

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

INDICE

1. Successioni di funzioni	1
2. Serie di funzioni	7
2.1. Esercizi sulle serie di funzioni	9
3. Serie di potenze in campo complesso	13
3.1. Esercizi sulle serie di potenze in \mathbb{C}	16
3.2. Funzioni trascendenti in \mathbb{C}	18
4. Serie di potenze in campo reale	19
4.1. Esercizi sulle serie di potenze in \mathbb{R}	21
5. Teoremi di derivazione per successioni e serie di funzioni	23
6. Funzioni analitiche	26
7. Esercizi di riepilogo	29

1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Fissato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ oppure $S \subseteq \mathbb{C}$ consideriamo una *successione di funzioni*

$$f_n: S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f_n: S \rightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Definizione 1.1. Diciamo che la successione $(f_n)_n$ converge alla funzione f puntualmente nell'insieme $E \subseteq S$ se

$$\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f(x) \in \mathbb{C}$$

ovvero se

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(x, \varepsilon) \quad \text{tale che} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

In tal caso la funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure \mathbb{C}) si chiama *funzione limite*.

Esempio 1.2. Consideriamo la successione di funzioni ($S \equiv \mathbb{R}$)

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n,$$

il cui limite puntuale è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ \text{\textit{A}} \text{ oppure divergente,} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Deduciamo quindi che la successione converge puntualmente nell'insieme

$$E = (-1, 1]$$

alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si osservi questo fatto: le funzioni f_n sono continue su tutto \mathbb{R} (e in particolare su E) per ogni n , la funzione limite puntuale f è definita su un sottoinsieme proprio di \mathbb{R} e non è neppure continua su E . Nel passaggio al limite puntuale si è quindi persa la continuità.

Consideriamo ora l'analogia successione in campo complesso, ovvero

$$f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(z) = z^n,$$

il cui limite puntuale è alla funzione limite

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } |z| < 1 \\ 1, & \text{se } z = 1. \end{cases}$$

La funzione limite f risulta in questo caso definita su sottoinsieme proprio di \mathbb{C}

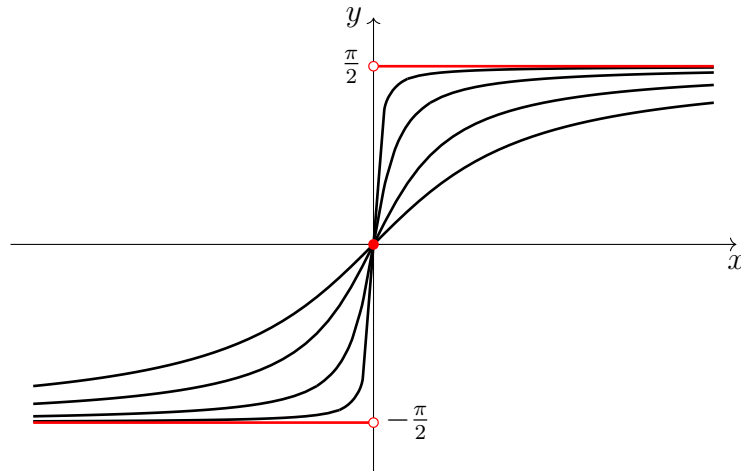
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{1\}.$$

Esempio 1.3. Consideriamo la successione di funzioni in campo reale

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \arctan(nx).$$

Calcoliamo il limite puntuale della successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



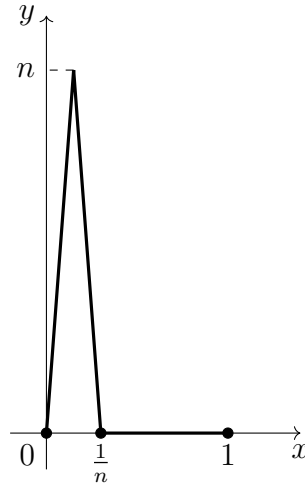
Deduciamo quindi che la successione converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso, nel passaggio al limite puntuale, si è persa la continuità.

Esempio 1.4. Consideriamo la successione di funzioni in campo reale

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \text{se } x \in [0, 1/2n] \\ -2n^2x + 2n, & \text{se } x \in [1/2n, 1/n] \\ 0, & \text{se } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$



Il limite puntuale su $[0, 1]$ è la funzione nulla, infatti

$$\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

essendo $f_n(x) = 0$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ per i quali $x > 1/n$. Osserviamo inoltre che

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, quindi

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

La convergenza puntuale quindi non è sufficiente per far passare il limite sotto il segno di integrale.

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che permetta di superare le mancanze viste negli esempi precedenti.

Definizione 1.5. Diciamo che la successione $(f_n)_n$ converge alla funzione f uniformemente nell'insieme $E \subseteq S$ se esiste $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in E$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \text{dove } \alpha_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

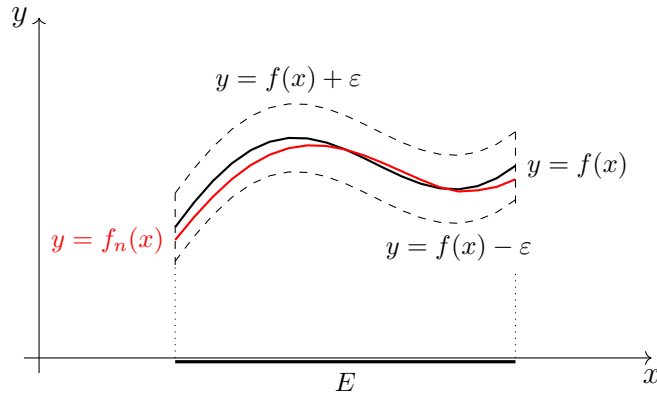
Osservazione 1.6. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente in E , allora $f_n \rightarrow f$ puntualmente in E .

Osservazione 1.7. Il concetto di convergenza uniforme ha una chiara interpretazione grafica. Consideriamo $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $E \subset \mathbb{R}$ e definiamo gli insiemi

$$S_\varepsilon = \{(x, y) : |y - f(x)| < \varepsilon, x \in E\} \quad \text{e} \quad G_n = \{(x, y) : y = f_n(x), x \in E\}$$

risulta

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente in } E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : G_n \subset S_\varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$



Una strategia per verificare la convergenza uniforme di una successione $(f_n)_n$ è la seguente:

- (1) si calcola il limite puntuale, al variare di x in un opportuno insieme E (da determinare),

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x);$$

- (2) si calcola o si stima la quantità

$$\alpha_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|;$$

- (3) si verifica che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Esempio 1.8. Dimostrare che la successione di funzioni

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n$$

converge uniformemente a 0 su tutto \mathbb{R} . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \text{con} \quad \alpha_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+x^2} \right|^n$$

La funzione $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è dispari, ha come asintoto orizzontale bilatero l'asse delle ascisse, ha massimo (risp. minimo) globale in $x = 1$ (risp. $x = -1$), punto in cui vale $1/2$ (risp. $-1/2$). Concludiamo quindi che $\alpha_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. Il limite richiesto è quindi verificato.

Vediamo ora alcune proprietà delle successioni convergenti uniformemente.

Teorema 1.9 (La convergenza uniforme preserva la continuità). Sia $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni tale che

- (i) $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $E \subseteq S$,
- (ii) f_n è continua in E , per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora la funzione limite f è continua in E .

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso in cui $S \subseteq \mathbb{R}$ ed $E = [a, b]$. Fissato $x_0 \in [a, b]$ vogliamo dunque dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$

Fissiamo quindi in modo arbitrario $\varepsilon > 0$ e prendiamo \hat{n} tale che $\alpha_{\hat{n}} < \varepsilon/3$. La funzione $f_{\hat{n}}$ è continua in x_0 per l'ipotesi (ii), quindi

$$\exists \delta > 0 : |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$

Allora, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ abbiamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| + |f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \alpha_{\hat{n}} + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_{\hat{n}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

che è la tesi. \square

Teorema 1.10 (Integrazione per successioni). *Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni tale che*

- (i) $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $[a, b]$,
- (ii) f_n è continua in E , per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Osservazione 1.11. *Le successioni degli Esempi 1.2, 1.3 e 1.4 non convergono uniformemente sul loro insieme di convergenza puntuale.*

Dim. del Teorema 1.10. Applicando il Teorema 1.9, otteniamo la continuità della funzione f su $[a, b]$ e dunque la sua integrabilità su tale intervallo.

Dalla prima ipotesi sappiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_n \alpha_n = \lim_n \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

e per definizione di α_n abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall x \in [a, b].$$

Otteniamo quindi facilmente il limite della tesi, infatti

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists \bar{n} : \quad \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \alpha_n(b-a) \\ &< \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

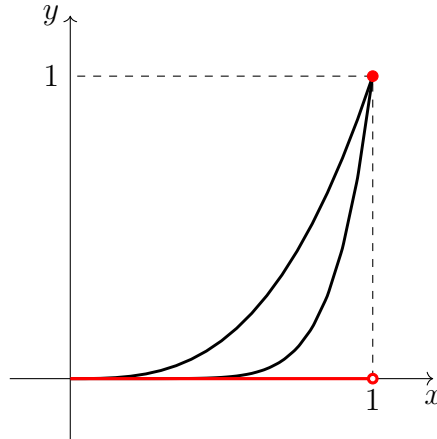
\square

Esempio 1.12. *Consideriamo la successione di funzioni*

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

il cui limite puntuale su $[0, 1]$ è

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



Dal Teorema 1.9 deduciamo che f non può essere il limite uniforme della successione su $[0, 1]$. Osserviamo però che per ogni $\varepsilon > 0$ la successione f_n converge uniformemente a f su $[0, 1 - \varepsilon]$, infatti

$$\sup_{x \in [0, 1 - \varepsilon]} |f_n(x) - f(x)| = (1 - \varepsilon)^n$$

e $\lim_n (1 - \varepsilon)^n = 0$

Osservazione 1.13. Dall'esempio precedente deduciamo che la convergenza uniforme su $[a, b - \varepsilon]$, per ogni $\varepsilon > 0$, non implica la convergenza uniforme su $[a, b]$.

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.14. Sia $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che

- (i) $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $E \subseteq S$,
- (ii) f_n è continua su $\overline{E} = \text{chiusura di } E$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora f si estende su \overline{E} in modo continuo e $f_n \rightarrow f$ uniformemente in \overline{E} .

*Dimostrazione.*¹ Supponiamo E limitato. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in E, \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Siccome \overline{E} è chiuso e limitato in \mathbb{R} e quindi compatto, la funzione $f_{\bar{n}}$, che per ipotesi è continua in \overline{E} , è anche uniformemente continua in \overline{E} (teorema di Heine-Cantor). Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x, y \in \overline{E}$ con $|x - y| < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(y) + f_{\bar{n}}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(y)| + |f_{\bar{n}}(y) - f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

se $x, y \in E$ verificano $|x - y| < \delta$. Dunque f è uniformemente continua in E e pertanto ammette un'unica estensione continua in \overline{E} (questo è un fatto non ovvio che diamo per buono e per il quale serve lavorare con le successioni di Cauchy). Dunque, sapendo ora che le funzioni f_n e f sono continue in \overline{E} , la condizione (1) si estende per continuità su \overline{E} , scrivendo \leq al posto di $<$. Ma ciò significa che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in \overline{E} . Se E non è limitato, si ripete tutto il ragionamento in un intorno limitato di ogni punto della frontiera di E e si conclude. \square

Osservazione 1.15. Dal Teorema 1.14 deduciamo che la successione dell'Esempio 1.12 non può convergere uniformemente su $[0, 1]$.

¹non svolta a lezione

2. SERIE DI FUNZIONI

Fissato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ oppure $S \subseteq \mathbb{C}$ consideriamo una *successione di funzioni*

$$f_n : S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f_n : S \rightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 2.1. Si chiama serie di funzioni e si scrive

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

la *successione di funzioni*, detta *successione delle somme parziali o delle ridotte*,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad x \in S, \quad n \geq 0.$$

Definizione 2.2. Diciamo che la serie di funzioni (2) converge puntualmente alla funzione s nell'insieme $E \subseteq S$ se $s_n \rightarrow s$ puntualmente in E . La funzione s si chiama *somma della serie* e si scrive

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Diciamo che la serie (2) converge uniformemente alla funzione s nell'insieme $E \subseteq S$ se $s_n \rightarrow s$ uniformemente in E .

Osservazione 2.3. Quando si fissa $x \in S$, la serie di funzioni si riduce ad una serie numerica.

Vediamo i risultati sulle serie di funzioni corrispondenti ai Teoremi 1.9 e 1.10. La loro dimostrazione segue immediatamente applicando i due risultati citati.

Teorema 2.4 (Continuità della funzione somma). Sia $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che

- (i) $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \subseteq S$,
- (ii) ogni f_n è continua in E .

Allora la funzione somma $s = \sum_n f_n$ è continua in E .

Teorema 2.5 (Integrazione per serie). Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che

- (i) $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[a, b]$,
- (ii) ogni f_n è continua in $[a, b]$.

Allora la funzione somma $s = \sum_n f_n$ è continua in $[a, b]$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx.$$

Data una serie di funzioni $\sum_n f_n$ con $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), definiamo l'insieme di convergenza semplice

$$I_s = \left\{ x \in S : \text{la serie numerica } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

e l'insieme di convergenza assoluta

$$I_a = \left\{ x \in S : \text{la serie numerica } \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \text{ converge} \right\}.$$

In generale

$$I_a \subseteq I_s \subseteq S.$$

Esempio 2.6. Prendiamo $f_n(z) = x^n$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e consideriamo la serie geometrica di funzioni in \mathbb{R}

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Notiamo che se $|x| = r < 1$ allora la serie converge assolutamente (e semplicemente) in x . Invece se $|x| = r \geq 1$ allora la serie non converge semplicemente perchè il suo termine n -esimo non è infinitesimo quando $n \rightarrow \infty$ (non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie). Deduciamo quindi che

$$I_a = I_s = (-1, 1)$$

e su questo insieme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Mentre lo studio della convergenza semplice o assoluta di una serie di funzioni si riduce allo studio della convergenza di una serie numerica, lo studio della convergenza uniforme si basa sul seguente risultato, una sorta di teorema di confronto per serie di funzioni.

Teorema 2.7 (M-test di Weierstrass o Criterio di convergenza totale). Siano $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni ed $(M_n)_n \subset [0, +\infty)$ una successione numerica tali che

- (i) esiste $n_0 \geq \mathbb{N}$ tale che $|f_n| \leq M_n$ per ogni $x \in E \subseteq S$ e per ogni $n \geq n_0$
- (ii) $\sum_n M_n$ è convergente.

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in ogni punto $x \in E$ e uniformemente nell'insieme E .

Definizione 2.8. Una serie di funzioni che soddisfi le ipotesi dell'M-test si dice totalmente convergente.

Il Criterio di convergenza totale asserisce quindi che un serie totalmente convergente in E converge assolutamente (e quindi semplicemente) in ogni punto di E , e converge uniformemente in E .

Per ogni n , una buona scelta per la costante M_n è

$$M_n = (\text{o anche solo } \geq) \sup_{x \in E} |f_n(x)|.$$

Esempio 2.9. Si consideri la serie di funzioni dell'Esempio 2.6; sull'intervallo di convergenza puntuale $(-1, 1)$ non è possibile applicare l'M-test, infatti

$$\sup_{|x| < 1} |x|^n = 1.$$

Consideriamo quindi un qualsiasi $r \in (0, 1)$ e l'intervallo $[-r, r]$, abbiamo in questo caso

$$\sup_{|x| < r} r^n$$

ed essendo $\sum_n r^n$ convergente, possiamo applicare l'M-test su $[-r, r]$ e ottenere che la serie $\sum_n x^n$ converge uniformemente su $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$.

Esempio 2.10. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Riprendendo quanto visto nell'Esempio 1.8 a pagina 4 abbiamo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right) = \frac{1}{2} \implies \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Definendo $M_n = \frac{1}{2^n}$, possiamo applicare l'M-test e ottenere la convergenza assoluta (e semplice) in ogni $x \in \mathbb{R}$ e la convergenza uniforme su \mathbb{R} .

Esempio 2.11 (La serie geometrica come serie di funzioni in \mathbb{C}). Prendiamo $f_n(z) = z^n$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, e consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Notiamo che se $|z| = r < 1$ allora la serie converge assolutamente (e semplicemente) in z . Invece se $|z| = r \geq 1$ allora la serie non converge semplicemente perchè il suo termine n -esimo non è infinitesimo quando $n \rightarrow \infty$ (non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie). Deduciamo quindi che

$$I_a = I_s = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

e su questo insieme

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Analizziamo ora la convergenza uniforme della serie. Se scegliamo $E = D_1(0)$

$$\sup_{|z| < 1} |z|^n = 1$$

e non si potrebbe applicare l'M-test. Prendendo invece $E = \overline{D_r(0)}$ con $r \in [0, 1)$ otteniamo

$$\sup_{|z| \leq r} |z|^n = r^n$$

e possiamo applicare l'M-test con $M_n = r^n$. La serie data converge quindi totalmente e uniformemente su ogni palla chiusa $\overline{D_r(0)}$ con $r \in [0, 1)$.

Dall'esempio precedente deduciamo che la convergenza uniforme di una serie di funzioni sulla famiglia di intervalli $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, per $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, non implica la convergenza uniforme della successione sull'intervallo aperto (a, b) . Per le serie di funzioni vale inoltre il risultato analogo al Teorema 1.14.

Teorema 2.12. Sia $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che

- (i) $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \subseteq S$,
- (ii) ogni f_n è continua in \overline{E} = chiusura di E .

Allora la funzione somma della serie $\sum_n f_n$ si estende su \overline{E} in modo continuo e $\sum_n f_n$ converge uniformemente in \overline{E} .

Osservazione 2.13. La serie geometrica, reale o complessa, non può quindi convergere uniformemente sull'insieme di convergenza semplice, altrimenti la convergenza uniforme dovrebbe estendersi fino al bordo di questo insieme, portando ad una contraddizione con la tesi del Teorema 2.12.

2.1. Esercizi sulle serie di funzioni.

Esercizio 2.1 (Serie riconducibili a serie geometriche). Data una funzione $g(x)$ definita su un certo insieme $E \subset \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), ci proponiamo di studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_n [g(x)]^n.$$

Per quanto visto nell'Esempio 2.11, si ha che

$$I_s = I_a = \{x \in E : |g(x)| < 1\}.$$

Inoltre si ha convergenza totale e quindi uniforme su tutti gli insiemi $\{x \in E : |g(x)| \leq r\}$ al variare di $r \in (0, 1)$. Possiamo oanche scrivere la somma della serie

$$s(x) = \frac{1}{1 - g(x)}, \quad x \in I_s.$$

Ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_n [\tan x]^n, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ammette come insieme di convergenza semplice e assoluta

$$I_s = I_a = \left\{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : |\tan x| < 1\right\} = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

converge uniformemente in tutti gli intervalli $[-L, L]$ per ogni $L \in (0, \pi/4)$. La somma della serie è la funzione

$$s(x) = \frac{1}{1 - \tan x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 2.2. *Date le seguenti serie di funzioni*

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}};$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2};$$

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} - 1 \right).$$

determinarne gli insiemi I_s e I_a e studiarne la convergenza uniforme.

(A) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}}$. Tutte le f_n sono definite su \mathbb{R} e abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essendo $\sum_n n^{-3/2}$ convergente, possiamo applicare l'M-test con

$$M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

e dedurre la convergenza assoluta (quindi semplice) e uniforme su tutto \mathbb{R} .

(B) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$. Tutte le f_n sono definite su \mathbb{R} e la stima naturale

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

non è utile per applicare l'M-test in quanto $\sum_n \frac{1}{n}$ è divergente. Osserviamo anche che, fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n + x^2} \sim \frac{1}{n}$$

quindi $I_a = \emptyset$. Possiamo provare a vedere se il carattere oscillatorio della serie porta alla convergenza semplice. Fissato $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$f_n(x) = (-1)^n a_n, \quad a_n = \frac{1}{n + x^2}$$

ed essendo a_n decrescente al crescere di n (banale da verificare) il Criterio di Leibniz implica $I_s = \mathbb{R}$. Sai quindi

$$s(x) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ed $s_n(x)$ la ridotta n -esima della serie. Il Criterio di Leibniz fornisce anche una naturale stima del resto, infatti

$$|s_n(x) - s(x)| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\alpha_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| \leq a_{n+1}$$

e $\alpha_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Abbiamo quindi dimostrato che la serie converge uniformemente su tutto \mathbb{R} .

Si osservi che in nessun sottoinsieme di \mathbb{R} c'è convergenza totale, infatti questa implicherebbe la convergenza assoluta e abbiamo visto che $I_a = \emptyset$.

(C) In questo caso

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} - 1 \right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per studiare la convergenza puntuale e assoluta della serie, conviene scrivere

$$f_n(x) = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} + 1} = n \frac{\frac{1}{n^x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} + 1} = \frac{1}{n^{x-1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} + 1}.$$

Da questa espressione è evidente che $f_n(x) > 0$ per ogni n , quindi $I_s = I_a$.

Iniziamo a studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la condizione necessaria alla convergenza semplice è verificata, ovvero quando $f_n(x) \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$.

Osservando che $f_n(x) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{x-1}}$, per $n \rightarrow \infty$ deduciamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Inoltre per confronto con la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1$$

concludiamo la convergenza puntuale della nostra serie per $x \in (2, +\infty)$. Quindi

$$I_s = I_a = (2, +\infty).$$

Studiamo ora la convergenza uniforme: certamente non possiamo averla su $(2, +\infty)$, altrimenti, per il Teorema 2.12 la si otterrebbe su $[2, +\infty)$, in contrasto con quanto appena dimostrato. Preso quindi $\varepsilon > 0$ consideriamo gli insiemi $[2 + \varepsilon, +\infty)$ e stimiamo

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^{x-1}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad \forall x \geq 2 + \varepsilon.$$

Definendo quindi $M_n = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, ancora sfruttando la convergenza della serie armonica generalizzata, possiamo applicare l'M-test e dedurre la convergenza uniforme sugli intervalli $[2 + \varepsilon, +\infty)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 2.3. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

- (i) determinarne gli insiemi I_s e I_a ;
- (ii) provare che la serie converge uniformemente su tutti gli intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} ;
- (iii) detta $s(x)$ la funzione somma della serie, calcolare

$$\int_0^1 s(x) dx;$$

- (iv) provare che la serie converge uniformemente su \mathbb{R} .

(i) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}$. Fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{(n+x^2)^2} \leq \frac{|x|}{n^2}$$

quindi, essendo

$$\sum_n \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_n \frac{1}{n^2}$$

per il Criterio del Confronto per serie a termini positivi deduciamo la convergenza assoluta su tutto \mathbb{R} , ovvero $I_s = I_a = \mathbb{R}$.

(ii) Fissato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, abbiamo la stima

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{(n+x^2)^2} \leq \frac{C}{n^2}, \quad \forall x \in [a, b]$$

dove $C = \max\{|a|, |b|\}$. Grazie all'M-test deduciamo la convergenza uniforme su ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(iii) Sull'intervallo $[0, 1]$ la serie converge uniformemente, quindi possiamo applicare il Teorema 2.5 di integrazione per serie e ottenere

$$\int_0^1 s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(n+x^2)^2} dx.$$

Calcoliamo quindi

$$\int_0^1 \frac{x}{(n+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 s(x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iv) La stima fatta al punto (ii) non è applicabile, in quanto la costante C dipende dall'intervallo $[a, b]$ e non esiste se $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo quindi

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Notiamo che f è dispari, di classe C^1 su tutto \mathbb{R} e ammette l'asse orizzontale come asintoto bilatero; quindi

$$M_n = \max_{x \geq 0} |f_n(x)| = f_n \left(\sqrt{\frac{n}{3}} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Siccome $\sum_n n^{-3/2}$ è convergente, possiamo applicare l'M-test e dedurre che la serie di funzioni converge uniformemente su tutto \mathbb{R} .

3. SERIE DI POTENZE IN CAMPO COMPLESSO

Definizione 3.1. Una serie di potenze in \mathbb{C} è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove sia $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ sono fissati; z_0 è il centro della serie di potenze, gli a_n sono i coefficienti.

Una serie di potenze è una serie di funzioni con $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, tutte funzioni continue da \mathbb{C} in se stesso. La sua ridotta n -esima è

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$$

è un polinomio di grado n in \mathbb{C} .

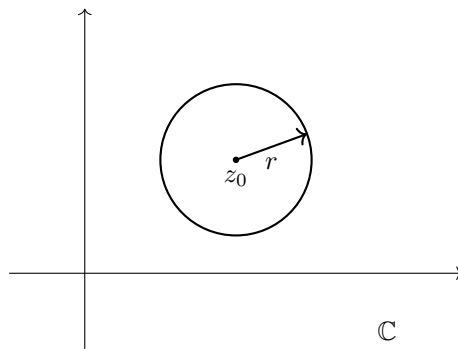
Grazie agli studi di Abel e altri matematici (intorno al 1820) è possibile descrivere in modo piuttosto preciso gli insiemi di convergenza semplice e assoluta di una serie di potenze nonché studiarne la convergenza uniforme.

Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ poniamo

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

$$\partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$



Teorema 3.2 (Sul disco di convergenza). *Data una serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, allora esiste $R > 0$ tale che*

- (i) *la serie converge assolutamente in ogni $z \in D_R(z_0)$;*
- (ii) *la serie non converge nell'insieme complementare di $\overline{D_R(z_0)}$;*
- (iii) *la serie converge uniformemente in $\overline{D_r(z_0)}$, per ogni $r < R$.*

Il teorema non stabilisce il comportamento della serie nei punti del bordo $\partial D_R(z_0)$ e l'eventuale convergenza uniforme in $\overline{D_R(z_0)}$; queste proprietà sono da studiare caso per caso.

Definizione 3.3. La quantità R la cui esistenza è stabilita nel Teorema 3.2 si chiama raggio di convergenza e $D_R(z_0)$ è il disco di convergenza della serie.

Si osservi che una serie di potenze converge sempre almeno nel suo centro, ovvero $z_0 \in I_s$ per ogni serie di potenze; quando $z = z_0$ la serie si riduce infatti al suo primo termine, a_0 . Più in generale si ha che

$$D_R(z_0) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq \overline{D_R(z_0)}.$$

Quando $R = 0$ (e la serie converge solo in $z = z_0$) si ha che $I_a = I_s = \{z_0\}$. Ad esempio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

converge solo in $z = 0$.

Dim. del Teorema 3.2. Abbiamo già osservato che $z_0 \in I_s$ e quindi $I_s \neq \emptyset$. E' quindi ben definita la quantità

$$R = \sup\{|z - z_0| : z \in I_s\}$$

e risulta $0 \leq R \leq +\infty$.

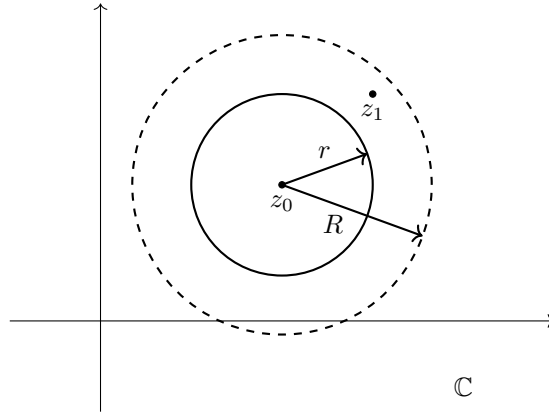
Se $R = 0$ allora $I_s = I_a = \{z_0\}$ e concludiamo la dimostrazione.

Se invece $R > 0$, allora prendiamo $r \in (0, R)$ e $z_1 \in I_s$ tale che $|z_1 - z_0| \in (r, R)$ (tale z_1 esiste per come è definito R). Poiché la serie converge in z_1 allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$$

ed in particolare

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n(z_1 - z_0)^n| < 1 \quad \forall n \geq \bar{n}.$$



Prendiamo ora $z \in \overline{D_r(z_0)}$ e otteniamo

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n| r^n = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|^n \leq \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

per ogni $n \geq \bar{n}$. Definendo

$$M_n := \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|^n$$

si ha che

- $M_n = q^n$ con $q \in (0, 1)$;
- $|a_n(z - z_0)^n| \leq M_n$, per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)}$;
- $\sum_n M_n$ è convergente in quanto serie geometrica di ragione $q \in (0, 1)$.

Applicando l'M-test di Weierstrass deduciamo che la serie converge assolutamente e uniformemente in ogni disco chiuso $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$. Pertanto converge assolutamente in ogni punto del disco aperto $D_R(z_0)$.

Per come è stato definito R , la serie non converge nei punti del complementare di $\overline{D_R(z_0)}$. \square

Corollario 3.4. *La funzione somma di una serie di potenze è continua sul disco aperto di convergenza $D_R(z_0)$.*

Dimostrazione. Siamo nel caso $\sum_n f_n(z)$ con $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. Le funzioni f_n sono continue su tutto \mathbb{C} e la serie di potenze converge in ogni disco chiuso $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$. Deduciamo quindi dal Teorema 2.4, che la somma della serie è continua in ogni $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$, e quindi è continua in $D_R(z_0)$. \square

Teorema 3.5 (Sul raggio di convergenza). *Data una serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, se esiste uno fra i seguenti limiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e tale limite vale $L \geq 0$, allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{se } L = 0, \\ \frac{1}{L}, & \text{se } L \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

Osservazione 3.6. *I limiti del teorema precedente non è detto che esistano. Tuttavia la Formula di Hadamard permette di calcolare il raggio di una serie di potenze nel modo seguente*

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Esempio 3.7 (Generalizzazione della serie geometrica $\sum_n z^n$). *Si consideri la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

quando $\alpha = 0$ la serie si riduce a quella geometrica, studiata nell'Esempio 2.11 a pagina 9. Il centro della serie è $z = 0$ e i suoi coefficienti sono

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Proviamo a calcolare il primo limite presente nelle ipotesi del Teorema 3.5 per determinare il raggio di convergenza. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^\alpha = 1,$$

quindi la serie ha $R = 1$ e disco di convergenza $D = D_1(0)$. Studiamo ora il comportamento della serie nei punti $z \in \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

- $\alpha \leq 0$. Preso $z \in \partial D$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^n}{n^\alpha} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0 \quad \implies \quad \partial D \cap I_s = \emptyset.$$

In questo caso quindi $I_s = I_a = D$ e si ha convergenza uniforme nei dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$ per ogni $r \in (0, 1)$. La convergenza uniforme non può essere su tutto D perchè questa implicherebbe la convergenza uniforme sulla sua chiusura (Teorema 2.12) e quindi quella puntuale sullo stesso insieme, in contraddizione con quanto dimostrato.

- $\alpha > 1$. Possiamo applicare l'M-test di Weierstrass sulla chiusura del disco di convergenza, infatti

$$\left| \frac{z^n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1, \quad \forall z \in D$$

da cui segue che $I_s = I_a = \overline{D}$ e si ha convergenza uniforme su \overline{D} .

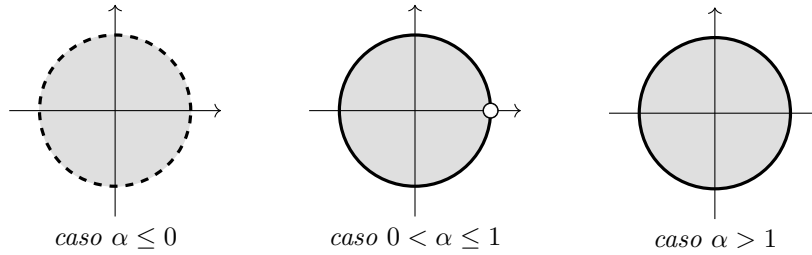
- $\alpha \in (0, 1]$. In questo caso nei punti del bordo ∂D non possiamo avere convergenza assoluta, infatti

$$|z| = 1 \implies \left| \frac{z^n}{n^\alpha} \right| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \right| \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

La convergenza puntuale in $z \in \partial D$ necessita invece di considerazioni diverse; se ad esempio ci restringiamo ai due punti reali di ∂D , ± 1 sappiamo che $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, ma $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge per il Criterio di Leibniz (serie a segno alterno). In tutti i punti $z \in \partial D$ con $z \neq 1$ possiamo applicare il Criterio di Abel-Brunacci, una versione del Criterio di Leibniz per serie in campo complesso, che garantisce che

$$I_s = \overline{D} \setminus \{1\}.$$

La convergenza uniforme rimane sui dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$ per ogni $r \in (0, 1)$.



3.1. Esercizi sulle serie di potenze in \mathbb{C} .

Esercizio 3.1. Per le seguenti serie di potenze in campo complesso

- (A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}} z^n$, $\bar{z} = 1 + i$,
 (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{in}{n+1} \right)^{n^2} (z - i)^n$, $\bar{z} = 2 + 3i$,

determinare il disco di convergenza, gli insiemi I_s e I_a e studiare la convergenza uniforme. Stabilire se convergono nel punto \bar{z} indicato.

(A) Si tratta di una serie di potenze centrata in $z_0 = 0$ e con termine $a_n = \frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}}$. Ricordando che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2^{1+\frac{1}{n}}} \left| \frac{\sin n}{n^2} + i \right| = \frac{1}{2} |i| = \frac{1}{2}$$

e deduciamo che $R = 2$. Il disco di convergenza quindi è $D = D_2(0)$. Notiamo ora che se prendiamo $z \in \partial D$, ovvero $|z| = 2$, otteniamo una serie numerica in \mathbb{C} il cui termine n -esimo ha modulo

$$|a_n 2^n| = \frac{|\sin n + in^2|}{2} = \frac{n^2}{2} \left| \frac{\sin n}{n^2} + i \right|$$

che diverge a $+\infty$ se $n \rightarrow \infty$. Concludiamo quindi che $I_s = I_a = D$ e che la serie converge uniformemente su tutti i $\overline{D_r(0)}$, $r \in (0, 2)$.

Essendo $|1+i| = \sqrt{2} < 2$, deduciamo che in questo punto la serie converge assolutamente (e semplicemente).

(B) In questo caso abbiamo $z_0 = i$ e $a_n = \left(\frac{in}{n+1}\right)^{n^2}$. Essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{in}{n+1} \right|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

otteriamo $R = e$ e $D = D_e(i)$. Per studiare la convergenza della serie nei punti del bordo del disco di convergenza, ovvero nei punti z tali che $|z-i| = e$, consideriamo il comportamento in modulo del termine $a_n R^n$, ovvero

$$|a_n R^n| = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} e^n = \left(\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^n.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ in questa espressione otteniamo una forma indeterminata di tipo esponenziale. Riscriviamo quindi

$$|a_n R^n| = \exp \left\{ n \log \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right\} = \exp \left\{ n \left[\log e - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \right\} = \exp \left\{ n \left[1 - n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \right\}$$

e ricordando che $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo

$$|a_n R^n| = \exp \left\{ n \left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} + o(1) \right\} \rightarrow e^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

La serie quindi non può convergere semplicemente (e nemmeno assolutamente) in alcun punto del bordo. Concludiamo quindi che $I_s = I_a = D_e(i)$ e che la serie converge uniformemente su $\overline{D_r(i)}$ per ogni $r \in (0, e)$. Infine essendo $|\bar{z} - i| = |2 + 3i - 1| = 2\sqrt{2} > e$, la serie non converge in \bar{z} .

Esercizio 3.2. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(z-i)^{3n}}$$

e stabilire se c'è convergenza uniforme in $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 3\}$.

Per ricondurci ad una serie di potenze effettuiamo la sostituzione $w = -(z-i)^{-3}$ in modo da ottenere

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 w^n.$$

Questa serie ha centro in $z_0 = 0$, $R = 1$, $I_s = I_a = D_1(0)$ e converge uniformemente su tutti i dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$, $r \in (0, 1)$.

Tornando alla serie di partenza abbiamo che

$$I_s = I_a = \{z : |-(z-i)^{-3}| < 1\} = \{z : |(z-i)^3| > 1\} = \{z : |(z-i)| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1(i)};$$

gli insiemi di convergenza uniforme invece sono

$$E_r = \{z : |-(z-i)^{-3}| \leq r\} = \left\{z : |(z-i)^3| \geq \frac{1}{r}\right\} = \left\{z : |(z-i)| \geq \frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right\}$$

al variare di $r \in (0, 1)$. Possiamo quindi riscrivere la famiglia di insiemi su cui la serie converge uniformemente ponendo $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ nella forma

$$\tilde{E}_\rho = \{z : |(z-i)| \geq \rho\} = \mathbb{C} \setminus D_\rho(i) \quad \forall \rho > 1.$$

L'insieme E è il complementare del disco aperto centrato nell'origine e di raggio 3 ed è contenuto in \tilde{E}_ρ se $\rho < 2$. Scegliendo $\rho \in (1, 2)$, garantiamo sia la convergenza uniforme in \tilde{E}_ρ sia che $E \subset \tilde{E}_\rho$. Quindi possiamo concludere che la serie converge uniformemente in E .

3.2. Funzioni trascendenti in \mathbb{C} . Attraverso le serie di potenze è possibile definire alcune funzioni in campo complesso. Iniziamo considerando la *serie esponenziale*, ovvero la serie di potenze centrata in $z_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(dove ricordiamo che $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$); tale serie converge assolutamente in ogni punto del piano complesso, infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad R = +\infty.$$

La funzione somma della serie è quindi definita su tutto il piano complesso e si chiama *funzione esponenziale in campo complesso*

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

In particolare si ha

$$e^0 = 1,$$

Proprietà 3.8 (Della funzione esponenziale). *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha $e^z e^w = e^{z+w}$.*

Per dimostrare questa proprietà della funzione esponenziale complessa è necessario introdurre una definizione di prodotto tra serie numeriche.

Definizione 3.9. *Date due serie numeriche in \mathbb{C} , $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, si chiama serie prodotto secondo Cauchy la serie $\sum_n c_n$ dove*

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad \dots \text{ ovvero } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questa nozione di prodotto vale della seguente proprietà, fondamentale per la dimostrazione della Proprietà 3.8.

Proprietà 3.10 (Della serie prodotto secondo Cauchy). *Date due serie numeriche in \mathbb{C} , $\sum_n a_n$ convergente assolutamente e $\sum_n b_n$ convergente, allora la loro serie prodotto secondo Cauchy $\sum_n c_n$ è convergente al prodotto AB dove $A = \sum_n a_n$ e $B = \sum_n b_n$. Se entrambe le serie di partenza convergono assolutamente allora anche la serie prodotto converge assolutamente.*

Dim. della Proprietà 3.8. Fissati $z, w \in \mathbb{C}$, consideriamo le due serie assolutamente convergenti

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{e} \quad e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!};$$

e definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \quad \text{e} \quad b_n := \frac{w^n}{n!}.$$

Allora, grazie alla Proprietà 3.10, abbiamo

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right)$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ricordando lo sviluppo del binomio di Newton

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

otteniamo

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}.$$

□

A partire dalla funzione esponenziale possiamo definire le funzioni iperboliche e le funzioni trigonometriche in campo complesso:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

tutte definite per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Osservazione 3.11. *Dalle definizioni di $\cos z$ e $\sin z$ segue la Formula di Eulero*

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Funzioni trigonometriche ed iperboliche sono esprimibili come serie di potenze a partire dalla serie esponenziale; per il coseno iperbolico ad esempio otteniamo

$$\cosh z := \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

e con procedimenti analoghi

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Osservazione 3.12. *Quando $z \in \mathbb{R}$ le funzioni definite coincidono con quelle ben note in \mathbb{R} ; in particolare dalla serie esponenziale otteniamo il Numero di Nepero*

$$e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

4. SERIE DI POTENZE IN CAMPO REALE

In perfetta analogia con quanto visto in campo complesso, una *serie di potenze in \mathbb{R}* è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove x_0 è il *centro* della serie e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, gli $a_n \in \mathbb{R}$ sono i suoi *coefficienti*. La sua ridotta n -esima è

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

ovvero un polinomio di grado n in \mathbb{R} . Il Teorema 3.2 garantisce l'esistenza di $R \in [0, +\infty]$ tale che

- $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$,
- la serie converge uniformemente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r \in (0, R)$.

In particolare se $R = +\infty$ allora la serie converge assolutamente (e puntualmente) in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e uniformemente in ogni sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R} . Se invece $R < +\infty$ il comportamento nei punti $x_0 \pm R$ deve essere studiato di volta in volta e influenza gli intervalli di convergenza uniforme nel modo seguente.

Criterio di Abel (per la convergenza uniforme di serie di potenze in \mathbb{R}). *Data la serie di potenze reale $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ con $R \in (0, +\infty)$ allora*

- (i) *se converge (semplicemente) in $x_0 - R$ ma non in $x_0 + R$ allora la serie converge uniformemente $[x_0 - R, x_0 + r]$ per ogni $r \in (0, R)$;*
- (ii) *se converge (semplicemente) in $x_0 + R$ ma non in $x_0 - R$ allora la serie converge uniformemente $[x_0 - r, x_0 + R]$ per ogni $r \in (0, R)$;*
- (iii) *se converge (semplicemente) in $x_0 \pm R$ la serie converge uniformemente $[x_0 - R, x_0 + R]$.*

Si noti che non è necessaria la convergenza assoluta per arrivare alla convergenza uniforme fino agli estremi; quindi ci si riconduce a studiare la convergenza delle serie numeriche $\sum_n a_n R^n$ e $\sum_n a_n (-R)^n$.

Esempio 4.1. *Riportiamo in campo reale quanto visto nell'Esempio 3.7. La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

è centrata in 0 e ha raggio di convergenza $R = 1$. Inoltre

- $\alpha \leq 0$. $I_s = I_a = (-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme in $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$. Sappiamo inoltre che

$$\text{se } \alpha = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

- $\alpha \in (0, 1]$. $I_s = I_a = [-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme in $[-1, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$. In particolare

$$\text{se } \alpha = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \quad \forall x \in [-1, 1).$$

Se $x \in (-1, 1)$, tale uguaglianza è un'applicazione del Teorema 1.10 di integrazione per serie, infatti fissato $[a, b] \subset (-1, 1)$ vale che

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b^n}{n} - \frac{a^n}{n} \right)$$

ed essendo

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = -\log(1-b) + \log(1-a)$$

otteniamo

$$\log(1-b) + \log(1-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} - \frac{b^n}{n} \right).$$

Scegliendo ora $[a, b] = [0, x]$ se $x \in (0, 1)$ oppure $[a, b] = [x, 0]$ se $x \in (-1, 0)$ otteniamo l'identità da dimostrare per ogni $x \in (-1, 1)$.

La formula vale anche in $x = -1$ in quando la funzione somma $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è ben definita e continua su $[-1, 1)$ (per il Teorema 2.4), inoltre $s(x) = -\log(1-x)$, per ogni $x \in (-1, 1)$. Per continuità quindi l'uguaglianza vale anche in $x = -1$.

- $\alpha > 1$. $I_s = I_a = [-1, 1]$ e si ha convergenza uniforme in $[-1, 1]$.

4.1. Esercizi sulle serie di potenze in \mathbb{R} . Vediamo ora come si determina lo sviluppo in serie di potenze di una funzione razionale che ammette una decomposizione in fratti semplici di grado 1. Consideriamo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{c_1}{x - x_1} + \dots + \frac{c_k}{x - x_k}$$

con P, Q, P_0 polinomi, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ e $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ (zeri del polinomio Q). Dalla formula $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ricaviamo che

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad \forall x \in (-a, a).$$

Applicando quindi quest'ultima formula a ciascuno dei termini $\frac{c_i}{x-x_i}$, $i = 1, \dots, k$ e sommando termine a termine le serie ottenute, possiamo ottenere lo sviluppo della funzione f .

Esercizio 4.1. *Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrata in $x = 0$ della funzione*

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2+3x-2};$$

determinarne gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme.

Gli zeri del denominatore $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$ sono $\frac{1}{2}$ e -2 . Quindi

$$Q(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 2)$$

e si trova facilmente la scomposizione in fratti semplici per la funzione f

$$f(x) = -\frac{1}{10} \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{5} \frac{1}{x + 2}.$$

A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - \frac{1}{2}} &= -2 \frac{1}{1 - 2x} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{x + 2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}, \quad \forall x \in (-2, 2) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) = -\frac{1}{10} \left(-2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) + \frac{3}{5} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} \left(2^n + \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Notiamo come l'insieme di convergenza sia l'intersezione tra i due insiemi di convergenza dei fratti semplici. In particolare il raggio è il minimo tra i due raggi, ovvero $R = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.2. *Determinare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right) x^n.$$

Dedurre gli insiemi di convergenza semplice e assoluta e la convergenza uniforme per la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right) 2^{nx}.$$

La prima serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Chiamiamo $a_n = \sqrt{n^4 + n} - n^2$ e notiamo che

$$a_n = \frac{n}{(\sqrt{n^4 + n} + n^2)} = \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + 1/n^3} + 1\right)}.$$

Quindi

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^3}} + 1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

Studiamo quindi il comportamento nei punti del bordo del disco di convergenza $(-1, 1)$.

In $x = 1$ otteniamo la serie $\sum_n a_n$; essendo $a_n \sim \frac{1}{2n}$ per $n \rightarrow \infty$, la serie non converge puntualmente.

In $x = -1$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n;$$

osserviamo che $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n . La prima disuguaglianza segue immediatamente dal fatto che $\sqrt{n^4 + n} \geq n^2$ la seconda invece si ottiene studiando il segno della derivata prima della funzione $g(x) = \sqrt{x^4 + x} - x^2$ ($g'(x) < 0$ per ogni $x > 1/2$). Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz ed ottenere la convergenza semplice della serie di potenze in $x = -1$. La serie non converge assolutamente in $x = -1$.

Conclusione: $I_s = [-1, 1)$, $I_a = (-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme negli intervalli $[-1, r)$ per ogni $r \in (-1, 1)$.

Studiamo ora la seconda serie ponendo $t = 2^x$. Otteniamo immediatamente

$$I_s = \{t \in \mathbb{R} : t \in [-1, 1)\} = \{x \in \mathbb{R} : 2^x \in [-1, 1)\} = (-\infty, 0),$$

$$I_a = \{t \in \mathbb{R} : t \in (-1, 1)\} = \{x \in \mathbb{R} : 2^x \in (-1, 1)\} = (-\infty, 0)$$

si ha convergenza uniforme in $(-\infty, r]$, $r < 0$.

Esercizio 4.3. Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrata in $x_0 = -1$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

e determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

Prima di svolgere l'esercizio osserviamo che la funzione f è singolare nell'origine: non è quindi possibile sviluppare f in serie di potenze centrate in 0. Effettivamente

$$f(x) = -\frac{1}{x} \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1} = -\sum_{k=-1}^{\infty} x^k.$$

ovvero la funzione f non è scrivibile come serie di potenze in quanto compare il termine $\frac{1}{x}$, corrispondente all'indice $k = -1$.

Scriviamo ora la funzione f come serie di potenze centrata in -1 . Per farlo può essere comodo fare un cambiamento di variabili, ovvero porre $t = x + 1$ per sviluppare in $t_0 = 0$ la funzione

$$g(t) = f(t-1) = \frac{1}{(t-1)^2 - (t-1)}.$$

Riscriviamo quindi g in modo da poter usare $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$, per $x \in (-1, 1)$; quindi

$$g(t) = \frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{1}{1-t} \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n \right)$$

siamo a questo punto di fronte al prodotto di due serie di potenze entrambe centrate in 0, la prima di raggio 1, la seconda di raggio 2. Entrambe le serie quindi convergono assolutamente nell'intervallo comune $(-1, 1)$ e possiamo utilizzare la Proprietà 3.10 della serie prodotto secondo Cauchy vista a pagina 18 per ottenere

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

con

$$c_n = \sum_{k=0}^n t^k \frac{t^{n-k}}{2^{n-k}} = t^n \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = t^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2t^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Concludiamo quindi che per ogni $t \in (-1, 1)$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) t^n \quad \implies \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x+1)^n,$$

per ogni $x \in (-2, 0)$. Si poteva arrivare alla conclusione scomponendo la funzione g in fratti semplici.

Esercizio 4.4. *Sviluppare in serie di potenze centrate in 0 la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}.$$

Possiamo ancora usare la Proprietà 3.10 della serie prodotto secondo Cauchy, infatti

$$f(x) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}\right) = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

con

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{a^k} \frac{x^{n-k}}{a^{n-k}} = \frac{x^n}{a^n} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{x^n}{a^n} (n+1).$$

Quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} x^n, \quad \forall x \in (-|a|, |a|).$$

5. TEOREMI DI DERIVAZIONE PER SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Nell'Esercizio 4.4 abbiamo visto che

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n, \end{aligned}$$

viene naturale porsi queste domande:

- (1) se $s(x) = \sum_n a_n x^n$ su $(-R, R)$, è vero che s è derivabile e $s'(x) = \sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$?
- (2) se vale (1), possiamo procedere con le derivate successive, ottenendo ad esempio $s''(x) = \sum_n (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$, $s'''(x) = \sum_n (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}x^n, \dots$?

Più in generale, ci proponiamo di affrontare il seguente problema:
data una successione di funzioni $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- f_n derivabile su I per ogni n
- la serie $\sum_n f_n(x)$ converge semplicemente in I alla funzione somma $s(x)$

sotto quali condizioni s risulta derivabile e $s'(x) = \sum_n f'_n(x)$?

Ricordando che le serie di funzioni sono definite come successioni di somme parziali, iniziamo ad esaminare la stessa questione per le successioni di funzioni: *quando possiamo scambiare il limite con la derivazione?*

Teorema 5.1 (di derivazione termine a termine per successioni). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 in I per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che*

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in I$;
- (ii) $f'_n \rightarrow g$ uniformemente in I .

Allora f è di classe C^1 in I e $f'(x) = g(x), \forall x \in I$.

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$, grazie a (i), vale

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(x_0)]$$

quindi, grazie alla regolarità delle f_n su I abbiamo

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(s) ds$$

e, grazie al Teorema 1.10,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(s) ds = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(s) ds$$

Essendo g continua su I (limite uniforme di funzioni continue, Teorema 1.9), dal Teorema Fondamentale del Calcolo otteniamo la tesi. \square

Osservazione 5.2. *Vista la dimostrazione, la condizione (ii) può essere indebolita richiedendo la convergenza uniforme di f'_n a g solamente sui sottoinsiemi compatti (chiusi e limitati) di I .*

Applicando il Teorema precedente alla successione delle ridotte parziali, otteniamo immediatamente il seguente risultato.

Teorema 5.3 (di derivazione termine a termine per serie). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 in I per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che*

- (i) $\sum_n f_n(x) = s(x)$, semplicemente per ogni $x \in I$;
- (ii) $\sum_n f'_n(x)$ converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di I .

Allora s è di classe C^1 in I e $s'(x) = \sum_n f'_n(x), \forall x \in I$.

Corollario 5.4 (Applicazione alle serie di potenze). *Data una serie di potenze in campo reale $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ con raggio di convergenza $R > 0$, sia $s(x)$ la sua somma, definita su $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. Allora s è di classe C^1 e*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n.$$

Inoltre s è di classe C^k e

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) a_{n+k} (x - x_0)^n$$

e in particolare

$$s^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema 5.3 alla serie di funzioni con termine n -esimo $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, di classe C^1 in I . La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

ha centro x_0 e coefficienti $\tilde{a}_n = (n+1)a_{n+1}$. Il suo raggio di convergenza è \tilde{R} e supponiamo si possa calcolare attraverso il limite (non è certo che questo limite esista, si deve eventualmente utilizzare la formula di Hadamard)

$$\tilde{R}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\tilde{a}_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}$$

Essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)} \right)^{\frac{n+1}{n}} = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} = R^{-1}$$

deduciamo che $\tilde{R} = R$. Quindi anche la serie delle derivate $\sum_n f'_n(x)$ ha raggio R e converge uniformemente in tutti i compatti di I . Grazie al Teorema concludiamo la prima tesi.

Ripetiamo ora il ragionamento, partendo però dalla serie avente come termine n -esimo la funzione $g_n(x) = \tilde{a}_n(x - x_0)^n$. Deduciamo quindi che $s'(x)$ è a sua volta di classe C^1 , quindi $s(x)$ è di classe C^2 e che vale lo sviluppo in serie richiesto per la funzione $s''(x)$. Si conclude la dimostrazione procedendo per induzione. Dall'espressione di $s^{(k)}(x)$ si calcola immediatamente $s^{(k)}(x_0)$. \square

Esempio 5.5. Verifichiamo che la funzione somma della serie di potenze reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$s'(x) = s(x), \quad s(0) = 1.$$

Abbiamo $a_n = \frac{1}{n!}$ e $x_0 = 0$. Abbiamo già visto a pagina 18 che la serie converge (assolutamente) su tutta la retta reale e uniformemente su tutti i compatti di \mathbb{R} . Il Corollario 5.4 ci permette di dire che

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = s(x)$$

La condizione iniziale è verificata banalmente.

Esempio 5.6. La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}$$

risulta convergente in \mathbb{R} ad una funzione somma $s(x)$. Calcolare $s^{(7)}(0)$ e $s^{(8)}(0)$.

Il Corollario 5.4 ci dice che

$$s^{(7)}(0) = 7! a_7 \quad e \quad s^{(8)}(0) = 8! a_8$$

Determiniamo quindi a_7 e a_8 . Il coefficiente corrispondente a x^7 lo otteniamo quando $n = 2$; in questo caso $a_7 = \frac{1}{5!}$ quindi $s^{(7)}(0) = \frac{7!}{5!} = 42$. Nella serie invece non compare x^8 (non ci sono potenze pari) quindi deduciamo che $s^{(8)}(0) = a_8 = 0$.

6. FUNZIONI ANALITICHE

Ci poniamo il seguente problema: *data una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e fissato un punto $x_0 \in I$, quando possiamo esprimere f come serie di potenze centrata in x_0 ?*

La questione è interessante per almeno due motivi: a livello computazionale è certamente utile poter approssimare una funzione con un polinomio di ordine alto a piacere, possibilmente potendo stimare l'errore che si commette nella stima. Secondo, nel tentativo di risolvere alcune equazioni differenziali di cui non si conosce una formula risolutiva, può essere utile poter scrivere la soluzione come serie al fine di poter calcolare una soluzione approssimata.

Definizione 6.1. *Una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice analitica in $x_0 \in I$ o sviluppabile in serie di potenze intorno a x_0 se*

$$\exists \delta > 0, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

La serie in cui f è sviluppabile viene detta serie di Taylor di f in x_0 ; quando $x_0 = 0$ viene invece chiamata serie di McLaurin.

Ad esempio le seguenti funzioni sono analitiche nei punti indicati

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x_0 = 0, \quad I_\delta = \mathbb{R}, \\ -\log(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x_0 = 0, \quad I_\delta = (-1, 1), \\ \log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x_0 = 0, \quad I_\delta = (-1, 1). \end{aligned}$$

Le funzioni razionali invece sono analitiche in ogni punto del loro dominio.

Supponiamo ora che $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia analitica in $x_0 \in I$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

per qualche $\delta > 0$. Il Corollario 5.4 ci garantisce che f è di classe C^∞ in I_δ e che $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo quindi la seguente condizione.

Condizione necessaria per l'analiticità. *Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica in $x_0 \in I$ allora f è di classe C^∞ in I_δ e $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, ovvero la serie di potenze in cui f è sviluppabile è*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in I_\delta.$$

L'essere di classe C^∞ non è condizione sufficiente per l'analiticità, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.2. *La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ è di classe C^∞ su tutto \mathbb{R} : lo è infatti quando $x \neq 0$ in quanto composizione di funzioni elementari; in $x = 0$ è possibile calcolare tutte le sue derivate attraverso la definizione ottenendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ogni $f^{(n)}$ risulta inoltre continua su tutto \mathbb{R} . La funzione f non è però analitica in $x_0 = 0$, infatti se lo fosse dovrebbe verificare*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

per qualche $\delta > 0$, ovvero, essendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dovrebbe essere $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$. Questo contraddice la definizione della funzione f .

Affinchè una funzione di classe C^∞ sia anche analitica è necessario un controllo su tutte le derivate in un intorno del punto x_0 (e non nel solo punto x_0), come esprime il seguente risultato.

Teorema 6.3 (Condizione sufficiente per l'analiticità). *Siano $\delta > 0$ e $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Se*

- (i) *f è di classe C^∞ su $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;*
- (ii) *esiste $C > 0$ tale che $\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{C}{\delta^n}$ per ogni $x \in I_\delta$ e $n \in \mathbb{N}$*

allora f è analitica in x_0 e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ per ogni $x \in I_\delta$.

Osservazione 6.4. *La condizione (ii) del Teorema 6.3 è soddisfatta se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti in questo caso si ha

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{C}{n!} = \frac{C}{\delta^n} \frac{\delta^n}{n!} \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ed essendo $\frac{\delta^n}{n!} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$, esiste una seconda costante $C_1 > 0$ tale che $\frac{\delta^n}{n!} \leq C_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{\tilde{C}}{\delta^n} \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $\tilde{C} = C \cdot C_1$ indipendente da n e da x .

Grazie all'osservazione precedente deduciamo che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ sono analitiche in $x = 0$. Il loro sviluppo è facilmente deducibile applicando il Teorema 6.3, ovvero

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gli sviluppi di McLaurin che abbiamo ottenuto hanno la stessa successione di coefficienti delle serie di potenze in \mathbb{C} calcolati nell'Osservazione 3.11. Quindi le funzioni in \mathbb{C} ristrette ad \mathbb{R} (fortunatamente) coincidono con le funzioni di variabile reale.

Dimostrazione del Teorema 6.3. Grazie all'ipotesi (i), la funzione f è di classe C^∞ , possiamo quindi considerare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il polinomio di Taylor di f di grado n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Vogliamo dimostrare che, grazie all'ipotesi (ii) vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I_\delta.$$

Grazie alla stima del resto di Lagrange sappiamo che, fissato $x \in I_\delta$,

$$\exists \xi = \xi(n, x) \in [x_0, x] \text{ (o } [x, x_0] \text{ se } x < x_0) : f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

quindi, per (ii),

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{C}{\delta^{n+1}} |x-x_0|^{n+1} = C \left| \frac{x-x_0}{\delta} \right|^{n+1}$$

Siccome $|x-x_0| < \delta$, allora $\left| \frac{x-x_0}{\delta} \right| < 1$ e $\left| \frac{x-x_0}{\delta} \right|^{n+1} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$; concludiamo quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = 0 \quad \forall x \in I_\delta.$$

□

Esempio 6.5 (Sulla risoluzione delle equazioni differenziali attraverso le serie di potenze). *Sono molte le equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee (a coefficienti non costanti) provenienti da problemi di fisica; tra queste citiamo*

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0 \quad \text{Equazione di Bessel}$$

$$x y''(x) + (1-x) y'(x) + \alpha y(x) = 0 \quad \text{Equazione di Laguerre}$$

$$(1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \alpha(\alpha+1) y(x) = 0 \quad \text{Equazione di Legendre}$$

$$y''(x) - 2x y'(x) + 2\alpha y(x) = 0 \quad \text{Equazione di Hermite}$$

dove α è un parametro reale. Come è noto, l'insieme delle loro soluzioni è isomorfo allo spazio euclideo bidimensionale e una strategia per determinarle consiste nel Metodo di Frobenius-Fuchs che propone di cercarle in forma di serie di potenze.

Vediamo un'esempio di questa procedura per risolvere per serie l'equazione di Bessel con α intero e positivo. Cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}.$$

Abbiamo, almeno formalmente,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) a_k x^{k+\alpha-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) a_k x^{k+\alpha-2},$$

quindi sostituendo nell'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) a_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) a_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha+2} - \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Eguagliando a zero il coefficiente di ogni potenza otteniamo

$$\alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 - \alpha^2 a_0 = 0$$

$$\alpha(\alpha+1)a_1 + (\alpha+1)a_1 - \alpha^2 a_1 = 0$$

$$(k+\alpha+1)(k+\alpha+2)a_{k+2} + (k+\alpha+2)a_{k+2} + a_k - \alpha^2 a_{k+2} = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

La prima equazione non vincola la scelta di a_0 , dalla seconda invece segue che $a_1 = 0$, e dalla terza

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(2\alpha+k+2)}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Deduciamo quindi che $a_k = 0$ se k è dispari e

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (n+\alpha)!}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Scegliendo in particolare $a_0 = 2^{-\alpha}$ troviamo la *funzione di Bessel di ordine α* che è soluzione dell'equazione di Bessel su \mathbb{R} (o su \mathbb{C})

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}.$$

7. ESERCIZI DI RIEPILOGO

Esercizio 7.1. Scrivere lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

precisandone l'intervallo di convergenza.

Dedurre lo sviluppo in serie di McLaurin di $g(x) = \arctan x$. Verificare che tale serie converge uniformemente in $[-1, 1]$. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Possiamo, attraverso il cambiamento di variabili $t = -x^2$, trasformare f nella funzione $h(t) = (1-t)^{-1}$ sviluppabile in serie di potenze in $(-1, 1)$ e convergente uniformemente negli intervalli $[-r, r]$, per ogni $r \in (0, 1)$. Otteniamo in questo modo

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \forall t \in (-1, 1) \quad \implies \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Osserviamo che anche la serie di McLaurin di f converge uniformemente negli intervalli $[-r, r]$, per ogni $r \in (0, 1)$; si ha inoltre convergenza in ogni compatto di $(-1, 1)$.

Per determinare lo sviluppo di $g(x) = \arctan x$ sfruttiamo le seguenti uguaglianze valide per ogni $x \in (-1, 1)$

$$g(x) = \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt.$$

Per quanto visto $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$ converge uniformemente in $[0, x]$ per ogni $x \in (-1, 1)$; possiamo quindi applicare il Teorema 2.5 ottenendo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'insieme di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ può essere più grande di $(-1, 1)$: il raggio di convergenza di questa serie è infatti ancora $R = 1$, e si potrebbe avere convergenza in $x = \pm 1$. Effettivamente se $x = \pm 1$ otteniamo rispettivamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

entrambe convergenti per il Criterio di Leibniz ($a_n = 1/(2n+1)$ è positivo, infinitesimo e decrescente, al crescere di n). Concludiamo quindi che, per il criterio di Abel, la convergenza alla funzione somma

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in [-1, 1],$$

è uniforme su tutto $[-1, 1]$; s è quindi continua su questo intervallo. Inoltre $s(x) = \arctan x$ per ogni $x \in (-1, 1)$, quindi

$$s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Possiamo determinare il valore della somma richiesto

$$\frac{\pi}{4} = s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Questa formula prende il nome di *Formula di Leibniz*.

Esercizio 7.2. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}.$$

Trovare la funzione somma.

Proviamo a ricondurre la serie data ad una serie di potenze nota. Il denominatore e la presenza del termine oscillante suggeriscono di ispirarsi a quanto visto nell'Esempio 4.1, ovvero alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t) \quad \forall t \in [-1, 1);$$

la convergenza è assoluta in $(-1, 1)$, inoltre per il Criterio di Abel si ha convergenza uniforme sugli intervalli $[-1, r)$ per ogni $r \in (-1, 1)$.

Tornando alla serie di partenza abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n} \text{ per ogni } x \text{ tale che } -x^2 \in [-1, 1)$$

ovvero per ogni $x \in [-1, 1]$. Abbiamo quindi $I_s = [-1, 1]$. La convergenza assoluta invece si ha solamente quando $-x^2 \in (-1, 1)$, ovvero per $x \in (-1, 1)$; la serie converge uniformemente quando $-x^2 \in [-1, r)$, $r \in (-1, 1)$, ovvero per $x \in [-1, 1]$.

Da questo esercizio si evince che la convergenza assoluta non segue da quella uniforme.

Esercizio 7.3. *Scrivere lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$$

precisandone l'intervallo di convergenza.

Scrivere quindi lo sviluppo di McLaurin di $f'(x)$ e determinarne l'intervallo di convergenza.

Scriviamo la funzione f come somma di funzioni razionali con denominatore di primo grado al fine di sfruttare lo sviluppo della serie geometrica visto negli Esempi 3.7 e 4.1 e seguire il

procedimento dell'Esercizio 4.1. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{x}{3}+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x}{2}+1} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

La prima serie ha raggio di convergenza 3, la seconda invece ha raggio 2 possiamo quindi asserire che per ogni $x \in (-2, 2)$ abbiamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n.$$

Usiamo ora il Corollario 5.4 per determinare lo sviluppo di f' , che avrà come intervallo di convergenza ancora $(-2, 2)$; abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ (-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] n x^{n-1}; \end{aligned}$$

cambiando ora l'indice di somma ($k = n - 1$ e quindi tornando all'indice n) otteniamo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \left[\frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} \right] x^n.$$

Esercizio 7.4. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di potenze in campo complesso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{n^2 + in} (z-1)^n.$$

Stabilire se la serie converge in $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Iniziamo col determinare il raggio di convergenza per la serie di potenze che risulta essere centrata in $z_0 = 1$ e avere termine $a_n = \frac{(1-2i)^n}{n^2 + in}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(1-2i)^n}{n^2 + in} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|1-2i|^n}}{\sqrt[n]{|n^2 + in|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[n]{n^2 + in}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt[n]{n})^2 |1 + \frac{i}{n}|^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{5}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il limite $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$. Deduciamo quindi che il disco di convergenza è

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Studiamo ora il comportamento della serie sul bordo di D . Prendiamo $z \in \partial D$, ovvero z tale che $|z-1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. La condizione necessaria per la convergenza in z , ovvero che la seguente quantità sia infinitesima per $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{(1-2i)^n}{n^2 + in} \right| \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n = \frac{1}{|n^2 + in|},$$

è verificata. Deduciamo quindi che la serie converge assolutamente e semplicemente anche su ∂D . Quindi

$$I_s = I_a = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Per valutare la convergenza nel punto $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ricordiamo la Formula di Eulero

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

e calcoliamo

$$|\bar{z} - 1| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Essendo

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(elevando una prima volta al quadrato otteniamo $2 - \sqrt{3} > \frac{1}{5}$, ovvero $\frac{9}{5} > \sqrt{3} \dots$) deduciamo che la serie non è convergente in \bar{z} .

Esercizio 7.5. Usando l'M-test di Weierstrass (2.7) provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4}$$

converge uniformemente in \mathbb{R} .

Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{x}{x^4 + 3n^4}$. Essendo $n \geq 1$ tutte le f_n sono definite e continue su \mathbb{R} . Cerchiamo quindi una successione di numeri reali M_n tale che $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\sum_n M_n$ sia convergente.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$$

ed essendo, per ogni n , f_n una funzione dispari, il Teorema di Weierstrass garantisce, per ogni n , l'esistenza di $x_n \geq 0$ tale che

$$\max_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x)| = |f_n(x_n)|.$$

La scelta ottimale sarà quindi $M_n = |f_n(x_n)|$. Per determinare x_n studiamo la funzione $f_n(x)$ sulla semiretta $[0, +\infty)$; abbiamo

$$f'_n(x) = \frac{3(n^4 - x^4)}{(x^4 + 3n^4)^2}$$

da cui deduciamo che $x_n = n$ (è l'unico punto in cui la derivata prima si annulla, quindi è necessariamente il punto di estremo che stiamo cercando). Quindi

$$M_n = f_n(n) = \frac{1}{4n^3}$$

ed essendo $\sum_n \frac{1}{4n^3} < +\infty$ possiamo applicare l'M-test e dedurre la convergenza uniforme della serie su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 7.6. Determinare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{|x|^n} - 1).$$

Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = (e^{|x|^n} - 1)$, definite e continue per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'esercizio non suggerisce una strategia di risoluzione e non si tratta di una serie di potenze. Iniziamo quindi a studiare la convergenza semplice/assoluta controllando in quale insieme è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Fissiamo quindi $x \in \mathbb{R}$ e richiediamo che

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{|x|^n} - 1)$$

ovvero che $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{|x|^n} = 1$, ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0$. Questo limite è nullo se e solo se $x \in (-1, 1)$. Quindi $I_s \subseteq (-1, 1)$.

Osserviamo ora che se $x \in (-1, 1)$ allora $|x|^n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$ e quindi, sapendo che $(e^t - 1) \sim t$ per $t \rightarrow 0$, otteniamo $(e^{|x|^n} - 1) \sim |x|^n$ se $n \rightarrow \infty$. Essendo $\sum_n |x|^n$ convergente per ogni $x \in (-1, 1)$, il Criterio del confronto per serie numeriche a termini positivi garantisce la convergenza semplice e assoluta per tutti e soli i punti dell'intervallo $(-1, 1)$. Quindi

$$I_a = I_s = (-1, 1).$$

Passiamo ora alla convergenza uniforme. Certamente la serie non converge uniformemente su tutto $(-1, 1)$, altrimenti, essendo le f_n continue su $[-1, 1]$, il Teorema 2.12, garantirebbe la convergenza uniforme e quindi semplice su tutto $[-1, 1]$, in contraddizione con quanto dimostrato. Prendiamo quindi un qualsiasi $r \in (0, 1)$ e studiamo la convergenza uniforme in $[-r, r]$. Essendo $|x|^n \leq r^n$ abbiamo $e^{|x|^n} \leq e^{r^n}$ e quindi $f_n(x) \leq f_n(r)$ per ogni n e per ogni $x \in [-r, r]$. A questo punto possiamo applicare il test di Weierstrass con $M_n = f_n(r)$, infatti, come sopra $(e^{r^n} - 1) \sim r^n$ se $n \rightarrow \infty$ e $\sum_n r^n$ è convergente.

CURVE E INTEGRALI DI LINEA ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

INDICE

1. Definizioni iniziali, significato fisico, esempi	1
2. Lunghezza di una curva e teorema di rettificabilità	5
3. Esercizi sulle curve	8
4. Curve regolari e cambi di parametrizzazione	10
5. Integrali curvilinei di campi scalari (o di prima specie)	12
6. Esercizi sugli integrali curvilinei di campi scalari	13
7. Esempi di curva non rettificabile e di curva rettificabile ma non C^1	17
8. Curvatura e torsione di una curva regolare in \mathbb{R}^3	19
9. Curve consecutive e unione di curve	19
10. Curve regolari a tratti e integrali di prima specie lungo curve regolari a tratti	20
11. Esempi ed esercizi	21
12. Integrali di linea di campi vettoriali	23
13. Sostegni orientati	25
14. Campi conservativi e potenziali	26
15. Campi radiali	29
16. Esempi notevoli e condizione necessaria affinché un campo sia conservativo	30
17. Condizione sufficiente affinché un campo sia conservativo (lemma di Poincaré)	32
18. Esercizi sui campi conservativi e calcolo del potenziale	34
19. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi	39
20. Forme differenziali	40
21. Formula di Gauss-Green	42
22. Esercizi sulla formula di Gauss-Green	47

1. DEFINIZIONI INIZIALI, SIGNIFICATO FISICO, ESEMPI

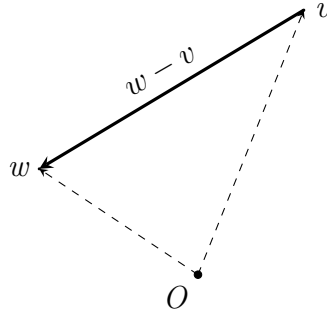
Consideriamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e un intero $N \geq 2$.

Definizione 1.1. Una curva, più precisamente, una curva parametrica in \mathbb{R}^N è una funzione continua $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. In particolare per ogni $t \in I$ si ha che $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ è un vettore in \mathbb{R}^N . La variabile indipendente $t \in I$ si chiama parametro della curva. L'immagine di γ , cioè l'insieme $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ si chiama sostegno della curva.

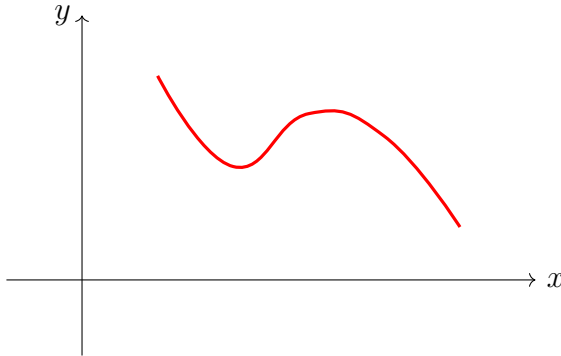
Nel contesto della cinematica del punto, una curva rappresenta il moto di una particella nello spazio euclideo N -dimensionale.

La precedente definizione non costituisce l'unico modo per individuare una curva in \mathbb{R}^N . Ad esempio, la circonferenza nel piano, centrata in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e di raggio $r > 0$ si può rappresentare nella forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$.

Esempi 1.2. (1) *Fissati due punti $v, w \in \mathbb{R}^N$, il segmento rettilineo che congiunge v con w è la curva $\gamma(t) = (1 - t)v + tw$ con $t \in [0, 1]$. In particolare $\gamma(0) = v$ è il punto iniziale e $\gamma(1) = w$ il punto finale. Il sostegno della curva è il segmento individuato dal vettore $w - v$.*

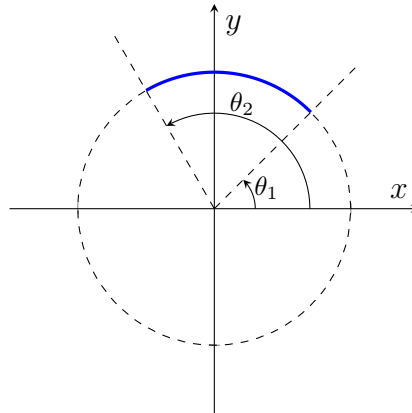


(2) *Una curva piana cartesiana è una curva parametrica della forma $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ dove $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua reale di variabile reale. In questo caso, il sostegno di γ coincide con il grafico di f .*

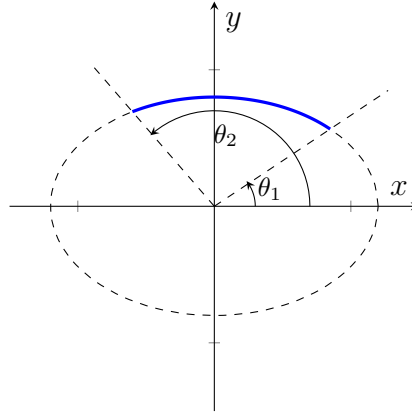


La curva nel disegno a sinistra è una curva cartesiana rispetto al sistema di riferimento disegnato perché ogni retta verticale ha al più un'intersezione con la curva.

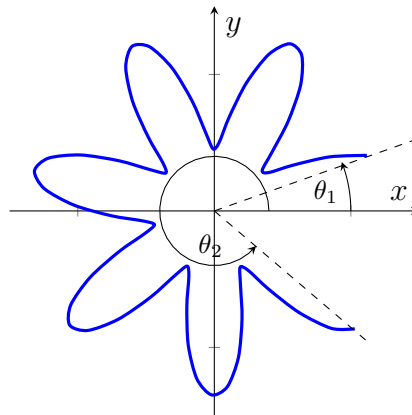
(3) *Un arco di circonferenza è una curva della forma $\gamma(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ essendo $R > 0$ fissato.*



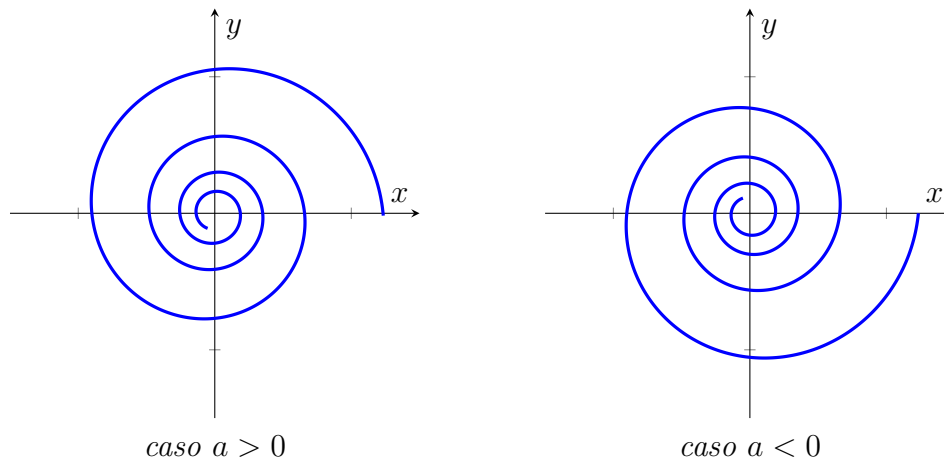
- (4) Un arco di ellisse è una curva della forma $\gamma(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, essendo a e b costanti positive fissate.



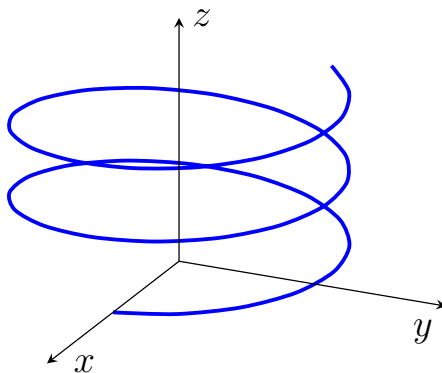
- (5) Una curva piana in forma polare è una curva parametrica della forma $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, essendo $\rho: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione continua a valori non negativi.



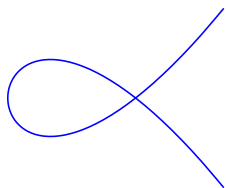
- (6) La spirale logaritmica o “spira mirabilis” di Bernoulli è la curva definita da $\gamma(\theta) = ae^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \geq 0$. Qui a e b sono costanti reali non nulle. La curva è una spirale percorsa in senso antiorario se $a > 0$, in senso orario se $a < 0$. La distanza del punto dall’origine è data da $\rho(\theta) = |a|e^{b\theta}$, da cui $\theta = \frac{1}{b} \log \frac{\rho}{|a|}$, che spiega la denominazione “spirale logaritmica”.



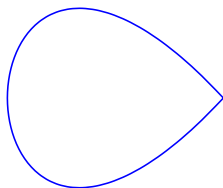
- (7) Un'elica cilindrica è una curva in \mathbb{R}^3 della forma $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$ con $t \in [0, T]$, essendo R e T costanti positive fissate.



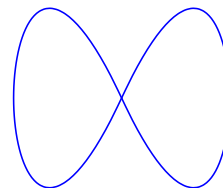
Definizione 1.3. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$, si dice semplice se $\gamma|_{[a,b]}$ è una funzione iniettiva.



curva né chiusa né semplice



curva chiusa e semplice

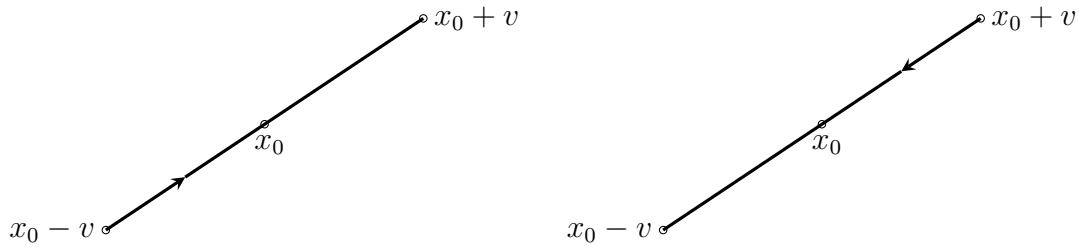


curva chiusa ma non semplice

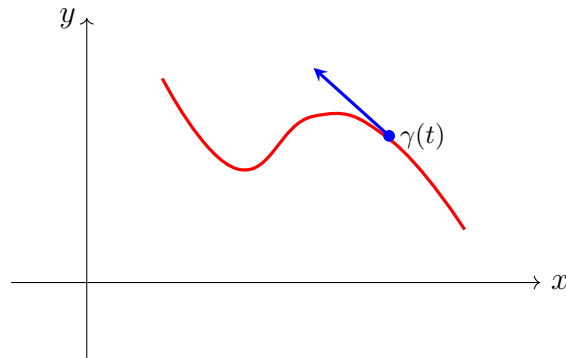
Esempio 1.4. Consideriamo la curva $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ con θ in un certo intervallo chiuso e limitato $I = [\theta_1, \theta_2]$. Le proprietà della curva di essere chiusa e/o di essere semplice dipendono dall'intervallo dei parametri. Se $I = [0, \pi]$, allora γ è semplice ma non chiusa. Se $I = [0, 2\pi]$,

allora γ è semplice e chiusa. Se $I = [0, 3\pi]$, allora γ non è né chiusa né semplice. Se $I = [0, 4\pi]$, allora γ è chiusa ma non semplice.

Il parametro di una curva induce un *verso di percorrenza* o *orientamento* della curva stessa. Ad esempio, fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, le curve $\gamma^+(t) = x_0 + tv$ con $t \in [-1, 1]$ e $\gamma^-(t) = x_0 - tv$ con $t \in [-1, 1]$ rappresentano lo stesso segmento di estremi $x_0 - v$ e $x_0 + v$ ma sono percorse con verso una l'opposto dell'altra.



Definizione 1.5. Data una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ e fissato $t_0 \in I$, se esiste il vettore $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_N(t_0))$, esso si chiama *vettore derivata* o *vettore tangente* a γ in t_0 . Se t_0 è il primo (rispettivamente, secondo) estremo di I , si prende solo la derivata destra (rispettivamente, sinistra) di γ . La curva γ si dice di classe C^1 su I se $\gamma'(t)$ esiste per ogni $t \in I$ e le funzioni $\gamma'_1, \dots, \gamma'_N: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue su I .



Osservazione 1.6. Una stessa curva può essere rappresentata mediante parametrizzazioni diverse. Ad esempio le funzioni $\gamma_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $\gamma_2(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ parametrizzano entrambe la semicirconferenza unitaria superiore, con lo stesso orientamento. Il vettore tangente dipende dalla parametrizzazione. Ad esempio $\gamma'_1(0) = (0, 1)$ mentre $\gamma'_2(0) = (0, 2)$.

2. LUNGHEZZA DI UNA CURVA E TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

La lunghezza di una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si definisce tramite approssimazione per poligoni, secondo la seguente costruzione.

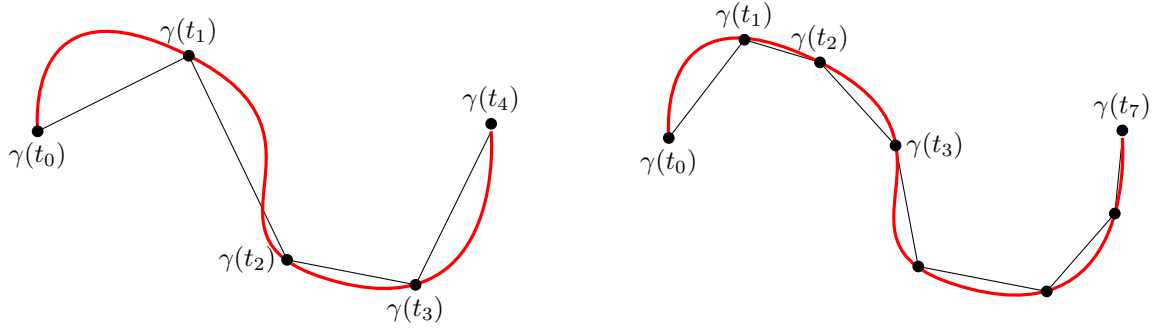
Si introduce la classe \mathbb{P} delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$, cioè la famiglia dei sottoinsiemi finiti e ordinati di $[a, b]$ della forma $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ per qualche intero positivo n .

Presa una partizione $P \in \mathbb{P}$, si definisce lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P il numero

$$L(P) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \quad \text{se } P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

dove in generale, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^N$, con $|x - y|$ si denota la distanza euclidea tra x e y , cioè

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$



Si osserva che, infittendo la partizione, la lunghezza della poligonale aumenta, cioè, prese $P, P' \in \mathbb{P}$, se $P \subset P'$ allora $L(P) \leq L(P')$.

Definizione 2.1. Si definisce lunghezza della curva γ l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali su γ , al variare delle partizioni di $[a, b]$:

$$L(\gamma) = \sup_{P \in \mathbb{P}} L(P).$$

Se $L(\gamma) < \infty$ la curva γ si dice rettificabile.

Dato che per definizione l'estremo superiore di un insieme è il minimo dei maggioranti, vale che

- $L(\gamma) \geq L(P) \quad \forall P \in \mathbb{P}$
- se $L(\gamma) < \infty$ allora $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathbb{P}: L(P) > L(\gamma) - \varepsilon$.

La definizione di lunghezza di una curva non è operativamente utile. Per il calcolo della lunghezza ci si può avvalere della formula presentata nel seguente importante risultato.

Teorema 2.2 (rettificabilità e calcolo della lunghezza). Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva di classe C^1 allora γ è rettificabile e la sua lunghezza vale

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si noti che l'essere una curva di classe C^1 costituisce in generale una condizione sufficiente ma non necessaria per la rettificabilità.

Dimostrazione. Iniziamo a provare la rettificabilità e la disuguaglianza

$$(1) \quad L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Presa una qualsiasi partizione $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$, la lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P si può stimare in questo modo:

$$\begin{aligned}
 L(P) &= \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\
 &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right| \quad (\text{per il teorema fondamentale del calcolo}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt \quad (\text{per la nota proprietà } \left| \int_a^b g \right| \leq \int_a^b |g|) \\
 &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (\text{per la nota proprietà } \int_a^b g + \int_b^c g = \int_a^c g).
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} L(P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e l'integrale a secondo membro è finito perché, essendo γ di classe C^1 per ipotesi, la funzione $|\gamma'|$ è continua in $[a, b]$. Dunque γ è rettificabile e vale (1). Per provare la disuguaglianza opposta utilizziamo il seguente risultato ausiliario, di cui omettiamo la dimostrazione, che si basa solo sulla definizione di lunghezza e sulle proprietà dell'estremo superiore.

Lemma 2.3 (di decomposizione). *Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva rettificabile, allora per ogni $c \in [a, b]$ anche $\gamma|_{[a, c]}$ e $\gamma|_{[c, b]}$ lo sono e*

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}).$$

Proseguiamo la dimostrazione del teorema, andando ad introdurre la funzione $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$S(t) = L(\gamma|_{[a, t]}) \quad (\text{lunghezza di } \gamma \text{ fino a } t).$$

Osserviamo che $S(a) = 0$ e $S(b) = L(\gamma)$. Il nostro obiettivo è provare che S è derivabile e calcolare la derivata. A tale scopo, fissiamo $t \in [a, b]$ e prendiamo $h > 0$ tale che $t + h \leq b$. Per il lemma di decomposizione,

$$L(\gamma|_{[a, t+h]}) = L(\gamma|_{[a, t]}) + L(\gamma|_{[t, t+h]}),$$

cioè

$$S(t+h) - S(t) = L(\gamma|_{[t, t+h]}).$$

Per definizione di lunghezza, considerando la partizione $\{t, t+h\}$ dell'intervallo $[t, t+h]$ abbiamo che

$$|\gamma(t+h) - \gamma(t)| \leq L(\gamma|_{[t, t+h]}).$$

Quindi, dividendo per h (che è un numero positivo), otteniamo

$$(2) \quad \left| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right| \leq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'(s)| ds$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo applicato (1) con $[t, t+h]$ al posto di $[a, b]$. Ora prendiamo il limite per $h \rightarrow 0^+$. Essendo γ derivabile,

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t).$$

Inoltre

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'(s)| ds = |\gamma'(t)|$$

perché $|\gamma'|$ è una funzione continua e per il ben noto teorema secondo cui se $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora la funzione $G(t) = \int_a^t g$ è derivabile e $G'(t) = g(t)$, ovvero $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g = g(t)$. Allora, per il teorema del confronto per i limiti, grazie a (3) e (4), da (2) segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = |\gamma'(t)|,$$

cioè S ammette derivata destra in ogni $t \in [a, b]$ e questa vale $|\gamma'(t)|$. Prendendo ora $t \in (a, b]$ e $h < 0$ tale che $t+h \geq a$ e ripetendo un simile ragionamento otteniamo anche che S ammette derivata sinistra in t e vale $|\gamma'(t)|$. In conclusione S è derivabile in $[a, b]$ e $S'(t) = |\gamma'(t)|$ per ogni $t \in [a, b]$. Essendo γ di classe C^1 , anche S risulta di classe C^1 e per il teorema fondamentale del calcolo otteniamo che

$$L(\gamma) = S(b) - S(a) = \int_a^b S'(t) dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad \square$$

3. ESERCIZI SULLE CURVE

Esercizio 3.1. Si consideri la spirale logarimica $\gamma(\theta) = e^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e b costante non nulla fissata. Stabilire se tale curva è chiusa, semplice, rettificabile e calcolarne la lunghezza. Essendo $\gamma(0) = (1, 0) \neq e^{2\pi b}(1, 0) = \gamma(2\pi)$ (perché $b \neq 0$), la curva non è chiusa. È semplice perché $|\gamma(t)| = e^{bt}$ è iniettiva in $[0, 2\pi)$, in quanto monotona. La curva è di classe C^1 e quindi rettificabile. In particolare

$$\begin{aligned} \gamma'(\theta) &= be^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta) + e^{b\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) = e^{b\theta}(b \cos \theta - \sin \theta, b \sin \theta + \cos \theta) \\ |\gamma'(\theta)| &= e^{b\theta} \sqrt{b^2 + 1} \end{aligned}$$

e, per il teorema 2.2

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} e^{b\theta} \sqrt{b^2 + 1} d\theta = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + 1} (e^{2\pi b} - 1).$$

Esercizio 3.2. Si consideri la spirale archimedeana $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare la lunghezza di γ .

La curva è di classe C^1 e quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t) \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{1 + t^2} \end{aligned}$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = t\sqrt{1 + t^2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} dt \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt + \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} - L(\gamma) + \int_0^{2\pi} \operatorname{arcsinh}'(t) dt \end{aligned}$$

da cui

$$L(\gamma) = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2\pi).$$

Esercizio 3.3. Si consideri la curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$. Calcolare la lunghezza di γ e disegnarne il sostegno.

La curva è di classe C^1 . Quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\gamma'(t) = (3t^2, 2t), \quad |\gamma'(t)| = 2|t|\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2}$$

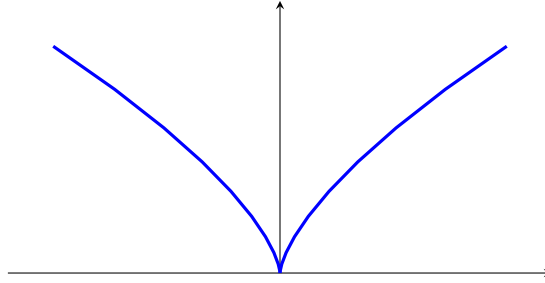
e, per parità,

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 2|t|\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} dt = \int_0^1 4t\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} dt = \frac{16}{9} \left[1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{16}{9} \left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

Per disegnare il sostegno di γ , poniamo $(x, y) = (t^3, t^2)$ e cerchiamo una relazione tra x e y in modo da rappresentare γ come curva cartesiana. Abbiamo che

$$y = t^2 = x^{\frac{2}{3}} \quad \text{con } x \in [-1, 1].$$

Dunque il sostegno di γ coincide con il grafico di $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ con $x \in [-1, 1]$.



Esercizio 3.4. Si consideri la curva astroide data da $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Stabilire se γ è chiusa e semplice. Calcolare la lunghezza di γ e disegnarne il sostegno.

La curva è chiusa perché $\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$. Inoltre è semplice perché

$$\begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \cos^3 t_1 = \cos^3 t_2 \\ \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ t_1 - t_2 = 2k\pi \\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

La curva è di classe C^1 . Quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t), \quad |\gamma'(t)| = 3|\cos t \sin t|$$

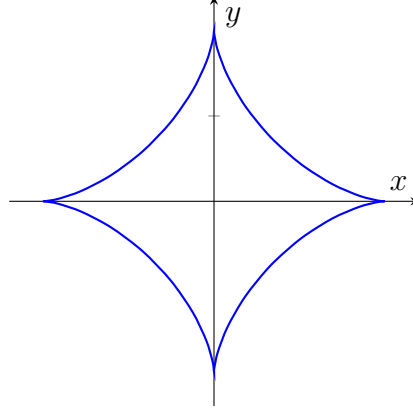
e, essendo la funzione $|\cos t \sin t|$ periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$,

$$L(\gamma) = 3 \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

Come nell'esercizio precedente, per disegnare il sostegno di γ , poniamo $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e cerchiamo una relazione tra x e y . Troviamo che

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{con } x \in [-1, 1].$$

Quindi il sostegno di γ è l'unione di due grafici, quello di $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ con $x \in [-1, 1]$ e quello di $g(x) = -\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ con $x \in [-1, 1]$.



Si noti che, a differenza di γ , la curva cartesiana definita come $\tilde{\gamma}(x) = (x, f(x))$ con $x \in [-1, 1]$ non è di classe C^1 . Idem per quella corrispondente a g . Questo esercizio evidenzia il fatto che lo stesso sostegno può essere descritto mediante parametrizzazioni diverse, che potrebbero non avere la stessa regolarità.

4. CURVE REGOLARI E CAMBI DI PARAMETRIZZAZIONE

Definizione 4.1. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice regolare se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

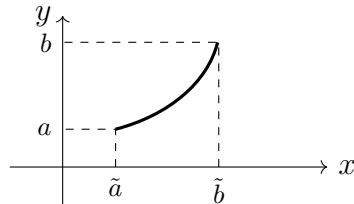
Definizione 4.2. Un cambio di parametrizzazione è una biiezione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 e tale che $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

In particolare un cambio di parametrizzazione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è una funzione invertibile, con inversa $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ di classe C^1 . Inoltre

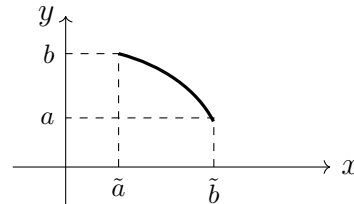
$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \quad \forall t \in [a, b].$$

Da ciò si evince che se $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametrizzazione, anche $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ lo è.

Osservazione 4.3. Ci sono solo due possibilità, descritte nella figura seguente:



caso $\varphi' > 0$



caso $\varphi' < 0$

Quando il cambio di parametrizzazione φ è crescente, le curve γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ hanno la stessa orientazione e si dicono equivalenti. Se invece φ è decrescente, le curve γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ percorrono lo stesso sostegno con direzioni opposte.

Vediamo due esempi notevoli di cambi di parametrizzazione.

Esempio 4.4. Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, la funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ definita da $\varphi(s) = a + b - s$ è un cambio di parametrizzazione che inverte il verso di percorrenza di γ . La curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ si dice curva opposta a γ e si denota $-\gamma$.

Esempio 4.5. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una curva regolare, cioè di classe C^1 , con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Consideriamo la funzione $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ già incontrata nella dimostrazione del teorema di rettificabilità, definita come la lunghezza del tratto di curva fino al valore t del parametro, cioè

$$S(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) \quad \forall t \in [a, b].$$

Tale funzione si chiama ascissa curvilinea e, per il teorema 2.2, è derivabile con $S'(t) = |\gamma'(t)| \forall t \in [a, b]$. Avendo assunto γ regolare, $S'(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$ e dunque S è strettamente crescente ed è una biiezione di $[a, b]$ su $[0, L]$ dove $L = L(\gamma)$. Inoltre S è di classe C^1 . Quindi S è un cambio di parametrizzazione. Sia

$$\varphi := S^{-1}: [0, L] \rightarrow [a, b]$$

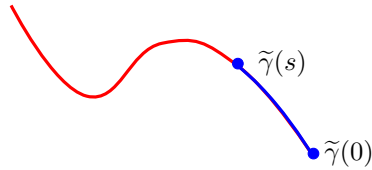
l'inversa di S . Come già osservato, anche φ è un cambio di parametrizzazione. La curva $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\varphi(s))$ con $s \in [0, L]$ si chiama parametrizzazione naturale o intrinseca di γ ed è l'unica parametrizzazione di γ che soddisfa

$$(5) \quad |\tilde{\gamma}'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L]$$

e che preserva il verso di percorrenza di γ . In particolare, si ha che

$$L(\tilde{\gamma}|_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, L],$$

perciò si chiama parametrizzazione naturale.



Se $\tilde{\gamma}$ è la parametrizzazione naturale, la lunghezza del tratto di curva da $\tilde{\gamma}(0)$ a $\tilde{\gamma}(s)$ vale s .

Verifichiamo che $\tilde{\gamma}$ soddisfa (5):

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)| = \frac{|\gamma'(\varphi(s))|}{S'(\varphi(s))} = \frac{|\gamma'(\varphi(s))|}{|\gamma'(\varphi(s))|} = 1.$$

Verifichiamo che è l'unica parametrizzazione su $[0, L]$ che soddisfa (5) e che rispetta lo stesso verso di percorrenza indotto da γ . Supponiamo che ci siano due parametrizzazioni γ_1 e γ_2 che soddisfano tali proprietà. Allora γ_1 e γ_2 sono curve equivalenti (nel senso dell'osservazione 4.3) definite entrambe su $[0, L]$, cioè esiste un cambio di parametrizzazione $\psi: [0, L] \rightarrow [0, L]$ tale che $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$. Quindi, dato che γ_1 e γ_2 soddisfano (5) e ψ è crescente,

$$1 = |\gamma_1'(s)| = |\gamma_2'(\psi(s))| |\psi'(s)| = |\psi'(s)| = \psi'(s) \quad \forall s \in [0, L]$$

Dunque $\psi(s) = s + \text{cost}$ e siccome $\psi(0) = 0$, segue che $\psi(s) = s$, cioè $\gamma_1 = \gamma_2$.

Teorema 4.6 (invarianza della lunghezza di una curva rispetto a cambi di parametrizzazione). Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare e $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametrizzazione, allora $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare con lo stesso sostegno di γ e $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.

Dimostrazione. La prima parte è immediata: la composizione di funzioni di classe C^1 è pure di classe C^1 . Inoltre $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) \neq 0$ per ogni $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ per le ipotesi fatte. Dimostriamo l'invarianza della lunghezza. Possiamo applicare il teorema 2.2 e calcolare

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(s)| ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds = \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} |\gamma'(t)| \frac{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt$$

avendo effettuato il cambio di variabili $t = \varphi(s)$. Ora distinguiamo due casi.

Primo caso: $\varphi'(s) > 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Allora $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$ e

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma).$$

Secondo caso: $\varphi'(s) < 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Allora $\varphi(\tilde{a}) = b$, $\varphi(\tilde{b}) = a$ e

$$L(\tilde{\gamma}) = - \int_b^a |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma). \quad \square$$

Esercizio 4.1. Trovare la parametrizzazione naturale della curva $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Calcoliamo

$$\gamma'(t) = e^t (\cos t, \sin t) + e^t (-\sin t, \cos t), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{2} e^t$$

da cui

$$S(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \sqrt{2} (e^t - 1) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

In particolare $L(\gamma) = \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)$. Per invertire la funzione $S(t)$, risolviamo l'equazione $S(t) = s$ rispetto a t :

$$s = S(t) \Leftrightarrow s = \sqrt{2} (e^t - 1) \Leftrightarrow t = \log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Quindi il cambio di parametrizzazione da considerare è la funzione

$$\varphi(s) = \log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \quad \forall s \in [0, \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)]$$

e la parametrizzazione naturale è

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s) &= \gamma(\varphi(s)) = e^{\varphi(s)} (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))) \\ &= \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos \left(\log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \sin \left(\log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \quad \forall s \in [0, \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)]. \end{aligned}$$

La correttezza del risultato si può verificare riconoscendo che $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ per ogni s .

5. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI (O DI PRIMA SPECIE)

Definizione 5.1. Date una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 , con sostegno Γ e una funzione continua $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama integrale curvilineo di f lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Osservazione 5.2. Per le richieste fatte su γ e su f , la funzione integranda è continua su $[a, b]$ e quindi la definizione è ben posta. Osserviamo inoltre che se f è la funzione costante 1 allora $\int_{\gamma} f ds = L(\gamma)$.

Teorema 5.3. *Date due curve regolari $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ che differiscono per un cambio di parametrizzazione, e data una funzione continua $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, dove Γ è il sostegno di γ (e anche di $\tilde{\gamma}$), si ha che*

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds.$$

La dimostrazione segue dalla definizione di integrale curvilineo ed è uguale a quella dell'invarianza della lunghezza. I dettagli possono essere svolti in autonomia.

Il seguente risultato, che non dimostreremo, garantisce che l'integrale curvilineo di un campo scalare lungo una data curva *regolare e semplice* dipende solo dal sostegno della curva e non dalla parametrizzazione.

Teorema 5.4. *Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due curve regolari, semplici e con lo stesso sostegno, allora differiscono per un cambio di parametrizzazione.*

Per i teoremi 5.3 e 5.4, se γ è una curva regolare e semplice con sostegno Γ e $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in Γ , poniamo

$$\int_{\Gamma} f ds := \int_{\gamma} f ds$$

e tale scrittura è ben posta perché non dipende dalla parametrizzazione di Γ .

Osservazione 5.5 (significato fisico dell'integrale curvilineo di un campo scalare). *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^1 , con sostegno Γ lungo cui è distribuita una massa (o una carica) e sia $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione (continua) che dà la densità di massa (o di carica) nei punti di Γ . Allora l'integrale curvilineo di f lungo γ rappresenta la massa totale (carica totale) della curva.*

Osservazione 5.6 (significato geometrico dell'integrale curvilineo di un campo scalare). *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 , con sostegno Γ e sia $f: \Gamma \rightarrow [0, \infty)$ una funzione continua. Allora l'integrale curvilineo di f lungo γ rappresenta l'area della superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t), 0 \leq z \leq f(\gamma(t)), t \in [a, b]\}$$

dove γ_1 e γ_2 sono la prima e la seconda componente di γ .

Definizione 5.7. *Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 si definisce baricentro di γ il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ le cui coordinate sono date da*

$$\bar{x}_i = \frac{\int_{\gamma} \pi_i ds}{L(\gamma)} \quad i = 1, \dots, N$$

dove $\pi_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione sulla i -esima componente, cioè $\pi_i(x) = x_i$ se $x = (x_1, \dots, x_N)$.

6. ESERCIZI SUGLI INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI

Esercizio 6.1. *Calcolare $\int_{\gamma} \sqrt{z} ds$ dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$.*

Si calcola $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$, da cui $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Quindi si applica la definizione 5.1 e si trova

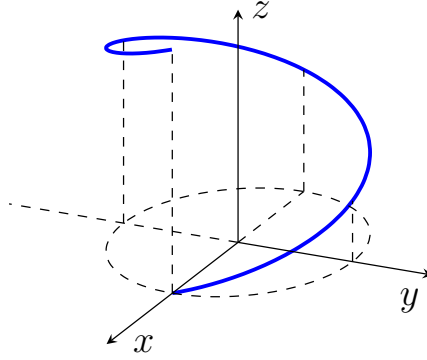
$$\int_{\gamma} \sqrt{z} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

Esercizio 6.2. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} ds$ dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Si calcola $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, da cui $|\gamma'(t)| = 1$. Quindi si applica la definizione 5.1 e si trova

$$\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \arctan(\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 6.3. Trovare il baricentro dell'elica cilindrica $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e R ed h costanti positive fissate.



Chiamiamo $\bar{b} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ il baricentro di γ e applichiamo la definizione 5.7 per calcolarlo. In primo luogo calcoliamo la lunghezza di γ . Si ha che $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)$ e, in particolare, $|\gamma'(t)| = \sqrt{R^2 + h^2}$. Quindi

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Inoltre

$$\int_{\gamma} x ds = \int_0^{2\pi} R \cos t \sqrt{R^2 + h^2} dt = R \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0.$$

Analogamente

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{2\pi} R \sin t \sqrt{R^2 + h^2} dt = R \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.$$

Invece

$$\int_{\gamma} z ds = \int_0^{2\pi} ht \sqrt{R^2 + h^2} dt = h \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} t dt = h \sqrt{R^2 + h^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2h\pi^2 \sqrt{R^2 + h^2}.$$

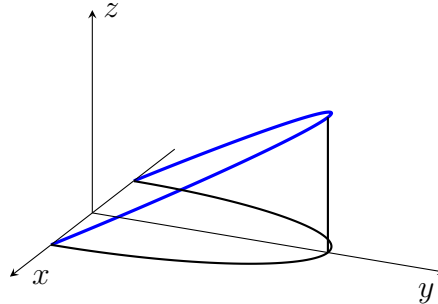
Pertanto, in base alla definizione 5.7, il baricentro di γ è il punto

$$\bar{b} = (0, 0, h\pi).$$

Esercizio 6.4. Disegnare l'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$ e calcolare l'area della superficie laterale di C .

La condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ individua il cilindro (pieno) con asse l'asse z e la cui sezione è il cerchio

unitario nel piano orizzontale. Di tale cilindro dobbiamo prendere la parte compresa tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = y$.



La superficie laterale dell'insieme C si può allora descrivere come l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq z \leq f(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \pi\}$$

dove $f(x, y) = y$. Allora, per il significato geometrico di integrale curvilineo di un campo scalare (vedi osservazione 5.6), si ha che

$$\text{area}(S) = \int_{\gamma} f \, ds = \int_0^{\pi} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} = 2.$$

Esercizio 6.5. La curva planare $\gamma(\theta) = (1 - \cos \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ si chiama cardiode. Verificare che tale curva è chiusa e semplice, tracciare un disegno approssimativo del suo sostegno e calcolarne la lunghezza ed il baricentro.

Si tratta di una curva in forma polare $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$. In generale, se $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e $\rho(\theta)$ e $\rho|_{[\theta_1, \theta_2]}$ si annulla solo una volta, la curva è semplice. Questo è il caso della cardiode perché la funzione $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ si annulla per $\theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ma solo 0 appartiene a $[0, 2\pi)$. Tale curva è chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (0, 0)$. Un disegno approssimativo della cardiode si può tracciare tenendo conto dal grafico di $\rho(\theta)$ che dà la distanza del punto $\gamma(\theta)$ dall'origine.

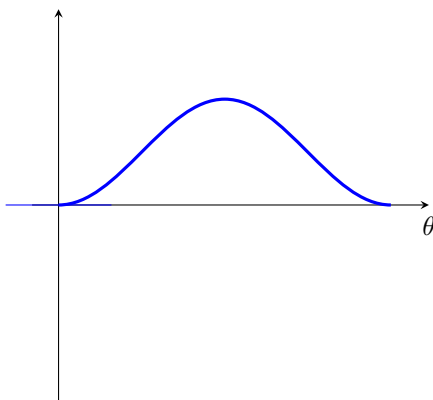
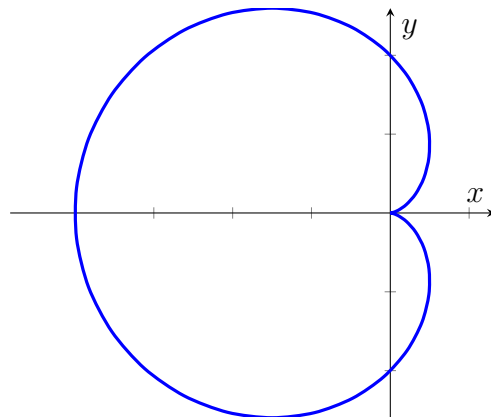


grafico di $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$



cardioid

La cardioide è una curva di classe C^1 e se ne può calcolare la lunghezza con il teorema 2.2. In generale, per curve in forma polare $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ si ha che

$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \\ |\gamma'(\theta)| &= \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2}.\end{aligned}$$

Nel caso della cardioide, $\rho'(\theta) = \sin \theta$ e $|\rho'(\theta)| = \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta}$. Allora la lunghezza della cardioide è

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = -2\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} \Big|_0^\pi \\ &= -4\sqrt{2} (0 - \sqrt{2}) = 8.\end{aligned}$$

Il baricentro della cardioide è il punto $\bar{b} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ dove, per la definizione 5.7,

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \int_\gamma x ds \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{8} \int_\gamma y ds.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma x ds &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) \cos \theta \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta |\sin \theta|}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta - \sqrt{2} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta\end{aligned}$$

Per ciascuno dei due integrali possiamo effettuare la sostituzione $t = \cos \theta$ perché il coseno è monotono separatamente in $[0, \pi]$ e in $[\pi, 2\pi]$. Quindi, proseguendo i conti, tenuto conto che $dt = -\sin \theta d\theta$, troviamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma x ds &= -\sqrt{2} \int_1^{-1} \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt + \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^2 \frac{(2-s)(s-1)}{\sqrt{s}} ds\end{aligned}$$

avendo effettuato la sostituzione $1+t=s$. Quindi si calcola

$$\int_0^2 \frac{(2-s)(s-1)}{\sqrt{s}} ds = \int_0^2 \left(-s^{\frac{3}{2}} + 3s^{\frac{1}{2}} - 2s^{-\frac{1}{2}} \right) ds = -\frac{2}{5} \sqrt{s} (s^2 - 5s + 10) \Big|_0^2 = -\frac{8\sqrt{2}}{5}$$

e infine, facendo i conti, si trova

$$\bar{x} = -\frac{4}{5}.$$

Per calcolare \bar{y} si può osservare che la cardioide è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e quindi $\bar{y} = 0$. In conclusione, il baricentro della cardioide è il punto $\bar{b} = (-\frac{4}{5}, 0)$.

Esercizio 6.6. Calcolare il baricentro della curva $\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$ con $t \in [0, \pi]$ (semi-astroide).

7. ESEMPI DI CURVA NON RETTIFICABILE E DI CURVA RETTIFICABILE MA NON C^1

Consideriamo la curva cartesiana $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma(t) = (t, g(t))$ dove

$$g(t) = \begin{cases} t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

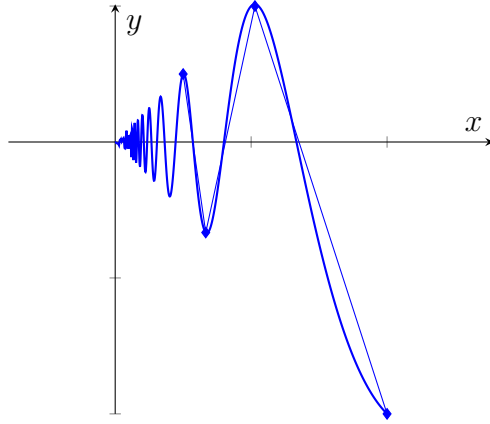


grafico di $t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$ e poligonale approssimante

Che γ sia effettivamente una curva è garantito dalla continuità di g in $[0, 1]$. Si osservi, in particolare, che $g(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$. Osserviamo che g è derivabile in $(0, 1]$ con

$$g'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) + \frac{\pi}{t} \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

ma non esiste la derivata di g in 0, perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g\left(\frac{1}{2n}\right) - g(0)}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g\left(\frac{1}{2n+1}\right) - g(0)}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Dunque la curva γ non è di classe C^1 . Proviamo che non è rettificabile. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo la partizione $P_k = \{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$. La lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P_k si può stimare così:

$$L(P_k) = |\gamma(0) - \gamma\left(\frac{1}{k}\right)| + |\gamma\left(\frac{1}{k}\right) - \gamma\left(\frac{1}{k-1}\right)| + \dots + |\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \gamma(1)| > \sum_{n=1}^{k-1} \left| \gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \right|.$$

Per la definizione di distanza euclidea

$$\begin{aligned} \left| \gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| &= \left| \left(\frac{1}{n}, g\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n+1}, g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^2} \\ &\geq \left| g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = |(-1)^n| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Quindi

$$L(P_k) > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k},$$

che è la ridotta k -esima della serie armonica. Essendo la serie armonica divergente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(P_k) = \infty.$$

Quindi $L(\gamma) = \sup_{P \in \mathbb{P}} L(P) = \infty$.

L'esempio precedente si fonda sul fatto che la lunghezza della curva sul tratto $[\frac{1}{k}, 1]$ si stima con la ridotta k -esima di una serie divergente. Andiamo ora a costruire un esempio di curva che ammette vettore tangente in ogni punto, ma non è di classe C^1 e pur tuttavia è rettificabile. A tale scopo andiamo a modificare la costruzione precedente, per ottenere una curva tale per cui, grosso modo, la lunghezza della curva su tratti $[\frac{1}{k}, 1]$ si stima con la ridotta k -esima della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ che sappiamo essere convergente. Consideriamo la curva cartesiana $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma(t) = (t, g(t))$ dove

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$g'(t) = \begin{cases} 2t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) + \pi \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Quindi in particolare g è continua in $[0, 1]$ e γ è effettivamente una curva. Si osservi però che g' non è continua in 0 (verificare!) e dunque γ non è di classe C^1 .

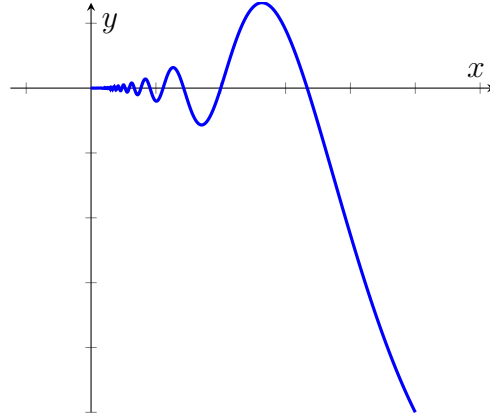


grafico di $t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$

Si può dimostrare che per una generica curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ vale che

$$L(\gamma) = \sup_{\varepsilon \in (0,1)} L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}).$$

Nel caso in esame, per $\varepsilon \in (0, 1)$ la curva $\gamma|_{[\varepsilon, 1]}$ è di classe C^1 e possiamo stimare

$$L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}) = \int_{\varepsilon}^1 |\gamma'(t)| dt = \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + [g'(t)]^2} dt \leq \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} dt \leq \sqrt{1 + (2 + \pi)^2}$$

perché $|g'(t)| \leq 2t + \pi \leq 2 + \pi$ per $t \in (0, 1]$. Quindi

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}) \leq \sqrt{1 + (2 + \pi)^2}$$

e dunque γ è rettificabile.

8. CURVATURA E TORSIONE DI UNA CURVA REGOLARE IN \mathbb{R}^3

(*) Consideriamo una curva regolare $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata mediante lunghezza d'arco, cioè tale per cui

$$|\gamma'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L].$$

Supponiamo γ di classe C^2 cioè le sue componenti sono funzioni due volte derivabili, con derivate seconde continue. Definiamo

$$T(s) := \gamma'(s) \quad \text{versore tangente a } \gamma \text{ in } s$$

$$k(s) := |\gamma''(s)| \quad \text{curvatura di } \gamma \text{ in } s.$$

La curvatura misura la rapidità con cui $T(s)$ varia in direzione (e solo in direzione!). Se $k(s) \neq 0$ poniamo

$$N(s) := \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} \quad \text{versore normale a } \gamma \text{ in } s.$$

Proviamo che i versori tangente e normale sono ortogonali. Siccome $|\gamma'(s)|^2 = 1$ per ogni s , scrivendo $|\gamma'(s)|^2 = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$ (dove $\langle p, q \rangle$ denota il prodotto scalare tra due vettori $p, q \in \mathbb{R}^3$) e derivando, otteniamo

$$0 = \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2k(s)\langle T(s), N(s) \rangle, .$$

Laddove $k(s) \neq 0$ definiamo inoltre

$$B(s) := T(s) \wedge N(s) \quad \text{versore binormale a } \gamma \text{ in } s$$

dove \wedge denota il prodotto esterno tra vettori di \mathbb{R}^3 . La terna $\{T(s), N(s), B(s)\}$ si chiama *terna di Fréchet* di γ in s ed è costituita da versori mutuamente ortogonali che formano una base in \mathbb{R}^3 .

(6) Se $k(s) \neq 0$, esiste $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tale che $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

Il numero $\tau(s)$ si chiama *torsione* di γ in s e misura quanto la curva si discosta dall'essere planare vicino al punto $\gamma(s)$. Dimostriamo (6). Dalla definizione di $B(s)$ otteniamo che

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = \gamma''(s) \wedge \frac{\gamma''(s)}{k(s)} + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s).$$

Quindi $B(s)$ è ortogonale a $T(s)$. D'altra parte, siccome $|B(s)|^2 = 1$, derivando si ottiene che $B(s)$ e $B'(s)$ sono ortogonali. Siccome la terna $\{T(s), N(s), B(s)\}$ è una base, $B'(s)$ deve essere diretto come $N(s)$, cioè vale (6).

9. CURVE CONSECUTIVE E UNIONE DI CURVE

Definizione 9.1. Due curve $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dicono consecutive se $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. In tal caso è possibile costruire la curva unione o giustapposizione di γ_1 e γ_2 (nell'ordine), denotata $\gamma_1 \cup \gamma_2$ e definita così:

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{per } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & \text{per } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Si noti che $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è una funzione continua perché γ_1 e γ_2 sono consecutive. Si osservi anche che nella scrittura $\gamma_1 \cup \gamma_2$ il simbolo di unione non è da intendere in senso insiemistico.

(*) Questa sezione non viene presentata a lezione per motivi di tempo.

Definizione 9.2. Date k curve $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, \dots, k$) tali che γ_i e γ_{i+1} sono consecutive per ogni $i = 1, \dots, k-1$, si chiama curva unione o giustapposizione o concatenazione di $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ quella curva così definita

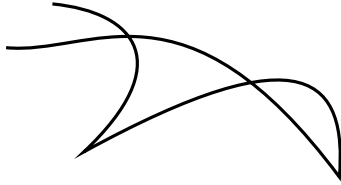
$$\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k := (\dots((\gamma_1 \cup \gamma_2) \cup \gamma_3) \dots) \gamma_k.$$

È facile convincersi che

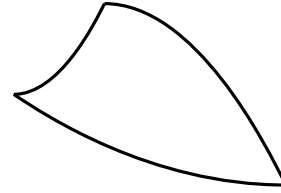
$$L(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k) = \sum_{i=1}^k L(\gamma_i).$$

10. CURVE REGOLARI A TRATTI E INTEGRALI DI PRIMA SPECIE LUNGO CURVE REGOLARI A TRATTI

Definizione 10.1. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice regolare a tratti se è unione di un numero finito di curve regolari consecutive, cioè se esiste una partizione $\{t_0, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è una curva regolare per ogni $i = 1, \dots, k$. In tal caso $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, dove $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$.



curva regolare a tratti né chiusa né semplice



curva regolare a tratti chiusa e semplice

In generale una curva regolare a tratti γ non è regolare. Possiamo comunque definire l'integrale curvilineo di prima specie lungo curve regolare a tratti nel modo seguente.

Definizione 10.2. Data $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ curva regolare a tratti, dove ogni γ_i è regolare, e data una funzione reale f continua sul sostegno di γ , poniamo

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f ds.$$

Anche per le curve regolari a tratti e semplici, l'integrale di prima specie non dipende dalla parametrizzazione:

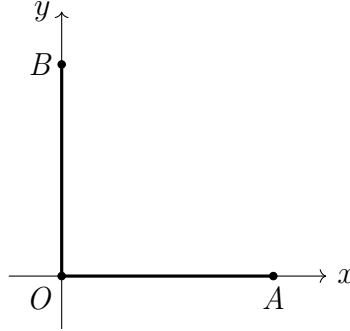
Teorema 10.3. Siano γ e $\tilde{\gamma}$ due curve semplici, regolari a tratti, con lo stesso sostegno Γ . Sia $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds.$$

Possiamo allora scrivere $\int_{\Gamma} f ds$ al posto di $\int_{\gamma} f ds$ e tale scrittura è ben definita perché non dipende dalla scelta della parametrizzazione.

11. ESEMPI ED ESERCIZI

Esempio 11.1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [0, 1]\}$. Vogliamo rappresentare E come sostegno di una curva regolare a tratti.



L'insieme E si può vedere è l'unione dei segmenti che congiungono $A = (1, 0)$ con $O = (0, 0)$ e $B = (0, 1)$ con O . Parametizziamo tali segmenti nella forma seguente:

\overline{OA} = sostegno di γ_1 , dove $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$

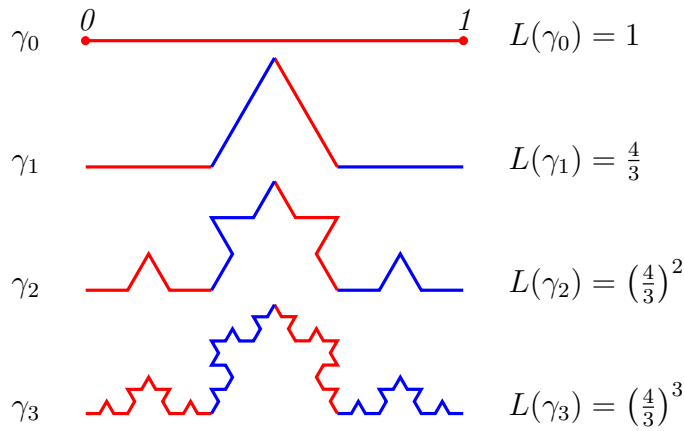
\overline{OB} = sostegno di γ_2 , dove $\gamma_2(t) = (0, t)$ con $t \in [0, 1]$.

Allora E è il sostegno di $(-\gamma_1) \cup \gamma_2$ o anche il sostegno di $(-\gamma_2) \cup \gamma_1$, dove $-\gamma_i$ è la curva opposta di γ_i (vedi definizione 4.4). Invece non avremmo potuto scrivere $\gamma_1 \cup \gamma_2$ né $\gamma_2 \cup \gamma_1$, perché γ_1 e γ_2 non sono curve consecutive, in nessun ordine le si consideri.

Esempio 11.2. La curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$ è di classe C^1 ma non è regolare, perché $\gamma'(0) = (0, 0)$. Per lo stesso motivo non è neppure regolare a tratti. Tuttavia il suo sostegno è anche il sostegno della curva regolare a tratti, ma non regolare, definita da

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (t^{\frac{3}{2}}, t) & \text{per } t \in [0, 1] \\ (-|t|^{\frac{3}{2}}, |t|) & \text{per } t \in [-1, 0) \end{cases}$$

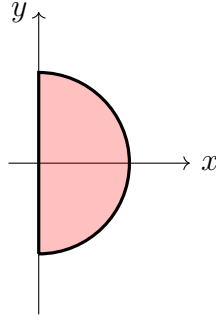
Esempio 11.3 (la curva di Koch). La curva di Koch si ottiene come limite di una successione di curve regolari a tratti definite iterativamente come in figura:



La curva γ_1 si ottiene rimuovendo il terzo medio del segmento unitario e congiungendo i due segmenti residui con i lati obliqui di un triangolo equilatero che ha per base il segmento rimosso. L'algoritmo iterativo con cui si costruisce la curva γ_{k+1} a partire dalla curva γ_k consiste

nel rimpicciolire γ_k di un fattore $1/3$ e replicarla 4 volte sul modulo base definito da γ_1 . Perciò $L(\gamma_{k+1}) = \frac{4}{3} L(\gamma_k)$, da cui $L(\gamma_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k$ per ogni $k = 1, 2, \dots$. Si dimostra che esiste una curva limite, detta curva di Koch. Tale curva non contiene alcun segmento, non è regolare a tratti e non è rettificabile.

Esercizio 11.1. Sia Γ la frontiera dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$. Verificare che Γ è il sostegno di una curva regolare a tratti, quindi calcolare $\int_{\Gamma} f ds$ dove $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Consideriamo le curve $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ con $t \in [-1, 1]$. Osserviamo che Γ è il sostegno di $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ e anche di $\gamma_2 \cup (-\gamma_1)$. Quindi, sfruttando anche il fatto che l'integrale di un campo scalare non cambia se cambiamo verso di percorrenza ad una curva, abbiamo che

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{-\gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

Calcoliamo

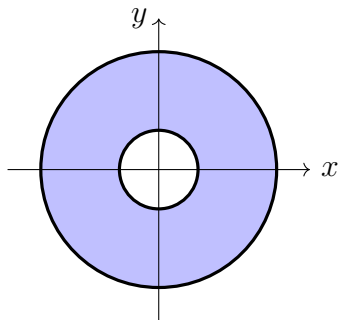
$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma_1(t)) |\gamma_1'(t)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi$$

e

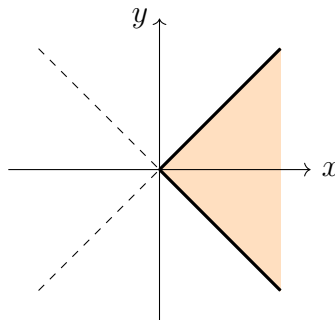
$$\int_{\gamma_2} f ds = \int_{-1}^1 f(\gamma_2(t)) |\gamma_2'(t)| dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Quindi $\int_{\Gamma} f ds = \pi + \frac{2}{3}$.

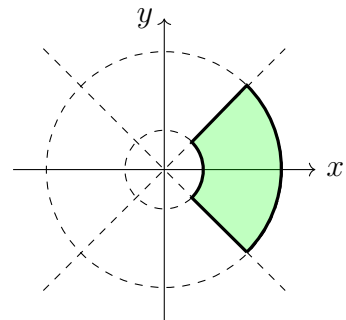
Esercizio 11.2. Sia Γ la frontiera dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, |y| \leq x\}$. Verificare che Γ è il sostegno di una curva regolare a tratti, quindi calcolare $\int_{\Gamma} f ds$ dove $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



$$\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$



$$\{(x, y) : |y| \leq x\}$$



l'insieme E

Dal disegno riconosciamo che Γ è l'unione di quattro curve regolari. Poniamo:

$$\Gamma_1 = \text{sostegno di } \gamma_1(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t)) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Gamma_2 = \text{sostegno di } \gamma_2(t) = (t, t) \text{ con } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Gamma_3 = \text{sostegno di } \gamma_3(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Gamma_4 = \text{sostegno di } \gamma_4(t) = (t, -t) \text{ con } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right].$$

Si ha che Γ è il sostegno di $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3) \cup \gamma_4$. Quindi, ragionando come nell'esercizio precedente,

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{-\gamma_2} f \, ds + \int_{-\gamma_3} f \, ds + \int_{\gamma_4} f \, ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f \, ds.$$

Possiamo calcolare

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\gamma_1(t)) |\gamma_1'(t)| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3 e^3 \, dt = \frac{3\pi e^3}{2}$$

e

$$\int_{\gamma_3} f \, ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\gamma_3(t)) |\gamma_3'(t)| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e \, dt = \frac{\pi e}{2}.$$

Osserviamo che, siccome f è radialmente simmetrica (dipende solo da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), gli integrali $\int_{\gamma_2} f \, ds$ e $\int_{\gamma_4} f \, ds$ coincidono. In particolare

$$\int_{\gamma_2} f \, ds = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} f(\gamma_2(t)) |\gamma_2'(t)| \, dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}t^2} \sqrt{2} \, dt = e^{\sqrt{2}t} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = e^3 - e.$$

In conclusione $\int_{\Gamma} f \, ds = \frac{3\pi e^3}{2} + \frac{\pi e}{2} + 2(e^3 - e)$.

12. INTEGRALI DI LINEA DI CAMPI VETTORIALI

Definizione 12.1. Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 , con sostegno Γ , e dato un campo vettoriale $\vec{F}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$, cioè una funzione continua su Γ a valori in \mathbb{R}^N , si dice integrale di linea di \vec{F} lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Se γ è una curva chiusa, l'integrale di linea di \vec{F} lungo γ si chiama anche circuitazione di \vec{F} lungo γ e si denota $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Osservazione 12.2. In generale se \vec{a} e \vec{b} sono due vettori di \mathbb{R}^N denotiamo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ il prodotto scalare tra \vec{a} e \vec{b} , dato da $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^N a_i b_i$ dove a_i e b_i è la i -esima componente di \vec{a} e \vec{b} , rispettivamente, con $i = 1, \dots, N$. Quindi, dato un campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, \dots, F_N)$, l'integrale di linea di \vec{F} lungo $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ si calcola così:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, dt.$$

Osserviamo che tutti gli N integrali di Riemann a secondo membro sono ben definiti perché assumendo γ di classe C^1 e \vec{F} continua, le funzioni $t \mapsto F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t)$ sono continue su $[a, b]$. Notiamo

anche la differenza tra le definizioni di integrale di linea di un campo vettoriale (detto anche integrale di linea di seconda specie) rispetto a quella di integrale di un campo scalare f (integrale di linea di prima specie), in cui si integra $f(\gamma(t))|\gamma'(t)|$.

La definizione (12.1) si estende in modo naturale a curve di classe C^1 a tratti. Se γ è una curva di classe C^1 a tratti in \mathbb{R}^N , cioè esistono k curve $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ di classe C^1 , a due a due consecutive e tali che $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, l'integrale di linea di un campo vettoriale \vec{F} lungo γ si definisce ponendo

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Osservazione 12.3 (Significato fisico di integrale di linea di un campo vettoriale). *L'integrale di linea di un campo vettoriale (o campo di forze) \vec{F} lungo una curva γ misura il lavoro compiuto per spostare un punto materiale soggetto al campo di forze \vec{F} lungo il cammino descritto da γ .*

Teorema 12.4 (proprietà fondamentale dell'integrale di linea di un campo vettoriale). *Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ due curve regolari che differiscono per un cambio di parametrizzazione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$, cioè $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ e sia \vec{F} un campo vettoriale sul sostegno (comune) delle due curve. Allora:*

- (i) se $\varphi' > 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ allora $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s};$
- (ii) se $\varphi' < 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ allora $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$

In particolare, se $-\gamma$ è la curva opposta di γ , allora $\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$

Questo teorema afferma che se due curve hanno lo stesso sostegno e lo stesso verso di percorrenza (caso $\varphi' > 0$), allora l'integrale di linea di un campo vettoriale non cambia. Se invece hanno lo stesso sostegno ma sono percorse in senso opposto, allora l'integrale di linea di un campo vettoriale ha lo stesso valore assoluto ma segno opposto. Dunque l'integrale di linea di un campo vettoriale non dipende dalla parametrizzazione solo quando si mantiene il verso di percorrenza.

Osservazione 12.5. *A questo proposito notiamo che l'integrale di linea di un campo vettoriale si può interpretare come l'integrale di prima specie della componente tangenziale del campo vettoriale lungo la curva considerata. Infatti, se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare e chiamiamo $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ il versore tangente nel punto $\gamma(t)$, abbiamo che*

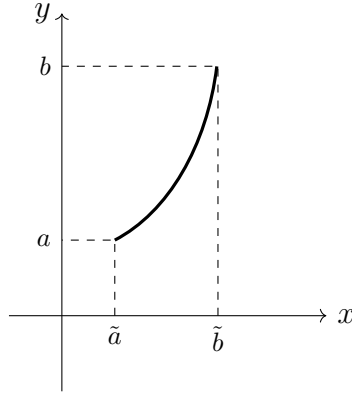
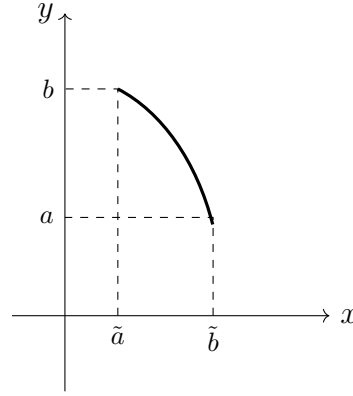
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b [\vec{F}(\gamma(t)) \cdot T(t)] |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} f ds$$

dove $f = \vec{F} \cdot \vec{T}$. Il campo (scalare) f è la componente tangenziale di \vec{F} lungo γ e cambia segno se cambiamo verso di percorrenza lungo la curva.

Dimostrazione del teorema 12.4. Usando la definizione 12.1, la regola di derivazione di funzioni composte e la formula sul cambiamento di variabile negli integrali, abbiamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \vec{F}(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot \tilde{\gamma}'(\tau) d\tau = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} [\vec{F}(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot \gamma'(\varphi(\tau))] \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Ora distinguiamo due casi, a seconda del segno di φ' (che non si annulla mai, essendo un cambio di parametrizzazione).

caso (i): $\varphi' > 0$ caso (ii): $\varphi' < 0$

(i) Se $\varphi' > 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, allora $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$ e quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

(i) Se $\varphi' < 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, allora $\varphi(\tilde{a}) = b$, $\varphi(\tilde{b}) = a$ e quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_b^a \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

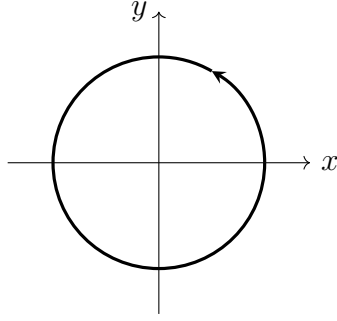
Infine osserviamo che il cambio di parametrizzazione che fa passare da una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ alla curva opposta è la funzione $\varphi(\tau) = a + b - \tau$ per ogni $\tau \in [a, b]$. Siamo quindi nel secondo caso, essendo $\varphi' = -1$. \square

13. SOSTEGNI ORIENTATI

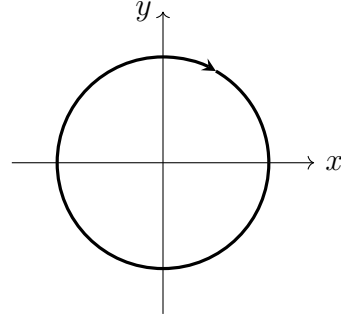
Una curva semplice e regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ induce un verso di percorrenza sul proprio sostegno Γ . Se consideriamo un'altra parametrizzazione $\tilde{\gamma}$ di Γ che differisce da γ per un cambio di parametrizzazione, sono possibili solo due casi: o il cambio di parametrizzazione è una funzione crescente, e in tal caso $\tilde{\gamma}$ induce su Γ lo stesso verso di percorrenza di γ . Oppure il cambio di parametrizzazione è una funzione decrescente, e in tal caso $\tilde{\gamma}$ induce su Γ il verso di percorrenza opposto a quello di γ .

Definizione 13.1. *Il sostegno Γ di una curva semplice e regolare in \mathbb{R}^N si dice orientato se si fissa su Γ un verso di percorrenza, definito da una certa parametrizzazione di Γ .*

Esempio 13.2 (circonferenze orientate positivamente o negativamente). *La circonferenza unitaria antioraria (o orientata positivamente) è il sostegno della curva planare $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, orientato con il verso di percorrenza di γ . La circonferenza unitaria oraria (o orientata negativamente) è il sostegno della curva opposta $-\gamma(t) = \gamma(2\pi - t) = (\cos(t), -\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, orientato da $-\gamma$.*



circonferenza orientata in senso antiorario



circonferenza orientata in senso orario

Definizione 13.3. Se Γ è un sostegno orientato in \mathbb{R}^N e \vec{F} è un campo vettoriale su Γ , poniamo

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove γ è una curva regolare e semplice che parametrizza Γ secondo il verso di percorrenza assegnato su Γ .

Osservazione 13.4. Il teorema 12.4 garantisce che la definizione è ben posta, cioè non dipende dalla scelta della parametrizzazione, perché l'integrale di linea di seconda specie non cambia rispetto a cambi di parametrizzazione che preservano l'orientazione.

14. CAMPI CONSERVATIVI E POTENZIALI

Ricordiamo le definizioni di aperto, chiuso, connesso e connesso per archi in \mathbb{R}^N . Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e un numero $r > 0$, indichiamo con $B_r(x_0)$ la palla euclidea (N -dimensionale) centrata in x_0 e di raggio r , cioè

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}$$

dove $|x - x_0|$ è la distanza euclidea tra i punti x e x_0 .

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.
- Un insieme $C \subset \mathbb{R}^N$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathbb{R}^N \setminus C$ è aperto.
- La *chiusura* di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è il più piccolo chiuso che contiene E e si denota \overline{E} .
- Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *connesso* se **non** si può esprimere nella forma $E = E_1 \cup E_2$ dove E_1 ed E_2 sono insiemi non vuoti e disgiunti tali che $E_1 = E \cap A$ ed $E_2 = E \cap C$ con A aperto e C chiuso.
- Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e $\gamma(t) \in E$ per ogni $t \in [a, b]$.

Osservazione 14.1. Valgono i seguenti fatti:

1. un connesso per archi è connesso;
2. un aperto è connesso se e solo se è connesso per archi;
3. una funzione continua manda connessi in connessi.

Un esempio di insieme connesso ma non connesso per archi è l'insieme definito come unione del grafico della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ con il segmento sull'asse delle ordinate che unisce i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

Esempi 14.2. Le palle $B_r(x_0)$ sono insiemi aperti connessi e la loro chiusura è data da $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq r\}$. Il semipiano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ è un aperto connesso di \mathbb{R}^2 , il semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ è un chiuso connesso di \mathbb{R}^2 . Più precisamente è la chiusura di S . L'insieme $E = S \cup \{(0, 0)\}$ è connesso e connesso per archi ma non è né chiuso né aperto e $\overline{S} = \overline{E}$. Gli insiemi della forma $\{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, dove x_0 è un punto fissato e r_1, r_2 sono due numeri fissati tali che $0 \leq r_1 < r_2$, sono aperti connessi.

Osservazione 14.3. L'unione di aperti è ancora un aperto, ma l'unione di aperti connessi non è detto sia connesso. Ad esempio, l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ è aperto perché unione dei semipiani $S_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ed $S_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ ma non è connesso perché se consideriamo un punto in S_+ e un altro punto in S_- non esiste nessuna curva che congiunga tali punti e il cui sostegno sia tutto contenuto in A .

L'intersezione di una famiglia finita di aperti è ancora un aperto, ma in generale non è detto che l'intersezione di aperti connessi sia ancora connesso (fornire un esempio!).

Definizione 14.4. Dato un aperto (non vuoto) $A \subset \mathbb{R}^N$, un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice conservativo in A se esiste un campo scalare $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\nabla U = \vec{F}$ in A , cioè

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

In tal caso il campo U si chiama potenziale di \vec{F} in A .

Con la scrittura ∇U intendiamo il gradiente di U cioè il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali di U :

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_N}(x) \right).$$

Osservazione 14.5. L'espressione "campo conservativo" per quei campi vettoriali che ammettono un potenziale è dovuta al fatto che per un sistema fisico sottoposto ad un campo di forze conservativo si conserva l'energia totale. Lo vediamo nel caso più semplice in cui si descrive la dinamica di una particella materiale. Il moto della particella, di massa m , è descritto da una curva $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ (con $t \in I$ intervallo di \mathbb{R}) che deve soddisfare la legge di Newton

$$mx''(t) = \vec{F}(x(t)) \quad \forall t \in I.$$

Chiamiamo energia totale della particella al tempo t la grandezza (scalare)

$$E(t) = K(t) + V(t)$$

dove

$$K(t) = \frac{m}{2}|x'(t)|^2 = \text{energia cinetica}, \quad V(t) = -U(x(t)) = \text{energia potenziale}$$

essendo U un potenziale del campo \vec{F} , supposto conservativo. Quindi $\nabla U = \vec{F}$. L'energia totale si conserva, nel senso che $E(t) = E(t_0)$ per ogni $t_0, t \in I$. In altre parole,

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Infatti, tenuto conto delle espressioni di $K(t)$ e $V(t)$, si ha che

$$\frac{d}{dt}E(t) = m x'(t) \cdot x''(t) - \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = x'(t) \cdot [mx''(t) - \vec{F}(x(t))] = 0$$

per via della legge di Newton.

Esempio importante 1. *Il campo elettrico generato da una carica puntiforme q collocata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è un campo di forze della forma*

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ed ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto. Il dominio di tale campo è l'insieme $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ che è un aperto di \mathbb{R}^3 . Il campo \vec{F} è conservativo in A con potenziale

$$U(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Infatti U è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}.$$

Analogamente $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}$ e $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$. Dunque $\nabla U = \vec{F}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Le stesse considerazioni si possono ripetere per il **campo gravitazionale generato da un punto materiale** di massa m . In tal caso, se introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'origine coincide con la posizione della particella, il campo gravitazionale ha la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = -mG \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

dove G è la costante gravitazionale universale. A parte la costante moltiplicativa, tale campo ha la stessa forma di quello elettrico generato da una carica puntiforme, è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ con potenziale

$$U(x, y, z) = \frac{mG}{r}.$$

Dal prossimo teorema si capisce l'importanza dei campi conservativi: per tali campi il potenziale rappresenta una sorta di primitiva scalare e si può formulare una versione vettoriale del teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 14.6 (Integrali di linea di campi conservativi). *Dato un aperto A in \mathbb{R}^N e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, se \vec{F} è conservativo in A con potenziale $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ allora per ogni curva regolare a tratti $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ con sostegno in A , vale che*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

In particolare, $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa, regolare a tratti, con sostegno in A .

Dunque, per il teorema precedente, se \vec{F} è un campo conservativo in un aperto A di \mathbb{R}^N , l'integrale di linea di \vec{F} lungo una curva contenuta in A dipende solo dagli estremi della curva. Pertanto possiamo calcolarlo sostituendo la curva considerata con un'altra, rispetto alla quale il calcolo dell'integrale risulti più facile, purché abbia gli stessi estremi.

Dimostrazione. Discutiamo innanzitutto il caso $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare. In tal caso

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [U(\gamma(t))] dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

avendo applicato la regola di derivazione di funzioni composte, in base alla quale

$$\frac{d}{dt} [U(\gamma(t))] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

e il teorema fondamentale del calcolo. Esaminiamo ora il caso in cui γ è una curva regolare a tratti, cioè esiste una partizione $\{t_0, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ tale per cui, posto $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ con $i = 1, \dots, k$, si ha che $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ e ogni γ_i è regolare. Allora, applicando la prima parte ad ogni tratto regolare, abbiamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k [U(\gamma(t_i)) - U(\gamma(t_{i-1}))] = -U(\gamma(t_0)) + U(\gamma(t_k)) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)). \quad \square$$

Corollario 14.7 (Unicità del potenziale a meno di costanti additive). *Dato un aperto A in \mathbb{R}^N e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ conservativo in A , se U_1 e U_2 sono potenziali di \vec{F} in A e se A è connesso, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $U_1(x) = U_2(x) + c$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $x_0 \in A$. Siccome A è aperto connesso e quindi anche connesso per archi, per ogni $x \in A$ esiste una curva regolare γ che congiunge x_0 con x . Allora, per il teorema 14.6,

$$U_1(x) - U_1(x_0) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_2(x) - U_2(x_0).$$

Quindi, posto $c = U_1(x_0) - U_2(x_0)$, otteniamo che $U_1(x) = U_2(x) + c$ per ogni $x \in A$. \square

15. CAMPI RADIALI

Alla luce del teorema 14.6, è naturale chiedersi quando un campo vettoriale è conservativo. In dimensione $N = 1$ tutti i campi sono conservativi. I connessi di \mathbb{R} sono tutti e soli gli intervalli e le funzioni continue $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo aperto di \mathbb{R}) ammettono potenziale dato da $U(x) = \int_{x_0}^x F(s) ds$, essendo $x_0 \in I$ fissato.

La questione diventa più interessante in dimensione $N > 1$. Abbiamo già visto, come esempi fisicamente significativi, che il campo elettrico generato da una carica puntiforme e il campo gravitazionale generato da una particella materiale sono campi conservativi. Si tratta di campi radiali, cioè diretti secondo il vettore uscente dalla sorgente del campo. Più in generale, tutti i campi radiali sono conservativi.

Definizione 15.1. *Un anello aperto in \mathbb{R}^N è un insieme della forma $A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \in I\}$ dove I è un intervallo aperto in $(0, \infty)$. Un campo vettoriale radiale è una funzione $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ della forma*

$$\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in A$$

dove A è un anello corrispondente a un intervallo $I \subset (0, \infty)$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Come già osservato, ogni anello è un aperto connesso contenuto in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Quindi l'espressione di $\vec{F}(x)$ è ben definita per ogni $x \in A$. Inoltre risulta $|\vec{F}(x)| = |f(|x|)|$ per ogni $x \in A$ e, in particolare, $|\vec{F}(x)|$ è costante sulle superfici sferiche $\partial B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R\}$.

Teorema 15.2. *Ogni campo radiale è conservativo sul proprio dominio. Più precisamente, dato un anello aperto A in \mathbb{R}^N e un campo vettoriale radiale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ della forma $\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$ ($x \in A$), un potenziale di \vec{F} è $U(x) = g(|x|)$ dove g è una primitiva di f .*

Dimostrazione. Per ogni $x \in A$ calcoliamo

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \left[g \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \right) \right] = g'(|x|) \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}} = f(|x|) \frac{x_i}{|x|} = F_i(x)$$

cioè $\nabla U = \vec{F}$ in A . Inoltre U è di classe C^1 perché f è continua. \square

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme e il campo gravitazionale generato da una particella materiale sono campi radiali sull'anello $A = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ della forma $\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$ con $f(r) = \frac{C}{r^2}$ (C costante).

16. ESEMPI NOTEVOLI E CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO

Esempio 16.1. Consideriamo il campo $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ così definito:

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Il dominio di tale campo è il piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che è un aperto connesso di \mathbb{R}^2 . L'integrale di linea di \vec{F} lungo un arco di circonferenza centrato nell'origine misura l'ampiezza (algebrica) dell'arco, in radianti. Infatti, un arco di circonferenza (orientato positivamente) con centro in $(0,0)$ è una curva della forma

$$\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \quad \text{con } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

e

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(-\frac{\sin \theta}{R}, \frac{\cos \theta}{R} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Osserviamo in particolare che tale integrale non dipende dal raggio R . Inoltre, se consideriamo la circonferenza antioraria, ottenuta prendendo $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 2\pi$, troviamo che la circuitazione di \vec{F} lungo tale curva chiusa è non nulla. Allora, per il teorema 14.6, il campo \vec{F} non può essere conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

L'esempio appena descritto è importante perché legato al seguente, di interesse fisico.

Esempio importante 2 (campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente). Consideriamo un filo rettilineo infinitamente esteso lungo cui scorre una corrente di intensità I . Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z coincidente con il filo e con verso concorde con quello della corrente. La corrente che scorre nel filo genera un **campo magnetico** che nei punti dello spazio diversi da quelli dell'asse z assume la forma seguente:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto. Il dominio di tale campo è lo spazio tridimensionale senza l'asse z ed è un aperto connesso di \mathbb{R}^3 . Il campo \vec{F} non è conservativo in \mathbb{R}^3 perché possiamo trovare delle curve chiuse in \mathbb{R}^3 lungo cui la circuitazione di \vec{F} è non nulla. Il fatto che \vec{F} non sia conservativo segue allora dal teorema 14.6. In particolare possiamo considerare come curve chiuse le circonferenze centrate in un punto dell'asse z e giacenti su piani orizzontali. Ad esempio:

$$\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z_0) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi],$$

$z_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ fissati. Allora, con calcoli analoghi a quelli dell'esempio precedente, troviamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin \theta}{R}, \frac{\cos \theta}{R}, 0 \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta = I\mu_0.$$

Vediamo ora una condizione necessaria per la conservatività.

Teorema 16.2. Se $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo conservativo in un aperto A di \mathbb{R}^N e \vec{F} è di classe C^1 , allora

$$(7) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Siccome $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è conservativo in A , ammette un potenziale in A , cioè esiste una funzione $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$F_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Siccome ogni F_i è di classe C^1 , il potenziale U è di classe C^2 e possiamo calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right](x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Essendo U di classe C^2 , per il teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

e quindi segue la tesi. \square

Come si evince dalla dimostrazione, l'ipotesi di regolarità C^1 è essenziale.

In dimensione $N = 3$ la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce equivale a scrivere

$$(8) \quad \left[\nabla \wedge \vec{F} \right](x) = 0 \quad \forall x \in A$$

dove ∇ è l'operatore differenziale $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e \wedge denota il prodotto vettore o prodotto esterno in \mathbb{R}^3 . Il campo $\nabla \wedge \vec{F}$ si chiama **rotore di \vec{F}** e la sua espressione esplicita è

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 che verifica l'equazione (8) si dice **irrotazionale**. Quindi il teorema 16.2 in dimensione 3 si può riformulare così:

Teorema 16.3. Dato un aperto connesso A in \mathbb{R}^3 , ogni campo vettoriale conservativo in A e di classe C^1 è irrotazionale.

L'esempio 16.1 mostra che in generale la condizione (7) non è sufficiente per la conservatività. Infatti, per il campo

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

possiamo calcolare

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dunque vale (7) ma abbiamo visto che il campo non è conservativo.

Lo stesso si può dire per il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente, esempio importante di campo irrotazionale ma non conservativo sul proprio dominio.

17. CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO (LEMMA DI POINCARÉ)

Per la conservatività di un campo vettoriale di classe C^1 gioca un ruolo importante la topologia del dominio. Per spiegare la questione, iniziamo a dare alcune definizioni utili.

Definizione 17.1. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice*

- *convesso se per ogni $x, y \in E$ si ha che $[x, y] \subset E$, dove $[x, y] = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\}$;*
- *stellato se esiste $x \in E$ tale che per ogni $y \in E$ si ha che $[x, y] \subset E$. In tal caso E si dice stellato rispetto al punto x .*

Ogni insieme convesso è stellato mentre esistono insiemi stellati che non sono convessi.

Esempi 17.2. *I semispazi sono convessi. Il “piano tagliato” $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$ non è convesso (ad esempio, il segmento che congiunge $(-1, 1)$ con $(-1, -1)$ non è contenuto in E) ma è stellato (rispetto a qualsiasi punto $(x, 0)$ con $x > 0$).*

I concetti di insieme convesso e insieme stellato sono di natura geometrica. Introduciamo ora un concetto di natura topologica.

Definizione 17.3. *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ e date due curve $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ con sostegni in E , diciamo che γ si può deformare in $\tilde{\gamma}$ in E o γ è omotopa a $\tilde{\gamma}$ in E se esiste una funzione continua $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che*

$$h(0, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad h(1, t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad h(s, t) \in E \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [a, b].$$

La funzione h si chiama deformazione o omotopia. Se $\tilde{\gamma}$ è costante (un punto di E) allora γ si dice contraibile in E .

Definizione 17.4. *Un aperto A in \mathbb{R}^N si dice semplicemente connesso se è un aperto connesso e se ogni curva con sostegno in A è contraibile in A .*

Esempi 17.5. *Ogni aperto stellato è semplicemente connesso ma ci sono insiemi semplicemente connessi che non sono stellati. Ad esempio lo spazio $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$ (dove p è un fissato punto di \mathbb{R}^3) è semplicemente connesso ma non è stellato. Invece in dimensione 2, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ (dove ora p è un fissato punto di \mathbb{R}^2) è un aperto connesso ma non è semplicemente connesso: le circonferenze centrate in p non sono contraibili in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Ci si può convincere facilmente che l'insieme costituito dallo spazio euclideo 3-dimensionale privato di una retta non è semplicemente connesso: le circonferenze concatenate con la retta non sono contraibili nell'insieme considerato.*

La proprietà di semplice connessione gioca un ruolo importante rispetto alla questione della conservatività dei campi vettoriali, come espresso dal seguente teorema.

Teorema 17.6 (lemma di Poincaré - condizione sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo). *Dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^N e un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, se A è semplicemente connesso e F è di classe C^1 e verifica la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce, allora \vec{F} è conservativo in A .*

Se la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce è anche necessaria per la conservatività, l'ipotesi di semplice connessione sul dominio non è necessaria. Ad esempio, i campi radiali sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sono conservativi anche se il piano bucato non è semplicemente connesso.

Dimostrazione (solo nel caso A stellato). A meno di traslazioni, possiamo supporre che A sia stellato rispetto a 0, cioè il segmento $[0, x]$ è contenuto in A per ogni $x \in A$. Definiamo

$$U(x) = \int_{[0, x]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(tx) \cdot x \, dt$$

avendo parametrizzato $[0, x]$ mediante $\gamma(t) = tx$ con $t \in [0, 1]$. La definizione di U è ben posta per via dell'ipotesi fatta su A . Siccome \vec{F} è di classe C^1 possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [\vec{F}(tx) \cdot x] \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^N F_j(tx) x_j \right] \, dt = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [F_j(tx) x_j] \, dt \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(tx) tx_j + F_j(tx) \delta_{ij} \right] \, dt = \int_0^1 \left[\left(t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) x_j \right) + F_i(tx) \right] \, dt \end{aligned}$$

dove δ_{ij} denota la “delta di Kronecker” (cioè $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$) e nella seconda riga abbiamo usato l'ipotesi (7). Ora osserviamo che, per la regola di derivazione di funzione composta,

$$\frac{d}{dt} [t F_i(tx)] = F_i(tx) + t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) \frac{d}{dt}(tx_j) = F_i(tx) + t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) x_j.$$

Quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t F_i(tx)] \, dt = F_i(x).$$

Ciò vale per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, N$. Dunque $\nabla U = \vec{F}$ in A e U è di classe C^1 (anzi, C^2). Pertanto U è un potenziale di \vec{F} in A , cioè \vec{F} è conservativo in A . \square

Esempio importante 3. *In base al teorema 17.6, se abbiamo un campo che verifica la condizione necessaria (7) sul suo dominio naturale, possiamo sempre dire che tale campo è conservativo su un qualsiasi sottodominio semplicemente connesso. Ad esempio, il campo*

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

verifica la condizione (7) nel piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Lo possiamo restringere al semipiano $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x > 0\}$ che è un aperto convesso, e quindi semplicemente connesso, e dunque, per il teorema 17.6, è conservativo in tale dominio. Un suo potenziale nel semipiano destro è dato dalla funzione

$$U(x, y) = \arctan \left(\frac{y}{x} \right).$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Possiamo ampliare ulteriormente il dominio in cui \vec{F} è conservativo, considerando il piano tagliato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$, sul quale un potenziale per \vec{F} è dato da

$$U(x, y) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Si noti che tale funzione è di classe C^1 nel piano tagliato ma non può essere estesa ad una funzione continua sul piano buco. L'esempio qui discusso mette in evidenza il fatto che non basta dire se un campo è conservativo ma bisogna precisare il dominio.

18. ESERCIZI SUI CAMPI CONSERVATIVI E CALCOLO DEL POTENZIALE

La teoria fin qui sviluppata ci fornisce strumenti adeguati a stabilire se un dato campo vettoriale \vec{F} su un assegnato dominio A di \mathbb{R}^N è conservativo in tale dominio e, in caso affermativo, come calcolarne un potenziale. Vediamone i passi principali:

- 1) Identifichiamo il dominio A e verifichiamo che sia un aperto connesso.
- 2) Se il dominio A è un anello e il campo \vec{F} è radiale, cioè è costante sulle superfici sferiche, allora possiamo subito concludere che \vec{F} è conservativo in A . Altrimenti proseguiamo come di seguito.
- 3) Controlliamo che \vec{F} sia di classe C^1 e soddisfi le condizioni

$$(9) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } A, \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Se tali condizioni non sono soddisfatte possiamo concludere che \vec{F} è conservativo in A .

- 4) Se sono soddisfatte, ci chiediamo se A è semplicemente connesso.
 - a. In caso affermativo, possiamo dire che \vec{F} è conservativo in A .
 - b. Se A non è semplicemente connesso, possiamo calcolare la circuitazione del campo \vec{F} lungo curve chiuse non contraibili, contenute in A , che siano facilmente parametrizzabili. Se troviamo che la circuitazione è non nulla, allora il campo \vec{F} non è conservativo in A .

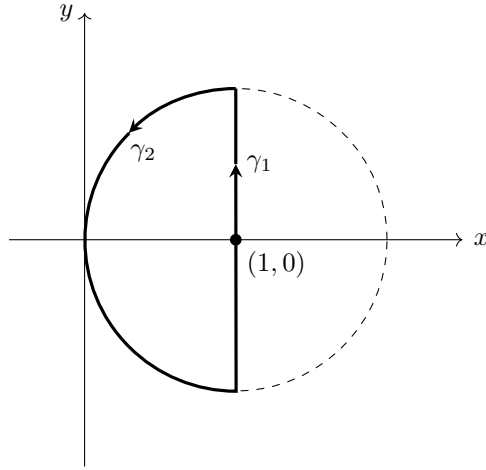
Osserviamo che se troviamo una curva chiusa nel dominio del campo vettoriale considerato lungo la quale la circuitazione del campo è non nulla, possiamo subito concludere che il campo non è conservativo anche senza verificare la validità delle relazioni (9).

Esercizio 18.1. Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo $\vec{F}(x, y) = (ay, x)$ è conservativo in \mathbb{R}^2 . Inoltre per $a = \pm 1$ calcolare la circuitazione di \vec{F} lungo il bordo dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$ percorso in senso antiorario.

Avendo osservato che il campo è di classe C^1 in \mathbb{R}^2 , verifichiamo la condizione necessaria:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow a = 1.$$

Siccome il dominio è semplicemente connesso, possiamo concludere che il campo è conservativo per il solo valore $a = 1$. Disegniamo l'insieme E ed il sostegno orientato Γ definito dal bordo di E percorso in senso antiorario.



Se $a = 1$, la circuitazione di \vec{F} lungo Γ è nulla, perché \vec{F} è conservativo. Invece per $a = -1$, scriviamo Γ come l'unione dei sostegni di

$$\gamma_1(t) = (1, t) \quad \text{con } t \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (1 + \cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \underbrace{\vec{F}(1, t)}_{\gamma_1} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\gamma_1'} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{\vec{F}(1 + \cos t, \sin t)}_{\gamma_2} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\gamma_2'} dt \\ &= \int_{-1}^1 1 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t] dt = 2 + \pi + (\sin t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 18.2. Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{ax + (1-a)y}{(x^2 + y^2)^a}, \frac{ay + (1-a)x}{(x^2 + y^2)^a} \right)$$

dove a è un parametro reale. Trovare il dominio D_a di \vec{F} e stabilire per quali valori di a il campo \vec{F} è conservativo sul proprio dominio.

Per $a \leq 0$ il dominio è $D_a = \mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso. Per $a > 0$ il dominio è $D_a = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che è un aperto connesso ma non semplicemente connesso. Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow ay[ax + (1-a)y] = ax[ay + (1-a)x] \\ &\Leftrightarrow a[axy + (1-a)y^2 - axy - (1-a)x^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow a(1-a)(y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

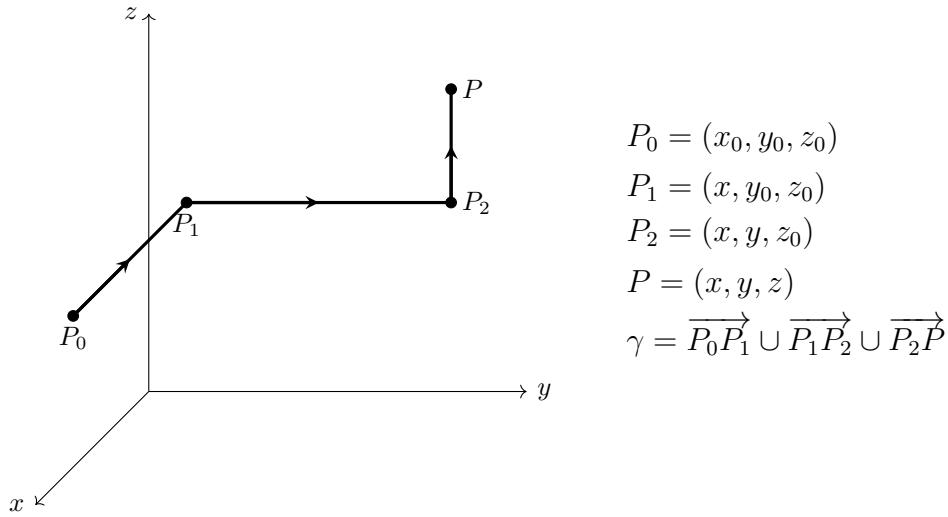
e tale equazione è soddisfatta per ogni $(x, y) \in D_a$ se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. Se $a = 0$, essendo il dominio D_a semplicemente connesso, il campo è conservativo. Se $a = 1$, essendo il

dominio un anello e il campo radiale, esso è conservativo sul proprio dominio (anche se questo non è semplicemente connesso).

Quando abbiamo un campo vettoriale \vec{F} su un dominio A di \mathbb{R}^N e sappiamo che è conservativo in A possiamo calcolare un potenziale nel modo seguente. Fissiamo un punto $P_0 \in A$ e per ogni altro punto $P \in A$ consideriamo una curva γ con punto iniziale P_0 e punto finale P , data da una poligonale di segmenti paralleli agli assi cartesiani. Quindi calcoliamo

$$U(P) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Il teorema 14.6 ci assicura che il campo scalare così ottenuto è un potenziale di \vec{F} . Il metodo qui descritto si chiama **integrazione lungo poligoni**.



Assumendo per semplicità che il dominio A sia convesso, in dimensione $N = 2$ la formula per il calcolo del potenziale diventa:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t) dt$$

e fornisce l'unico potenziale che si annulla in (x_0, y_0) . In dimensione $N = 3$ la formula va corretta così:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_3(x, y, t) dt$$

e fornisce l'unico potenziale che si annulla in (x_0, y_0, z_0) .

Un altro metodo di calcolo del potenziale è quello delle **integrazioni parziali**, in cui si risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_N} = F_N \end{cases}$$

integrando di volta in volta rispetto a x_1, \dots, x_N . Si può procedere in qualunque ordine e si sceglie solitamente quello in cui l'integrazione risulta più semplice. Vediamo meglio come si fa nel caso bidimensionale, scrivendo (x, y) al posto di (x_1, x_2) . Dapprima integriamo l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

ottenendo

$$U(x, y) = \int F_1(x, y) dx + f(y)$$

dove f è una funzione della sola variabile y , ancora da determinare. Chiamiamo

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx$$

una primitiva di F_1 rispetto a x e deriviamo U rispetto a y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + f'(y)$$

Quindi scriviamo la seconda equazione

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

che assume la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + f'(y) = F_2(x, y)$$

cioè

$$f'(y) = F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y).$$

Integriamo rispetto a y per trovare f :

$$f(y) = \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right] dy.$$

Quindi sostituiamo nell'espressione iniziale e troviamo

$$U(x, y) = \int F_1(x, y) dx + \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right] dy.$$

Possiamo controllare la correttezza del risultato calcolando le derivate parziali della funzione U così costruita e verificando che coincidono con le rispettive componenti del campo \vec{F} assegnato. Naturalmente avremmo potuto seguire un altro ordine, integrando prima rispetto ad y e poi rispetto ad x . L'espressione finale di U contiene una costante additiva arbitraria, che può essere fissata imponendo il valore del potenziale in un dato punto del dominio. Il metodo sopra descritto si estende in maniera naturale al caso tridimensionale o maggiore.

Esempio 18.1. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\vec{F}(x, y) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2 \right)$$

Tale campo risulta conservativo in \mathbb{R}^2 . Determinarne tutti i potenziali.

Applichiamo il metodo delle integrazioni parziali. Se $U(x, y)$ è un potenziale di $\vec{F}(x, y)$, deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

e quindi

$$U(x, y) = \int xy \, dx + f(y) = \frac{x^2 y}{2} + f(y)$$

per qualche funzione f ancora da determinare. Inoltre deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + f'(y) = \frac{x^2}{2} + y^2 \Leftrightarrow f'(y) = y^2 \Leftrightarrow f(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

con C costante arbitraria, e dunque

$$U(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Al variare di $C \in \mathbb{R}$ queste funzioni sono tutti i potenziali di \vec{F} .

Esempio 18.2. Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2}, \frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + y, \arctan(x^2 + y^2) \right)$$

Tale campo risulta conservativo in \mathbb{R}^3 . Determinarne tutti i potenziali. Inoltre trovare il potenziale che vale 1 nel punto $(1, 0, 1)$.

Applichiamo il metodo delle integrazioni parziali. Convienne partire con la terza componente di \vec{F} , integrando rispetto a z . Otteniamo così

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + f(x, y)$$

Ora deriviamo rispetto ad x ed eguagliamo l'espressione ottenuta con la prima componente di \vec{F} . Otteniamo così

$$\frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

da cui $f(x, y) = g(y)$ e dunque

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + g(y).$$

Infine deriviamo rispetto ad y ed eguagliamo l'espressione ottenuta con la seconda componente di \vec{F} . Otteniamo così

$$\frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + g'(y) = \frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + y$$

cioè

$$g'(y) = y$$

e quindi

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

con C costante. Sostituiamo nell'espressione di U e troviamo

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{2} + C.$$

Al variare di $C \in \mathbb{R}$ queste funzioni sono tutti i potenziali di \vec{F} . Per trovare quello che vale 1 nel punto $(1, 0, 1)$, prendiamo C tale per cui $U(1, 0, 1) = 1$ cioè

$$\arctan 1 + C = 1.$$

Deve essere $C = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ e dunque il potenziale che vale 1 in $(1, 0, 1)$ è la funzione

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}.$$

19. TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI CONSERVATIVI

Teorema 19.1. *Dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^N ed un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) \vec{F} è conservativo in A ;
- (2) $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa γ con sostegno in A ;
- (3) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con sostegno in A e con gli stessi estremi iniziale e finale.

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2) già dimostrato nel teorema 14.6.

(2) \Rightarrow (3). Se γ_1 e γ_2 sono due curve con sostegno in A e con gli stessi estremi iniziale e finale, allora $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva chiusa. Per l'ipotesi (2) e per le proprietà dell'integrale di linea di campi vettoriali otteniamo

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

cioè (3).

(3) \Rightarrow (1). Fissiamo un punto $x_0 \in A$ e per ogni punto $x \in A$ scegliamo una curva γ_x con punto iniziale x_0 e punto finale x e con sostegno contenuto in A . Tale curva esiste perché A è aperto connesso e quindi connesso per archi. Ora definiamo

$$U(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Dimostriamo che U è un potenziale di \vec{F} in A . Proviamo che, per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, N$ esiste la derivata parziale i -esima di U in x e vale $F_i(x)$. A tale scopo consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left[\int_{\gamma_{x+\delta e_i}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right]$$

dove e_i è l' i -esimo versore della base canonica e $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $|\delta|$ sufficientemente piccolo in modo che sia $x + t e_i \in A$ per ogni $t \in [-|\delta|, |\delta|]$ (ciò è garantito dal fatto che A è aperto). Per l'ipotesi (3) e per le proprietà dell'integrale di linea di campi vettoriali

$$\int_{\gamma_{x+\delta e_i}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_x \cup [x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{[x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Quindi

$$\frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_{[x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \vec{F}(x + t \delta e_i) \cdot (\delta e_i) dt = \int_0^1 F_i(x + t \delta e_i) dt$$

avendo parametrizzato il segmento $[x, x + \delta e_i]$ con la parametrizzazione $\gamma(t) = x + t\delta e_i$ con $t \in [0, 1]$. Quindi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(x + t\delta e_i) dt = F_i(x)$$

perché F_i è continua. Dunque abbiamo provato che esiste

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Siccome ogni F_i è continua in A , il campo U di classe C^1 . Pertanto U è un potenziale di \vec{F} in A , cioè vale (1). \square

20. FORME DIFFERENZIALI

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti può essere riformulata col linguaggio delle forme differenziali, in particolare nel contesto delle 1-forme. Indichiamo con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ lo spazio delle applicazioni lineari da \mathbb{R}^N in \mathbb{R} . Ricordiamo che si tratta di uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{R}^N .

Definizione 20.1. Dato un aperto connesso A in \mathbb{R}^N , una 1-forma differenziale in A è un'applicazione $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e si scrive

$$\omega(x) = F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N$$

dove $F_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ è il coefficiente i -esimo della forma ω rispetto alla base (dx_1, \dots, dx_N) dello spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Esempio 20.2. Se $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, il suo differenziale dg è una 1-forma. Più precisamente

$$dg(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_N}(x) dx_N.$$

Non tutte le 1-forme si possono rappresentare come differenziali di un campo scalare.

Definizione 20.3. Una forma differenziale ω in A si dice **esatta in** A se esiste un campo scalare $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A e tale che $\omega = dg$ in A . In tal caso il campo g si chiama potenziale di ω .

Dire che una forma ω è esatta in A equivale a dire che il campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, \dots, F_N)$ associato ad essa è conservativo in A . Allora, se i coefficienti della forma sono di classe C^1 , per il teorema 16.2, devono soddisfare le equazioni

$$(10) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Definizione 20.4. Una forma differenziale ω in A si dice **chiusa in** A se i suoi coefficienti soddisfano (10).

Dunque, data una forma differenziale ω di classe C^1 su un aperto connesso A di \mathbb{R}^N ,

- se ω è esatta in A , allora è anche chiusa in A ,
- se ω è chiusa in A ed A è semplicemente connesso allora ω è anche esatta in A (lemma di Poincaré),
- se ω è chiusa in A , allora ω è localmente esatta in A , cioè per ogni punto $x \in A$ esiste una palla aperta centrata in A in cui ω è esatta.

Esempio 20.5. *La forma differenziale*

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

si chiama **forma argomento**. Tale forma è chiusa nel piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed è esatta nel piano tagliato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$.

Definizione 20.6. *Data una forma differenziale ω in un aperto connesso A di \mathbb{R}^N e data una curva regolare a tratti γ con sostegno contenuto in A , si pone*

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove \vec{F} è il campo vettoriale associato alla forma ω .

Tenuto conto della notazione

$$\omega(x) = F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N,$$

l'integrale della forma ω lungo una curva γ si scrive

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} [F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N]$$

che però non è da intendere che si integra F_1 rispetto a x_1 , F_2 rispetto a x_2 , etc. Piuttosto, se

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

dobbiamo intendere dx_i come $\gamma'_i(t)dt$ e integrare rispetto a t tra a e b . Ad esempio, se $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$, abbiamo che

$$\int_{\gamma} x dy = \int_0^{\pi} \gamma_1(t) \gamma'_2(t) dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 20.1. *Trovare tutte le funzioni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ che rendono esatta su \mathbb{R}^2 la forma*

$$\omega = xy^2 \varphi(x) dx - y \log(\varphi(x)) dy.$$

Quindi, per tali φ , calcolare il potenziale U associato ad ω che si annulla in $(0, 0)$.

Imponiamo la condizione necessaria, ovvero che ω sia una forma chiusa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [xy^2 \varphi(x)] &= \frac{\partial}{\partial x} [-y \log(\varphi(x))] \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow 2xy \varphi(x) = -y \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \varphi'(x) = -2x \varphi^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dunque φ deve soddisfare un'equazione differenziale ordinaria, a variabili separabili, le cui soluzioni sono la funzione identicamente nulla (da escludere perché si chiede $\varphi > 0$) e $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + a}$ con a costante reale. Per avere φ definita su \mathbb{R} dobbiamo prendere $a > 0$. Quindi le funzioni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ che rendono esatta su \mathbb{R}^2 la forma ω sono esattamente

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + a}$$

con $a > 0$. Fissato $a > 0$, i potenziali $U(x, y)$ della forma

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2 + a} dx + y \log(x^2 + a) dy$$

si possono determinare con il metodo di integrazione parziale. In particolare, da

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \log(x^2 + a)$$

segue che

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a) + f(x)$$

con f da determinare. Quindi deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2 + a}$$

cioè

$$\frac{xy^2}{x^2 + a} + f'(x) = \frac{xy^2}{x^2 + a}$$

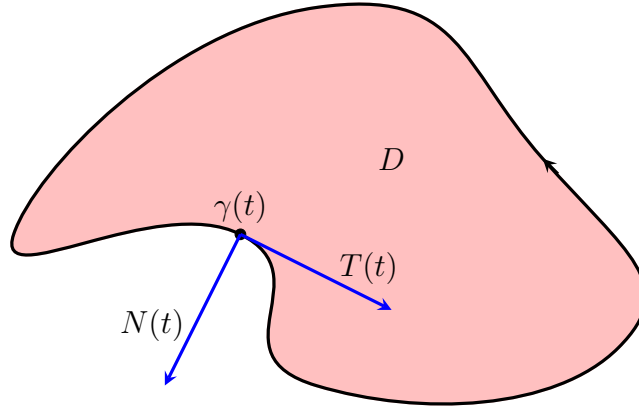
da cui f costante. Dunque i potenziali sono

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a) + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quello (unico) che si annulla in $(0, 0)$ corrisponde a prendere $C = 0$, cioè è il campo $U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a)$.

21. FORMULA DI GAUSS-GREEN

Sono dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^2 , un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 e una curva chiusa, semplice, regolare a tratti γ con sostegno contenuto in A . Per un famoso risultato della geometria delle curve planari (lemma di Jordan) esiste un insieme chiuso e limitato D tale che ∂D è il sostegno di γ .



Supponiamo che $D \subset A$ e che γ orienti ∂D in modo da percorrerlo in senso antiorario. Cioè, detti $T(t)$ il vettore tangente a γ in t e detta $N(t)$ la normale esterna a D nel punto $\gamma(t)$, si ha che

$$T(t) = \text{rotazione di } \frac{\pi}{2} \text{ di } N(t)$$

per ogni t in cui esiste il vettore tangente.

Teorema 21.1 (Formula di Gauss-Green per una curva chiusa semplice). *Sotto le ipotesi suddette, si ha che*

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

Osservazione 21.2. (1) *La formula vale per campi 2-dimensionali e per curve chiuse, semplici e planari e lega un integrale unidimensionale, quale è la circuitazione, con un integrale bidimensionale.*

- (2) *È essenziale che la curva sia orientata in senso antiorario e che il campo sia di classe C^1 in tutto il dominio racchiuso da essa.*
- (3) *Se il campo ha poli interni a tale dominio, la formula di Gauss-Green non vale. Ad esempio, per il campo*

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

vale che $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ma la circuitazione di \vec{F} lungo circonferenze centrate nell'origine è non nulla (vedi esempio 16.1).

- (4) *Se A è semplicemente connesso ed il campo $\vec{F} = (F_1, F_2)$ verifica la condizione*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \text{in } A,$$

allora \vec{F} è conservativo in A e quindi (teorema 14.6)

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

In tal caso la validità della formula di Gauss-Green è immediata. Dunque la formula di Gauss-Green è significativa nel caso di campi non conservativi e lega la circuitazione lungo una data curva chiusa con un integrale bidimensionale che misura quanto manca al campo per essere conservativo nel dominio racchiuso dalla curva.

Il teorema 21.1 è un caso speciale di un teorema più generale che vedremo più avanti. Vediamo ora un'applicazione importante della formula di Gauss-Green per le curve.

Applicazione 21.3 (calcolo di aree di regioni planari). *Data una curva planare, chiusa, semplice, regolare a tratti γ , possiamo calcolare l'area della regione D racchiusa entro il sostegno di γ con la formula di Gauss-Green, parametrizzando γ in modo che sia percorsa in senso antiorario e scegliendo un campo vettoriale \vec{F} tale per cui*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1.$$

Ad esempio, possiamo prendere $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ oppure $\vec{F}(x, y) = (-y, 0)$ oppure, più in generale, $\vec{F}(x, y) = (-\lambda y, (1 - \lambda)x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi, per la formula di Gauss-Green,

$$\text{area}(D) = \int_D 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} x \, dy$$

oppure $\text{area}(D) = -\int_{\gamma} y \, dx$ o anche $\text{area}(D) = -\int_{\gamma} [-\lambda y \, dx + (1 - \lambda)x \, dy]$, a seconda della scelta di \vec{F} . Abbiamo qui usato la notazione delle forme differenziali.

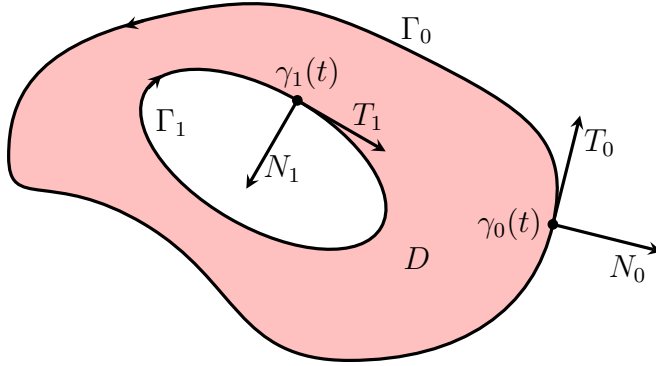
Ad esempio, si vuole calcolare l'area della regione planare racchiusa da un'ellisse di semiassi a e b . Posto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}$$

parametrizziamo $+\partial D$ mediante $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e calcoliamo

$$\text{area}(D) = \int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Definizione 21.4. Un dominio regolare in \mathbb{R}^2 è un insieme D chiuso, limitato, la cui parte interna è un aperto connesso non vuoto, e $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ dove ogni Γ_i è il sostegno di una curva chiusa, semplice e regolare a tratti. Il bordo di D è orientato positivamente e in tal caso si denota $+\partial D$ quando ciascun sostegno Γ_i è orientato in modo che il vettore tangente sia ottenuto come rotazione di $\frac{\pi}{2}$ della normale esterna a D .



$$+\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

Γ_0 orientata in senso antiorario

Γ_1 orientata in senso orario

N_0 = normale esterna a D in $\gamma_0(t)$

T_0 = vettore tangente in $\gamma_0(t)$

N_1 = normale esterna a D in $\gamma_1(t)$

T_1 = vettore tangente in $\gamma_1(t)$

Osservazione 21.5. Se la parte interna di D è un aperto semplicemente connesso allora $+\partial D$ è il sostegno di un'unica curva chiusa, semplice, regolare a tratti e percorsa in senso antiorario.

Definizione 21.6. Dato un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 con $+\partial D = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k$, e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove A è un aperto connesso contenente D , si definisce

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \dots + \int_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove ogni Γ_i è il sostegno di una curva regolare e semplice, orientata in modo tale da garantire la corretta orientazione di $+\partial D$.

La definizione di integrale di linea di un campo vettoriale lungo il bordo orientato di un dominio regolare è ben posta perché ogni termine è indipendente dalla parametrizzazione che si sceglie sul sostegno corrispondente (vedi definizione 13.3 e osservazione 13.4).

Teorema 21.7 (formula di Gauss-Green per un dominio regolare). Dati un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 e un campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, F_2): A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove A è un aperto connesso contenente D , vale che

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

la parte interna di un insieme E di \mathbb{R}^N è l'insieme dei punti interni ad E cioè $\{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subset E\}$ ed è sempre un insieme aperto. Si può anche definire come l'unione degli aperti contenuti in E o come il più grande aperto contenuto in E .

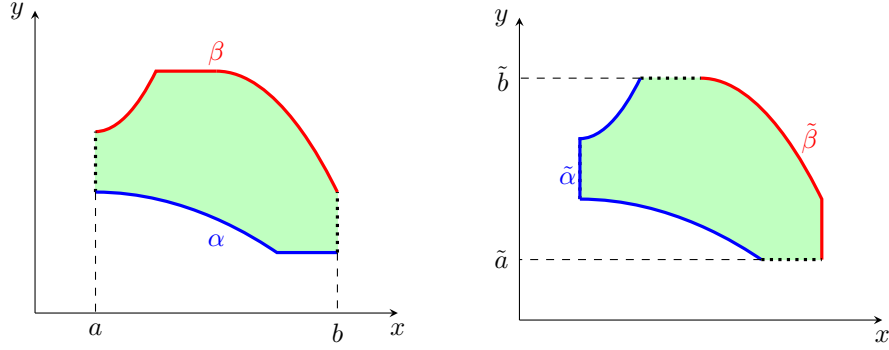
Dimostrazione. Dapprima dimostriamo la formula di Gauss-Green nel caso in cui D sia un *dominio semplice*, ovvero si possa esprimere sia nella forma

$$(11) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (si dice, in particolare, che D è y -semplice), sia nella forma

$$(12) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\tilde{a}, \tilde{b}], \tilde{\alpha}(y) \leq x \leq \tilde{\beta}(y)\}$$

con $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (cioè D è anche x -semplice).



Lo stesso dominio rappresentabile sia nella forma (11) sia nella forma (12).

Introduciamo i campi vettoriali $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$ e $\vec{F}_2 = (0, F_2)$. Quindi

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{+\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}.$$

Dimostriamo che

$$(13) \quad \int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = - \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy \quad \text{e} \quad \int_{+\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy.$$

Allora, sommando le due formule, troviamo la tesi. Per provare la prima delle due uguaglianze in (13), utilizziamo la rappresentazione di D come dominio y -semplice e calcoliamo

$$\int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b [F_1(x, \beta(x)) - F_1(x, \alpha(x))] dx.$$

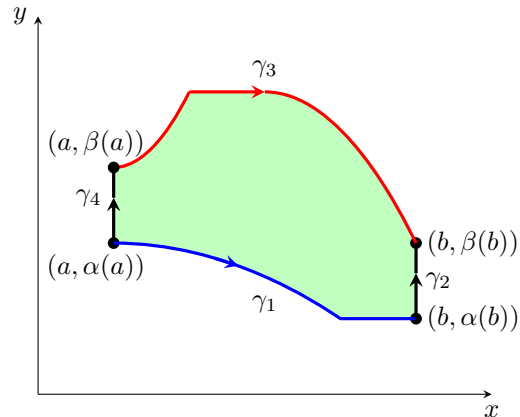
Ora calcoliamo l'integrale di linea, osservando che $+\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3) \cup (-\gamma_4)$ dove

$$\gamma_1(t) = (t, \alpha(t)) \text{ con } t \in [a, b],$$

$$\gamma_2(t) = (b, t) \text{ con } t \in [\alpha(b), \beta(b)],$$

$$\gamma_3(t) = (t, \beta(t)) \text{ con } t \in [a, b],$$

$$\gamma_4(t) = (a, t) \text{ con } t \in [\alpha(a), \beta(a)].$$



Quindi

$$\int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} - \int_{\gamma_3} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} - \int_{\gamma_4} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds}.$$

Ricordando che $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$, se scriviamo $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ con $t \in [a_i, b_i]$, abbiamo che

$$\int_{\gamma_i} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{a_i}^{b_i} F_1(x_i(t), y_i(t)) x'_i(t) dt.$$

In particolare

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \alpha(t)) dt, \quad \int_{\gamma_3} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \beta(t)) dt, \quad \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_4} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = 0.$$

Dunque

$$\int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \alpha(t)) dt - \int_a^b F_1(t, \beta(t)) dt = - \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy.$$

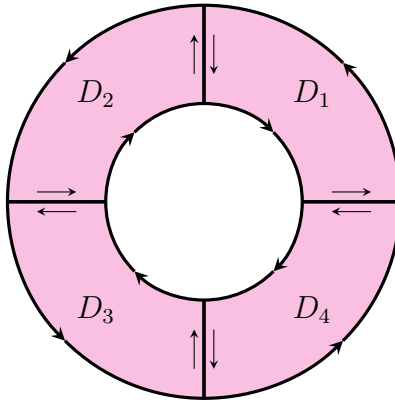
Per provare la seconda uguaglianza in (13) si ragiona in modo analogo, utilizzando la rappresentazione di D come dominio x -semplice. Abbiamo così provato la formula di Gauss-Green per domini semplici. Per ottenere il risultato in totale generalità, si sfrutta il fatto che ogni dominio regolare si può decomporre nell'unione di una famiglia finita di domini semplici, che si intersecano l'un l'altro al più lungo tratti dei bordi. Se $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, con D_i dominio semplice, possiamo applicare quanto già provato a ciascun D_i e otteniamo

$$\int_{D_i} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_{+\partial D_i} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Quindi sommiamo su $i = 1, \dots, k$. Da una parte troviamo che

$$\sum_{i=1}^k \int_{D_i} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

Nel sommare gli integrali di linea dobbiamo tener conto che se un tratto appartiene al bordo di due sottodomini distinti, è orientato in modo opposto rispetto ai due domini e quindi nella sommatoria i due integrali si compensano l'un l'altro.



Restano solo gli integrali di linea su tratti del bordo di D , orientati nel senso corretto. Pertanto

$$\sum_{i=1}^k \int_{+\partial D_i} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

e così la formula di Gauss-Green è provata. \square

22. ESERCIZI SULLA FORMULA DI GAUSS-GREEN

Esercizio 22.1. Data una qualunque curva chiusa semplice γ in \mathbb{R}^2 che gira intorno all'origine in senso antiorario, calcolare la circuitazione di

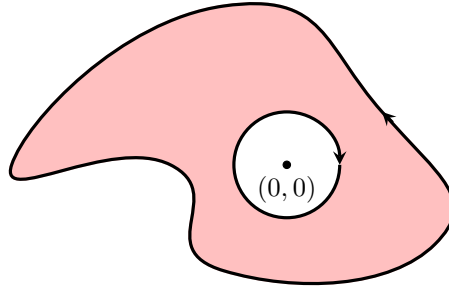
$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

lungo γ .

Per ipotesi, la curva γ parametrizza positivamente il bordo di un dominio regolare D che contiene l'origine come punto interno. Non possiamo applicare la formula di Gauss-Green rispetto a tale dominio, perché \vec{F} non è di classe C^1 in nessun aperto contenente D . Siccome \vec{F} è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (ha un polo nell'origine) consideriamo un disco chiuso D_R centrato nell'origine di raggio $R > 0$ sufficientemente piccolo in modo che D_R stia all'interno di D . Possiamo applicare la formula di Gauss-Green al campo \vec{F} rispetto al dominio

$$\tilde{D} = \{x \in D : |x| \geq R\}$$

perché è un dominio regolare contenuto nell'aperto connesso $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ su cui \vec{F} è di classe C^1 . Osserviamo che $+\partial D = \Gamma \cup \Gamma_R$ dove Γ è il sostegno di γ e $\Gamma_R = \partial D_R$ percorso in senso orario.



La curva $\gamma_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ parametrizza la circonferenza di raggio R percorrendola in senso antiorario. Quindi una parametrizzazione di Γ_R è $-\gamma_R$. Ricordiamo che il campo \vec{F} verifica $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Quindi per la formula di Gauss-Green

$$0 = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Quindi, utilizzando calcoli già effettuati nell'esempio 16.1, troviamo

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Esercizio 22.2. Calcolare $\int_{\gamma} x dy$ dove $\gamma(t) = (|t| - \sin t, |t| + \sin t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$. Inoltre, sapendo che γ parametrizza una curva chiusa, semplice e regolare a tratti, detta D la regione racchiusa entro il sostegno di γ , dedurre se γ orienta positivamente ∂D e calcolare l'area di D .

Posto $x(t) = |t| - \sin t$ e $y(t) = |t| + \sin t$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x dy &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t) dt = \int_{-\pi}^0 (-t - \sin t)(-1 + \cos t) dt + \int_0^{\pi} (t - \sin t)(1 + \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 (t - t \cos t + \sin t - \sin t \cos t) dt + \int_0^{\pi} (t + t \cos t - \sin t - \sin t \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (t - \sin t \cos t) dt + 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt - 2 \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= 0 + 2(t \sin t + \cos t) \Big|_0^{\pi} + 2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -8. \end{aligned}$$

Si è usato il fatto che la funzione $t - \sin t \cos t$ è dispari e quindi il corrispondente integrale su $[-\pi, \pi]$ è nullo. Inoltre si è calcolato l'integrale di $t \cos t$ con il metodo di integrazione per parti. Sappiamo inoltre che

$$\text{area}(D) = \int_{+\partial D} x dy.$$

Avendo trovato che $\int_{\gamma} x dy = -8$, possiamo dedurre che ∂D è orientato positivamente da $-\gamma$ e che

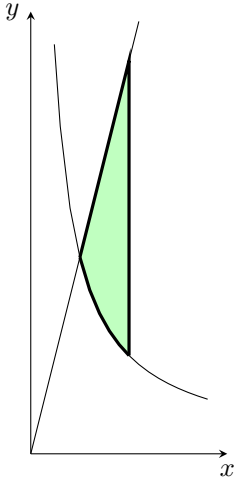
$$\text{area}(D) = \int_{-\gamma} x dy = - \int_{\gamma} x dy = 8.$$

Esercizio 22.3. Calcolare l'area di $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$.

Parametizziamo $+\partial D$ mediante la curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ (astroide, vedi esercizio 3.4). Si ha che

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \int_{\gamma} \left(\frac{x}{2} dy - \frac{y}{2} dx \right) = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Esercizio 22.4. Verificare che l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 4x\}$ è un dominio regolare e calcolare $\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove $\vec{F}(x, y) = (x - y + y \log y, 1 - x + x \log x)$.



L'insieme D è la regione compresa tra l'iperbole di equazione $y = 1/x$, la retta di equazione $y = 4x$ e la retta verticale di equazione $x = 1$.

D è chiuso e limitato, con parte interna non vuota e $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove:

$$\Gamma_1 = \{(t, 4t): \frac{1}{2} \leq t \leq 1\},$$

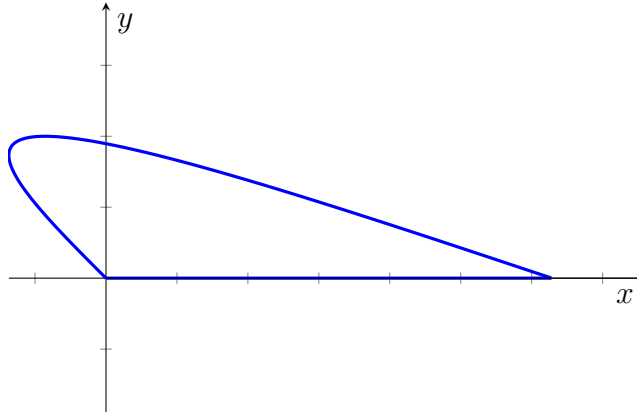
$$\Gamma_2 = \{(t, 1/t): \frac{1}{2} \leq t \leq 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(1, t): 1 \leq t \leq 4\}.$$

Applichiamo la formula di Gauss-Green e troviamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_D [(-1 + \log x + 1) - (-1 + \log y + 1)] dx dy \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \log x dy \right] dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \log y dy \right] dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(4x - \frac{1}{x} \right) \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \frac{d}{dy} (y \log y - y) dy \right] dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 4x \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(4x \underbrace{\log 4x}_{\log 4 + \log x} - 4x) - \left(\frac{1}{x} \underbrace{\log \frac{1}{x}}_{-\log x} - \frac{1}{x} \right) \right] dx \\
 &= -2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \log x dx - 4 \log 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 4x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} \\
 &= -\log^2 1 + \log^2 \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \log 4 + 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \left(\log 1 - \log \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log^2 2 - \frac{3}{2} \log 4 + \frac{3}{2} - \log 2 = \log^2 2 - 4 \log 2 + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 22.5. Calcolare l'area della regione D evidenziata in figura



dove la curva nel semipiano superiore è il sostegno di $\gamma(t) = (t - 2 \sin t, \sin t)$ con $t = [0, \pi]$.

Osserviamo che γ parte da $O = (0, 0)$ e finisce in $P = (\pi, 0)$. Quindi $+\partial D = (-\gamma) \cup \overrightarrow{OP}$ e per la formula di Gauss-Green

$$\text{area}(D) = - \int_{+\partial D} y dx = \int_{\gamma} y dx - \int_{\overrightarrow{OP}} y dx = \int_0^{\pi} (\sin t)(1 - 2 \cos t) dt + 0 = (-\cos t - \sin^2 t) \Big|_0^{\pi} = 2.$$

SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

INDICE

1. Superfici	1
1.1. Superfici parametriche	1
1.2. Superfici cartesiane	7
1.3. Superfici di rotazione	8
2. Integrazione su superfici	11
2.1. Cambi di parametrizzazione in una superficie parametrica	12
2.2. Superfici orientabili	13
2.3. Calcolo di un flusso attraverso una superficie con orientazione prescritta	15
2.4. Il teorema di Stokes	19
2.5. Teorema della divergenza	29

1. SUPERFICI

1.1. Superfici parametriche. Una superficie di \mathbb{R}^3 può essere espressa in diversi modi. Un primo modo è in *forma implicita*, ovvero attraverso una funzione data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

(1)
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}.$$

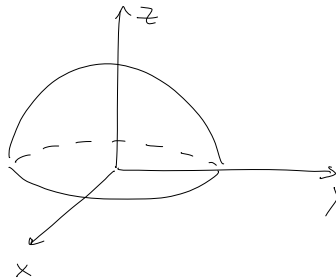
Esempio 1.1. *L'insieme*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

è la superficie sferica di raggio R centrata nell'origine e può essere vista come superficie in forma implicita introducendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Volendo considerare solo la semisfera superiore

$$S^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

possiamo descrivere S^+ nella forma (1) prendendo la funzione $f(x, y, z) = z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.



Una superficie può anche essere data come bordo di un dominio di \mathbb{R}^3

$$S = \partial E, \quad E \subset \mathbb{R}^3.$$

Esempio 1.2. Consideriamo il tronco di cilindro con asse coincidente con l'asse z

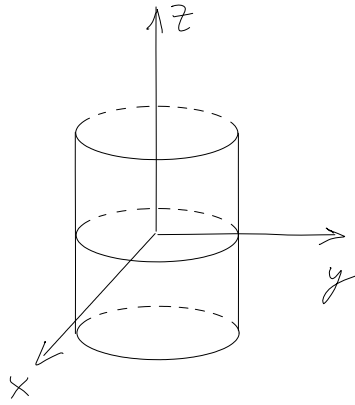
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq 1\},$$

in questo caso $\partial E = S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\} \quad (\text{disco inferiore}),$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} \quad (\text{disco superiore}),$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z^2 \leq 1\} \quad (\text{superficie laterale}).$$



L'insieme S_3 dell'esempio precedente può essere scritto diversamente, ovvero

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos u, y = \sin u, u \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]\}.$$

Le coordinate x, y, z del generico punto di S_3 vengono quindi espresse in funzione di due sole variabili. Più precisamente, chiamando

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in D = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

otteniamo la scrittura

$$S_3 = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in D\}.$$

Questa rappresentazione di S_3 si dice forma parametrica. Più in generale, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. S è una superficie parametrica di \mathbb{R}^3 se $S = \varphi(D)$ dove

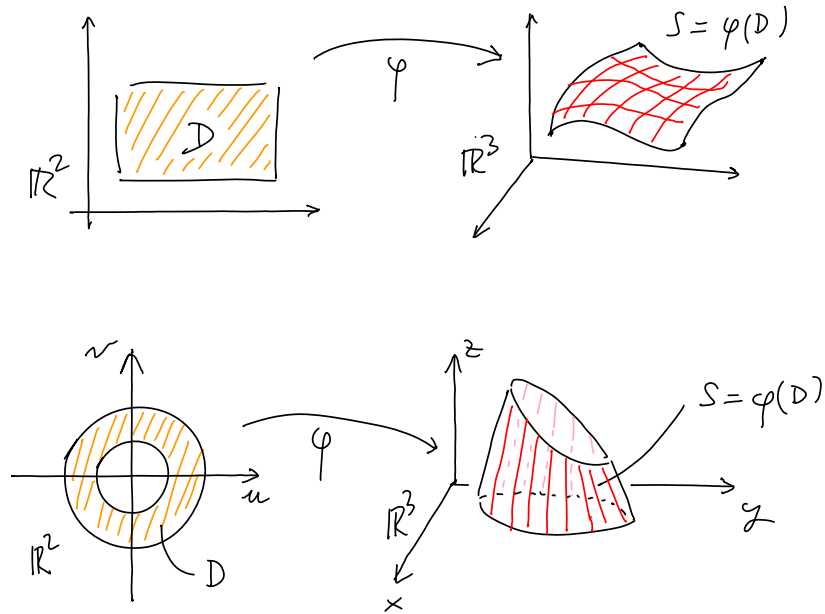
- D è un dominio regolare¹ di \mathbb{R}^2
- $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ cioè φ è continua in D , esistono e sono continue le derivate parziali φ_u e φ_v nella parte interna di D e si possono estendere in modo continuo su D .

¹Un dominio D è regolare se è chiuso e limitato, se il suo interno è non vuoto e se il suo bordo è unione di curve chiuse, semplici e regolari a tratti.

Le variabili u, v sono i parametri della superficie, D è il dominio dei parametri e

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

è detta parametrizzazione della superficie.



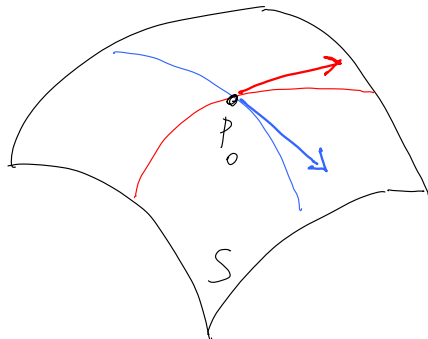
Osservazione 1.4. Una superficie parametrica ammette infinite parametrizzazioni.

Essendo la parametrizzazione φ di classe C^1 possiamo calcolare

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{bmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{bmatrix},$$

e darle un'interpretazione geometrica. Fissato $(u_0, v_0) \in D$, chiamiamo $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ e consideriamo le curve passanti per P_0

$$(2) \quad u \mapsto \gamma_1(u) := \varphi(u, v_0), \quad v \mapsto \gamma_2(v) := \varphi(u_0, v).$$



I sostegni di γ_1 e γ_2 giacciono su S e

$$v_1 = \varphi_u(u_0, v_0), \quad v_2 = \varphi_v(u_0, v_0),$$

sono rispettivamente i vettori tangenti a γ_1 e γ_2 nel punto P_0 . Se i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, cioè sono non nulli e non collineari

$$(*) \quad v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_1 \nparallel v_2$$

vi è un unico piano passante per P_0 che li contiene. Tale piano si chiama piano tangente alla superficie S in P_0 . In questa situazione possiamo definire il *versore normale alla superficie S in P_0*

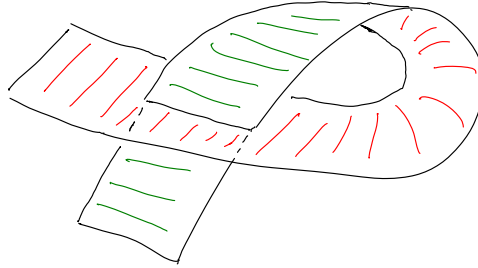
$$N = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)|}$$

che risulta ovviamente essere ortogonale sia a v_1 che a v_2 e quindi al piano tangente, che si può così esprimere nella forma

$$\Pi := \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - P_0) \cdot N = 0\}$$

Definizione 1.5. *Un superficie parametrica $S = \varphi(D)$ si dice regolare se in ogni suo punto sono soddisfatte le condizioni (*) cioè se $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in D$; si dice semplice se la mappa φ è una biiezione.*

Un esempio di superficie non semplice è dato nella figura seguente:



Definizione 1.6. *L'area di una superficie parametrica è*

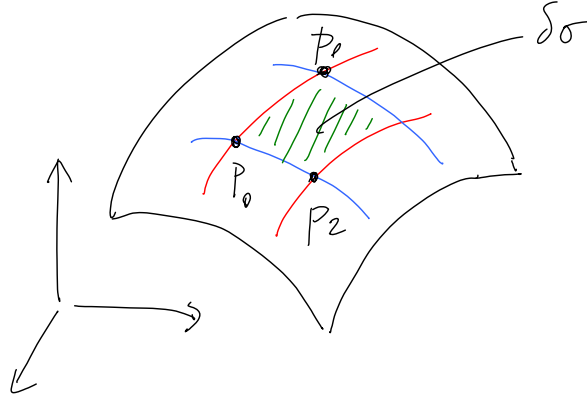
$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv.$$

Osservazione 1.7. *L'integrale della precedente definizione è ben definito in quanto $|\varphi_u \wedge \varphi_v|$ è una funzione continua dal dominio D a valori in \mathbb{R} e D , essendo regolare, è chiuso e limitato. Che l'integrale della precedente definizione rappresenti l'area della superficie parametrica $S = \varphi(D)$ si giustifica intuitivamente ragionando così. Preso $P_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$ con (u_0, v_0) interno a D , consideriamo degli incrementi $\delta u > 0$, $\delta v > 0$ sufficientemente piccoli in modo che il rettangolo $[u_0, u_0 + \delta u] \times [v_0, v_0 + \delta v]$ sia contenuto in D . Vogliamo scrivere l'area approssimata della porzione di superficie data da*

$$\{\varphi(u, v) : (u, v) \in [u_0, u_0 + \delta u] \times [v_0, v_0 + \delta v]\}$$

quando δu e δv sono presi piccoli. Chiamiamo $\delta\sigma$ tale area e, per comodità, denotiamo

$$P_1 = \varphi(u_0 + \delta u, v_0), \quad P_2 = \varphi(u_0, v_0 + \delta v) \quad \text{e} \quad P_3 = \varphi(u_0 + \delta u, v_0 + \delta v).$$



Dunque $\delta\sigma$ è l'area della porzione di superficie avente come vertici i punti P_0, P_1, P_2 e P_3 , e come lati le curve γ_1, γ_2 definite in (2) e le loro traslate. Se δu e δv sono piccoli allora $\delta\sigma$ è approssimabile con il parallelogramma di lati $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_0P_2}$, quindi

$$\delta\sigma \approx |\overline{P_0P_1} \wedge \overline{P_0P_2}|.$$

Essendo $\overline{P_0P_1} \approx \varphi_u(u_0, v_0) \delta u$ e $\overline{P_0P_2} \approx \varphi_v(u_0, v_0) \delta v$ otteniamo

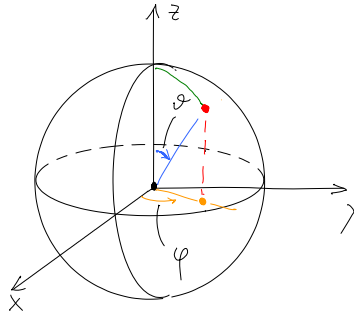
$$\delta\sigma \approx |\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)| \delta u \delta v, .$$

L'area di S si ottiene sommando le aree di tutti gli elementi di vertici $\varphi(u, v)$, $\varphi(u + \delta u, v)$, $\varphi(u, v + \delta v)$ e $\varphi(u + \delta u, v + \delta v)$. Formalizzando rigorosamente questo ragionamento, si ottiene appunto

$$\text{Area}(S) = \int_S d\sigma = \int_D |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv .$$

Esempio 1.8 (Superficie sferica). La superficie sferica di raggio R (con R costante positiva fissata) è una superficie parametrica di parametrizzazione

$$p(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$$



Essendo

$$p_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad p_\varphi(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta) p(\vartheta, \varphi)$$

si ha che $|p_\vartheta \wedge p_\varphi| = R^2 \sin \vartheta$ e

$$\text{Superficie(sfera)} = \int_D R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = 4\pi R^2.$$

Esempio 1.9. Calcolare l'area della superficie

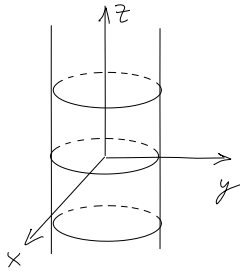
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

La superficie S è una porzione della superficie laterale del cilindro definito dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$. Nella definizione di S entrano in gioco tre superfici

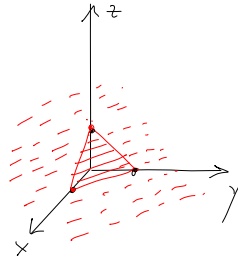
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$

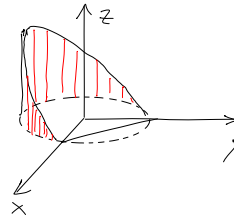
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x - y\}$$



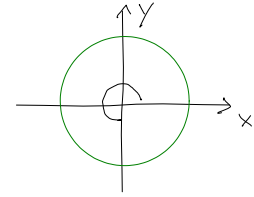
la superficie C



la superficie S_2



la superficie S



si cerca $S \cap S_1$

L'intersezione tra S ed S_1 è la circonferenza parametrizzabile da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; dobbiamo quindi determinare t tale per cui

$$g(t) = 1 - \cos t - \sin t \geq 0.$$

Risulta che la disuguaglianza precedente è soddisfatta per $t \in [\pi/2, 2\pi]$. La superficie S può quindi essere scritta come superficie parametrica di parametrizzazione

$$\varphi(t, z) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ z \end{bmatrix}$$

definita su

$$D = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 : t \in [\pi/2, 2\pi], 0 \leq z \leq 1 - \cos t - \sin t\}$$

Essendo

$$\varphi_t(t, z) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \varphi_z(t, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \varphi_t(t, z) \wedge \varphi_z(t, z) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

quindi $|\varphi_t \wedge \varphi_z| = 1$ e

$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_t \wedge \varphi_z| \, dt \, dz = \text{Area}(D) = \int_{\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^{1-\cos t-\sin t} dz \right) dt = \frac{3\pi}{2} + 2.$$

Osservazione 1.10. Rileggiamo l'esempio precedente in un contesto più generale. Un insieme della forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

definisce una superficie che corrisponde alla sezione del cilindroide

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0\}$$

compresa tra le superfici cartesiane

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g_1(x, y)\} \quad e \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g_2(x, y)\}.$$

La superficie S si può rappresentare come superficie parametrica nel modo seguente. Si prende una parametrizzazione $\gamma(t)$, con $t \in [a, b]$, della curva $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0, z = 0\}$. Quindi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$ con $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dobbiamo prendere in considerazione solamente i valori del parametro $t \in [a, b]$ tali per cui

$$g_1(\gamma(t)) \leq g_2(\gamma(t)).$$

Supponiamo che questa disuguaglianza sia verificata per $t \in [a_1, b_1] \subset [a, b]$, allora una parametrizzazione di S è data da

$$\varphi(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad (t, z) \in D = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq t \leq b_1, g_1(\gamma(t)) \leq z \leq g_2(\gamma(t))\}.$$

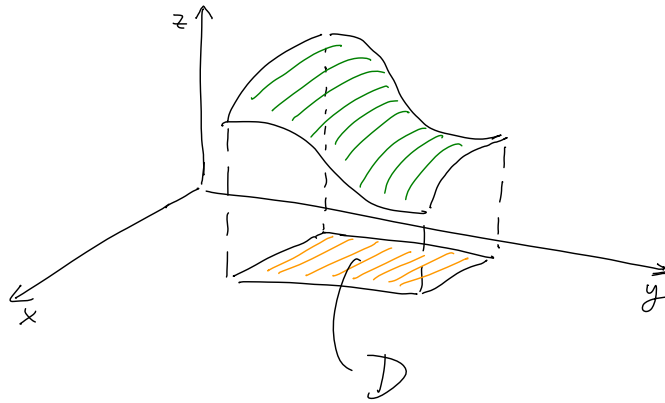
Inoltre, ricordando il significato geometrico dell'integrale curvilineo di prima specie,

$$\text{Area}(S) = \int_{\tilde{\gamma}} (g_2 - g_1) ds$$

dove $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[a_1, b_1]}$.

1.2. Superfici cartesiane. Le superfici cartesiane sono quelle superfici che corrispondono al grafico di una funzione di classe C^1 , $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con D dominio regolare. Quindi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$



Una superficie cartesiana è una superficie parametrica, per vederlo è sufficiente definire la funzione $\varphi(u, v) = [u, v, f(u, v)]^T$. In questo caso si ha

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u, v) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_u(u, v) \\ -f_v(u, v) \\ 1 \end{bmatrix},$$

dunque, essendo la terza componente sempre pari a 1,

$$|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D.$$

Una superficie cartesiana è dunque regolare, inoltre in ogni punto il suo versore normale non è ortogonale all'asse z ed è diretto verso l'alto. La sua area è

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv.$$

Essendo il grafico di una funzione, una superficie cartesiana è anche semplice.

Esempio 1.11. *Calcolare l'area della superficie cartesiana*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0, z = 5 - 2x\}.$$

La funzione f che definisce la superficie è

$$f(x, y) = 5 - 2x,$$

definita sulla semicirconferenza

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$$

Essendo $f_x(x, y) = -2$ e $f_y(x, y) = 0$ otteniamo

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + 4} \, dx \, dy = \sqrt{5} \, \text{Area}(D) = \sqrt{5}\pi.$$

Esempio 1.12. *La superficie S dell'Es. 1.9 poteva essere interpretata come superficie cartesiana introducendo la funzione $f(x, y) = 1 - x - y$ e calcolando l'integrale*

$$\text{Area}(S) = \int_{\gamma} f \, ds$$

dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi/2, 2\pi]$.

1.3. Superfici di rotazione. Fissiamo una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e tale che

$$\gamma(t) \in \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}, \quad t \in [a, b].$$

Sia S la superficie ottenuta ruotando il sostegno di γ attorno all'asse z . Allora se

$$\gamma(t) = (g_1(t), 0, g_2(t))$$

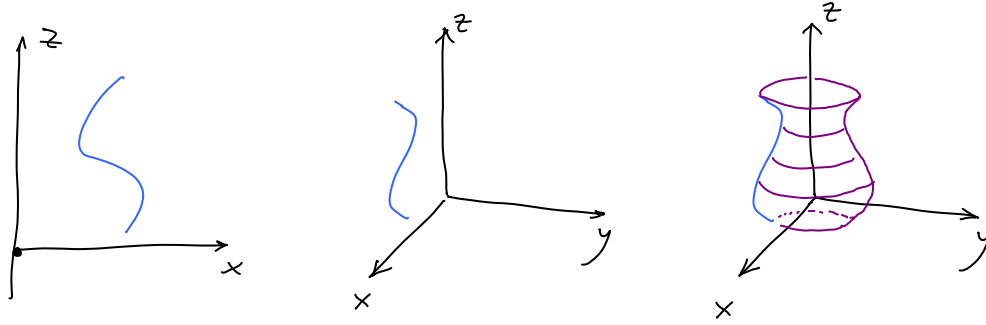
abbiamo la parametrizzazione della superficie S

$$\varphi(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ 0 \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \cos \vartheta \\ g_1(t) \sin \vartheta \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

dove ϑ è l'angolo della rotazione attorno all'asse z . Il dominio dei parametri è

$$D = \{(t, \vartheta) : a \leq t \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\} = [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Si noti che effettivamente D è un dominio regolare e φ è di classe C^1 .



Vogliamo ora determinare l'area di una superficie di rotazione a partire dalla curva γ che la genera. Sappiamo che

$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| dt d\vartheta$$

Essendo

$$\varphi_t(t, \vartheta) \wedge \varphi_\vartheta(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} g'_1(t) \cos \vartheta \\ g'_1(t) \sin \vartheta \\ g'_2(t) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -g_1(t) \sin \vartheta \\ g_1(t) \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1(t)g'_2(t) \cos \vartheta \\ g_1(t)g'_2(t) \sin \vartheta \\ g_1(t)g'_1(t) \end{bmatrix}$$

ed essendo $g_1(t) \geq 0$, abbiamo che

$$|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| = g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2}$$

quindi

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2} dt.$$

Osservando che l'ascissa del baricentro di γ è

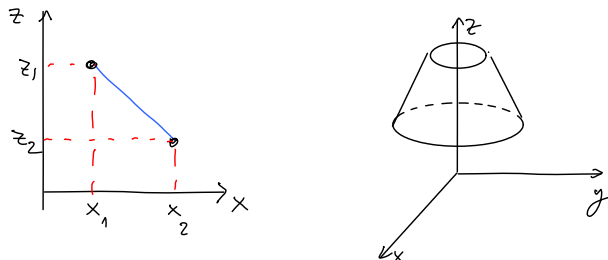
$$\bar{x} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b g_1(t) |\gamma'(t)| ds = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2} dt$$

otteniamo la *Formula di Pappo-Guldino*

$$\text{Area}(S) = 2\pi L(\gamma) \bar{x}.$$

Esempio 1.13 (Superficie laterale di un (tronco di) cono o di un cilindro). Si consideri il segmento, contenuto nel piano $y = 0$, congiungente i punti $P_1 = (x_1, 0, z_1)$ e $P_2 = (x_2, 0, z_2)$ con $0 \leq x_1 < x_2$ e $z_1 \neq z_2$, e parametrizzato da

$$\gamma(t) = (x_1 + (x_2 - x_1)t, 0, z_1 + (z_2 - z_1)t), \quad t \in [0, 1].$$



Ruotando il supporto di γ attorno all'asse z otteniamo un tronco di cono se $x_1 > 0$, un cono se $x_1 = 0$. Essendo il baricentro del segmento il suo punto medio, abbiamo

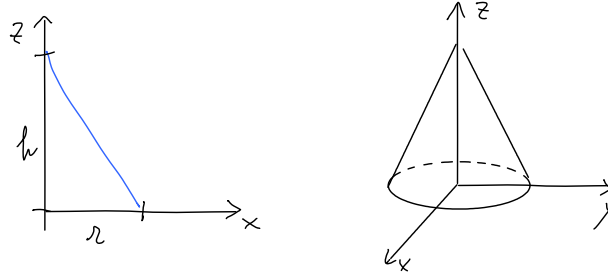
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e calcoliamo facilmente

$$L(\gamma) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

La formula di Pappo-Guldino asserisce quindi che la superficie laterale del tronco di cono è

$$\text{Superficie laterale(tronco di cono)} = \pi(x_1 + x_2)\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

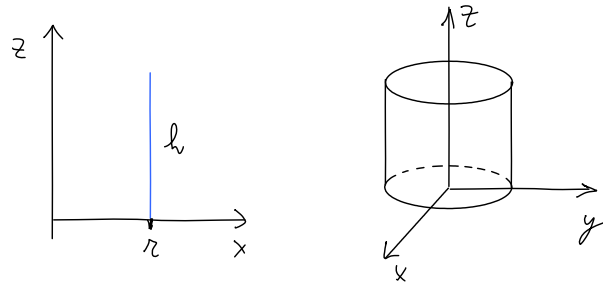


Quando $x_1 = 0$, ovvero quando la superficie è quella laterale di un cono, ponendo $r := x_2$ e $h := |z_2 - z_1|$ otteniamo

$$\text{Superficie laterale(cono)} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

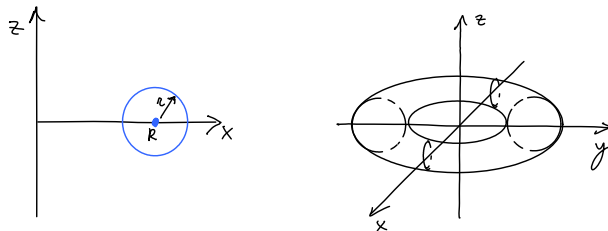
Quando $x_1 = x_2$ la superficie descritta è la porzione di superficie laterale di un cilindro. Ponendo $r = x_1 = x_2$ e $h := |z_2 - z_1|$ otteniamo

$$\text{Superficie laterale(cilindro)} = 2\pi r h.$$



Esempio 1.14 (Superficie toroidale). Consideriamo ora $0 < r \leq R$ e la circonferenza di raggio r , centro $(R, 0, 0)$ contenuta in $y = 0$

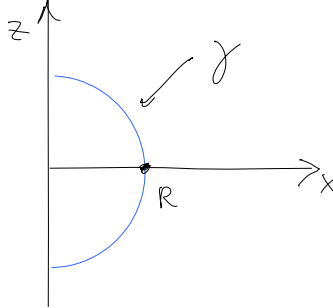
$$\gamma(t) = (R + r \cos \vartheta, 0, r \sin \vartheta).$$



Il suo baricentro ha coordinate $(R, 0, 0)$ e la sua lunghezza è $2\pi R$, quindi la superficie laterale del toro ottenuto ruotando il supporto di γ attorno all'asse z è

$$\text{Superficie(toro)} = 4\pi^2 r R.$$

Esempio 1.15 (Superficie sferica). La superficie sferica può anche essere interpretata come superficie di rotazione ottenuta a partire dalla curva $\gamma(t) = (R \cos t, 0, R \sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. In questo caso $L(\gamma) = \pi R$, $\bar{x} = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R \cos t) R dt = \frac{2R}{\pi}$ e si ancora che la superficie della sfera di raggio R è $4\pi R^2$.



2. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI

Sia S una superficie parametrica regolare con parametrizzazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definizione 2.1. Dato un campo scalare $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (si intende f continua) con A aperto contenente S , si definisce l'integrale di f su S

$$\int_S f d\sigma := \int_D f(\varphi(u, v)) |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv.$$

In particolare, per $f \equiv 1$ si ottiene l'espressione dell'area di S .

Definizione 2.2. Dato un campo vettoriale $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (si intende F continua) con A aperto contenente S , si definisce il flusso di F attraverso S

$$\int_S F \cdot N d\sigma := \int_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv$$

Le definizioni date risultano essere coerenti con quanto già visto, ovvero

$$d\sigma = |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv, \quad N = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|}$$

Esempio 2.3. Calcolare il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme q posta nell'origine attraverso la superficie sferica di raggio R e centrata in 0 .

Si tratta di un campo radiale e precisamente

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto; vogliamo calcolare

$$\int_S F \cdot N d\sigma$$

dove S è la sfera di raggio R che possiamo parametrizzare in coordinate polari, come nell'esempio 1.8. Dunque

$$p(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \forall (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad e \quad p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta) p.$$

Calcoliamo ora, essendo $|p| = R$,

$$F(p) \cdot (p_\vartheta \wedge p_\varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{|p|^3} \cdot (R \sin \vartheta) p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} R \sin \vartheta \frac{|p|^2}{|p|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta,$$

quindi

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Si noti in particolare che il flusso non dipende dal raggio della sfera R .

2.1. Cambi di parametrizzazione in una superficie parametrica. Consideriamo una superficie parametrica $S = \varphi(D)$, con $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e D dominio regolare di \mathbb{R}^2 .

Definizione 2.4. Un cambio di parametrizzazione è una trasformazione $g: \tilde{D} \rightarrow D$, dove \tilde{D} è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 , g è biettiva, di classe C^1 e con inversa di classe C^1 .

Se denotiamo con (s, t) gli elementi del dominio \tilde{D} e con (u, v) quelli di D abbiamo

$$u = g_1(s, t), \quad v = g_2(s, t).$$

Consideriamo ora la funzione composta $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$; $\tilde{\varphi}$ risulta essere una parametrizzazione di S , infatti è di classe C^1 (in quanto lo sono φ e g), $\tilde{\varphi}(\tilde{D}) = S$ e abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_s(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} [\varphi(g_1(s, t), g_2(s, t))] = \varphi_u(g(s, t)) \frac{\partial g_1}{\partial s} + \varphi_v(g(s, t)) \frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \tilde{\varphi}_t(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(g_1(s, t), g_2(s, t))] = \varphi_u(g(s, t)) \frac{\partial g_1}{\partial t} + \varphi_v(g(s, t)) \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{aligned}$$

quindi

$$(\tilde{\varphi}_s \wedge \tilde{\varphi}_t)(s, t) = (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) \left[\frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial g_1}{\partial t} \right] = (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) \det J_g(s, t)$$

dove J_g è la matrice jacobiana della funzione g . In base alla Definizione 2.1, l'integrale di un campo $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sulla superficie $S \subset A$ parametrizzata attraverso $\tilde{\varphi}$ è

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\tilde{\sigma} &= \int_{\tilde{D}} f(\tilde{\varphi}(s, t)) |\tilde{\varphi}_s \wedge \tilde{\varphi}_t| \, ds \, dt \\ &= \int_{\tilde{D}} f(\varphi(g(s, t))) |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(g(s, t))| |\det J_g(s, t)| \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di variabili per un integrale bidimensionale e ponendo $u = g_1(s, t)$, $v = g_2(s, t)$, otteniamo

$$\int_S f \, d\tilde{\sigma} = \int_D f(\varphi(u, v)) |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)| \, du \, dv = \int_S f \, d\sigma.$$

Deduciamo quindi che *gli integrali di superficie di campi scalari non cambiano rispetto a cambi di parametrizzazione*. In particolare l'area di una superficie è invariante rispetto a cambi di parametrizzazione. Con conti del tutto analoghi possiamo dimostrare che invece *i flussi di campi*

vettoriali attraverso superfici (si veda la Definizione 2.2) rimangono costanti rispetto a cambi di parametrizzazione a meno di un segno dato dal segno del $\det J_g(s, t)$.

2.2. Superfici orientabili.

Definizione 2.5. Una superficie parametrica S con parametrizzazione $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice orientabile se esiste un campo (continuo) $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$|N(p)| = 1, \quad N(p) \cdot \varphi_u(p) = N(p) \cdot \varphi_v(p) = 0, \quad \forall p \in S.$$

Una superficie orientabile con assegnato campo (continuo) di versori normali si dice superficie orientata.

Se S è una superficie parametrica regolare e semplice, cioè esistono un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 e una parametrizzazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(D)$, φ è iniettiva (e dunque è una biiezione da D su S) e $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in D$, allora S è orientabile e un campo di versori normali è dato da

$$N(p) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|} \Big|_{(u, v) = \varphi^{-1}(p)} \quad \forall p \in S.$$

Con questa scelta di normali, diciamo che S è orientata secondo l'orientazione indotta dalla parametrizzazione φ .

Osservazione 2.6. La continuità del campo N è richiesta rispetto a $p \in S$ e non rispetto ai parametri $(u, v) \in D$.

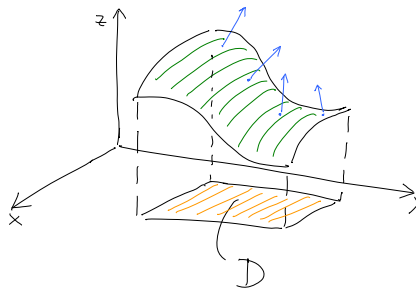
Esempio 2.7. Ogni superficie cartesiana è orientabile; sia infatti

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

con D dominio regolare e f di classe $C^1(D)$. Allora, come abbiamo già visto, possiamo scegliere la parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}, \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo scegliere il campo $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$, ben definito su S e tale che $N = 1$, $N \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_v = 0$. Il campo N risulta inoltre continuo come funzione di $p \in S$.

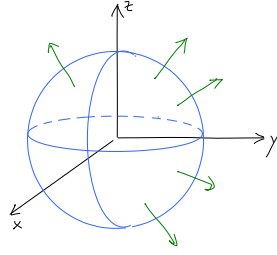


Si noti che anche il campo $\tilde{N} = -N$ è ammissibile rispetto alla definizione di superficie orientabile.

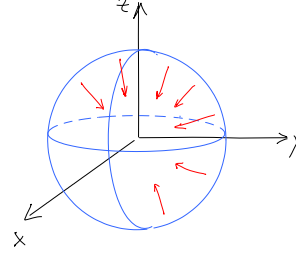
Esempio 2.8. La sfera di raggio R è una superficie orientabile. Considerando la parametrizzazione vista nell'Es. 1.8 a pagina 5, si ha che $p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta)p$ e il versore $N = \frac{p_\vartheta \wedge p_\varphi}{|p_\vartheta \wedge p_\varphi|}$ è definito in ogni punto della sfera eccetto i poli (quando $\vartheta \in \{0, \pi\}$). Definendo ora

$$\tilde{N}: S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{N}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{R}$$

abbiamo che il campo \tilde{N} induce un'orientazione sulla sfera. Osserviamo che anche il campo $\bar{N}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{R}$ induce un'orientazione su S .



sfera orientata con
versori normali uscenti



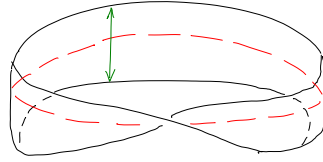
sfera orientata con
versori normali entranti

Esempio 2.9. Vediamo ora un esempio di superficie non orientabile, il nastro di Moebius. Consideriamo la parametrizzazione

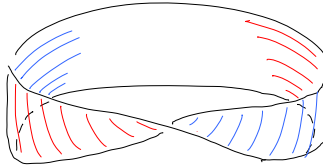
$$\varphi: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} \left(1 + t \cos \frac{\vartheta}{2}\right) \cos \vartheta \\ \left(1 + t \cos \frac{\vartheta}{2}\right) \sin \vartheta \\ t \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

che definisce una superficie semplice e regolare tale per cui

$$\varphi(t, 0) = \varphi(-t, 2\pi), \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$



Inoltre per ogni (t, ϑ) si ha che $\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta \neq 0$ e il versore normale è ben definito su S . Tuttavia $N = \frac{\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta}{|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta|}$ soddisfa $|N| = 1$, $N \cdot \varphi_t = N \cdot \varphi_\vartheta = 0$, ma N non è continuo rispetto a $p \in S$, infatti si ha $N(t, 0) \neq N(t, 2\pi)$ per ogni $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



La possibilità di orientare una superficie significa grosso modo che la superficie ha due facce e possiamo scegliere una di esse. Il prossimo risultato precisa meglio questo pensiero.

Teorema 2.10. Se S è una superficie orientabile, allora ammette solo due possibili orientazioni. Ovvero se $N_1, N_2: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono campi continui di versori normali, allora $N_1 = N_2$ oppure $N_1 = -N_2$.

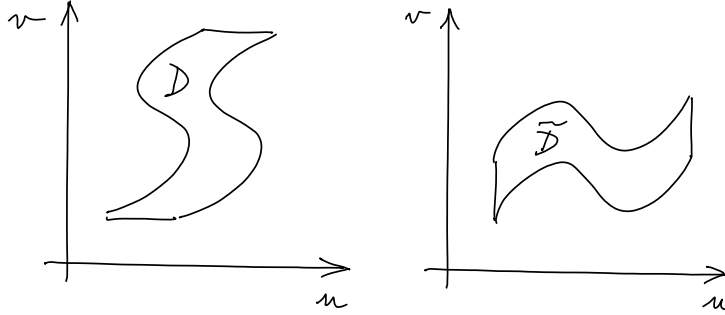
Data una superficie parametrica e orientabile, $S = \varphi(D)$, con campo di versori normali $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$, è possibile cambiare l'orientazione di S con un cambio di parametrizzazione $g: \tilde{D} \rightarrow D$. Ci sono infatti due possibilità:

- se $\det J_g(s, t) > 0$ per ogni $(s, t) \in \tilde{D}$ allora φ e $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ inducono la stessa orientazione su S ,
- se invece $\det J_g(s, t) < 0$ per ogni $(s, t) \in \tilde{D}$ allora φ e $\tilde{\varphi}$ inducono due orientazioni opposte su S .

Per passare all'orientazione opposta a quella indotta da φ è sufficiente considerare

$$(3) \quad \tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\varphi}(u, v) = \varphi(v, u),$$

con $\tilde{D} = \{(u, v): (v, u) \in D\}$.



In tal caso, il cambio di parametrizzazione è la funzione $g(u, v) = (v, u)$ la cui matrice jacobiana è

$$J_g(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det J_g(u, v) = -1$. Inoltre

$$\tilde{\varphi}(\tilde{D}) = S = \varphi(D), \quad \tilde{\varphi}_u = \varphi_v, \quad \tilde{\varphi}_v = \varphi_u, \quad \tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v = -\varphi_u \wedge \varphi_v,$$

quindi $\tilde{N} = -N$.

Definizione 2.11. Data una superficie parametrica S parametrizzata da $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, la superficie \tilde{S} di parametrizzazione (3) si dice orientata in senso opposto a S e si denota $-S$. Più in generale, data una superficie parametrica S orientata con un campo di normali $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, la superficie opposta a S è quella in cui si considera come campo di normali $-N$.

Osserviamo che per ogni campo scalare $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

$$\int_{-S} f d\sigma = \int_S f d\sigma$$

mentre per un campo vettoriale $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ si ha che

$$\int_{-S} F \cdot N d\sigma = - \int_S F \cdot N d\sigma.$$

2.3. Calcolo di un flusso attraverso una superficie con orientazione prescritta. Data una superficie S con orientazione prescritta dal campo N , un campo $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (con A aperto, $S \subset A$) vogliamo calcolare il flusso di F attraverso S , ovvero

$$\Phi = \int_S F \cdot N d\sigma.$$

La strategia da seguire può essere strutturata in tre passi:

- (1) parametrizziamo S con una parametrizzazione φ di dominio D ;

- (2) calcoliamo $I = \int_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv$;
 (3) confrontiamo l'orientazione indotta da φ con quella prescritta. Se è la stessa, allora $\Phi = I$, altrimenti $\Phi = -I$.

Esempio 2.12. *Si consideri il campo vettoriale*

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (z, yz, x)$$

e la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 3, z \leq 0\}$$

orientata con normale esterna alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Calcolare il flusso $\Phi = \int_S F \cdot N d\sigma$.

La disequazione $x^2 + y^2 \leq 3$ individua un cilindro pieno, quindi S è la calotta inferiore intercettata dal cilindro sulla sfera. Possiamo parametrizzare S come superficie cartesiana

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 3\} \quad e \quad f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Definiamo quindi

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in D, \quad S = \varphi(D),$$

da cui

$$\varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = \begin{bmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il versore normale indotto dalla parametrizzazione è quindi rivolto verso l'alto (la superficie è stata infatti parametrizzata come superficie parametrica); è quindi la normale opposta a quella richiesta dall'esercizio. Otteniamo quindi che il flusso attraverso S richiesto è opposto a quello indotto da φ , ovvero

$$\Phi = - \int_D F(\varphi(x, y)) \cdot \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) dx dy;$$

essendo

$$F(\varphi(x, y)) \cdot \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = \begin{bmatrix} -\sqrt{4-x^2-y^2} \\ -y\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} = 2x + y^2,$$

otteniamo, usando le coordinate polari per l'integrazione sul dominio D ,

$$\begin{aligned} \Phi &= - \int_D (2x + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{2\pi} (2r \cos \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta \\ &= -2 \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{9}{4}\pi. \end{aligned}$$

Esempio 2.13. Sia S la superficie cartesiana di equazione

$$z = \frac{4x}{y^2 + \sqrt{16x^2 + y^4}}$$

sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 4x^2 \leq y^2 \leq 4 - x^2\}$. Si dia per noto che la trasformazione

$$x = \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \quad y = r \sin \vartheta$$

definisce un cambio di parametrizzazione dai parametri $(x, y) \in D$ ai parametri $(r, \vartheta) \in D_1 = [1, 2] \times [0, 2\pi)$.

(a) Riconoscere che

$$S = \left\{ \left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta, \cos \vartheta \right) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

(b) Verificare che la superficie S parametrizzata come superficie cartesiana ha la stessa orientazione di quella corrispondente alla parametrizzazione rispetto a (r, ϑ) .

(a) La superficie S è data nella forma $S = \varphi(D)$ dove

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad \text{con } f(x, y) = \frac{4x}{y^2 + \sqrt{16x^2 + y^4}}.$$

Anche se non necessario ai fini dell'esercizio, notiamo che la regione D è quella compresa tra l'ellisse centrata nell'origine e semiassi $\frac{1}{2}$ e 1 e la circonferenza centrata nell'origine e raggio 2.

Dobbiamo verificare che $S = \varphi_1(D_1)$ dove

$$\varphi_1(r, \vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix};$$

sappiamo già che la trasformazione $g(r, \vartheta) = \left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta \right)$ definisce un cambio di parametri da D_1 in D e che in particolare $g(D_1) = D$. Basta quindi provare che $\varphi_1 = \varphi \circ g$ in D_1 ; infatti in tal caso

$$\varphi_1(D_1) = \varphi(g(D_1)) = \varphi(D) = S.$$

Abbiamo

$$\varphi_1 = \varphi \circ g \text{ in } D_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ f\left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta\right) \end{bmatrix}, \quad \forall (r, \vartheta) \in D_1,$$

resta dunque da verificare che

$$\cos \vartheta = f\left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta\right), \quad \forall (r, \vartheta) \in D_1.$$

L'identità segue facilmente osservando che

$$4 \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta = 4 \cos^2 \vartheta + (1 - \cos^2 \vartheta)^2 = (1 + \cos^2 \vartheta)^2.$$

(b) Ricordiamo che le parametrizzazioni di S indotte da φ e da φ_1 inducono la stessa orientazione su S se e solo se il determinante della matrice jacobiana della mappa g è positivo. Essendo

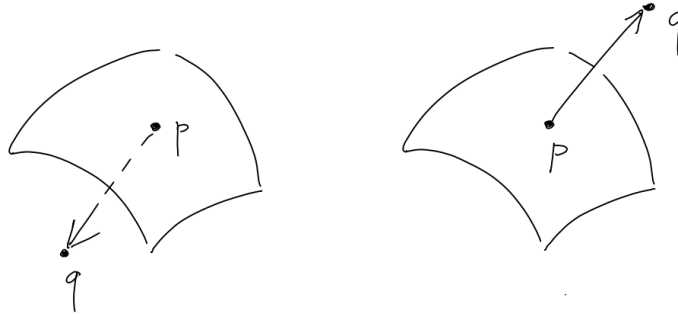
$$\det J_g(r, \vartheta) = \det \begin{bmatrix} r \cos \vartheta & -\frac{r^2}{2} \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{bmatrix} = r^2 \cos^2 \vartheta + \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta \geq \frac{r^2}{2} \cos^2 \vartheta + \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta = \frac{r^2}{2} > 0,$$

essendo $r \geq 1$.

2.3.1. Domande e risposte sull'orientazione di una superficie.

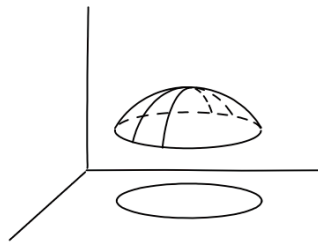
Domanda 2.1. *Come si fa a capire come è orientata una superficie?*

L'orientazione di una superficie è determinata dalla parametrizzazione scelta. Se la superficie S è parametrizzata da $\varphi: D \rightarrow S$ (D dominio dei parametri), l'orientazione è definita da $\varphi_u \wedge \varphi_v$. Bisogna fissare un punto $p = \varphi(u, v)$ e considerare il vettore che va da p a $q = p + \varphi_u \wedge \varphi_v$. La direzione di tale vettore ci dice come φ orienta la superficie S .

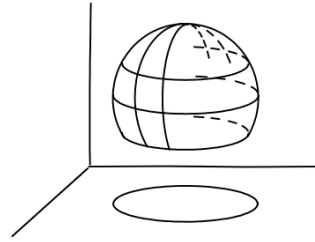


Domanda 2.2. *Quando una superficie è una superficie cartesiana?*

Una superficie S è una superficie cartesiana se è il grafico di una funzione a valori reali ovvero se esiste un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $S = \{(x, y, z): (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$. Inoltre S è una superficie cartesiana se e solo se ogni retta verticale interseca il grafico di S in al più un punto.



superficie cartesiana



superficie non cartesiana

Domanda 2.3. *Che orientazione ha una superficie rappresentabile in forma cartesiana? Risulta automaticamente orientata con normale rivolta verso l'alto?*

A prescindere dal fatto che una superficie sia rappresentabile in forma cartesiana, la sua orientazione dalla parametrizzazione che si sceglie. Consideriamo ad esempio la superficie

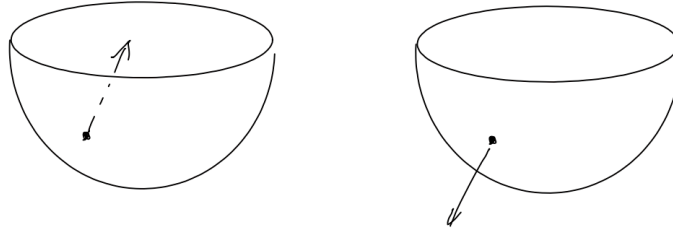
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\};$$

possiamo scrivere $S = \varphi(D)$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}$.

In questo caso il versore normale è un riscalamento di

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed è rivolto verso l'alto (e verso l'interno della semisfera). Se invece consideriamo la parametrizzazione attraverso le coordinate sferiche, ovvero se scriviamo $S = \Phi(\tilde{D})$ dove $\Phi(\vartheta, \varphi) = [\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta]^T$ e $\tilde{D} = [\pi/2, \pi] \times [0, 2\pi]$, otteniamo che il versore normale è un riscalamento di $\Phi_\vartheta \wedge \Phi_\varphi = (\sin \vartheta)\Phi$. In questo caso quindi il normale punta verso l'esterno della semisfera ed è quindi opposto a quello trovato con la parametrizzazione cartesiana.



Domanda 2.4. *Come si fa a cambiare orientazione ad una superficie? Che effetto si ottiene?*

Se S è una superficie orientata da una certa parametrizzazione $\varphi(u, v)$ definita in D , per cambiare orientazione basta scambiare l'ordine dei parametri considerando $\tilde{\varphi}(v, u) = \varphi(u, v)$ definita in $\tilde{D} = \{(v, u) : (u, v) \in D\}$. L'effetto è che il flusso cambia di segno.

2.4. Il teorema di Stokes. I campi conservativi, cioè quei campi vettoriali che ammettono un potenziale, si caratterizzano per il fatto che il loro integrale lungo una curva dipende unicamente dagli estremi della curva stessa e non dall'intero sostegno. Vediamo ora un risultato analogo per gli integrali superficiali.

Definizione 2.14. *Se un campo vettoriale $G: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si può scrivere nella forma $G = \text{rot } F$ per un qualche campo $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , diciamo che G ammette potenziale vettore F in A .*

Esempio 2.15. *Il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinitamente esteso percorso da corrente stazionaria è un campo che ammette potenziale vettore. Se collochiamo l'asse z in corrispondenza del filo, con orientazione corrispondente al verso di percorrenza della corrente, il campo magnetico assume la forma*

$$G(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, I è l'intensità di corrente che fluisce nel filo e Z è l'asse z . Si verifica che G ammette potenziale vettore, dato da

$$F(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

cioè $\text{rot } F = G$ in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$.

Il prossimo risultato asserisce che se G è un campo che ammette un potenziale vettore in A ed S è una superficie parametrica in A allora il flusso di G attraverso S dipende solo dal bordo di S .

Teorema di Stokes. *Dato un campo $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 sull'aperto di \mathbb{R}^3 e data una superficie parametrica $S \subset A$ di parametrizzazione φ e di dominio di parametri $D \subset \mathbb{R}^2$ ($S = \varphi(D)$) vale*

$$\int_S (\text{rot } F) \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds.$$

dove $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$ è il cosiddetto trasformato del bordo di D orientato positivamente. Più precisamente, se $\partial D^+ = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k$ con Γ_i parametrizzata da $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, k$, si calcola $\tilde{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$ e

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds + \dots + \int_{\tilde{\gamma}_k} F \cdot ds.$$

Osservazione 2.16. *Alcune osservazioni su teorema di Stokes.*

- (1) *Il campo di cui viene calcolato il flusso è un rotore.*
- (2) *Il teorema mette in relazione un integrale di superficie con un integrale di linea.*
- (3) *Il bordo ∂D deve essere orientato positivamente e di conseguenza devono essere orientate correttamente tutte le sue componenti Γ_i , $i = 0, \dots, k$.*
- (4) *La normale N utilizzata nel teorema per il calcolo del flusso è quella indotta dalla parametrizzazione φ della superficie S .*
- (5) *Segue dal teorema di Stokes che se due superfici hanno lo stesso bordo con la stessa orientazione, allora i flussi del rotore di un campo attraverso queste superfici sono uguali.*

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato quando la parametrizzazione φ è di classe C^2 . Supponiamo inoltre che ∂D^* sia una curva chiusa, semplice e regolare di parametrizzazione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$; definendo ora $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ otteniamo

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\varphi(\partial D^+)} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot ds = \int_a^b F(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \, dt.$$

Denotiamo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e calcoliamo

$$\tilde{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \varphi_u(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \varphi_v(\gamma(t)) \gamma_2'(t);$$

introducendo il campo $G: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2)$ definito da

$$G_1(u, v) = F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v), \quad G_2(u, v) = F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) &= F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \varphi_u(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \varphi_v(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \\ &= G_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + G_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t) = G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \end{aligned}$$

dunque

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_a^b G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} G \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) du dv$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il teorema di Gauss-Green. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} [F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_v] - \frac{\partial}{\partial v} [F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_u] \\ &= [DF(\varphi)\varphi_u] \cdot \varphi_v + F(\varphi) \cdot \varphi_{vu} - [DF(\varphi)\varphi_v] \cdot \varphi_u - F(\varphi) \cdot \varphi_{uv}, \end{aligned}$$

dove DF è la matrice jacobiana di F . Essendo φ di classe C^2 si ha che $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$; inoltre per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$ e $p \in A$ vale l'identità

$$[DF(p)a] \cdot b - [DF(p)b] \cdot a = [\text{rot } F(p)] \cdot (a \wedge b),$$

quindi

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} = [\text{rot } F(\varphi)] \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)$$

e

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_D [\text{rot } F(\varphi(u, v))] \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv = \int_S \text{rot } F \cdot N d\sigma.$$

Se la curva γ è regolare a tratti, si ragiona su ogni tratto e poi si somma. \square

2.4.1. Esercizi sul teorema di Stokes.

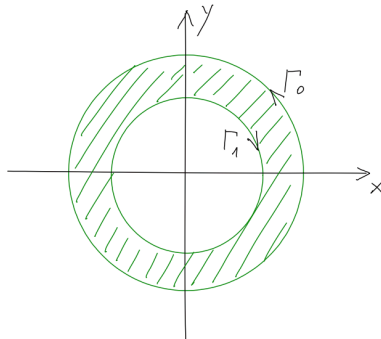
Esercizio 2.1. *Detta S la fascia di paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ corrispondente all'anello $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, calcolare il flusso del rotore del campo $F(x, y, z) = (y, z, x)$ attraverso S rappresentando S come superficie parametrica cartesiana. Stabilire inoltre se tale flusso è entrante oppure uscente dal paraboloide.*

S è una superficie cartesiana, ovvero

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = x^2 + y^2\}$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Il versore normale ad S indotto dalla parametrizzazione cartesiana è diretto verso l'alto quindi il flusso che calcoliamo utilizzando questo vettore normale è quello entrante nel paraboloide. Per applicare il teorema di Stokes dobbiamo calcolare $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$. Il dominio D è un anello, il suo bordo è quindi composto da due circonferenze

$$\Gamma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\};$$



per orientare ∂D positivamente dobbiamo percorrere Γ_0 in senso antiorario e Γ_1 in senso orario. Considerando le curve

$$\gamma_0(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), \quad \gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

il supporto di γ_0 è Γ_0 , quello di γ_1 è $-\Gamma_1$. Possiamo quindi calcolare il flusso richiesto utilizzando il teorema di Stokes

$$\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds - \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds,$$

con $\tilde{\gamma}_0 = \varphi \circ \gamma_0$ $\tilde{\gamma}_1 = \varphi \circ \gamma_1$.

Essendo $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ abbiamo $\tilde{\gamma}_0 = (3 \cos t, 3 \sin t, 9)$ e $\tilde{\gamma}_1 = (2 \cos t, 2 \sin t, 4)$, quindi $\tilde{\gamma}'_0 = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$ e $\tilde{\gamma}'_1 = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$. Sostituendo otteniamo quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_0(t)) \cdot \tilde{\gamma}'_0(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (-9 \sin^2 t + 27 \cos t) \, dt = -9\pi,$$

e analogamente

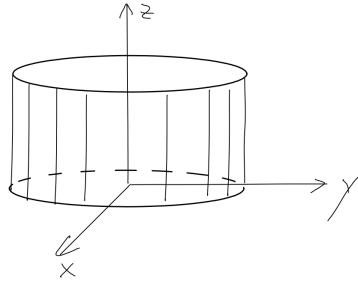
$$\int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_1(t)) \cdot \tilde{\gamma}'_1(t) \, dt = -4\pi,$$

da cui deduciamo che il flusso richiesto vale -5π .

Esercizio 2.2. Dato il campo $F(x, y, z) = (y, xz, z)$ e la superficie cilindrica $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ calcolare il flusso del rotore di F uscente da S .

Scriviamo la superficie S in forma parametrica, ovvero $S = \varphi(D)$ con

$$\varphi(\vartheta, z) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ z \end{bmatrix}, \quad (\vartheta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, 1].$$



Il dominio D è quindi un rettangolo e il suo bordo, per essere orientato positivamente, deve essere percorso in senso antiorario. Parametrizziamo quindi ∂D^+ come concatenazione dei quattro segmenti

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), & t &\in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) &= (2\pi, t), & t &\in [0, 1] \\ \gamma_3(t) &= (2\pi - t, 1), & t &\in [0, 2\pi] \\ \gamma_4(t) &= (0, 1 - t), & t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$ e, per il teorema di Stokes

$$I = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\sigma,$$

dove la normale N è quella indotta dalla parametrizzazione φ . Per capire se I è proprio il flusso richiesto, determiniamo la normale N . Essendo

$$\varphi_\vartheta \wedge \varphi_z = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

deduciamo quindi che N è diretta verso l'esterno del cilindro, quindi φ induce una normale rispetto alla quale il flusso di F è uscente dal cilindro e il flusso da calcolare è proprio I .

Definendo $\tilde{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$, $i = 1, \dots, 4$, abbiamo

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{\gamma}_i} F \cdot ds,$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1(t) &= \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] & \tilde{\gamma}_2(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi \\ \sin 2\pi \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1] \\ \tilde{\gamma}_3(t) &= \begin{bmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] & \tilde{\gamma}_4(t) &= \begin{bmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \\ 1 - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Si noti il seguente fatto: $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ parametrizzano entrambe il segmento congiungente i punti $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$, ma con orientazione opposta. Si ha quindi che

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} F \cdot ds = - \int_{\tilde{\gamma}_4} F \cdot ds$$

e quindi

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds + \int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot ds.$$

Calcoliamo ora

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_1) \cdot \tilde{\gamma}'_1 \, dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi;$$

essendo inoltre

$$\int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt = 0$$

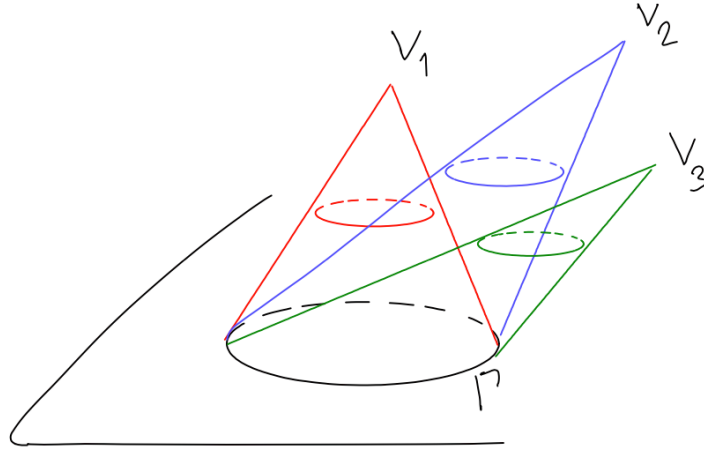
concludiamo che il flusso richiesto vale $I = -\pi$.

Osservazione 2.17. *Nell'esercizio precedente, nel calcolare l'integrale su ∂S^+ , i contributi corrispondenti alle curve $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ in \mathbb{R}^3 si elidono tra loro. Tali curve non fanno parte del bordo "reale" della superficie S e si presentano per via del fatto che la parametrizzazione non è iniettiva.*

Esercizio 2.3. Sia Γ il sostegno di una curva regolare, chiusa e semplice giacente nel piano orizzontale $z = 0$ e, fissato un generico punto $p \in \mathbb{R}^3$ nel semispazio superiore (cioè la terza componente di p è positiva) sia S_p la superficie laterale del cono avente come vertice p e come base la regione del piano $z = 0$ racchiusa da Γ . Supponiamo inoltre che S_p sia orientata con normali dirette verso l'esterno del cono. Mostrare che il flusso

$$\int_{S_p} \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma$$

non dipende da p .



La curva Γ è il bordo della superficie S_p e non dipende dal punto p ; il risultato segue quindi immediatamente dal teorema di Stokes.

Esercizio 2.4. Mostrare che il flusso attraverso una sfera di un campo che ammette potenziale vettore è nullo.

Sia $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo esprimibile nella forma $G = \operatorname{rot} F$ con $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ potenziale vettore. Sia S la superficie sferica di raggio R centrata nell'origine (non è restrittivo assumere che il centro della sfera sia nell'origine). Vogliamo calcolare

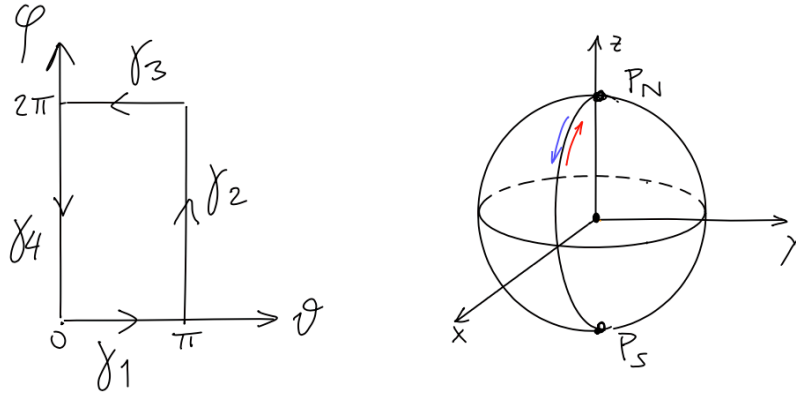
$$\int_S G \cdot N \, d\sigma$$

e dimostrare che questo integrale è nullo. Per il teorema di Stokes

$$\int_S G \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds.$$

Parametrizziamo la sfera con le coordinate sferiche $p(\vartheta, \varphi)$, come nell'Esempio 1.8. Il dominio dei parametri è $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ e il suo bordo con orientazione positiva è la concatenazione dei quattro segmenti

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), \quad \gamma_3(t) = (\pi - t, 2\pi), \quad t \in [0, \pi] \\ \gamma_2(t) &= (\pi, t), \quad \gamma_4(t) = (0, 2\pi - t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$



Le immagini di questi segmenti attraverso la parametrizzazione p sono

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1(t) &= \begin{bmatrix} R \sin t \\ 0 \\ R \cos t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} R \sin t \\ 0 \\ -R \cos t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi] \\ \tilde{\gamma}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_4(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

I supporti di $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ sono dei punti; $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ non danno quindi un contributo per il calcolo di $\int_{\partial S^+} F \cdot ds$, in quanto, essendo curve costanti, $\tilde{\gamma}'_2(t) = \tilde{\gamma}'_4(t) = 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Le curve $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_3$ descrivono entrambe il meridiano congiungente $(0, 0, R)$ con $(0, 0, -R)$ e con ascissa positiva, ma hanno orientazione opposta. Il loro contributo al calcolo del flusso è quindi opposto. Concludiamo quindi che il flusso è nullo.

Esercizio 2.5. Siano

$$F(x, y, z) = \left(\frac{z}{1+x^2}, x + \sin z, \arctan x + y \cos z \right)$$

ed $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso del rotore di F uscente da S (intesa come porzione di sfera).

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia ora

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1 + a^2, z \geq 0\}.$$

Calcolare il flusso del rotore di F uscente da S_a al variare del parametro a .

Per calcolare il flusso $\Phi = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma$ (dove N è la normale esterna alla semi-sfera) non usiamo il teorema di Stokes, ma calcoliamo

$$\text{rot } F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{z}{1+x^2} & x + \sin z & \arctan x + y \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos z - \cos z \\ -\frac{z}{1+x^2} + \frac{z}{1+x^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametrizzando ora la semisfera S come superficie cartesiana attraverso la funzione $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, abbiamo che la terza componente del versore normale è 1. Quindi $\text{rot } F \cdot N = 1$ e

$$\Phi = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \int_D 1 \, dx \, dy = \pi.$$

essendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Consideriamo ora la superficie S_a , ovvero la calotta sferica superiore ottenuta tagliando una sfera centrata in $(0, 0, a)$ e raggio $\sqrt{1 + a^2} > |a|$ con il piano $z = 0$. Si ha che

$$S_a \cap \{z = 0\} = S \cap \{z = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi $\partial S_a^+ = \partial S^+$ e per il teorema di Stokes abbiamo

$$\int_{S_a} \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S_a^+} F \cdot ds = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \pi.$$

2.4.2. Domande e risposte sul teorema di Stokes.

Domanda 2.5. *Come si fa a capire se due superfici hanno lo stesso bordo?*

La domanda va riformulata più correttamente così: *come si individua il bordo di una superficie?* Si cerca di capire come è fatta la superficie, eventualmente disegnandola. Più precisamente, si fissa una parametrizzazione φ e relativo dominio dei parametri D . Quindi si scrive $\varphi(\partial D)$ come unione di curve orientate. Se alcune di esse sono ripetute, ma con orientazione opposta, si tolgono. Idem per quelle costanti. Ciò che resta è il bordo reale della superficie, costituito da una o più curve di \mathbb{R}^3 orientate secondo l'orientazione indotta da φ . Se la parametrizzazione è cartesiana, allora $\varphi(\partial D)$ è esattamente il bordo della superficie.

Domanda 2.6. *Posso usare il teorema di Stokes per calcolare il flusso di un qualunque campo attraverso una data superficie?*

No, posso usarlo solo se il campo vettoriale considerato è il rotore di un altro campo vettoriale (cioè se ammette potenziale vettore). Infatti, il teorema di Stokes è noto anche come *teorema del rotore*.

2.4.3. *La Legge della circuitazione di Ampère.* Consideriamo un filo rettilineo infinitamente esteso, percorso da corrente stazionaria di intensità I , collocato lungo l'asse delle z orientato secondo il verso di percorrenza della corrente. Come abbiamo visto nell'esempio 2.15, il campo magnetico generato dalla corrente è

$$G(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e Z è l'asse z . Consideriamo una circonferenza di raggio $R > 0$, contenuta in un piano orizzontale $z = h$, centrata in $(0, 0, h)$ e percorsa una volta sola in senso antiorario. Detta $\Gamma_{R,h}$ tale circonferenza, che possiamo parametrizzare con

$$\gamma_{R,h}(t) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h \end{bmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

sappiamo che

$$\oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds = \mu_0 I \quad \forall R > 0, \forall h \in \mathbb{R}.$$

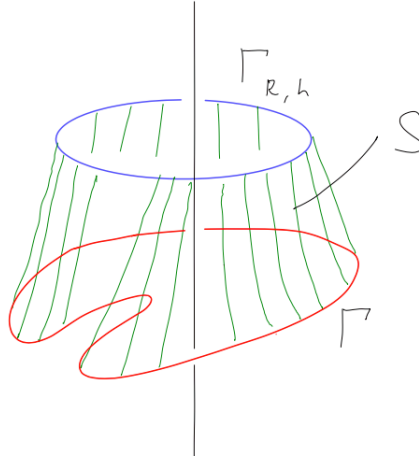
Prendiamo ora una curva regolare, chiusa Γ concatenata all'asse z e che allaccia l'asse z con un solo avvolgimento antiorario, cioè deformabile con continuità in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ in una delle circonferenze orientate $\Gamma_{R,h}$, per qualche $R > 0$ e $h \in \mathbb{R}$. Allora vale la *Legge di Ampère*

$$\oint_{\Gamma} G \cdot ds = 2\pi c = \mu_0 I,$$

cioè la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa concatenata col filo non dipende dalla forma del filo. Dimostriamo la legge di Ampère. È possibile trovare una parametrizzazione $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ della curva Γ , di classe C^1 , e delle costanti $R > 0$ e $h \in \mathbb{R}$ tali che la deformazione

$$\varphi(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\gamma_{R,h}(t) \quad \forall (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

abbia immagine in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$.



Posto $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, la deformazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisce una superficie parametrica $S = \varphi(D)$ contenuta in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ il cui bordo è costituito dalle curve Γ e $\Gamma_{R,h}$ ed è tale che per ogni valore di $t \in [0, 2\pi]$ il segmento che congiunge i punti $\gamma(t)$ e $\gamma_{R,h}(t)$ è interamente contenuto in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$. Ragioniamo ora come nell'Esercizio 2.2, ovvero parametrizziamo i quattro segmenti del bordo ∂D^+ attraverso $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 ; consideriamo quindi le loro immagini attraverso φ , $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ e $\tilde{\gamma}_4$, e otteniamo che

- $\tilde{\gamma}_1$ parametrizza Γ ,
- $-\tilde{\gamma}_4$ parametrizza $\Gamma_{R,h}$,
- $\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \oint_{\Gamma} F \cdot ds - \oint_{\Gamma_{R,h}} F \cdot ds.$

Il teorema di Stokes garantisce che

$$\int_S (\text{rot } G) \cdot ds = \int_{\partial S^+} G \cdot ds = \oint_{\Gamma} F \cdot ds - \oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds$$

ed essendo G un campo irrotazionale, deduciamo che

$$\oint_{\Gamma} G \cdot ds = \oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds = \mu_0 I.$$

2.4.4. Campi solenoidali: condizione sufficiente. Consideriamo un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 . Ricordiamo che condizione necessaria affinché F sia conservativo (ovvero affinché esista $U: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla U$) è che $\text{rot } F = 0$. Vediamo ora una condizione necessaria affinché F ammetta un potenziale vettore.

Definizione 2.18. Si chiama divergenza di F il campo scalare

$$\operatorname{div} F: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

La divergenza di F si indica anche nel seguente modo formale $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$, dove ∇ indica l'operatore vettoriale $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Un campo F la cui divergenza è nulla in ogni punto è detto campo solenoidale.²

Si ha che:

Teorema 2.19. Se il campo $G: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ammette potenziale vettore in A allora G è solenoidale.

La dimostrazione segue dal fatto che se $G = \operatorname{rot} F$, allora $\operatorname{div} G = \nabla \cdot \nabla \wedge F = 0$ (formalmente si ha un prodotto triplo con due vettori uguali; facendo i conti, le componenti di $\operatorname{div} G$ sono della forma $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$ per il teorema di Schwarz, essendo F di classe C^2).

L'essere solenoidale è quindi condizione necessaria, ma in generale non sufficiente, all'ammettere un potenziale vettore.

Esempio 2.20. Il campo elettrico generato dalla carica q

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

è solenoidale (verificarlo), ma non ammette potenziale vettore. Se infatti F ammettesse un potenziale vettore, allora, detta S una qualsiasi sfera centrata in q avremmo

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = 0,$$

grazie al risultato visto nell'esercizio 2.4. D'altra parte però abbiamo calcolato nell'esempio 2.3 a pagina 11 che

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \neq 0.$$

Il campo elettrico è quindi solenoidale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ma non ammette potenziale vettore. Ricordiamo che è conservativo, cioè ammette potenziale scalare. Al contrario, il campo magnetico dell'esempio 2.15 ammette potenziale vettore, è irrotazionale ma non ammette potenziale scalare.

Osservazione 2.21. Il seguente risultato è noto come decomposizione di Helmholtz.

Dato un campo vettoriale di classe C^2 $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| G(\vec{x}) = C_0 \in \mathbb{R}$, esistono due campi di classe C^3

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che, per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$G(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x}) + \operatorname{rot} F(\vec{x}).$$

Ovvero, qualsiasi campo C^3 che decade bene all'infinito è la somma di un campo conservativo e di un campo che ammette potenziale vettore.

²Talvolta in letteratura si definisce solenoidale un campo che ammette potenziale vettore. La definizione che proponiamo in queste dispense è quella del volume di Analisi 2 di G. De Marco, edito da Zanichelli.

2.5. Teorema della divergenza. In questa sezione ci proponiamo di calcolare il flusso di un campo attraverso una superficie chiusa, ovvero una superficie che è il bordo di un dominio di \mathbb{R}^3 . Iniziamo a presentare la definizione di dominio regolare in \mathbb{R}^3 .

Definizione 2.22. Un insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ si dice dominio regolare se

- C è chiuso e limitato;
- l'interno di C è non vuoto e connesso;
- il bordo di C è unione di superfici, $\partial C = S_0 \cup \dots \cup S_k$, dove ogni S_i è una superficie parametrica semplice, regolare e orientata con normale diretta verso l'esterno di C .

Inoltre, se le superfici S_i che compongono il bordo di C si intersecano l'un l'altra solo in corrispondenza della loro frontiera, allora, dato un campo vettoriale F definito in un intorno di ∂C , il flusso di F uscente da C è dato da

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_{S_0} F \cdot N \, d\sigma + \dots + \int_{S_k} F \cdot N \, d\sigma.$$

Se invece orientiamo ogni S_i con normale diretta verso l'interno di C , il corrispondente flusso si dice entrante in C .

Osserviamo che il flusso entrante e il flusso uscente sono l'uno l'opposto dell'altro.

Esempi 2.23. (i) Sfere, coni, cubi, parallelepipedi, cilindri e loro intersezioni sono domini regolari di \mathbb{R}^3 .

- (ii) Dato un dominio regolare C e una palla aperta B la cui chiusura sia contenuta nell'interno di C , anche $C_0 = C \setminus B$ è un dominio regolare e $\partial C_0 = \partial C \cup \partial B$, con ∂B orientato con normale esterna a C_0 e quindi interna a B .

Esempio 2.24. Consideriamo due superfici cartesiane S_1 e S_2 definite da

$$S_i = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f_i(x, y)\} \quad (i = 1, 2)$$

dove D è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^1 . Supponiamo che

$$f_1(x, y) < f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \setminus \partial D \quad \text{e} \quad f_1(x, y) = f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial D.$$

Ciò significa che le superfici S_1 e S_2 hanno il bordo in comune, giacente sul piano orizzontale di equazione $z = 0$ e racchiudono un insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

che risulta essere un dominio regolare di \mathbb{R}^3 . Dimostriamo che se G è un campo vettoriale definito in un intorno di ∂C , che ammette potenziale vettore nel suo dominio, allora il flusso di G uscente da C è nullo (e quindi anche quello entrante in C).

Dobbiamo orientare le superfici S_1 e S_2 con le normali uscenti da C . Se prendiamo la parametrizzazione cartesiana

$$\varphi_i(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_i(x, y) \end{bmatrix}$$

abbiamo che $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ ha terza componente positiva. Ciò significa che φ_i induce un'orientazione con normale uscente da C se $i = 2$ ed entrante in C se $i = 1$. Pertanto $\partial C = (-\varphi_1(D)) \cup (\varphi_2(D))$ e quindi

$$\int_{\partial C} G \cdot N \, d\sigma = - \int_{\varphi_1(D)} G \cdot N \, d\sigma + \int_{\varphi_2(D)} G \cdot N \, d\sigma.$$

D'altra parte, se $G = \operatorname{rot} F$, per il teorema di Stokes,

$$\int_{\varphi_i(D)} G \cdot N \, d\sigma = \int_{\varphi_i(\partial D^+)} F \cdot ds \quad (i = 1, 2).$$

Siccome $\varphi_1 = \varphi_2$ su ∂D , otteniamo che

$$\int_{\varphi_1(\partial D^+)} F \cdot ds = \int_{\varphi_2(\partial D^+)} F \cdot ds$$

e quindi

$$\int_{\partial C} G \cdot N \, d\sigma = - \int_{\varphi_1(\partial D^+)} F \cdot ds + \int_{\varphi_2(\partial D^+)} F \cdot ds = 0.$$

Analogamente a quanto visto negli esempi 2.4 e 2.24, si ha che dato un dominio regolare C in \mathbb{R}^3 , se F è un campo definito in un intorno di ∂C che ammette potenziale vettore, allora il flusso di F attraverso ∂C è nullo. Se F non ammette un potenziale vettore, ci chiediamo come si possa mettere in relazione il suo flusso attraverso la superficie chiusa S con il volume racchiuso da S .

Teorema della divergenza. *Dati un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 sull'aperto A e un dominio regolare $C \subset A$, allora*

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Ovvero, il flusso del campo F attraverso ∂C uscente da C è uguale all'integrale della divergenza di F sul volume C .

Osservazione 2.25. *Il teorema della divergenza mette quindi in relazione un flusso superficiale con un integrale di volume.*

Il teorema può in realtà essere esteso a qualsiasi dimensione; in particolare in dimensione 1 si riduce al teorema fondamentale del calcolo integrale; in dimensione 2 invece equivale alla formula di Gauss-Green. Infatti, se $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare ed $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con A aperto contenente D allora abbiamo

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (*)$$

Consideriamo ora una parametrizzazione del bordo di D , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, in modo tale che la normale esterna a D , N , sia ruotata di $-\pi/2$ rispetto al vettore tangente. Abbiamo

$$T = \left(\frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'(t)|}, \frac{\gamma'_2(t)}{|\gamma'(t)|} \right), \quad N = \left(\frac{\gamma'_2(t)}{|\gamma'(t)|}, -\frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'(t)|} \right)$$

quindi

$$\int_{\partial D^+} F \cdot N \, ds = \int_a^b [-F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t)] \, dt = \int_a^b (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Il teorema della divergenza quindi in questo contesto diventa

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_a^b (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

che non è altro che la formula di Gauss-Green per il campo G di componenti $(G_1, G_2) = (-F_2, F_1)$.

Dimostrazione. Mimiamo la dimostrazione della formula di Gauss-Green considerando solamente domini semplici rispetto ai tre assi (le definizioni sono analoghe a quelle per i domini bidimensionali). Decomponiamo ora il campo $F = (f_1, f_2, f_3) = F_1 + F_2 + F_3$, dove $F_i = f_i e_i$, $i = 1, 2, 3$. Dimostriamo le seguenti tre righe la cui somma fornisce la tesi del teorema

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_C \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial C} F_1 \cdot N d\sigma \\ (2) \quad & \int_C \frac{\partial f_2}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial C} F_2 \cdot N d\sigma \\ (3) \quad & \int_C \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma. \end{aligned}$$

Queste tre uguaglianze sfruttano rispettivamente che il dominio è x -semplice, y -semplice e z -semplice. Verifichiamo (3) esprimendo

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare e $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha \leq \beta$ su D . Il bordo di C risulta quindi essere

$$\partial C = S_\alpha \cup S_\beta \cup S_l$$

e dovendo calcolare il flusso uscente da C la normale esterna a ∂C sarà diretta verso l'alto su S_β , verso il basso su S_α , orizzontale su S_l (in quanto S_l è parallela all'asse z). Decomponiamo quindi

$$\int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma = \int_{S_\alpha} F_3 \cdot N d\sigma + \int_{S_\beta} F_3 \cdot N d\sigma + \int_{S_l} F_3 \cdot N d\sigma,$$

e calcoliamo separatamente

$$\int_{S_l} F_3 \cdot N d\sigma = 0,$$

in quanto F_3 è verticale ed N orizzontale. Considerano ora $\varphi(x, y) = [x, y, \beta(x, y)]^T$ abbiamo

$$\int_{S_\beta} F_3 \cdot N d\sigma = \int_D F_3(x, y, \beta(x, y)) \cdot (\varphi_x \wedge \varphi_y) dx dy = \int_D f_3(x, y, \beta(x, y)) dx dy.$$

Infine la superficie S_α va parametrizzata con la parametrizzazione opposta a quella cartesiana (che ha la normale diretta verso l'interno di C); quindi si ottiene

$$\int_{S_\alpha} F_3 \cdot N d\sigma = - \int_D f_3(x, y, \alpha(x, y)) dx dy.$$

Concludiamo quindi l'uguaglianza (3)

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma &= \int_D [f_3(x, y, \beta(x, y)) - f_3(x, y, \alpha(x, y))] dx dy \\ &= \int_D \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int_C \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

□

2.5.1. *Esercizi sul teorema della divergenza.*

Esercizio 2.6. *Applicando il teorema della divergenza, calcolare il flusso Φ del campo F uscente dal dominio C di \mathbb{R}^3 nei seguenti casi*

- 1) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, C è l'ottaedro di vertici $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$;
- 2) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{y+3}, -\log(y+3), 2z \right)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;
- 3) $F(x, y, z) = (2xz + y, x, yz)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1) Calcoliamo il flusso uscente dall'ottaedro

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 3 \int_C dx \, dy \, dz = 3 \operatorname{Volume}(C).$$

Essendo C l'unione di due coni a base quadrata di lato $\sqrt{2}$ e altezza 1 abbiamo

$$\operatorname{Volume}(C) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Quindi $\Phi = 4$.

2) Abbiamo $\operatorname{div} F = 2$ quindi chiamiamo D il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \operatorname{Volume}(C) = 2 \int_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx \, dy = 2 \int_D (x^2 + y^2) dx \, dy \\ &= 2 \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = 16\pi. \end{aligned}$$

3) Essendo $\operatorname{div} F = 2z + y$ abbiamo

$$\Phi = \int_C (2z + y) dx \, dy \, dz$$

C è la porzione di palla unitaria contenuta nell'ottante in cui le tre coordinate sono positive; possiamo quindi utilizzare le coordinate sferiche

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta),$$

per cui

$$C = \left\{ (r, \vartheta, \varphi) : r \in [0, 1], \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Calcoliamo quindi il flusso

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi [r^2 \sin \vartheta (2r \cos \vartheta + r \sin \varphi \sin \vartheta)] \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta + \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3}{16} \pi. \end{aligned}$$

2.5.2. *Il teorema di Gauss in elettrostatica.* Dato un dominio regolare $C \subset \mathbb{R}^3$ mostriamo che il flusso del campo generato da una carica q posta all'interno di C e uscente da ∂C è indipendente da C e vale $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Senza perdere in generalità assumiamo che q sia posta nell'origine degli assi di riferimento.

Ricordiamo che abbiamo già dimostrato questo risultato quando C è una sfera centrata in q (si veda l'Esempio 2.3 a pagina 11). Abbiamo inoltre visto (nell'Esempio 2.20 a pagina 28) che il campo elettrico è solenoidale, ovvero la sua divergenza è nulla in ogni punto di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Per calcolare il flusso ci proponiamo di usare il teorema della divergenza. Essendo $q \in C$ non possiamo però applicare direttamente il teorema al dominio C , in quanto il campo elettrico

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

non è definito in 0, dove si trova la carica q . Consideriamo una palla C_r di raggio r centrata in 0, con r sufficientemente piccolo in modo tale che C_r sia interamente contenuta nella parte interna di C . Consideriamo quindi

$$\tilde{C} = C \setminus C_r.$$

Applichiamo dunque il teorema della divergenza a $\tilde{C} \subset A = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, osservando che F è di classe C^1 sull'aperto A . Abbiamo che

$$0 = \int_{\tilde{C}} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \tilde{C}} F \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma + \int_{\partial C_r} F \cdot N \, d\sigma;$$

l'ultimo integrale è il flusso *uscente* dal volume \tilde{C} attraverso la superficie sferica ∂C_r , ovvero il flusso entrante nella sfera C_r attraverso la sua superficie. Tale flusso è opposto a quello uscente dalla sfera C_r attraverso la sua superficie e vale $-\frac{q}{\epsilon_0}$ (Esempio 2.3). Dalle identità precedenti concludiamo quindi

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}.$$