione differenziale è invariante per una data trasformazione, questo non implica che le soluzioni siano a loro volta invarianti per tale trasformazione: implica, invece, che l'immagine di una soluzione sia ancora una soluzione, corrispondente a un diverso dato iniziale.

¹⁴Questo sarebbe piuttosto laborioso da verificare con il calcolo esplicito, ma saremo in grado di dimostrarlo facilmente più avanti, con gli strumenti della meccanica hamiltoniana.

abbiamo quindi dimostrato l'enunciato.

Discuteremo per ora un solo esempio di applicazione del teorema di Noether: quello di un punto soggetto a un potenziale centrale in \mathbb{R}^3 . In coordinate cartesiane ortonormali, la Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Mostreremo ora che questa Lagrangiana è invariante per qualunque rotazione attorno all'origine.

Una generica rotazione si può sempre scrivere come composizione di una rotazione intorno all'asse x , una rotazione intorno all'asse y e una intorno all'asse z . Consideriamo quindi in primo luogo la famiglia di trasformazioni di \mathbb{R}^3 definita in questo modo:

$$\phi_\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) & 0 \\ -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

essa rappresenta le rotazioni di angolo ϵ intorno all'asse z , ed è facile verificare che si tratta di un flusso. Il suo generatore infinitesimo si ottiene applicando la formula (1.7.16), e risulta essere il campo vettoriale

$$\mathbf{Z} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

Il generatore del rilevamento tangente del flusso in $T\mathbb{R}^3$ è dunque

$$\hat{\mathbf{Z}} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}$$

e si trova facilmente che $\hat{\mathbf{Z}}(L) = 0$. Si noti che l'energia cinetica T e il potenziale U sono separatamente invarianti per questo flusso. Questa è una situazione generale: per Lagrangiane della forma (1.6.1) ogni simmetria noetheriana è necessariamente un'**isometria** per la metrica dell'energia cinetica, che in più lascia anche invariato il potenziale. Le rotazioni intorno all'asse z sono dunque una simmetria di L ; la corrispondente quantità conservata è

$$J_3 = y \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - x \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(y\dot{x} - x\dot{y}).$$

Se ora consideriamo le rotazioni attorno all'asse y , ossia il flusso

$$\psi_\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & 0 & -\sin(\epsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\epsilon) & 0 & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

generato dal campo vettoriale

$$\mathbf{Y} = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{Y}} = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} - \dot{z} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{z}}$$

troviamo che $\hat{\mathbf{Y}}(L) = 0$, e l'integrale primo che ne deriva è $J_2 = -z \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + x \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m(x\dot{z} - z\dot{x})$.

Infine, per le rotazioni attorno all'asse x costituiscono il flusso

$$\xi_\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) \\ 0 & -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

i generatori del flusso e del suo rilevamento tangente sono quindi, rispettivamente,

$$\mathbf{X} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{\mathbf{X}} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{z}}.$$

Anche in questo caso, con il calcolo esplicito si trova $\hat{\mathbf{X}}(L) = 0$, da cui l'integrale primo $J_1 = m(z\dot{y} - y\dot{z})$.

In questo modo abbiamo mostrato che la Lagrangiana in questione è invariante per qualsiasi rotazione, e abbiamo trovato tre integrali primi – indipendenti fra loro – che dal punto di vista fisico corrispondono alle tre componenti del momento angolare del sistema. Per fare questo non abbiamo dovuto scegliere un particolare sistema di coordinate.

Se avessimo scelto un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , con l'asse z come asse polare, avremmo trovato che

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right) + U(r)$$

e la longitudine θ è una coordinata ciclica per L , da cui segue la conservazione dell'integrale primo J_3 , che coincide con il momento coniugato a θ . In quel sistema di coordinate, tuttavia, non avremmo trovato altre coordinate cicliche. Per ottenere gli altri due integrali primi come momenti coniugati a coordinate cicliche dovremmo considerare altri due sistemi di coordinate sferiche, in cui l'asse polare è scelto coincidente con l'asse y e con l'asse x , rispettivamente; in ciascuno di questi sistemi troviamo una sola coordinata ciclica.

La stessa cosa avviene se usiamo coordinate cilindriche anziché sferiche. In effetti, si può dimostrare che non esiste alcun sistema di coordinate in cui una Lagrangiana per un punto materiale soggetto a forze possa avere tre coordinate cicliche: se esistesse, infatti, la metrica dovrebbe risultare costante e così pure il potenziale, quindi non potrebbero esservi forze agenti.

Il legame fra simmetrie e costanti del moto, invece, è indipendente dalle coordinate, e così abbiamo potuto identificare in un solo sistema di coordinate cartesiane tre integrali primi per la nostra Lagrangiana, benché non vi sia nessuna coordinata ciclica.

Una conseguenza della conservazione delle tre componenti del momento angolare, per un potenziale centrale, è che ogni traiettoria del punto materiale giace sempre in un piano passante per l'origine (cioè per il centro della forza). Infatti, facendo il prodotto scalare del vettore $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ con il vettore velocità $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ e con il vettore posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$ si trova subito (stiamo usando coordinate cartesiane ortonormali!) che $\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ e $\mathbf{J} \cdot \mathbf{r} \equiv 0$. Dato che \mathbf{J} è costante, se $\mathbf{J} \neq 0$ ne segue che tutte le velocità e posizioni su una data orbita devono essere complanari (poiché devono essere perpendicolari a \mathbf{J}), e pertanto l'orbita è piana.

Questo è motivo per cui i problemi di moti centrali si trattano sempre come problemi piani, anche se il punto materiale non è vincolato a stare su un piano: se nello stato iniziale del sistema dovesse essere $\mathbf{J} = 0$ (il che vuol dire che la velocità iniziale è nulla o è parallela a \mathbf{r}), allora si trova facilmente che il moto deve essere lungo una retta passante per l'origine, quindi si conosce già direttamente la traiettoria.

Se invece $\mathbf{J} \neq 0$, si individua il piano contenente la posizione e la velocità iniziali $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$, e si sa a priori che il moto sarà tutto contenuto in quel piano; si scrive quindi la Lagrangiana ristretta ad esso, trattando il sistema come se avesse due gradi di libertà. In questo modo due delle leggi di conservazione sono identicamente soddisfatte; sopravvive solo la terza, che corrisponde alla componente del momento angolare ortogonale al piano orbitale. Questa costante del moto, scegliendo coordinate polari (r, θ) nel piano orbitale, non è altro che il momento coniugato a θ , $J = mr^2\dot{\theta}$.

1.8 Equilibrio, stabilità, piccole oscillazioni

In questa sezione affronteremo la ricerca delle eventuali **soluzioni costanti** delle equazioni del moto di un sistema autonomo e la descrizione approssimata del moto per stati iniziali vicini alle soluzioni costanti.

Una curva di moto costante, della forma $q^\lambda(t; q_0^\mu, u_0^\mu) = q_0^\lambda$, è soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange per un sistema autonomo se e solo se

$$\begin{cases} \dot{q}^\mu = u^\mu = 0 \\ \dot{u}^\mu = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu + g^{\lambda\mu} \frac{\partial U}{\partial q^\mu} = 0; \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricava che deve essere $u_0^\mu = 0$; sostituendo $u^\mu = 0$ nella seconda e tenendo conto che la metrica è non degenere, si trova che $\forall \mu$ deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q_0^\lambda) = 0, \quad (1.8.1)$$

quindi il sistema può restare in quiete solo se viene posto *con velocità iniziale nulla* in una configurazione che sia un *punto di stazionarietà per il potenziale U* . Una tale configurazione è detta **configurazione di equilibrio**.

Poiché la forza lagrangiana coincide con il gradiente del potenziale, le configurazioni di equilibrio sono quelle in cui la forza lagrangiana si annulla; questo, ad esempio, può avvenire in sistemi vincolati che ammettano configurazioni in cui le forze agenti sono interamente bilanciate dalle reazioni vincolari. Non tutti i sistemi olonomi ammettono configurazioni di equilibrio: si pensi ad esempio a una forza costante, o a una forza centrale repulsiva, in assenza di vincoli.

Da molti punti di vista, è conveniente introdurre i concetti di equilibrio e stabilità in un contesto più generale di quello dei sistemi olonomi. Daremo quindi ora alcune definizioni che riguardano il caso di un campo vettoriale \mathbf{X} su una varietà differenziabile M qualsiasi: successivamente applicheremo questi concetti al campo \mathbf{X}_L sullo spazio delle velocità TQ di un sistema olonomo.

Sia \mathbf{X} un campo vettoriale su una varietà M .

Un punto $x^* \in M$ in cui il campo si annulla, $\mathbf{X}(x^*) = 0$, è detto **punto critico** del campo vettoriale.

Per ogni punto critico esiste una curva integrale di \mathbf{X} costante, $x(t, x^*) = x^*$.

Se le componenti del campo \mathbf{X} sono funzioni derivabili delle coordinate, allora per il teorema di Cauchy la curva integrale costante è l'unica che abbia il punto critico x^* come dato iniziale, e partendo da un dato iniziale diverso non si può raggiungere un punto critico x^* in un tempo finito.

Per contro, se si considera ad esempio il campo vettoriale $\mathbf{X} = \sqrt{|x|} \frac{\partial}{\partial x}$ su \mathbb{R} , si trova che la sua componente non è derivabile nel punto critico $x^ = 0$, quindi non si applica il teorema di Cauchy: in effetti per questo campo vettoriale esistono soluzioni non costanti con dato iniziale x^* , mentre le soluzioni con dato iniziale $x_0 < 0$ giungono in x^* in un tempo finito.*

Ora definiamo il concetto di stabilità di un punto critico, che concerne il comportamento delle soluzioni per dati iniziali “vicini” al punto critico. A questo fine non c'è bisogno di aver assegnato una nozione di “distanza” fra punti della varietà M , è sufficiente la struttura topologica:

Un punto critico x^* del campo \mathbf{X} è detto **stabile** se per ogni intorno aperto A di x^* esiste un intorno aperto $B \subseteq A$ tale che per ogni $x_0 \in B$ la curva integrale $x(t; x_0)$ appartiene ad A per ogni $t > 0$.

Un punto critico è detto **instabile** se non è stabile.

Il significato della definizione di stabilità è questo: un punto critico è stabile se è possibile garantire che la curva integrale resti indefinitamente (per $t > 0$) vicina a x^* (ossia confinata in un aperto A arbitrariamente piccolo) a patto di prendere il dato iniziale in un opportuno intorno aperto B di x^* (che potrebbe non coincidere con tutto A).

Nella definizione si devono necessariamente introdurre due intorni aperti, uno arbitrario (A) e l'altro determinato dal primo (B): è facile, infatti, costruire degli esempi in cui B deve essere un sottoinsieme proprio di A . Si consideri nel piano il campo vettoriale

$$\mathbf{X} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y};$$

sappiamo che le curve integrali di questo campo sono circonferenze centrate nell'origine, percorse uniformemente. L'origine è l'unico punto critico del campo. Se prendiamo per A un rettangolo aperto centrato nell'origine, e si considera il cerchio inscritto in tale rettangolo, si vede facilmente che i punti di A esterni a tale cerchio inscritto "escono" da A per alcuni intervalli di tempo. Se però si sceglie B come l'interno di tale cerchio, tutte le curve integrali basate in B restano indefinitamente all'interno di A .

Nella definizione è importante richiedere che B sia un aperto, non un generico sottoinsieme di A . Consideriamo il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{X} = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y};$$

l'origine è ancora l'unico punto critico. Le traiettorie di tutte le altre soluzioni basate in punti non appartenenti agli assi sono iperboli equilateri: tali soluzioni per $t \rightarrow \infty$ tendono ad infinito, avvicinandosi asintoticamente all'asse x . Quindi, comunque si scelga un aperto A , non esiste nessun aperto B con la proprietà richiesta: l'origine è dunque un punto critico instabile. Tuttavia, se si considera l'intersezione B' di A con l'asse y , che sicuramente non è vuota, si vede che tutte le curve basate in B' tendono asintoticamente all'origine, quindi (se A è convesso) non escono da A : ma B' non è un aperto, quindi questo non contraddice la definizione che è stata data.

Per determinare se un punto critico è stabile, apparentemente si dovrebbe dimostrare che vale la proprietà descritta nella definizione, e non è evidente come questo si possa fare nei casi in cui non si conosce la forma generale delle curve integrali. Esiste tuttavia un criterio diverso, dovuto ad Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857–1918).

Sia \mathbf{X} un campo vettoriale, x^* un suo punto critico, \mathcal{U} un intorno aperto di x^* .

Una funzione $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 è detta una **funzione di Ljapunov** per il campo vettoriale (\mathbf{X}) e per il punto critico x^* se

- (A) F ha un minimo isolato in x^* ;
- (B) la sua derivata direzionale lungo \mathbf{X} non è mai positiva: $\mathbf{X}(F) \leq 0$ su tutto \mathcal{U} .

Se F è una funzione di Ljapunov, allora lo è anche $F + c$, per qualunque valore costante c . Dunque, sottraendo a una generica funzione di Ljapunov il valore $F(x^*)$ ed eventualmente restringendo l'intorno \mathcal{U} si può sempre trovare una funzione di Ljapunov che si annulla in x^* ed è positiva in ogni altro punto di \mathcal{U} ; per questo motivo si può, senza perdere di generalità, considerare in alternativa alla condizione (A) di questa definizione la condizione

(A') $F(x^*) = 0$ e $F(x) > 0$ in ogni punto di \mathcal{U} diverso da x^* .

Proposizione 4 (Criterio di stabilità di Ljapunov).

Se esiste una funzione di Ljapunov in un intorno del punto critico x^ , allora il punto critico è stabile.*

Per dimostrare la proposizione, supponiamo che esista una funzione di Ljapunov e osserviamo innanzitutto che è sufficiente verificare che vale la proprietà di stabilità per qualsiasi aperto A tale che la sua chiusura \bar{A} sia compatta e contenuta in \mathcal{U} . Infatti, qualunque intorno aperto A contiene al suo interno almeno un intorno A' a chiusura compatta contenuto in \mathcal{U} ; se troviamo un aperto B che assicura il confinamento delle traiettorie in A' , *a fortiori* le orbite saranno confinate in A . Pertanto ci basta dimostrare l'esistenza di B per ogni A con tale proprietà. Ricordiamo che la chiusura di un insieme è il più piccolo insieme chiuso che lo contiene; l'insieme dei punti della chiusura di A che non appartengono ad A è detto **bordo** di \bar{A} , e viene denotato con $\partial\bar{A}$. Essendo il complementare di un aperto in un insieme chiuso, anche $\partial\bar{A}$ è un insieme chiuso; se \bar{A} è compatto, anche $\partial\bar{A}$ è compatto.

Poiché la funzione F è continua, per il teorema di Weierstrass deve esistere un valore minimo di F sul bordo $\partial\bar{A}$, dato che quest'ultimo è compatto: denotiamo questo valore con $\mu = \min_{x \in \partial\bar{A}} F(x)$. Per l'ipotesi (A), deve essere $\mu > F(x^*)$.

Definiamo allora $B = \{x \in \bar{A} : F(x) < \mu\}$. Questo insieme è aperto, e non è vuoto dato che contiene il punto x^* . B è disgiunto da $\partial\bar{A}$, dato che in tutti i punti di $\partial\bar{A}$ si ha $F(x) \geq \mu$.

Se consideriamo qualunque $x_0 \in B$, sulla curva integrale γ basata in x_0 la funzione $F \circ \gamma$ deve risultare non crescente, per l'ipotesi (B). Ma allora la curva integrale non potrà mai uscire da B , dato che se lo facesse F dovrebbe assumere un valore maggiore o uguale a μ , mentre il valore iniziale $F(x_0)$ è necessariamente minore di μ . Pertanto, la curva di moto dovrà restare indefinitamente in B , e quindi in A , come volevasi dimostrare.

In apparenza, questo criterio non è molto pratico: come si fa a sapere se esiste una funzione di Ljapunov? Ancora una volta si rivela l'importanza di conoscere delle costanti del moto. Infatti una costante del moto soddisfa sicuramente la proprietà (B). Quindi una costante del moto *che abbia un minimo isolato in x^** è automaticamente una funzione di Ljapunov.

Se consideriamo un sistema olonomo autonomo, l'energia totale è una costante del moto. Poiché l'energia cinetica è definita positiva ed è nulla se tutte le velocità lagrangiane sono nulle, l'energia totale $\mathcal{H} = T - U$ ha un minimo isolato in $(q_*^\lambda, u_*^\lambda)$ se e solo se $u_*^\lambda = 0$ e il potenziale U ha un *massimo isolato* nella configurazione q_*^λ (di questa sappiamo già, essendo di equilibrio, che è un punto di stazionarietà per U). Pertanto, applicando il criterio di Ljapunov al campo \mathbf{X}_L (1.7.19) si ottiene il seguente criterio:

Proposizione 5 (Criterio di stabilità di Lejeune–Dirichlet per sistemi olonomi autonomi).

Se in una configurazione di equilibrio il potenziale U ha un massimo isolato, allora l'equilibrio è stabile.

La stessa condizione si può riformulare dicendo che le configurazioni di equilibrio stabili sono quelle che corrispondono a *minimi isolati dell'energia potenziale*.

Il problema di individuare le configurazioni di equilibrio di un sistema autonomo e discuterne la stabilità, quindi, è ricondotto allo studio della funzione U : tutti i punti di stazionarietà di U corrispondono a configurazioni di equilibrio, e fra queste sono stabili quelle in cui U è massimo.

Come è noto, se la matrice hessiana di U in tali punti è definita negativa, allora U ha sicuramente un punto di massimo. D'altra parte, con ulteriori considerazioni che qui non approfondiremo, si può dimostrare la proprietà seguente:

Proposizione 6 (Criterio di instabilità per sistemi olonomi autonomi).

Se la matrice hessiana di U ha almeno un autovalore positivo, allora l'equilibrio è instabile.

In conclusione, resta aperto solo il caso in cui la matrice hessiana non ha autovalori positivi, ma ha almeno un autovalore nullo. In questo caso si deve verificare in altro modo se il potenziale ha un massimo isolato o no.

Una volta individuate le configurazioni di equilibrio stabile, possiamo ottenere delle soluzioni approssimare delle equazioni del moto, per dati iniziali vicini alla soluzione stazionaria, mediante la linearizzazione delle equazioni di Eulero–Lagrange. Nel processo di linearizzazione intorno a un equilibrio stabile ($q^\lambda = q_*^\lambda, u^\lambda = 0$) in TQ , si trascurano i termini di ordine superiore in $(q^\lambda - q_*^\lambda)$ e in u^λ . La condizione di stabilità assicura che questi termini, se sono sufficientemente piccoli all'istante iniziale, resteranno piccoli in tutti gli istanti di tempo futuri.

Si può dimostrare con il calcolo esplicito (che qui ometteremo) che la parte lineare delle equazioni di Lagrange coincide con le equazioni di Lagrange che si ottengono troncando la Lagrangiana al secondo ordine. Quindi, anziché sviluppare le equazioni in serie di potenze e trascurare i termini di ordine superiore al primo, sviluppiamo la Lagrangiana (1.6.1) fino al secondo ordine intorno a $(q_*^\lambda, 0)$. Per semplificare ulteriormente le formule, supponiamo di aver prima traslato l'origine delle coordinate nella configurazione di equilibrio, in modo da avere $q_*^\lambda \equiv 0$; troviamo

$$L = L(0, 0) + \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} q^\lambda + \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} u^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} q^\lambda q^\mu + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\lambda \partial u^\mu} q^\lambda u^\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} u^\lambda u^\mu + \dots,$$

dove tutte le derivate parziali devono essere calcolate nel punto di equilibrio ($q^\lambda = 0, u^\lambda = 0$). Il valore della Lagrangiana in quel punto è una costante che non ha alcun effetto sulle equazioni di Lagrange, quindi possiamo omettere il termine di ordine zero. Per le derivate prime abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} &= g_{\lambda\mu} u^\mu, \\ \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} u^\mu u^\nu + \frac{\partial U}{\partial q^\lambda}. \end{aligned}$$

Valutando queste derivate in $u^\lambda = 0$, l'unico termine che sopravvive è $\frac{\partial U}{\partial q^\lambda}$; ma questo, a sua volta, deve essere calcolato nel punto di equilibrio, in cui sappiamo che tutte le componenti del differenziale di U si annullano. Quindi, tutti i termini del primo ordine nello sviluppo di L attorno a un punto di equilibrio sono nulli.

Per quanto riguarda i termini di secondo ordine, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} u^\alpha u^\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^\lambda \partial u^\mu} &= \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\lambda} u^\alpha, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} &= g_{\lambda\mu}; \end{aligned}$$

sostituendo $u^\lambda = 0$ e ponendo

$$K_{\lambda\mu} \equiv \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} \right|_{(q^\nu=0, u^\nu=0)}, \quad (1.8.2)$$

$$M_{\lambda\mu} \equiv g_{\lambda\mu} \Big|_{(q^\nu=0, u^\nu=0)}$$

troviamo che

$$L = \frac{1}{2} M_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu + \frac{1}{2} K_{\lambda\mu} q^\lambda q^\mu + \dots; \quad (1.8.3)$$

dalla Lagrangiana troncata $L_{\text{LIN}} = \frac{1}{2} M_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu + \frac{1}{2} K_{\lambda\mu} q^\lambda q^\mu$ otteniamo infine le **equazioni di Lagrange linearizzate**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{LIN}}}{\partial u^\lambda} \right) - \frac{\partial L_{\text{LIN}}}{\partial q^\lambda} = M_{\lambda\mu} \dot{u}^\mu - K_{\lambda\mu} q^\mu = 0. \quad (1.8.4)$$

La matrice M , essendo null'altro che la matrice metrica valutata nella configurazione di equilibrio, è sicuramente invertibile; detta $\Omega = M^{-1}K$ la matrice prodotto fra l'inversa di M e K , le equazioni in forma normale (e riportate al secondo ordine) sono

$$\ddot{q}^\mu = \Omega^\mu_\lambda q^\lambda \quad (1.8.5)$$

Della matrice Ω sappiamo che è il prodotto di due matrici simmetriche, la prima delle quali è definita positiva, mentre K (se il punto di equilibrio è un massimo non degenero per il potenziale U) è definita negativa. Quindi Ω è a sua volta una matrice simmetrica definita negativa, ed è sempre diagonalizzabile con una trasformazione lineare delle coordinate. Poiché gli autovalori di Ω sono tutti negativi, li denotiamo con $-\omega_{(\lambda)}^2$, con $\lambda = 1, \dots, n$ (alcuni autovalori potrebbero coincidere). Dette Q^μ le coordinate in cui Ω risulta diagonale, le equazioni diventano quelle di un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati:

$$\ddot{Q}^\mu = -\omega_{(\mu)}^2 Q^\mu. \quad (1.8.6)$$

Gli n valori $\omega_{(\mu)}$ sono detti **pulsazioni caratteristiche** o **frequenze caratteristiche**¹⁵ del sistema, e si ricavano dall'equazione agli autovalori di Ω , $\det(\Omega + \omega^2 \mathbb{1}) = 0$: quest'ultima, però, utilizzando il fatto che il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti, si può riscrivere nella forma

$$\det(K + \omega^2 M) = 0, \quad (1.8.7)$$

che è nota come **equazione delle frequenze caratteristiche**. Le coordinate Q^λ in cui la matrice Ω si diagonalizza sono dette **coordinate normali**.

I particolari moti del sistema in cui una sola delle coordinate normali oscilla nel tempo, mentre le altre restano nulle, sono detti **modi normali di oscillazione**. In ciascun modo normale di oscillazione, il sistema (anche visto nelle coordinate originali q^λ) si muove di moto armonico con la corrispondente frequenza caratteristica.

Per uno stato iniziale generico, il moto del sistema linearizzato è una combinazione lineare di moti armonici con frequenze diverse, e descrive una generalizzazione n -dimensionale di una curva di Lissajous. La traiettoria (del sistema linearizzato) è chiusa, e il moto è periodico, se e solo se tutte

¹⁵A essere precisi, le frequenze caratteristiche sono i valori $\frac{\omega_{(\mu)}}{2\pi}$.

le frequenze caratteristiche sono *razionalmente dipendenti* (ossia esiste una n -pla di numeri interi a_μ tali che $a_1\omega_{(1)} + \dots + a_n\omega_{(n)} = 0$); altrimenti le traiettorie non si chiudono.

In che misura il moto del sistema linearizzato è una buona approssimazione del moto “vero” del sistema?

Dal punto di vista quantitativo, noi sappiamo che nell’intorno di una configurazione di equilibrio stabile possiamo assicurare che i moti del sistema restino indefinitamente confinati in un intorno piccolo a piacere, scegliendo opportunamente le condizioni iniziali: ma questo dipende dalla proprietà di stabilità, indipendentemente dal confronto con il sistema linearizzato.

La domanda è: il moto del sistema linearizzato è *qualitativamente* analogo a quello del sistema non lineare di partenza?

Nella teoria dei sistemi dinamici si può dare un senso preciso all’idea di “corrispondenza qualitativa” attraverso le definizioni seguenti.

Dati due sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale (in altri termini, dati due campi vettoriali), e detti ϕ_ϵ e ψ_ϵ i flussi che rispettivamente generano, diciamo che essi sono **topologicamente coniugati** se esiste un omeomorfismo h tale che $h \circ \phi_\epsilon = \psi_\epsilon \circ h$ per ogni ϵ (la stessa relazione si può scrivere anche $\phi_\epsilon = h^{-1} \circ \psi_\epsilon \circ h$; l’esistenza di un tale omeomorfismo implica, ovviamente, che i due campi siano definiti nel medesimo spazio oppure in due spazi omeomorfi fra loro). Se l’omeomorfismo h è un diffeomorfismo, allora possiamo a tutti gli effetti considerare i due campi vettoriali come rappresentazioni diverse ed equivalenti uno stesso sistema dinamico.

Una nozione più debole è quella di **equivalenza topologica**. Due flussi sono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo che manda le traiettorie del primo in quelle del secondo (e viceversa), preservando il verso di percorrenza. L’equivalenza topologica non implica che i due sistemi siano topologicamente coniugati: infatti la corrispondenza è fra le traiettorie, mentre le leggi di percorrenza possono essere diverse (deve essere lo stesso solo il *verso* di percorrenza).

Esistono due teoremi fondamentali che permettono di caratterizzare il comportamento locale del flusso nel caso di sistemi dinamici generici. Il primo è detto **teorema del flow box**, e riguarda il comportamento di un sistema intorno a un punto non critico:

Proposizione 7 (flow box). *Sia X un campo vettoriale su una varietà M , e sia x un punto di M in cui il campo X non è nullo. Allora esiste un intorno aperto \mathcal{U} di x e un cambiamento di coordinate in \mathcal{U} tale che nelle nuove coordinate y^μ il campo X coincide in ogni punto con il vettore $\frac{\partial}{\partial y^1}$.*

Nelle nuove coordinate descritte nel teorema, quindi, le curve integrali di X sono le curve coordinate $\gamma : t \mapsto (q_0^1 + t, q_0^2, \dots, q_0^m)$. In questo caso il flusso del campo X è coniugato al flusso di un campo costante mediante un diffeomorfismo (il cambiamento di coordinate). Le coordinate y^μ sono dette **coordinate adattate al flusso**. Questo risultato è tanto importante concettualmente quanto poco utile ai fini pratici, per due ragioni: (i) per costruire esplicitamente le coordinate adattate y^μ occorre conoscere la soluzione generale dell’EDO associata al campo X (l’esistenza delle coordinate adattate non è altro che un corollario del teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle soluzioni); (ii) l’equivalenza fra i due flussi vale solo in un intorno \mathcal{U} , che non possiamo scegliere in modo arbitrario (in particolare, \mathcal{U} non deve contenere punti critici di X), e dato che x non è un punto critico stabile non possiamo aspettarci che le traiettorie del sistema restino indefinitamente in \mathcal{U} .

Il secondo teorema riguarda invece i punti critici, stabili o instabili, ma include un'ipotesi restrittiva su di essi. Consideriamo un campo X su una varietà M , e un suo punto critico x^* . Supponiamo di calcolare la matrice jacobiana $\frac{\partial X^\mu}{\partial q^\nu}$ valutata nel punto x^* . Se tutti gli autovalori di questa matrice hanno parte reale non nulla, allora si dice che x^* è un **punto critico iperbolico**.

I punti critici *non iperbolici*, dunque, sono quelli in cui la matrice jacobiana del sistema ha uno o più autovalori nulli o immaginari puri.

Proposizione 8 (Grobman-Hartman). *Sia X un campo vettoriale su una varietà M , e sia x^* un punto critico iperbolico di X . Allora esiste un intorno aperto \mathcal{U} di x in cui il sistema definito da X è topologicamente coniugato al corrispondente sistema linearizzato.*

Questo teorema è molto potente, perché ci dice che nel caso di un punto critico stabile (purché iperbolico) il comportamento del sistema non lineare è qualitativamente analogo a quello del sistema linearizzato: la stabilità ci assicura infatti di poter confinare indefinitamente le traiettorie nell'intorno in cui vale la coniugazione topologica: in tale intorno, le orbite del sistema non lineare saranno solo un po' deformate rispetto a quelle del sistema linearizzato. Le orbite del sistema linearizzato si possono ottenere facilmente, e il teorema è concretamente applicabile anche quando non si conoscono le soluzioni del sistema non lineare.

Il guaio è che i punti critici *stabili* di un sistema olonomo autonomo non sono *mai* iperbolici! Consideriamo il caso del solito oscillatore armonico: il sistema, in TQ , è già lineare di suo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix},$$

ma gli autovalori della matrice sono immaginari, $\pm i\omega$, e dunque l'origine è un punto stabile non iperbolico. Abbiamo precedentemente dimostrato che intorno a un punto critico stabile (non degenere) la linearizzazione di ogni sistema olonomo autonomo corrisponde a un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati, quindi anche nel caso generale i punti critici stabili non saranno iperbolici.

Pertanto non abbiamo a disposizione alcun teorema che assicuri che il comportamento di un sistema olonomo intorno a un equilibrio stabile sia topologicamente equivalente al comportamento del sistema linearizzato.

In alcuni casi, questo avviene: se si considera un pendolo piano (con un solo grado di libertà), effettivamente le traiettorie nello spazio delle velocità (per valori dell'energia totale inferiori a un valore di soglia che si calcola facilmente) sono diffeomorfe alle traiettorie di un oscillatore armonico. La legge di percorrenza non è la stessa (il periodo cresce al crescere dell'energia, mentre per l'oscillatore armonico il periodo è lo stesso per tutte le orbite), quindi si ha un'equivalenza topologica e non una coniugazione topologica, ma il comportamento qualitativo è lo stesso.

Se invece consideriamo un pendolo sferico, troviamo facilmente che il corrispondente sistema linearizzato è un oscillatore armonico bidimensionale isotropo: le due frequenze caratteristiche sono uguali, e le traiettorie nello spazio delle configurazioni per il sistema linearizzato sono ellissi centrate nell'origine. Saremmo quindi indotti a credere che il pendolo sferico, per piccole oscillazioni, percorra orbite simili a ellissi, tracciate sulla sfera. Ma noi possediamo già gli strumenti per studiare qualitativamente il moto per questo sistema: la Lagrangiana, infatti, è invariante per rotazioni intorno all'asse verticale, e per oscillazioni contenute nell'emisfero inferiore possiamo scrivere L nella forma (1.7.14), ottenendo un'equazione di Weierstrass per la coordinata ρ . Tuttavia, dato che non siamo in nessuno dei due casi previsti dal teorema

di Bertrand (uno di questi è proprio l'oscillatore armonico isotropo), le traiettorie in generale non saranno chiuse. Non osserveremo, quindi, solo una deformazione delle orbite ellittiche proprie del sistema linearizzato, ma anche una precessione dell'asse dell'orbita: quest'ultima progressivamente riempirà densamente la porzione di sfera compresa fra due paralleli (fanno eccezione le orbite circolari, corrispondenti alle particolari condizioni iniziali per le quali la funzione di Weierstrass ha uno zero doppio). In questo caso, quindi, non sussiste un'equivalenza topologica fra il moto del sistema olonomo e quello del sistema linearizzato: nello spazio delle velocità, le traiettorie dell'oscillatore armonico isotropo sono curve chiuse, mentre una traiettoria generica del pendolo sferico riempie densamente un toro bidimensionale (che nello spazio delle configurazioni si proietta sulla corona compresa fra due paralleli, di cui si è già detto).

La formulazione hamiltoniana della meccanica dei sistemi olonomi, come vedremo, ci permetterà di studiare più a fondo la geometria dei flussi di evoluzione dei sistemi olonomi, e anche di comprendere esattamente sotto quali condizioni un sistema olonomo si comporta davvero in modo equivalente a un sistema di oscillatori indipendenti fra loro.

1.9 Principio di azione stazionaria

Consideriamo l'integrale della funzione di Lagrange lungo un arco di una curva in TQ che sia il rilevamento tangente di una curva in Q ; questo integrale è detto *azione*.

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t), t) dt. \quad (1.9.1)$$

Detti $A \equiv \gamma(t_0)$ e $B \equiv \gamma(t_1)$ i due punti di Q corrispondenti agli estremi di integrazione, consideriamo tutte le infinite curve (differenziabili) $[t_0, t_1] \rightarrow Q$ che hanno i medesimi estremi A e B . Ciò che ci proponiamo di mostrare è che, fra tutte queste curve, quella corrispondente all'effettivo moto del sistema olonomo è quella su cui l'integrale (1.9.1) assume il valore minimo.

In realtà, ciò che faremo vedere è come si individuano le curve su cui il valore dell'azione è *stazionario*. A questo fine dobbiamo definire innanzitutto che cosa si intende per *deformazione* di una curva.

Date due curve γ e γ' appartenenti all'insieme che abbiamo definito, se supponiamo che le immagini di γ e γ' (fra t_0 e t_1) appartengano entrambe interamente al dominio di uno stesso sistema di coordinate, possiamo produrre una famiglia a un parametro di curve che connette γ e γ' , nel modo seguente. Se in coordinate l'espressione delle due curve è data, rispettivamente, da $\gamma : t \mapsto q_0^\lambda(t)$ e $\gamma' : t \mapsto q_1^\lambda(t)$, definiamo $\delta q^\lambda(t) = q_1^\lambda(t) - q_0^\lambda(t)$ e

$$\gamma_\varepsilon : t \mapsto q_0^\lambda(t) + \varepsilon \delta q^\lambda(t). \quad (1.9.2)$$

In questo modo abbiamo $\gamma_0 = \gamma$ e $\gamma_1 = \gamma'$.¹⁶ Dato che per ipotesi tutte le curve considerate hanno gli stessi estremi, $\gamma(t_0) = \gamma'(t_0)$ e $\gamma(t_1) = \gamma'(t_1)$, avremo sempre $\delta q^\lambda(t_0) = \delta q^\lambda(t_1) = 0$, per ogni λ . Da notare che la famiglia che connette γ e γ' , definita in questo modo, dipende dalle coordinate che stiamo usando.

Ogni famiglia di curve definita in questo modo a partire da una curva γ è detta *deformazione* della curva γ . La deformazione è determinata dalla scelta della funzione $\delta q^\lambda(t)$, che può essere *completamente arbitraria* salvo per il fatto che deve essere differenziabile e deve annullarsi agli estremi; per ε sufficientemente piccolo, la curva γ_ε resterà comunque all'interno del dominio delle coordinate.

Quando l'azione viene valutata su una deformazione γ_ε , il suo valore $\mathcal{A}[\gamma_\varepsilon]$ diventa una funzione del parametro reale ε . La variazione infinitesima dell'azione sotto la particolare deformazione γ_ε considerata è quindi espressa da

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left[L \left(q^\lambda(t) + \varepsilon \delta q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta q^\lambda(t), t \right) - L(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t), t) \right] dt \quad (1.9.3)$$

A questo punto possiamo caratterizzare le particolari curve γ per le quali l'integrale di azione risulta *stazionario*, ossia si trova

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[\gamma_\varepsilon] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.9.4)$$

¹⁶a rigore dovremmo introdurre delle ipotesi aggiuntive per assicurare che tutte le deformazioni intermedie fra γ e γ' stiano ancora nel dominio delle stesse coordinate. Poiché saremo interessati a deformazioni "piccole" della curva γ , quest'ipotesi non è restrittiva.

per *qualunque* deformazione della curva γ . In particolare, le curve su cui l'integrale d'azione risulta *minimo* oppure *massimo* hanno questa proprietà. Una curva su cui l'azione risulta stazionaria è detta **curva estrema** dell'azione. Per le curve di classe C^2 vale la seguente proprietà:

Proposizione 9. *Le curve di moto che soddisfano le equazioni (1.5.18) della meccanica lagrangiana sono tutte e sole le curve che sono estremali del funzionale*

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t), t) dt \quad (1.9.5)$$

per qualunque scelta di t_0 e t_1 .

Quello che abbiamo appena enunciato è noto come **principio di azione stazionaria**. Per una Lagrangiana della forma (1.6.1) si può dimostrare (ma non lo faremo qui) che le curve estremali sono sempre dei minimi, per cui in questo caso si parla anche di **principio di minima azione**. Come vedremo nel seguito, il fatto che le equazioni del moto di un sistema olonomo si possano anche dedurre da un principio di azione stazionaria, anziché dalle equazioni di Newton della dinamica, ha conseguenze notevoli.

Per dimostrare la proposizione 9, utilizziamo l'espressione già trovata per la condizione di estremalità (1.9.4), supponendo che tutte le funzioni che compaiono siano di classe C^2 in tutti i loro argomenti (NB in tutte le espressioni integrande si deve sempre supporre di sostituire l'espressione del rilevamento della curva γ , ossia $q^\lambda = q^\lambda(t)$ e $u^\lambda = \dot{q}^\lambda(t)$):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left[L \left(q^\lambda(t) + \varepsilon \delta q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \delta q^\lambda(t), t \right) - L(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t), t) \right] dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\lambda} \delta q^\lambda + \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \frac{d}{dt} (\delta q^\lambda) \right) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\lambda} \delta q^\lambda + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \delta q^\lambda \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) \delta q^\lambda \right) dt = \\ = \left[\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \delta q^\lambda \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) \delta q^\lambda dt = 0. \end{aligned}$$

Ora, nell'ultima espressione il primo addendo è nullo perché per ipotesi δq^λ si annulla tanto in t_0 quanto in t_1 ; l'integrale successivo si annulla se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0 : \quad (1.9.6)$$

riconosciamo qui le equazioni di Eulero–Lagrange!

È cruciale osservare che vale anche l'implicazione inversa: l'integrale si annulla *per qualunque deformazione* δq^λ **se e solo se** la curva γ soddisfa l'equazione (1.9.6).

Infatti, se si avesse $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} \neq 0$, allora esisterebbe un intervallo $(t_a, t_b) \subset [t_0, t_1]$ in cui tale espressione è non nulla e ha sempre lo stesso segno. Si potrebbe allora costruire una deformazione $\delta q^\lambda(t)$ che sia nulla all'esterno dell'intervallo (t_a, t_b) e abbia segno concorde con $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda}$ all'interno dell'intervallo (t_a, t_b) . In questo modo, la funzione integranda sarebbe sempre positiva e l'integrale non potrebbe annullarsi.

1.10 Origini e applicazioni del calcolo variazionale

Già Euclide (IV-III sec. a.C.) aveva osservato che per un raggio di luce riflesso da uno specchio l'angolo di incidenza è sempre uguale all'angolo di riflessione. Erone di Alessandria (I sec. d.C.) notò che questa proprietà è equivalente a chiedere che la linea spezzata che congiunge due punti A e B qualsiasi lungo il percorso del raggio (uno antecedente e l'altro successivo alla riflessione) sia quella di lunghezza minima fra tutte le spezzate (con il vertice sulla superficie dello specchio) che congiungono i due punti. Il matematico Ibn Sahl (940-1000 circa) formulò la legge della *rifrazione* di un raggio di luce nel passaggio dall'aria a un diverso mezzo ottico (acqua, vetro), successivamente riscoperta nel XVII secolo e oggi nota come *legge di Snell*. Fu Pierre de Fermat a mostrare nel 1662 che anche la legge di Snell è equivalente all'assunzione che la traiettoria del raggio luminoso sia quella corrispondente non già alla minima lunghezza percorsa, bensì al minimo tempo di percorrenza, assumendo che la velocità della luce cambi da un mezzo all'altro (vi sono indicazioni che questa proprietà fosse già stata intuita da Ibn Sahl e da Alhazen nel XI secolo).

Nel 1696, Johann Bernoulli propose alla comunità dei matematici europei il seguente problema: “*Dati due punti A e B in un piano verticale, lungo quale traiettoria un punto materiale che parta dal punto più in alto A , con velocità iniziale nulla, raggiunge B nel minor tempo, sotto l'azione della sola forza peso?*” Molti anni prima, nel 1636, Galileo Galilei aveva dimostrato che la traiettoria di minimo tempo di percorrenza fra due punti posti a diversa altezza non è un segmento di retta: un arco di cerchio, infatti, viene percorso più rapidamente. Bernoulli, quando espose il problema sulla rivista *Acta Eruditorum*, aveva già trovato la soluzione: la traiettoria di minima percorrenza (per cui fu coniato dal greco il termine **brachistocrona**, ossia “di tempo più corto”) è un arco di cicloide. Ma Bernoulli sfidò tutti i matematici del suo tempo a risolvere il problema prima che lui pubblicasse la soluzione, con lo scopo (abbastanza esplicito) di dirimere in questo modo la controversia su chi avesse effettivamente inventato il calcolo infinitesimale, priorità contesa fra Newton e Leibnitz. Alla sfida di Bernoulli risposero in cinque: Newton, Leibnitz, Jacob Bernoulli (fratello di Johann), il marchese de l'Hôpital e il matematico tedesco E.W. von Tschirnhaus.

Curiosamente, la soluzione trovata da Bernoulli era la stessa curva che risolveva un diverso problema affrontato qualche anno prima da Christian Huygens: quale sia la curva convessa (parimenti posta in un piano verticale) tale che il tempo di percorrenza per raggiungere il suo punto di minimo (sempre sotto l'azione della forza peso) sia indipendente dal punto di partenza. Huygens era interessato a questo problema per ragioni tutt'altro che accademiche: stava costruendo la teoria dell'orologio a pendolo, ma sapeva che un pendolo – ossia un punto materiale che si muove lungo una circonferenza verticale sotto l'azione della forza peso – non è isocrono, diversamente da un oscillatore armonico: il periodo dipende dall'ampiezza delle oscillazioni. Huygens trovò che la curva **tautocrona** (ossia “di uguale tempo”), che dà luogo a oscillazioni di periodo fissato indipendentemente dall'ampiezza, è la cicloide.

Un problema che suona abbastanza simile a quello della brachistocrona è quello della curva di minima lunghezza d'arco su una superficie, o più in generale in una varietà riemanniana dotata di una metrica $g_{\mu\nu}$. In questo caso, nel linguaggio moderno sappiamo facilmente formulare il problema. Come è noto, detta γ una curva fra due punti A e B , parametrizzata in modo che sia $\gamma(t_0) = A$ e $\gamma(t_1) = B$, la sua lunghezza d'arco è data dall'integrale

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} dt, \quad (1.10.1)$$

dove $q^\mu(t)$ è la rappresentazione della curva in un sistema di coordinate. La lunghezza d'arco è indipendente dalla legge di percorrenza della curva: infatti, se applichiamo un cambiamento di parametrizzazione, $t \mapsto \tau(t)$, troviamo $\frac{dq_\mu}{dt} = \frac{dq_\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$ e $d\tau = \frac{d\tau}{dt} dt$, per cui si vede facilmente che la forma differenziale $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} dt$ resta invariata. Si dice quindi che l'integrale (1.10.1) è **invariante per riparametrizzazioni**. Una traiettoria fra due punti dati che renda minimo l'integrale (1.10.1) è detta **linea geodetica**.

Il problema della brachistocrona, a sua volta, usando i metodi della meccanica razionale che già conosciamo può essere tradotto nel modo seguente. Detta y la coordinata verticale e detta $y = y(x)$ l'equazione della traiettoria del punto materiale, la legge di conservazione dell'energia totale del sistema assume la forma

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2} (1 + y') \dot{x}^2 + mgy \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{E}{m} - gy \right)}{1 + y'}} \quad (1.10.2)$$

dove $y' = \frac{dy}{dx}$. Il tempo di percorrenza fra A e B , che si vuole minimizzare, è allora

$$T[\gamma] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)}{2 \left(\frac{E}{m} - gy(x) \right)}} dx. \quad (1.10.3)$$

I due problemi, matematicamente, hanno una struttura comune. In entrambi i casi, l'incognita è data da una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, che compare – con la sua derivata prima – in un integrale della forma

$$\mathcal{F}[f] = \int_{s_0}^{s_1} F(f(s), \dot{f}(s), s) ds \quad (1.10.4)$$

dove abbiamo denotato con $\dot{f}^i(s)$ la derivata $\frac{df^i}{ds}$, e F è una funzione data, differenziabile in tutte le sue variabili. I valori della funzione f negli estremi di integrazione, $f(s_0)$ e $f(s_1)$, sono assegnati. Si richiede di trovare, fra tutte le funzioni differenziabili $f(s)$ che assumono tali valori in s_0 e s_1 , quella che *rende minimo il valore dell'integrale* $\mathcal{F}[f]$. I due casi descritti sopra rientrano in questo schema: nel caso della brachistocrona il parametro s si identifica con x e la funzione incognita è la traiettoria $y(x)$ nel piano verticale; nel caso delle linee geodetiche, il parametro è t e la funzione incognita è la rappresentazione in coordinate della curva sulla superficie data, $q^\mu(t)$.

Nel 1744 Pierre Louis Moreau de Maupertuis enunciò il *principio di minima azione*, che egli considerava un vero e proprio principio metafisico alla base di tutte le leggi della natura: «quando si verifica un qualche cambiamento nella Natura, la quantità d'azione impiegata per questo cambiamento è sempre la minore possibile». Quello che Maupertuis chiamava *azione* era però l'integrale della quantità di moto lungo la traiettoria, che corrisponde (a meno di un fattore moltiplicativo) a integrare nel tempo l'energia cinetica: $\int mv ds = \int mv^2 dt$. Lo stesso principio si trova enunciato in un trattato di Eulero, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes*, dello stesso anno 1744. La prima formulazione, tuttavia, risalirebbe a una lettera di Leibniz del 1707, il cui originale è però andato perso.¹⁷

¹⁷Una copia della lettera di Leibniz fu esibita nel 1751 dal matematico Johann Samuel König – a cui si devono due importanti teoremi sulla dinamica del corpo rigido – per contestare l'originalità della formulazione di Maupertuis (da notare che König e Maupertuis erano stati entrambi allievi di Johann Bernoulli). Questo causò una diatriba presso

Fu invece William Rowan Hamilton a introdurre nel 1834 la formulazione del principio di azione stazionaria così come l'abbiamo esposto nella Proposizione 9.

L'equivalenza fra il principio di minima azione di Maupertuis e il principio variazionale di Hamilton si verifica facilmente per i sistemi autonomi: se si moltiplica per 2 l'azione di Maupertuis la differenza fra i due funzionali d'azione risulta uguale all'integrale dell'energia totale del sistema: infatti $2Tdt - Ldt \equiv \mathcal{H}dt$. Se si restringono le variazioni della curva γ imponendo, come è assunto nel principio di Maupertuis, che siano tali da mantenere costante la funzione \mathcal{H} (deformazioni isoenergetiche), allora la differenza fra gli integrali d'azione di Maupertuis e di Hamilton resta costante sotto la deformazione, e gli estremali coincidono.

Il problema generale del calcolo delle variazioni fu affrontato da Eulero e da Lagrange.

Per comprendere il senso del procedimento (pur senza entrare nei dettagli più formali), consideriamo il problema ben noto della ricerca dei minimi e dei massimi di una funzione reale di più variabili. Sappiamo bene che, nel caso di funzioni differenziabili, in primo luogo si devono individuare i *punti di stazionarietà*; successivamente si verificherà per ciascuno di questi se si tratta di un minimo, di un massimo o di un punto di flesso.

Un punto di stazionarietà è caratterizzato dal fatto che in quel punto la derivata direzionale della funzione, rispetto a *qualsiasi* vettore tangente, si annulla. È facile vedere che questa condizione è equivalente all'annullarsi di tutte le derivate parziali, che non sono altro che le derivate direzionali relative ai vettori della base naturale: la condizione sulle derivate parziali, tuttavia, richiede l'uso di un sistema di coordinate, mentre la condizione sulle derivate direzionali si può formulare in termini intrinseci:

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una varietà M . Un punto $x \in M$ è un punto stazionario per f se e solo se, per ogni curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tale che $\gamma(\epsilon)|_{\epsilon=0} = x$, si ha $\frac{d}{d\epsilon}(f \circ \gamma)|_{\epsilon=0} = 0$.

La stazionarietà di un punto su una varietà di dimensione n qualsiasi, quindi, si può ricondurre a una condizione su una funzione di una sola variabile reale, ϵ , ottenuta per composizione con una curva arbitraria. Questa è la condizione che generalizzeremo al caso che ci interessa.

Noi abbiamo a che fare con un'applicazione \mathcal{F} dall'insieme di tutte le funzioni differenziabili $f : [s_0, s_1] \rightarrow M$ con valori assegnati negli estremi dell'intervallo. L'insieme di tutte queste funzioni è un esempio di quello che si chiama genericamente **spazio funzionale**. Gli spazi funzionali possono essere dotati di varie strutture (spazio vettoriale, spazio topologico ecc.) a seconda delle esigenze e soprattutto delle proprietà imposte alle funzioni che vi appartengono (regolarità, integrabilità, condizioni sui valori in punti assegnati, ecc.), ma ai nostri fini non avremo bisogno di specificare la struttura dell'insieme di funzioni che stiamo considerando: ci basterà richiedere che siano funzioni differenziabili.

Un **funzionale** (reale) è un'applicazione su uno spazio funzionale a valori \mathbb{R} . L'applicazione \mathcal{F} è dunque un esempio di funzionale. Definiamo ora l'analogo del concetto di *punto di stazionarietà* per un funzionale:

l'Accademia delle Scienze di Berlino, diretta da Eulero, di cui Maupertuis era membro. Mentre Voltaire, che si trovava anch'egli alla corte prussiana, prese le parti di König, il re Federico II e lo stesso Eulero appoggiarono Maupertuis e accusarono König di falsificazione. Solo 150 anni dopo altre copie della stessa lettera di Leibnitz furono ritrovate negli archivi della famiglia Bernoulli.

Sia Σ uno spazio funzionale.

Data una funzione $f \in \Sigma$, una sua **deformazione** è una curva su Σ passante per f , ossia una famiglia di funzioni $f_\epsilon \in \Sigma$, derivabile in ϵ e tale che $f_0 = f$.

La funzione f è un **estremale** per un dato funzionale \mathcal{F} se e solo se per ogni deformazione f_ϵ di f si ha $\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}[f_\epsilon]\big|_{\epsilon=0} = 0$.

Applichiamo questo concetto al caso che ci interessa. Abbiamo detto che la funzione incognita è a valori in \mathbb{R}^m (la dimensione m dipende dal caso considerato; la funzione in questione potrà in generale essere la rappresentazione in coordinate di una funzione a valori in una varietà differenziabile): chiamiamo $f^i(s)$ le sue componenti. Una generica deformazione sarà, per definizione, una funzione $f_\epsilon(s)$ che si possa espandere in serie di potenze in questo modo:

$$f_\epsilon^i(s) = f^i(s) + \epsilon \delta f^i(s) + O(\epsilon^2) \quad (1.10.5)$$

dove le componenti $\delta f^i(s)$ sono funzioni differenziabili tali che $\delta f^i(s_0) = \delta f^i(s_1) = 0$, e per il resto del tutto arbitrarie. Nel calcolo della derivata rispetto a ϵ di $\mathcal{F}(f_\epsilon)$ comparirà solo il termine di primo ordine, quindi possiamo completamente trascurare i termini $O(\epsilon^2)$: così come, in dimensione finita, la derivata direzionale lungo una curva è determinata solo dal vettore tangente alla curva, così anche in questo caso la derivata del funzionale lungo una deformazione è completamente determinata solo dalle funzioni $\delta f^i(s)$, che possiamo pensare come elementi dello spazio tangente al Σ in f .

La derivata $\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}[f_\epsilon]\big|_{\epsilon=0} = 0$ per il funzionale definito da (1.10.4), assumendo che la funzione integranda F sia differenziabile e possa a sua volta essere espansa in serie di Taylor, si ottiene esattamente come abbiamo fatto nella sezione precedente per la Lagrangiana L . Vale quindi la proposizione seguente:

Proposizione 10. *Una funzione con componenti $f^i(s)$ è un estremale del funzionale (1.10.4) (rispetto a variazioni ad estremi fissi) se e solo se essa soddisfa l'equazione di Eulero–Lagrange*

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial f^i} = 0. \quad (1.10.6)$$

Questa proposizione risolve anche i problemi della brachistocrona e della linea geodetica fra due punti dati in una varietà riemanniana, che sono gli esempi di **problemi variazionali** da cui eravamo partiti. Lagrange, a sua volta, nel suo trattato *Mécanique Analytique* (1788) pose in grande risalto i principi variazionali come possibile fondamento concettuale della meccanica.

Oggi anche le teorie di campo, come l'elettromagnetismo e la relatività generale, sono basate su un principio variazionale; in quel caso le funzioni da determinare non sono funzioni di una sola variabile indipendente, ma di più variabili (tipicamente le quattro coordinate dello spazio-tempo: t, x, y, z) e si considerano variazioni in cui le funzioni incognite (le componenti del campo) sono fisse su bordo del dominio di integrazione. Le equazioni di Eulero–Lagrange che si ottengono in questo caso sono equazioni alle derivate parziali che generalizzano le (1.10.6).

1.10.1 Moti geodetici e traiettorie geodetiche

Come prima applicazione del metodo variazionale, possiamo ora connettere il concetto di *moto geodetico* – che abbiamo definito mediante l'equazione (1.4.20) – con il concetto di *linea geodetica*

che abbiamo introdotto più sopra in questa sezione. Un moto geodetico, per quanto detto, è un estremaie del funzionale

$$\mathcal{A}[\gamma] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu dt, \quad (1.10.7)$$

che è l'espressione del funzionale d'azione (1.9.1) per i **moti spontanei** di un punto materiale (ossia in assenza di forze attive), per i quali la funzione di Lagrange coincide con la sola energia cinetica (che è anche l'energia totale \mathcal{H}). Una linea geodetica corrisponde invece a un estremaie del funzionale (1.10.1).

I due funzionali sono ben distinti: l'espressione (1.10.1) è invariante sotto riparametrizzazioni, mentre (1.10.7) non lo è. Tuttavia essi sono evidentemente legati fra loro, dato che la funzione integranda in (1.10.1) è – a parte un fattore costante – la radice quadrata della funzione integranda in (1.10.7). Utilizzeremo dunque una proprietà generale che vale quando in due problemi variazionali le funzioni che compaiono negli integrali da minimizzare sono dipendenti l'una dall'altra:

Proposizione 11. *Si consideri il funzionale \mathcal{F} , definito da (1.10.4), e il funzionale \mathcal{F}' definito dall'integrale*

$$\mathcal{F}'[f] = \int_{s_0}^{s_1} F'(f(s), \dot{f}(s), s) ds \quad (1.10.8)$$

con $F' \equiv \phi(F)$ per una data funzione differenziabile $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\frac{d\phi}{dF} \neq 0$.

Se la funzione F è un integrale primo, ossia si conserva su ciascuna curva estremaie di (1.10.4), allora tutti gli estremali di (1.10.4) sono anche estremali di (1.10.8).

Questa proprietà si dimostra immediatamente usando le equazioni di Eulero-Lagrange.

Gli estremali di (1.10.8), infatti, sono le soluzioni delle equazioni

$$0 = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{f}^i} \right) - \frac{\partial F'}{\partial f^i} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\phi}{dF} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}^i} \right) - \frac{d\phi}{dF} \frac{\partial F}{\partial f^i} = \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{f}^i} \right) - \frac{\partial F'}{\partial f^i} \right] \frac{d\phi}{dF} + \frac{\partial F}{\partial f^i} \frac{d}{ds} \frac{d\phi}{dF}.$$

Per gli estremali di (1.10.4) le espressioni nelle parentesi quadre si annullano; ma $\frac{d}{ds} \frac{d\phi}{dF} = \frac{d^2\phi}{dF^2} \frac{dF}{ds}$, e poiché abbiamo aggiunto l'ipotesi che sugli estremali di (1.10.4) sia $\frac{dF}{ds} = 0$, anche il secondo termine si annulla. Dunque – se F è un integrale primo – ogni estremaie di (1.10.4) soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange per F' .

Si noti che se F è costante sugli estremali di (1.10.4), anche F' lo è; ma non abbiamo supposto che F' o F siano costanti sugli estremali di (1.10.8), quindi ciò che abbiamo dimostrato non è che (1.10.4) e (1.10.8) hanno gli stessi estremali, ma solo che gli estremali di (1.10.8) includono gli estremali di (1.10.4).

Nelle equazioni di Eulero-Lagrange, svolgendo la derivata in s si vede subito che le derivate di ordine massimo, \ddot{f}^i , compaiono moltiplicate per la matrice $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}^i \partial \dot{f}^j}$; di conseguenza le (1.9.6) si possono mettere in forma normale se e solo se tale matrice è invertibile, ovvero

$$\det \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{f}^i \partial \dot{f}^j} \right| \neq 0. \quad (1.10.9)$$

Se le equazioni si possono mettere in forma normale, allora si può applicare il teorema di Cauchy ed essere certi che per ogni dato iniziale (f_0^i, \dot{f}_0^i) esiste una e una sola soluzione delle equazioni.

Dunque, se F e F' soddisfano entrambe la condizione di regolarità (1.10.9), per ciascun dato iniziale avremo un solo estremoale di \mathcal{F}' , che non potrà che coincidere con l'estremoale di \mathcal{F} : i due funzionali (1.10.4) e (1.10.8), in questo caso, avranno esattamente gli stessi estremali.

Come si applicano queste osservazioni al caso dei funzionali (1.10.1) e (1.10.7)? Le ipotesi della proposizione 11 sono soddisfatte, poiché per i moti geodetici si conserva l'energia totale, che coincide con la Lagrangiana. Da questo segue

Proposizione 12. *Le traiettorie dei moti geodetici sono sempre linee geodetiche.*

Tuttavia i due principi variazionali non sono equivalenti, poiché per la funzione $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu}$ la condizione di regolarità non è soddisfatta. Questo è piuttosto laborioso da mostrare con il calcolo diretto del determinante (1.10.9): ma sappiamo che deve essere così. Infatti abbiamo già visto che gli estremali di (1.10.1) restano tali comunque si alteri la legge di percorrenza: quindi vi sono estremali per cui il modulo della velocità, $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu}$, non resta costante, mentre esso è costante su tutti gli estremali di (1.10.7). Vi sono dunque estremali di (1.10.1) che non corrispondono a moti spontanei. Questi estremali, tuttavia, non sono altro che le stesse linee geodetiche percorse con una legge oraria non uniforme. Infatti, se scriviamo le equazioni di Lagrange per l'azione (1.10.1), sappiamo che ogni cambiamento di parametrizzazione trasforma una soluzione in un'altra soluzione con la medesima traiettoria: è quindi sempre possibile, quale che sia la soluzione considerata, riparametrizzarla in modo da avere $g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = \text{cost.}$ (se, ad esempio, si prende come parametro la lunghezza d'arco percorsa a partire da un punto dato, si ha $g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = 1$). Se nelle equazioni di Lagrange poniamo $g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = \text{cost.}$, però, otteniamo esattamente l'equazione (1.4.20), moltiplicata per la stessa costante. Quindi abbiamo dimostrato che

Proposizione 13. *Ogni traiettoria geodetica, percorsa uniformemente, corrisponde a un moto geodetico (ossia a un moto spontaneo).*

Abbiamo quindi completamente descritto la relazione fra la proprietà geometrica di minima lunghezza d'arco e la condizione che l'accelerazione covariante si annulli. Per gli estremali di (1.10.1), più in generale, vale la proprietà che l'accelerazione covariante è sempre collineare alla velocità: il rapporto fra i due vettori è una funzione di t che dipende dalla parametrizzazione scelta, e si annulla se la parametrizzazione è uniforme.

Abbiamo già osservato che la Lagrangiana (1.10.7) è regolare, ossia vale la condizione (1.10.9), e quindi per ogni *stato iniziale* (punto della varietà e vettore tangente) esiste una e una sola soluzione. D'altra parte, se consideriamo il principio variazionale equivalente, osserviamo che data una coppia di punti distinti non è detto che per essi passi una e una sola traiettoria geodetica. In uno spazio affine euclideo è vero: per ogni coppia di punti passa una e una sola retta. Ma su una superficie qualunque è facile trovare dei controesempi. Su una sfera, per due punti generici passa un solo cerchio massimo, ma se i punti sono diametralmente opposti allora ci sono infinite traiettorie geodetiche distinte che li connettono (e hanno tutte la stessa lunghezza). Su un cilindro, le geodetiche sono eliche a passo fisso; dati due punti non alla stessa altezza, questi possono essere connessi da infiniti archi di elica (uno di questi rappresenta il minimo assoluto della lunghezza d'arco, gli altri – che si avvolgono un numero arbitrario di volte intorno al cilindro – sono minimi locali). Le due proprietà non sono in contrasto fra loro: l'unicità non si riferisce genericamente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, ma al corrispondente **problema di Cauchy** (trovare la soluzione date la configurazione e la velocità iniziali). Per la stessa equazione, il **problema di**

Dirichlet (trovare la soluzione date la *configurazione iniziale e quella finale*) può non avere una soluzione unica (e in alcuni casi potrebbe non esistere alcuna soluzione).

1.10.2 Dimostrazione variazionale del teorema di Noether

Come ulteriore applicazione del metodo variazionale, forniamo una dimostrazione alternativa del teorema di Noether.

Consideriamo un flusso φ_ϵ sullo spazio delle configurazioni; osserviamo innanzitutto che se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Q$ è una curva estremale del funzionale di azione (1.9.1), allora per ciascun valore di ϵ l'immagine di tale curva sotto il flusso, $\gamma_\epsilon \equiv \varphi_\epsilon \circ \gamma$, è un estremale dell'azione definita dalla Lagrangiana $L \circ \hat{\varphi}_{-\epsilon}$. Se la Lagrangiana è invariante sotto il rilevamento del flusso in TQ , $L \circ \hat{\varphi}_{-\epsilon} \equiv L$, allora γ_ϵ è anch'essa un estremale dell'azione (1.9.1): in altri termini, un flusso di simmetria manda soluzioni in soluzioni, come avevamo già anticipato. In effetti, poiché in questo caso si ha

$$A[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\gamma}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\varphi}_\epsilon \circ \hat{\gamma}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (L \circ \hat{\gamma}_\epsilon) dt = A[\gamma_\epsilon], \quad (1.10.10)$$

l'azione ha lo stesso valore su tutte le curve connesse fra loro dal flusso. D'altra parte si è già visto, in generale, che per una arbitraria deformazione a un parametro di una curva γ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A[\gamma_\epsilon] - A[\gamma]}{\epsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \frac{dq_\epsilon^\mu}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \frac{du_\epsilon^\mu}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \frac{dq_\epsilon^\mu}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \frac{d}{dt} \frac{dq_\epsilon^\mu}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dt \end{aligned}$$

Possiamo vedere anche l'azione del flusso φ_ϵ come una deformazione (non a estremi fissi!) della curva γ . In questo caso avremo

$$q_\epsilon^\lambda(s) = q^\lambda(s) + \epsilon \delta q^\lambda + O(\epsilon^2) \quad (1.10.11)$$

dove il campo di deformazione, questa volta, non è altro che il generatore infinitesimo del flusso: $\delta q^\lambda = X^\lambda$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A[\gamma_\epsilon] - A[\gamma]}{\epsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} X^\mu + \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \frac{d}{dt} X^\mu \right) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial u^\mu} X^\mu \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) X^\mu dt \end{aligned}$$

Se γ è una soluzione delle equazioni di Lagrange, l'ultimo integrale è nullo. Ma dalla (1.10.10) segue che $A[\gamma_\epsilon] - A[\gamma] \equiv 0$, quindi anche l'ultimo termine deve necessariamente annullarsi (benché la deformazione non sia a estremi fissi), ossia

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} X^\mu \Big|_{t=t_1} = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} X^\mu \Big|_{t=t_0}$$

per ogni possibile intervallo di tempo (t_0, t_1) sulla curva di moto γ . Ne consegue che la quantità $\frac{\partial L}{\partial u^\mu} X^\mu$ è una costante del moto, come volevasi dimostrare.