Tutoraggio di Fisica 3

2025 – Corso A/B – 10

73 Si consideri un processo di collisione elastica tra una particella di massa a riposo m ed una particella di massa a riposo M. Siano p_1^μ e p_2^μ i quadrimpulsi, iniziale e finale, della particella di massa m e q_1^μ e q_2^μ le analoghe quantità per la particella di massa M. Vale la relazione (conservazione del quadrimpulso):

$$p_1^\mu + q_1^\mu = p_2^\mu + q_2^\mu \ .$$

(a) Dimostrare che valgono le identità:

$$p_1^\mu\, q_{1\mu} = p_2^\mu\, q_{2\mu} \qquad\qquad p_1^\mu\, q_{2\mu} = p_2^\mu\, q_{1\mu}$$

(b) Calcolare il valore dell'espressione: $q_1^\mu\, q_{2\mu} - p_1^\mu\, p_{2\mu}$

(c) Definiti i quadrivettori

$$A^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu \qquad \text{e} \qquad B^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu \ ,$$

dimostrare che sono ortogonali tra loro.

(d) Dimostrare che A^μ è di tipo tempo. Stabilire se B^μ è di tipo tempo o spazio.

74 Sia D^μ un quadrivettore di tipo tempo definito in un SR inerziale K. Dimostrare che il segno della sua componente temporale è lo stesso in ogni SR inerziale, cioè che nel SR K', in moto rispetto a K con velocità $\vec{v}$ ($\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$), la componente temporale del quadrivettore trasformato D'^μ:

$$D'^0 = \gamma(v)\left(D^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{D}\right)$$

ha lo stesso segno di D^0.

Se il quadrivettore D^μ è la differenza tra le coordinate di due eventi A e B ($D^\mu = x_A^\mu - x_B^\mu$) separati da un intervallo di tipo tempo, spiegare quale conseguenza ha l'invarianza del segno di D^0 sull'ordine cronologico degli eventi stessi.

75 L'energia di una particella vale $E = 3.0 \cdot 10^{-9}$ J ed il suo momento è $q = 1.0 \cdot 10^{-17}$ kg m/s. Calcolare la massa a riposo della particella, l'energia cinetica e la velocità.

76 Una particella A di massa a riposo m_0 si muove con velocità $\vec{u}_A = \left(\frac{3}{5}c, 0, 0\right)$ in un SR K.

(a) Scrivere il quadrimpulso di A.

La particella A urta in modo inelastico una seconda particella B, di massa a riposo $\frac{7}{4}m_0$, ferma nel SR K, formando una nuova particella C.

(b) Calcolare, in funzione di m_0, la massa, la velocità ed il quadrimpulso della particella finale C.

77 Una particella P ha, nel sistema di riferimento inerziale K, quadrivelocità data da:

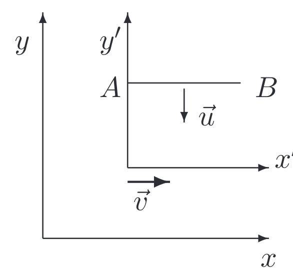
$$U^\mu = (U^0, \vec{U}) = \left(2\,c\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,c\,,\ 0\,,\ U^3\right) \qquad\qquad U^3 > 0\,.$$

(a) Calcolare la componente mancante U^3 e la tri-velocità di P nel SR K.

(b) Nel SR K', in moto rispetto a K in direzione z, la particella P si muove parallelamente all'asse x. Calcolare la rapidità della TL tra i due SR.

(c) Calcolare la quadrivelocità e la tri-velocità di P nel SR K'.

78 Un'asta AB di lunghezza a riposo L_0 è orientata parallelamente all'asse x' del SR inerziale K' e si muove in direzione $-y'$ con velocità u. Il SR K', a sua volta, si muove rispetto an un altro SR inerziale K con velocità costante v, in direzione $+x$. Calcolare l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x del SR K.



79 La velocità limite

Nel 1962 W. Bertozzi effettuò un esperimento di misura della velocità di elettroni accelerati a velocità relativistiche tramite l'applicazione di una differenza di potenziale ΔV, ottenuta con un generatore di Van der Graaf a cui faceva seguito un acceleratore lineare (linac). L'energia cinetica era facilmente ricavabile dalla differenza di potenziale ΔV applicata:

$$E_{cin} = e\,\Delta V$$

(e è la carica dell'elettrone). La velocità si ricavava misurando il tempo di volo della particella su una distanza $L = 8.4$ m, percorsa a velocità costante. I risultati dell'esperimento sono riportati in tabella.

En. cinetica	E_{cin}, MeV	0.5	1.0	1.5	4.5	15
tempo di volo	t_v, 10^{-8} s	3.23	3.08	2.92	2.84	2.80

(a) Calcolare la velocità degli elettroni in due modi:

1. dal tempo di volo: $v_{tv} = \dfrac{L}{t_v}$
2. dalla relazione classica $E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$ da cui: $v_{cl} = \sqrt{\dfrac{2E_{cin}}{m}}$

Le velocità calcolate in questi due modi sono in accordo tra loro?

(b) Calcolare la velocità degli elettroni usando l'espressione relativistica per l'energia cinetica. Confrontare questa velocità con quella stimata dal tempo di volo.

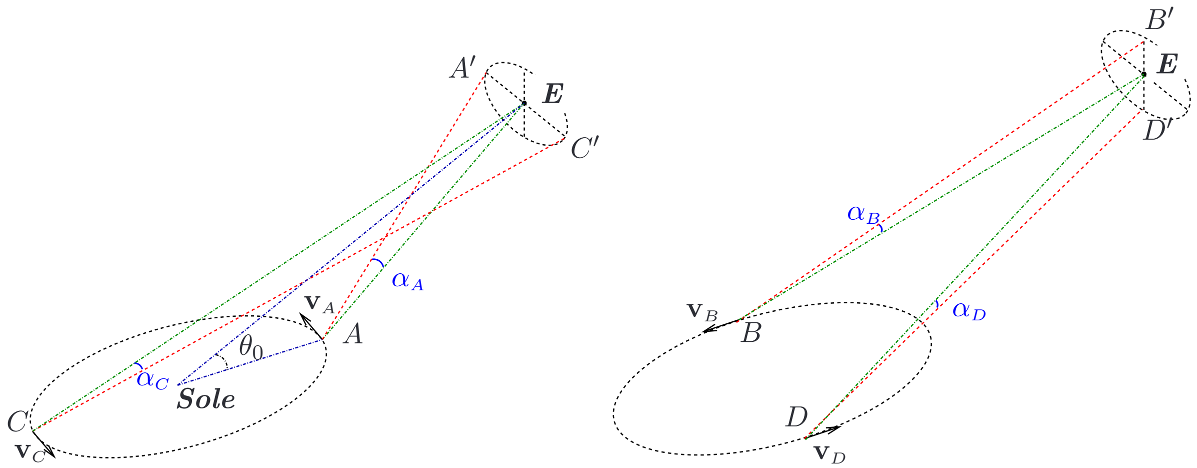
80 Aberrazione stellare

Consideriamo una stella (E) molto lontana, la cui posizione sia individuata dall'angolo θ_0 rispetto al piano dell'orbita terrestre. A causa della velocità finita della luce e del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, la posizione della stella osservata dalla Terra cambia durante l'anno.

Quando la Terra si trova nei punti A e C della sua orbita, la stella appare nelle posizioni A' e C', rispettivamente. In queste posizioni, l'angolo tra il segnale luminoso proveniente dalla stella e la velocità della Terra è di $\frac{\pi}{2}$, ma dalla Terra appare un angolo leggermente diverso (aberrazione) $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, con $\alpha_1 = \alpha_A = \alpha_C$.

Quando invece la Terra si trova nei punti B e D, la stella appare nelle posizioni B' e D', l'angolo tra il segnale luminoso proveniente dalla stella e la velocità della Terra è di θ_0 e dalla Terra l'angolo apparente è modificato dall'aberrazione $\theta' = \theta_0 \pm \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_B = \alpha_D$.

Calcolare gli angoli di aberrazione α_1 e α_2.



73. a) *Suggerimento: per la prima relazione calcolare la norma quadrata di entrambi i membri; per la seconda relazione osservare che la conservazione del quadrimpulso implica* $p_1^\mu - q_2^\mu = p_2^\mu - q_1^\mu$, $\ldots$; b) (Corso A): $q_2^\mu q_{1\mu} - p_1^\mu p_{2\mu} = -c^2(M^2 - m^2)$
(Corso B): $q_2^\mu q_{1\mu} - p_1^\mu p_{2\mu} = c^2(M^2 - m^2)$.

74. *Suggerimento: considerare separatamente i casi* $D^0 > 0$ *e* $D^0 < 0$ *e usare la disuguaglianza di Schwarz*

75. $m = 1.2 \cdot 10^{-27}$ kg, $E_{cin} = 2.9 \cdot 10^{-9}$ J, $v = 2.99 \cdot 10^8$ m/s ($\beta = 0.999$)

76. a) $P_A^\mu = \left(\frac{5}{4}m_0 c, \frac{3}{4}m_0 c, 0, 0\right)$. b) $M_0 = \frac{3\sqrt{15}}{4}m_0$, $u_c = c/4$, $P_C^\mu = \left(3m_0 c, \frac{3}{4}m_0 c, 0, 0\right)$.

77. a) $U^3 = \gamma u^3 = \frac{3}{2}c$, $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c, 0, \frac{3}{4}c\right)$. b) $Y = (\tanh)^{-1}\beta = 0.973$.
c) $U'^\mu = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c, 0, 0\right)$, $\vec{u}\,' = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}c, 0, 0\right)$

78. $\theta = \mathrm{atan}\frac{uv}{c^2}\gamma(v)$. *Vedere la guida alla soluzione*

79. Nota: L'electron-volt corrisponde all'energia acquisita da una carica elementare e quando attraversa una differenza di potenziale di 1 Volt (1 eV $= 1.6022 \times 10^{-19}$ J).
b) $v_{rel} = (0.863,\ 0.941,\ 0.967,\ 0.995,\ 0.999)\,c = (2.59,\ 2.82,\ 2.90,\ 2.98,\ 2.996) \cdot 10^8$ m/s.
W. Bertozzi, *Am.J.Phys.*,**32**, 551-555 (1964)
Video: *The Ultimate Speed*, `https://www.youtube.com/watch?v=BOBOpiMQXQA`

80. *(Vedere la guida alla soluzione.)* $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \beta \sin\theta_0$. La stella appare percorrere un'orbita ellittica nel corso dell'anno, con i semiassi proporzionali ad α_1 e α_2.