Esercizio 1

Scrivere l'espressione di un'onda elettromagnetica monocromatica che si propaghi nel vuoto in direzione $\hat{n} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ con $\nu = 7 \cdot 10^{14}$ s^{-1}. si supponga l'onda polarizzata nella direzione dell'asse x.

Soluzione

L'onda è monocromatica, cioè ha una sola frequenza e, quindi, una sola lunghezza d'onda. Supponiamo la fase iniziale $\varphi = 0$ (per $x = 0$ e $t = 0$).

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(k\hat{n}\vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(k\hat{n}\vec{r} - \omega t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

dove $\vec{k} = k\hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, la pulsazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi 7 \cdot 10^{14}$ rad/s $= 14\pi 10^{14}$ rad/s e la lunghezza d'onda $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 428.6$ nm, che corrisponde alla regione del visibile (siamo nella zona del violetto).

$\vec{k}$ è un vettore con direzione $\hat{n}$, per cui:
$\vec{k} = 14.7 \cdot 10^6 \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ m^{-1}.
Il campo elettrico è polarizzato lungo l'asse x, quindi $\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$.
Per calcolare la direzione del campo magnetico $\vec{B}_0$ si sfrutta la relazione tra i versori: $\hat{v} \times \hat{E} = \hat{B}$.
Per il calcolo del modulo di $\vec{B}_0$ si deve considerare che $E_0/B_0 = c$ nel vuoto.
Combinando modulo e direzione si ottiene:

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ E_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi: $\vec{B}_0 = \left(0, \frac{E_0}{c\sqrt{5}}, -\frac{2E_0}{c\sqrt{5}}\right)$.

Esercizio 3

Il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ di un'onda e.m. piana che si propaga nella direzione $\vec{u}_k = \vec{k}/|\vec{k}|$ sono dati da:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \qquad \text{con} \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{v}, \quad v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}.$$

Si dimostri che valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}, \qquad \vec{E} = v^2\,\frac{\vec{B}\times\vec{k}}{\omega}.$$

Soluzione

Inseriamo

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

nella terza e quarta equazione di Maxwell in assenza di sorgenti

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Otteniamo

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right) = -\,\frac{\partial\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}{\partial t} = i\,\omega\,\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = i\,\omega\,\vec{B},$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right) = \mu\epsilon\,\frac{\partial\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}{\partial t} = -\,i\,\omega\,\frac{1}{v^2}\,\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = -\,i\,\omega\,\frac{1}{v^2}\,\vec{E}.$$

Per semplificare i primi membri usiamo una proprità del rotore. Se $\vec{a}$ è un vettore uniforme (come $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$) e $f(\vec{x})$ è una funzione scalare di $\vec{x}$ (come $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$), abbiamo:

$$\vec{\nabla}\times\Big[f(\vec{x})\,\vec{a}\Big] = \Big[\vec{\nabla}f(\vec{x})\Big]\times\vec{a}.$$

Quindi applicata ai primi membri, questi diventano

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right) = \left(\vec{\nabla}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)\times\vec{E}_0 = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\,i\,\vec{k}\times\vec{E}_0 = i\,\vec{k}\times\vec{E},$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right) = \left(\vec{\nabla}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)\times\vec{B}_0 = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\,i\,\vec{k}\times\vec{B}_0 = i\,\vec{k}\times\vec{B},$$

da cui si ricava:

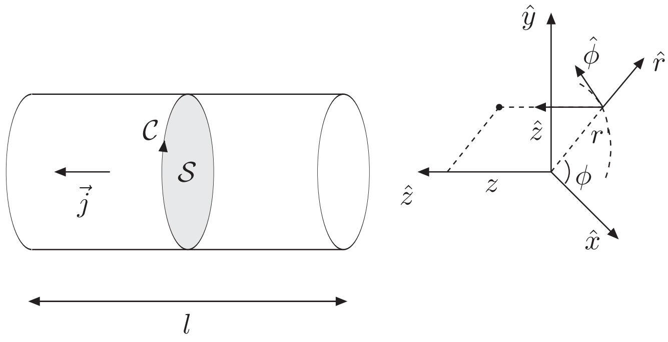
$$i\,\vec{k}\times\vec{E} = i\,\omega\,\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega},$$

$$i\,\vec{k}\times\vec{B} = -\,i\,\omega\,\frac{1}{v^2}\,\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = v^2\,\frac{\vec{B}\times\vec{k}}{\omega}.$$

Esercizio 4

Un conduttore rettilineo cilindrico omogeneo di lunghezza l e raggio $a = 0.5$ cm è costituito da un materiale avente resistività $\rho = 1.11 \cdot 10^{-7}$ Ωm. Il conduttore è percorso da una corrente di intensità costante di 3 A. Calcolare il vettore di Poynting e dimostrare che la potenza dissipata per effetto Joule è uguale al flusso entrante del vettore di Poynting.

Soluzione



Per calcolare il vettore di Poynting, abbiamo bisogno di conoscere il campo elettrico e il campo magnetico. Entrambi sono determinati dalla densità di corrente $\vec{j}$.

La corrente $I = 3\,A$ nel conduttore è legata alla densità di corrente $\vec{j}$ dalla relazione:

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}}, \qquad\qquad \vec{j} = j\,\hat{z},$$

dove $\mathcal{S} = \pi\,a^2$ è la sezione circolare del conduttore. La densità di corrente $\vec{j}$ si distribuisce uniformemente nel conduttore ed è perpendicolare alla sezione circolare. Quindi avremo:

$$I = j\,\pi\,a^2 \qquad \Rightarrow \qquad j = \frac{I}{\pi\,a^2}.$$

Il legame tra il campo elettrico $\vec{E}$ e la densità di corrente $\vec{j}$ è dato dalla legge di Ohm:

$$\vec{j} = \sigma\,\vec{E},$$

dove $\sigma = 1/\rho$ è la conduttività del materiale. Da questa relazione e dall'espressione per $\vec{j}$ si ricava l'espressione per il campo elettrico $\vec{E}$ dentro il conduttore

$$\vec{E} = \rho\vec{j} = \rho\,\frac{I}{\pi\,a^2}\,\hat{z},$$

che risulta quindi essere uniforme e diretto lungo l'asse z.

Per calcolare il campo magnetico usiamo la legge di Ampère nel caso stazionario ($\vec{E}$ non varia nel tempo) sulla superficie $\mathcal{S}$:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \mu_0\,I.$$

Il campo magnetico $\vec{B}$ dipende solo dalla distanza r dall'asse del cilindro (per motivi di simmetria) e ha solo componente tangenziale (per le leggi di Maxwell):

$$\vec{B} = B(r)\,\hat{\phi}.$$

Quindi il primo membro della legge di Ampère si riscrive:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} d\phi\, a\, B(a) = 2\,\pi\, a\, B(a),$$

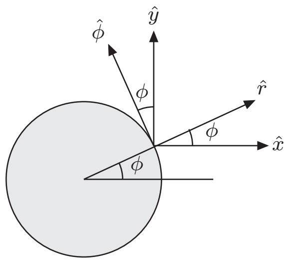
da cui segue:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a}\,\hat{\phi}.$$

Il vettore di Poynting sulla superficie del conduttore sarà quindi:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B}(a) = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\rho\, I}{\pi\, a^2}\,\frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a}\,\hat{z}\times\hat{\phi} = \frac{\rho\, I^2}{2\,\pi^2\, a^3}\,\hat{z}\times\hat{\phi}.$$

Calcoliamo il prodotto vettoriale $\hat{z}\times\hat{\phi}$:



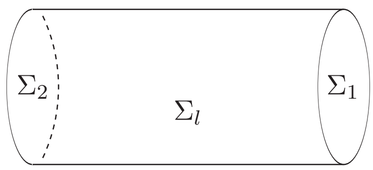
$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{\phi} = -\,\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{z}\times\hat{\phi} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\,\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = -\,\cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y} = -\,\hat{r}.$$

Da cui segue che il vettore di Poynting è diretto radialmente verso l'interno del conduttore:

$$\vec{S} = -\,\frac{\rho\, I^2}{2\,\pi^2\, a^3}\,\hat{r}.$$



Il flusso del vettore di Poynting sulla ~~superficie del cilindro $\Sigma =$~~ $\Sigma_l + \Sigma_1 + \Sigma_2$ ha tre componenti:

$$\Phi(\vec{S}) = \int_{\Sigma_l} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}_l + \int_{\Sigma_1} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}_2.$$

Gli ultimi due integrali sono nulli, perchè $\vec{S}$ ha direzione radiale ed è quindi parallelo alle due superfici Σ_1 e Σ_2. La superficie laterale Σ_l ha invece versore diretto radialmente verso l'interno (flusso entrante!), come $\vec{S}$. Quindi abbiamo:

$$\Phi(\vec{S}) = \int_{\Sigma_l} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}_l = |\vec{S}|\, \Sigma_l = \frac{\rho\, I^2}{2\, \pi^2\, a^3}\, 2\, \pi\, a\, l = \rho\, \frac{l}{\pi\, a^2}\, I^2.$$

Usiamo ora l'espressione della resistenza R del conduttore

$$R = \rho\, \frac{l}{\pi\, a^2}$$

per verificare che il flusso entrante del vettore di Poynting coincide con la potenza W dissipata per effetto Joule:

$$\Phi(\vec{S}) = \rho\, \frac{l}{\pi\, a^2}\, I^2 = R\, I^2 = W.$$

$\boxed{\textbf{Esercizio 5}}$

Un granello sferico di polvere perfettamente assorbente, di densità $\rho_M = 2 \cdot 10^3\, kg/m^3$ e diametro $d = 1\, \mu m$, si trova inizialmente fermo nello spazio interstellare a una distanza dal sole $D = 1,5 \cdot 10^8\, km$. Se la potenza totale emessa dal sole sotto forma di onde elettromagnetiche è $\mathcal{P} = 3,96 \cdot 10^{26}\, W$, determinare (in modulo, direzione e verso):

a) la forza sul granello dovuta alla pressione di radiazione;

b) la risultante delle forze che agiscono sul granello;

c) la risultante delle forze che agiscono su un secondo granello di polvere di diametro $d' = 0,5\, \mu m$, posto nello stesso punto.

(La massa del sole è $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}\, kg$)

Soluzione

a) L'onda emessa dal sole e' un'onda sferica, cioè i fronti d'onda sono superfici sferiche centrate nel sole. Poiché l'energia per unita' di tempo (cioè la potenza $\mathcal{P}$) trasportata dall'onda si conserva, l'energia della radiazione che colpisce nell'unita' di tempo un qualunque fronte d'onda deve essere ancora $\mathcal{P}$. In particolare sarà $\mathcal{P}$ l'energia che colpisce nell'unita' di tempo la superficie sferica di raggio D, per cui su tale superficie l'intensità I dell'onda (= l'energia per unita' di tempo per unità di superficie) sarà:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{4\pi\, D^2}.$$

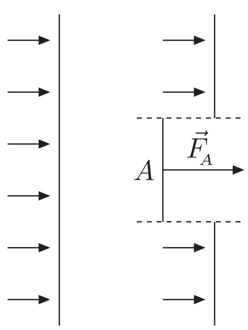
Se la distanza D dal sole è grande rispetto alle dimensioni dell'oggetto su cui incide, l'onda sferica si puo' approssimare ad un'onda piana con intensità $I = \mathcal{P}/(4\pi\, D^2)$.

La quantità di moto per unita' di tempo per unità di superficie $\vec{p}$ trasportata dall'onda è legata (nel vuoto) all'intensità I dalla relazione:

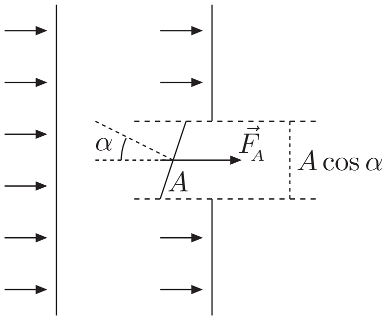
$$|\vec{p}| = \frac{I}{c}.$$

Se l'onda incide perpendicolarmente su una superficie A, l'energia per unità di tempo che la investe è IA e la superficie subisce una forza (= quantità di moto per unita' di tempo)

$$\vec{F}_A = A\,\vec{p}, \qquad |\vec{F}_A| = A\,|\vec{p}| = \frac{I\,A}{c}.$$



Se invece la normale alla superficie A forma un angolo α con la direzione di propagazione dell'onda,

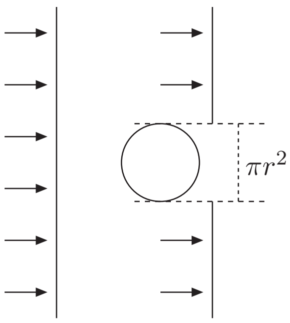


l'energia per unità di tempo che incide sulla superficie A è $I A \cos\alpha$ e la superficie subisce una forza:

$$\vec{F}_A = \vec{p}\, A\, \cos\alpha, \qquad\qquad |\vec{F}_A| = |\vec{p}|\, A\, \cos\alpha = \frac{I\, A\, \cos\alpha}{c}.$$

Quindi in pratica solo la supercie effettivamente "vista" dal fronte d'onda contribuisce all'energia che incide sulla superficie nell'unità di tempo e quindi alla forza che agisce sulla superficie.

Nel nostro caso abbiamo un granello sferico di raggio $r = \frac{d}{2}$,



quindi la superficie effettivamente "vista" dall'onda è il cerchio di raggio r (di area πr^2) e la forza agente sul granello è:

$$|\vec{F}_R| = |\vec{p}|\, \pi\, r^2 = \frac{I}{c}\, \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{\mathcal{P}\, d^2}{16\, c\, D^2} = \frac{(3.96 \cdot 10^{26}\, W)(10^{-6}\, m)^2}{16\, (3 \cdot 10^8\, m/s)(1.5 \cdot 10^{11}\, m)^2} = 3.67 \cdot 10^{-18}\, N.$$

b) Sul granello agisce anche la forza gravitazionale $\vec{F}_G$. Mentre la forza dovuta alla radiazione $\vec{F}_R$ è repulsiva, la forza gravitazionale è attrattiva. Essa ha modulo:

$$|\vec{F}_G| = G\, \frac{M\, M_S}{D^2},$$

dove M è la massa del granello e G è la costante di Newton di gravitazione universale. La massa M si può calcolare dalla densità ρ_M:

$$M = \rho_M\, \frac{4}{3}\, \pi\, r^3 = \frac{\pi\, \rho_M\, d^3}{6}.$$

La forza gravitazionale è quindi

$$
\begin{aligned}
|\vec{F}_G| &= G\,\frac{M\,M_S}{D^2} = G\,\frac{\pi\,\rho_M\,M_S\,d^3}{6\,D^2} \\
&= (6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2)\,\frac{\pi\,(2 \cdot 10^3\,kg/m^3)(1.99 \cdot 10^{30}\,kg)(10^{-6}\,m)^3}{6\,(1.5 \cdot 10^{11}\,m)^2} \\
&= 6.19 \cdot 10^{-18}\,N.
\end{aligned}
$$

La risultante $\vec{F}$ delle forze agenti sul granello è attrattiva e il suo modulo vale:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_G| - |\vec{F}_R| = 6.19 \cdot 10^{-18}\,N - 3.67 \cdot 10^{-18}\,N = 2.52 \cdot 10^{-18}\,N.$$

c) Se il granello ha diametro $d' = 0.5\,\mu m = d/2$, le due forze hanno modulo:

$$
\begin{aligned}
|\vec{F}'_R| &= \frac{\mathcal{P}\,(d')^2}{16\,c\,D^2} = |\vec{F}_R|\left(\frac{d'}{d}\right)^2 = (3.67 \cdot 10^{-18}\,N)\,\frac{1}{4} = 9.16 \cdot 10^{-19}\,N, \\
|\vec{F}'_G| &= G\,\frac{\pi\,\rho_M\,M_S\,(d')^3}{6\,D^2} = |\vec{F}_G|\left(\frac{d'}{d}\right)^3 = (6.19 \cdot 10^{-18}\,N)\,\frac{1}{8} = 7.73 \cdot 10^{-19}\,N.
\end{aligned}
$$

Poiché la forza di radiazione varia come d^2, mentre la forza gravitazionale come d^3, quest'ultima diminuisce di più della prima al diminuire di d. Il risultato è che per un granello di diametro $d' = 0.5\,\mu m$ la forza di radiazione supera la forza gravitazionale e la risultante delle forze diventa repulsiva con modulo:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_G| - |\vec{F}_R| = 9.16 \cdot 10^{-19}\,N - 7.73 \cdot 10^{-19}\,N = 1.43 \cdot 10^{-19}\,N.$$