Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 15 luglio 2024

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}\,.$$

(a) Studiare gli zeri della funzione a denominatore $g(z) = 1 - e^{\frac{1}{z}}$ al finito, determinandone l'ordine e disegnandoli sul piano complesso.

(b) Studiare le singolarità (tipo e ordine) di $f(z)$ al finito;

(c) Studiare il punto all'infinito (se è una singolarità determinarne il tipo, se è un polo o uno zero stabilirne l'ordine);

(d) Calcolare i primi tre termini non nulli dello sviluppo in serie di $f(z)$ intorno al punto all'infinito. Determinare la regione di convergenza della serie intorno al punto all'infinito sia nel piano complesso di $t = \frac{1}{z}$ sia nel piano complesso di z.

(e) Calcolare l'integrale

$$I = \oint_C f(z)\,dz$$

dove C è la circonferenza di raggio 1 percorsa in senso orario.

Soluzione

(a) Il denominatore $g(z) = 1 - e^{\frac{1}{z}}$ si annulla quando

$$e^{\frac{1}{z}} = 1$$

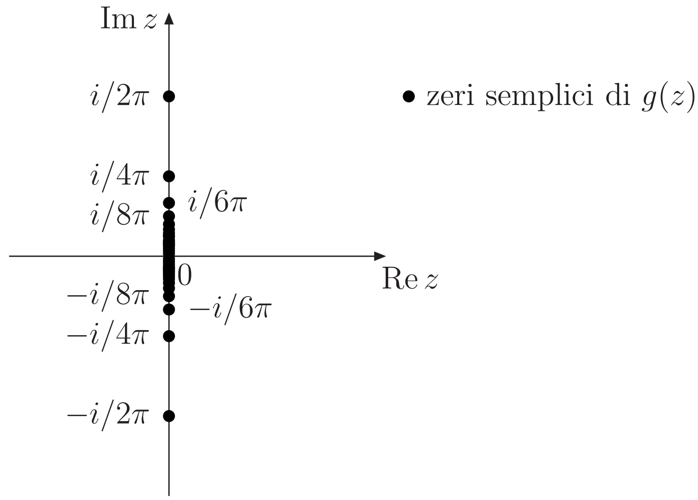
che succede per

$$\frac{1}{z} = 2\pi i\, n, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \qquad \text{cioè per} \qquad z = \frac{1}{2\pi i\, n} = -\frac{i}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,,$$

dove abbiamo escluso $n = 0$ dato che stiamo studiando la funzione al finito. Questi sono zeri semplici del denominatore $1 - e^{\frac{1}{z}}$, infatti la usa derivata

$$\frac{dg}{dz} = \frac{d}{dz}\left(1 - e^{\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z^2}\,e^{\frac{1}{z}}$$

non si annulla in $z = \frac{1}{2\pi i n}$. Questi zeri semplici stanno tutti sull'asse immaginario, hanno modulo più piccolo di 1 e si accumulano in $z = 0$:



(b) Dai risultati del punto (a) deduciamo che al finito $f(z)$ ha poli semplici in

$$z = \frac{1}{2\pi i\, n} = -\frac{i}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

Poiché questi poli si accumulano in $z = 0$, $f(z)$ ha una singolarità non isolata in $z = 0$ (il fattore $1/z$ è ininfluente).

(c) Per studiare il punto all'infinito facciamo la sostituzione $z = 1/t$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{1 - e^t}\,.$$

Quando t va a zero sia il numeratore che il denominatore si annullano. Il numeratore ha uno zero semplice in $t = 0$. Per capire l'ordine dello zero del denominatore, facciamone la derivata:

$$\frac{d}{dt}\left(1 - e^t\right) = -\,e^t$$

Vediamo che non si annulla in $t = 0$ che, pertanto, è uno zero semplice anche del denominatore. Quindi $t = 0$ è un punto regolare non nullo di $f(1/t)$. Di conseguenza $z = \infty$ è un punto regolare non nullo di $f(z)$.

(d) Per determinare la serie di $f(z)$ intorno al punto all'infinito sviluppiamo $f(1/t)$ intorno a $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{t}{1-e^t} = \frac{t}{1-\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathcal{O}(t^4)\right]} \\
&= \frac{t}{-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\mathcal{O}(t^4)} = -\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\mathcal{O}(t^3)} \\
&= -\left\{1+\left[-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\mathcal{O}(t^3)\right]+\left[-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\mathcal{O}(t^3)\right]^2+\mathcal{O}(t^3)\right\} \\
&= -\left\{1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\frac{t^2}{4}+\mathcal{O}(t^3)\right\} \\
&= -1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\mathcal{O}(t^3)\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto lo sviluppo di $f(z)$ intorno all'infinito è dato da

$$
f(z) = -1+\frac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{12}\frac{1}{z^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right)\,.
$$

Per la regione di convergenza conviene partire dal piano complesso di t. Determiniano dove sono le singolarità in questo piano complesso. I poli semplici di $f(z)$ sono in

$$
z = \frac{1}{2\pi i\, n} = -\frac{i}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}\,,
$$

cioè in

$$
t = \frac{1}{z} = 2\pi i\, n, \quad n \in \mathbb{Z}\,.
$$

Il valore $n = 0$ corrisponde a $t = 0$, dove il polo semplice è schermato dal fattore t a numeratore di $f(1/t)$. Le singolarità più vicine a $t = 0$ sono per $n = \pm 1$, che corrispondono a $t = \pm 2\pi i$. Pertanto la regione di convergenza della serie intorno a $t = 0$ è un cerchio di raggio $R = 2\pi$. La regione di convergenza è quindi definita da

$$
|t| < 2\pi, \qquad \text{che corrisponde a} \qquad |z| = \frac{1}{|t|} > \frac{1}{2\pi}\,.
$$

(e) Visto che tutte le singolarità di $f(z)$ hanno modulo minore di 1, esse sono tutte interne alla circonferenza C. Essendo questa percorsa in senso orario, avremo

$$
I = \oint_C f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=\infty}
$$

Il residuo all'infinito si può facilmente leggere dal coefficiente di $1/z$, cambiato di segno, dello sviluppo intorno all'infinito:

$$\mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=\infty} = -\frac{1}{2}\,.$$

Perciò otteniamo

$$I = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=\infty} = -\,\pi i\,.$$

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$\frac{1}{2}(z^n-1)(z+1)^m\,u'' + 2(z+1)\,u' + u = 0 \qquad m,n \in \mathbb{Z}^+ = \{1,2,\ldots\}$$

(a) Determinare i valori di m,n per cui l'equazione ha solo delle singolarità fuchsiane.

(b) Per $n=1, m=1$, determinare la forma delle due soluzioni intorno a $z=1$.

(c) Per $n=1, m=1$, determinare la relazione di ricorrenza dei coefficienti della soluzione intorno a $z=1$, per la soluzione dell'equazione indiciale ρ_1 con $\rho_1 > \rho_2$.

(d) Utilizzando il teorema di Cauchy-Hadamard, determinare il raggio di convergenza della soluzione della parte (c).

Soluzione

(a) Scrivendo l'equazione differenziale nella forma standard, abbiamo

$$P(z) = \frac{4}{(z^n-1)(z+1)^{m-1}} \qquad\qquad Q(z) = \frac{2}{(z^n-1)(z+1)^m}\,.$$

Studiamo le funzioni $1/(z^n-1)$, $1/(z+1)^m$:

$$\frac{1}{z^n-1}: \quad \text{ha poli semplici per } z_k = e^{i2\pi k/n}\,, \quad \text{per} \quad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

$$\frac{1}{(z+1)^m}: \quad \text{ha un polo ordine } m \text{ per} \quad z=-1.$$

Si nota che per n pari, uno dei poli semplici di $1/(z^n-1)$ è uguale al polo di $1/(z+1)^m$, cioè $z_{n/2}=-1$. Quindi, abbiamo due casi:

– n pari

$P(z)$ ha poli semplici per z_k, con $k = \{0, 1, \ldots, n-1\} \backslash \{n/2\}$, e un polo di ordine m per $z = -1$. Per avere solo delle singolarità fuchsiane, $P(z)$ deve avere al massimo poli semplici e $Q(z)$ al massimo poli doppi. Questo avviene solo se $m = 1$. Non ci sono restrizioni su n.

– n dispari

Sia $P(z)$ che $Q(z)$ hanno dei poli semplici per tutti gli z_k, visto che $z_k \neq -1$ per ogni k. Per garantire che i punti singolari siano fuchsiani, basta richiedere che $m \in \{1, 2\}$. Non ci sono restrizioni su n.

(b) L'equazione diventa in questo caso

$$\frac{1}{2}(z-1)(z+1)\, u'' + 2(z+1)\, u' + u = 0\,,$$

con

$$P(z) = \frac{4}{(z-1)} \qquad\qquad Q(z) = \frac{2}{(z-1)(z+1)}\,.$$

$$\Longrightarrow\; p_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{4}{(z-1)} = 4\,, \qquad q_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{2}{(z-1)(z+1)} = 0\,.$$

L'equazione indiciale e le sue soluzioni sono

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0 \;\Longrightarrow\; \rho^2 + 3\rho = 0 \;\Longrightarrow\; \rho_{1,2} = \{0, -3\}\;.$$

Quindi la prima soluzione, corrispondente a $\rho_1 = 0$, ha la forma

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,(z-1)^k\,, \qquad C_0 \neq 0\,.$$

Dato che $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$, la seconda soluzione ha la forma

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\,(z-1)^{k-3} + d\, u_1\, \log(z-1)\,, \qquad d_0 \neq 0\,,$$

e dove d potrebbe o meno annullarsi.

(c) Cerchiamo la soluzione corrispondente a $\rho_1 = 0$, che ha la forma

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, (z-1)^k \,, \qquad C_0 \neq 0,$$

con derivate

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (z-1)^{k-1} \qquad u'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (k-1) \, (z-1)^{k-2} \,.$$

Possiamo scrivere i termini dell'equazione differenziale utilizzando le serie di potenze

$$\underbrace{\frac{1}{2}(z-1)(z+1)\,u''}_{A} \; + \; \underbrace{2(z+1)\,u'}_{B} \; + \; u = 0 \,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(z-1)(z+1)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (k-1) \, (z-1)^{k-2} \\
&= \frac{1}{2}(z+1)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (k-1) \, (z-1)^{k-1} \\
&= \left(\frac{z-1}{2} + 1\right)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (k-1) \, (z-1)^{k-1} \\
\Longrightarrow \; A &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, \frac{k\,(k-1)}{2} \, (z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (k-1) \, (z-1)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= 2\,(z+1)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (z-1)^{k-1} \\
&= 2\,\left((z-1) + 2\right)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \, k \, (z-1)^{k-1} \\
\Longrightarrow \; B &= \sum_{k=0}^{\infty} 2\,C_k \, k \, (z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} 4\,C_k \, k \, (z-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le espressioni pr A, B, u abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[\frac{k(k-1)}{2} + 2k + 1\right] (z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[k(k-1) + 4k\right] (z-1)^{k-1} = 0.$$

Per portare la seconda somma nella stessa forma della prima, faciamo il cambio $k \to k+1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[\frac{k(k-1)}{2} + 2k + 1\right](z-1)^k + \sum_{k=-1}^{\infty} C_{k+1}\left[(k+1)k + 4(k+1)\right](z-1)^k = 0.$$

Notando che il termine $k = -1$ della seconda somma si annulla, possiamo scrivere l'equazione come

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ C_k \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right] + C_{k+1}\left[(k+1)(k+4)\right]\right\}(z-1)^k = 0$$

da cui si può ricavare la relazione di ricorrenza

$$C_{k+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{k+2}{k+4}\right) C_k\,.$$

In questo caso, si può trovare una forma chiusa per ciascun coefficiente in termini di C_0 **(non richiesto nell'esame)**.

Scrivendo esplicitamente i primi tre termini

$$\begin{aligned}
C_{k+1} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{k+2}{k+4}\right) C_k \\
C_1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}\right) C_0 \\
C_2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right) C_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2\cdot 3}{4\cdot 5}\right) C_0 \\
C_3 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}\right) C_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6}\right) C_0\,,
\end{aligned}$$

possiamo generalizare per C_n

$$C_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(n+1)!}{(n+3)!/6} C_0 \implies C_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{6}{(n+2)(n+3)} C_0$$

(d) Dalla relazione di ricorrenza si ricava

$$\frac{C_k}{C_{k+1}} = -2\left(\frac{k+4}{k+2}\right),$$

e quindi il raggio di convergenza è

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{C_k}{C_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} 2\left(\frac{k+4}{k+2}\right) = 2\,.$$

Si nota che il raggio di convergenza ρ è pari a la distanza tra $z = 1$ e la singularità più vicina, $z = -1$.

Esercizio 3

(a) Data la funzione

$$\mathcal{F}(k) \;=\; e^{-2|k-a|}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

la si anti-trasformi secondo Fourier, ottenendo la funzione $f(x,a)$. Qual è la classe C^n di derivabilità di $f(x,a)$? Giustificare la risposta.

(b) Si consideri $\mathcal{L}(s) \equiv f(s,ib)$, con s variabile complessa, $b \in \mathbb{R}$ ed f la funzione ricavata al punto precedente (si noti che il secondo argomento di questa f è puramente immaginario). Per quali valori di b la funzione $\mathcal{L}(s)$ può essere considerata una trasformata di Laplace?

(c) Si determini l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}(s)$ per tutti i valori di b trovati al punto precedente.

(d) Si anti-trasformi $\mathcal{L}(s)$ secondo Laplace per tutti i valori di b ammessi, ottenendo come risultato la funzione $g(t)$.

Soluzione

(a) Applichiamo la definizione di anti-trasformata di Fourier alla funzione $\mathcal{F}(k)$ data.

$$f(x,a) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-2|k-a|} e^{ikx}\,.$$

Conviene effettuare il cambio variabile $w = k - a$, da cui

$$\begin{aligned}
f(x,a) &= \frac{e^{iax}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-2|w|+iwx} \\
&= \frac{e^{iax}}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} dw\, e^{w(-2+ix)} + \int_{-\infty}^{0} dw\, e^{w(2+ix)} \right] \\
&= \frac{e^{iax}}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{-2+ix} + \frac{1}{2+ix} \right] \;=\; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{iax}}{x^2+4}\,.
\end{aligned}$$

La funzione $f(x,a)$ è infinitamente derivabile (ovvero C^∞), come conseguenza del fatto che $\lim_{|k|\to\infty} k^n \mathcal{F}(k) = 0 \;\forall\, n$.

(b) Si definisce

$$\mathcal{L}(s) \;\equiv\; f(s,ib) \;=\; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-bs}}{s^2+4}\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,.$$

Affinché $\mathcal{L}(s)$ possa essere interpretata come trasformata di Laplace, deve esistere un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall\, s$ con $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$, $\mathcal{L}(s)$ sia analitica e tenda a 0 per $|s| \to \infty$ uniformemente rispetto ad $\arg(s)$.
Nel caso in analisi, il denominatore di $\mathcal{L}(s)$ si annulla in $s = \pm 2i$, pertanto per $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0 = 0$ la funzione è analitica. Essa tende a 0 per $|s| \to \infty$ nel semipiano destro ($\mathrm{Re}(s) > 0$) solo se $b \geq 0$ (nel caso $b = 0$ è il denominatore ad assicurare tale comportamento asintotico).

(c) Dalla discussione precedente si deduce che l'ascissa di convergenza vale $\alpha_0 = 0$ per ogni scelta di $b \geq 0$.

(d) Dalla definizione di anti-trasformata di Laplace abbiamo

$$g(t)\,\Theta(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} ds\, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{(t-b)s}}{s^2+4}\,, \qquad \alpha > \alpha_0 = 0\,.$$

L'integrale si può calcolare mediante il lemma di Jordan. Per $t - b < 0$ il cammino d'integrazione deve essere chiuso nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, nel quale l'integrando è analitico. Il risultato dell'integrale in questo caso è pertanto nullo. Per $t - b > 0$ si chiude il cammino nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < \alpha$, pertanto l'integrale riceve contributi dai residui dell'integrando in $s = \pm 2i$ (poli semplici).

$$\begin{aligned} t - b > 0: \qquad g(t)\Theta(t) &= 2\pi i\,\frac{1}{2\pi i}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=\pm 1}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{(t-b)s}}{(s+2i)(s-2i)}\right]_{s=2ik} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{(t-b)2i}}{2i} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-(t-b)(2i)}}{2i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin[2(t-b)]\,. \end{aligned}$$

Scrivendo in forma compatta i due risultati, si ottiene

$$g(t)\Theta(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin[2(t-b)]\,\Theta(t-b)\,.$$

Possiamo pervenire allo stesso risultato sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f(t-b)\,\Theta(t-b)] &= e^{-bs}\,\mathcal{L}_s[f(t)]\,, \qquad b \geq 0\,, \\ \mathcal{L}_s[\sin(2t)] &= \frac{2}{s^2+4}\,. \end{aligned}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) &\equiv \mathcal{L}_s[g(t)] = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-bs}}{s^2+4} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-bs}\frac{1}{2}\mathcal{L}_s[\sin(2t)] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{L}_s\big\{\sin[2(t-b)]\Theta(t-b)\big\}\,,
\end{aligned}
$$

che coincide con il risultato del calcolo diretto.