13.1 Introduzione

Per tutti i tipi di onde discussi nei Capitoli 10, 11 e 12, la velocità di propagazione dipende da alcune proprietà fisiche del mezzo attraverso al quale le onde si propagano. Per esempio la velocità delle onde elastiche dipende da un modulo elastico e dalla densità del mezzo. La velocità delle onde elettromagnetiche dipende dalla permittività e dalla permeabilità della sostanza attraverso la quale le onde si propagano.

Tale dipendenza della velocità di propagazione di un'onda dalle proprietà del mezzo dà luogo ai fenomeni di *riflessione* e *rifrazione*, che si verificano quando un'onda attraversa una superficie che separa due mezzi nei quali l'onda si propaga con velocità differenti. L'*onda riflessa* è una nuova onda che si propaga all'indietro nel mezzo attraverso il quale si propagava l'onda iniziale. L'*onda rifratta* è l'onda trasmessa nel secondo mezzo. L'energia dell'onda incidente si suddivide ripartendosi fra l'onda riflessa e l'onda rifratta. In molti casi è l'onda riflessa che riceve più energia come nel caso degli specchi. In altri casi l'onda rifratta trasporta la maggior parte di energia. Quando un'onda trasversale è polarizzata, il suo stato di polarizzazione viene di solito interessato sia dalla riflessione sia dalla rifrazione; per il momento ignoreremo questo effetto e discuteremo la polarizzazione nel prossimo capitolo.

13.2 Principio di Huygens

La propagazione di un'onda è descritta dalle equazioni del campo al quale l'onda corrisponde. Perciò se la sorgente di un'onda è nota, la sua propagazione da una regione ad un'altra può in linea di principio essere individuata se si tengono in considerazione i cambiamenti nelle proprietà del mezzo. È anche possibile, tuttavia, calcolare l'ampiezza di un'onda in un punto particolare dello spazio senza fare diretto riferimento alle sorgenti. Intorno al 1680 il fisico olandese Christiaan Huygens (1624–1695) propose un semplice meccanismo per determinare il modo di propagazione delle onde. La sua costruzione è applicabile sia alle onde elastiche sia alle onde meccaniche in un mezzo materiale.

Ricordiamo che una *superficie d'onda* o *fronte d'onda* è una superficie che ha fase costante e passa per quei punti del mezzo che sono raggiunti dall'onda in moto nello stesso istante. Per esempio per un'onda piana la perturbazione è espressa da $f(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}-vt)$, e una superficie d'onda è costituita da tutti i punti nei quali la fase $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}-vt$ ha il medesimo valore in un dato istante. Perciò la superficie d'onda è data dall'equazione.

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}-vt=\text{cost},$$

che, per un dato tempo t corrisponde a un piano perpendicolare al versore $\boldsymbol{u}$. Analogamente per le onde sferiche le superfici d'onda sono date da $r-vt=\text{cost}$, che, ad un dato istante t corrispondono a sfere.

Huygens visualizzò un metodo per passare da una superficie d'onda ad un'altra quando si suppone che l'onda sia la risultante del moto delle particelle costituenti il mezzo. Si consideri una superficie d'onda S (fig. 13–1). Quando l'onda in moto raggiunge questa superficie, ciascuna particella a, b, c... sulla superficie diventa una sorgente secondaria di onde e ciascuna emette *onde secondarie* (indicate con piccoli semicerchi), che raggiungono lo strato immediatamente prossimo di particelle nel mezzo. Queste particelle sono quindi messe in movimento e formano la superficie d'onda successiva S'. La superficie S' è tangente a tutte le onde secondarie. Il processo continua a ripetersi e dà luogo alla propagazione di un'onda attraverso il mezzo. La rappresentazione grafica della propagazione di un'onda ha una forma molto significativa quando l'onda è un'onda elastica risultante dalle vibrazioni meccaniche degli atomi o delle molecole in un corpo.

Tuttavia, questa rappresentazione non ha significato fisico in casi come la propagazione di un'onda elettromagnetica nel vuoto dove non vi sono particelle che vibrano. La costruzione di Huygens, anche se del tutto plausibile se applicata ad onde di natura meccanica nella materia, richiese tuttavia una revisione dopo che si scoprì che in natura esistono anche altre onde di tipo differente. Questa revisione fu compiuta alla fine del diciannovesimo secolo dal tedesco Gustav Kirchhoff (1824–1887), che sostituì la costruzione intuitiva di Huygens con una trattazione più matematica. I calcoli di Kirchhoff sono troppo complicati per essere riportati qui. Il risultato finale di questi calcoli è, tuttavia, relativamente semplice come si vedrà nei paragrafi successivi.

La propagazione per onde è regolata dall'equazione generale dell'onda (10.65). Vale a dire

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) \tag{13.1}$$

dove ξ può essere lo spostamento degli atomi di una sostanza nel caso di un'onda elastica, il campo elettrico o magnetico nel caso di un'onda elettromagnetica, e così via. Descrivere il modo di propagazione di un'onda in un dato mezzo qualsiasi, consiste principalmente nell'ottenere una soluzione $\xi(r, t)$ di questa equazione differenziale. La soluzione dell'equazione (13.1) dipende da quei valori di ξ che soddisfano le condizioni fisiche del problema; cioè la posizione e la natura delle sorgenti, le superfici fisiche di discontinuità, ecc. I matematici chiamano

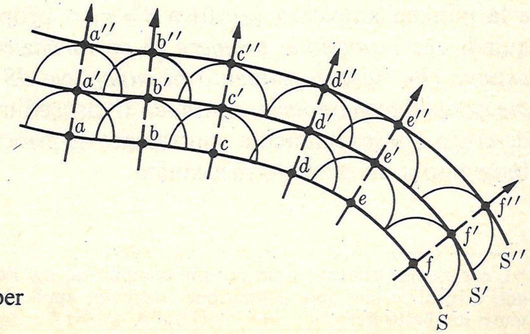


Fig. 13-1 Costruzione di Huygens per un'onda progressiva.

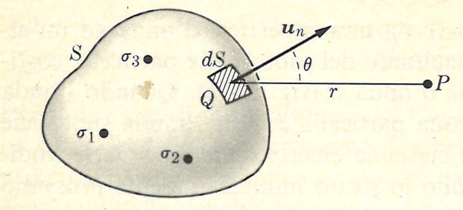


Fig. 13-2 L'onda in P può essere determinata se essa è nota nei punti della superficie chiusa S.

queste condizioni, *condizioni al contorno*. La teoria delle equazioni differenziali stabilisce che in condizioni particolari possiamo trovare la soluzione di una equazione del tipo dell'equazione (13.1) se conosciamo i valori della funzione $\xi(r, t)$ nei punti di una superficie chiusa S (fig. 13-2).

Per essere più concreti, supponiamo di voler determinare il moto dell'onda in un punto qualsiasi P. Se conosciamo le sorgenti σ_1, σ_2, σ_3, ... possiamo sommare tutti i loro contributi in P per ottenere il moto dell'onda risultante. Ora supponiamo che, invece, noi conosciamo soltanto il valore di ξ in tutti i punti della superficie S arbitraria ma chiusa. Anche in questo caso noi possiamo ottenere l'onda in P pur ignorando la distribuzione delle sorgenti. Questa affermazione può essere espressa matematicamente nel modo seguente. La funzione $f(Q, t)$ rappresenti l'onda in ciascun punto Q sulla superficie S all'istante t; r rappresenti la distanza dall'elemento di superficie dS, nell'intorno di Q, al punto P. La perturbazione in P all'istante t può essere espressa da un integrale della forma*

$$\xi_P(t) = \int_S g(\theta) \frac{f(r - vt)}{r} dS \tag{13.2}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie S. Questo integrale ha una interpretazione fisica abbastanza semplice: il fattore $(1/r)$ $f(r - vt)$ rappresenta un'onda sferica emessa dall'elemento di superficie dS nell'istante $t - r/v$ che raggiunge P all'istante t dove r/v è il tempo di propagazione da dS a P. Il fattore $g(\theta)$ è un fattore direzionale, che indica come le onde emesse da dS non abbiano la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Se θ è definito come l'angolo tra la normale alla superficie dS e la direzione da dS a P (fig. 13-2), la forma di $g(\theta)$ è

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right).$$

La massima ampiezza ($g = 1$) corrisponde allora a $\theta = 0$, o propagazione in avanti; e la minima ampiezza ($g = 0$) a $\theta = \pi$, o propagazione all'indietro. Concludiamo quindi che *è possibile ottenere la perturbazione in un punto P all'istante t se si assume che ciascun elemento di superficie dS della superficie chiusa S agisca come sorgente secondaria di onde.* Il procedimento matematico di Kirchhoff ora descritto è essenzialmente equivalente al principio di Huygens, ma senza alcun riferimento a un modello meccanico.

* L'espressione effettiva è un po' più complicata; ma l'equazione (13.2) è sufficiente al nostro scopo qui, e fornisce una approssimazione adeguata, applicabile al tipo di problemi che devono venir discussi in questo libro.

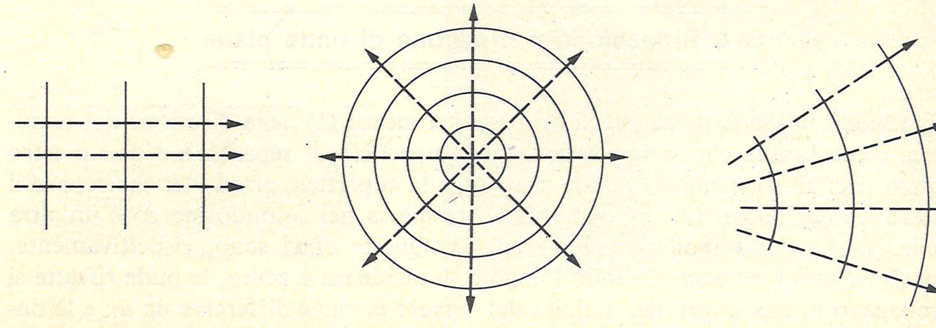
Avremo occasione di usare il principio di Huygens, come formulato da Kirchhoff, in molte delle discussioni che seguiranno sulla propagazione per onde, particolarmente in quelle che trattano la diffrazione e la diffusione nei capitoli seguenti.

13.3 Teorema di Malus

Un altro importante strumento per individuare la propagazione di un'onda in un mezzo è il *teorema di Malus*, così chiamato dal nome del fisico francese E. Malus (1775-1812). Facendo riferimento alla figura 13-1, osserviamo che si può tracciare una serie di linee perpendicolari alle successive superficie d'onda (indicate con linee tratteggiate con una freccia). Tali linee, dette *raggi* corrispondono alle linee di propagazione dell'onda. La relazione tra raggi e superfici d'onda è simile alla relazione tra linee di forza e superfici equipotenziali. Punti che appartengono a differenti superfici d'onda e uniti da un dato raggio sono detti *punti corrispondenti* (vedere i punti a, a', a'' o i punti b, b', b'' in figura 13-1). Il tempo necessario perché un'onda vada da S a S'' deve essere lo stesso di quello misurato seguendo uno qualsiasi dei raggi, in quanto tutti i punti su S'' devono avere la stessa fase. Possiamo quindi affermare che

l'intervallo di tempo che separa punti corrispondenti di due superfici d'onda è lo stesso per tutte le coppie di punti corrispondenti.

Possiamo quindi concludere che le distanze aa'', bb'', cc'', ecc. devono dipendere dalla velocità dell'onda in ciascun punto lungo un dato raggio. In un mezzo isotropo omogeneo, in cui la velocità è la stessa in tutti i punti e in tutte le direzioni, la distanza fra due superfici d'onda deve essere la stessa per tutti i punti corrispondenti; e perciò i raggi sono rette in quanto la simmetria suggerisce che non vi



(a) (b) (c)

Fig. 13-3 Onde piane, onde sferiche e onde di forma qualsiasi.

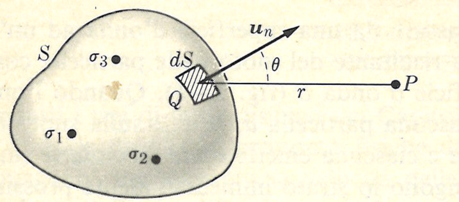


Fig. 13-2 L'onda in P può essere determinata se essa è nota nei punti della superficie chiusa S.

queste condizioni, *condizioni al contorno*. La teoria delle equazioni differenziali stabilisce che in condizioni particolari possiamo trovare la soluzione di una equazione del tipo dell'equazione (13.1) se conosciamo i valori della funzione $\xi(r,t)$ nei punti di una superficie chiusa S (fig. 13-2).

Per essere più concreti, supponiamo di voler determinare il moto dell'onda in un punto qualsiasi P. Se conosciamo le sorgenti σ_1, σ_2, σ_3, ... possiamo sommare tutti i loro contributi in P per ottenere il moto dell'onda risultante. Ora supponiamo che, invece, noi conosciamo soltanto il valore di ξ in tutti i punti della superficie S arbitraria ma chiusa. Anche in questo caso noi possiamo ottenere l'onda in P pur ignorando la distribuzione delle sorgenti. Questa affermazione può essere espressa matematicamente nel modo seguente. La funzione $f(Q,t)$ rappresenti l'onda in ciascun punto Q sulla superficie S all'istante t; r rappresenti la distanza dall'elemento di superficie dS, nell'intorno di Q, al punto P. La perturbazione in P all'istante t può essere espressa da un integrale della forma*

$$\xi_P(t)=\int_S g(\theta)\frac{f(r-vt)}{r}\,dS \tag{13.2}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie S. Questo integrale ha una interpretazione fisica abbastanza semplice: il fattore $(1/r)\ f(r-vt)$ rappresenta un'onda sferica emessa dall'elemento di superficie dS nell'istante $t-r/v$ che raggiunge P all'istante t dove r/v è il tempo di propagazione da dS a P. Il fattore $g(\theta)$ è un fattore direzionale, che indica come le onde emesse da dS non abbiano la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Se θ è definito come l'angolo tra la normale alla superficie dS e la direzione da dS a P (fig. 13-2), la forma di $g(\theta)$ è

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\theta\right).$$

La massima ampiezza ($g=1$) corrisponde allora a $\theta=0$, o propagazione in avanti; e la minima ampiezza ($g=0$) a $\theta=\pi$, o propagazione all'indietro. Concludiamo quindi che *è possibile ottenere la perturbazione in un punto P all'istante t se si assume che ciascun elemento di superficie dS della superficie chiusa S agisca come sorgente secondaria di onde.* Il procedimento matematico di Kirchhoff ora descritto è essenzialmente equivalente al principio di Huygens, ma senza alcun riferimento a un modello meccanico.

* L'espressione effettiva è un po' più complicata; ma l'equazione (13.2) è sufficiente al nostro scopo qui, e fornisce una approssimazione adeguata, applicabile al tipo di problemi che devono venir discussi in questo libro.

Avremo occasione di usare il principio di Huygens, come formulato da Kirchhoff, in molte delle discussioni che seguiranno sulla propagazione per onde, particolarmente in quelle che trattano la diffrazione e la diffusione nei capitoli seguenti.

13.3 Teorema di Malus

Un altro importante strumento per individuare la propagazione di un'onda in un mezzo è il *teorema di Malus*, così chiamato dal nome del fisico francese E. Malus (1775–1812). Facendo riferimento alla figura 13-1, osserviamo che si può tracciare una serie di linee perpendicolari alle successive superficie d'onda (indicate con linee tratteggiate con una freccia). Tali linee, dette *raggi* corrispondono alle linee di propagazione dell'onda. La relazione tra raggi e superfici d'onda è simile alla relazione tra linee di forza e superfici equipotenziali. Punti che appartengono a differenti superfici d'onda e uniti da un dato raggio sono detti *punti corrispondenti* (vedere i punti a, a', a'' o i punti b, b', b'' in figura 13-1). Il tempo necessario perché un'onda vada da S a S'' deve essere lo stesso di quello misurato seguendo uno qualsiasi dei raggi, in quanto tutti i punti su S'' devono avere la stessa fase. Possiamo quindi affermare che

l'intervallo di tempo che separa punti corrispondenti di due superfici d'onda è lo stesso per tutte le coppie di punti corrispondenti.

Possiamo quindi concludere che le distanze aa'', bb'', cc'', ecc. devono dipendere dalla velocità dell'onda in ciascun punto lungo un dato raggio. In un mezzo isotropo omogeneo, in cui la velocità è la stessa in tutti i punti e in tutte le direzioni, la distanza fra due superfici d'onda deve essere la stessa per tutti i punti corrispondenti; e perciò i raggi sono rette in quanto la simmetria suggerisce che non vi

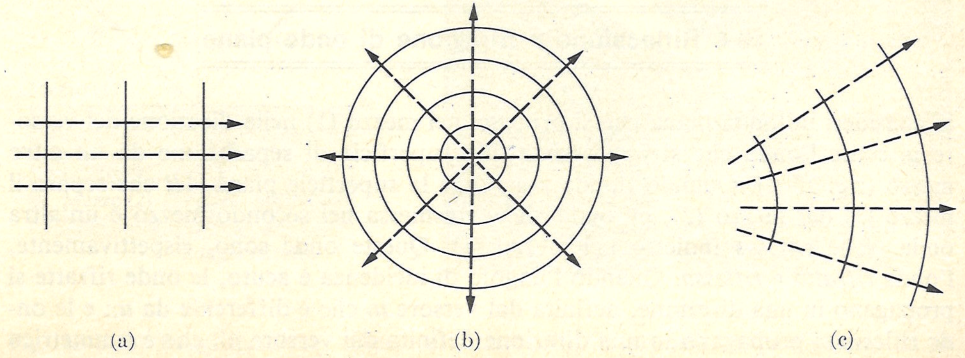


Fig. 13-3 Onde piane, onde sferiche e onde di forma qualsiasi.