Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 14 febbraio 2023

Esercizio 1

Si consideri l'integrale

$$I(a,n) = \int_0^a d\theta \, \frac{1}{1+\cos^n\theta}, \qquad n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a \leq 2\pi.$$

(a) Determinare i valori di a e n per cui l'integrale esiste.

(b) Scrivere $I(\pi,2)$ come integrale sulla circonferenza unitaria C nel piano complesso

$$I(\pi,2) = \oint_C dz \, f(z)$$

ricavando esplicitamente l'integrando $f(z)$.

(c) Per la funzione $f(z)$ trovata nella parte (b), dimostrare esplicitamente che vale

$$\sum_{z_i \in \mathbb{C}} \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_i} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0,$$

dove z_i sono le singolarità di $f(z)$ al finito.

(d) Calcolare $I(\pi,2)$.

Soluzione

(a) Dobbiamo considerare due casi.

- n pari:
  In questo caso $0 \leq \cos^n\theta \leq 1$, quindi l'integrando è sempre regolare per tutti i valori di a con $0 < a \leq 2\pi$.
- n dispari:
  L'unico singolarità dell'integrando per $0 < a \leq 2\pi$ è $\theta = \pi$. Per vedere esplicitamente che questo punto è una singolarità non integrabile, possiamo sviluppare in serie di Taylor intorno a $\theta = \pi$

$$\cos^n\theta = -1 + \frac{n}{2}(\theta-\pi)^2 + \mathcal{O}\left((\theta-\pi)^3\right), \qquad \text{con } n \text{ dispari.}$$

Perciò

$$1+\cos^n\theta = \mathcal{O}\left((\theta-\pi)^2\right), \qquad \text{con } n \text{ dispari.}$$

Pertanto per n dispari l'integrale esiste solo se $a<\pi$.

(b) Per scrivere

$$I(\pi,2) = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{1+\cos^2\theta}$$

nella forma richiesta, consideriamo due metodi.

- Metodo 1

  Possiamo usare la periodicità di $\cos^2\theta$

  $$\cos^2(\theta+k\pi) = \cos^2\theta, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

  Visto che il periodo di $\cos^2\theta$ è π, la funzione $1/(1+\cos^2\theta)$ ha lo stesso periodo. Quindi possiamo scrivere

  $$I(\pi,2) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi d\theta\frac{1}{1+\cos^2\theta} + \int_\pi^{2\pi} d\theta\frac{1}{1+\cos^2\theta}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\frac{1}{1+\cos^2\theta}.$$

  Per scrivere quest'ultima espressione come un integrale nel piano complesso sulla circonferenza unitaria, sfruttiamo il fatto che per $|z|=1$, $z=e^{i\theta}$ e $d\theta = -idz/z$. Usando la formula di Eulero si ha che

  $$\cos^2\theta = \frac{1}{4}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{z^4+2z^2+1}{4z^2}$$

  Da cui segue che

  $$\frac{1}{1+\cos^2\theta} = \frac{4z^2}{z^4+6z^2+1}.$$

  e quindi si ha che

  $$I(\pi,2) = \oint_C dz\,\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1}\,, \tag{1}$$

  da cui segue

  $$\Big[f(z)\Big]_{\text{metodo1}} = \frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1}\,.$$

- Metodo 2

  Alternativamente si può procedere mediante il cambio di variabile

  $$\phi = 2\theta$$

da cui si ottiene l'integrale

$$I(\pi, 2) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{1}{1+\cos^2(\phi/2)}.$$

Per esprimere l'integrando in termini di $z = e^{i\phi}$, vediamo che

$$\begin{aligned}
\cos(\phi/2) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}\right)\,, \\
\cos^2(\phi/2) &= \frac{1}{4}\left(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z} + 2\right)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$\frac{1}{1+\cos^2(\phi/2)} = \frac{4z}{z^2+6z+1}.$$

Tenendo in conto che $d\phi = -i\,dz/z$ abbiamo

$$I(\pi, 2) = \oint_C dz\, \frac{-2\,i}{z^2+6z+1} \tag{2}$$

da cui segue che

$$\Big[f(z)\Big]_{\text{metodo2}} = \frac{-2\,i}{z^2+6z+1}\,.$$

(c) A seconda del metodo usato per la parte (b), si hanno due soluzioni possibili.

- <u>Metodo 1</u>

  La funzione $[f(z)]_{\text{metodo1}}$ ha quattro singolarità al finito (poli semplici):

$$\begin{aligned}
z_1 &= -i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \qquad & z_2 &= i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \\
z_3 &= -i\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \qquad & z_4 &= i\sqrt{3+2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

  Per i residui al finito si può scrivere una relazione generale

$$\begin{aligned}
\text{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_i} &= \lim_{z\to z_i}(z-z_i)\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1} \\
&= -2z_i\,i\lim_{z\to z_i}\frac{(z-z_i)}{z^4+6z^2+1} \\
&\overset{\text{l'Hôpital}}{=} -2z_i\,i\lim_{z\to z_i}\frac{1}{4z^3+12z} = -\frac{i}{2}\frac{1}{3+z_i^2}.
\end{aligned}$$

Quindi al finito

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} &= \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} &= -\frac{i}{4\sqrt{2}}\,, \\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_3} &= \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_4} &= \frac{i}{4\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

All'infinito si ha che

$$
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{t^2}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{t=0} = \mathrm{Res}\left[\frac{2\,i\,t}{t^4+6\,t^2+1}\right]_{t=0} = 0,
$$

e quindi la somma dei residui in $\mathbb{C}\cup\infty$ si annulla:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_3} \\
&+ \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_4} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0.
\end{aligned}
$$

– <u>Metodo 2</u>

La funzione $[f(z)]_{\text{metodo2}}$ ha solo due singolarità al finito (poli semplici):

$$
z_1 = -3 + 2\sqrt{2}, \qquad z_2 = -3 - 2\sqrt{2}\,.
$$

I residui sia al finito che all'infinito sono

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{-2\,i}{z^2+6z+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{-2\,i}{z-z_2} = -\frac{2\,i}{z_1-z_2}, \\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{-2\,i}{z^2+6z+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{-2\,i}{z-z_1} = \frac{2\,i}{z_1-z_2}, \\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} &= \mathrm{Res}\left[-\frac{f(1/t)}{t^2}\right]_{t=0} = \mathrm{Res}\left[\frac{2\,i}{(1-z_1 t)(1-z_2 t)}\right]_{t=0} = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi otteniamo

$$
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0.
$$

(d) L'integrale si può calcolare risolvendo l'integrale in Eq. (1) oppure quello in Eq. (2), a secondo del metodo utilizzato nella parte (b).

– <u>Metodo 1</u>

Il valore di

$$
I(\pi, 2) = \oint_C dz\, \frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1},
$$

dipende solo delle singolarità nella regione interna al cammino di integrazione (circonferenza unitaria). Dei quattro poli semplici

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \qquad & z_2 &= i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \\
z_3 &= -i\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \qquad & z_4 &= i\sqrt{3+2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

abbiamo che $|z_1|, |z_2| < 1$, mentre $|z_3|, |z_4| > 1$. Quindi solo i poli z_1, z_2 contribuiscono all'integrale:

$$
\begin{aligned}
I(\pi, 2) &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left[\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1} \right]_{z=z_1} + \operatorname{Res}\left[\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1} \right]_{z=z_2} \right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{i}{4\sqrt{2}} - \frac{i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

– <u>Metodo 2</u>

Il valore di

$$
I(\pi, 2) = \oint dz\, \frac{-2\,i}{z^2+6z+1},
$$

dipende solo delle singolarità nella regione interna al cammino di integrazione (circonferenza unitaria). Dei due poli semplici

$$
z_1 = -3 + 2\sqrt{2}, \qquad z_2 = -3 - 2\sqrt{2},
$$

abbiamo che $|z_1| < 1$, mentre $|z_2| > 1$, e quindi solo il polo z_1 contribuisce all'integrale:

$$
\begin{aligned}
I(\pi, 2) &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{-2\,i}{z^2+6z+1} \right]_{z=z_1} = 2\pi i \left(\frac{-2\,i}{z_1 - z_2} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{-2\,i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale

$$z(z-1)\,u''(z) + \Big[(1+a+b)z - c\Big]\,u'(z) + a\,b\,u(z) \;=\; 0\,,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $c \geq 1$.

(a) Studiare le singolarità al finito dell'equazione differenziale.

(b) Risolvere l'equazione indiciale della soluzione intorno al punto $z = 0$ e, alla luce del teorema di Fuchs, discutere la forma delle due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione in dipendenza dei parametri a, b, c (senza calcolarle).

(c) Trovare la relazione di ricorrenza di una delle due soluzioni dell'equazione come serie intorno al punto $z = 0$ e determinarne il raggio di convergenza con la formula di Cauchy-Hadamard.

(d) Determinare le condizioni per a, b, c, affinché una delle soluzioni sia di tipo polinomiale. Nel caso $c = a$, scrivere esplicitamente il polinomio di grado N, con N qualunque.

Soluzione

(a) Cerchiamo innanzitutto le singolarità dell'equazione. Portiamo l'equazione in forma canonica:

$$u''(z) + P(z)\,u'(z) + Q(z)\,u(z) = 0,$$

con

$$P(z) = \frac{(1+a+b)z - c}{z(z-1)}, \qquad Q(z) = \frac{a\,b}{z(z-1)}.$$

Le singolarità dell'equazione sono $z = 0$ e $z = 1$, che sono singolarità fuchsiane dell'equazione.

(b) Per scrivere l'equazione indiciale intorno all'origine, calcoliamo p_0 e q_0:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z\to 0} z\,P(z) = \lim_{z\to 0} \frac{(1+a+b)z - c}{z-1} = c, \\ q_0 &= \lim_{z\to 0} z^2\,Q(z) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{a\,b}{z-1} = 0. \end{aligned}$$

e risolviamo l'equazione indiciale:

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\,\rho + q_0 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\rho + c - 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1 - c.$$

Essendo $c \geq 1$, la soluzione con parte reale maggiore è ρ_1. Quindi le due soluzioni linearmente indipendenti hanno questo andamento:

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^k, \qquad u_2(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\, z^{k+1-c} + d\, u_1(z)\, \log z.$$

Se c non è un numero intero, allora $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$ e quindi nella soluzione u_2 sicuramente non c'è il termine logaritmico ($d = 0$). Se $c = 1$, allora $\rho_1 = \rho_2$ e il termine logaritmico è sicuramente presente ($d \neq 0$). Se invece c è un numero intero diverso da 1, potrebbe esserci o no il termine logaritmico.

(c) Cerchiamo di determinare la soluzione $u_1(z)$ (che è più semplice e ci serve per il punto successivo). Sostituiamo questo sviluppo in serie nell'equazione:

$$u_1'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1}, \qquad\qquad u_1''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^{k-2}.$$

$$\begin{aligned}
& z(z-1)\, u_1''(z) + \Big[(1+a+b)z - c\Big]\, u_1'(z) + a\, b\, u_1(z) = 0\,,\\
\Leftrightarrow\quad & z(z-1) \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^{k-2}\\
& + \Big[(1+a+b)z - c\Big] \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1} + ab \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^k = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^{k-1}\\
& + (1+a+b) \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^k - c \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1} + ab \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^k = 0.
\end{aligned}$$

Per portare tutte le potenze di z nella forma z^k, nella seconda e quarta serie facciamo la sostituzione

$$k' = k - 1, \qquad \text{cioè} \qquad k = k' + 1,$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^k - \sum_{k'=-1}^{+\infty} k'\,(k'+1)\, c_{k'+1}\, z^{k'}\\
& + (1+a+b) \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^k - c \sum_{k'=-1}^{+\infty} (k'+1)\, c_{k'+1}\, z^{k'} + ab \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^k = 0.
\end{aligned}$$

Le due serie in k' cominciano ora da -1, però per $k' = -1$ i coefficienti delle due serie si annullano per la presenza del fattore $(k'+1)$. Quindi possiamo far partire tranquillamente le due serie da $k' = 0$. Rinominando poi $k' \to k$, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\,c_k\,z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k+1)\,c_{k+1}\,z^k \\
& +(1+a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} k\,c_k\,z^k - c\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,c_{k+1}\,z^k + ab\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,z^k = 0, \\
\Leftrightarrow\; & \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ -(k+c)(k+1)\,c_{k+1} + \left[k^2 + (a+b)k + ab\right] c_k \right\} z^k = 0.
\end{aligned}
$$

Otteniamo quindi una serie di Taylor che deve annullarsi ovunque. Affinché ciò possa avvenire, deve annullarsi ogni suo singolo termine:

$$
-(k+c)(k+1)\,c_{k+1} + \left[k^2 + (a+b)k + ab\right] c_k = 0, \qquad \forall k \geq 0,
$$

Usando il fatto che

$$
k^2 + (a+b)k + ab = (k+a)(k+b),
$$

otteniamo la seguente relazione di ricorrenza sui coefficienti c_k:

$$
c_{k+1} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(k+c)}\,c_k\,.
$$

Il raggio di convergenza della soluzione generale è $\rho = 1$, visto che l'equazione ha un'altra singolarità in $z = 1$. Però una soluzione particolare può avere raggio di convergenza maggiore. Usiamo quindi la relazione di ricorrenza nella formula di Cauchy-Hadamard per trovare il raggio di convergenza:

$$
\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)(k+c)}{(k+a)(k+b)}\right| = 1.
$$

Naturalmente, se la serie è troncata, il raggio di convergenza è infinito.

(d) Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione di tipo polinomiale, cioè cerchiamo una soluzione che sia una serie troncata del tipo:

$$
u_1(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k, \qquad \text{con} \qquad N \in \mathbb{N}.
$$

Dalla relazione di ricorrenza ci accorgiamo che, affinché questo accada, basta che sia $c_{N+1} = 0$. Dalla relazione di ricorrenza (con $k = N$) abbiamo:

$$c_{N+1} = \frac{(N+a)(N+b)}{(N+1)(N+c)}\, c_N \,.$$

Perciò

$$c_{N+1} = 0 \quad \text{e} \quad c_N \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad N + a = 0 \quad \text{e/o} \quad N + b = 0\,.$$

Risolvendo per a e b abbiamo la condizione per avere una soluzione polinomiale di grado N è:

$$a = -N, \quad \text{e/o} \quad b = -N, \qquad N \in \mathbb{N}$$

Questa è la condizione per avere una soluzione polinomiale di grado N.

Cerchiamo ora nel caso $c = a$, la soluzione di grado N. In questo caso la relazione di ricorrenza si semplifica

$$c_{k+1} = \frac{k+b}{k+1}\, c_k \,.$$

Per avere una soluzione polinomiale di grado N deve essere $b = -N$, per cui la relazione di ricorrenza diventa:

$$c_{k+1} = \frac{k-N}{k+1}\, c_k \,.$$

Con questa relazione di ricorrenza abbiamo:

$$\begin{aligned}
k = 0, \qquad c_1 &= \frac{0-N}{0+1}\, c_0 = -N\, c_0; \\
k = 1, \qquad c_2 &= \frac{1-N}{1+1}\, c_1 = \frac{1-N}{2}\, c_1 = \frac{(-N)(1-N)}{2}\, c_0; \\
k = 2, \qquad c_3 &= \frac{2-N}{2+1}\, c_2 = \frac{2-N}{3}\, c_2 = \frac{(-N)(1-N)(2-N)}{2\cdot 3}\, c_0;
\end{aligned}$$

e così via. Il generico coefficiente c_k è pertanto:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{(-N)(1-N)\cdots(k-1-N)}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}\, c_0 = (-1)^k \frac{(N)(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\, c_0 \\
&= (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!k!}\, c_0 = (-1)^k \binom{N}{k}\, c_0
\end{aligned}$$

Il polinomio di grado N è perciò:

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k = c_0 \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} z^k = c_0\,(1-z)^N\,.$$

Verifichiamo che la soluzione trovata soddisfi l'equazione differenziale (con $c = a$ e $b = -N$):

$$\begin{aligned}
& z(z-1)\,u_1''(z) + \Big[(1+a-N)z - a\Big]\,u_1'(z) - a\,N\,u_1(z) \\
= \;& z(z-1)\,c_0\,N(N-1)(1-z)^{N-2} \\
& - \Big[(1+a-N)z - a\Big]\,c_0\,N(1-z)^{N-1} - a\,N\,c_0(1-z)^N \\
= \;& \Big\{ -\;z\,(N-1) - \Big[(1+a-N)z - a\Big] - a\,(1-z)\Big\} c_0\,N\,(1-z)^{N-1} \\
= \;& \Big[\Big(-N+1-1-a+N+a\Big)z + a - a\Big] c_0\,N\,(1-z)^{N-1} \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia data la seguente equazione differenziale

$$2\,u''(t) + u'(t) - u(t) \;=\; c\,e^{iat}\,,$$

con $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$.

(a) Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere l'equazione omogenea associata a quella data, con le condizioni iniziali date.

(b) Con lo stesso metodo, trovare la soluzione particolare dell'equazione, con condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.

(c) Sfruttando il calcolo precedente, trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale (per $t \geq 0$)

$$2\,v''(t) + v'(t) - v(t) \;=\; 2\,\cos(t) - 2\,.$$

Soluzione

(a) Con $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s[u(t)] &= U(s)\,,\\
\mathcal{L}_s[u'(t)] &= s\,U(s) - u_0\,,\\
\mathcal{L}_s[u''(t)] &= s^2\,U(s) - s\,u_0 - u_1\,.
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale, trasformata secondo Laplace, diviene

$$2\left[s^2\,U(s) - s\,u_0 - u_1\right] + \left[s\,U(s) - u_0\right] - U(s) \;=\; \mathcal{L}_s[c\,e^{iat}]\,,$$

ove

$$\mathcal{L}_s[c\,e^{iat}] \;=\; \frac{c}{s - ia}\,.$$

Pertanto, la trasformata della soluzione generale è

$$\begin{aligned}
U(s) &= \frac{c}{(s-ia)(2s^2+s-1)} + \frac{(2s+1)u_0 + 2u_1}{2s^2+s-1}\\
&= \underbrace{\frac{c}{(s-ia)(2s-1)(s+1)}}_{\equiv\, U_P(s)} + \underbrace{\frac{(2s+1)u_0 + 2u_1}{(2s-1)(s+1)}}_{\equiv\, U_O(s)}\,.
\end{aligned}$$

Si anti-trasforma $U_O(s)$ per ottenere la soluzione dell'equazione omogenea associata a quella data, con condizioni iniziali $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. L'ascissa di convergenza di $U_O(s)$ vale $s_0 = 1/2$, da cui si ha

$$u_O(t)\,\Theta(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} ds\, e^{st}\,\frac{(2s+1)u_0 + 2u_1}{(2s-1)(s+1)}\,, \qquad r > 1/2\,.$$

Per $t < 0$, si applica il lemma di Jordan chiudendo il cammino d'integrazione nel semipiano di analiticità $\mathrm{Re}(s) > r$, da cui $u_O(t)\,\Theta(t) = 0$. Per $t > 0$, si chiude il cammino nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < r$, da cui

$$t > 0: \qquad u_O(t)\,\Theta(t) \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2\pi i} e^{st}\,\frac{(2s+1)u_0 + 2u_1}{(2s-1)(s+1)}\right]_{s=s_k}\,,$$

con $s_1 = 1/2$, $s_2 = -1$ (poli semplici). Pertanto

$$\begin{aligned} t > 0: \qquad u_O(t)\,\Theta(t) \;&=\; e^{t/2}\,\frac{(2/2+1)u_0 + 2u_1}{2(1/2+1)} + e^{-t}\,\frac{(-2+1)u_0 + 2u_1}{(-2-1)} \\ &=\; e^{t/2}\,\frac{2(u_0+u_1)}{3} + e^{-t}\,\frac{u_0 - 2u_1}{3}\,. \end{aligned}$$

Si può verificare la correttezza del calcolo immettendo la soluzione trovata nell'equazione differenziale di partenza:

$$\begin{aligned} &2\left[\frac{1}{4}e^{t/2}\,\frac{2(u_0+u_1)}{3} + e^{-t}\,\frac{u_0-2u_1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}e^{t/2}\,\frac{2(u_0+u_1)}{3} - e^{-t}\,\frac{u_0-2u_1}{3}\right] \\ &\quad - \left[e^{t/2}\,\frac{2(u_0+u_1)}{3} + e^{-t}\,\frac{u_0-2u_1}{3}\right] \;=\; 0\,, \\ &u_O(0) \;=\; \left[\frac{2(u_0+u_1)}{3} + \frac{u_0-2u_1}{3}\right] \;=\; u_0\,, \\ &u_O'(0) \;=\; \left[\frac{1}{2}\frac{2(u_0+u_1)}{3} - \frac{u_0-2u_1}{3}\right] \;=\; u_1\,. \end{aligned}$$

(b) Si anti-trasforma $U_P(s)$ per ottenere la soluzione particolare dell'equazione differenziale inomogenea, con condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$. L'ascissa di convergenza di $U_P(s)$ vale $s_0 = 1/2$, da cui si ha

$$u_P(t)\,\Theta(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} ds\, e^{st}\,\frac{c}{(s-ia)(2s-1)(s+1)}\,, \qquad r > 1/2\,.$$

Per $t < 0$, si applica il lemma di Jordan chiudendo il cammino d'integrazione nel semipiano di analiticità $\mathrm{Re}(s) > r$, da cui $u_P(t)\,\Theta(t) = 0$. Per $t > 0$, si chiude il cammino nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < r$, da cui

$$t > 0: \qquad u_P(t)\,\Theta(t) \;=\; 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{st}\,c}{(s-ia)(2s-1)(s+1)}\right]_{s=s_k}\,,$$

con $s_0 = ia$, $s_1 = 1/2$, $s_2 = -1$ (poli semplici). Pertanto

$$\begin{aligned} t > 0: \qquad u_P(t)\,\Theta(t) &= \frac{e^{iat}\,c}{(2ia-1)(ia+1)} + \frac{e^{t/2}\,c}{(1/2-ia)2(1/2+1)} \\ &\quad + \frac{e^{-t}\,c}{(-1-ia)(-2-1)} \\ &= c\,\frac{3\,e^{iat} - 2\,e^{t/2}\,(ia+1) + e^{-t}\,(2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)}\,. \end{aligned}$$

Si può verificare la correttezza del calcolo immettendo la soluzione trovata nell'equazione differenziale di partenza:

$$\begin{aligned} & 2\,c\,\frac{-a^2\,3\,e^{iat} - 1/2\,e^{t/2}\,(ia+1) + e^{-t}\,(2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \\ & \quad + c\,\frac{ia\,3\,e^{iat} - e^{t/2}\,(ia+1) - e^{-t}\,(2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \\ & \quad - c\,\frac{3\,e^{iat} - 2\,e^{t/2}\,(ia+1) + e^{-t}\,(2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \;=\; c\,e^{iat}\,, \\ & u_P(0) \;=\; c\,\frac{3 - 2(ia+1) + (2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \;=\; 0\,, \\ & u_P'(0) \;=\; c\,\frac{ia\,3 - (ia+1) - (2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

(c) Si può rispondere a questo quesito evitando il calcolo diretto, semplicemente sfruttando la linearità dell'equazione differenziale. Data una funzione $f_a(t)$, soluzione dell'equazione

$$2\,f_a''(t) + f_a'(t) - f_a(t) \;=\; e^{iat}\,,$$

allora $v(t) = \sum_a c_a\, f_a(t)$ è soluzione di

$$2\,v''(t) + v'(t) - v(t) \;=\; \sum_a c_a\, e^{iat}\,.$$

Infatti

$$\begin{aligned} & 2\,v''(t) + v'(t) - v(t) \\ =\; & 2\sum_a c_a\, f_a''(t) + \sum_a c_a\, f_a'(t) - \sum_a c_a\, f_a(t) \;=\; \sum_a c_a\, e^{iat} \\ =\; & \sum_a c_a \Big[2\,f_a''(t) + f_a'(t) - f_a(t)\Big] \;=\; \sum_a c_a\, e^{iat}\,. \end{aligned}$$

In questo caso, ai punti 1. e 2. si è trovato (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} f_a(t) &= u_O(t) + u_P(t) \\ &= u_O(t) + \frac{3\,e^{iat} - 2\,e^{t/2}\,(ia+1) + e^{-t}\,(2ia-1)}{3(2ia-1)(ia+1)} \,. \end{aligned}$$

Essendo

$$2\,\cos(t) - 2 \;=\; e^{it} + e^{-it} - 2\,e^{i0t}\,,$$

i coefficienti della combinazione lineare sono $c_1 = c_{-1} = 1$, $c_0 = -2$, $c_a = 0$ $\forall\, a \neq -1, 1, 0$. La soluzione cercata è dunque

$$\begin{aligned} v(t) &= f_1(t) + f_{-1}(t) - 2\,f_0(t) \\ &= \frac{3\,e^{it} - 2\,e^{t/2}\,(i+1) + e^{-t}\,(2i-1)}{3(2i-1)(i+1)} + u_O(t) \\ &\quad + \frac{3\,e^{-it} - 2\,e^{t/2}\,(-i+1) + e^{-t}\,(-2i-1)}{3(-2i-1)(-i+1)} + u_O(t) \\ &\quad - 2\frac{3 - 2\,e^{t/2}\,(1) + e^{-t}\,(-1)}{3(-1)(1)} - 2\,u_O(t) \\ &= \frac{-3\,e^{it} + 2\,e^{t/2}\,(1+i) + e^{-t}\,(1-2i)}{3(1-2i)(1+i)} \\ &\quad + \frac{-3\,e^{-it} + 2\,e^{t/2}\,(1-i) + e^{-t}\,(1+2i)}{3(1+2i)(1-i)} + 2\frac{3 - 2\,e^{t/2} - e^{-t}}{3} \\ &= -\frac{3}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{16}{15}\,e^{t/2} - \frac{1}{3}\,e^{-t} + 2\,. \end{aligned}$$

Verifichiamo esplicitamente la correttezza del calcolo immettendo la soluzione nell'equazione data:

$$\begin{aligned} &2\left[\frac{3}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{4}{15}\,e^{t/2} - \frac{1}{3}\,e^{-t}\right] \\ &+\left[\frac{3}{5}\sin(t) + \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{8}{15}\,e^{t/2} + \frac{1}{3}\,e^{-t}\right] \\ &-\left[-\frac{3}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{16}{15}\,e^{t/2} - \frac{1}{3}\,e^{-t} + 2\right] \\ &= 2\cos(t) - 2\,. \end{aligned}$$

Il problema poteva essere risolto anche per calcolo diretto, senza ricorrere alla linearità dell'equazione. Indicando con $V(s)$ la trasformata di Laplace di $v(t)$, la trasformata dell'equazione è

$$2\left[s^2\,V(s) - s\,v_0 - v_1\right] + \left[s\,V(s) - v_0\right] - V(s) \;=\; \mathcal{L}_s[2\,\cos(t) - 2]\,,$$

ove

$$\mathcal{L}_s[2\,\cos(t) - 2] \;=\; \frac{2\,s}{s^2+1} - \frac{2}{s} \;=\; -\frac{2}{s(s^2+1)}\,.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} V(s) \;&=\; -\frac{2}{s(s^2+1)(2s^2+s-1)} + \frac{(2s+1)v_0 + 2v_1}{2s^2+s-1} \\ &=\; \underbrace{-\frac{2}{s(s-i)(s+i)(2s-1)(s+1)}}_{\equiv\; V_P(s)} + \underbrace{\frac{(2s+1)v_0 + 2v_1}{(2s-1)(s+1)}}_{\equiv\; V_O(s)}\,. \end{aligned}$$

La soluzione particolare $v_P(t)$ con condizioni iniziali nulle, corrispondente a quella trovata mediante la linearità, si ottiene anti-trasformando $V_P(s)$. Per $t<0$ l'anti-trasformata si annulla per il lemma di Jordan, mentre per $t>0$ si ottiene un contributo da tutti i cinque poli semplici $s_1 = 0$, $s_2 = i$, $s_3 = -i$, $s_4 = 1/2$, $s_5 = -1$:

$$\begin{aligned} t>0: \qquad v_P(t)\,\Theta(t) \;&=\; -2\sum_{k=1}^{5} \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s-i)(s+i)(2s-1)(s+1)}\right]_{s=s_k} \\ &=\; -2\left[-1 + \frac{e^{it}}{2(1-2i)(1+i)} + \frac{e^{-it}}{2(1+2i)(1-i)} + \frac{e^{t/2}}{15/8} + \frac{e^{-t}}{6}\right] \\ &=\; -\frac{3}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{16}{15}\,e^{t/2} - \frac{1}{3}\,e^{-t} + 2\,, \end{aligned}$$

consistentemente con quanto ottenuto prima.