

# METODI MATEMATICI DELLA FISICA

DISPENSE DEL CORSO

A.A. 2018/19

**M. B. BARBARO, M. FRAU, P. GAMBINO E S. SCIUTO**

*Dipartimento di Fisica, Università di Torino*

LAST UPDATE: 26 GENNAIO 2019



## INDICE

---

### i FUNZIONI ANALITICHE E EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN CAMPO COMPLESSO

7

1	ANALISI COMPLESSA	9
1.1	Il campo complesso	9
1.1.1	Richiami sui numeri complessi	9
1.2	Funzioni di variabile complessa	11
1.2.1	Funzioni reali di variabile complessa	11
1.2.2	Funzioni complesse di variabile complessa	14
1.2.3	Le funzioni $\ln z$ e $z^\alpha$ nel piano complesso	15
1.2.4	Derivata di una funzione complessa di variabile complessa	16
1.2.5	Condizioni di Cauchy-Riemann	16
1.2.6	Funzioni analitiche	19
1.2.7	Esempi	20
1.3	Funzioni armoniche	24
1.4	Integrazione in campo complesso	28
1.4.1	Curve nel piano complesso	28
1.4.2	Integrali in campo complesso	30
1.4.3	Teorema di Cauchy	33
1.4.4	Rappresentazione integrale di Cauchy	40
1.5	Serie in campo complesso	44
1.5.1	Serie di potenze	44
1.5.2	Serie di Taylor	45
1.5.3	Zeri	48
1.5.4	Serie di Laurent	49
1.5.5	Singularità isolate: poli e singularità essenziali	50
1.6	Residui	53
1.6.1	Teorema dei residui	53
1.6.2	Calcolo dei residui	54
1.7	Calcolo di integrali definiti con il metodo dei residui	56
1.7.1	Integrali trigonometrici	56
1.7.2	Integrali su tutto l'asse reale e Lemma di Jordan	59
1.7.3	Esempi	62
1.7.4	Singularità sul cammino di integrazione	68
1.7.5	Relazioni di dispersione	70
1.8	Studio del punto all'infinito	72
1.8.1	Esempi	73
1.8.2	Calcolo del residuo nel punto all'infinito	74

## 6 INDICE

2	EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN $\mathbb{C}$	79	
2.1	Equazioni differenziali ordinarie II ordine	79	
2.1.1	Soluzione nell'intorno di un punto regolare	82	
2.1.2	Soluzione nell'intorno di un punto singolare fuchsiano	87	
2.1.3	Esempio: l'equazione di Bessel	90	
2.1.4	Studio del comportamento all'infinito	93	
2.1.5	Esempi	94	
ii	INTRODUZIONE		
	ALL'ANALISI		
	ARMONICA		97
3	SERIE DI FOURIER	99	
3.1	Introduzione	99	
3.2	Funzioni periodiche e serie di Fourier	102	
3.2.1	Un primo esempio	103	
3.2.2	Serie di Fourier e funzioni trigonometriche.	104	
3.2.3	Convergenza puntuale delle serie trigonometriche di Fourier	105	
3.2.4	Importanti commenti	108	
3.2.5	Altri esempi	111	
4	TRASFORMATE INTEGRALI	113	
4.1	Trasformata di Fourier	113	
4.1.1	Esempi	114	
4.1.2	Convergenza dell'integrale di Fourier	117	
4.1.3	Proprietà della trasformata di Fourier	117	
4.1.4	Soluzione di equazioni differenziali mediante la trasformata di Fourier	122	
4.2	Trasformata di Laplace	125	
4.2.1	Esempi	126	
4.2.2	Proprietà della trasformata di Laplace	127	
4.2.3	Trasformate di Laplace ed equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti	130	
5	SPAZI $L^2$ E DISTRIBUZIONI	135	
5.1	Spazi $L^2$ e serie di Fourier	135	
5.2	Alcuni sistemi ONC	144	
5.3	Sistemi ONC in $L^2$ e distribuzioni.	147	
5.3.1	Operatori autoaggiunti e sistemi ortogonali	147	
5.3.2	Trasformata di Fourier in $L^2$	150	
5.4	La $\delta$ di Dirac e cenni sulle distribuzioni	151	
A	COROLLARI DELLA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI CAUCHY		159
B	EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECOND'ORDINE		163
B.1	Metodo di separazione delle variabili		165
C	PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE		169

## Parte I

# FUNZIONI ANALITICHE E EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN CAMPO COMPLESSO



## ANALISI COMPLESSA

---

### 1.1 IL CAMPO COMPLESSO

#### 1.1.1 Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso  $z$  è una coppia ordinata di numeri reali

$$z = a + ib = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

dove  $i$  è l'unità immaginaria

$$i^2 = -1.$$

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi è un *campo*, indicato con  $\mathbb{C}$ , dato dal prodotto cartesiano del campo reale  $\mathbb{R}$  con se stesso ( $\mathbb{C} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ ), dotato di due leggi di composizione interna, l'addizione e la moltiplicazione, che godono delle seguenti proprietà:

#### 1) Addizione (+)

Definizione:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2 \longrightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Proprietà:

Associativa:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Commutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Esiste l'elemento neutro  $0 \in \mathbb{C}$ , tale che

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C}$  esiste l'elemento inverso  $-z \in \mathbb{C}$ , tale che

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Quindi  $\mathbb{C}$  è un *gruppo abeliano* rispetto all'addizione, con elemento neutro 0.

## 2) Moltiplicazione ( $\cdot$ )

Definizione:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) . \end{aligned}$$

Proprietà:

Associativa:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 .$$

Commutativa:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 .$$

Esiste l'elemento neutro  $1 \in \mathbb{C}$ , tale che

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$  esiste l'elemento inverso  $z^{-1} \in \mathbb{C}$ , tale che

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

$$z = a + ib \longrightarrow z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} .$$

Quindi  $\mathbb{C} - \{0\}$  è un *gruppo abeliano* rispetto alla moltiplicazione, con elemento neutro 1.

Vale inoltre la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 .$$

### Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Un numero complesso  $z$  si può rappresentare graficamente come un punto nel *piano complesso* di  $z$  (o *piano di Argand*), sulle cui ascisse e ordinate si pongono rispettivamente la parte reale e immaginaria di  $z$ . La rappresentazione *cartesiana* di  $z$  è (Fig 1)

$$z = x + iy .$$

Una rappresentazione equivalente è quella *polare* (Fig 2)

$$z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$$



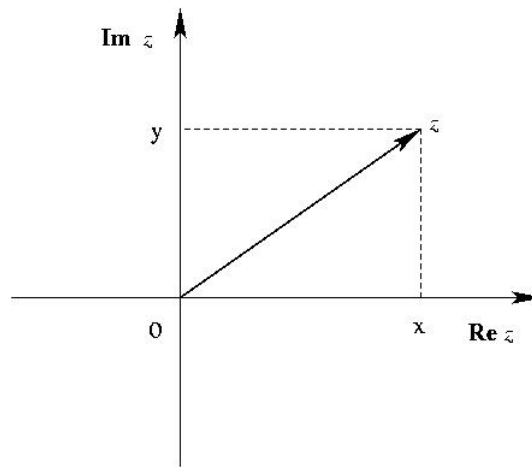


Figura 1.: Rappresentazione cartesiana del numero complesso  $z$

con

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{modulo di } z$$

e

$$\theta = \arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{argomento o fase di } z .$$

Il modulo di  $z$ ,  $r$ , è il modulo del vettore  $\vec{r}$  congiungente l'origine con il punto  $z$ , e  $\theta$  è l'angolo che questo vettore forma con l'asse delle ascisse.

Le relazioni fra componenti cartesiane e polari di  $z$  sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta .$$

Il *complesso coniugato* di un numero complesso  $z$  è un numero complesso  $z^* \in \mathbb{C}$  così definito:

$$z = x + iy = re^{i\theta} \longrightarrow z^* = x - iy = re^{-i\theta} .$$

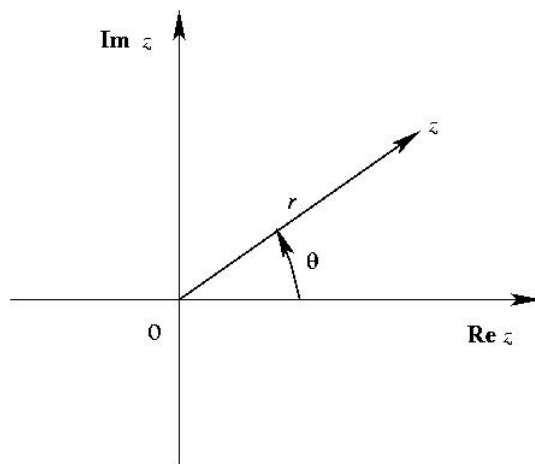
(si veda Fig 3). Si noti che  $z \cdot z^* = |z|^2 = r^2$ .

## 1.2 FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

### 1.2.1 Funzioni reali di variabile complessa

Una funzione reale di variabile complessa

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} , \quad E \subseteq \mathbb{C}$$

Figura 2.: Rappresentazione polare del numero complesso  $z$ 

è un'applicazione che associa un numero reale  $f(z)$  ad ogni  $z \in E$ , con  $E$  sottoinsieme del campo  $\mathbb{C}$ .

**Definizione di funzione continua.** La funzione  $f(z)$  si dice *continua* nel punto  $z = z_0$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ossia, ricordando la definizione di limite, se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \quad \forall z \in I_\delta(z_0),$$

dove  $I_\delta(z_0)$  è un *intorno* di raggio  $\delta$  del punto  $z_0$ :

$$I_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < \delta\}.$$

*Esempi*

1) La funzione *modulo*

$$f(z) = |z|$$

è una funzione reale di variabile complessa, continua in tutto il piano complesso.

2) Le funzioni

$$f(z) = \operatorname{Re} z \quad \text{e} \quad g(z) = \operatorname{Im} z$$

sono funzioni reali di variabile complessa, continue in tutto il piano complesso.

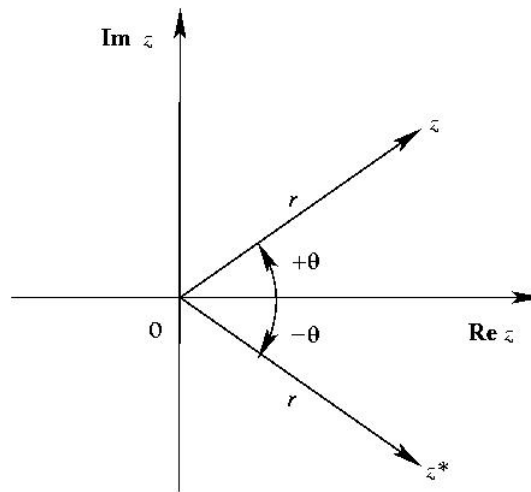


Figura 3.: Rappresentazione polare del numero complesso  $z$  e del suo complesso coniugato  $z^*$

### 3) La funzione argomento

$$\varphi(z) = \arg z$$

è una funzione reale di variabile complessa:

$$\varphi : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow I_{2\pi} \subset \mathbb{R} ,$$

dove  $I_{2\pi}$  è un intervallo semiaperto di lunghezza  $2\pi$ . Tale intervallo non è univocamente definito e può essere scelto in infiniti modi diversi, ma in ogni caso la funzione  $\varphi(z)$  è *discontinua* su una semiretta uscente dall'origine del piano complesso. Si considerino per esempio i due casi rappresentati in Fig. 4:

$$a) \quad I_{2\pi} = (-\pi, \pi]$$

$$b) \quad I_{2\pi} = [0, 2\pi)$$

Nel caso a)  $\varphi(z)$  è *discontinua* sul semiasse reale negativo. Infatti

$$\varphi(-x) = \pi \quad x \in \mathbb{R}_+$$

ma il limite  $\lim_{z \rightarrow -x} \varphi(z)$  non è definito, perché i limiti destro e sinistro sono diversi:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(-x + i\epsilon) &= \pi \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(-x - i\epsilon) &= -\pi . \end{aligned}$$

Nel caso b) invece  $\varphi(z)$  è discontinua sul semiasse reale positivo.

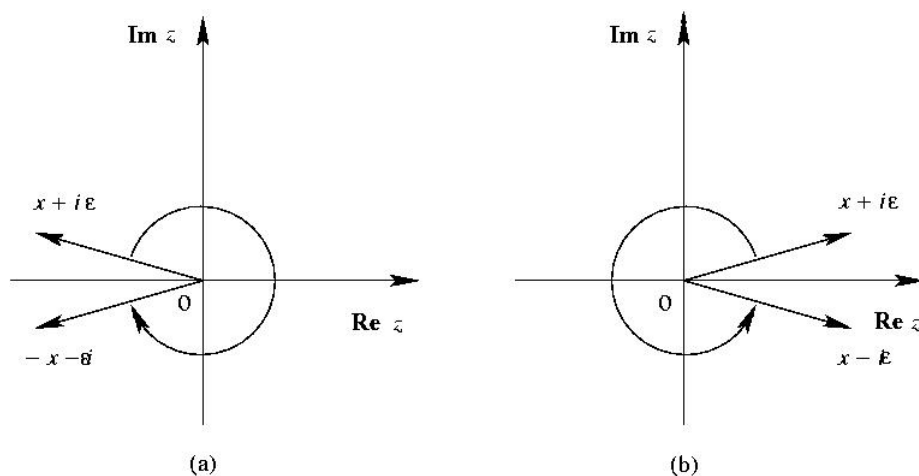


Figura 4.: Discontinuità dell'argomento di  $z$ .

### 1.2.2 Funzioni complesse di variabile complessa

Una funzione complessa di variabile complessa

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C}, \quad E \subseteq \mathbb{C}$$

è un'applicazione che associa un numero complesso  $f(z)$  ad ogni  $z \in E$ , con  $E$  sottoinsieme del campo  $\mathbb{C}$ . Useremo la seguente notazione:

$$f : z \mapsto w = f(z) \quad z \in E, \quad E \subseteq \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C},$$

$$z = x + iy$$

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Quindi dare la  $f$  è equivalente a specificare due funzioni reali di due variabili reali

$$u = u(x, y) \quad \text{e} \quad v = v(x, y).$$

Analogamente a quanto accade nel caso di funzioni reali, una funzione complessa di variabile complessa  $f(z)$  è detta *continua* se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ovvero se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \quad \forall z \in I_\delta(z_0),$$

dove  $I_\delta(z_0)$  è un *intorno* di raggio  $\delta$  del punto  $z_0$  e  $|f(z) - f(z_0)|$  è il *modulo* del numero complesso  $f(z) - f(z_0)$ .

*Esempi*

$$1) \quad f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2 \\ v(x, y) &= 2xy . \end{aligned}$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \\ w &= r^2 e^{2i\varphi} . \end{aligned}$$

$$2) \quad f(z) = z^* = x - iy$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y . \end{aligned}$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \\ w &= re^{-i\varphi} . \end{aligned}$$

### 1.2.3 Le funzioni $\ln z$ e $z^\alpha$ nel piano complesso

La funzione logaritmo  $w = \ln z$  è definita nel campo complesso  $\forall z \neq 0$  dalla equazione

$$e^w = z , \tag{1}$$

ovvero

$$e^{\operatorname{Re} w} e^{i \operatorname{Im} w} = |z| e^{i \arg z} \tag{2}$$

da cui segue, prendendo il modulo di ambo i membri,

$$e^{\operatorname{Re} w} = |z| \Rightarrow \operatorname{Re} w = \ln |z| , \tag{3}$$

dove il logaritmo del numero positivo  $|z|$  è quello definito in campo reale. Sostituendo nella (2) si ottiene

$$e^{i \operatorname{Im} w} = e^{i \arg z} , \tag{4}$$

la cui soluzione generale è

$$\operatorname{Im} w = \arg z + 2\pi n , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \tag{5}$$

Si rimuove l'ambiguità, insita nella stessa definizione di  $\arg z$ , fissando il valore di  $n$  (per esempio  $n = 0$ ) e scegliendo un intervallo di ampiezza  $2\pi$  in cui far variare  $\arg$

$z$ , come discusso nel par.1.2.1. Solo in questo caso la funzione logaritmo è definita univocamente:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad (6)$$

ma è comunque *discontinua* su una semiretta (taglio) uscente dall'origine del piano complesso, perché tale è la funzione  $\arg z$ , come si è visto nel paragrafo 1.2.1. L'origine è perciò una **singolarità non isolata** della funzione logaritmo detta **punto di diramazione** (branching point); lo stesso dicasi per il punto all'infinito. La funzione  $z^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ , si definisce come

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \quad (7)$$

e, salvo che per  $\alpha \in \mathbb{N}$ , soffre degli stessi problemi della funzione logaritmo<sup>1</sup>.

#### 1.2.4 Derivata di una funzione complessa di variabile complessa

**Definizione:** una funzione  $f(z)$  si dice **derivabile** nel punto  $z$  se esiste il limite per  $h \rightarrow 0$  ( $h \in \mathbb{C}$ ) del rapporto incrementale

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

considerato come funzione della variabile *complessa*  $h$ . Tale limite deve essere quindi *indipendente dal modo in cui*  $h \rightarrow 0$ . Esistono infatti infinite direzioni lungo le quali  $h$  può tendere a 0 (si veda Fig 5).

La funzione  $f$  è derivabile se tutte queste direzioni danno lo stesso risultato per il limite del rapporto incrementale. In questo caso il limite si chiama *derivata* di  $f$  rispetto a  $z$ :

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Si osservi che la definizione di derivabilità in  $z$  assume che la funzione  $f$  sia definita in un intorno di tale punto.

#### 1.2.5 Condizioni di Cauchy-Riemann

$\Delta$  TEOREMA: Consideriamo una funzione

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

derivabile in  $z = x + iy$ . Allora le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  ammettono derivate prime parziali in  $z$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u'_x, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = u'_y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = v'_x, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = v'_y.$$

<sup>1</sup> Per  $\alpha \in \mathbb{N}$  non ci sono ambiguità poiché  $e^{N(\ln z + 2\pi i n)} = e^{N \ln z}$ .

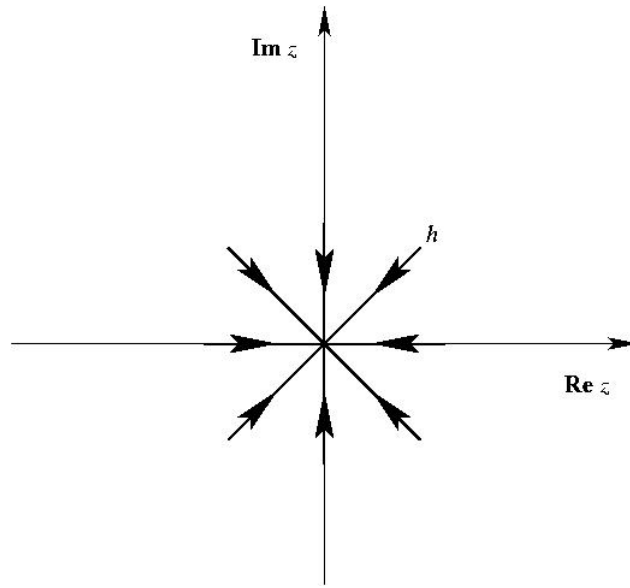


Figura 5.: Direzioni dell'incremento  $h$  nel rapporto incrementale

e queste soddisfano le **condizioni di Cauchy e Riemann (CR)**

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo quindi che le condizioni di (CR) sono condizioni *necessarie* per la derivabilità, ossia che

$$f(z) \text{ derivabile} \Rightarrow (\text{CR}) .$$

Per ipotesi la derivata di  $f(z)$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

esiste ed è indipendente dalla direzione di  $h = h_x + ih_y$ . In particolare si potrà scegliere  $h$  puramente reale ( $h = h_x$ ) o puramente immaginario ( $h = ih_y$ ). Se  $h = h_x$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(z+h_x) - f(z)}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x+h_x, y) + iv(x+h_x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x+h_x, y) - u(x, y)}{h_x} + i \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{v(x+h_x, y) - v(x, y)}{h_x} \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} . \end{aligned} \quad (9)$$

Se  $h = ih_y$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{f(z + ih_y) - f(z)}{ih_y} \\
 &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + h_y) + iv(x, y + h_y) - u(x, y) - iv(x, y)}{ih_y} \\
 &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + h_y) - u(x, y)}{ih_y} + i \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + h_y) - v(x, y)}{ih_y} \\
 &= -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Uguagliando ora le parti reali e immaginarie delle espressioni (9) e (10) per la derivata  $f'(z)$  otteniamo le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
 u'_x &= v'_y \\
 u'_y &= -v'_x.
 \end{aligned}$$

**Δ TEOREMA:** Una funzione  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  definita in un intorno del punto  $z$ , con  $u, v$  di classe  $C^1$ , cioè continue con le loro derivate prime, è derivabile in  $z$  se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.

**Dimostrazione.** Vogliamo dimostrare che le condizioni di CR sono *sufficienti* per la derivabilità di  $f(z)$ , ossia

$$(CR) \Rightarrow f(z) \text{ derivabile}.$$

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{u(x + h_x, y + h_y) + iv(x + h_x, y + h_y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h_x + ih_y}. \tag{11}$$

Poiché le funzioni  $u$  e  $v$  sono per ipotesi continue con le loro derivate prime in  $z$ , esse sono differenziabili e si può quindi scrivere nell'intorno del punto  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
 u(x + h_x, y + h_y) &= u(x, y) + h_x u'_x(x, y) + h_y u'_y(x, y) + o(|h|) \\
 v(x + h_x, y + h_y) &= v(x, y) + h_x v'_x(x, y) + h_y v'_y(x, y) + o(|h|).
 \end{aligned}$$

Sostituendo questi sviluppi nel rapporto incrementale (11) si ottiene

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{h_x u'_x(x, y) + ih_x v'_x(x, y) + h_y u'_y(x, y) + ih_y v'_y(x, y) + o(|h|)}{h_x + ih_y}.$$



Utilizzando ora le condizioni di Cauchy-Riemann (8) e prendendo il limite per  $h_x, h_y \rightarrow 0$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h_x, h_y \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \\ \lim_{h_x, h_y \rightarrow 0} \frac{h_x u'_x(x, y) + i h_x v'_x(x, y) - h_y v'_x(x, y) + i h_y u'_x(x, y) + o(|h|)}{h_x + i h_y} &= \\ \lim_{h_x, h_y \rightarrow 0} \frac{(h_x + i h_y)[u'_x(x, y) + i v'_x(x, y)]}{h_x + i h_y} &= u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) = f'(z) . \end{aligned} \quad (12)$$

La derivata di  $f(z)$  è quindi definita univocamente indipendentemente dalla direzione di  $h$ : la funzione è pertanto derivabile e la sua derivata è

$$f'(z) = u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) . \quad [q.e.d.]$$

Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann è possibile dare quattro espressioni equivalenti della derivata di una funzione in termini delle sue parti reale e immaginaria:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) \\ &= v'_y(x, y) - i u'_y(x, y) \\ &= u'_x(x, y) - i u'_y(x, y) \\ &= v'_y(x, y) + i v'_x(x, y) . \end{aligned} \quad (13)$$

N.B. Dalle ultime due espressioni si deduce che *per calcolare la derivata di  $f(z)$  è sufficiente conoscere o la parte reale  $u$  o la parte immaginaria  $v$* . Ovvero: nota una delle due, si può ricavare l'altra a meno di una costante.

### 1.2.6 Funzioni analitiche

**Definizione:** Una funzione  $f(z)$ ,  $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F \subseteq \mathbb{C}$  si dice **analitica** (o **regolare**, o **olomorfa**) in un punto  $z_0$  se esiste un intorno  $I(z_0)$  in cui  $f(z)$  è derivabile in ogni punto  $z \in I(z_0)$ .<sup>2</sup>

Come si vede, l'analiticità richiede la derivabilità in una regione attorno al punto  $z = z_0$ ; questo aspetto è cruciale in vista delle applicazioni future. La funzione è analitica in una regione aperta  $E \subset F$  se essa è derivabile in ogni punto  $z \in E$ .

<sup>2</sup> Viene talvolta anche richiesta la continuità della derivata in  $I(z_0)$ . Tuttavia questa condizione non è necessaria per dimostrare le proprietà delle funzioni analitiche che ci interessano. Inoltre vedremo come una funzione analitica in un punto sia ivi infinitamente derivabile, e che quindi la derivata di una funzione analitica sia automaticamente continua.

È quindi sufficiente affinché  $f(z)$  sia analitica in  $E$  che siano soddisfatte le seguenti condizioni in tutti i punti di  $E$ :

- 1) parte reale  $u(x, y)$  e parte immaginaria  $v(x, y)$  sono di classe  $C^1$ ;
- 2) sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann (8).

D'altra parte, una funzione analitica soddisfa automaticamente le (CR).

I punti in cui  $f(z)$  è analitica si dicono *punti di analiticità* o punti **regolari** della funzione. I punti in cui  $f(z)$  non è analitica si dicono *punti singolari* o **singolarità** della funzione.

### 1.2.7 Esempi

#### 1. FUNZIONE COSTANTE

$$\begin{aligned} f(z) &= \text{costante} = c = c_x + ic_y \quad c \in \mathbb{C}, \quad c_x, c_y \in \mathbb{R} \\ u(x, y) &= c_x, \quad v(x, y) = c_y \\ u'_x &= u'_y = v'_x = v'_y = 0 \end{aligned}$$

La funzione  $f(z)$  è continua in tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$ , le funzioni  $u$  e  $v$  sono continue e derivabili e le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Quindi una funzione costante è analitica in tutto il piano complesso e la sua derivata è zero:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 0$$

#### 2. FUNZIONE IDENTITÀ

$$\begin{aligned} f(z) &= z = x + iy \\ u(x, y) &= x, \quad v(x, y) = y \\ u'_x &= v'_y = 1 \quad u'_y = -v'_x = 0 \end{aligned}$$

La funzione  $f(z) = z$  è analitica in tutto il piano complesso. La sua derivata è  $f'(z) = u'_x + iv'_x = 1$ .

#### 3. COMPLESSO CONIUGATO

$$\begin{aligned} f(z) &= z^* = x - iy \\ u(x, y) &= x, \quad v(x, y) = -y \\ u'_x &= 1, \quad v'_y = -1 \end{aligned}$$

La funzione  $f(z) = z^*$  non è analitica. Infatti il rapporto incrementale dipende dalla direzione dell'incremento  $h$ . Sia  $h = \rho e^{i\theta}$  in rappresentazione polare. Allora il rapporto incrementale

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^* - z^*}{h} = \frac{h^*}{h} = \frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

dipende dall'angolo  $\theta$ . La derivata di  $z^*$  non esiste in alcun punto di  $\mathbb{C}$ .<sup>3</sup>

#### 4. INVERSO DI $z$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Le funzioni  $u$  e  $v$  sono continue e derivabili in  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Le condizioni di CR

$$u'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v'_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = u'_x$$

$$u'_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v'_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -u'_y$$

sono soddisfatte. La funzione  $f(z)$  è quindi analitica in  $\mathbb{C} - \{0\}$ . La sua derivata è

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(y+ix)^2}{(y+ix)^2(y-ix)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Vale pertanto la stessa regola di derivazione valida in campo reale

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

Si dimostra, esattamente come nel campo reale, che vale

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

per  $n$  intero qualsiasi.<sup>4</sup>

Le funzioni analitiche in tutto il piano complesso, come, per esempio, i polinomi, la funzione esponenziale e le funzioni seno e coseno, si chiamano funzioni **interi**.

- 3 L'operazione di coniugazione complessa non può essere riconciliata con l'analiticità. Per comprenderne la ragione di fondo si consideri un cambio di variabili da  $(x, y)$  a  $(z, z^*)$  con  $x = (z + z^*)/2$ ,  $y = (z - z^*)/2i$ . La derivata del campo scalare  $u$  rispetto a  $z^* = x - iy$  è:

$$\frac{\partial u}{\partial z^*} = \frac{\partial x}{\partial z^*} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z^*} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Un'analogia espressione vale per il campo  $v(x, y)$  e possiamo combinarle a formare

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

dove abbiamo usato (CR). Una funzione analitica non può quindi dipendere da  $z^*$ , o equivalentemente  $x, y$  possono entrare in una funzione analitica solo nella combinazione  $z = x + iy$ . Questo ragionamento euristico può essere reso rigoroso. La derivata rispetto a  $z$  è invece in accordo con la (13).

- 4 La stessa formula vale per ogni esponente, reale o complesso. Infatti  $\frac{d \ln z}{dz} = 1/z$ ,  $\forall z \neq 0$  e quindi anche  $\frac{dz^\alpha}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .

$\Delta$  TEOREMA: se  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  sono due funzioni analitiche nel punto  $z$ , allora le funzioni

$$1) f_1(z) + f_2(z)$$

$$2) f_1(z) \cdot f_2(z)$$

$$3) f_1(z)/f_2(z) \quad \text{se } f_2(z) \neq 0$$

$$4) f_1(f_2(z))$$

sono analitiche in  $z$  e valgono le seguenti regole di derivazione

$$a) [f_1(z) + f_2(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z)$$

$$b) [f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$$

$$c) [f_1(z)/f_2(z)]' = [f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)]/[f_2(z)]^2$$

$$d) \frac{d}{dz}[f_1(f_2(z))] = \frac{df_1}{df_2} \frac{df_2}{dz}.$$

La dimostrazione segue banalmente dalla definizione di derivata o dalla (13).

$\Delta$  COROLLARIO: le funzioni razionali di  $z$  sono analitiche in tutto il piano complesso esclusi gli zeri del denominatore.

**Dimostrazione:** Poiché le funzioni  $f_1(z) = 1$  e  $f_2(z) = z$  sono analitiche in  $\mathbb{C}$ , segue dalla proprietà 2) che tutte le potenze di  $z$  sono analitiche in  $\mathbb{C}$ , e quindi per la proprietà 1) i *polinomi* di  $z$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots c_n z^n$$

sono funzioni ovunque analitiche. Per la proprietà 3) le funzioni *razionali* (rapporto di due polinomi  $P_n$  e  $Q_m$ )

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

sono funzioni analitiche in tutto il piano complesso esclusi i punti  $z_i$  per i quali  $Q_m(z_i) = 0$ .

[q.e.d.]

$\Delta$  TEOREMA: se la parte reale (immaginaria) di una funzione *analitica* è costante, anche la sua parte immaginaria (reale) è necessariamente costante. Infatti da  $u(x, y) = \text{costante}$  segue  $u'_x = u'_y = 0$  e quindi dalle condizioni di CR segue che:

$$v'_y = v'_x = 0 \Rightarrow v(x, y) = K' = \text{costante}.$$

Pertanto

$$f(z) = \text{costante}.$$

Nel caso particolare in cui  $v(x, y) = 0$ , oppure  $u(x, y) = 0$ , ne segue banalmente che *una funzione analitica a valori reali (o immaginari puri) è necessariamente costante*.

[q.e.d.]

$\Delta$  TEOREMA: una funzione analitica di modulo costante è costante (cioè le sue parti reale e immaginaria sono separatamente costanti):

$$f(z) \text{ analitica e } |f(z)| = \text{cost.} \Rightarrow f(z) = \text{cost.}$$

**Dimostrazione:** per ipotesi abbiamo

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = K.$$

Se  $K = 0$  la dimostrazione è banale perché ciò implica  $f(z) = 0$ ; assumiamo quindi nel seguito  $K \neq 0$ .

Derivando rispetto a  $x$  e a  $y$  si ottiene

$$\begin{aligned} 2u\partial_x u + 2v\partial_x v &= 0 \\ 2u\partial_y u + 2v\partial_y v &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $u$ , la seconda per  $v$ , sommando membro a membro e utilizzando le condizioni di CR, si ottiene

$$(u^2 + v^2)\partial_x u = 0$$

da cui segue che, poiché  $u^2 + v^2$  è per ipotesi costante e diverso da zero,  $\partial_x u = 0$ . Analogamente, moltiplicando la prima equazione per  $-v$  e la seconda per  $u$ , si ottiene

$$(u^2 + v^2)\partial_y u = 0.$$

Questa implica che anche  $\partial_y u = 0$  e quindi  $u(x, y) = \text{costante}$ . Dalle CR segue immediatamente che se le derivate parziali di  $u$  sono nulle, anche le derivate parziali di  $v$  sono nulle, e pertanto  $f(z) = \text{costante}$ , come nel teorema precedente.

[q.e.d.]

## 1.3 FUNZIONI ARMONICHE

Una funzione di due variabili  $g(x, y)$  si dice *armonica* se soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta_2 g(x, y) = 0, \quad (14)$$

dove  $\Delta_2$  è l'operatore Laplaciano in due dimensioni

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**TEOREMA:** Se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  è una funzione analitica (e le funzioni  $u$  e  $v$  sono di classe  $C^2$  <sup>5</sup>), le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono armoniche.

**Dimostrazione:** Se  $f(z)$  è analitica,  $u$  e  $v$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (16)$$

Derivando la (15) rispetto a  $x$  e la (16) rispetto a  $y$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Nell'ultima equazione è lecito scambiare l'ordine di derivazione perché  $v(x, y)$  è di classe  $C^2$ . Sottraendo membro a membro le precedenti equazioni si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \Delta u(x, y) = 0.$$

Analogamente, derivando la (15) rispetto a  $y$  e la (16) rispetto a  $x$  e sottraendo membro a membro si ottiene

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = \Delta v(x, y) = 0. \quad [\text{q.e.d.}]$$

Data una funzione  $u(x, y)$  armonica in una certa regione del piano  $(x, y)$  è possibile costruire (a meno di una costante) la corrispondente funzione armonica *coniugata*  $v(x, y)$  tale che  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sia analitica. Infatti, nota  $u$ , le condizioni di Cauchy-Riemann ci consentono di ricavare le derivate parziali  $v'_x$  e  $v'_y$  e da queste, integrando, la funzione  $v(x, y)$ .

<sup>5</sup> In realtà questa condizione è sempre soddisfatta perché, come vedremo, ogni funzione analitica è infinitamente derivabile.

ESEMPIO 1 La funzione

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

è armonica. Infatti

$$u''_{xx} = 2, \quad u''_{yy} = -2 \Rightarrow \Delta_2 u(x, y) = 0$$

Dalle condizioni di CR segue che:

$$v'_y = u'_x = 2x \Rightarrow v(x, y) = 2xy + \phi(x)$$

e

$$v'_x = -u'_y = 2y \Rightarrow 2y + \phi'(x) = 2y \Rightarrow \phi(x) = K.$$

Pertanto ( $K \in \mathbb{R}$ )

$$v(x, y) = 2xy + K \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + iK = (x + iy)^2 + iK = z^2 + iK.$$

ESEMPIO 2 La funzione

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

è armonica in  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Infatti:

$$u'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u''_{xx} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$u'_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u''_{yy} = \frac{-2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -u''_{xx}.$$

Dalle CR:

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} &\Rightarrow v(x, y) = \int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + g(y) \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} + g(y). \end{aligned}$$

Per fissare  $g(y)$  usiamo l'altra condizione di CR:

$$\begin{aligned} v'_x &= -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + g'(y) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + g'(y) = u'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\Rightarrow g(y) = K. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} + iK \\ &= \frac{z^*}{|z|^2} + iK = \frac{1}{z} + iK, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 3** Dimostrare che  $u(x, y) = \cos xe^{-y}$  è armonica e costruire la corrispondente funzione analitica  $f(z)$ .  $u$  soddisfa l'equazione di Laplace (14):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= -\sin xe^{-y}, & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\cos xe^{-y} \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= -\cos xe^{-y}, & \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= \cos xe^{-y}\end{aligned}$$

Pertanto  $u$  è armonica. Dalle condizioni di CR si ricava che

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\sin xe^{-y} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \cos xe^{-y}. \quad (18)$$

Integrando la (17) rispetto a  $y$  si ottiene

$$v(x, y) = -\int \sin xe^{-y} dy + g(x) = \sin xe^{-y} + g(x).$$

Sostituendo quest'ultima nella (18)

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \cos xe^{-y} + g'(x) = \cos xe^{-y}.$$

Pertanto

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \text{costante} = K \Rightarrow v(x, y) = \sin xe^{-y} + K$$

e la funzione  $f(z)$  cercata è (ponendo la costante  $K = 0$ )

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \cos xe^{-y} + i \sin xe^{-y} = e^{ix-y} = e^{i(x+iy)} = e^{iz},$$

analitica in tutto  $\mathbb{C}$ .

Esiste uno stretto legame tra funzioni analitiche e armoniche, per le quali valgono teoremi simili a quelli che abbiamo visto nella prima parte. Le funzioni armoniche compaiono in molti problemi fisici. In elettrostatica in assenza di cariche  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ; il campo elettrico può essere scritto come  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , da cui  $\Delta V = 0$ . Anche un fluido incompressibile in assenza di vortici è descritto da un potenziale di flusso che soddisfa l'equazione di Laplace, e quindi è una funzione armonica.

Dalle condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo anche

$$\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

ovvero il gradiente del campo scalare  $u(x, y)$  è sempre perpendicolare al gradiente del campo scalare  $v(x, y)$ . Poichè il gradiente di un campo è perpendicolare alle linee



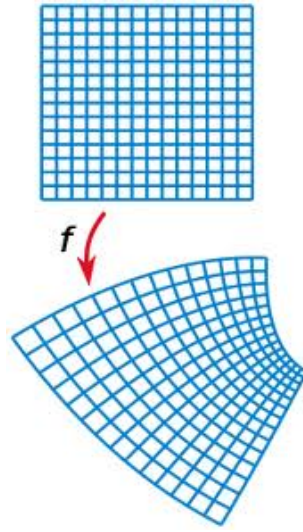


Figura 6.: Mappa conforme.

su cui il campo è costante, questo implica che le curve di livello  $u(x, y) = \text{cost}$  sono localmente perpendicolari a quelle  $v(x, y) = \text{cost}$ , vedi Fig.(6), esattamente come perpendicolari sono le rette  $x = \text{cost}$  e  $y = \text{cost}$  nel piano complesso di partenza. Attraverso la funzione analitica  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  si realizza infatti una mappa *conforme*, cioè una mappa del piano complesso  $(x, y)$  nel piano  $(u, v)$  che rispetta localmente gli angoli tra due curve arbitrarie nel piano. Si dimostra che ad ogni trasformazione conforme nel piano corrisponde una funzione analitica  $f(z)$  e viceversa ovunque sia  $f'(z) \neq 0$ . Le mappe conformi hanno molte applicazioni, per es. esse trasformano una funzione armonica (un potenziale) in un'altra funzione armonica, permettendo in questo modo di facilitare la soluzione di problemi fisici.

Per concludere notiamo il seguente teorema: *I campi vettoriali*

$$\vec{a} = u(x, y)\vec{i} - v(x, y)\vec{j} \quad e \quad \vec{b} = v(x, y)\vec{i} + u(x, y)\vec{j}$$

con  $u, v \in C^1$  in un insieme aperto  $E$  sono solenoidali ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ ) e irrotazionali ( $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{b} = 0$ ) se e solo se  $f(z) = u + iv$  è analitica. La prova segue dalle Cauchy-Riemann. Un campo solenoidale e irrotazionale in due dimensioni definisce una funzione analitica e viceversa, e le sue componenti sono pertanto funzioni armoniche.

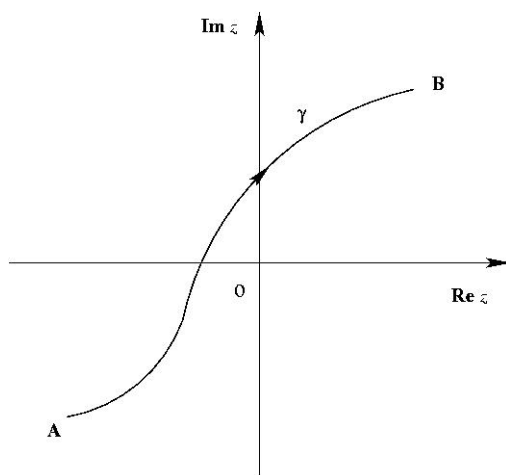


Figura 7.: Curva aperta che unisce i punti A e B nel piano complesso

#### 1.4 INTEGRAZIONE IN CAMPO COMPLESSO

##### 1.4.1 Curve nel piano complesso

Una curva  $\gamma$  nel piano complesso è una applicazione continua

$$\gamma : J \longrightarrow \mathbb{C} \quad J = [a, b] \in \mathbb{R}$$

dove  $J$  è un intervallo reale limitato e chiuso:

$$\gamma : t \longrightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b .$$

L'applicazione  $\gamma$  associa ad ogni valore del *parametro*  $t$  due funzioni reali  $x(t)$  e  $y(t)$ . Spesso si considera la curva  $\gamma$  non solo come l'applicazione appena definita, ma come l'*immagine* (o *sostegno*) di tale applicazione, cioè come l'insieme di punti

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} / z = z(t), t \in [a, b]\} .$$

Una curva si dice **regolare** nell'intervallo  $[a, b]$  se le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  hanno derivate prime continue e non entrambe nulle  $\forall t \in [a, b]$ . Una curva regolare è perciò continua e ha tangente ben definita. Una curva si dice **regolare a tratti** nell'intervallo  $[a, b]$  se l'intervallo può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli chiusi in cui la curva sia regolare.

Una curva si dice **chiusa** se  $z(a) = z(b)$ . Un caso particolare di curva chiusa è un punto, cioè una curva di equazione  $z(t) = \text{costante} \forall t \in [a, b]$ . Una curva si dice **semplice** se  $\gamma$  è un'applicazione iniettiva, ovvero  $z(t_1) \neq z(t_2) \forall t_1 \neq t_2$ , con  $t_1, t_2 \in [a, b]$ . (N.B. L'intervallo  $[a, b]$  è semi-aperto per includere le curve chiuse nella definizione di curve semplici.) In pratica una curva semplice è una curva che non si interseca con se stessa. Una curva **chiusa e semplice** si dice **curva di Jordan**.

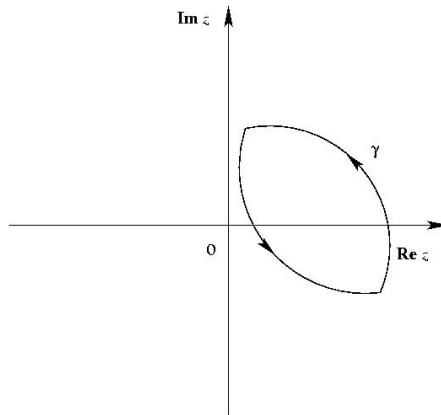


Figura 8.: Curva chiusa semplice (di Jordan).

**Δ TEOREMA:** ogni curva di Jordan  $\gamma$  divide il piano in due regioni, una interna e una esterna a  $\gamma$ .

Ad ogni curva chiusa si assegna un **verso di percorrenza**. Convenzionalmente si considera come positivo il verso **antiorario**. Si definisce convenzionalmente *interna* ad una curva chiusa la zona lasciata a *sinistra* se si percorre la curva nel suo verso di percorrenza (ed *esterna* quella lasciata a destra).

Due curve di Jordan  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono **omotopicamente equivalenti** (O.E.) in una regione  $D$  se possono essere deformate con continuità l'una nell'altra *senza uscire da  $D$* . N.B. È essenziale specificare la regione  $D$  in cui le due curve sono O.E. Per esempio, se  $D = \mathbb{C}$  ogni curva di Jordan è O.E. a un punto, ma questo non è più vero se da  $\mathbb{C}$  si sottraggono uno o più punti.

Una regione  $D \subseteq \mathbb{C}$  si dice *connessa per archi* se,  $\forall z_1, z_2 \in D$ , esiste una curva  $\gamma$  *tutta interna a  $D$* , che congiunge  $z_1$  e  $z_2$ . Una regione  $S \subseteq \mathbb{C}$  si dice **semplicemente connessa** (s.c.) se ogni curva chiusa contenuta in  $S$  è O.E. a un punto. (Definizione alternativa: una regione  $S$  è s.c. se per ogni curva di Jordan  $\gamma$  contenuta in  $S$  la regione interna a  $\gamma$  è sottoinsieme di  $S$ ). Intuitivamente una regione s.c. è una regione "senza buchi".

L'integrale di linea di una funzione complessa si definisce in analogia con l'integrale di linea di un campo vettoriale  $\vec{a}$  nel piano  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\int_{A,\gamma}^B \vec{a} \cdot d\vec{\gamma} \equiv \int_a^b \left[ a_x(x,y) \frac{dx}{dt} + a_y(x,y) \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_{A,\gamma}^B [a_x(x,y) dx + a_y(x,y) dy],$$

dove  $\gamma$  è una curva regolare, e  $A$  e  $B$  sono i suoi punti estremi, corrispondenti a  $\vec{\gamma}(a)$ ,  $\vec{\gamma}(b)$ . Vale la pena richiamare qui anche la versione bidimensionale del teorema di Stokes che ci sarà utile a breve.

**TEOREMA DI GREEN:** siano  $a_x(x, y), a_y(x, y) \in C^1$  due funzioni reali e continue con derivate prime continue in un dominio  $E$  semplicemente connesso. Allora per ogni curva  $\gamma$  chiusa regolare a tratti contenuta in  $E$

$$\oint_{\gamma} [a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy] = \iint_S \left[ \frac{\partial a_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(x, y)}{\partial y} \right] dx dy, \quad (20)$$

dove  $S$  è la regione interna a  $\gamma$ , ovvero più semplicemente

$$\oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{k} dS, \quad (21)$$

dove  $\vec{k}$  è un versore perpendicolare al piano  $(x, y)$  e diretto lungo l'asse  $z$  di una terna destrorsa  $(x, y, z)$ .

#### 1.4.2 Integrali in campo complesso

**INTEGRALE DI UNA FUNZIONE DI VARIABILE REALE A VALORI COMPLESSI** Consideriamo una funzione complessa di una variabile reale  $w(t) = u(t) + iv(t)$ :

$$w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad [a, b] \subset \mathbb{R}$$

$$t \in [a, b], \quad w(t) \in \mathbb{C}.$$

Definiamo l'integrale di  $w(t)$  in  $t$

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

L'integrale esiste se la funzione  $w(t)$  è continua o se ha un numero finito di discontinuità di prima specie. L'integrale (alla Riemann) si può interpretare come limite di somme integrali:

$$\int_a^b w(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$$

dove

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{l=1}^n w(\tau_l)(t_l - t_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^n u(\tau_l)(t_l - t_{l-1}) + i \sum_{l=1}^n v(\tau_l)(t_l - t_{l-1}). \end{aligned}$$

Si divide cioè l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  e si valuta la funzione  $w(t)$  nei punti  $\tau_l$  interni a ciascun sottointervallo ( $t_{l-1} < \tau_l < t_l$ ).

Dalla disuguaglianza triangolare ( $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ ):

$$|I_n| \leq \sum_{l=1}^n |w(\tau_l)|(t_l - t_{l-1})$$

segue, prendendo il limite per  $n \rightarrow \infty$ , la relazione

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt. \quad (22)$$

**INTEGRALE DI UNA FUNZIONE COMPLESSA DI VARIABILE COMPLESSA** Sia  $f(z)$  una funzione:

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f: z = (x + iy) \in D \mapsto w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}.$$

Si consideri una curva  $\gamma$  regolare a tratti nell'intervallo  $[a, b]$

$$\gamma: t \mapsto z(t) \quad a \leq t \leq b$$

e siano  $A = z(a)$  e  $B = z(b)$  gli estremi di tale curva (Fig. 7). Se  $f(z)$  è continua  $\forall z \in \gamma$ , si definisce l'*integrale curvilineo* di  $f(z)$  tra  $A$  e  $B$  lungo  $\gamma$

$$\int_{A(\gamma)}^B f(z) dz \equiv \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt. \quad (23)$$

N.B. Il secondo membro della (23) esiste perché  $\gamma$  è regolare a tratti (quindi  $dz/dt$  ha un numero finito di discontinuità).

**$\Delta$  TEOREMA:** l'integrale di una funzione continua  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  lungo una curva  $\gamma$  regolare a tratti è dato da

$$\int_{A(\gamma)}^B f(z) dz = \int_{A(\gamma)}^B [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{A(\gamma)}^B [v(x, y) dx + u(x, y) dy]. \quad (24)$$

**Dimostrazione:** dalla definizione (23) segue che

$$\begin{aligned} \int_{A(\gamma)}^B f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= \int_a^b [u(x, y) + iv(x, y)] \left[ \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \left[ u(x, y) \frac{dx(t)}{dt} - v(x, y) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt \\ &\quad + i \int_a^b \left[ v(x, y) \frac{dx(t)}{dt} + u(x, y) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt \\ &= \int_{A(\gamma)}^B [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{A(\gamma)}^B [v(x, y) dx + u(x, y) dy]. \quad [q.e.d] \end{aligned}$$

N.B. In generale l'integrale dipende dalla curva  $\gamma$  e non solo dagli estremi di integrazione.

Utilizzando due campi vettoriali  $\vec{a}(x, y) \equiv (u(x, y), -v(x, y))$  e  $\vec{b}(x, y) \equiv (v(x, y), u(x, y))$  possiamo anche scrivere<sup>6</sup>

$$\int_{A(\gamma)}^B f(z) dz = \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{\gamma} + i \int_A^B \vec{b} \cdot d\vec{\gamma}. \quad (25)$$

Notare che  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , cioè  $\vec{a}$  è sempre perpendicolare a  $\vec{b}$ . Si verifica immediatamente che, se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, i campi  $\vec{a}, \vec{b}$  hanno divergenza nulla e sono irrotazionali:  $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b} = 0$ .

Valgono per l'integrale (24) le proprietà degli integrali curvilinei. In particolare, se  $C$  è un punto sulla curva  $\gamma$ ,

$$\int_{A(\gamma)}^B f(z) dz = \int_{A(\gamma)}^C f(z) dz + \int_{C(\gamma)}^B f(z) dz$$

e

$$\int_{A(\gamma)}^B f(z) dz = - \int_{B(\gamma)}^A f(z) dz .$$

**Δ TEOREMA: DISUGUAGLIANZA DI DARBOUX** Sia  $M$  il valore massimo assunto dal modulo della funzione  $f(z)$  lungo la curva  $\gamma$ :

$$M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

e  $l$  la lunghezza di  $\gamma$  tra  $A$  e  $B$ :

$$l = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt \equiv \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

Allora vale la *disuguaglianza di Darboux*:

$$\left| \int_{A(\gamma)}^B f(z) dz \right| \leq Ml . \quad (26)$$

**Dimostrazione:** Applicando la disuguaglianza (22) alla definizione (23) si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{A(\gamma)}^B f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(z(t))| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \\ &\leq M \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt . \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Si può anche usare il solo campo vettoriale  $\vec{a}$  e sostituire l'integrale di linea di  $\vec{b}$  con l'integrale di *flusso*  $\int_A^B \vec{a} \cdot \vec{n} ds$ .

Ora,

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} \equiv \frac{ds}{dt};$$

pertanto

$$\int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = l$$

e quindi:

$$\left| \int_{A(\gamma)}^B f(z) dz \right| \leq Ml. \quad [\text{q.e.d.}]$$

Consideriamo qualche esempio di integrale in campo complesso. Sia  $C$  la circonferenza di raggio  $R$  centrata nell'origine. Vogliamo calcolare l'integrale della funzione analitica  $f(z) = z$

$$I = \oint_C z dz. \quad (27)$$

Sostituiamo quindi  $z = Re^{i\theta}$  e facciamo riferimento alla (23):

$$I = iR^2 \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = 0. \quad (28)$$

Nel caso della funzione non analitica  $f(z) = z^*$  troviamo invece

$$\oint_C z^* dz = iR^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi iR^2. \quad (29)$$

Come ulteriore esempio calcoliamo l'integrale di  $f(z) = z$  lungo il perimetro  $\Gamma$  di un quadrato di lato unitario con vertici nell'origine, e in  $(1,0)$ ,  $(1,i)$ ,  $(0,i)$ , percorso in senso antiorario:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z dz &= \oint_{\Gamma} [x dx - y dy + i(y dx + x dy)] \\ &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 y dy + \int_1^0 x dx - \int_1^0 y dy \\ &\quad + i \left( \int_0^1 0 dx + \int_0^1 1 dy + \int_1^0 1 dx + \int_1^0 0 dy \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

#### 1.4.3 Teorema di Cauchy

$\Delta$  TEOREMA DI CAUCHY: sia  $f(z)$  una funzione *analitica* all'interno di un dominio aperto  $E$  *semplicemente connesso*. Per ogni curva  $\gamma$  chiusa, regolare a tratti, tutta contenuta in  $E$ ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (31)$$

*L'integrale di una funzione analitica è nullo lungo una qualsiasi curva chiusa omotopicamente equivalente a un punto nel dominio di analiticità della funzione.*

**Dimostrazione.** Dal teorema (24) si ha che

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i \oint_{\gamma} [v(x,y)dx + u(x,y)dy].$$

Supponiamo ora che  $u, v$  siano di classe  $C^1$ , che cioè soddisfino le ipotesi del teorema di Green (20).<sup>7</sup> Avremo allora (si ponga  $a_x = u$ ,  $a_y = -v$  nel primo integrale e  $a_x = v$ ,  $a_y = u$  nel secondo)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z)dz &= \iint_S \left[ -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right] dxdy \\ &+ i \iint_S \left[ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right] dxdy, \end{aligned}$$

dove  $S \subset E$  è la regione interna a  $\gamma$ . Poiché  $f(z)$  è analitica valgono le condizioni di Cauchy-Riemann  $u'_x = v'_y$  e  $u'_y = -v'_x$ . Pertanto

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad [\text{q.e.d.}]$$

Lo stesso risultato discende direttamente dal fatto che i campi vettoriali  $\vec{a}, \vec{b}$  di Eq.(25) sono irrotazionali in virtù delle CR. In altre parole,  $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$  se  $\gamma$  è contenuta nel dominio  $E$  di analiticità di  $f(z)$  ed è deformabile con continuità in un punto senza uscire da  $E$ . Si può anche dire che la forma differenziale  $f(z)dz = u(x,y)dx - v(x,y)dy + i[v(x,y)dx + u(x,y)dy]$  è chiusa in un aperto  $E$ :  $d(f(z)dz) = 0$ , se valgono le condizioni di CR; essa diventa esatta se il dominio è semplicemente connesso.

*Corollario al teorema di Cauchy*

**Δ TEOREMA:** siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve semplici e regolari a tratti che congiungono i punti  $A$  e  $B$  e  $\gamma = \gamma_1 \oplus (-\gamma_2)$  sia tutta contenuta nel dominio semplicemente connesso di analiticità di  $f(z)$  (Fig. 9). Allora

$$\int_{A(\gamma_1)}^B f(z)dz = \int_{A(\gamma_2)}^B f(z)dz$$

*ovvero: l'integrale di una funzione analitica non dipende dal cammino di integrazione purché i cammini siano deformabili con continuità l'uno nell'altro senza incontrare singolarità.*

<sup>7</sup> Questa ipotesi ulteriore non è necessaria, ma semplifica di molto la dimostrazione. La prova che il teorema vale anche senza questa ipotesi è dovuta a Goursat (si veda per es. Byron e Fuller, p. 327), e il teorema viene talvolta chiamato Cauchy-Goursat.



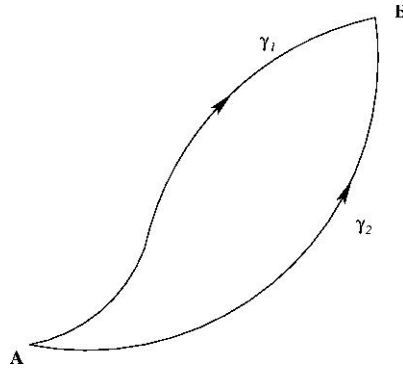


Figura 9.: Curve aperte che uniscono i punti A e B in un dominio semplicemente connesso

### Dimostrazione

$$\int_{A(\gamma_1)}^B f(z)dz - \int_{A(\gamma_2)}^B f(z)dz = \left( \int_{A(\gamma_1)}^B + \int_{B(\gamma_2)}^A \right) f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

per il teorema di Cauchy (31).

**Esempio:** consideriamo l'integrale

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

La funzione  $1/z$  è analitica in  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Se la regione interna alla curva  $\gamma$  non contiene l'origine (Fig. 8) l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy.

Se invece l'origine è interna a  $\gamma$ , per esempio  $\gamma$  è una circonferenza  $C$  di raggio  $R$  centrata in  $O$  (Fig. 10) l'integrale è diverso da zero. Calcoliamone il valore. L'equazione della curva  $C$  in coordinate polari è

$$z = z(\varphi) = Re^{i\varphi} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = R(-\sin \varphi + i \cos \varphi) = iz \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$I = \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(\varphi)} z'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i$$

N.B. L'integrale non dipende da  $R$ . Ne segue che, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due semicirconferenze centrate nell'origine (Fig. 10) gli integrali

$$I_1 = \int_{A(\gamma_1)}^B \frac{dz}{z} \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{A(\gamma_2)}^B \frac{dz}{z}$$

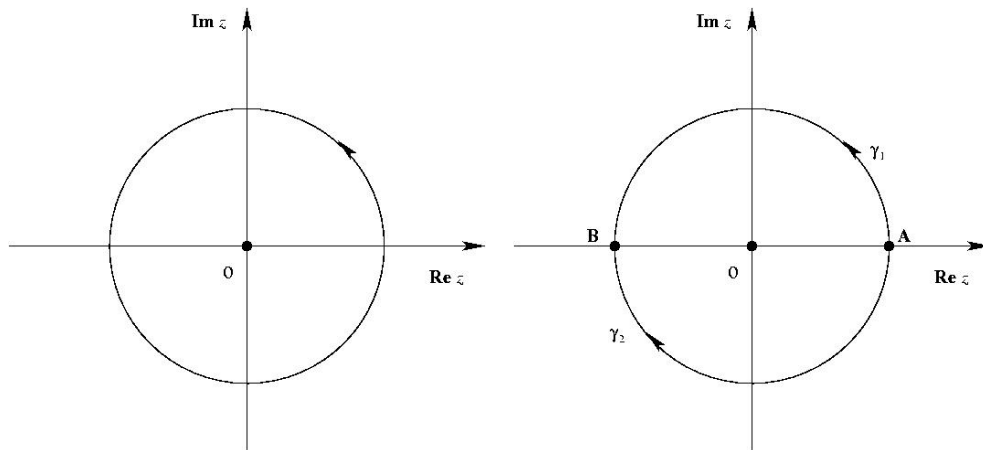


Figura 10.: A sinistra: curva chiusa che contiene l'origine. A destra: semicirconferenze centrate nell'origine.

non devono necessariamente essere uguali poiché non si può applicare il Corollario del teorema di Cauchy. Infatti essi valgono

$$I_1 = i \int_0^\pi d\varphi = i\pi, \quad I_2 = i \int_0^{-\pi} d\varphi = -i\pi.$$

N.B.  $I_1 \neq I_2$  perché deformando  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  si attraversa una singolarità ( $z = 0$ ).

In modo analogo si può calcolare il seguente integrale

$$I = \oint_C \frac{dz}{z-a} \quad a \in \mathbb{C} \quad (32)$$

dove la curva  $C$  è la circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $a$  (Fig. 11). Infatti, ponendo

$$z = z(\varphi) = a + Re^{i\varphi}$$

si ha

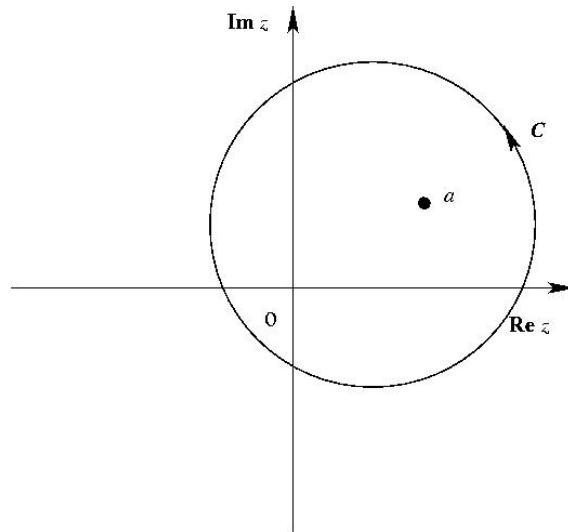
$$z'(\varphi) = iRe^{i\varphi} = i(z-a)$$

e quindi

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(\varphi)-a} z'(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i.$$

**Δ TEOREMA: TEOREMA DI CAUCHY GENERALIZZATO** Sia  $f(z)$  una funzione *analitica* in un dominio  $D$  qualsiasi e siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve chiuse *omotopicamente equivalenti* in  $D$ . In queste ipotesi:

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Figura 11.: Circonferenza centrata nel punto  $a$ 

**Dimostrazione:** Per dimostrare il teorema consideriamo 3 casi:

- a)  $D$  semplicemente connesso
- b)  $D$  generico,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non si intersechino
- c)  $D$  generico,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si intersechino

**Caso a)** In questo caso la dimostrazione è banale perché, per il teorema di Cauchy,

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

**Caso b)** Effettuiamo due tagli  $AB$  e  $CD$  (Fig. 12). Poiché  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono O.E. in  $D$ , la regione compresa tra le due curve appartiene tutta a  $D$ . Si ha allora (per il corollario al teorema di Cauchy):

$$\begin{aligned} \int_{A(E)}^D &= \int_A^B + \int_{B(F)}^C + \int_C^D \\ \int_{D(G)}^A &= \int_D^C + \int_{C(H)}^B + \int_B^A. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

poiché

$$\int_A^B = - \int_B^A \quad e \quad \int_D^C = - \int_C^D.$$

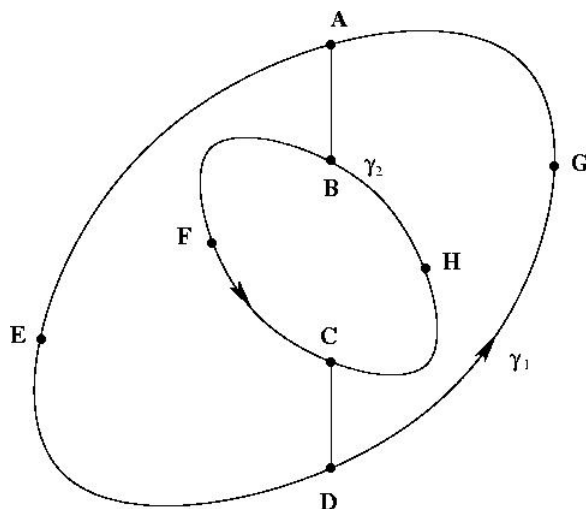


Figura 12.: Curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che non si intersecano in un dominio  $D$

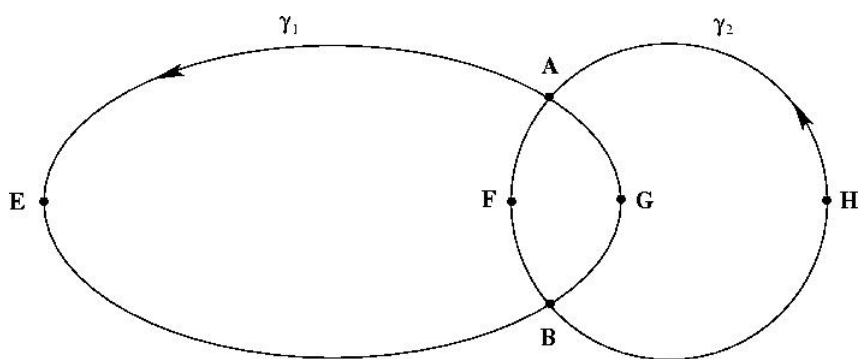


Figura 13.: Curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che si intersecano in un dominio  $D$

**Caso c)** In questo caso si ha (vedi Fig. 13):

$$\begin{aligned} \int_{A(E)}^B &= \int_{A(F)}^B \\ \int_{B(G)}^A &= \int_{B(H)}^A . \end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz .$$

N.B. Non è detto che la regione  $(AGBFA)$  appartenga a  $D$  ( $\gamma_{1,2}$  sono O.E. in  $D$ ).

[q.e.d.]

- **Corollario:** l'integrale (32) vale  $2\pi i$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  che circonda il punto  $a$ :

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \quad a \in \mathbb{C} \quad (33)$$

Inoltre, sempre per ogni curva chiusa  $\gamma$  che circonda il punto  $a$ ,

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i \delta_{n,1}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (34)$$

dove  $\delta_{nl}$  è la delta di Krönecker definita da

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = l \\ 0 & \text{se } n \neq l \end{cases} \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

La (34) si dimostra osservando che il cammino  $\gamma$  può essere deformato in una circonferenza  $C$  di raggio  $R$  e centro  $a$  e ponendo

$$z - a \equiv Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta}d\theta; \quad (35)$$

da cui segue immediatamente, per  $n \neq 1$ , che:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{i}{R^{n-1}} \left. \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

mentre per  $n = 1$  vale la eq.(33)

Abbiamo visto che l'integrale di  $f(z)$  tra i punti  $A$  e  $B$  non dipende dalla curva d'integrazione se essa rimane all'interno del dominio di analiticità  $D$  di  $f$  e se  $D$  è semplicemente connesso. In questi casi possiamo allora definire una *primitiva* di  $f(z)$  attraverso l'integrale

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'. \quad (36)$$

Si dimostra che  $F(z)$  è unica (a meno di una costante) e analitica in  $D$  e che  $F'(z) = f(z)$ . Di conseguenza valgono anche

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a) \quad (37)$$

e le usuali regole di calcolo integrale. Per esempio l'integrale indefinito di  $z$  è  $z^2/2$ , quello di  $e^z$  è  $e^z$ , quello di  $1/z$  è  $\ln z$ . Naturalmente in quest'ultimo caso il dominio di analiticità  $\mathbb{C} - \{0\}$  non è semplicemente connesso, e l'integrale su ogni curva chiusa che contiene l'origine vale  $2\pi i$ . Tuttavia la (37) vale ancora, in virtù della polidromia

del logaritmo (vedi sezione 1.2.3): dopo un giro attorno all'origine il logaritmo risulta incrementato di  $2\pi i$  e si dice che siamo passati su un altro *ramo* della funzione logaritmo.

La (34) ci dice che talvolta l'integrale su un cammino chiuso si annulla anche se questo racchiude una singolarità; questo accade per  $n > 1$ . L'annullarsi di  $\oint_{\gamma} f(z) dz$  infatti non garantisce che la funzione sia analitica all'interno di  $\gamma$ . Il **teorema di Morera** ci assicura invece che se  $f(z)$  è continua e  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \forall \gamma$  chiusa in  $D$  connesso, allora  $f(z)$  è analitica in  $D$ .

#### 1.4.4 Rappresentazione integrale di Cauchy

**Δ TEOREMA:** sia  $f(z)$  una funzione *analitica* in un dominio  $E$  aperto *semplicemente connesso* e  $\gamma$  una curva di Jordan contenuta in  $E$ . Sia  $S$  la regione interna a  $\gamma$ . Sotto queste ipotesi vale la **rappresentazione integrale di Cauchy per la funzione  $f(z)$** :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad \forall z \in S, \gamma = \partial S. \quad (38)$$

N.B. Perché valga la (38) è essenziale che  $z$  appartenga a  $S$ , cioè sia *interno* a  $\gamma$ . Infatti,

- 1) se  $z \in \gamma$  la funzione integranda ha una singolarità sul cammino di integrazione e quindi l'integrale non esiste;
- 2) se  $z$  è esterno a  $\gamma$ , la funzione integranda  $f(z')/(z' - z)$  è analitica in  $S$  e l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy (31);
- 3) se  $z$  è interno a  $\gamma$ , la funzione integranda  $f(z')/(z' - z)$  in generale *non* è analitica in  $S$ , ma può avere una singolarità in  $z' = z$ .

#### Dimostrazione

Consideriamo il seguente integrale

$$I(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz'.$$

Per il teorema generalizzato di Cauchy  $\gamma$  può essere deformata in una circonferenza  $C$  centrata in  $z$  di raggio arbitrario  $r$ , interna a  $S$ :

$$I(z) = \oint_C \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz'.$$

Per la disuguaglianza di Darboux (26),

$$|I(z)| \leq \max_{z' \in C} \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| 2\pi r = 2\pi \max_{z' \in C} |f(z') - f(z)|,$$

dove si è usato  $|z' - z| = r$ ,  $\forall z' \in C$ . Poiché la funzione  $f(z)$  è continua in  $S$ , il secondo membro può essere reso arbitrariamente piccolo. Infatti, dalla definizione di continuità di una funzione,  $\lim_{z' \rightarrow z} f(z') = f(z)$ , segue

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta / |f(z') - f(z)| < \epsilon \quad \forall z' \in I_\delta(z) .$$

Basta allora scegliere  $r < \delta$  per dimostrare che  $\forall \epsilon > 0$  si ha

$$|I(z)| \leq 2\pi\epsilon .$$

Ma l'unico numero non negativo minore o uguale a un numero positivo arbitrario è lo zero, quindi

$$I(z) = 0 ,$$

ossia, utilizzando l'integrale (33),

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z' - z} dz' = f(z) 2\pi i ,$$

da cui la (38).

[q.e.d.]

*La rappresentazione integrale di Cauchy permette quindi di conoscere i valori di una funzione analitica in tutta la regione interna ad una curva chiusa  $\gamma$  una volta noti i suoi valori nei punti appartenenti alla curva  $\gamma$ .*

*Rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate*

Sia  $f(z)$  una funzione *analitica* in un dominio  $E$  aperto *semplicemente connesso* e  $\gamma$  una curva di Jordan contenuta in  $E$ . Sia  $S$  la regione interna a  $\gamma$ . Sotto queste ipotesi vale la rappresentazione integrale di Cauchy (38). Se  $z + \Delta z$  è un punto ancora interno a  $S$ , si trova facilmente che

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)(z' - z - \Delta z)} dz' ,$$

da cui si ottiene il rapporto incrementale, il cui limite per  $\Delta z \rightarrow 0$  è

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^2} dz' , \quad \forall z \in S . \quad (39)$$

Questo risultato equivale alla derivazione sotto il segno di integrale e può essere esteso a derivate superiori ricordando l'identità:

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z' - z} = \frac{n!}{(z' - z)^{n+1}} ,$$

per giungere alla *rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate della funzione  $f(z)$* :

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz' \quad \forall z \in S. \quad (40)$$

Un'importantissima conseguenza della (40) è che **una funzione analitica è infinitamente derivabile**, ovviamente con derivate continue. Vale la pena sottolineare che nulla di simile accade per le funzioni reali di variabili reali: una funzione  $f(x)$  differenziabile in un intervallo non è necessariamente infinitamente differenziabile in tutti i punti dell'intervallo (si pensi a  $f(x) = x|x|$ , con derivata  $2|x|$  che non è differenziabile nell'origine).

Altri teoremi che sono conseguenza della rappresentazione integrale di Cauchy sono considerati nell'Appendice A. Ricordiamo qui solo l'importante

**TEOREMA DI LIOUVILLE** *Ogni funzione intera e limitata su tutto  $\mathbb{C}$  è necessariamente costante.*

**Dimostrazione.** Poiché  $f(z)$  è limitata in  $\mathbb{C}$ , esiste un  $M$  reale tale che  $|f(z)| \leq M$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Inoltre  $\forall z_0 \in \mathbb{C}$  possiamo usare la rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata di  $f(z)$ :

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right|_{z=z_0} \leq \frac{M 2\pi r}{2\pi r^2} = \frac{M}{r},$$

dove abbiamo scelto per  $\gamma$  una circonferenza centrata in  $z_0$  di raggio  $r$  ( $l = 2\pi r$ ) e abbiamo applicato Darboux (26). Poiché  $f(z)$  è regolare e limitata in *tutto* il piano complesso, si può scegliere  $r$  arbitrariamente grande, rendendo il rapporto  $M/r$  piccolo quanto si vuole; quindi

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

da cui

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \text{costante} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*N.B.* Lo stesso teorema non vale nel campo reale. Infatti esistono funzioni  $f(x)$  di variabile reale non costanti che sono infinitamente derivabili e limitate in tutto  $\mathbb{R}$ . Per esempio le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}$$

sono limitate ( $f(x) \leq 1$ ) e infinitamente derivabili. Le corrispondenti funzioni complesse non sono invece limitate in  $\mathbb{C}$ . Infatti  $1/(1+z^2)$  non è regolare né limitata in



$z = \pm i$ . La funzione  $1/(1 + |z|^2)$  è limitata in  $\mathbb{C}$ , ma non è analitica perchè contiene  $|z|^2 = z^*z$ . Per quanto riguarda  $f(z) = e^{-z^2}$  è regolare in tutto  $\mathbb{C}$  ma per  $z = iy$ , con  $y$  reale,  $f(iy) = e^{y^2}$  non è limitata.

Il teorema di Liouville permette una dimostrazione rapidissima del *teorema fondamentale dell'algebra*, che dice che ogni polinomio a coefficienti complessi si annulla in almeno un punto di  $\mathbb{C}$ . Procedendo per assurdo, supponiamo che invece

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

non si annulli per alcun  $z \in \mathbb{C}$ . Segue che la funzione  $1/P_n(z)$  è intera, oltre ad essere limitata in  $\mathbb{C}$  dal momento che va a zero per  $z \rightarrow \infty$ . Il teorema di Liouville implica allora che  $1/P_n(z)$  sia costante, in palese contraddizione con le ipotesi.

## 1.5 SERIE IN CAMPO COMPLESSO

Ricordiamo che una serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  converge (convergenza puntuale) in  $z$  se esiste il limite di  $\sum_{k=0}^n f_k(z)$  per  $n \rightarrow \infty$ . La serie converge *uniformemente* in un dominio  $D$  se  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon)$  intero *indipendente da*  $z$  tale che il resto

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z), \quad |R_n(z)| < \epsilon, \quad \forall n > n_0, \forall z \in D.$$

La somma di una serie uniformemente convergente in  $D$  di funzioni continue è anch'essa continua in  $D$  e può essere integrata termine a termine. Una serie converge *assolutamente* se converge la serie dei valori assoluti  $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ . La convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria. Noi per il momento ci occuperemo solo di serie di potenze.

## 1.5.1 Serie di potenze

Una *serie di potenze* è una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Per le serie di potenze in campo complesso valgono teoremi analoghi a quelli validi in campo reale:

- La regione di convergenza di una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  è un *cerchio* (centrato in  $z_0$ ), il cui raggio si dice *raggio di convergenza* della serie. All'interno di tale cerchio la serie è uniformemente e assolutamente convergente. All'esterno non converge mai. Sulla circonferenza può convergere o no, a seconda dei casi.
- **Teorema di Weierstrass:** una serie di potenze è, per ogni  $z$  interno al cerchio di convergenza, derivabile termine a termine  $n$  volte (con  $n$  arbitrario):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \Rightarrow \frac{d^n f(z)}{dz^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^n (z - z_0)^k}{dz^n},$$

quindi essa è analitica all'interno del cerchio di convergenza.

- **Teorema di Cauchy-Hadamard:** il raggio di convergenza  $\rho$  della serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  coincide con l'inverso del massimo fra i punti di accumulazione della successione  $\{|a_k|^{1/k}\}$ , ovvero, se il limite esiste, con:

$$\rho = \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \right\}^{-1}. \quad (41)$$

Si può mostrare che la (41) è equivalente alla più comoda:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (42)$$

sempre che il limite, finito o infinito, esista.

### 1.5.2 Serie di Taylor

Lo sviluppo in serie di Taylor è uno sviluppo in serie di potenze di una funzione *nell'intorno di un suo punto di analiticità*. Sia  $f(z)$  una funzione *analitica* in un dominio  $D$  e sia  $C$  un intorno circolare, tutto contenuto in  $D$ , di un punto regolare  $z_0$  (si veda Fig. 14). È facile dimostrare che la funzione  $f(z)$ , infinitamente derivabile<sup>8</sup>, può essere rappresentata, per ogni  $z \in C$ , dalla **serie di Taylor**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (43)$$

$$a_k = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k f(z)}{dz^k} \right]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (44)$$

dove per l'ultimo passaggio si è usata la rappresentazione di Cauchy (40) delle derivate di una funzione analitica.

**Dimostrazione:** partendo dalla rappresentazione integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz',$$

usando (vedi Fig. 14)

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n \quad (45)$$

e integrando termine a termine la serie (uniformemente convergente, poiché  $|z - z_0| < |z' - z_0|$ , quindi  $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$ ) si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz', \quad (46)$$

che coincide con la (43).

[q.e.d]

<sup>8</sup> NB Nel campo reale l'infinita derivabilità non è sufficiente per garantire che una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor (si pensi al caso di  $f(x) = e^{-1/x^2}$  per  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  che ha tutte le derivate in  $x = 0$  nulle ma non è la funzione nulla); in  $\mathbb{C}$  basta invece l'analiticità.

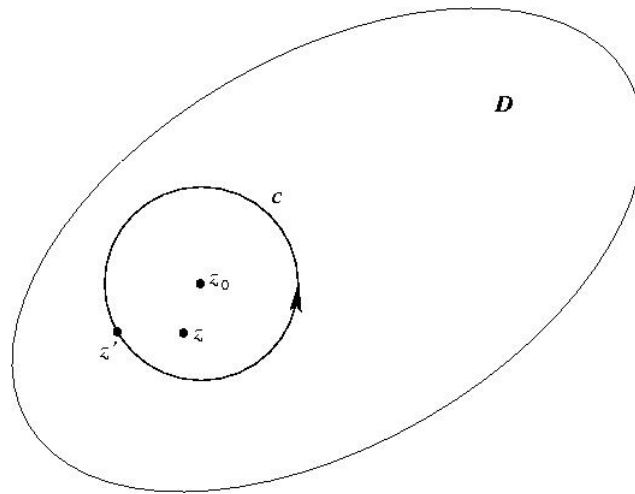


Figura 14.: Intorno circolare del punto  $z_0$  nel dominio  $D$

Poiché il cerchio  $C$  deve essere tutto interno al dominio di analiticità di  $f(z)$ , il suo raggio  $r$  deve essere minore della distanza di  $z_0$  dal più vicino punto singolare di  $f(z)$ : il cerchio  $C$  è certamente contenuto nel cerchio di convergenza della serie di Taylor (43).

È molto importante sottolineare che esiste una completa equivalenza tra analiticità di una funzione in un punto e sua sviluppabilità in serie di Taylor in un suo intorno:

$$f(z) \text{ analitica in } z_0 \iff \exists I(z_0) / \forall z \in I(z_0), f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

**Esempio:** la serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  converge uniformemente a

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

nella regione  $|z| < 1$ . Il punto  $z = 1$  è infatti un punto singolare di  $f(z)$ .

**CONTINUAZIONE ANALITICA** Talvolta conosciamo una funzione solo attraverso una serie di potenze, che converge nel cerchio  $S_1$ , ma il dominio di analiticità della funzione potrebbe essere più ampio. L'estensione tramite serie di Taylor al di fuori dell'originale dominio  $S_1$  viene detta **continuazione analitica** (alla Weierstrass) della funzione di partenza. Nel caso in Fig.15 abbiamo una serie di potenze attorno all'origine con raggio di convergenza determinato dalla distanza dalla singolarità  $z_1$ . L'espansione di Taylor attorno a  $z_2 \in S_1$  converge nel cerchio  $S_2$ , che si estende al di là del dominio  $S_1$  (abbiamo qui assunto che  $z_1$  sia la singolarità più vicina a  $z_2$ , ma potrebbe non essere così). In  $S_1 \cap S_2$  le due serie sono rappresentazioni diverse della stessa funzione e coincidono.

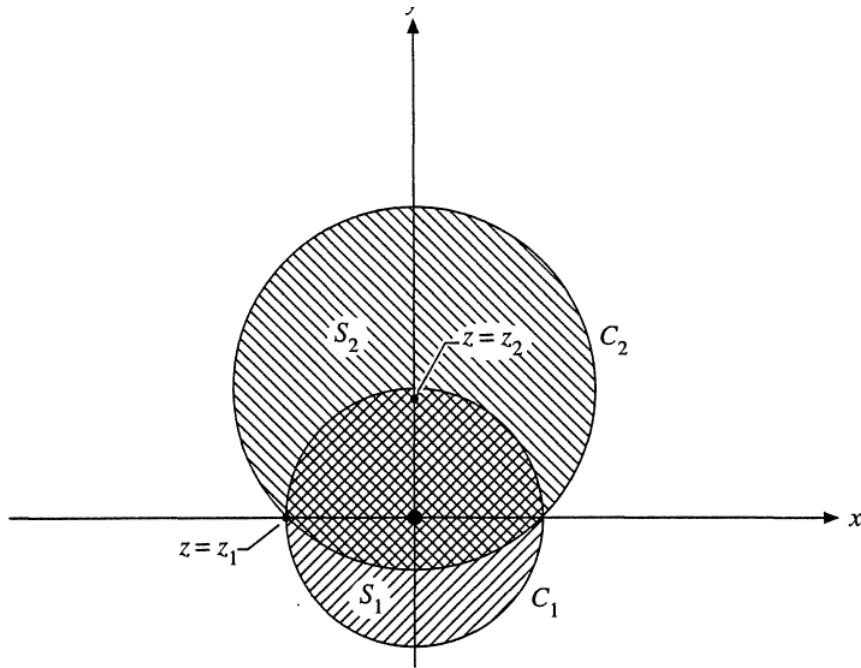


Figura 15.: Continuazione analitica

In generale, due funzioni analitiche che coincidono su un insieme continuo di punti, coincidono ovunque siano entrambe ben definite e rappresentano la stessa funzione. Il procedimento di continuazione analitica può essere ripetuto un numero arbitrario di volte, anche in presenza di altre singolarità, fino a raggiungere *qualsiasi punto del dominio di analiticità connesso a quello di partenza*.

**ESEMPIO** Consideriamo la funzione analitica definita dalla serie di Taylor

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

che converge nel cerchio  $S_1$  di raggio 1 (Fig.15). Calcolando le derivate della serie si verifica che l'espansione attorno al punto  $z_2 = i/2$  interno a  $S_1$  è

$$\begin{aligned} f_2(z) &= f_1(z_2) + f_1'(z_2)(z - z_2) + \frac{1}{2}f_1''(z_2)(z - z_2)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1 + \frac{i}{2}} - \frac{1}{(1 + \frac{i}{2})^2} \left( z - \frac{i}{2} \right) + \frac{1}{(1 + \frac{i}{2})^3} \left( z - \frac{i}{2} \right)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i/2)^n}{(1 + i/2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Questa seconda serie converge in  $S_2$ , con raggio di convergenza  $|1 + i/2| = \sqrt{5}/2 > 1$  e rappresenta la continuazione analitica di  $f_1$  in  $S_2$ . Trattandosi poi di due serie

geometriche, noi sappiamo sommarle e possiamo verificare che in entrambi i casi la somma è  $f_3(z) = 1/(1+z)$ , analitica in  $\mathbb{C} - \{-1\}$ . Si può pensare a quest'ultima rappresentazione come una continuazione analitica delle prime due serie.

Riassumendo, la conoscenza di una funzione analitica e delle sue derivate in un unico punto di analiticità permette, in linea di principio, di ricostruire la funzione in tutto il suo dominio di analiticità.

### 1.5.3 Zeri

Un punto **regolare**  $z = z_0$  è uno **zero di ordine**  $n$  della funzione  $f(z)$  se:

1. La funzione si annulla in  $z_0$ :

$$f(z_0) = 0$$

2. Le prime  $n - 1$  derivate si annullano in  $z_0$ :

$$\left. \frac{d^k f(z)}{dz^k} \right|_{z=z_0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

3. La derivata  $n$ -esima è diversa da zero in  $z_0$ :

$$\left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \neq 0.$$

Per esempio la funzione  $f(z) = z^2$  ha uno zero di ordine 2 in  $z = 0$ . Infatti:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \neq 0.$$

Uno zero è un punto regolare di  $f(z)$ , che sarà quindi rappresentabile tramite uno sviluppo in serie di Taylor intorno a quel punto:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (47)$$

Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $n$  di  $f(z)$ , si ha, dalla (44), che

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_n \neq 0.$$

Quindi la (47) diventa

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Cambiando l'indice nella sommatoria,  $k \rightarrow k' = k - n$ , si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'+n} (z - z_0)^{k'+n} \\ &= (z - z_0)^n \sum_{k'=0}^{\infty} a_{k'+n} (z - z_0)^{k'}. \end{aligned}$$

La funzione

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$$

è una funzione analitica in  $z_0$ , in quanto sviluppabile in serie di Taylor intorno al punto  $z = z_0$ . Inoltre  $g(z)$  è non nulla in  $z_0$ :

$$g(z_0) = a_n \neq 0.$$

Pertanto una funzione  $f(z)$  che abbia in  $z_0$  uno zero di ordine  $n$  può sempre essere scritta nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad (48)$$

con  $g(z)$  analitica e non nulla in  $z = z_0$ .

#### 1.5.4 Serie di Laurent

Fra le varie possibili singolarità di una funzione analitica giocano un ruolo particolarmente importante le *singolarità isolate*: un punto singolare  $z_0$  si dice **singolarità isolata** della funzione  $f(z)$  se esiste un suo intorno privato di  $z_0$  in cui  $f(z)$  è analitica.

Nell'intorno di una singolarità isolata è necessario considerare anche serie a potenze negative; per esempio, per ogni  $z \neq 0$  vale:

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}, \quad (49)$$

come si vede subito ponendo  $w = 1/z$ ; evidentemente l'origine è una singolarità isolata per la funzione  $e^{1/z}$ .

Lo sviluppo in serie di Laurent è uno sviluppo in serie di potenze positive e negative di una funzione  $f(z)$  in un intorno bucato  $\bar{I}(z_0)$  di un suo punto singolare isolato  $z_0$  (si veda Fig. 16); Il **teorema di Laurent** dice che se esiste un  $\bar{I}(z_0)$  in cui  $f(z)$  è analitica, per ogni  $z \in \bar{I}(z_0)$ , si può scrivere<sup>9</sup>:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k. \quad (50)$$

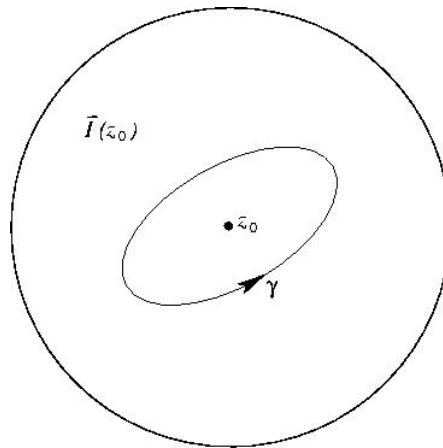


Figura 16.: Curva  $\gamma$  in un intorno bucato del punto  $z_0$

Ricordando la (34) è immediato calcolare i coefficienti  $d_k$ ; basta dividere la (50) per  $(z - z_0)^{n+1}$  e integrare su una curva chiusa  $\gamma$  interna a  $\bar{I}(z_0)$  e che circondi  $z_0$  per ottenere:

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (51)$$

N.B. Anche per  $k > 0$ , il coefficiente  $d_k$  in generale *non* è la derivata  $d^k f(z)/dz^k$  perché  $f(z)$  non è analitica nel punto  $z_0$ .

Notare inoltre che lo sviluppo in serie di Taylor (43) si ottiene come caso particolare dello sviluppo in serie di Laurent (50) se invece  $z_0$  è un punto regolare di  $f(z)$ . Infatti, se  $z_0$  è regolare, per il teorema di Cauchy  $d_k = 0$  per tutti i  $k \leq -1$  e la (50) si riduce alla (43).

#### 1.5.5 Singolarità isolate: poli e singolarità essenziali

Il punto singolare isolato  $z_0$  si definisce **polo** della funzione  $f(z)$  se lo sviluppo in serie di Laurent intorno a  $z_0$  possiede un numero *finito*  $n$  di potenze negative; un polo si dice di *ordine*  $n$  se:

1) I coefficienti  $\dots, d_{-n-2}, d_{-n-1}$  si annullano:

$$d_{-k} = 0, \quad \forall k > n$$

2) Il coefficiente  $d_{-n}$  è diverso da zero:

$$d_{-n} \neq 0.$$

<sup>9</sup> La dimostrazione è analoga a quella dello sviluppo in serie di Taylor, con la differenza che la curva  $\gamma$  da scegliere per la rappresentazione integrale di Cauchy di  $f(z)$  è composta dalle due circonferenze (percorse in verso opposto) che delimitano una corona circolare centrata in  $z_0$  e contenuta in  $\bar{I}(z_0)$ .



Un polo di ordine 1 si dice **polo semplice**, di ordine 2 **polo doppio** e così via. Nell'intorno di un polo di ordine  $n$  lo sviluppo (50) si riduce quindi a

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \quad (52)$$

e, mediante il cambiamento di indice  $k \rightarrow k' = k + n$ , a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k'=0}^{\infty} d_{k'-n} (z - z_0)^{k'-n} \\ &= (z - z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_{k-n} (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Definiamo ora

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k-n} (z - z_0)^k.$$

La funzione  $g(z)$  è data da uno sviluppo in serie di Taylor intorno a  $z_0$ : essa è pertanto *analitica* in  $z_0$ . Inoltre  $g(z)$  è diversa da zero in  $z_0$ :

$$g(z_0) = d_{-n} \neq 0.$$

Pertanto se  $z_0$  è un polo di ordine  $n$  della funzione  $f(z)$ , questa può essere espressa come

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (53)$$

con  $g(z)$  analitica e non nulla in  $z = z_0$ . Dalle (53) e (48) segue che il punto  $z = z_0$  è uno zero di ordine  $n$  per la funzione  $1/f(z)$ :

$$\frac{1}{f(z)} = h(z)(z - z_0)^n,$$

dove  $h(z) = 1/g(z)$  è di nuovo una funzione analitica e non nulla in  $z_0$ .

### Singularità essenziali

Il punto  $z = z_0$  si definisce invece **singularità essenziale isolata** della funzione  $f(z)$  se è un punto singolare *isolato* e lo sviluppo in serie di Laurent intorno a  $z_0$  possiede un numero *infinito* di potenze negative. Come si vede dallo sviluppo in serie di Laurent (49), un ovvio esempio di singularità essenziale isolata è l'origine per la funzione  $e^{1/z}$ , e lo stesso potremo dire per le funzioni  $\sin(1/z)$ ,  $\cos(1/z)$ , e simili.

La funzione  $g(z) = 1/\sin(1/z)$  invece è singolare nell'origine ma questa singolarità *non* è isolata. Infatti la funzione ha poli semplici per  $z = z_k = 1/(k\pi)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , come è facile verificare dal momento che  $\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)g(z)$  è sempre finito. La presenza di questi poli che si addensano nell'intorno dell'origine impedisce di trovare

un intorno bucato del punto  $z = 0$  in cui la funzione è analitica. Altrimenti detto, l'origine è un punto di accumulazione di poli ed è quindi una singolarità non isolata.

Dalle definizioni di polo e singolarità essenziale isolata segue che un polo di ordine  $n$  può essere rimosso moltiplicando la  $f(z)$  per  $(z - z_0)^n$ , mentre questo non è possibile per una singolarità essenziale. Un'altra importante differenza fra poli e singolarità essenziali è la seguente: è evidente dalla (53) che  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  se il punto  $z_0$  è un polo di  $f(z)$ ; se invece  $z_0$  è una singolarità essenziale il limite non esiste, perché nell'intorno di  $z_0$  la funzione oscilla forsennatamente: per farsene un'idea, basta pensare all'andamento nell'intorno dell'origine della funzione  $\sin \frac{1}{z}$  con  $z$  reale o immaginario puro.

Più in generale, si può dimostrare il **Teorema di Weierstrass per le singolarità essenziali isolate**: se  $z = z_0$  è una singolarità essenziale isolata della funzione  $f(z)$ , allora per ogni  $\epsilon$  e  $\delta$  piccoli a piacere e per ogni numero complesso  $c \in \mathbb{C}$ , esiste un valore di  $z \in \bar{I}_\delta(z_0)$  tale che

$$|f(z) - c| < \epsilon .$$

In altre parole, il teorema di Weierstrass afferma che *in qualunque intorno di una singolarità essenziale isolata, la funzione  $f(z)$  approssima indefinitamente qualunque valore prefissato  $c$ , senza necessariamente raggiungerlo.*

## 1.6 RESIDUI

Sia  $f(z)$  una funzione *analitica* in un dominio  $D$ ,  $z_0$  un *punto singolare isolato*,  $\gamma$  una curva di Jordan, tutta contenuta in  $D$  e contenente al suo interno il punto  $z_0$ , ma non altre singolarità (questo è possibile, perché  $z_0$  è isolato). Si definisce **residuo** della funzione  $f(z)$  nel punto  $z = z_0$  la quantità

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz . \quad (54)$$

Dalla eq.(51) che definisce i coefficienti di Laurent, calcolata per  $k = -1$ , si vede subito che vale:

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = d_{-1} . \quad (55)$$

Quindi il residuo di una funzione in un punto singolare isolato  $z_0$  è il coefficiente della potenza  $(-1)$  del suo sviluppo in serie di Laurent intorno a  $z_0$ .

**Esempio**

$$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow \{\text{Res}f(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 1 ,$$

dove  $\gamma$  è una curva che circonda l'origine.

Ovviamente, se  $z_0$  è un punto *regolare* di  $f(z)$  e cerchiamo ugualmente di calcolare il residuo, troviamo zero per il teorema di Cauchy. Non vale però il viceversa: una funzione può avere residuo nullo in un punto ed ivi essere singolare, se  $d_{-1} = 0$  ma esiste qualche  $d_{-n} \neq 0$  per  $n > 1$ ; un esempio caratteristico è  $f(z) = 1/z^2$  che nell'origine ha un polo doppio, con residuo nullo.

## 1.6.1 Teorema dei residui

$\Delta$  TEOREMA: Sia  $\gamma$  una curva di Jordan e  $f(z)$  una funzione analitica su  $\gamma$  e all'interno di  $\gamma$ , eccetto per un *numero finito di singolarità isolate* tutte contenute all'interno di  $\gamma$ . Sotto queste ipotesi vale il *teorema dei residui*:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \{\text{Res}f(z)\}_{z=z_k} , \quad (56)$$

dove  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sono le singolarità di  $f(z)$  interne a  $\gamma$ .

**Dimostrazione**

Il teorema dei residui si dimostra facilmente per induzione completa. Infatti la (56) è vera per  $n=1$  per la definizione di residuo. Se le singolarità sono  $n+1$  isoliamo la  $(n+1)$ -esima come in Fig. 17.

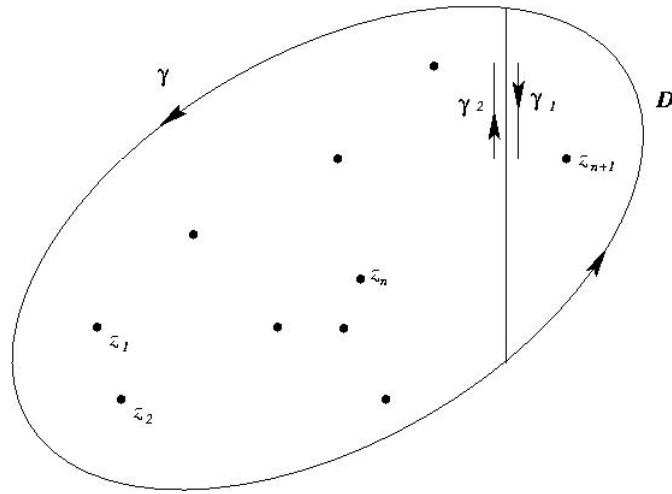


Figura 17.: Curva  $\gamma$  che contiene  $n + 1$  singolarità della funzione

Usando la tesi (56) per  $n$  singolarità si ottiene

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} f(z) dz &= \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz \\
 &= 2\pi i \{ \text{Res} f(z) \}_{z=z_{n+1}} + 2\pi i \sum_{k=1}^n \{ \text{Res} f(z) \}_{z=z_k} \\
 &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n+1} \{ \text{Res} f(z) \}_{z=z_k} .
 \end{aligned} \tag{57}$$

Quindi la (56) è vera per  $n + 1$  singolarità.

È utile osservare che il numero di singolarità interne alla curva  $\gamma$  deve essere finito; se fosse infinito, all'interno di  $\gamma$  ci sarebbe un punto di accumulazione di singolarità e quindi una singolarità **non** isolata, per cui non ha senso definire il residuo.

### 1.6.2 Calcolo dei residui

Vediamo ora come si calcola esplicitamente il residuo di una funzione in un suo punto singolare isolato. Se  $z_0$  è una **singolarità essenziale** non c'è altro modo<sup>10</sup> che usare le equazioni (54) e (55).

Se invece  $z = z_0$  è un **polo di ordine  $n$**  di  $f(z)$  c'è un modo alternativo che richiede solo di calcolare derivate. Infatti in un intorno di  $z_0$  si può scrivere:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

<sup>10</sup> locale, perché vedremo più avanti che il discorso può essere diverso se si conosce il comportamento globale della funzione in tutto il piano complesso, punto all'infinito compreso.

con  $g(z)$  analitica e non nulla in  $z_0$ . Il residuo è, dalla (54),

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} dz .$$

Ora, dalla rappresentazione di Cauchy per le derivate di  $f(z)$  (40)

$$\left\{ \frac{d^k g(z)}{dz^k} \right\}_{z=z_0} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz ,$$

si ottiene, ponendo  $k = n - 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1} g(z)}{dz^{n-1}} \right\}_{z=z_0}$$

e quindi, poiché

$$g(z) = (z-z_0)^n f(z) ,$$

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\} . \quad (58)$$

Nel caso particolare in cui  $z_0$  sia un **polo semplice** ( $n = 1$ ), si ha

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)] .$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Laurent nel caso di un polo semplice (52)

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} d_k (z-z_0)^k \\ &= \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + \dots , \end{aligned}$$

si ottiene

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ d_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^{k+1} \right\}$$

e quindi

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=z_0} = d_{-1} , \quad (59)$$

a conferma di quanto visto in generale in eq.(55).

**Esempio:** la funzione  $f(z) = z \sin z / (z - \pi)^3$  ha un polo doppio in  $z = \pi$ , infatti la sua serie di Laurent nell'intorno di  $z = \pi$  è

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z \sin z}{(z - \pi)^3} = -\frac{z \sin(z - \pi)}{(z - \pi)^3} = -\frac{z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - \pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}}{(z - \pi)^3} \\ &= (\pi + z - \pi) \left( \frac{1}{(z - \pi)^2} - \frac{1}{6} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{(z - \pi)^2} - \frac{1}{z - \pi} - \frac{\pi}{6} + \dots \end{aligned}$$

da cui segue  $d_{-1} = -1$ , che coincide col residuo sul polo secondo la (55). Alternativamente definiamo  $h(z) = (z - \pi)^3 f(z)$  e applichiamo la (58). Il residuo è

$$\frac{1}{2}h''(z)|_{z=\pi} = \frac{1}{2}(2\cos z - z\sin z)|_{z=\pi} = -1.$$

Si sarà notato che abbiamo applicato la (58) come se la funzione avesse un polo triplo. Infatti non è difficile vedere che la derivazione della (58) è valida anche se  $n$  è maggiore dell'ordine del polo. Nel caso in questione, il calcolo del residuo si può fare usando  $n = 3$  o  $n = 2$ , ma è più diretto con  $n = 3$ .

## 1.7 CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI CON IL METODO DEI RESIDUI

Il teorema dei residui (56) è di grande utilità perché permette non solo di calcolare integrali naturalmente definiti su curve chiuse nel piano complesso, ma anche ampie classi di integrali definiti sull'asse reale, trasformandoli in integrali in campo complesso.

### 1.7.1 Integrali trigonometrici

Una prima classe da considerare è la seguente<sup>11</sup>:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta. \quad (60)$$

Per calcolare integrali di questo tipo

- i) si usano le formule di Eulero per esprimere  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  in funzione di  $e^{i\theta}$  (senza usare la complessa coniugazione!) e si effettua la sostituzione

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}; \quad (61)$$

- ii) ci si riconduce ad un integrale nel piano  $z$  lungo una circonferenza di raggio unitario;

- iii) si calcola l'integrale con il teorema dei residui.

### esempio 1

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta}.$$

<sup>11</sup> Naturalmente l'intervallo d'integrazione potrebbe essere anche  $(-\pi, \pi)$  o qualsiasi altro intervallo di ampiezza  $2\pi$ .

Con la sostituzione (61) si ha:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) .$$

Sostituendo in  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_C \frac{dz}{z} \frac{1}{5 + 3/(2i)(z - 1/z)} \\ &= \frac{2}{3} \oint_C \frac{dz}{z^2 + \frac{10}{3}iz - 1} \end{aligned}$$

dove  $C$  è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Studiamo ora le singolarità della funzione integranda:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{10}{3}iz - 1} .$$

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{10}{3}iz - 1 = 0 &\Rightarrow z_1 = -\frac{i}{3}, z_2 = -3i \\ &\Rightarrow z^2 + \frac{10}{3}iz - 1 = \left( z + \frac{i}{3} \right) (z + 3i) . \end{aligned}$$

La funzione  $f(z)$  ha due poli semplici in  $z = -i/3$  (*interno* alla curva  $C$  e  $z = -3i$  (*esterno* alla curva  $C$ )). Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{1}{z^2 + \frac{10}{3}iz - 1} \right\}_{z=-i/3} \\ &= \frac{4\pi}{3} i \lim_{z \rightarrow -i/3} \frac{z + i/3}{\left( z + \frac{i}{3} \right) (z + 3i)} \\ &= \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

## **esempio 2**

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}, \quad p \in \mathbb{C}$$

Poniamo

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

Allora (vedi esempio precedente)

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) .$$

Sostituendo in  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_C \frac{dz}{z} \frac{1}{1 - p(z + 1/z) + p^2} \\ &= i \oint_C \frac{dz}{pz^2 - (1 + p^2)z + p} \end{aligned}$$

dove  $C$  è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. La funzione integranda

$$f(z) = \frac{1}{pz^2 - (1 + p^2)z + p}$$

ha due poli semplici:

$$\begin{aligned} pz^2 - (1 + p^2)z + p = 0 &\longrightarrow z_1 = 1/p, z_2 = p \\ &\longrightarrow pz^2 - (1 + p^2)z + p = p(z - 1/p)(z - p) \end{aligned}$$

e quindi

$$I = \frac{i}{p} \oint_C \frac{dz}{(z - 1/p)(z - p)}.$$

Dove sono situati i poli di  $f(z)$ ?

$$\text{se } |p| < 1 \longrightarrow z = p \text{ interno a } C, z = 1/p \text{ esterno a } C$$

$$\text{se } |p| > 1 \longrightarrow z = p \text{ esterno a } C, z = 1/p \text{ interno a } C.$$

Ne segue che, se  $|p| < 1$ ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{p} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{1}{(z - p)(z - 1/p)} \right\}_{z=p} \\ &= -\frac{2\pi}{p} \lim_{z \rightarrow p} \left\{ \frac{z - p}{(z - p)(z - 1/p)} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{1 - p^2} \end{aligned}$$

e, se  $|p| > 1$ ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{p} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{1}{(z - p)(z - 1/p)} \right\}_{z=1/p} \\ &= -\frac{2\pi}{p} \lim_{z \rightarrow 1/p} \left\{ \frac{z - 1/p}{(z - p)(z - 1/p)} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{p^2 - 1}. \end{aligned}$$

Se  $|p| = 1$ , l'integrando ha una singolarità sul cammino di integrazione e  $I$  non è definito. Si noti che l'esempio 1 è un caso particolare dell'esempio 2 (infatti l'integrale va da 0 a  $2\pi$  e quindi  $\sin \theta$  può essere scambiato con  $\cos \theta$  senza modificare il risultato).



## 1.7.2 Integrali su tutto l'asse reale e Lemma di Jordan

Il metodo dei residui permette di calcolare facilmente anche alcuni integrali estesi a tutto l'asse reale del tipo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx, \quad (62)$$

dove supporremo che  $F(x)$  non abbia singolarità su  $\mathbb{R}$ . In tal caso la strategia da seguire è di considerare accanto ad  $I$  l'integrale:

$$J(R) = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\gamma_R} F(z) dz, \quad (63)$$

dove  $\gamma_R$  è una semicirconferenza, centrata nell'origine e di raggio  $R$ , situata nel semipiano  $\text{Im } z > 0$  o  $\text{Im } z < 0$  a seconda dei casi (vedi Fig. 18).

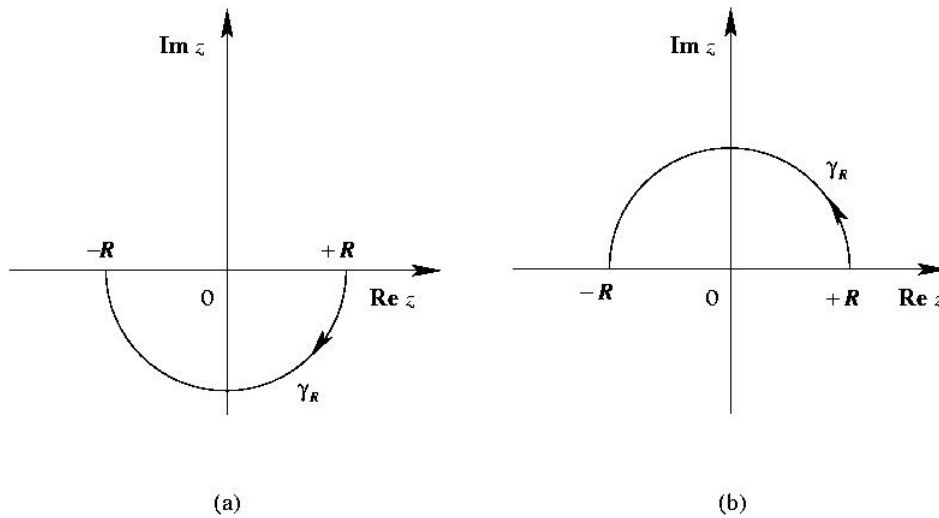


Figura 18.: Semicirconferenze di raggio  $R$  nel semipiano inferiore (a) e superiore (b)

L'integrale  $J(R)$  è esteso a una curva chiusa e si può quindi calcolare con il metodo dei residui qualora la funzione  $F(z)$  sia analitica in almeno un semipiano ( $\text{Im } z > 0$  o  $< 0$ ) di  $\mathbb{C}$ , a parte un numero finito di singolarità isolate. Se poi l'integrale sulla semicirconferenza va a zero quando  $R$  tende a infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} F(z) dz = 0, \quad (64)$$

allora l'integrale di partenza  $I$  è dato dalla somma dei residui delle singolarità sul semipiano interessato:<sup>12</sup>

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = 2\pi i \sum_k \text{Res} F(z)|_{z=z_k}. \quad (67)$$

Alcuni casi in cui l'integrale su  $\gamma_R$  va a zero sono i seguenti:

- 1) La funzione  $F(z)$  tende a zero più velocemente di  $1/|z|$  per  $z \rightarrow \infty$ :

$$F(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (68)$$

In questo caso la semicirconferenza  $\gamma_R$  può giacere sia nel semipiano  $\text{Im } z > 0$  sia nel semipiano  $\text{Im } z < 0$ .

**Dimostrazione.**

Passando a coordinate polari e supponendo di considerare la semicirconferenza nel semipiano superiore,  $z = Re^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, \pi]$ . La condizione (68) corrisponde a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left| F\left(Re^{i\theta}\right) \right| = 0, \quad (69)$$

indipendentemente dal valore dell'argomento  $\theta$ . Ora applichiamo la disuguaglianza di Darboux (26) all'integrale su  $\gamma_R$ :

$$\left| \int_{\gamma_R} F(z) dz \right| \leq \pi R M$$

dove  $M = \max |F(Re^{i\theta})|$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Poichè il limite per  $R \rightarrow \infty$  di quest'ultima espressione è necessariamente zero grazie alla (69), si ottiene la (64). La stessa dimostrazione vale se si considera la circonferenza nel semipiano inferiore,  $z = Re^{i\theta}$  con  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ .

[q.e.d.]

---

<sup>12</sup> In realtà dalla (64) segue che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(x) dx, \quad (65)$$

che coincide con

$$I = \lim_{R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} F(x) dx, \quad (66)$$

solo nel caso che quest'ultimo integrale esista; se ciò non succede, ma esiste il limite (65), allora questo si chiama *valore principale* dell'integrale (62), si veda anche Sez. 1.7.4

- 2) **Lemma di Jordan.** La funzione integranda  $F(z)$  è della forma  $e^{i\alpha z}f(z)$ , con  $\alpha > 0$ , dove  $f(z)$  è una funzione che tende uniformemente (rispetto all'argomento di  $z$ ) a zero quando  $|z|$  tende a infinito e l'argomento di  $z$  è compreso fra 0 e  $\pi$  (cioè nel semipiano  $\text{Im } z \geq 0$ ), ovvero

$$f(z) = o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi. \quad (70)$$

In tal caso, se si sceglie per  $\gamma_R$  una semicirconferenza nel semipiano **superiore** ( $\text{Im } z > 0$ ), centrata nell'origine e di raggio  $R$ , è facile dimostrare che vale:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0. \quad (71)$$

Notare che la condizione (70) è molto meno restrittiva della (68); qui è l'esponenziale, rapidamente decrescente per  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ , che si incarica di far tendere rapidamente a zero l'integrando.

*Dimostrazione.* Sia

$$A_R = \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = \int_0^\pi e^{i\alpha(\cos\theta + i\sin\theta)R} f(Re^{i\theta}) ie^{i\theta} R d\theta$$

il cui modulo è minore dell'integrale del modulo:

$$|A_R| \leq R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Quando diciamo che  $f(Re^{i\theta}) \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow \infty$  *uniformemente* per  $0 \leq \theta \leq \pi$  intendiamo che  $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$  tale per cui  $|f(Re^{i\theta})| < \varepsilon, \forall z/|z| > R$ , con  $R$  che non dipende da  $\theta$  ma solo da  $\varepsilon$ . Definito allora  $\varepsilon(R) = \max |f(Re^{i\theta})|$ , sappiamo che  $\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0$ . Possiamo quindi scrivere

$$|A_R| \leq R\varepsilon(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta = 2R\varepsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta.$$

Osservando ora che per  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ ,

$$|A_R| \leq 2R\varepsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} d\theta = \frac{2R\varepsilon(R)}{-2\alpha R/\pi} (e^{-\alpha R} - 1)$$

da cui segue

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |A(R)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi\varepsilon(R)}{\alpha} = 0.$$

Si noti che nella derivazione è stato essenziale avere  $\alpha > 0$ .

- 3) Con la sostituzione  $z \rightarrow -z$ , si vede subito che la (71) vale anche per  $\alpha < 0$ , purché valga la (70) con  $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$  e la semicirconferenza  $\gamma_R$  stia nel semipiano **inferiore**.
- 4) Con la sostituzione  $z \rightarrow -iz$  si vede subito che vale anche

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{\alpha z} f(z) dz = 0, \quad \alpha > 0 \quad (72)$$

purché valga la (70) con  $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$  e la semicirconferenza  $\gamma_R$ , centrata in qualsiasi punto  $x_0$  dell'asse reale, stia a **sinistra** della parallela dell'asse immaginario passante per  $x_0$ . Ovviamente se  $\alpha < 0$  vale un discorso analogo per una semicirconferenza  $\gamma_R$  che stia a *destra* della parallela dell'asse immaginario passante per  $x_0$ .

Per capire subito su quale semicirconferenza chiudere il cammino, basta ricordare che essa va scelta in modo che, lungo la sua freccia, l'esponente del fattore che moltiplica  $f(z)$  deve essere reale e tendere a  $-\infty$  per  $|z| \rightarrow \infty$ .

### 1.7.3 Esempi

#### esempio 1

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

La funzione integranda è simmetrica:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = f(-x) .$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx .$$

Inoltre

$$f(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^2} ;$$

le ipotesi del caso 1 sono soddisfatte in entrambi i semipiani. Possiamo quindi chiudere il cammino di integrazione nel piano complesso come indicato in Figura 18 (scegliamo di chiuderlo nel semipiano positivo).

Indichiamo con  $C_R$  il cammino chiuso e con  $\Gamma_R$  la semicirconferenza. Il caso 1 visto sopra ci assicura che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz .$$

Pertanto

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz .$$

Studiamo la funzione  $f(z)$ :

$$(z^2 + 1)(z^2 + 4) = 0 \longrightarrow z = \pm i, z = \pm 2i.$$

$f(z)$  ha 4 poli semplici, due nel semipiano  $\text{Im } z > 0$  e due nel semipiano  $\text{Im } z < 0$ .  
Quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i [\{\text{Res} f(z)\}_{z=i} + \{\text{Res} f(z)\}_{z=2i}]$$

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2}{(z + i)(z - i)(z^2 + 4)} = \frac{i}{6}$$

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z^2}{(z + 2i)(z - 2i)(z^2 + 1)} = -\frac{i}{3}$$

$$I = \pi i \left( \frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Si noti che in questo esempio, e nei successivi esempi 2 e 3, l'integrando è positivo; se il risultato trovato fosse un numero negativo (o peggio immaginario) si sarebbe certo commesso un errore di segno (o dimenticato un fattore  $i$ ). Si verifichi che chiudendo il cammino d'integrazione nel semipiano  $\text{Im } z < 0$  si trova lo stesso risultato.

### esempio 2

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}, \quad n \text{ intero positivo}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^{2n}} \quad |z| \rightarrow \infty \sim \frac{1}{z^{2n}}$$

Vale il caso 1). Chiudiamo il cammino di integrazione in  $\text{Im } z > 0$ :

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} \frac{dz}{1 + z^{2n}}.$$

I poli di  $f(z)$  sono dati da

$$1 + z^{2n} = 0 \longrightarrow z^{2n} = -1 \longrightarrow z = (-1)^{\frac{1}{2n}}.$$

Quanti poli giacciono nel semipiano  $\text{Im } z > 0$ ? Poiché  $-1$  si può rappresentare come

$$-1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

con  $k$  intero, i poli saranno

$$z = z_k = e^{i\pi \frac{2k+1}{2n}} = e^{i\theta_k}, \quad |z_k| = 1,$$

con

$$\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$$

cioè

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2n}}, \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2n}}, \quad z_{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2n}}, \quad \text{etc.}$$

I poli  $z_k$  giacciono nel semipiano  $\text{Im } z > 0$  se  $0 < \theta_k < \pi$ , ovvero se

$$0 < \frac{2k+1}{2n} < 1$$

che, poiché  $k$  è intero, equivale a

$$-\frac{1}{2} < k < n - \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \leq k \leq n-1.$$

La funzione  $f(z)$  ha quindi  $n$  poli semplici in  $\text{Im } z > 0$ :

$$z = z_k = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Il residuo di  $f(z)$  nel polo  $z_k$  vale

$$\begin{aligned} \{\text{Res} f(z)\}_{z=z_k} &= \lim_{z \rightarrow z_k} \left\{ (z - z_k) \frac{1}{1 + z^{2n}} \right\} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{2nz^{2n-1}} \\ &= \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{z_k}{2n} \right) = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{2n}(2k+1)}.$$

Poniamo

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{2n}} \longrightarrow z_0^{2k+1} = e^{\frac{i\pi}{2n}(2k+1)}$$

Allora

$$I = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{(2k+1)} = -\frac{i\pi}{n} z_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( z_0^2 \right)^k = -\frac{i\pi}{n} z_0 \frac{1 - z_0^{2n}}{1 - z_0^2}$$

Ma  $z_0^{2n} = -1$  e pertanto

$$I = -\frac{2i\pi}{n} \frac{z_0}{1 - z_0^2} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\frac{z_0 - z_0^{-1}}{2i}}$$

e infine

$$I = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

**esempio 3**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx .$$

L'integrale esiste poiché la funzione integranda è continua sull'asse reale ed è  $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ; **non** si può però applicare il caso 1) del 1.7.2 perché l'integrando non è affatto  $O\left(\frac{1}{z}\right)$  **nel piano complesso**; infatti

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{1+z^2} dz , \quad (73)$$

quindi esso diverge esponenzialmente per  $z = iy$  con  $y \rightarrow \pm\infty$ . Invece il primo addendo dell'integrale (73) soddisfa le ipotesi del caso 2) (lemma di Jordan) ( $\alpha = 1 > 0$ ) e quindi si calcola chiudendo il cammino nel semipiano superiore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right\}_{z=i} = \frac{\pi}{e} ;$$

il secondo addendo ricade invece nel caso 3) ( $\alpha = -1 < 0$ ) e quindi si calcola chiudendo il cammino nel semipiano inferiore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{1+z^2} dz = -2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{-iz}}{1+z^2} \right\}_{z=-i} = \frac{\pi}{e} .$$

Pertanto

$$I = \frac{\pi}{e} .$$

**esempio 4**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx .$$

La funzione integranda è pari:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = f(-x) .$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx .$$

Notare che l'integrando non è singolare nell'origine; infatti lo zero semplice del denominatore è compensato da uno zero semplice del numeratore. Il lemma di Jordan non è direttamente applicabile, perché

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} ;$$

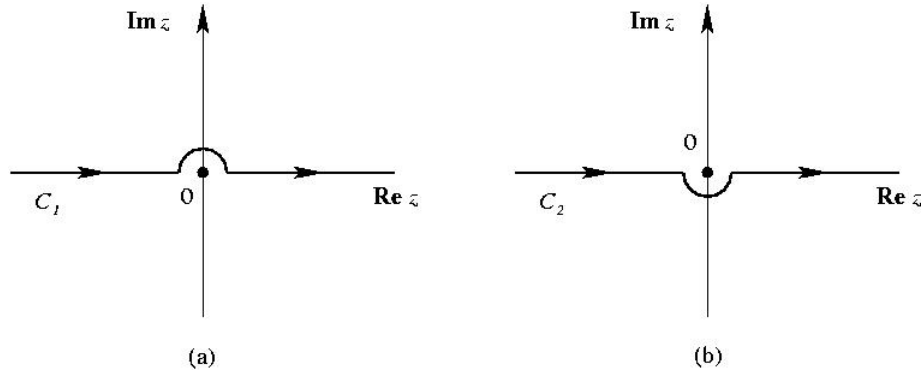


Figura 19.: Cammini  $C_1$  e  $C_2$  che aggirano l'origine

quindi per il primo addendo bisognerebbe applicare il caso 2) ( $\alpha = 1 > 0$ ) e chiudere con una semicirconferenza nel semipiano superiore, mentre il secondo ricade nel caso 3) ( $\alpha = -1 < 0$ ) e bisognerebbe chiudere nel semipiano inferiore. Non si può nemmeno spezzare l'integrale in una somma di due integrali, perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

non esiste (lo zero del denominatore non è più compensato da uno zero del numeratore).

La difficoltà si aggira nel modo seguente: poiché  $f(z)$  è ovunque analitica al finito (si noti che  $f(z) \rightarrow 1$  per  $z \rightarrow 0$ ), **prima** di spezzare l'integrale si può deformare il cammino di integrazione, grazie al teorema di Cauchy. In particolare, i due cammini  $C_1$  e  $C_2$  di Figura 19 danno lo stesso risultato per  $I$ :

$$I = \frac{1}{2} \int_{C_1} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2} \int_{C_2} \frac{\sin z}{z} dz .$$

**Dopo** aver così deformato il cammino è possibile spezzare l'integrale in una somma di due e procedere con il metodo dei residui. Calcoleremo  $I$  in due modi diversi:

i) *Primo metodo.* Integriamo su  $C_1$ :

$$I = \frac{1}{4i} \left( \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_1} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right) .$$

Benché la funzione  $f(z)$  sia regolare ovunque, le funzioni  $\frac{e^{iz}}{z}$  e  $\frac{e^{-iz}}{z}$  hanno un polo semplice in  $z = 0$ ; inoltre esse soddisfano il lemma di Jordan nei semipiani  $\text{Im } z > 0$  e  $\text{Im } z < 0$ , rispettivamente. Pertanto si possono chiudere i cammini di integrazione nelle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (vedi Figura 20).

$$I = \frac{1}{4i} \left( \oint_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right) .$$



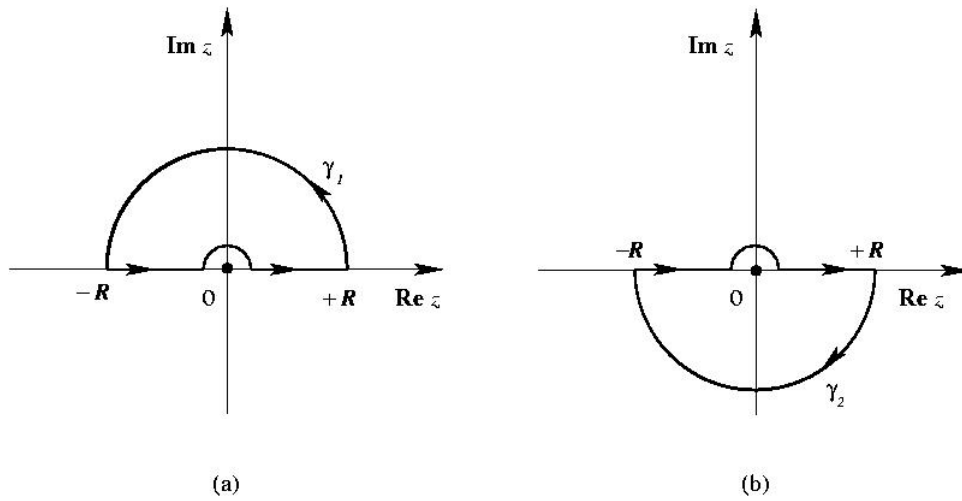


Figura 20.: Chiusura del cammino che aggira l'origine nel semipiano superiore (a) ed inferiore (b)

Si noti che la curva  $\gamma_2$  è percorsa in senso **orario**. Il primo integrale è nullo per il teorema di Cauchy e il secondo si calcola con il teorema dei residui, tenendo conto del cambiamento di segno necessario perchè la curva  $\gamma_2$  è percorsa in senso orario:

$$I = -\frac{1}{4i} \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz = +\frac{1}{4i} 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{-iz}}{z} \right\}_{z=0} = \frac{\pi}{2}. \quad (74)$$

È facile verificare che lo stesso risultato si ottiene integrando su  $C_2$ .

ii) *Secondo metodo.*

$$I = \frac{1}{4i} \left( \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right).$$

Cambiamo variabile nel secondo integrale:

$$z \rightarrow -z, \quad C_1 \rightarrow -C_2$$

Allora

$$I = \frac{1}{4i} \left( \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{-C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = \frac{1}{4i} \left( \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Ma

$$\int_{C_1} - \int_{C_2} = -\oint_{\gamma} \rightarrow \int_{C_2} = \int_{C_1} + \oint_{\gamma},$$

dove  $\gamma$  è una curva chiusa che circonda l'origine. Pertanto

$$I = \frac{1}{4i} \left( 2 \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz \right). \quad (75)$$

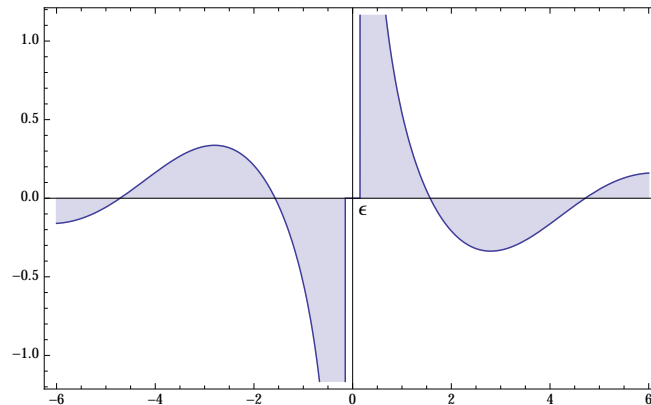


Figura 21.: La funzione  $\cos x/x$  e la definizione di valor principale del suo integrale.

Ora abbiamo

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

per il lemma di Jordan (applicabile in  $\text{Im } z > 0$ ) e per il teorema di Cauchy, e

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{e^{iz}}{z} \right\}_{z=0} = 2\pi i .$$

Sostituendo infine nella (75) si ottiene

$$I = \frac{\pi}{2} .$$

#### 1.7.4 Singolarità sul cammino di integrazione

A differenza di quello in (74) l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx \quad (76)$$

ha una singolarità sul cammino d'integrazione e non è definito. Nel caso in questione, e più generalmente per integrali logaritmicamente divergenti con singolarità  $1/(x - x_0)$ , si può introdurre il **valore principale P dell'integrale** (o PV), definito da

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx \right] \quad (77)$$

che risulta finito, per via della cancellazione esatta della singolarità (cioè del  $\ln \epsilon$ ) a destra dell'origine con quella (negativa) a sinistra dell'origine (Fig. 21). Nel caso specifico il valore principale è nullo, perchè i due integrali in (77) si cancellano:

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\cos x}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\cos(-x)}{(-x)} d(-x) = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx . \quad (78)$$

Si può anche attribuire all'integrale (76) un significato deformandone il cammino d'integrazione sul piano complesso in modo da evitare la singolarità aggirandola in uno dei due modi in Fig.19, per es.:

$$I_{C_1} = \int_{C_1} \frac{\cos z}{z} dz = \frac{1}{2} \int_{C_1} \left( \frac{e^{iz}}{z} + \frac{e^{-iz}}{z} \right) dz .$$

Chiudendo poi in cammino d'integrazione sul semipiano  $\text{Im}z > 0$  ( $< 0$ ) per  $e^{iz}$  ( $e^{-iz}$ ) si ottiene

$$I_{C_1} = \frac{1}{2} \left( \oint_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right) = -i\pi$$

dove abbiamo usato (74). Se si sceglie invece  $C_2$  si ottiene  $I_{C_2} = +i\pi$ . La parte reale è nulla e coincide con il valor principale. È importante notare che l'integrale sul cammino  $C_1$  è identico a quello ottenuto su una retta parallela all'asse reale e posta  $i\epsilon$  sopra ad esso, perchè in tutti i punti, tranne nell'intorno dell'origine, si può mandare  $\epsilon$  a zero. Si noti anche che la deformazione del cammino in  $C_1$  o  $C_2$  è equivalente allo spostamento della singolarità sotto o sopra l'asse reale di una quantità infinitesima, e cioè

$$\int_{C_{1,2}} \frac{\cos z}{z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x \pm i\epsilon} dx = \mp i\pi$$

con  $\epsilon > 0$ .

In generale, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

dove  $f(x)$  è non nulla in  $x_0$ , regolare in  $\mathbb{R}$ , e tale da assicurare la convergenza dell'integrale per  $x \rightarrow \infty$ , può essere trattato nello stesso modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \mp i\epsilon} dx = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \pm i\pi f(x_0) \quad (79)$$

dove il valore principale è definito in maniera analoga alla (77) e il valore  $f(x_0)$  emerge dal calcolo del residuo in  $z = x_0$  (nell'esempio (76)  $\cos z|_{z=0} = 1$ ). Vale la pena notare come la (79) applicata a  $f(x) = \sin x$  riproduce il risultato (74) e non dipende dalla scelta di cammino, come abbiamo già osservato. In termini di distribuzioni (che studieremo più avanti) si scrive anche

$$\frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} = P \frac{1}{x - x_0} \pm i\pi \delta(x - x_0). \quad (80)$$

Notiamo infine che dalla Eq.(79) o dalla Eq.(80) si ottiene

$$P \frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} + \frac{1}{x - x_0 - i\epsilon} \right],$$

cioè il valore principale di un integrale è la media dei cammini appena sopra e appena sotto il polo.

## 1.7.5 Relazioni di dispersione

Questa sezione non fa parte del programma d'esame e può essere meglio compresa dopo lo studio delle trasformate di Fourier.

Supponiamo ora che  $f(z)$  sia una funzione analitica nel semipiano superiore,  $\text{Im}z > 0$ , che tende a 0 per  $z \rightarrow \infty$ . In questo caso l'integrale a sinistra della (79) con  $+i\epsilon$  va a zero perchè posso chiudere il cammino nel semipiano superiore dove non vi sono singolarità. Otteniamo perciò

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}f(x) + i \text{Im}f(x)}{x - x_0} = i\pi (\text{Re}f(x_0) + i \text{Im}f(x_0))$$

ovvero

$$\begin{aligned} \text{Re}f(x_0) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}f(x)}{x - x_0}, \\ \text{Im}f(x_0) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}f(x)}{x - x_0}, \end{aligned} \quad (81)$$

che costituiscono una coppia di *Trasformate di Hilbert*, di notevole rilevanza in fisica dove prendono il nome di *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*. Per comprenderne l'importanza incominciamo a considerare una funzione  $g(t)$  identicamente nulla per  $t < 0$  e assolutamente integrabile in  $\mathbb{R}$ . La funzione  $G(\omega)$  definita da

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt$$

è analitica in tutto il semipiano  $\text{Im}\omega > 0$ . Infatti  $|e^{i\omega t}| = e^{-\text{Im}\omega t}$  che è limitato sul semipiano superiore. Basta poi integrare  $G(\omega)$  su un cammino chiuso  $\gamma$  su quel semipiano, scambiare l'ordine di integrazione e osservare che  $\oint_{\gamma} e^{i\omega t} d\omega = 0$ . Dal teorema di Morera segue l'analiticità di  $G(\omega)$ . Come vedremo più oltre,  $G(\omega)$  non è altro che la trasformata di Fourier di  $g(t)$ , e ad essa potremo applicare le (81). Si può mostrare che  $G(\omega) \rightarrow 0$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

A quali situazioni fisiche si applicano le (81)? In fisica si incontrano spesso funzioni complesse di variabile reale (indice di rifrazione, impedenza, suscettibilità), la cui continuazione al campo complesso è fortemente vincolata dal rispetto di condizioni fisiche come la *causalità*. Consideriamo la situazione piuttosto comune in cui la risposta di un sistema fisico a uno stimolo  $F(t)$  (una *forza* in senso generalizzato) è lineare e dipende dalla convoluzione di  $F(t)$  con la funzione risposta o *suscettibilità*  $\chi$ .

$$R(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t - t') F(t') dt'$$

Evidentemente  $\chi(t - t')$  deve essere zero per  $t < t'$ , cioè la risposta al tempo  $t$  non può dipendere dallo stimolo esercitato a istanti successivi. La trasformata di Fourier

di  $\chi$  è pertanto analitica nel semipiano superiore e soddisfa le (81) grazie alla causalità. La parte immaginaria della suscettibilità descrive come il sistema dissipa energia. Le relazioni di dispersione implicano che, nota la risposta dissipativa, è possibile risalire a quella reattiva e viceversa. Un caso notevole è quello dell'indice di rifrazione di un mezzo continuo, la cui parte immaginaria descrive l'assorbimento della luce da parte del mezzo.

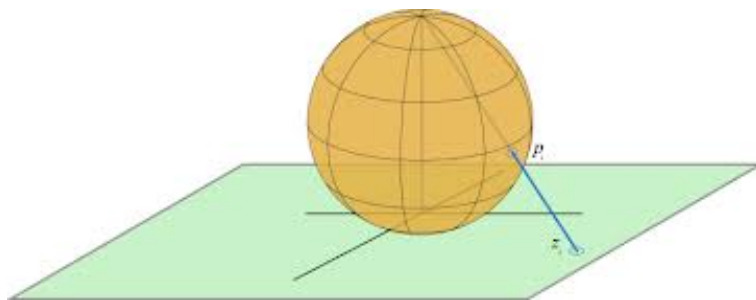


Figura 22.: Proiezione stereografica della sfera sul piano complesso.

### 1.8 STUDIO DEL PUNTO ALL'INFINITO

Una sfera di Riemann (vedi Fig. 22) è topologicamente equivalente al piano complesso esteso al punto all'infinito:  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ; a ogni punto sulla sfera corrisponde infatti un unico punto sul piano complesso, la proiezione stereografica del punto sulla sfera, e viceversa. A ogni retta sul piano complesso corrisponde sulla sfera una circonferenza passante per il polo Nord. Al polo Nord della sfera corrisponde quindi il punto all'infinito,  $\infty$  (un *unico punto!*), che ha argomento indefinito e modulo  $+\infty$ . L'estensione di  $\mathbb{C}$  a  $\overline{\mathbb{C}}$  è un esempio di *compattificazione*, analoga a quella che estende  $\mathbb{R}$  a  $\overline{\mathbb{R}}$ , associando una circonferenza alla retta reale.<sup>13</sup>

Il comportamento della funzione  $f(z)$  per  $z \rightarrow \infty$  si studia effettuando il cambiamento di variabile

$$t = \frac{1}{z - a} \quad (82)$$

per un opportuno  $a \in \mathbb{C}$ , generalmente fissato a zero, e valutando il comportamento della funzione  $\phi(t) = f(a + 1/t)$  per  $t \rightarrow 0$ . La sostituzione (82) manda un intorno circolare (di raggio  $\epsilon$ ) dell'origine nel piano complesso di  $t$  in un **intorno dell'infinito**  $I_\Omega(\infty)$ , cioè nell'**esterno** di un cerchio di raggio  $\Omega = 1/\epsilon$  centrato in  $a$ . Per esempio, se  $t = 0$  è un *polo* di ordine  $n$  di  $\phi(t)$ ,  $z = \infty$  è un polo di ordine  $n$  di  $f(z)$ ; se  $t = 0$  è uno *zero* di ordine  $n$  di  $\phi(t)$ ,  $z = \infty$  è uno zero di ordine  $n$  di  $f(z)$ , eccetera.

#### Esempi

- La funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$  è regolare all'infinito e ivi ha uno zero semplice.
- La funzione  $f(z) = z^2$  ha un polo doppio all'infinito.
- La funzione  $f(z) = e^z$  ha una singolarità essenziale all'infinito, così come le funzioni  $\sin z$  e analoghe.

<sup>13</sup> Per l'illustrazione di alcune proprietà della sfera di Riemann si veda il video <https://www.youtube.com/watch?v=6JgGKViQzbc>.

- La funzione  $f(z) = 1/\sin z$  ha poli semplici nei punti  $z_k = k\pi$  con  $k$  intero qualsiasi; quindi in ogni intorno del punto all'infinito cade almeno un polo (in realtà ne cadono infiniti): l'infinito **non** è una singolarità isolata, ma un **punto di accumulazione** di poli.

Naturalmente, se  $f(z)$  è regolare all'infinito può essere sviluppata in serie di Taylor in un **intorno dell'infinito**  $I_\Omega(\infty)$ , cioè **all'esterno** di un cerchio, centrato in un punto  $a$  scelto secondo convenienza (e come detto si usa generalmente  $a = 0$ ), e di raggio  $\Omega$  tale che all'esterno del cerchio la  $f(z)$  non abbia singolarità. Tale serie si ottiene sviluppando in serie di Taylor la funzione  $\phi(t) = f(a + 1/t)$  nell'intorno del punto  $t = 0$ , tornando poi alla variabile originaria  $z$  con la sostituzione  $t = 1/(z - a)$ ; lo sviluppo di Taylor nell'intorno del punto all'infinito conterrà quindi solo *potenze negative* di  $z - a$ , oltre alla potenza nulla. Per esempio lo sviluppo (49) della funzione  $e^{1/z}$ , che abbiamo già visto essere lo sviluppo di Laurent nell'intorno della singolarità essenziale  $z = 0$ , può anche essere letto come lo sviluppo di Taylor nell'intorno del punto regolare  $z = \infty$ .

Un discorso analogo vale per lo sviluppo di Laurent; in questo caso la parte singolare dello sviluppo conterrà solo *potenze positive* di  $(z - a)$ , in numero finito o infinito a seconda se il punto all'infinito è un polo o una singolarità essenziale. Per ogni **funzione intera** lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (83)$$

nell'intorno dell'origine può anche essere visto come sviluppo di Laurent intorno all'infinito; quindi:

- se ci sono infiniti  $a_n \neq 0$  l'infinito è una singolarità essenziale di  $f(z)$ ;
- se  $a_n \neq 0$  e  $a_l = 0, \forall l > n$ ,  $f(z)$  è un polinomio di grado  $n$  e l'infinito è un polo di ordine  $n$  (per  $n \neq 0$ ) o è regolare (per  $n = 0$ ).

Segue anche che una funzione regolare in tutto  $\mathbb{C}$  e anche all'infinito è necessariamente una costante (in accordo con il teorema di Liouville, vedi Sez.1.4.4).

### 1.8.1 Esempi

**esempio 1:** la funzione esponenziale

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

è regolare in  $z = 0$  e il suo sviluppo in serie ha solo potenze positive (è uno sviluppo di Taylor intorno a  $z = 0$ ). La stessa serie può tuttavia essere vista come sviluppo di Laurent attorno alla singolarità essenziale  $z = \infty$ .

**esempio 2:** la funzione

$$f(z) = e^{-1/z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-2k}$$

ha una singolarità essenziale in  $z = 0$ . Infatti, il suo sviluppo in serie ha un numero infinito di potenze negative. La stessa serie può essere letta come sviluppo di Taylor attorno al punto regolare  $z = \infty$  dal momento che non contiene potenze positive di  $z$ . Questo conferma che  $f(z)$  è analitica (espandibile in serie di Taylor) nell'intorno di  $z = \infty$ .

**esempio 3:** consideriamo la funzione

$$f(z) = z e^{-1/z} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k+1} = - \sum_{k'=-\infty}^1 \frac{(-1)^{k'}}{(-k'+1)!} z^{k'}.$$

La serie ha un numero infinito di potenze negative e quindi il punto  $z = 0$  è una singolarità essenziale. Studiamo  $z = \infty$ : la serie contiene una potenza positiva (la prima) di  $z$ , quindi la funzione ha un polo di ordine 1 in  $z = \infty$ .

**esempio 4:** consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{z/(1-z)}.$$

Poniamo  $z' = z - 1$ :

$$f(z) = e^{-(1+z')/z'} = e^{-1/z'} e^{-1} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/z')^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{-k}}{k!}$$

La serie ha un numero infinito di potenze negative e quindi il punto  $z = 1$  ( $z' = 0$ ) è una singolarità essenziale. Per  $z \rightarrow \infty$  ( $z' = \infty$ ) la funzione ammette limite (uguale a  $e^{-1}$ ) e quindi il punto all'infinito è regolare; la serie che abbiamo scritto, che è di Laurent attorno al punto  $z = 1$ , può anche essere letta come serie di Taylor nell'intorno dell'infinito.

**esempio 5:** sia

$$f(z) = e^{z-1/z} = e^z e^{-1/z}.$$

I punti  $z = 0$  e  $z = \infty$  sono singolarità essenziali.

### 1.8.2 Calcolo del residuo nel punto all'infinito

Per valutare il residuo di una funzione  $f(z)$  in  $z = \infty$  supponiamo che esista una curva di Jordan  $\gamma$  che contenga al suo interno *tutte* le singolarità *al finito* di  $f(z)$  (per esempio una circonferenza  $c$  di raggio sufficientemente grande – Fig. 23)



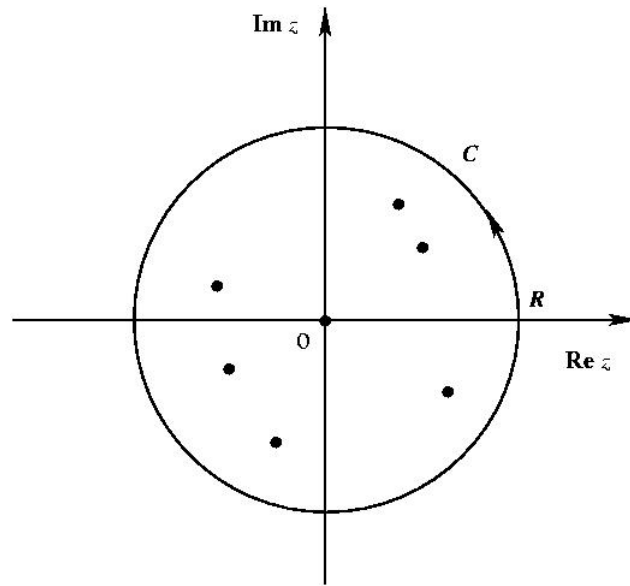


Figura 23.: Curva che contiene tutte le singolarità al finito della funzione  $f(z)$ .

Allora nel punto all'infinito la funzione  $f(z)$  o è regolare, o ha una singolarità isolata. In *entrambi i casi* definiamo il **residuo all'infinito** come:

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (84)$$

dove l'integrale è calcolato percorrendo come al solito la curva  $\gamma$  in senso antiorario; il segno meno ricorda che per avere  $z = \infty$  al suo *interno* la curva  $\gamma$  dovrebbe essere percorsa in senso orario<sup>14</sup>.

Sostituendo nella definizione (84) lo sviluppo in serie di Laurent (o di Taylor) della  $f(z)$  attorno al punto all'infinito, e ricordando l'integrale (34), si ricava che il residuo all'infinito è dato dal coefficiente, *cambiato di segno*, della potenza  $1/(z-a)$ . Per esempio, il residuo all'infinito della funzione regolare all'infinito  $f(z) = 1/z$  vale  $-1$ , mentre quello della funzione  $f(z) = z$  (che ha un polo semplice all'infinito) è nullo.

Una conseguenza immediata di quanto abbiamo detto è che una **funzione pari** ha sempre **residuo nullo all'infinito** (sempre che abbia senso definirlo), poiché il suo sviluppo, di Taylor o di Laurent, in potenze di  $z$  non potrà contenere il termine  $1/z$ ; lo stesso succede per una funzione che all'infinito sia  $O(1/z^2)$ .

Un altro modo per calcolare il residuo all'infinito si basa sul calcolo diretto dell'integrale (84) mediante il cambio di variabile:

$$z = \frac{1}{t}, \quad (85)$$

<sup>14</sup> Ricordiamo che un punto  $z_0$  si definisce *interno* ad una curva  $\gamma$  se, immaginando di percorrere  $\gamma$  nel senso di percorrenza indicato,  $z_0$  viene lasciato a *sinistra*.

che manda  $z \rightarrow \infty$  in  $t \rightarrow 0$ .

Si vede subito che una circonferenza  $c$  di raggio  $R$  centrata nell'origine del piano  $z$ , di equazione  $|z| = R$ , viene trasformata in un'analoga circonferenza  $c'$  di raggio  $1/R$  nel piano  $t$  di equazione  $|t| = 1/R$ . Se  $c$  è percorsa in senso antiorario,  $c'$  sarà percorsa in senso orario; infatti quando la fase  $\phi$  di  $z = Re^{i\phi}$  cresce, quella di  $t = 1/R e^{-i\phi}$  diminuisce. La circonferenza  $c_R$  viene quindi "mappata" dalla trasformazione (85) in una circonferenza  $c'_{1/R}$  percorsa in senso opposto. Di conseguenza:

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z)dz = +\frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dz}{dt} dt.$$

Ora,  $dz/dt = -1/t^2$ , e quindi

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt = -\left\{\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}\right]\right\}_{t=0}.$$

Si noti che il residuo di  $f(z)$  in  $z = \infty$  non è uguale al residuo di  $f(1/t)$  in  $t = 0$ :

$$\{\text{Res}f(z)\}_{z=\infty} \neq \{\text{Res}f(1/t)\}_{t=0}.$$

N.B. Esistono funzioni che, pur essendo regolari in  $z = \infty$ , hanno residuo non nullo all'infinito. Per esempio la funzione  $f(z) = 1/z$  è regolare in  $z = \infty$  (perché la funzione  $f(1/t) = t$  è uguale a 0 in  $t = 0$ ) ma il suo residuo, calcolato tramite la (86), vale

$$\left\{\text{Res}\frac{1}{z}\right\}_{z=\infty} = -\left\{\text{Res}\left(t\frac{1}{t^2}\right)\right\}_{t=0} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \frac{1}{t} dt = -1,$$

come abbiamo già visto. L'interesse principale nel definire il residuo all'infinito sta nel seguente teorema.

**Δ TEOREMA:** se una funzione analitica  $f(z)$  possiede solo singolarità isolate in tutto il piano complesso, punto all'infinito compreso, la somma di tutti i suoi residui, compreso l'eventuale residuo all'infinito, è zero.

**Dimostrazione.** Sia  $\gamma$  una curva di Jordan che non passa per alcuna singolarità di  $f(z)$ . Allora, per il teorema dei residui (56), si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z)dz &= +2\pi i \sum_{\text{interni}} \{\text{Res}f(z)\} \\ \oint_{\gamma} f(z)dz &= -2\pi i \sum_{\text{esterni}} \{\text{Res}f(z)\}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene, sottraendo membro a membro,

$$\sum_{\text{tot}} \{\text{Res}f(z)\} = 0. \quad [q.e.d.] \quad (86)$$

La verifica più immediata di questo teorema è data dalla solita funzione  $f(z) = 1/z$  che ha residuo  $+1$  nell'origine e  $-1$  all'infinito; conviene richiamare questo esempio elementare ogni volta che non ci si ricordi con quale segno si debba prendere il coefficiente della potenza  $1/(z-a)$  per calcolare il residuo all'infinito.

*Esempio 1*

A volte può essere conveniente usare l'eq. (86) per semplificare il calcolo di integrali in campo complesso. Per esempio l'integrale

$$\oint_C \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz \quad \text{con } C = \{z, |z| = 1\} \quad (87)$$

richiederebbe di valutare i residui delle quattro singolarità interne alla curva  $C$ , nei punti  $z_i$  soluzioni di  $z^4 = -1/2$ . Utilizzando invece il teorema (86) si ha semplicemente

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz &= -2\pi i \left\{ \text{Res} \frac{z^3}{2z^4 + 1} \right\}_{z=\infty} = 2\pi i \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{1}{t^2} \frac{\frac{1}{t^3}}{\frac{2}{t^4} + 1} \\ &= i\pi. \end{aligned}$$

Ancor più semplicemente si trova che il residuo all'infinito dell'integrando è  $-1/2$  guardando allo sviluppo:

$$\frac{z^3}{2z^4 + 1} = \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

*Esempio 2*

Il teorema precedente permette a volte di calcolare più facilmente il residuo di una funzione in una singolarità essenziale. Per esempio il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(\pi/z)}{z-2} \quad (88)$$

nella singolarità essenziale  $z = 0$  è

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=0} = -\{\text{Res} f(z)\}_{z=2} = -\lim_{z \rightarrow 2} \sin \frac{\pi}{z} = -1,$$

dove si è tenuto conto che  $f(z) = O(1/z^2)$  per  $z \rightarrow \infty$  e quindi  $\{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty} = 0$ . Invece il calcolo diretto è più complicato:

$$\begin{aligned} \{\text{Res} f(z)\}_{z=0} &= \left\{ \text{Res} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \right\}_{z=0} \\ &= -\sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2^{l+1}} \delta_{l-2k-1,-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1. \end{aligned}$$

$\Delta$  COROLLARIO DEL TEOREMA PRECEDENTE    *Ogni funzione intera  $f(z)$  ha residuo nullo all'infinito.*

**Dimostrazione.** L'infinito può essere punto regolare di  $f(z)$  – e allora  $f(z)$  è costante in conseguenza del Teorema di Liouville (si veda 1.4.4) – o singolarità isolata; in entrambi i casi non ci sono singolarità al finito e il residuo all'infinito è quindi nullo. In alternativa, si può notare che lo sviluppo (83) di  $f(z)$  in serie di Laurent nell'intorno dell'infinito non contiene la potenza  $z^{-1}$ .

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN $\mathbb{C}$

---

### 2.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE II ORDINE

La forma più generale di equazione differenziale ordinaria del II ordine omogenea è

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = 0. \quad (89)$$

Dividendo per  $A(z) \neq 0$  (altrimenti l'equazione sarebbe del I ordine) si ottiene la cosiddetta *forma standard*

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0. \quad (90)$$

L'equazione (90) ha due soluzioni linearmente indipendenti. Note due soluzioni dell'equazione omogenea è sempre possibile risolvere, almeno in linea di principio, l'equazione inhomogenea

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = f(z).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  della (90) siano linearmente indipendenti è che il **wronskiano** differisca da zero, ovvero

$$W(z) = \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si noti che il wronskiano è sempre nullo o sempre diverso da zero, infatti vale la *formula di Liouville*<sup>1</sup>

$$W(z) = W(z_0)e^{-\int_{z_0}^z P(z')dz'}.$$

Due soluzioni che si annullano nello stesso punto  $z_0$  hanno inevitabilmente il wronskiano nullo e sono pertanto la stessa soluzione: soluzioni linearmente indipendenti non hanno zeri in comune.

#### *Punti regolari e singolari di una equazione differenziale*

Consideriamo la forma (90) di un'equazione differenziale del II ordine omogenea. Le proprietà delle soluzioni dipendono dal comportamento delle funzioni  $P(z)$  e  $Q(z)$  nel campo complesso; se esse sono regolari nel punto  $z = z_0$ , il punto  $z_0$  si dice

<sup>1</sup> Per ottenerla sostituire prima  $u_1$  e poi  $u_2$  nella (90), moltiplicare la prima equazione per  $u_2$  e la seconda per  $u_1$  e sottrarre la prima dalla seconda. Il risultato è un'equazione differenziale di primo grado per  $W(z)$  la cui soluzione è la formula di Liouville.

punto *regolare*, o *ordinario*, dell'equazione differenziale e qualunque soluzione è regolare in  $z_0$ . Altrimenti il punto  $z_0$  si dice punto *singolare* dell'equazione differenziale poichè generalmente le soluzioni saranno ivi singolari. I punti singolari sono a loro volta classificati in due categorie: **singularità fuchsiane, o regolari**, e **singularità essenziali, o irregolari**.

Il punto singolare  $z_0$  si definisce **punto singolare fuchsiano**, dal nome del matematico Fuchs, se in  $z \rightarrow z_0$  la funzione  $P(z)$  ha al più un polo semplice e  $Q(z)$  al più un polo doppio; quindi le funzioni  $(z - z_0)P(z)$  e  $(z - z_0)^2Q(z)$  rimangono finite per  $z \rightarrow z_0$ :

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)P(z) &= p_0, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2Q(z) &= q_0,\end{aligned}$$

con  $p_0$  e  $q_0$  finiti; è possibile che uno o anche entrambi siano nulli. Se invece per esempio  $P(z)$  diverge più velocemente di  $1/(z - z_0)$ , in modo tale che  $(z - z_0)P(z)$  tenda a infinito per  $z \rightarrow z_0$ , oppure se  $Q(z)$  diverge più velocemente di  $1/(z - z_0)^2$ , in modo tale che  $(z - z_0)^2Q(z)$  tenda a infinito per  $z \rightarrow z_0$ , il punto  $z_0$  è un **punto singolare irregolare o essenziale**. Queste definizioni valgono per tutti i valori finiti di  $z_0$ . Lo studio del punto  $z \rightarrow \infty$  verrà trattato separatamente in un prossimo paragrafo.

### Esempi

Elenchiamo alcuni esempi di equazioni differenziali ordinarie del II ordine e studiamo le singularità al finito.

1) Equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \tag{91}$$

$$P(z) = 0, \quad Q(z) = \omega^2$$

L'equazione è ovunque regolare al finito.

2) Equazione di Legendre:

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \alpha u = 0 \tag{92}$$

$$P(z) = -\frac{2z}{1 - z^2}, \quad Q(z) = \frac{\alpha}{1 - z^2}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in  $z = \pm 1$ . Infatti sia  $P(z)$  che  $Q(z)$  hanno un polo semplice in  $z = \pm 1$ :

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \pm 1} (z - (\pm 1))P(z) &= 1 = p_0 \\ \lim_{z \rightarrow \pm 1} (z - (\pm 1))^2Q(z) &= 0 = q_0.\end{aligned}$$

3) Equazione di Bessel:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \alpha^2)u = 0 \quad (93)$$

$$P(z) = \frac{1}{z}, \quad Q(z) = 1 - \frac{\alpha^2}{z^2}$$

L'equazione ha una singolarità di tipo fuchsiano in  $z = 0$  con  $p_0 = 1$  e  $q_0 = -\alpha^2$ .

4) Equazione di Laguerre

$$zu'' + (1 - z)u' + au = 0 \quad (94)$$

$$P(z) = \frac{1}{z} - 1, \quad Q(z) = \frac{a}{z}$$

L'equazione ha una singolarità di tipo fuchsiano in  $z = 0$ .

5) Equazione di Hermite:

$$u'' - 2zu' + 2\alpha u = 0 \quad (95)$$

$$P(z) = -2z, \quad Q(z) = 2\alpha$$

L'equazione è regolare al finito.

6) Equazione di Chebyshev:

$$(1 - z^2)u'' - zu' + n^2 u = 0 \quad (96)$$

$$P(z) = -\frac{z}{1 - z^2}, \quad Q(z) = \frac{n^2}{1 - z^2}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in  $z = \pm 1$ .

7) Equazione ipergeometrica:

$$z(z - 1)u'' + [(1 + a + b)z - c]u' + abu = 0 \quad (97)$$

$$P(z) = -\frac{(1 + a + b)z - c}{z(z - 1)}, \quad Q(z) = \frac{ab}{z(z - 1)}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in  $z = 0$  e  $z = 1$ .

8) Equazione ipergeometrica confluyente:

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0 \quad (98)$$

$$P(z) = -\frac{c - z}{z}, \quad Q(z) = -\frac{a}{z}$$

L'equazione ha un punto singolare fuchsiano in  $z = 0$ .

## 2.1.1 Soluzione nell'intorno di un punto regolare

Se  $z_0$  è un punto ordinario di un'equazione differenziale nella forma standard, le soluzioni sono certamente regolari in  $z_0$ . Supponiamo infatti che una soluzione sia regolare e ammetta lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto  $z_0$ ,

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad (99)$$

con  $w \equiv z - z_0$ . Vedremo che è possibile determinare i coefficienti  $c_k$  mediante la sostituzione della serie nell'equazione differenziale e che emergono naturalmente due soluzioni linearmente indipendenti. Poiché  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono analitiche in  $z_0$  valgono gli sviluppi in serie di Taylor

$$P(z) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l w^l \quad (100)$$

$$Q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l w^l. \quad (101)$$

Vogliamo ora sostituire le (100) e (101) e le derivate di  $u(z)$

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{l=1}^{\infty} l c_l w^{l-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} w^n \\ u''(z) &= \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1) c_l w^{l-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} w^n \end{aligned} \quad (102)$$

nell'equazione differenziale (90). I prodotti  $Q(z)u$  e  $P(z)u'$  possono essere scritti come

$$\begin{aligned} Q(z)u(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} q_l w^l \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k q_l w^{l+k} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \\ P(z)u'(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} p_l w^l \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} w^k = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{k=0}^n (k+1) c_{k+1} p_{n-k} \end{aligned}$$

che sostituiti nella (90) assieme alla (102) danno

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2) c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1) c_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right] w^n = 0. \quad (103)$$

Una serie di potenze è nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, e pertanto l'espressione in parentesi quadra deve annullarsi,  $\forall n$ . Si ottengono così delle relazioni di ricorrenza che permettono di determinare i coefficienti  $c_k$  una volta noti  $c_0$  e  $c_1$ . Infatti per  $n = 0$  si ottiene:

$$2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = 0; \quad (104)$$



per  $n = 1$ :

$$6c_3 + c_1p_1 + 2c_2p_0 + c_0q_1 + c_1q_0 = 0 \quad (105)$$

e così via. Le costanti arbitrarie  $c_0$  e  $c_1$ , fissate dalle condizioni iniziali

$$c_0 = u(z_0) \quad (106)$$

$$c_1 = u'(z_0) , \quad (107)$$

determinano univocamente la soluzione  $u(z)$ . Se per esempio chiamiamo  $u_1$  la soluzione corrispondente a  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$  e  $u_2$  quella corrispondente a  $c_0 = 0$  e  $c_1 = 1$ , la soluzione generale dell'equazione differenziale sarà

$$u(z) = c_0u_1(z) + c_1u_2(z) ; \quad (108)$$

infatti  $u_1$  e  $u_2$  sono linearmente indipendenti, essendo il loro *Wronskiano* diverso da zero:

$$W(z_0) = \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}_{z=z_0} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

In generale si può dimostrare che questo metodo fornisce sempre la soluzione generale nell'intorno di un punto regolare  $z_0$  e che, per valori generici di  $c_0$  e  $c_1$  il raggio di convergenza della serie è uguale alla distanza fra  $z_0$  e la singolarità più vicina dell'equazione differenziale (talvolta, ma solo per particolari valori di  $c_0$  e  $c_1$ , può anche essere maggiore).

### Esempi

#### 1. L'equazione dell'oscillatore armonico semplice

$$u''(z) + \omega^2 u(z) = 0 , \quad (109)$$

è, come si è detto, regolare per ogni  $z$  finito, in particolare per  $z = 0$ . Possiamo quindi cercare una soluzione del tipo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k .$$

Sostituendo nella (103)  $z_0 = 0$ ,  $p_i = 0$  e  $q_i = \omega^2 \delta_{i0}$  si ottiene:

$$c_{k+2}(k+1)(k+2) + \omega^2 c_k = 0 \quad \forall k \geq 0 . \quad (110)$$

da cui segue la *relazione di ricorrenza* per i coefficienti  $c_k$ :

$$c_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)} c_k . \quad (111)$$

Dati i coefficienti  $c_0$  e  $c_1$ , che saranno determinati dalle condizioni al contorno, la (111) permette di costruire tutti i coefficienti delle potenze pari

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{\omega^2}{2}c_0 \\ c_4 &= -\frac{\omega^2}{(3)(4)}c_2 = \frac{(\omega^2)^2}{4!}c_0 \\ c_6 &= -\frac{\omega^2}{(5)(6)}c_4 = -\frac{(\omega^2)^3}{6!}c_0 \\ c_{2n} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n)!}c_0 \end{aligned}$$

e delle potenze dispari

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{\omega^2}{(2)(3)}c_1 \\ c_5 &= -\frac{\omega^2}{(4)(5)}c_3 = \frac{(\omega^2)^2}{5!}c_1 \\ c_7 &= -\frac{\omega^2}{(6)(7)}c_5 = -\frac{(\omega^2)^3}{7!}c_1 \\ c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n+1)!}c_1 . \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione cercata è

$$\begin{aligned} u(z) &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= c_0 \cos(\omega z) + c_1' \sin(\omega z) , \end{aligned} \quad (112)$$

che è proprio, come noto, la soluzione dell'equazione (109).

## 2. L'equazione di Legendre

$$(1 - z^2) u''(z) - 2z u'(z) + \alpha u(z) = 0 , \quad (113)$$

compare nella soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche e in molte altre applicazioni. Poichè il punto  $z = 0$  è un punto regolare dell'equazione, cercheremo una soluzione data dalla serie:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k . \quad (114)$$

Per determinare i coefficienti calcoliamo le derivate

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \quad u''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2}$$

e sostituiamole nella (113):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k [k(k-1) + 2k - \alpha] z^k = 0 . \quad (115)$$

La prima sommatoria si può riscrivere come segue (si noti che i termini  $k = 0, 1$  sono nulli):

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} = \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+2)(k'+1)c_{k'+2} z^{k'} ;$$

l'equazione (115) diventa quindi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k [k(k+1) - \alpha] \} z^k = 0 .$$

Uguagliando a zero ogni coefficiente della serie di potenze si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \alpha}{(k+2)(k+1)} c_k ,$$

da cui si ricava per  $\alpha$  generico

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-\alpha}{2} c_0 \\ c_4 &= \frac{6-\alpha}{12} c_2 = \frac{(6-\alpha)(-\alpha)}{4!} c_0 \\ c_6 &= \frac{20-\alpha}{30} c_2 = \frac{(20-\alpha)(6-\alpha)(-\alpha)}{6!} c_0 \quad etc... \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2-\alpha}{6} c_1 \\ c_5 &= \frac{12-\alpha}{20} c_3 = \frac{(12-\alpha)(2-\alpha)}{5!} c_1 \\ c_7 &= \frac{30-\alpha}{42} c_5 = \frac{(30-\alpha)(12-\alpha)(2-\alpha)}{7!} c_1 \quad etc... \end{aligned}$$

Quindi se scegliamo  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$  tutti i coefficienti delle potenze dispari nella (114) sono nulli e la soluzione è pari ( $u(z) = u(-z)$ ), mentre per  $c_0 = 0$  e  $c_1 = 1$  la soluzione è dispari ( $u(z) = -u(-z)$ ). Notiamo anche che, poiché il raggio di convergenza della serie (114) è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k}{c_{k+2}} = 1 , \quad (116)$$

ci aspettiamo almeno una singolarità sulla circonferenza  $|z| = 1$ : l'equazione ha infatti due punti singolari fuchsiani in  $z = \pm 1$ . Le soluzioni trovate valgono  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .

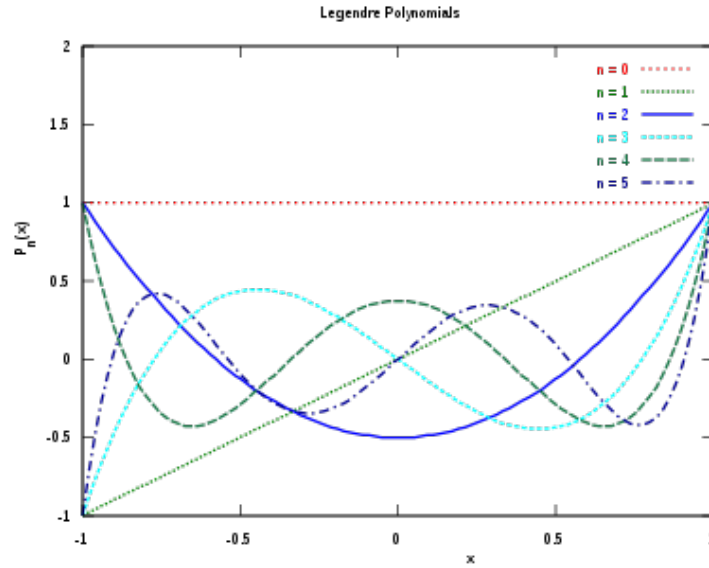


Figura 24.: I primi 6 polinomi di Legendre. Non hanno zeri fuori da  $[-1, 1]$ .

Ora, se e solo se  $\alpha = n(n+1)$ , con  $n$  intero positivo o nullo, il coefficiente  $c_{n+2}$  è nullo e così  $c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$ ; la serie (114) si riduce così a un *polinomio di grado  $n$* :

$$P_n(z) = N_n \sum_{k=0}^n c_k z^k \quad (117)$$

se  $n$  è pari per  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$ , oppure se  $n$  è dispari per  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$ . Per  $c_0$  e  $c_1$  generici la soluzione generale è la combinazione lineare di un polinomio e una serie. La costante  $N_n$  è fissata dalla normalizzazione convenzionale  $P_n(1) = 1$ . I polinomi (117) si chiamano *polinomi di Legendre* e sono regolari in tutto il piano complesso. Si noti che la richiesta che  $u(z)$  sia finita in tutto l'intervallo  $[-1, 1]$  seleziona gli  $\alpha = n(n+1)$ , in accordo con quanto si vedrà in generale nel capitolo 5 a proposito degli autovalori di operatori differenziali.

I polinomi di Legendre soddisfano la *relazione di ortogonalità*

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}$$

e sono pertanto un esempio di *polinomi ortogonali* definiti su  $[-1, 1]$ . I polinomi ortogonali, che ritroveremo nel cap. 5, posseggono molte proprietà interessanti. Per esempio, oltre che dalla formula di ricorrenza (117), è possibile ottenere i polinomi di Legendre anche dalla *formula di Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

## 3. L'equazione di Hermite

$$u'' - 2z u' + 2\alpha u = 0 \quad (118)$$

compare nello studio dell'oscillatore armonico quantistico ed è regolare in  $z = 0$ . Cerchiamo una soluzione

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (119)$$

Questa, sostituita con le sue derivate nella (118), fornisce

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k [k(k-1)z^{k-2} - 2kz^k + 2\alpha z^k] = 0. \quad (120)$$

Il primo termine della serie può essere riscritto, cambiando l'indice di somma da  $k$  in  $k-2$ , come visto in precedenza. Sostituendo nella (120) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k [c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_k(2\alpha - 2k)] = 0, \quad (121)$$

da cui si ricava la relazione di ricorrenza

$$c_{k+2} = c_k \frac{2(k-\alpha)}{(k+2)(k+1)}. \quad (122)$$

L'eq. (122) mostra che la serie (119) ha raggio di convergenza infinito. Scegliendo  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0$  oppure  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$  si ottengono soluzioni pari o dispari, come si è visto per i polinomi di Legendre. Se  $\alpha = n$  è intero positivo o nullo, una delle due serie (quella pari se  $\alpha$  è pari, quella dispari se  $\alpha$  è dispari) si riduce a un polinomio di grado  $n$ , il *polinomio di Hermite*  $H_n$ , altro esempio di polinomi ortogonali che soddisfano la relazione di ortogonalità

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{m,n}. \quad (123)$$

## 2.1.2 Soluzione nell'intorno di un punto singolare fuchsiano

Esistono talvolta soluzioni particolari di un'equazione differenziale che sono regolari in un punto  $z_0$  singolare, come abbiamo già visto nel caso dei polinomi di Legendre che sono regolari in  $z = \pm 1$ . Tuttavia, la soluzione *generale* **non** può essere regolare in  $z_0$  singolare, e viceversa. Supponiamo infatti che ci siano **due** soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  regolari in  $z$  e che esse siano linearmente indipendenti. Siccome  $u_{1,2}$  sono entrambe soluzioni, il sistema

$$\begin{aligned} u_1''(z) + P(z)u_1'(z) + Q(z)u_1(z) &= 0 \\ u_2''(z) + P(z)u_2'(z) + Q(z)u_2(z) &= 0 \end{aligned}$$

permette di ottenere  $P$  e  $Q$  algebricamente, come rapporto di determinanti nelle funzioni regolari  $u_i$ ,  $u'_i$  e  $u''_i$  ( $i = 1, 2$ ). A denominatore c'è il Wronskiano di  $u_1$  e  $u_2$ , ovunque diverso da zero perché  $u_1$  e  $u_2$  sono indipendenti. Ne consegue che  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono regolari dove la soluzione generale è regolare.

Sotto quali condizioni è possibile espandere in serie nell'intorno di un punto singolare? e che tipo di serie risulta? Vale il **Teorema di Fuchs**: se  $z_0$  è un punto singolare fuchsiano, esiste sempre *almeno una* soluzione del tipo:

$$u_1(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{con } c_0 \neq 0. \quad (124)$$

La seconda soluzione o è ancora della forma (124) oppure contiene anche un termine aggiuntivo  $du_1 \ln(z - z_0)$ , come vedremo nell'eq. (130). Le serie che compaiono nella soluzione hanno raggio di convergenza almeno uguale alla distanza fra  $z_0$  e la più vicina singolarità dell'equazione differenziale.

Come si determina l'esponente  $\rho$ ? Supponiamo che  $z_0$  sia un punto singolare fuchsiano. In questo caso le funzioni  $P(z)$  e  $Q(z)$  possono essere scritte come

$$P(z) = \frac{p(z)}{z - z_0} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^l}{z - z_0} \quad (125)$$

$$Q(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^l}{(z - z_0)^2}, \quad (126)$$

dove le funzioni  $p(z)$  e  $q(z)$  sono regolari in  $z = z_0$ , e sono state quindi sviluppate in serie di Taylor intorno a  $z_0$ . Sostituendo ora le (124), (125) e (126) nell'equazione (90) e moltiplicando per  $(z - z_0)^2$  si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1)(z - z_0)^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k) \sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^{\rho+k+l} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^{\rho+k+l} = 0. \end{aligned}$$

Uguagliamo ora a zero il coefficiente della potenza  $(z - z_0)^\rho$ ; poniamo cioè  $k = l = 0$  nell'equazione precedente. Otteniamo così:

$$c_0 [\rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0] = 0,$$

ovvero, per  $c_0 \neq 0$ ,

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0. \quad (127)$$

L'equazione (127), detta **equazione indiciale** o *caratteristica* dell'equazione differenziale (90), è un'equazione di secondo grado in  $\rho$  e ha quindi due soluzioni,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Per risolvere l'equazione differenziale occorre quindi risolvere l'equazione indiciale (127), dove

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)P(z), \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 Q(z),$$

e ricavare gli indici  $\rho_1, \rho_2$ . Scelti gli indici in modo che  $\text{Re} \rho_1 \geq \text{Re} \rho_2$  il teorema di Fuchs ci assicura che esiste sempre la soluzione particolare

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (128)$$

i cui coefficienti si possono determinare in modo univoco in funzione di  $c_0$  sostituendo la serie nell'equazione differenziale e ricavando delle relazioni di ricorrenza. Per risolvere completamente l'equazione differenziale occorre però ricavare una seconda soluzione, linearmente indipendente dalla prima. Distinguiamo due casi

- 1) Se le due radici differiscono per un numero non intero, la seconda soluzione è simile alla prima:

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad d_0 \neq 0 \quad (129)$$

- 2) Se le due radici  $\rho_1$  e  $\rho_2$  differiscono per un numero intero  $n \geq 0$  la seconda soluzione è

$$u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k + d u_1(z) \ln(z - z_0), \quad (130)$$

dove  $d$  e i  $d_k$  (per  $k \neq \rho_1 - \rho_2$ ) si determinano per sostituzione in funzione di  $d_0$ ; può anche succedere che si ottenga  $d = 0$  ma solo se  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

**ESEMPIO** L'equazione differenziale

$$u''(z) - \frac{6}{z^2} u(z) = 0 \quad (131)$$

ha una singolarità fuchsiana in  $z = 0$ . Poichè  $p_0 = 0$  e  $q_0 = -6$ , l'equazione indiciale

$$\rho^2 - \rho - 6 = 0$$

ha soluzioni  $\rho_1 = +3, \rho_2 = -2$ . Sostituendo  $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$  nella (131) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k + \rho)(k + \rho - 1) - 6] c_k z^{k+\rho-2} = 0$$

ovvero

$$[(k + \rho)(k + \rho - 1) - 6] c_k = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Per  $k = 0$  la parentesi quadra riproduce la equazione indiciale e si annulla nonostante  $c_0 \neq 0$ , mentre per  $k > 0$  si ottiene  $c_k = 0$  se  $\rho = 3$  e  $c_k = c_5 \delta_{k5}$  se  $\rho = -2$ . La soluzione generale della (131) è quindi

$$u(z) = \alpha z^3 + \beta \frac{1}{z^2}.$$

Vale la pena osservare che il metodo utilizzato non funziona nel caso di singolarità non fuchsiana, come per l'equazione differenziale

$$u''(z) - \frac{6u(z)}{z^3} = 0$$

che ha una singolarità non fuchsiana in  $z = 0$ . Infatti procedendo come sopra si trova che la potenza più bassa di  $z$  è  $z^{\rho-3}$ , il cui coefficiente si annulla solo se  $c_0 = 0$ . Questo non significa che non esista una soluzione di questa equazione differenziale, solo che non può essere trovata nella forma prevista dal teorema di Fuchs.

**ESEMPIO** Questo ulteriore facile esempio è uno dei casi in cui occorre assolutamente considerare il termine logaritmico nella seconda soluzione:

$$u''(z) + \frac{5}{z}u'(z) + \frac{4}{z^2}u(z) = 0.$$

Come si può notare,  $z = 0$  è una singolarità fuchsiana e l'equazione indiciale  $\rho^2 + 4\rho + 4 = 0$  ha una sola soluzione:  $\rho = -2$ . Come nel caso (131) non si ha relazione di ricorrenza e  $c_k = 0, \forall k > 0$ . Dal momento che l'equazione indiciale ha una soluzione doppia, l'unico modo perché la seconda soluzione sia linearmente indipendente dalla prima consiste nell'introdurre il termine logaritmico previsto dal teorema di Fuchs. La soluzione generale è quindi

$$u(z) = \alpha \frac{1}{z^2} + \beta \frac{1}{z^2} \ln z$$

come è facile verificare direttamente sostituendo  $u(z)$  nell'equazione di partenza.

### 2.1.3 Esempio: l'equazione di Bessel

L'equazione di Bessel

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0 \quad (132)$$

si incontra nella soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche e in molte altre applicazioni. Ha un punto singolare fuchsiano in  $z = 0$ . L'equazione indiciale è

$$\rho^2 - \alpha^2 = 0,$$



con soluzioni  $\rho_{1,2} = \pm\alpha$ . Se  $2\alpha \notin \mathbb{Z}$  allora  $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$  ed entrambe le soluzioni sono sicuramente della forma

$$u_\rho(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (133)$$

Se invece  $2\alpha \in \mathbb{Z}$  solo la soluzione corrispondente a  $\rho > 0$  avrà sicuramente la forma (133). Sostituendo la (133) nella (132) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} - \rho^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

da cui

$$c_1(1+2\rho)z^{1+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k+2\rho)z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} = 0. \quad (134)$$

Se nella prima sommatoria effettuiamo il cambiamento di indice  $k \rightarrow k-2$  otteniamo:

$$c_1(1+2\rho)z^{1+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+2+2\rho) + c_k]z^{k+\rho+2} = 0, \quad (135)$$

da cui per  $\rho \neq -1/2$

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_{k+2} &= -\frac{c_k}{(k+2)(k+2+2\rho)}. \end{aligned} \quad (136)$$

La serie ha quindi solo potenze pari. Notare che se  $2\alpha$  fosse un intero  $n$ , diciamo positivo, la (136) non avrebbe senso per  $\rho_2 = -\alpha = -n/2$  e per  $k = n-2$ , impedendo così di trovare la seconda soluzione nella forma (133) se  $n$  è pari. Dalla relazione di ricorrenza (136) ricaviamo infine che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli, mentre i coefficienti pari sono:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2(2+2\rho)} = -\frac{\Gamma(1+\rho)}{2^2 1! \Gamma(2+\rho)} c_0 \\ c_4 &= -\frac{c_2}{4(4+2\rho)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2+2\rho)(4+2\rho)} = \frac{(-1)^2 \Gamma(1+\rho)}{2^4 2! \Gamma(3+\rho)} c_0 \\ c_6 &= -\frac{c_4}{6(6+2\rho)} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2+2\rho)(4+2\rho)(6+2\rho)} = \frac{(-1)^3 \Gamma(1+\rho)}{2^6 3! \Gamma(4+\rho)} c_0 \quad \text{ecc.,} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la funzione Gamma,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (137)$$

che generalizza il fattoriale a  $p$  non interi ( $p \neq -n, n \in \mathbb{N}$ ), poichè soddisfa  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  e quindi  $\Gamma(n+1) = n!$ . Ponendo  $c_0 = 1/[2^\rho \Gamma(1+\rho)]$ , la soluzione  $u(z)$  trovata definisce la **funzione di Bessel** di ordine  $\rho$ ,  $J_\rho(z)$ :

$$J_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\rho)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\rho} \quad (138)$$

per  $\rho \neq -n/2, n \in \mathbb{N}$ .

Nel caso  $\alpha^2 = 1/4$  le due soluzioni dell'equazione di Bessel sono

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= N_{1/2} \sqrt{z} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right) \\ &= \frac{N_{1/2}}{\sqrt{z}} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) = N_{1/2} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} \end{aligned} \quad (139)$$

e

$$J_{-1/2}(z) = N_{-1/2} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}. \quad (140)$$

Notare che  $\rho_1 - \rho_2 = 1$  ma non c'è il termine con il logaritmo ( $d = 0$ ). Si può dimostrare che per tutti gli  $\alpha$  semi-interi le  $J_\alpha$  sono esprimibili tramite funzioni trigonometriche. Per esempio:

$$J_{3/2}(z) = \frac{N_{3/2}}{\sqrt{z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) \quad (141)$$

$$J_{-3/2}(z) = \frac{N_{-3/2}}{\sqrt{z}} \left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z\right). \quad (142)$$

### 2.1.4 Studio del comportamento all'infinito

Il comportamento delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0 \quad (143)$$

nell'intorno del punto  $z \rightarrow \infty$  si studia effettuando il cambiamento di variabile  $t = \frac{1}{z}$  e studiando il comportamento di  $u(\frac{1}{t})$  per  $t \rightarrow 0$ . Che forma assume l'equazione (143) in termini di  $t$ ?

$$\begin{aligned} u'(z) &= \frac{du(1/t)}{dt} \frac{dt}{dz} = -t^2 \frac{du(1/t)}{dt} \\ u''(z) &= \frac{du'(1/t)}{dt} \frac{dt}{dz} = 2t^3 \frac{du(1/t)}{dt} + t^4 \frac{d^2u(1/t)}{dt^2} . \end{aligned}$$

Sostituendo nella (143) si ottiene

$$t^4 \frac{d^2u}{dt^2} + (2t^3 - t^2 P) \frac{du}{dt} + Qu = 0$$

ovvero, in forma standard,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{2}{t} - \frac{P}{t^2} \right) \frac{du}{dt} + \frac{Q}{t^4} u = 0 . \quad (144)$$

Il punto  $t = 0$  ( $z \rightarrow \infty$ ) è un punto *ordinario* se le funzioni

$$\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \quad (145)$$

$$\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{Q(1/t)}{t^4} \quad (146)$$

sono regolari in  $t = 0$ , ovvero

$$P(z) = \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) , \quad Q(z) = O\left(\frac{1}{z^4}\right) \quad \text{per } z \rightarrow \infty . \quad (147)$$

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto  $z = \infty$  sia *fuchsiano* sono che le funzioni

$$\tilde{p}(t) = t\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (148)$$

$$\tilde{q}(t) = t^2\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (149)$$

siano regolari in  $t = 0$ , ovvero

$$P(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) , \quad Q(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{per } z \rightarrow \infty . \quad (150)$$

Se l'infinito è un punto ordinario, si può cercare una soluzione come sviluppo in serie di Taylor intorno a  $z = \infty$ :

$$u(z) = u(1/t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

e determinare i coefficienti  $c_k$  tramite le relazioni di ricorrenza che si ricavano dalla sostituzione della serie nell'equazione differenziale. Se invece l'infinito è un punto singolare fuchsiano, si cercheranno due soluzioni particolari linearmente indipendenti, del tipo:

$$u_1(z) = u_1(1/t) = t^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = z^{-\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} , \quad c_0 \neq 0$$

e

$$u_2(1/t) = \begin{cases} t^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k & \rho_1 - \rho_2 \neq n, d_0 \neq 0 \\ au_1(1/t) \ln t + t^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k & \rho_1 - \rho_2 = n, b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (151)$$

ovvero

$$u_2(z) = \begin{cases} z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k} & \rho_1 - \rho_2 \neq n, d_0 \neq 0 \\ -au_1(z) \ln z + z^{-\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k} & \rho_1 - \rho_2 = n, b_0 \neq 0. \end{cases} \quad (152)$$

Gli esponenti  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono le soluzioni dell'equazione indiciale relativa all'equazione differenziale (144), cioè

$$\rho^2 + (\tilde{p}_0 - 1)\rho + \tilde{q}_0 = 0,$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} t \left( \frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \right) = 2 - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(1/t)}{t} \\ \tilde{q}_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \frac{Q(1/t)}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(1/t)}{t^2}. \end{aligned}$$

In termini della variabile  $z$ :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= 2 - \lim_{z \rightarrow \infty} zP(z) \\ \tilde{q}_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 Q(z). \end{aligned}$$

Detti ora

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} zP(z) \\ \bar{q}_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 Q(z). \end{aligned}$$

l'equazione indiciale diventa

$$\rho^2 + (1 - \bar{p}_0)\rho + \bar{q}_0 = 0.$$

Si noti il cambiamento di segno nel termine lineare rispetto all'equazione indiciale per singolarità al finito. I coefficienti  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $b_k$  e  $a$  nelle equazioni (151) si ottengono sostituendo le soluzioni nell'equazione differenziale e usando gli sviluppi

$$P(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{z^n} \quad (153)$$

$$Q(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{z^n}. \quad (154)$$

Le serie (151) convergono certamente **all'esterno** di un cerchio centrato nell'origine e che comprende al suo interno tutte le singolarità dell'equazione differenziale.

### 2.1.5 Esempi

Consideriamo le equazioni (91-98) e studiamone il comportamento per  $z \rightarrow \infty$ .

- 1) Equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$u'' + \omega^2 u = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{\omega^2}{t^4}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità irregolare.

- 2) Equazione di Legendre:

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \alpha u = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} - \frac{2/t}{t^2 - 1}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{\alpha}{t^4 - t^2}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità fuchsiana.

- 3) Equazione di Bessel:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \alpha^2)u = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{1 - \alpha^2 t^2}{t^4}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità irregolare.

- 4) Equazione di Laguerre

$$zu'' + (1 - z)u' + au = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} - \frac{t-1}{t^2}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{a}{t^3}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità irregolare.

- 5) Equazione di Hermite:

$$u'' - 2zu' + 2\alpha u = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} + \frac{2}{t^3}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{2\alpha}{t^4}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità irregolare.

- 6) Equazione di Chebyshev:

$$(1 - z^2)u'' - zu' + n^2 u = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{t(t^2 - 1)}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{n^2}{t^2(t^2 - 1)}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità fuchsiana.

7) Equazione ipergeometrica confluyente:

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} - \frac{ct - 1}{t^2}, \quad \tilde{Q}(1/t) = -\frac{a}{t^3}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità irregolare.

8) Equazione ipergeometrica:

$$z(z - 1)u'' + [(1 + a + b)z - c]u' + abu = 0$$

$$\tilde{P}(1/t) = \frac{2}{t} - \frac{1 + a + b - ct}{t(1 - t)}, \quad \tilde{Q}(1/t) = \frac{ab}{t^2(1 - t)}$$

All'infinito l'equazione ha una singolarità fuchsiana.

L'equazione ipergeometrica è un esempio di equazione totalmente fuchsiana con tre punti singolari in  $0, 1, \infty$  i cui indici valgono rispettivamente  $(0, 1 - c)$ ,  $(0, c - a - b)$ ,  $(a, b)$ ; questa informazione si racchiude nel simbolo  $P$  di Riemann

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

Per  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  l'equazione ipergeometrica ammette una soluzione regolare nell'origine detta *funzione ipergeometrica*:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l (b)_l}{l! (c)_l} z^l \quad (155)$$

dove  $(a)_l \equiv \Gamma(a + l)/\Gamma(a)$ , ovvero  $a(a + 1) \cdots (a + l - 1) \forall l \geq 1$ ,  $(a)_0 = 1$ . L'equazione ipergeometrica è particolarmente importante perché ogni equazione totalmente fuchsiana con 3 punti singolari può essere ad essa ricondotta con un cambiamento di variabile indipendente del tipo  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  e a meno di potenze a fattore della soluzione.

## Parte II

### INTRODUZIONE ALL'ANALISI ARMONICA





## SERIE DI FOURIER

## 3.1 INTRODUZIONE

Per presentare l'argomento della seconda parte di questo corso iniziamo con un problema fisico semplice ma significativo. Consideriamo il circuito oscillante in figura 3.1. Ricordando che le tensioni ai capi di un condensatore di capacità  $C$ , di una resistenza  $R$  e di una bobina di induttanza  $L$  sono date rispettivamente da  $q(t)/C$ ,  $Ri(t)$  e  $Ldi/dt$ , dove  $q(t)$  è la carica su una faccia del condensatore e  $i(t) = dq/dt$  la corrente, si ricava facilmente che la tensione in uscita  $u(t)$  è legata a quella in entrata  $f(t)$  dall'equazione:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u(t) = f(t) , \quad (156)$$

che può essere utile scrivere nella forma

$$\mathcal{L}_t u(t) = f(t) ,$$

dove  $\mathcal{L}_t$  è l'operatore differenziale lineare

$$\mathcal{L}_t = LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 . \quad (157)$$

Se la tensione d'ingresso è sinusoidale

$$f(t) = V \cos(\omega t) \quad (158)$$

con  $\omega = 2\pi/T$ , è facile trovare una soluzione dell'equazione (156) della forma

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) . \quad (159)$$

La soluzione generale dell'eq. (156) si ottiene aggiungendo alla soluzione particolare (159) la soluzione generale dell'equazione omogenea associata all'eq. (156); noi tuttavia non ci occupiamo del transitorio, che tende esponenzialmente a zero per  $t \rightarrow \infty$  e che è quindi trascurabile per tempi  $t$  molto più grandi della costante di tempo  $L/R$ ; infatti siamo interessati solo alle soluzioni periodiche dell'eq. (156). Possiamo dire che intendiamo risolvere l'equazione:

$$\mathcal{L} u = f ,$$

dove l'**operatore**  $\mathcal{L}$  è definito non solo dalla sua espressione differenziale  $\mathcal{L}_t$  di eq.(157), ma anche dal suo **dominio**, specificato dalle **condizioni al contorno** periodiche:

$$u(t + T) = u(t) ,$$

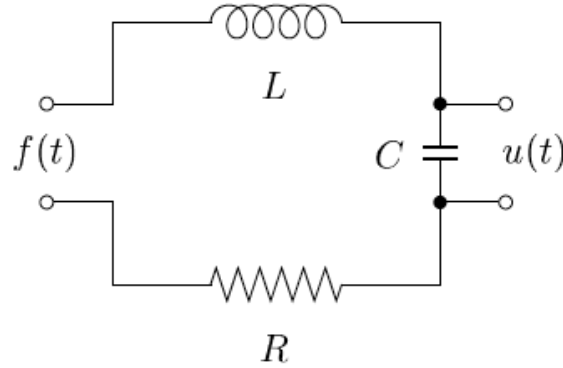


Figura 25.: Circuito oscillante RLC.

dove  $T$  è il periodo della funzione termine noto  $f(t)$ .

L'eq. (156) è **lineare**: se  $u_1(t)$  è soluzione con termine noto  $f_1(t)$ :

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} + u_1(t) = f_1(t) \quad (160)$$

e analogamente  $u_2(t)$  soddisfa:

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2(t) = f_2(t) \quad (161)$$

allora

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

sarà soluzione dell'eq. (156) con

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) ,$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono costanti complesse qualsiasi. Per dimostrare questa proprietà basta moltiplicare per  $\alpha_1$  l'eq. (160) e per  $\alpha_2$  l'eq. (161) e poi sommarle. La linearità dell'eq. (156) può anche esprimersi dicendo che l'operatore differenziale  $\mathcal{L}_t$  (157) è **lineare**, cioè che vale:

$$\mathcal{L}_t[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}_t u_1(t) + \alpha_2 \mathcal{L}_t u_2(t) .$$

La linearità appena esposta suggerisce di scegliere come termine noto  $e^{i\omega t}$ , dal momento che  $\cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ . Allora la soluzione dell'equazione

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u(t) = e^{i\omega t} \quad (162)$$

è ancora più immediata; infatti l'esponenziale complessa è *autofunzione* dell'operatore differenziale  $\mathcal{L}_t$ , dal momento che le derivate di  $e^{i\omega t}$  sono proporzionali ad essa. Vale cioè l'equazione

$$\mathcal{L}_t e^{i\omega t} = \lambda(\omega) e^{i\omega t}, \quad (163)$$

dove l'**autovalore**  $\lambda$  vale

$$\lambda(\omega) = -LC\omega^2 + iRC\omega + 1.$$

Ulteriori specificazioni dell'operatore differenziale (le condizioni al contorno) fanno sì che non tutti i valori di  $\omega$  siano ammissibili. Se si pone

$$u(t) = U(\omega) e^{i\omega t} \equiv u_\omega(t), \quad (164)$$

sostituendo (164) nell'eq. (162) si ottiene:

$$\left[ LC(i\omega)^2 + RCi\omega + 1 \right] U(\omega) e^{i\omega t} = e^{i\omega t},$$

da cui

$$U(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC} \quad (165)$$

Osserviamo che  $U^*(\omega) = U(-\omega)$ . Usando poi l'identità di Eulero per il coseno si può scrivere la  $f(t)$  di (158) come

$$f(t) = \frac{V}{2} \left[ e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right] = V \operatorname{Re} e^{i\omega t} \quad \text{per } V \text{ reale}. \quad (166)$$

e per linearità possiamo determinare la soluzione dell'eq. (156) nella forma

$$u(t) = \frac{V}{2} [u_\omega(t) + u_{-\omega}(t)] = V \operatorname{Re} u_\omega(t) \quad (167)$$

con  $u_\omega(t)$  dato dall'eq. (164). Questa soluzione è reale, come atteso.

Naturalmente,  $e^{\pm i\omega t}$  non è l'unica funzione periodica con periodo  $T$  che ci può venire in mente. Sia

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (168)$$

Anche le  $e^{i\omega_n t}$  sono periodiche con periodo  $T$ .<sup>1</sup> Se in qualche modo si riesce a scrivere il termine noto dell'eq. (156) nella forma

$$f(t) = \sum_n V_n e^{i\omega_n t}, \quad (169)$$

<sup>1</sup> Dall'identità  $e^{2\pi i n} \equiv \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ , segue infatti

$$e^{i\omega_n(t+T)} \equiv e^{i \frac{2\pi}{T} n(t+T)} = e^{i \frac{2\pi}{T} nt} e^{i 2\pi n} = e^{i\omega_n t}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

sarà allora possibile risolvere l'eq. (156) e la soluzione periodica sarà ancora della stessa forma:

$$u(t) = \sum_n V_n U(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (170)$$

con  $U(\omega)$  dato dalla (165).

Lo scopo della seconda parte di questo corso sarà proprio di trovare il modo per esprimere ampie classi di funzioni  $f(t)$  nella forma (169); in linguaggio matematico si parla di **analisi armonica**. L'analisi armonica è uno strumento matematico di enorme importanza in fisica: infatti le equazioni differenziali lineari del secondo ordine intervengono in numerosissimi problemi in ogni campo della fisica, per esempio ogni volta che si vogliono descrivere piccole oscillazioni attorno a una situazione di equilibrio. Inoltre l'analisi armonica, e in particolare la trasformata di Fourier, gioca un ruolo fondamentale nella Meccanica Quantistica.

### 3.2 FUNZIONI PERIODICHE E SERIE DI FOURIER

Consideriamo le funzioni periodiche di periodo  $T$ , tali cioè che

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La scelta di **condizioni al contorno periodiche** seleziona fra le possibili soluzioni dell'equazione agli autovalori (163) solo quelle con  $\omega_n$  dato dalla (168). Senza occuparci per il momento di discutere la convergenza della serie

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n e^{i\omega_n t} \quad (171)$$

detta **serie trigonometrica di Fourier**, vediamo subito come si possono calcolare i coefficienti  $V_n$  nota la  $f(t)$ ; basta moltiplicare ambo i membri per  $e^{-i\omega_l t}$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) e integrare su un periodo (supponendo di poter integrare termine a termine) per ottenere:

$$\int_0^T e^{-i\omega_l t} f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n \int_0^T e^{-i\omega_l t} e^{i\omega_n t} dt.$$

Con il cambio di variabile  $x = \frac{2\pi t}{T}$ , suggerito dalla (168), e usando l'identità

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-l)x} dx = 2\pi \delta_{nl}, \quad (172)$$

che può essere interpretata come **relazione di ortogonalità**<sup>2</sup> tra le funzioni  $e^{inx}$  e  $e^{ilx}$ , per  $n \neq l$ , si ottiene subito:

$$V_l = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega_l t} f(t) dt. \quad (173)$$

<sup>2</sup> Come vedremo, il prodotto scalare tra due funzioni  $f$  e  $g$  definite su un intervallo  $(a, b)$  è l'integrale  $\int_a^b f^*(x)g(x)dx$ . Due funzioni il cui prodotto scalare è nullo sono *ortogonali*; in questo senso possiamo pensare alle funzioni  $\{e^{inx}\}$  come a una base di funzioni nello spazio delle funzioni definite tra 0 e  $2\pi$ .

L'eq. (173) è di grande importanza perché ci fornisce i coefficienti della serie di Fourier (171) e quindi, grazie alla (170), il modo per risolvere l'equazione differenziale (156) con termine noto  $f(t)$  periodico. I passi sono i seguenti:

- con la (173) si calcolano i coefficienti  $V_l$  della serie di Fourier (171) di  $f(t)$ ;
- per ognuna delle armoniche, cioè per ognuno dei termini di tale serie, si applica la soluzione (164), con  $U(\omega)$  dato dalla (165);
- la soluzione dell'equazione differenziale sarà data perciò dalla serie di Fourier (170).

Passiamo ora alla variabile  $x = 2\pi t/T$ , in cui il periodo è  $2\pi$ . Notiamo subito che per  $f(x)$  periodica,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , l'integrale può essere esteso a qualsiasi altro intervallo di ampiezza  $2\pi$ .<sup>3</sup> La serie di Fourier diventa

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} \quad (176)$$

con i coefficienti  $a_n$  dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (177)$$

### 3.2.1 Un primo esempio

Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione a gradino:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ +1 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Calcoliamo  $a_n$  usando la (177):

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx \right] = \frac{1}{-i2n\pi} \left[ e^{-in\pi} - 1 - 1 + e^{-in\pi} \right]$$

<sup>3</sup> Vale infatti l'identità,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} g(x) dx &= \left( \int_{-\pi}^\pi + \int_{x_0}^{-\pi} + \int_\pi^{x_0+2\pi} \right) g(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^\pi g(x) dx + \int_{x_0}^{-\pi} g(x) dx + \int_{-\pi}^{x_0} g(y+2\pi) dy \end{aligned} \quad (174)$$

(nell'ultimo integrale si è effettuato il cambio di variabile  $x = y + 2\pi$ ). Se l'integrando  $g(x)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , allora i due ultimi addendi della (174) si cancellano e vale

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^\pi g(x) dx, \quad \forall x_0. \quad (175)$$

Le due scelte più consuete sono  $x_0 = -\pi$  oppure  $x_0 = 0$ .

cioè  $a_n = 0$  per  $n$  pari, come atteso dal momento che  $\epsilon(x)$  è una funzione dispari, mentre per  $n$  dispari si ha  $a_n = \frac{4}{2in\pi}$ , da cui

$$\epsilon(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n(\text{dispari})=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2in} = \frac{4}{\pi} \sum_{n(\text{dispari})=1}^{\infty} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2in} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Vale la pena notare che non è chiaro se questa serie converge per ogni  $x$ . Sicuramente converge per  $x = 0$  (dove la  $\epsilon(x)$  ha una discontinuità) e per  $x = \pi/2$ , dove ha segni alterni. La risposta è fornita dal teorema discusso in Sezione 3.2.3.

### 3.2.2 Serie di Fourier e funzioni trigonometriche.

Molto spesso anziché usare il sistema trigonometrico in forma esponenziale  $\{e^{ilx}, l \in \mathbb{Z}\}$  è utile usare il **sistema trigonometrico tout court**:

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\} = \{\sin(nx), \cos(nx)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (178)$$

È immediato verificare direttamente che, come già le  $\{e^{inx}\}$ , le (178) formano un sistema di funzioni ortogonali nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  o in qualunque altro intervallo di ampiezza  $2\pi$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \pi \delta_{mn} \quad (m \neq 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \pi \delta_{mn} \quad (m \neq 0) \\ &= 2\pi \delta_{mn} \quad (m = 0) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0. \end{aligned} \quad (179)$$

Data una  $f(x)$  sommabile<sup>4</sup> nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , anziché la serie (176), proviamo a scrivere

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)] . \quad (180)$$

I coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  si ottengono moltiplicando la (180) rispettivamente per  $\cos(mx)$  e  $\sin(mx)$ , integrando su  $x$  fra  $-\pi$  e  $\pi$  e sfruttando le relazioni di ortogonalità (179), nell'ipotesi che la serie converga a  $f(x)$  e si possa integrare termine a termine. Si ricava così

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx \quad n = 0, 1, \dots \quad (181)$$

<sup>4</sup> Definiremo più avanti che cosa significa esattamente funzione sommabile; per ora lo si consideri sinonimo di funzione **assolutamente integrabile**.

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (182)$$

Il coefficiente  $A_0$  è quindi dato da due volte il valor medio della (180) tra  $-\pi$  e  $\pi$ ; evidentemente  $A_0 = 2a_0$ . La serie (180) e le espressioni per i coefficienti (181,182) possono anche essere derivati direttamente dalle (176,177) usando le relazioni di Eulero. È sufficiente scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx} &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{ikx} + a_{-k} e^{-ikx}] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(a_k + a_{-k}) \cos kx + i(a_k - a_{-k}) \sin kx] \end{aligned}$$

da cui seguono le relazioni

$$A_k = a_k + a_{-k}, \quad B_k = i(a_k - a_{-k}).$$

Scriviamo adesso esplicitamente la generalizzazione delle eq.(180,181, 182) al caso di funzioni periodiche con periodo  $T \neq 2\pi$ . In questo caso si pone

$$t = \frac{T}{2\pi} x.$$

Se  $x$  varia nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , la variabile  $t$  varierà nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$ . La serie di Fourier (180) diventa così:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \left( \frac{2\pi n t}{T} \right) + B_n \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} \right) \right],$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(t(x)) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \left( \frac{2\pi n t}{T} \right) f(t) dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(t(x)) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \left( \frac{2\pi n t}{T} \right) f(t) dt. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Convergenza puntuale delle serie trigonometriche di Fourier

Vogliamo ora discutere le proprietà di convergenza della serie (176). Notiamo che affinché la (177) abbia senso bisogna che l'integrale esista; ciò succede certamente se  $f(x)$  è **sommabile**, perché tale rimane dopo essere stata moltiplicata per il fattore  $e^{inx}$ , il cui modulo vale 1. Prima di considerare la convergenza, consideriamo il seguente

**LEMMA DI RIEMANN** Qualunque sia l'intervallo  $(a, b)$ , finito o infinito, per ogni  $f(x)$  sommabile, vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{\pm i k x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = 0. \quad (183)$$

**Dimostrazione** Nel caso particolare in cui  $f(x)$  è di classe  $C^1$ , cioè continua con la sua derivata prima, è lecito integrare per parti e si ha

$$\int_a^b f(x) e^{\pm i k x} dx = \frac{1}{\pm i k} f(x) e^{\pm i k x} \Big|_a^b \mp \frac{1}{i k} \int_a^b f'(x) e^{\pm i k x} dx,$$

da cui

$$\left| \int_a^b f(x) e^{\pm i k x} dx \right| \leq \frac{1}{|k|} \left\{ |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right\}.$$

La parentesi graffa non contiene più termini dipendenti da  $k$ , quindi il secondo membro tende a zero per  $k \rightarrow \infty$ , e di conseguenza anche il primo. Usando le formule di Eulero si completa la dimostrazione, nel caso particolare di funzioni di classe  $C^1$ ; nel caso generale la dimostrazione prosegue usando il fatto che per ogni funzione sommabile  $f(x)$  e ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una  $g \in C^1$  tale che  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$ .

[q.e.d.]

**TEOREMA DI DIRICHLET** Condizione sufficiente affinché la serie (176) converga puntualmente a  $f(x_0)$  è che la funzione  $f(x)$ , sommabile nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ , sia di classe  $C^1$  nell'intorno del punto  $x_0$ . Se  $x_0$  è una discontinuità di I specie, la serie converge a  $\frac{1}{2}[f(x_{0+}) + f(x_{0-})]$ .

**Dimostrazione** Definiamo la ridotta N-esima della serie (176) come

$$S_N(x_0) = \sum_{l=-N}^N a_l e^{i l x_0}.$$

Sostituendo in (184) la definizione (177) dei coefficienti  $a_l$  si ottiene

$$S_N(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy f(y) \sum_{l=-N}^N e^{i l (x_0 - y)}. \quad (184)$$

Usando l'identità

$$\begin{aligned} \sum_{l=-N}^N e^{i l \alpha} &= e^{-i N \alpha} \sum_{n=0}^{2N} (e^{i \alpha})^n = e^{-i N \alpha} \frac{1 - e^{i(2N+1)\alpha}}{1 - e^{i \alpha}} = e^{-i \alpha (N+1/2)} \frac{1 - e^{i 2(N+1/2)\alpha}}{e^{-i \alpha/2} - e^{i \alpha/2}} \\ &= \frac{\sin(N+1/2)\alpha}{\sin \alpha/2} \end{aligned}$$

la (184) diventa

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \frac{\sin[(N+1/2)(x_0 - y)]}{\sin(x_0 - y)/2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin[(N+1/2)t]}{\sin t/2} dt, \end{aligned} \quad (185)$$



dove nell'ultimo passaggio si è posto  $t = y - x_0$  e si è usata la periodicità dell'integrando per fissare l'intervallo di integrazione<sup>5</sup>.

Si noti che l'integrale si può spezzare come segue:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta_1} + \int_{-\delta_1}^{\delta_2} + \int_{\delta_2}^{\pi} ;$$

$\forall \delta_1, \delta_2 \in (-\pi, \pi)$  si possono applicare le formule di Riemann al primo e terzo integrale, quindi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin[(N + 1/2)t]}{\sin t/2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} f(x_0 + t) \frac{\sin[(N + 1/2)t]}{\sin t/2} dt ; \quad (186)$$

perciò la somma della serie nel punto  $x_0$  dipende solo dal **comportamento locale** della funzione  $f(x)$  sommabile in  $(0, 2\pi)$  in un intorno (arbitrariamente piccolo) del punto  $x_0$ .

Consideriamo ora l'identità

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(N + 1/2)t]}{\sin t/2} dt = 1 , \quad (187)$$

che discende dalla (185) nel caso in cui  $f(x) = 1$  e si può anche verificare con il metodo dei residui. Dalla (187) segue anche (l'integrando è pari) che

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin t/2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(N + 1/2)t}{\sin t/2} dt = 1 . \quad (188)$$

Usando la (187) si può scrivere

$$S_N(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt \sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right] \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{\sin t/2} . \quad (189)$$

Adesso la funzione che moltiplica  $\sin(N + 1/2)t$  nell'integrando è sommabile nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ ; infatti in tale intervallo  $\sin t/2$  si annulla solo nell'origine e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{\sin t/2} = 2f'(x_0) . \quad (190)$$

Si può quindi passare al limite per  $N \rightarrow \infty$  e applicare le formule di Riemann per ottenere

$$f(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) . \quad (191)$$

Nel caso in cui nel punto  $x_0$  la funzione abbia una discontinuità di I specie, ma sia di classe  $C^1$  sia in un intorno sinistro che in un intorno destro di  $x_0$ . Al posto della (189) si scrive infatti

$$\begin{aligned} S_N(x_0) - \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 dt \sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right] \frac{f(x_0 + t) - f(x_{0-})}{\sin t/2} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt \sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right] \frac{f(x_0 + t) - f(x_{0+})}{\sin t/2} , \end{aligned}$$

dove  $f(x_{0-})$  e  $f(x_{0+})$  sono i limiti destro e sinistro nel punto  $x_0$  e si è usata l'identità (188). Dalle formule di Riemann segue allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} , \quad (192)$$

di cui la (191) è ovviamente un caso particolare. Se il punto  $x_0$  cade in uno degli estremi dell'intervallo di definizione della  $f(x)$ , continua a valere la (192) purché la funzione sia continuata periodicamente:  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

<sup>5</sup>  $\sin(N + 1/2)t$  e  $\sin t/2$  hanno periodo  $4\pi$ , ma il loro rapporto ha periodo  $2\pi$ . La funzione  $f(x)$  è definita su  $(0, 2\pi)$  ma viene continuata a tutto  $\mathbb{R}$  richiedendone la periodicità,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

3.2.4 *Importanti commenti*

Il teorema appena visto garantisce la convergenza puntuale, mentre per la convergenza uniforme in un intervallo chiuso  $[a, b]$  è necessario che la funzione  $f(x)$  sia ivi continua e la sua derivata continua a tratti. Questione diversa è l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier, che è invece garantita sotto le ipotesi del teorema precedente, cioè la serie è integrabile anche se la  $f(x)$  ha discontinuità di prima specie nell'intervallo considerato. Notiamo infatti che l'integrale della serie (176) ha coefficienti soppressi da  $k$

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{ik} e^{ikx} \Big|_{x_0}^x$$

e converge più rapidamente.

Un integrale dalle importanti applicazioni fisiche è

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^* e^{-i\omega_m t} \right) f(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2. \quad (193)$$

dove si sono sfruttate le relazioni

$$f^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^* e^{-i\omega_m t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_m t} f(t) dt = a_m. \quad (194)$$

La (193), che prende il nome di **equazione di Parseval**, illustra come *ogni componente di Fourier contribuisca separatamente all'integrale*; non ci sono cioè termini di interferenza del tipo  $a_m^* a_n$ . Qualora  $f(t)$  rappresenti la corrente elettrica attraverso una resistenza  $R$ , la (193) moltiplicata per  $R$  mostra che la potenza media dissipata per effetto Joule è uguale alla somma delle potenze dissipate sulle varie frequenze.

Per  $f(t)$  reale infatti i coefficienti  $a_n$  soddisfano la relazione

$$a_n^* = a_{-n}.$$

e la (193) diventa:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (195)$$

In questo caso  $a_0$  è la componente di corrente continua della  $f(t)$  e  $\sqrt{2}|a_n|$  il valore efficace della corrente alternata di pulsazione  $\omega_n$ .

Per la convergenza puntuale della serie (180) valgono esattamente gli stessi teoremi dimostrati per la serie (176). Se in un punto  $x$  interno all'intervallo  $(-\pi, \pi)$  la funzione  $f(x)$  è di classe  $C^1$ , cioè continua assieme alla sua derivata prima, allora la (180) è vera nel senso della **convergenza puntuale**. Se invece nel punto  $x_0$  la  $f(x)$  ha

una discontinuità di prima specie, ma è di classe  $C^1$  sia in un intorno sinistro che in un intorno destro di  $x_0$ , vale allora:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx_0) + B_n \sin(nx_0)] = \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}. \quad (196)$$

dove  $f(x_{0+})$  e  $f(x_{0-})$  sono rispettivamente i limiti destro e sinistro di  $f(x)$  nel punto  $x_0$ . Se il punto  $x_0$  cade in uno degli estremi dell'intervallo di definizione continua a valere quanto abbiamo detto per i punti interni purché la funzione sia *continuata periodicamente* su tutto l'asse reale secondo la  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

L'equazione di Parseval, in termini dei coefficienti  $A_n$  e  $B_n$ , assume la forma seguente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} |A_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|A_n|^2 + |B_n|^2).$$

Se la funzione  $f(x)$  è *pari*  $f(-x) = f(x)$ , i coefficienti  $B_n$  sono nulli e la (180) si riduce a una serie di coseni:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

Se la funzione  $f(x)$  è *dispari*,  $f(-x) = -f(x)$ , i coefficienti  $A_n$  sono nulli e la (180) si riduce a una serie di seni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx).$$

**Esempio.** Consideriamo nuovamente la serie di Fourier della funzione a gradino:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ +1 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Poiché la funzione è dispari, lo sviluppo in serie di Fourier conterrà solo seni ( $A_n = 0$ ). I coefficienti  $B_n$  sono:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \epsilon(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ - \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} [-\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

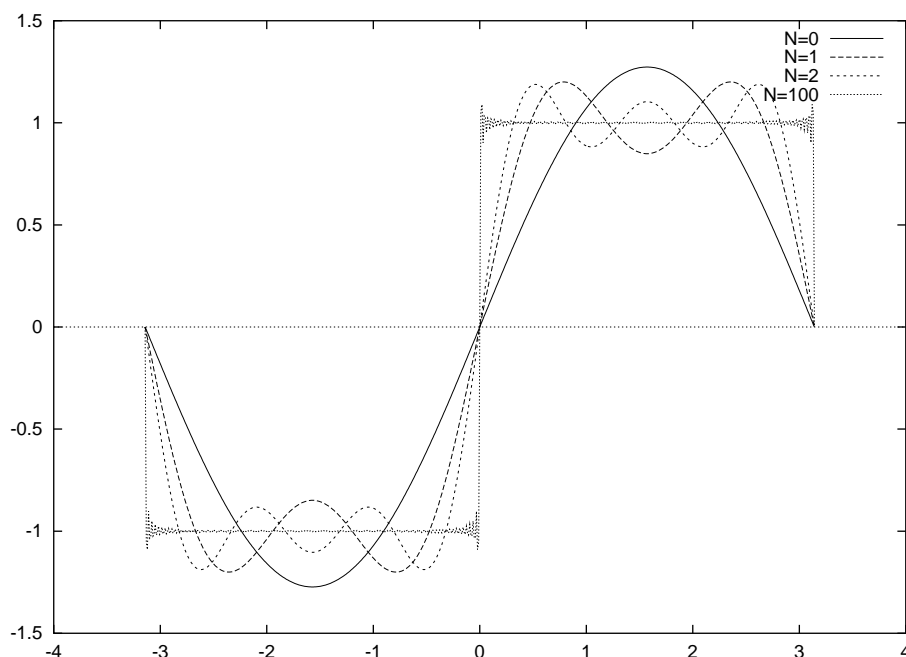


Figura 26.: Serie di Fourier per la funzione a scalino  $\epsilon(x)$ : prime ridotte.

Pertanto

$$\begin{aligned}\epsilon(x) &= \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}.\end{aligned}$$

Graficamente le successive approssimazioni sono mostrate in Fig. (26). Notare che nell'origine e nei punti  $\pm\pi$  la somma della serie vale zero, in accordo con la (196).

Per  $n$  grande si verifica il cosiddetto *fenomeno di Gibbs*, tipico delle serie di Fourier di funzioni discontinue: in prossimità di una discontinuità di prima specie, la ridotta ennesima della serie di Fourier presenta un picco, tanto più stretto quanto maggiore è  $n$ , di altezza pari a circa il 9% del salto. Questo esempio mostra che la serie di Fourier non converge uniformemente alla funzione  $f(x)$  nei punti in cui essa ha una discontinuità di I specie.

## 3.2.5 Altri esempi

**Esempio 1.** Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$$

contiene solo coseni, perché  $f(x)$  è pari:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

I coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \quad \text{se } n \neq 1. \end{aligned}$$

Se  $n = 1$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{\sin^2 x}{2} \right|_0^{\pi} = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2 - 1} \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots \right) \end{aligned}$$

È facile verificare numericamente che la serie converge piuttosto rapidamente anche nell'origine dove non si ha il fenomeno di Gibbs perché la funzione è continua. In generale, ci aspettiamo che la convergenza della serie di Fourier sia tanto più rapida quanto più liscia è la funzione  $f(x)$ .

**Esempio 2.**

$$f(x) = |x| \quad -\pi < x < \pi$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \\ A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} \left( x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$$

Anche in questo caso la serie converge rapidamente dal momento che la funzione è continua.

**Esempio 3.** La funzione

$$f(x) = x \quad 0 < x < 2\pi$$

non ha parità definita, tuttavia  $f(x) - \pi$  è dispari. Infatti i suoi coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = 2\pi \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \left( x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx \right) = 0 \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \left( -x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx \right) = -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \pi - 2 \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$$

Si consiglia di disegnare i grafici delle  $f(x)$  dei tre esempi proposti e di confrontarli con le prime ridotte delle rispettive serie di Fourier.

## TRASFORMATE INTEGRALI

### 4.1 TRASFORMATATA DI FOURIER

Nel capitolo precedente abbiamo imparato a risolvere l'eq. (156) nel caso in cui il termine noto è periodico e abbiamo studiato la convergenza della serie (trigonometrica) di Fourier. Ma come possiamo risolvere l'eq. (156) quando il termine noto non è periodico? Come fare a scriverlo come somma di termini della forma  $e^{i\omega_n t}$  che sono invece periodici?

Il modo migliore è di considerare una funzione non periodica come caso limite di una periodica con periodo  $L$  che tende a infinito. A questo scopo scriviamo i coefficienti di Fourier

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_n x} f(x) dx, \quad \text{con } k_n \equiv \frac{2\pi n}{L}$$

nella forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(k_n) \Delta k,$$

dove

$$F(k_n) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_n x} f(x) dx, \quad (197)$$

e

$$\Delta k = k_n - k_{n-1} = \frac{2\pi}{L}.$$

Allora la serie trigonometrica di Fourier (169) si può riscrivere come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} F(k_n) \Delta k. \quad (198)$$

A questo punto effettuiamo il limite  $L \rightarrow \infty$ , nel quale  $\Delta k \rightarrow 0$  e la serie a secondo membro della (198) può riguardarsi come una somma integrale alla Riemann per la funzione  $e^{ikx} F(k)$ , estesa all'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ , diviso in infiniti intervalli parziali di ampiezza  $\Delta k \rightarrow 0$ .

La (197) suggerisce di *definire* la **trasformata di Fourier** (TF) della funzione  $f(x)$  sommabile sull'asse reale come

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (199)$$

Seguendo la (198) possiamo quindi ipotizzare che l'integrale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(k) e^{ikx} dk, \quad (200)$$

detto **antitrasformata di Fourier** (ATF) della funzione  $F(k)$ , converga alla funzione  $f(x)$  di partenza. Generalmente l'integrale improprio esiste e si può tranquillamente usare

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (201)$$

Studieremo le condizioni per la convergenza dell'antitrasformata alla funzione di partenza tra poco, dopo aver considerato alcuni esempi.

#### 4.1.1 Esempi

**Esempio 1.** La TF della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}_+$$

è

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(x+ia)(x-ia)} dx.$$

Questo integrale si risolve usando il Lemma di Jordan. Se  $k > 0$  chiudiamo il cammino di integrazione nel semipiano  $\text{Im}z < 0$  e otteniamo:

$$F(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{Res} \frac{e^{-ikz}}{(z+ia)(z-ia)} \Big|_{z=-ia} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ka}}{a}.$$

Se  $k < 0$  chiudiamo invece nel semipiano  $\text{Im}z > 0$  e otteniamo:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{Res} \frac{e^{-ikz}}{(z+ia)(z-ia)} \Big|_{z=ia} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ka}}{a}.$$

Pertanto

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|a}}{a}.$$

La verifica della (201) è immediata e coinvolge solo un integrale elementare.

**Esempio 2.** La TF della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (202)$$



è

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}. \end{aligned} \quad (203)$$

Si noti che la  $F(k)$  non è sommabile su  $\mathbb{R}$ , cioè l'integrale del suo modulo tra  $-\infty$  e  $+\infty$  diverge, ma questo non significa che l'ATF non esista. Per verificare che l'ATF di (203) sia effettivamente la (202) dobbiamo calcolare l'integrale

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} F(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin(ka)}{k} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \left[ \frac{e^{ik(x+a)}}{k} - \frac{e^{ik(x-a)}}{k} \right] dk \end{aligned} \quad (204)$$

deformando il cammino di integrazione come nell'esempio 4 del paragrafo 1.7.3, aggirando per esempio l'origine nel semipiano immaginario positivo. Se  $x > a$  entrambi gli integrali in (204) ricadono nel caso  $\alpha > 0$  del lemma di Jordan e pertanto si può chiudere il cammino d'integrazione con una semicirconferenza nel semipiano superiore; all'interno del cammino d'integrazione l'integrando è regolare e pertanto:

$$I(x) = 0 \quad \text{se } x > a.$$

Analogamente, se  $x < -a$  conviene aggirare l'origine nel semipiano immaginario negativo, perché entrambi gli integrali in (204) ricadono nel caso  $\alpha < 0$  del lemma di Jordan e pertanto si può chiudere il cammino d'integrazione con una semicirconferenza nel semipiano inferiore, ottenendo di nuovo zero:

$$I(x) = 0 \quad \text{se } x < -a.$$

Se invece  $|x| < a$ , e si aggira l'origine nel semipiano immaginario positivo, il primo integrale, che si può chiudere nel semipiano superiore, dà zero, mentre il secondo, che va chiuso nel semipiano inferiore, dà:

$$I(x) = -\frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \operatorname{Res} \frac{e^{ik(x-a)}}{k} \bigg|_{k=0} = 1.$$

Abbiamo così dimostrato che  $I(x) = f(x)$  per ogni  $x \neq a$ . Per  $x = a$  possiamo deformare il cammino sopra la singolarità scrivendo, come in Sez. 1.7.4,

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \left[ \frac{e^{2ika}}{k + i\epsilon} - \frac{1}{k + i\epsilon} \right] dk. \quad (205)$$

Il primo integrale si chiude nel semipiano immaginario positivo e si annulla per il teorema di Cauchy, mentre per il secondo usiamo la (79) sapendo che la parte principale dell'integrale si annulla<sup>1</sup>. Il risultato è

$$I(a) = -\frac{1}{2\pi i}(-i\pi) = \frac{1}{2} = \frac{f(a_-) + f(a_+)}{2}. \quad (206)$$

Nei punti di discontinuità di prima specie la situazione è quindi analoga a quella vista per le serie di Fourier: l'ATF dà il valor medio tra i limiti destro e sinistro della funzione.

**Esempio 3.** La TF della funzione gaussiana

$$f(x) = e^{-x^2/a^2}$$

è

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x/a)^2 - ikx} dx = \frac{e^{-(ka)^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x/a - ika/2)^2} dx \\ &= \frac{e^{-(ka)^2/4}}{\sqrt{2\pi}} a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-a^2 k^2/4}, \end{aligned} \quad (207)$$

cioè ancora una gaussiana, di larghezza inversamente proporzionale a quella della funzione trasformanda.<sup>2</sup> La verifica della (201), che dà l'ATF di  $F(k)$ , è immediata: non si tratta che di rifare lo stesso conto con  $a \rightarrow A = 2/a$ .

È interessante notare che la larghezza  $\Delta x = a/\sqrt{2}$  della gaussiana  $f(x)$  è uguale all'inverso della larghezza  $\Delta k = \sqrt{2}/a$  della sua TF,  $\Delta x \cdot \Delta k = 1$ . Quanto più stretta la  $f(x)$ , tanto più larga è la sua TF, e viceversa. Si tratta di una proprietà generale, anche se nel caso della gaussiana il prodotto  $\Delta x \cdot \Delta k$  assume il suo valore minimo. Per studiare la questione in maniera più generale, consideriamo la funzione complessa di variabile reale  $f(x)$  con norma quadratica uguale a 1, cioè tale che  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ . In questo caso, l'equazione di Parseval che vedremo tra poco in eq.(224) ci assicura che anche  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = 1$ . Le funzioni definite positive  $|f(x)|^2$  e  $|F(k)|^2$  possono essere viste come due distribuzioni di probabilità. Se le loro varianze (secondo momento rispetto alla media)  $\sigma_x^2, \sigma_k^2$  esistono, allora vale il *principio di indeterminazione*<sup>3</sup>

$$\sigma_x \cdot \sigma_k \geq \frac{1}{2}, \quad (208)$$

<sup>1</sup> Nella (79) c'è una funzione  $f(x)$  a numeratore che garantisce la convergenza dell'integrale  $x \rightarrow \pm\infty$ . In questo caso possiamo pensare a una funzione a scalino che vale zero per  $|x| > R$ , e 1 per  $|x| < R$ . L'integrale diverge per  $R \rightarrow \infty$ , ma la divergenza logaritmica della coda destra della funzione cancella quindi quella della coda sinistra, e possiamo usare la (79).

<sup>2</sup> Con il cambiamento di variabile  $x \rightarrow t = x/a - ika/2$ , il cammino di integrazione nel piano complesso di  $t$  non è più l'asse reale ma è diventato una retta ad esso parallela; tuttavia, l'integrale sulla differenza tra i due cammini è nullo per il teorema di Cauchy e perchè l'integrando va a zero molto rapidamente per  $t \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup> Per una dimostrazione, si veda G. Cicogna, Metodi matematici della Fisica, ed. Springer, p. 149.

di grande rilevanza in Meccanica Quantistica (Heisenberg, 1927). In pratica, *quanto più una funzione  $f(x)$  è localizzata nello spazio delle coordinate, tanto meno localizzata è la sua TF nello spazio coniugato  $k$  dei numeri d'onda*. Almeno qualitativamente, non è difficile riconoscere questo principio all'opera nei primi due esempi che abbiamo considerato (ma nel secondo la varianza della TF non è definita).

#### 4.1.2 Convergenza dell'integrale di Fourier

Sotto quali condizioni l'ATF di  $F(k)$  converge alla funzione  $f(x)$  di partenza? Il problema è simile a quello della convergenza della serie di Fourier ed equivale a quello della convergenza dell'integrale (di Fourier)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iku} du dk, \quad (209)$$

che si ottiene inserendo la TF nell'ATF. Il *teorema dell'integrale di Fourier* di Dirichlet assicura che condizioni sufficienti per la convergenza sono che i)  $f(x)$  sia sommabile su  $\mathbb{R}$ ; ii)  $f(x)$  e  $f'(x)$  siano continue a tratti in ogni intervallo finito. In presenza di una discontinuità di I specie, l'integrale converge alla media aritmetica dei limiti destro e sinistro. Non è difficile verificare che gli esempi finora considerati rientrano nella casistica prevista da questo teorema.

#### 4.1.3 Proprietà della trasformata di Fourier

Elenchiamo alcune importanti proprietà delle TF. Per comodità introduciamo il simbolo  $\mathcal{F}_k(f)$  per indicare la TF della funzione  $f(x)$ :

$$\mathcal{F}_k(f) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (210)$$

#### Linearità

$$\mathcal{F}_k(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{F}_k(f_1) + a_2 \mathcal{F}_k(f_2), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}. \quad (211)$$

#### Trasformata di Fourier di funzioni a parità definita

Così come la serie trigonometrica di Fourier di una funzione pari (dispari) contiene solo coseni (seni), le TF di funzioni a parità definita contengono solo seno o coseno:

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\cos(kx) - i \sin(kx)] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx & \text{se } f(-x) = f(x) \\ -i \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx & \text{se } f(-x) = -f(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (212)$$

Una ovvia conseguenza delle (212) è che la TF di una funzione pari (dispari) è una funzione pari (dispari).

### Trasformata della derivata

La TF della derivata  $f'(x)$  (ammesso che  $f'(x)$  esista e sia sommabile) è legata alla trasformata di  $f(x)$  dalla relazione:

$$\mathcal{F}_k(f') = ik \mathcal{F}_k(f) \quad (213)$$

Infatti integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(f') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \left. \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = ik \mathcal{F}_k(f), \end{aligned}$$

dove il termine di superficie deve essere nullo affinché la TF di  $f$  esista ( $f$  deve essere sommabile). La relazione (213) può essere iterata per ottenere le TF delle derivate successive:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(f'') &= ik \mathcal{F}_k(f') = (ik)^2 \mathcal{F}_k(f) \\ \mathcal{F}_k[f^{(n)}] &= (ik)^n \mathcal{F}_k(f), \end{aligned} \quad (214)$$

ovviamente supponendo che la funzione  $f(x)$  ammetta derivate fino all' $n$ -esima e che  $f^{(n)}(x)$  sia sommabile sull'asse reale.

Moltiplicando ambo i membri della (213) per  $-i$  e usando la linearità della TF si può simbolicamente stabilire la corrispondenza:

$$-i \frac{d}{dx} \longleftrightarrow k \quad (215)$$

fra l'operatore derivata nello spazio delle funzioni  $f(x)$  e la semplice moltiplicazione per  $k$  nello spazio delle funzioni  $F(k)$ ; tale corrispondenza è di grande importanza in Meccanica Quantistica.

### Comportamento asintotico

Dalla disuguaglianza

$$|\mathcal{F}_k(f)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \text{cost.} \quad (216)$$

segue che la TF di una funzione sommabile è sempre una funzione limitata. Dalla (214) segue quindi che la TF di una funzione  $n$  volte derivabile è almeno  $O(1/k^n)$  per

$k \rightarrow \infty$ ; in breve, *quanto più una funzione è liscia (ovvero quanto maggiore è il suo ordine di derivabilità) tanto più velocemente la sua TF va a zero all'infinito*. Nell'esempio 2 della sezione precedente  $f(x)$  è discontinua e la sua TF è  $O(1/k)$ . Negli esempi 1 e 3 abbiamo invece considerato funzioni infinitamente derivabili, la cui TF è esponenzialmente soppressa a grandi  $k$ .

### Derivata della trasformata

Se si moltiplica la funzione  $f(x)$  per  $x$ , la TF diventa:

$$\mathcal{F}_k [x f(x)] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}_k [f(x)] \quad (217)$$

come si può facilmente verificare derivando sotto il segno, nell'ipotesi che la funzione  $xf(x)$  sia ancora sommabile sull'asse reale. Come la (213), anche la (217) si può iterare, ottenendo

$$\mathcal{F}_k [x^n f(x)] = \left( i \frac{d}{dk} \right)^n \mathcal{F}_k [f(x)] \quad (218)$$

sempre nell'ipotesi che la funzione  $x^n f(x)$  sia ancora sommabile sull'asse reale. La (217) stabilisce la corrispondenza, duale della (215),

$$x \longleftrightarrow i \frac{d}{dk},$$

fra moltiplicazione per  $x$  nello spazio delle  $f(x)$  e la derivata nello spazio delle  $F(k)$ .

L'equazione (218) mostra che *quanto più rapidamente una funzione decresce all'infinito, tanto più la sua TF è liscia, cioè maggiormente derivabile*. Nell'esempio 1 abbiamo infatti visto che la TF di una funzione  $O(1/x^2)$  all'infinito ha derivata discontinua nell'origine, mentre la TF di una gaussiana è ancora una gaussiana (infinitamente derivabile).

### Funzioni di prova

Se chiamiamo  $\mathcal{S}$  lo spazio lineare delle **funzioni di prova**, rapidamente decrescenti e infinitamente derivabili:

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty; x^n f(x) \text{ limitata su } \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\} , \quad (219)$$

le (214) e (218) implicano che la TF manda le funzioni di prova (nella variabile  $x$ ) in funzioni di prova (nella variabile  $k$ ):

$$\mathcal{F}_k(f) \in \mathcal{S} , \quad \forall f \in \mathcal{S} . \quad (220)$$

### Teorema di convoluzione

Definiamo la **convoluzione**  $g = f_1 * f_2$  di due funzioni  $f_1$  e  $f_2$ :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' . \quad (221)$$

È immediato vedere che il prodotto convolutivo è commutativo e associativo:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ f_1 * (f_2 * f_3) &= (f_1 * f_2) * f_3 . \end{aligned}$$

Il teorema di convoluzione afferma che la TF della convoluzione di due funzioni è (a parte una costante moltiplicativa) il prodotto delle TF delle due funzioni:

$$\mathcal{F}_k(f_1 * f_2) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k(f_1) \mathcal{F}_k(f_2) . \quad (222)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') f_2(x - x') e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') e^{-ikx'} f_2(x - x') e^{-ik(x-x')} . \end{aligned}$$

Se ora passiamo dalle variabili  $(x, x')$  alle variabili  $(z = x - x', x')$  e scambiamo l'ordine di integrazione usando il Teorema di Fubini Tonelli (vedi eq.(351) in Appendice C), otteniamo:

$$\mathcal{F}_k(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') e^{-ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} dz f_2(z) e^{-ikz} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k(f_1) \mathcal{F}_k(f_2) .$$

[q.e.d.]

### Equazione di Parseval

Consideriamo due funzioni sommabili  $f_{1,2}(x)$  con TF  $F_{1,2}(k)$ . L'integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(k)^* F_2(k) dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F_2(k) dx dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)^* f_2(x) dx , \end{aligned} \quad (223)$$

dove abbiamo usato due volte la definizione di TF. Nel caso in cui le due funzioni coincidono si ottiene l'equazione di Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \quad (224)$$

che ha la stessa interpretazione data nel contesto delle serie di Fourier.

*Esempio*

La trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = e^{-t/T} \sin(\omega_0 t) \theta(t) ,$$

che descrive il moto di un oscillatore armonico smorzato, è

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t/T} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} e^{(-1/T - i\omega + i\omega_0)t} dt - \int_0^{\infty} e^{(-1/T - i\omega - i\omega_0)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{1/T + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{1/T + i(\omega + \omega_0)} \right] , \end{aligned}$$

cioè

$$F(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{(\omega + \omega_0) - i/T} - \frac{1}{(\omega - \omega_0) - i/T} \right] .$$

Per dare un'interpretazione fisica alle funzioni  $f(t)$  e  $F(\omega)$ , supponiamo che  $f(t)$  sia il campo elettrico di un'onda irradiata. Allora la potenza irradiata è  $W \propto |f(t)|^2$  e l'energia totale irradiata è proporzionale a  $\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt$ . Dal teorema di Parseval

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega .$$

Quindi  $|F(\omega)|^2$  rappresenta (a meno di costanti) l'energia irradiata per intervallo unitario di frequenza:

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{T^2} + \frac{1}{T^4}} .$$

Se  $T$  è molto grande ( $T \gg \omega_0^{-1}$ ), l'energia irradiata per intervallo unitario di frequenza è fortemente piccata in  $\omega = \omega_0$  e la larghezza del picco è inversamente proporzionale a  $T$ :

$$|F(\omega)|^2 \simeq \frac{\omega_0^2 T^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 T^2 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)} .$$

*Ulteriori proprietà della TF*

Se l'argomento della funzione  $f(x)$  viene traslato di una costante reale  $a$ , per la  $\mathcal{F}$  vale la seguente relazione:

$$\mathcal{F}_k[f(x+a)] = e^{ika} \mathcal{F}_k[f(x)] . \quad (225)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[f(x+a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ik(x'-a)} dx' = \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \\ &= e^{ika} \mathcal{F}_k(f) . \end{aligned}$$

Se si moltiplica la funzione  $f(x)$  per un esponenziale, la trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}_k[e^{-i\alpha x} f(x)] = \mathcal{F}_{k+\alpha}[f(x)] , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

come si può facilmente verificare a partire dalle definizioni di  $\mathcal{F}$ .

## 4.1.4 Soluzione di equazioni differenziali mediante la trasformata di Fourier

La proprietà (215) trasforma un'equazione differenziale a **coefficienti costanti** in un'elementare equazione algebrica lineare; chiamando  $U(k)$  e  $F(k)$  le TF dell'incognita  $u(x)$  e del termine noto  $f(x)$ , l'equazione differenziale

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = f(x), \quad (226)$$

diventa semplicemente:

$$-ak^2 U(k) + ibk U(k) + c U(k) = F(k),$$

da cui è immediato ricavare  $U(k)$ ; infine antitrasformando si ricava la funzione incognita  $u(x)$ .

Questo procedimento per risolvere equazioni differenziali a coefficienti costanti mediante la TF è l'esatto parallelo di quello illustrato nel Capitolo 2, dopo l'eq.(173), per l'uso della Serie trigonometrica di Fourier; allora richiedevamo che termine noto e soluzione fossero *funzioni periodiche*, ora abbiamo lasciato cadere questa richiesta; va tuttavia osservato che la procedura appena descritta per risolvere l'equazione (226) ha senso solo se il termine noto e la soluzione sono sommabili e ciò è molto restrittivo per quanto riguarda il comportamento a grande  $x$ .

Torneremo su questo punto quando parleremo della Trasformata di Laplace; per ora limitiamoci a illustrare un esempio di soluzione di un'equazione differenziale (alle derivate parziali) mediante la TF.

**Esempio: l'equazione del calore**

Risolviamo l'equazione di diffusione del calore

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (227)$$

con la condizione iniziale

$$T(x, 0) = f(x).$$

Fisicamente  $T(x, t)$  rappresenta la distribuzione di temperatura al tempo  $t$  in una sbarra di lunghezza infinita, e la distribuzione iniziale è data dalla funzione sommabile  $f(x)$ <sup>4</sup>. La costante  $\alpha$  è la costante di diffusione o diffusività termica. Moltiplicando l'equazione (227) per  $e^{-ikx}$  e integrando su  $x$  da  $-\infty$  a  $\infty$  si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dx.$$

<sup>4</sup> Essendo la lunghezza della sbarra infinita, l'equilibrio termico viene raggiunto alla temperatura data dal  $\lim_{x \pm \infty} f(x)$ . Per avere  $f(x)$  sommabile, è necessario che lo zero della scala delle temperature venga fissato a questo valore.



Chiamando  $F(k, t)$  la TF rispetto a  $x$  della  $T(x, t)$ , ovvero

$$F(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} T(x, t) dx,$$

e ricordando la (214) si ottiene

$$-k^2 F(k, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} F(k, t) .$$

Questa è un'equazione differenziale del prim'ordine in  $F(k, t)$ , la cui soluzione è

$$F(k, t) = F(k, 0) e^{-\alpha k^2 t} .$$

Dalle condizioni iniziali si ha

$$F(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \equiv F(k)$$

da cui

$$F(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx .$$

Per ricavare  $T(x, t)$  antitrasformiamo secondo Fourier

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} e^{ikx} e^{-\alpha k^2 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\alpha k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ik(x'-x)} , \end{aligned}$$

integriamo su  $k$  in maniera analoga a quanto fatto prima della (207)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\alpha k^2 t - ik(x'-x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\left[ \alpha k^2 t + ik(x'-x) - \frac{(x'-x)^2}{4\alpha t} + \frac{(x'-x)^2}{4\alpha t} \right]} \\ &= e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\left[ k\sqrt{\alpha t} + \frac{i}{2} \frac{x'-x}{\sqrt{\alpha t}} \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\alpha t}} , \end{aligned}$$

e giungiamo finalmente al risultato:

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\alpha t}} dx' .$$

Si può arrivare più facilmente allo stesso risultato a partire dalla (228) osservando che  $e^{-\alpha k^2 t}$  è la TF di  $\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)}$ ; quindi  $F(k, t)$  è il prodotto di due TF e l'antitrasformata è la convoluzione di  $f(x)$  e  $\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/(4\alpha t)}$ . Si noti che tutto il discorso fatto perde senso per  $t < 0$ :  $e^{-\alpha k^2 t}$  è una gaussiana per  $t > 0$  ma diventa divergente per  $k \rightarrow \pm\infty$  se  $t < 0$ . Introduciamo quindi la funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (228)$$

e la utilizziamo per definire

$$G(x, x', t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\alpha t}} \theta(t), \quad (229)$$

detto *nucleo del calore* (heat kernel), che costituisce la **funzione di Green** o **propagatore** dell'eq. (227). La soluzione può allora essere riscritta come

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) f(x') dx' \quad (230)$$

e descrive la propagazione del calore dal punto  $x'$  al punto  $x$  al tempo  $t > 0$ .

Se, per esempio, la sorgente è puntiforme (cioè diversa da zero solo nell'origine):

$$f(x) = \delta(x)$$

(per la definizione della *delta di Dirac*  $\delta(x)$ , vedi più avanti, paragrafo 5.4) allora il calore si propaga in modo che la temperatura assume una distribuzione gaussiana di larghezza proporzionale a  $\sqrt{t}$ :

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) \delta(x') dx' = G(x, 0, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}.$$

È anche interessante notare che per  $t \rightarrow 0_+$  il nucleo del calore (229) tende alla delta di Dirac (vedi eq. (308)):

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} G(x, x', t) = \delta(x - x'), \quad (231)$$

come deve essere affinché la (230) riproduca le condizioni iniziali per  $t \rightarrow 0_+$ .

## 4.2 TRASFORMATATA DI LAPLACE

Il metodo della TF permette di risolvere equazioni differenziali a coefficienti costanti soltanto in un campo ristretto; la funzione  $f(x)=1$  non potrebbe essere accettata né come soluzione né come termine noto. D'altra parte, se vogliamo risolvere un'equazione con condizioni iniziali al tempo  $t = 0$ , ci interessa sapere solo ciò che succede per  $t \geq 0$ . È quindi conveniente considerare una sorta di TF definita da un integrale esteso solo al semiasse delle  $t > 0$ . In tal caso, se  $f(t)$  è *localmente* sommabile, cioè è sommabile su ogni intervallo finito del semiasse reale  $t \geq 0$ , e se esistono  $\alpha' \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  e  $t_0 \geq 0$  tali che  $\forall t > t_0$  valga

$$e^{-\alpha' t} |f(t)| < M \quad (232)$$

la funzione

$$g_\alpha(t) \equiv e^{-\alpha t} f(t) \theta(t),$$

dove  $\theta(t)$  è la funzione a gradino di Heaviside introdotta nella (228), è sommabile sull'intero asse reale  $\forall \alpha > \alpha'$ . Infatti  $\forall t > t_0$

$$|g_\alpha(t)| = \left| e^{-(\alpha-\alpha')t} e^{-\alpha' t} f(t) \right| \leq e^{-(\alpha-\alpha')t} M \quad (233)$$

e quindi tende esponenzialmente a zero per  $t \rightarrow +\infty$ , rimanendo localmente sommabile se tale era  $f(t)$ . Attraverso l'uso di un fattore di convergenza esponenziale abbiamo quindi reso la funzione  $f(t)$ , che potrebbe essere divergente o tendere a una costante per  $t \rightarrow \infty$ , sommabile. Per esempio una funzione che diverge per  $t \rightarrow \infty$  come  $t^n$ , viene ridotta a una funzione sommabile,  $\forall n$ , come pure  $e^t$ , ma non  $e^{t^2}$ . Possiamo pertanto scrivere la TF di  $g_\alpha(t)$ :

$$G_\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\alpha+i\omega)t} dt. \quad (234)$$

Introduciamo ora la variabile complessa  $s = \alpha + i\omega$  e definiamo  $F(s) = \sqrt{2\pi} G_\alpha(\omega)$ , ovvero

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (235)$$

e prende in nome di **trasformata di Laplace** (TL) della funzione  $f(t)$ ; chiamando **ascissa di convergenza**  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  l'estremo inferiore degli  $\alpha'$  per cui vale la (232), la  $F(s)$  è definita nel semipiano  $\text{Re } s > \alpha_0$  e ivi è **analitica**, come si vede facilmente derivando sotto il segno, poiché, grazie alla (233),  $t^n f(t)$  ha la stessa ascissa di convergenza di  $f(t)$ , per ogni  $n$  naturale. L'**antitrasformata di Laplace** (ATL) è definita da un integrale in campo complesso. Infatti antitrasformando la (234) si ricava, nell'ipotesi che  $f(t)$  sia di classe  $C^1$  nell'intorno di  $t$ ,

$$f(t) e^{-\alpha t} \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R G_\alpha(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

da cui

$$f(t)\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R G_\alpha(\omega) e^{(\alpha+i\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(s) e^{st} ds, \quad (236)$$

dove il cammino di integrazione  $\gamma$  è una retta parallela all'asse immaginario del piano di  $s$ , di equazione  $\text{Re } s = \alpha > \alpha_0$ . L'antitrasformata (236) si indica di solito, sottintendendo la  $\theta(t)$ , come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (237)$$

che per essere più precisi andrebbe scritta come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} F(s) e^{st} ds. \quad (238)$$

Osserviamo subito: si può dimostrare che  $F(s) = o(1)$  per  $s \rightarrow \infty$  in ogni direzione del semipiano di analiticità. Per  $t < 0$  si può quindi applicare il lemma di Jordan (vedi caso 4) chiudendo il cammino con una semicirconferenza nel semipiano a destra di  $\text{Re } s = \alpha$ , ottenendo  $f(t) = 0$ , visto che  $F(s)$  è analitica nel semipiano  $\text{Re } s > \alpha_0$ .

Indicheremo talvolta la TL (235) della funzione  $f(t)$  con il simbolo  $\mathcal{L}_s[f(t)]$ .

#### 4.2.1 Esempi

- La TL della funzione  $f(t) = 1$  è

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

L'integrale converge per  $\text{Re}(s) > 0$  (cioè  $\alpha_0 = 0$ ). Il calcolo dell'integrale (237) mediante il metodo dei residui mostra subito che l'ATL di  $1/s$  è  $\theta(t)$ . Infatti per  $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} ds = \text{Res} \frac{e^{ts}}{s} \Big|_{s=0} = 1, \quad (239)$$

mentre per  $t < 0$  il cammino semicircolare d'integrazione non contiene singolarità e l'integrale vale 0.

- La TL della funzione  $f(t) = t$  è

$$F(s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt = - \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} dt = - \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2}.$$

Anche in questo caso per l'ATL occorre calcolare solo un facile residuo in  $s = 0$  e si verifica subito che l'ATL converge a  $t\theta(t)$ .

- La TL della funzione  $f(t) = t^n$  è

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-st} dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

- La TL della funzione  $f(t) = \cos t$  è

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} (e^{it} + e^{-it}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-(s-i)t}}{-(s-i)} \Big|_0^\infty + \frac{e^{-(s+i)t}}{-(s+i)} \Big|_0^\infty \right\} = \frac{s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Analogamente si trova anche  $\mathcal{L}_s[\cos bt] = s/(s^2 + b^2)$ ,  $\mathcal{L}_s[\sin bt] = b/(s^2 + b^2)$ .

Tutte le funzioni discusse negli esempi precedenti hanno ascissa di convergenza  $\alpha_0 = 0$ ; la loro TL è perciò analitica in tutto il semipiano  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Nel caso della funzione  $f(t) = e^{at}$  con  $a \in \mathbb{C}$  non è sempre così. La sua TL è

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a},$$

dove abbiamo supposto  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$  per avere  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s-a)t} = 0$ ; d'altra parte per  $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$  l'integrale che definisce la TL diverge, quindi l'ascissa di convergenza della funzione  $f(t) = e^{at}$  è  $\alpha_0 = \operatorname{Re} a$ ; ciò concorda con il fatto che la TL  $F(s)$  è analitica nel semipiano  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$ .

Riflettendo su questi esempi ci si convincerà anche che se la TL  $\mathcal{L}_s(f(t))$  ha poli con  $\operatorname{Re} s > 0$  la funzione  $f(t)$  esplode esponenzialmente per  $t \rightarrow +\infty$ ; viceversa se  $\mathcal{L}_s(f(t))$  ha singolarità solo a sinistra dell'asse immaginario allora  $f(t)$  decresce esponenzialmente per  $t \rightarrow +\infty$ ; se i poli sono sull'asse immaginario  $f(t)$  può oscillare o crescere come una potenza di  $t$ . Questa proprietà è di grande importanza per le applicazioni a sistemi fisici e fornisce un criterio di stabilità nel tempo. Quando, per esempio, un sistema di amplificazione comincia a produrre un sibilo di ampiezza crescente (fortunatamente limitata dalla non linearità e quindi saturazione del sistema) possiamo dire che una qualche singolarità della TL della sua funzione di trasferimento ha acquistato parte reale non negativa.

#### 4.2.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Studiamo ora alcune proprietà delle TL, analoghe a quelle viste per le TF.

- La TL è lineare (per linearità degli integrali):

$$\mathcal{L}_s[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}_s[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}_s[f_2(t)]$$

- La TL della derivata  $f'(t)$ , se  $f'(t)$  esiste e ammette TL, è legata alla trasformata di  $f(t)$  dalla relazione:

$$\mathcal{L}_s[f'(t)] = s \mathcal{L}_s[f(t)] - f(0) , \quad (240)$$

come si ottiene integrando per parti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s \mathcal{L}_s[f(t)] - f(0) . \end{aligned}$$

È evidente che qui con  $f(0)$  si intende il limite destro di  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .

Nell'ipotesi che anche le derivate successive di  $f(t)$  esistano e ammettano TL, la relazione (240) può essere iterata per ottenere le trasformate delle derivate successive:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f''(t)] &= s \mathcal{L}_s[f'(t)] - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}_s[f(t)] - s f(0) - f'(0) \\ \mathcal{L}_s[f^{(n)}(t)] &= s \mathcal{L}_s[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n \mathcal{L}_s[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) . \end{aligned} \quad (241)$$

Dalla (241) segue che se la funzione  $f(t)$  è  $n$  volte derivabile e  $f^{(n)}(t)$  ammette TL vale

$$\mathcal{L}_s[f(t)] = \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} + \frac{\mathcal{L}_s[f^{(n)}]}{s^n} , \quad (242)$$

che dà utili informazioni sull'andamento per  $s \rightarrow \infty$  della TL (teorema di Tauber) a partire dalla funzione  $f$  e dalle sue derivate in  $t = 0+$ . La (242) si può verificare anche negli esempi precedenti; la TL di  $t^n$  è  $O(s^{-n-1})$  per grande  $s$  perchè in  $t = 0$  le sue prime  $n$  derivate si annullano. È da notare che, anche se  $f(t) \in C^\infty$ , non è affatto detto che la serie che facilmente si deduce dalla (242) converga. In realtà essa è in generale una *serie asintotica*, che sarà definita nel corso di Metodi Matematici della Fisica II.

- Se si moltiplica la funzione  $f(t)$  per un esponenziale, la trasformata è:

$$\mathcal{L}_s[e^{\alpha t} f(t)] = \mathcal{L}_{s-\alpha}[f(t)] , \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

come si può facilmente verificare derivando sotto il segno la  $\mathcal{L}$ . Per esempio ricordando che

$$\mathcal{L}_s[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

segue che

$$\mathcal{L}_s[e^{2t} \sin t] = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

senza un calcolo esplicito della TL.

- Se si moltiplica la funzione  $f(t)$  per  $t$ , la trasformata diventa:

$$\mathcal{L}_s[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}_s[f(t)] ,$$

come si può facilmente verificare a partire dalla definizione di  $\mathcal{L}$ . Notare che, diversamente da quanto avviene per la TF, qui siamo sempre sicuri che se  $f(t)$  ammette TL anche  $t^n f(t)$  la ammette,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ; equivalentemente, ogni TL è sempre infinitamente derivabile nella sua regione di convergenza, mentre ciò non è affatto detto per la TF, vedi per esempio la TF di  $\frac{1}{a^2+x^2}$ , par. 4.1.1.

- **Teorema di convoluzione.** Sia  $g(t)$  la convoluzione di due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  nulle per  $t < 0$  (la loro TL non dipende da questo). Allora  $\forall t > 0$  abbiamo

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t')f_2(t-t')dt' = \int_0^t f_1(t')f_2(t-t')dt' , \quad (243)$$

dove abbiamo usato l'annullarsi di  $f_{1,2}$  per argomenti negativi. Allora

$$\mathcal{L}_s[g(t)] = \mathcal{L}_s[f_1 * f_2] = \mathcal{L}_s[f_1(t)] \mathcal{L}_s[f_2(t)] . \quad (244)$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista per le trasformate di Fourier.

- La TL dell'integrale di una funzione  $g(t)$  è legata alla trasformata di  $g(t)$  dalla relazione:

$$\mathcal{L}_s\left[\int_0^x g(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}_s[g(x)] . \quad (245)$$

Partendo dalla formula per la TL per le derivate (240) e ponendo  $g(x) = f'(x)$  si ottiene infatti

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt .$$

La (240) diventa così:

$$\mathcal{L}_s[g(x)] = s\mathcal{L}_s\left[f(0) + \int_0^x g(t)dt\right] - f(0) = s\mathcal{L}_s[f(0)] + s\mathcal{L}_s\left[\int_0^x g(t)dt\right] - f(0) .$$

Ricordando ora che  $\mathcal{L}_s[1] = 1/s$ , otteniamo

$$\mathcal{L}_s[g(x)] = sf(0)\frac{1}{s} + s\mathcal{L}_s\left[\int_0^x g(t)dt\right] - f(0) ,$$

ovvero

$$\mathcal{L}_s[g(x)] = s\mathcal{L}_s \left[ \int_0^x g(t)dt \right] ,$$

da cui segue immediatamente la (245).

- Se l'argomento della funzione  $f(t)$  viene traslato di una costante  $a$ , per la TL vale la seguente relazione:

$$\mathcal{L}_s[f(t+a)] = e^{as} \left\{ \mathcal{L}_s[f(t)] - \theta(a) \int_0^a f(t)e^{-st}dt \right\} . \quad (246)$$

Per dimostrare la (246) bisogna distinguere i due casi  $a < 0$  e  $a > 0$ . Ricordiamo infatti che la TL è un integrale tra 0 e  $\infty$  e che è sottintesa una  $\theta(t)$ , che implica  $f(t) = 0$  se  $t < 0$ . Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f(t+a)] &= \int_0^\infty f(t+a)e^{-st}dt \stackrel{(t'=t+a)}{=} \int_a^\infty f(t')e^{-s(t'-a)}dt' \\ &= e^{sa} \int_a^\infty f(t')e^{-st'}dt' . \end{aligned}$$

Ora, se  $a < 0$ ,

$$\mathcal{L}_s[f(t+a)] = e^{sa} \int_a^\infty f(t')e^{-st'}dt' = e^{sa} \int_0^\infty f(t')e^{-st'}dt' = e^{sa} \mathcal{L}_s[f(t)] .$$

Se invece  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f(t+a)] &= e^{sa} \int_a^\infty f(t')e^{-st'}dt' = e^{sa} \int_0^\infty f(t')e^{-st'}dt' - e^{sa} \int_0^a f(t')e^{-st'}dt' \\ &= e^{sa} \mathcal{L}_s[f(t)] - e^{sa} \int_0^a f(t')e^{-st'}dt' . \end{aligned}$$

#### 4.2.3 Trasformate di Laplace ed equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Come si è detto nel par. 4.1.4 il metodo della trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali lineari si può applicare solo in un numero ristretto di casi, cioè quando il termine noto e la soluzione dell'equazione differenziale sono sommabili. La TL permette di risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$c_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + c_1 \frac{du}{dt} + c_0 u = f(t) \quad (247)$$

per una classe più estesa di funzioni e permette inoltre di tener conto automaticamente delle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= u_1 . \end{aligned} \quad (248)$$

Infatti trasformando secondo Laplace la (247) e ponendo  $\mathcal{L}_s[u(t)] \equiv U(s)$  e  $\mathcal{L}_s[f(t)] \equiv F(s)$  (ammesso che queste esistano), dalle (240,241) si ottiene

$$c_2 [s^2 U(s) - su_0 - u_1] + c_1 [sU(s) - u_0] + c_0 U(s) = F(s) , \quad (249)$$



che dà immediatamente

$$U(s) = \frac{c_2 s u_0 + c_2 u_1 + c_1 u_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} + \frac{F(s)}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}. \quad (250)$$

Antitrasformando si ottiene  $\theta(t)u(t)$ . L'ATL del primo addendo dà la soluzione generale dell'omogenea associata (interpretando  $u_0$  e  $u_1$  come parametri liberi), mentre l'ATL del secondo dà la soluzione particolare dell'inomogenea con condizioni iniziali  $u(0) = u'(0) = 0$ . Notare che la soluzione così ottenuta è particolarmente interessante quando la "sollecitazione esterna"  $f(t)$  sia inserita al tempo  $t = 0$ . In questo caso  $\theta(t)u(t)$  ci dice cosa succede "dopo aver chiuso o aperto l'interruttore". Ovviamente la procedura è estendibile a equazioni differenziali lineari di ordine qualsiasi.

### Esempio 1

Mettiamo alla prova il metodo appena esposto con l'oscillatore armonico non forzato che al tempo  $t = 0$  viene lasciato oscillare. Poniamo  $u(0) = u_0$  e  $u'(0) = u_1$ . L'equazione differenziale è la ben nota

$$u'' + \omega^2 u = 0$$

mentre la (250) ci dà

$$U(s) = \frac{u_0 s + u_1}{s^2 + \omega^2} = u_0 \mathcal{L}_s[\cos \omega t] + \frac{u_1}{\omega} \mathcal{L}_s[\sin \omega t].$$

Si noti come la soluzione  $u(t) = u_0 \cos \omega t + u_1/\omega \sin \omega t$  soddisfi automaticamente le condizioni al contorno.

### Esempio 2

La TL della soluzione di

$$u'' + 4u' + 4u = t^2 e^{-2t}$$

con  $u_0 = u_1 = 0$  è data da

$$U(s) = \frac{\mathcal{L}_s[t^2 e^{-2t}]}{(s+2)^2} = \frac{2}{(s+2)^5}$$

dove abbiamo usato  $\mathcal{L}_s[t^2] = 2/s^3$  e  $\mathcal{L}_s[e^{-2t}f(t)] = \mathcal{L}_{s+2}[f(t)]$ . L'ultima proprietà ci permette di identificare subito  $u(t) = e^{-2t}t^4/12$ , senza dover calcolare l'ATL. Naturalmente, anche questo esempio è risolvibile con altri metodi, per es. con la TF, ma la soluzione appena esposta è rapida e elegante.

*Il circuito RLC con transitorio*

Riprendiamo il circuito oscillante di Fig. 25 e cerchiamo la soluzione dell'equazione differenziale

$$u + RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} = f(t) \quad (251)$$

con le condizioni iniziali

$$u_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} u(t), \quad i_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} C \frac{du}{dt}.$$

Trasformando la (251) secondo Laplace e chiamando  $U(s)$  e  $F(s)$  le trasformate di  $u(t)$  e  $f(t)$  otteniamo

$$U(s) + RC [sU(s) - u_0] + LC \left[ s^2 U(s) - su_0 - \frac{i_0}{C} \right] = F(s). \quad (252)$$

Consideriamo due casi: chiusura e apertura del circuito a  $t = 0$ .

**Chiusura del circuito.** Il circuito, inizialmente aperto (con il condensatore scarico), viene chiuso all'istante  $t = 0$  su un generatore che fornisce una tensione alternata  $Ve^{i\omega t}$  (eventualmente tensione continua, se  $\omega = 0$ ). In questo caso il termine noto è

$$f(t) = \theta(t)Ve^{i\omega t},$$

le condizioni iniziali sono  $u_0 = i_0 = 0$  e la TL di  $f(t)$  è

$$F(s) = \int_0^\infty Ve^{i\omega t} e^{-st} dt = \frac{V}{s - i\omega}.$$

Quindi la (252) fornisce in questo caso:

$$U(s) = \frac{V}{(s - i\omega)(1 + RCs + LCs^2)}. \quad (253)$$

Per ottenere  $u(t)$  dobbiamo antitrasformare la (253), che possiede tre poli semplici in

$$s_0 = i\omega, \quad s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}. \quad (254)$$

Ora, se  $\Delta > 0$ ,  $s_1$  e  $s_2$  giacciono sull'asse reale negativo (perché  $R > 0$ ), se  $\Delta < 0$ ,  $s_1 = s_2^* = -\frac{R}{2L} + \frac{i}{2}\sqrt{-\Delta}$  e se  $\Delta = 0$  i due poli sono reali e coincidenti (polo doppio).

L'antitrasformata di  $U$  vale, secondo la (237),

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{st} U(s) ds, \quad \text{con } r > 0$$

ovvero, se  $s_1 \neq s_2$ ,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{V}{LC} \sum_{i=0,1,2} \text{Res} \left\{ \frac{e^{st}}{(s-i\omega)(s-s_1)(s-s_2)} \right\}_{s=s_i} \\ &= \frac{V}{LC} \left[ \frac{e^{i\omega t}}{(s_1-i\omega)(s_2-i\omega)} + \frac{e^{s_1 t}}{(s_1-i\omega)(s_1-s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2-i\omega)(s_2-s_1)} \right]. \end{aligned}$$

A parte il termine sinusoidale

$$\frac{V}{LC} \frac{e^{i\omega t}}{(s_1-i\omega)(s_2-i\omega)} = \frac{Ve^{i\omega t}/LC}{s_1 s_2 - i(s_1+s_2)\omega - \omega^2} = \frac{Ve^{i\omega t}}{1 + i\omega RC - \omega^2 LC}, \quad (255)$$

che riproduce esattamente la (164), la tensione  $u(t)$  è quindi una somma di funzioni sinusoidali smorzate nel caso  $\Delta < 0$ , mentre per  $\Delta > 0$  è una somma di esponenziali decrescenti. È immediato verificare che a  $t = 0$  le condizioni iniziali sono soddisfatte:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{V}{LC} \left[ \frac{1}{(s_1-i\omega)(s_2-i\omega)} + \frac{1}{(s_1-i\omega)(s_1-s_2)} + \frac{1}{(s_2-i\omega)(s_2-s_1)} \right] = 0 \\ i(0) &= \frac{V}{L} \left[ \frac{i\omega}{(s_1-i\omega)(s_2-i\omega)} + \frac{s_1}{(s_1-i\omega)(s_1-s_2)} + \frac{s_2}{(s_2-i\omega)(s_2-s_1)} \right] = 0, \end{aligned}$$

mentre per  $t \rightarrow +\infty$  (ovvero una volta che il condensatore si sia caricato, quindi per  $t \gg \left| \frac{1}{\text{Res}_1} \right| = \left| \frac{1}{\text{Res}_2} \right| = \frac{R}{2L}$ ) la tensione ai capi del condensatore si riduce a quella sinusoidale (255). Se invece  $s_1 = s_2$ ,  $U(s)$  ha un polo doppio in  $s_1$  e il residuo vale

$$\text{Res} \left\{ \frac{e^{st}}{s(s-s_1)^2} \right\}_{s=s_1} = \frac{d}{ds} \frac{e^{st}}{s} \Big|_{s=s_1} = \frac{te^{st}}{s} - \frac{e^{st}}{s^2} \Big|_{s=s_1} = \frac{e^{s_1 t}}{s_1^2} (s_1 t - 1),$$

dove si è scelto per semplicità  $\omega = 0$ , da cui la soluzione

$$u(t) = \frac{V}{LC} \frac{1}{s_1^2} [1 + e^{s_1 t} (ts_1 - 1)] ,$$

che verifica le condizioni iniziali e per  $t \rightarrow +\infty$  si comporta come nel caso precedente.

**Apertura del circuito.** Se all'istante  $t = 0$  il circuito viene aperto dopo essere stato per lungo tempo a contatto con una batteria a tensione costante  $V$ , si avrà

$$f(t) = 0 \quad \text{per } t > 0,$$

con le condizioni iniziali

$$u_0 = V \quad \text{e} \quad i_0 = 0.$$

L'eq. (252) diventa in questo caso ( $F(s) = 0$ ):

$$U(s)(1 + RCs + LCs^2) = V(RC + sLC)$$

da cui

$$U(s) = V \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = V \frac{s + \frac{R}{L}}{(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Si noti che, per qualunque valore di  $\Delta$ ,  $s_1, s_2 \neq -R/L$ ; quindi non c'è cancellazione fra numeratore e denominatore e  $U(s)$  ha sempre due poli semplici (o un polo doppio). Per  $s_1 \neq s_2$  si ha

$$\begin{aligned} u(t) &= V \sum_{s=s_1, s_2} \text{Res} \left\{ \frac{e^{st} \left( s + \frac{R}{L} \right)}{(s-s_1)(s-s_2)} \right\} \\ &= V \frac{e^{s_1 t} (s_1 + R/L) - e^{s_2 t} (s_2 + R/L)}{s_1 - s_2}, \end{aligned}$$

che soddisfa le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} u(0) &= V \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_2} = V \\ i(t) &= \frac{CV}{s_1 - s_2} \left[ e^{s_1 t} s_1 \left( s_1 + \frac{R}{L} \right) - e^{s_2 t} s_2 \left( s_2 + \frac{R}{L} \right) \right] \Rightarrow i(0) = 0. \end{aligned}$$

Se invece  $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L}$

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{Res} \left\{ \frac{e^{st} \left( s + \frac{R}{L} \right)}{(s-s_1)^2} \right\}_{s=s_1} = V \frac{d}{ds} \left( s + \frac{R}{L} \right) e^{st} \Big|_{s=s_1} \\ &= V \left( 1 + s_1 t + \frac{R}{L} t \right) e^{s_1 t}. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che le condizioni iniziali sono soddisfatte:

$$\begin{aligned} u(0) &= V \\ i(t) &= CV \frac{d}{dt} \left[ \left( 1 + s_1 t + \frac{R}{L} t \right) e^{s_1 t} \right] \\ &= CV \left( s_1^2 t + s_1 t \frac{R}{L} + 2s_1 + \frac{R}{L} \right) e^{s_1 t} \\ &\Rightarrow i(0) = \left( 2s_1 + \frac{R}{L} \right) = 0. \end{aligned}$$

In entrambi i casi, per  $t \rightarrow +\infty$  sia la tensione  $u(t)$  che la corrente  $i(t)$  tendono esponenzialmente a zero, come ci si aspetta. Anche qui  $t \rightarrow +\infty$  significa  $t \gg 2L/R$ .

## SPAZI $L^2$ E DISTRIBUZIONI

Sin dall'inizio del Capitolo 3.2 abbiamo visto l'importante ruolo giocato dalle *relazioni di ortogonalità* (172) nel calcolo dei coefficienti di Fourier. In questo capitolo torneremo su questo argomento trattandolo in modo più approfondito, e ciò ci permetterà di dare una definizione di convergenza delle serie (e della trasformata) di Fourier più generale. Allargheremo inoltre il campo delle funzioni introducendo il concetto di *distribuzione*; riusciremo così a derivare funzioni anche nei loro punti di discontinuità di I specie e ad ampliare il campo delle funzioni che ammettono TF.

### 5.1 SPAZI $L^2$ E SERIE DI FOURIER

L'insieme di tutte le *funzioni a valori complessi* in un intervallo reale  $[a, b]$  costituisce uno *spazio vettoriale*, ovvero *spazio lineare*, sui complessi. Ogni funzione rappresenta quindi **un** vettore e lo spazio vettoriale si chiama *spazio funzionale*; la somma di vettori e il prodotto per un numero complesso sono definiti dalle corrispondenti operazioni sulle funzioni. Nello spazio funzionale si può inoltre definire il **prodotto scalare** di due vettori,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , come

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx . \quad (256)$$

Per aiutare la memoria, è utile notare l'analogia fra l'integrale (256) e la consueta definizione

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_i f_i^* g_i . \quad (257)$$

di prodotto scalare negli spazi vettoriali (sui complessi) di dimensione finita; negli spazi funzionali la variabile  $x$  gioca un ruolo analogo a quello dell'indice  $i$  che individua la componente  $i$ -esima; la somma su  $i$  è sostituita dall'integrale perché "l'indice"  $x$  corre su un insieme continuo, l'intervallo  $[a, b]$ .

L'integrale (256) soddisfa le proprietà del prodotto scalare negli **spazi unitari** (cioè negli spazi vettoriali su  $\mathbb{C}$  dotati appunto di prodotto scalare) :

1. **linearità** nel secondo fattore:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \alpha \mathbf{g} + \beta \mathbf{h}) &= \int_a^b f^*(x) [\alpha g(x) + \beta h(x)] dx \\ &= \alpha \int_a^b f^*(x)g(x)dx + \beta \int_a^b f^*(x)h(x)dx \\ &= \alpha(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \beta(\mathbf{f}, \mathbf{h}) . \end{aligned}$$

2. **Hermiticità:**

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})^* = \left[ \int_a^b f^*(x)g(x)dx \right]^* = \int_a^b f(x)g^*(x)dx = (\mathbf{g}, \mathbf{f}) ,$$

che si riduce alla commutatività nel caso di spazio vettoriale sui reali.

3. **Positività:**

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0 , \quad (258)$$

La radice quadrata del numero non negativo  $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$  si dice **norma** del vettore  $\mathbf{f}$ :

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} \quad (259)$$

È la richiesta di positività della norma a imporre che nelle definizioni (256) e (257) le componenti del primo vettore siano soggette alla complessa coniugazione. Dalle proprietà 1. e 2. segue che il prodotto scalare (256) è **antilineare** nel primo fattore:

$$(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}, \mathbf{h}) = \alpha^* (\mathbf{f}, \mathbf{h}) + \beta^* (\mathbf{g}, \mathbf{h}) .$$

Vale inoltre per il prodotto scalare la seguente disuguaglianza, detta *disuguaglianza di Schwarz*:

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{g})| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\| . \quad (260)$$

La disuguaglianza di Schwarz si può considerare come un'estensione agli spazi funzionali della ben nota disuguaglianza della geometria euclidea  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |ab \cos \vartheta| \leq ab$ , dove  $a$  e  $b$  sono le lunghezze (*norme*) dei due vettori e  $\vartheta$  l'angolo compreso.

È importante osservare che la definizione (256) di prodotto scalare ha senso solo se le funzioni che consideriamo sono **quadrato sommabili** cioè se esiste l'integrale (258) che definisce la norma di un vettore. Infatti, in virtù della (260) l'esistenza della norma di due vettori implica l'esistenza del loro prodotto scalare.

Il prodotto scalare deve ancora soddisfare una proprietà: l'eguaglianza nella (258) deve valere *se e solo se*  $f(x) = 0$ . Ma anche una funzione nulla ovunque tranne che in alcuni punti isolati ha norma nulla. Occorre essere precisi al riguardo, e dobbiamo anche dire che nella definizione di prodotto scalare, e quindi di norma, si deve usare una generalizzazione dell'integrale di Riemann dovuta a Lebesgue. Per i nostri scopi non è necessario definire l'**integrale di Lebesgue**, ma è sufficiente enunciarne alcune proprietà.

**Proprietà A:** ogni funzione assolutamente integrabile alla Riemann, in modo proprio o improprio, lo è anche alla Lebesgue e i due integrali coincidono.

Viceversa, se in un punto  $x_0 \in [a, b]$  una funzione diverge troppo per essere integrabile alla Riemann (per esempio una  $f(x) = O(x^\alpha)$  per  $x \rightarrow 0$ , con  $\alpha \leq -1$ ,

su un intervallo d'integrazione comprendente l'origine) allora non è nemmeno integrabile alla Lebesgue. Analogamente, se all'infinito una funzione va a zero troppo lentamente per essere integrabile alla Riemann su intervallo infinito (per esempio una  $f(x) = O(x^\alpha)$  per  $x \rightarrow \infty$ , con  $\alpha \geq -1$ ), allora non è nemmeno integrabile alla Lebesgue.

**Proprietà B:** *come per l'integrale di Riemann, ogni funzione assolutamente integrabile è anche integrabile, ma per l'integrale di Lebesgue vale anche il viceversa*<sup>1</sup>.

Grazie alla proprietà A, per calcolare un integrale alla Lebesgue di fatto si continua a calcolare il solito integrale di Riemann. Perché allora complicarci la vita con l'integrale di Lebesgue? La ragione è che esistono delle funzioni piuttosto bizzarre che sono **sommabili**, cioè integrabili alla Lebesgue, senza esserlo alla Riemann<sup>2</sup>; tali funzioni, del tutto prive di interesse per la fisica, sono però essenziali per rendere *completo* lo spazio funzionale, nel senso che preciseremo fra poco.

Un esempio di tali funzioni è la funzione di Dirichlet, così definita su tutto l'asse reale:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

dove  $\mathbb{Q}$  è l'insieme dei numeri razionali. Si può dimostrare che tale funzione, che evidentemente non è integrabile alla Riemann, è però sommabile e che il suo integrale di Lebesgue vale zero. La funzione di Dirichlet è diversa da zero solo sui razionali, cioè su un'infinità numerabile di punti; il fatto che il suo integrale si annulli è un caso particolare della più generale

**Proprietà C:** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione a valori reali non negativi abbia integrale di Lebesgue nullo è che essa sia "quasi ovunque" nulla nell'intervallo (finito o infinito) di integrazione; dicendo che una proprietà vale **quasi ovunque** (che si abbrevia con q.o.) su un intervallo si intende che l'insieme dei punti in cui non vale sia di misura nulla, cioè, in pratica, finito o infinito numerabile*<sup>3</sup>.

Come conseguenza della Proprietà C si può allora affermare che il **vettore nullo** (cioè il vettore di norma nulla, che vogliamo sia unico) è rappresentato dall'intera classe delle funzioni quasi ovunque nulle; analogamente, a ogni *vettore* dello spazio astratto corrisponde una *classe di funzioni quasi ovunque uguali* quadrato sommabili; tale spazio, dotato del prodotto scalare (256)<sup>4</sup>, si denota con il simbolo  $L^2(a, b)$ . Si

<sup>1</sup> L'assoluta integrabilità implica l'integrabilità alla Lebesgue solo nell'ipotesi che la funzione sia "misurabile", ma questo è il caso per tutte le funzioni di interesse in fisica; quindi daremo sempre per scontata la misurabilità, senza nemmeno preoccuparci di definirla.

<sup>2</sup> Inoltre l'integrale di Lebesgue gode di proprietà, discusse in Appendice C, che rendono molto più semplice derivare sotto il segno, scambiare il limite con l'integrale e scambiare l'ordine d'integrazione in integrali multipli.

<sup>3</sup> Nel piano, un insieme di misura nulla può essere costituito non solo da un'infinità numerabile di punti, ma anche da un numero finito o infinito numerabile di segmenti (o curve differenziabili) e così via.

<sup>4</sup> che evidentemente non dipende da quale funzione si sceglie per rappresentare la classe.

denota invece con  $L(a, b)$  lo spazio delle funzioni *sommabili*<sup>5</sup>. Si verifica rapidamente che lo spazio  $L^2(a, b)$  è chiuso: ogni combinazione lineare a coefficienti complessi di suoi elementi è ancora quadrato sommabile in  $(a, b)$ .

**Se e solo se** l'intervallo  $(a, b)$  è **finito** vale  $L^2(a, b) \subset L(a, b)$ , ovvero ogni funzione quadrato sommabile, su un intervallo finito, è ivi anche sommabile; per convincersene basta l'identità

$$\int_a^b f(x) dx = (\mathbf{1}, \mathbf{f}) ,$$

dove con  $\mathbf{1}$  intendiamo il vettore corrispondente alla funzione  $g(x) = 1$ , che è sommabile su ogni intervallo *finito*. Non è invece vero che ogni funzione sommabile sia quadrato sommabile; per esempio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L(0, 1) \quad \text{ma} \quad \notin L^2(0, 1) .$$

Su intervallo *infinito* non esiste invece alcuna relazione di inclusione fra  $L$  e  $L^2$ ; per esempio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(0, \infty) \quad \text{ma} \quad \notin L(0, \infty) . \quad (261)$$

mentre invece

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \in L(0, \infty) \quad \text{ma} \quad \notin L^2(0, \infty)$$

a causa della divergenza in  $x = 0$ .

Due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  appartenenti a  $L^2(a, b)$  si definiscono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx = 0 .$$

Un sistema di funzioni  $\{\phi_i(x)\} \in L^2(a, b)$  si definisce *ortonormale* (ON) se

$$(\phi_i, \phi_k) = \int_a^b \phi_i^*(x)\phi_k(x)dx = \delta_{ik} , \quad \forall i, k .$$

Sia  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  un sistema ortonormale finito di  $L^2(a, b)$  e sia  $f(x) \in L^2(a, b)$  definita da:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \quad (262)$$

o equivalentemente, in linguaggio vettoriale:

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k , \quad (263)$$

<sup>5</sup> In  $L(a, b)$  non è definito il prodotto scalare, anche se è ancora uno spazio vettoriale *normato* perchè si può definirvi la norma.



dove  $c_k$  sono arbitrari numeri complessi. Le componenti  $c_i$  del vettore  $\mathbf{f}$  lungo le direzioni  $\phi_i$  si calcolano subito moltiplicando scalarmente la (263) per il vettore  $\phi_i$ ; si ottiene:

$$(\phi_i, \mathbf{f}) = \int_a^b \phi_i^*(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k (\phi_i, \phi_k) = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{ik} = c_i .$$

Questo risultato era ovviamente atteso, poiché stiamo lavorando in uno spazio a numero finito di dimensioni, la varietà  $n$ -dimensionale generata dai vettori  $\phi_1, \dots, \phi_n$ . In  $L^2(a, b)$  esistono però sistemi ON formati da un'infinità numerabile di vettori; per esempio la eq.(172) mostra che in  $L^2(0, 2\pi)$  le funzioni trigonometriche (in forma esponenziale)

$$\phi_l(x) = \frac{e^{ilx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (264)$$

formano un sistema ON infinito numerabile. Per estendere la (262) al caso in cui  $n$  sia infinito, bisogna affrontare il problema della convergenza della serie, e questo è l'argomento centrale di questo paragrafo.

Se  $\{\phi_i, i = 1, 2, \dots\}$  è un insieme infinito numerabile di funzioni ortonormali di  $L^2(a, b)$  e  $\forall f(x) \in L^2(a, b)$ , consideriamo dapprima la proiezione ortogonale  $\mathbf{f}_N$  del vettore  $\mathbf{f}$  sul sottospazio generato dai vettori ON  $\phi_1, \dots, \phi_N$ . Essa è data da

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad N = 1, 2, \dots, \quad (265)$$

con

$$c_i = (\phi_i, \mathbf{f}) \equiv \int_a^b \phi_i^*(x) f(x) dx, \quad (266)$$

e si dice ridotta  $N$ -esima dello **sviluppo in serie generalizzata di Fourier** del vettore  $\mathbf{f}$  nel sistema  $\{\phi_i\}$ , mentre le costanti  $c_i$  sono i **coefficienti generalizzati di Fourier** dello sviluppo.

Dimostriamo innanzitutto la **disuguaglianza di Bessel**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq (\mathbf{f}, \mathbf{f}) . \quad (267)$$

Dalla positività della norma  $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_N\|^2 \geq 0$  segue che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_N\|^2 &= (\mathbf{f}, \mathbf{f}) + \sum_{k,l=1}^N c_k^* c_l (\phi_k, \phi_l) - \sum_{k=1}^N [c_k (\mathbf{f}, \phi_k) + c_k^* (\phi_k, \mathbf{f})] \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{f}) + \sum_{k=1}^N |c_k|^2 - \sum_{k=1}^N (c_k c_k^* + c_k^* c_k) \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \geq 0 , \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq (\mathbf{f}, \mathbf{f}) .$$

Questo risultato vale per qualunque  $N$ . Facendo tendere  $N$  a infinito si ottiene infine la disuguaglianza di Bessel (267): la serie dei moduli quadrati dei coefficienti di Fourier di un vettore  $\mathbf{f}$  è minore o uguale alla norma quadrata del vettore.

Se il sistema di vettori  $\{\boldsymbol{\phi}_k\}$  è tale che la disuguaglianza di Bessel vale con il segno = per ogni  $\mathbf{f}$ , allora il sistema di vettori  $\{\boldsymbol{\phi}_k\}$  si dice **completo** e costituisce una **base** ON in  $L^2(a, b)$ . La (267) diventa allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \quad (268)$$

e prende il nome di **equazione di Parseval**, come già visto per le serie di Fourier.

In uno spazio unitario a  $N$  dimensioni un sistema ON è completo se e solo se è costituito da  $N$  vettori; un insieme infinito numerabile invece non cambia il "numero" dei suoi elementi (la sua potenza) anche se da esso si tolgono uno o più elementi; quindi l'unico criterio che assicura di non aver "perso" dei vettori base, cioè che il sistema sia *completo*, è, come abbiamo appena detto, che sia soddisfatta l'equazione di Parseval (268), che generalizza il Teorema di Pitagora agli spazi infinito dimensionali.

Uno spazio unitario infinito dimensionale in cui esista un sistema ON completo *infinito numerabile* si dice **separabile**; si può dimostrare che  $L^2(a, b)$  è separabile, qualunque sia l'intervallo  $(a, b)$ , finito o infinito; in particolare per  $(a, b) = (0, 2\pi)$  un sistema completo è dato dalle funzioni trigonometriche (264). Si può dire che uno spazio separabile ha dimensione infinita numerabile.

L'equazione di Parseval ci permette anche di dare un senso preciso alla convergenza della serie di Fourier. Infatti da:

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_N\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \sum_{k=1}^N |c_k|^2$$

e dall'equazione di Parseval (268) segue che, se il sistema  $\{\boldsymbol{\phi}_k\}$  è completo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_N\|^2 = 0.$$

Per **definizione** di limite nello spazio vettoriale astratto, l'equazione (269) è equivalente alla scrittura:

$$\mathbf{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{f}_N = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{\phi}_k. \quad (269)$$

Abbiamo così definito la somma della serie di Fourier nello spazio vettoriale astratto; in termini di funzioni la (269) significa:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0, \quad (270)$$

dove la ridotta  $N$ -esima della serie di Fourier è data dalla (265) con i coefficienti (266). La (270) si abbrevia nel modo seguente:

$$f(x) = l.i.m._{N \rightarrow \infty} f_N(x), \quad (271)$$

dove *l.i.m.* si legge per **limite in media quadratica**. La convergenza della serie di Fourier si può quindi esprimere nei 5 modi (268)–(271), tutti perfettamente equivalenti.

Molto spesso si scrive più semplicemente:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x), \quad (272)$$

ma l'espressione (272) è corretta solo se interpretata come un'abbreviazione della (271); in generale, la serie dei *numeri complessi* a secondo membro della (272) può non convergere, o convergere a un valore diverso dal numero complesso  $f(x)$ ; infatti le eq. (270) o (271) non ci dicono nulla sulla convergenza puntuale della serie a secondo membro della eq.(272), come era da aspettarsi, visto che alla funzione  $f(x)$  corrisponde una di una classe di funzioni quasi ovunque uguali; per esempio, se in un punto  $x_0$  si aggiunge a  $f(x_0)$  una costante, non cambia nulla nei coefficienti di Fourier  $c_i$  dati dalla (266) e quindi nel secondo membro della eq.(272), ma ovviamente cambia il primo membro.

In realtà non solo la convergenza in media quadratica non implica quella puntuale, ma non vale neppure il contrario. Per convincersene basta considerare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2n^{3/4}}{(\pi/2)^{1/4}} x e^{-nx^2}$$

il cui limite puntuale per  $n \rightarrow \infty$  è  $f(x) = 0, \forall x$ . Consideriamo il limite in media quadratica della differenza  $f - f_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0,$$

cioè il limite in media delle  $f_n$  non è la funzione nulla.

La convergenza (271) richiede solo che  $f \in L^2(a, b)$  e che il sistema  $\{\phi_i\}$  sia ONC; la convergenza puntuale della (272) in uno specifico punto  $x_0 \in [a, b]$  richiede invece ben altre condizioni su  $f$ , discusse nel Cap. 3.2 nel caso particolare della serie trigonometrica di Fourier.

La convergenza in media è anche molto diversa dalla *convergenza uniforme*. Non è difficile realizzare che la convergenza uniforme implica quella in media quadratica. Infatti  $\{f_n\}$  converge a  $f$

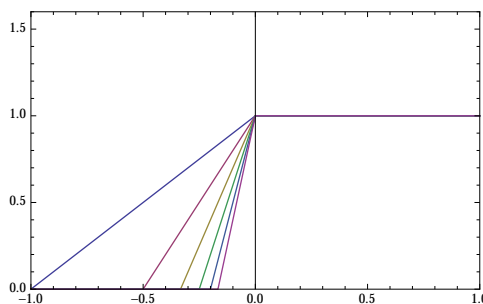


Figura 27.: La convergenza in media *non* implica quella uniforme: le  $f_n$  di (273).

uniformemente nell'intervallo  $[a, b]$  se  $\forall \epsilon > 0$  esiste un intero  $N$  tale che  $\forall n > N$   $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Questo implica che

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx < \epsilon(b-a),$$

che può essere reso piccolo a piacere e quindi garantisce la convergenza in media a partire da quella uniforme. Il contrario non è invece vero in generale, come illustrato dall'esempio in Fig. 27. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq -1/n \\ nx + 1 & -1/n < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (273)$$

dove le  $f_n$  sono funzioni continue che convergono in media alla funzione scalino  $\theta(x)$ . Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta(x) - f_n(x)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |\theta(x) - f_n(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^0 (nx + 1)^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0$$

Tuttavia, in virtù di un noto teorema sulle successioni, se le funzioni continue  $f_n(x)$  convergessero uniformemente la funzione limite sarebbe anch'essa continua, a differenza della  $\theta(x)$ .

L'esempio di Fig. 27 ci introduce anche a un argomento di grande importanza per la fisica: quello della completezza dello spazio funzionale. Nell'esempio una successione di funzioni continue converge in media a una funzione discontinua: evidentemente lo spazio delle funzioni continue in  $(a, b)$  non è *completo*, nello stesso senso in cui diciamo che il campo  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali non è completo perchè esistono successioni (di Cauchy) di razionali che convergono a numeri non razionali, come  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = e$ .

Il **teorema di Riesz-Fischer** assicura che lo spazio  $L^2(a, b)$ , come  $\mathbb{R}$ , è **completo**<sup>6</sup>, cioè che ogni successione di Cauchy  $f_n$  di funzioni di  $L^2(a, b)$  (una successione cioè tale che  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) / \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > N(\epsilon), \|f_n - f_m\| < \epsilon$ ) ha limite in  $L^2(a, b)$ . In altre parole, ogni successione di Cauchy in  $L^2(a, b)$  converge in media a una funzione dello stesso spazio funzionale.

<sup>6</sup> Qui la parola *completo* viene usata in due contesti diversi: la completezza dello spazio e la completezza di un sistema di funzioni o vettori. Si tratta di concetti diversi che non vanno confusi.

Un enunciato equivalente dello stesso teorema è: per ogni sequenza infinita di numeri complessi  $c_i$  tale che  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ , esiste una  $\mathbf{f} \in L^2(a, b)$  che può essere scritta come  $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \boldsymbol{\phi}_i$ . Per la dimostrazione di questo teorema è cruciale che l'integrale sia di Lebesgue e che vengano incluse nello spazio funzionale anche funzioni non integrabili alla Riemann.

Uno spazio vettoriale sui complessi, dotato di prodotto scalare e *completo*, si dice **spazio di Hilbert**. Gli spazi di Hilbert possono essere finito (come  $\mathbb{C}^2$ ) o infinito dimensionali, e in quest'ultimo caso possono essere separabili o meno.

La **completezza** di uno spazio, in particolare dello spazio  $L^2(a, b)$ , e la sua **separabilità**, permettono di stabilire una corrispondenza biunivoca fra i suoi elementi  $\mathbf{f}$  e gli insiemi infiniti numerabili dei loro coefficienti di Fourier  $c_i$ , che possiamo considerare come le componenti di un vettore rispetto alla base  $\boldsymbol{\phi}_i$  prefissata.

È facile mostrare che tale corrispondenza conserva i prodotti scalari: se  $f(x) = \sum_i c_i \phi_i$  e  $g(x) = \sum_i d_i \phi_i$ , allora

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b f^*(x)g(x) dx = \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i \boldsymbol{\phi}_i, \mathbf{g} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^* (\boldsymbol{\phi}_i, \mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^* d_i, \quad (274)$$

dove si sono usate l'antilinearità e la continuità<sup>7</sup> del prodotto scalare nel primo fattore. Quindi tutti gli spazi di Hilbert infinito dimensionali e separabili, in particolare gli spazi  $L^2(a, b)$ , sono **isomorfi** fra loro e con lo *spazio di Hilbert delle componenti*, i cui elementi sono i vettori colonna di componenti  $c_i$ , con  $i = 1, 2, \dots$ , con il vincolo  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ ; le proprietà di uno spazio si traducono in corrispondenti proprietà dell'altro.

<sup>7</sup> La continuità del prodotto scalare, cioè l'uguaglianza  $(\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{f}_N, \mathbf{g}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{f}_N, \mathbf{g})$ , può essere facilmente dimostrata a partire dalla disuguaglianza di Schwarz (260) e dalla definizione (269) di  $\mathbf{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{f}_N$ .

## 5.2 ALCUNI SISTEMI ONC

Passiamo ora a considerare alcuni esempi di spazi  $L^2$  e di sistemi ONC al loro interno.

*Le funzioni trigonometriche*

Il sistema delle funzioni esponenziali

$$\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (275)$$

che avevamo già visto in (264), si dimostra essere una base ON in  $L^2(0, 2\pi)$  e in qualsiasi spazio  $L^2$  su intervallo di estensione  $2\pi$ ,  $L^2(a, a + 2\pi)$ . Usando le formule di Eulero, esso può essere riscritto come **sistema trigonometrico**:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}; n = 1, 2, \dots \right\} \quad (276)$$

Vale la pena di osservare che per *ogni* funzione di  $L^2(0, 2\pi)$  la convergenza in media della serie di Fourier è garantita, e che non è necessario richiedere la periodicità. Vista nel contesto dello spazio funzionale, la serie di Fourier acquista un carattere diverso (convergenza in media quadratica) e si applica a una classe diversa di funzioni (tutte e solo quelle quadrato sommabili).

*Il sistema delle potenze e i polinomi ortogonali*

Oltre al sistema delle funzioni trigonometriche, di cui ci siamo occupati finora, un altro esempio di sistema completo in uno spazio  $L^2$  è il sistema delle potenze

$$\{x^n\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \quad (277)$$

Si può dimostrare che il sistema (277) è completo in  $L^2(a, b)$  per ogni intervallo *finito*  $(a, b)$ .<sup>8</sup>

I passi fondamentali della dimostrazione sono i seguenti:

- Il teorema di Weierstrass ci assicura che se  $g(x)$  è continua in  $[a, b]$  esiste una successione di polinomi  $P_n(x)$  di grado  $n$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = g(x)$  uniformemente in  $[a, b]$ . Si noti che i coefficienti delle potenze di  $x$  dipendono da  $n$ , a differenza che in una serie di Taylor. La convergenza uniforme implica quella in media quadratica, per cui  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - P_n\| = 0$ .
- Si prova che  $\forall f \in L^2(a, b)$  può essere approssimata in media quadratica bene quanto si vuole da una  $g(x)$  continua in  $[a, b]$ .
- Si scrive  $f - P_n = (f - g) + (g - P_n)$  da cui segue  $\|f - P_n\| \leq \|f - g\| + \|g - P_n\|$ , ma entrambi i termini a secondo membro possono essere resi piccoli a piacere in virtù dei due punti precedenti per  $n \rightarrow \infty$ , e quindi la norma di  $f - P_n$  può essere resa piccola a piacere, cioè esiste per ogni  $f \in L^2(a, b)$  una successione di polinomi  $P_n$ , cioè combinazioni lineari di potenze, che converge in media a  $f$ .

<sup>8</sup> Si veda per es. Byron e Fuller, p. 229-235, o Rossetti, p. 297.

Evidentemente, il sistema delle potenze non è ortogonale:

$$\int_a^b x^n x^m dx \neq 0 \quad (278)$$

anche per  $n \neq m$ . È possibile tuttavia ortogonalizzarlo, passando dalle funzioni  $x^n$  alle loro combinazioni lineari, i *polinomi*  $P_n(x)$ , costruiti in modo tale che<sup>9</sup>

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) dx = h_n \delta_{nm} .$$

A questo scopo si sceglie  $P_0(x) = 1$ , si pone  $P_1(x) = x + \alpha$  e si fissa  $\alpha$  in modo che  $P_1(x)$  sia ortogonale a  $P_0(x)$ ; poi si pone  $P_2(x) = x^2 + \beta x + \gamma$  e si fissano  $\beta$  e  $\gamma$  in modo che  $P_2(x)$  sia ortogonale a  $P_1(x)$  e a  $P_0(x)$ , e così via. È ovvio che i coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  dipenderanno dall'intervallo  $(a, b)$  che definisce  $L^2(a, b)$ ; inoltre i polinomi  $P_n(x)$  così ottenuti potranno essere moltiplicati per opportune costanti per normalizzarli a 1 o a un'altra costante  $h_n$  a scelta.

Il sistema di **polinomi ortogonali** così ottenuto è unico (a meno di una costante di modulo 1 davanti a ogni polinomio) per ogni intervallo  $(a, b)$  e completo in  $L^2(a, b)$ . Di conseguenza  $\forall f(x) \in L^2(a, b)$  può essere approssimata in media quadratica, bene quanto si vuole, con una serie di polinomi ortogonali:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x) .$$

Per esempio nell'intervallo  $(-1, 1)$  la procedura di ortogonalizzazione conduce ai **polinomi di Legendre**, definiti dalla formula di Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n , \quad (279)$$

dove si è usata la normalizzazione convenzionale:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} . \quad (280)$$

Come possiamo essere sicuri che la formula di Rodrigues e la procedura di ortogonalizzazione conducano agli stessi polinomi, eventualmente a meno di una costante di normalizzazione? Verifica diretta a parte, è sufficiente mostrare che i polinomi dati dalla (279) sono ortogonali. Infatti l'ortogonalizzazione ha un'unica soluzione, ed esiste un solo polinomio di grado  $n$  ortogonale a tutti quelli di grado inferiore. Per dimostrare che  $(P_m, P_n) = 0$  per  $n \neq m$  basta scrivere, per  $m < n$

$$(P_m, P_n) = \text{cost} \int_{-1}^1 dx P_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \text{cost} \int_{-1}^1 dx \left[ \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \right] (x^2 - 1)^n , \quad (281)$$

dove si è integrato  $n$  volte per parti tenendo conto che i contributi negli estremi si annullano poiché

$$\left. \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^n \right|_{-1}^{+1} = 0 \text{ per ogni } l \leq n-1 ,$$

<sup>9</sup> Per ragioni di comodità e tradizione non sempre le costanti positive  $h_n$  sono scelte uguali a 1.

e accorgersi che

$$\frac{d^n}{dx^n} P_m(x) = 0 \quad \forall n \geq m+1.$$

Dalla (279) segue che i primi polinomi di Legendre sono

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

Inoltre è facile dimostrare che i polinomi di Legendre obbediscono all'**equazione differenziale di Legendre**

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (282)$$

che si può scrivere nella forma compatta

$$\mathcal{L}_x P_n(x) = \lambda_n P_n(x) \quad \text{con } \mathcal{L}_x = \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx} \text{ e } \lambda_n = n(n+1). \quad (283)$$

**Dimostrazione:**  $F_n(x) = \left[ \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx} \right] P_n(x)$  è ancora evidentemente un polinomio di grado  $n$ ; può quindi essere scritto nella forma

$$F_n(x) = \sum_{l=0}^n \alpha_l^{(n)} P_l(x) \quad (284)$$

con gli  $\alpha_l^{(n)}$  proporzionali a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_l(x) F_n(x) &= \int_{-1}^1 dx P_l(x) \frac{d}{dx}(x^2-1) \frac{d}{dx} P_n(x) \\ &= - \int_{-1}^1 dx \left[ (x^2-1) \frac{d}{dx} P_l(x) \right] \frac{d}{dx} P_n(x) = \int_{-1}^1 dx F_l(x) P_n(x), \end{aligned}$$

dove si è ripetutamente integrato per parti; usando di nuovo la (284) e la (280) si ricava subito che  $\alpha_l^{(n)} = 0$  per  $l < n$ ; che  $\alpha_n^{(n)}$  valga proprio  $n(n+1)$  segue dal conto esplicito della potenza più alta di  $F_n$ :

$$\frac{d}{dx}(x^2-1) \frac{d}{dx} x^n + \dots = \frac{d}{dx}(x^2-1) n x^{n-1} + \dots = n \frac{d}{dx} x^{n+1} + \dots = n(n+1)x^n + \dots$$

### *Polinomi ortogonali su intervallo infinito*

Se l'intervallo è infinito non è possibile utilizzare direttamente le potenze perché esse non sono quadrato sommabili (l'integrale (278) non esiste). Tuttavia sull'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  si può introdurre un fattore di convergenza  $e^{-x^2}$ , definire il sistema di funzioni  $\{e^{-x^2/2} x^n\}$ , quadrato sommabili sull'asse reale qualunque sia  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e ortogonalizzarlo secondo il metodo appena descritto. Questo conduce ai **polinomi di Hermite**, dati dalla formula di Rodrigues generalizzata

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (285)$$



e normalizzati come abbiamo visto in (123). L'ortogonalità dei polinomi dati dalla (285) si dimostra come per i polinomi di Legendre. I primi polinomi di Hermite sono

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \dots$$

L'equazione differenziale a cui obbediscono i polinomi (285) è l'**equazione differenziale di Hermite**:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots,$$

ovvero

$$e^{x^2} \left[ \frac{d}{dx} e^{-x^2} \frac{d}{dx} \right] H_n(x) = -2nH_n(x),$$

mentre le funzioni associate di Hermite

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (286)$$

che formano una **base ortogonale** in  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ , sono soluzioni dell'equazione dell'*oscillatore armonico quantistico*:

$$\mathcal{L}_x \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad \text{con } \mathcal{L}_x = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \quad \text{e} \quad \lambda_n = 2n + 1, \quad (287)$$

che si dimostra in stretta analogia alla (283). L'esistenza del sistema ONC (286), ovviamente numerabile, implica che anche lo spazio delle funzioni quadrato sommabili sull'intero asse reale è **separabile**.

### 5.3 SISTEMI ONC IN $L^2$ E DISTRIBUZIONI.

#### 5.3.1 Operatori autoaggiunti e sistemi ortogonali

Abbiamo dato qualche esempio di sistemi ONC, ma ci si può chiedere se esista un modo più generale per costruirli. Per rispondere a questa domanda osserviamo che i polinomi di Legendre  $\{P_n\}$  e le funzioni associate di Hermite  $\{\psi_n\}$ , che sono sistemi ONC in un opportuno spazio  $L^2(a, b)$ , condividono la proprietà di essere autofunzioni di un operatore differenziale  $\mathcal{L}$ , la cui espressione è data rispettivamente da eq. (283) e eq. (287). Come vedremo tra poco, l'operatore  $\mathcal{L}$ , munito di opportune condizioni al contorno, è in entrambi i casi **autoaggiunto**.

Sia  $A$  un operatore lineare in uno spazio unitario finito-dimensionale. L'operatore aggiunto o *hermitiano coniugato*  $A^\dagger$  di  $A$  è definito dalla relazione

$$(A^\dagger y, x) = (y, Ax),$$

per ogni  $x, y$  nel dominio di definizione di  $A$ . In termini di matrici che rappresentano  $A$ , si ha  $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$ . Infatti il prodotto scalare  $(y, x)$  di due vettori  $x$  e  $y$  può essere scritto come  $\sum_k y_k^* x_k$  e quindi, chiamando  $A^T$  la trasposta di  $A$ ,

$$(y, Ax) = \sum_k y_k^* (Ax)_k = \sum_{k,j} (y_k^* A_{kj}) x_j = \sum_j (A^T y^*)_j x_j = (A^\dagger y, x).$$

Valgono inoltre  $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ ,  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ,  $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$  per  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $(A^\dagger)^\dagger = A$ . Se  $A = A^\dagger$ , l'operatore  $A$  si dice **hermitiano o autoaggiunto** e

$$(Ay, x) = (y, Ax).$$

Un operatore hermitiano ha autovalori reali, i suoi autovettori corrispondenti a autovalori differenti sono ortogonali, e si possono scegliere gli autovettori in modo da formare una base completa ortonormale dello spazio.

Nel caso dello spazio di Hilbert infinito dimensionale che stiamo studiando un operatore differenziale  $\mathcal{L}$  è un operatore lineare. Tuttavia il suo dominio non coincide generalmente con tutto lo spazio  $L^2(a, b)$ , come pure il suo codominio, perchè l'azione di  $\mathcal{L}$  è definita solo su funzioni ( $n$ -volte) derivabili, mentre molte funzioni quadrato sommabili non sono derivabili. Eppure tutti i sistemi ONC che abbiamo considerato sono costituiti da funzioni infinitamente derivabili: essi possono essere ottenuti come autofunzioni di operatori differenziali autoaggiunti, come vedremo ora.

Un operatore differenziale  $\mathcal{L}$  è autoaggiunto se

$$(\mathbf{u}, \mathcal{L}\mathbf{v}) = (\mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv (\mathbf{v}, \mathcal{L}\mathbf{u})^*, \quad (288)$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$  nel dominio di definizione di  $\mathcal{L}$ . Questa proprietà non dipende solo da  $\mathcal{L}$  ma anche dal suo dominio. Infatti il dominio di  $\mathcal{L}$  deve comprendere solo quelle funzioni che, oltre a essere derivabili quanto basta, sono anche limitate e quadrato sommabili, cosicché si possa ripetutamente integrare per parti in modo da poter dimostrare la (288). Per esempio in  $L^2(-1, 1)$  abbiamo visto che i polinomi di Legendre soddisfano la (283). L'operatore differenziale  $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx}$  è autoaggiunto:

$$(\mathbf{u}, \mathcal{L}\mathbf{v}) = \int_{-1}^1 u^*(x) \frac{d}{dx} \left[ (x^2 - 1) \frac{d}{dx} v(x) \right] dx = (\mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (289)$$

dove abbiamo integrato due volte per parti e i termini di superficie si sono annullati in entrambi i casi. L'operatore  $\mathcal{L}$  è quindi autoaggiunto.

Anche nel caso delle funzioni associate di Hermite in  $L^2(\mathbb{R})$ , l'operatore differenziale di cui sono autofunzioni (autovettori) è autoaggiunto:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathcal{L}\mathbf{v}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x) \mathcal{L}v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x) \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) v(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) u(x) \right]^* v(x) dx, \end{aligned}$$

e lo stesso vale anche per  $\mathcal{L} = -i\frac{d}{dx}$ , le cui autofunzioni sono esponenziali complessi  $e^{i\lambda x}$ , con **condizioni al contorno periodiche**  $u(\pi) = u(-\pi)$ . Infatti

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathcal{L}\mathbf{v}) &= \int_{-\pi}^{+\pi} dx u^*(x) \left( -i\frac{d}{dx} \right) v(x) = -i u^*(x) v(x) \Big|_{-\pi}^{+\pi} \\ &+ \int_{-\pi}^{+\pi} dx \left[ i\frac{d}{dx} u^*(x) \right] v(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} dx \left[ -i\frac{d}{dx} u(x) \right]^* v(x) \\ &= (\mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) . \end{aligned}$$

Notare l'importanza delle condizioni al contorno periodiche per l'annullarsi del contributo agli estremi nell'integrazione per parti.

Siano ora  $\phi_{n,m}$  due autofunzioni di  $\mathcal{L}$  autoaggiunto con autovalori  $\lambda_{n,m}$ . Confrontando  $(\phi_n, \mathcal{L}\phi_n) = \lambda_n(\phi_n, \phi_n)$  con la sua complessa coniugata e usando la (288) si vede subito che

**gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali.**

Inoltre

**l'insieme delle autofunzioni degli operatori autoaggiunti è ortogonale,**

infatti

$$\mathcal{L}\phi_n = \lambda_n\phi_n \quad , \quad \mathcal{L}\phi_m = \lambda_m\phi_m \quad ,$$

moltiplicando scalarmente la prima equazione per  $\phi_m$  e la seconda per  $\phi_n$ , usando la (288) e sottraendo dalla prima equazione il complesso coniugato della seconda segue

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) (\phi_n, \phi_m)$$

da cui

$$(\phi_n, \phi_m) = 0 \quad \text{se} \quad \lambda_n \neq \lambda_m . \quad (290)$$

Queste due proprietà sono identiche a quelle degli operatori (matrici) hermitiani negli spazi unitari finito dimensionali e sono verificate nei tre casi che abbiamo appena considerato. Il discorso invece sulla completezza dei sistemi di autofunzioni di un operatore autoaggiunto in uno spazio infinito dimensionale è più delicato e non sarà affrontato qui: ci limitiamo a dire che tale sistema è *generalmente* completo, come negli esempi visti qui — polinomi di Legendre in  $L^2(-1,1)$ , funzioni associate di Hermite in  $L^2(\mathbb{R})$ , sistema trigonometrico in  $L^2(-\pi, \pi)$  — ma ciò non è sempre vero. Perché il sistema di autofunzioni di un operatore autoaggiunto sia completo è talvolta necessario includervi autofunzioni generalizzate, rappresentate da distribuzioni anziché da funzioni quadrato sommabili; daremo un esempio nei prossimi paragrafi. Terminiamo sottolineando l'importanza delle condizioni al contorno. Per esempio l'equazione

$$-i\frac{d}{dx}u(x) = \lambda u(x) \quad (291)$$

ammette la soluzione  $e^{i\lambda x}$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ ; è solo la richiesta di periodicità  $u(\pi) = u(-\pi)$  che seleziona i  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , e questa ci dà una base ortogonale in  $L^2(-\pi, \pi)$ ; sull'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  i valori reali di  $\lambda$  sono selezionati dalla richiesta che  $u(x)$  sia limitata su tutto l'asse reale.

### 5.3.2 Trasformata di Fourier in $L^2$

Gli spazi  $L^2$  intervengono spesso in fisica; in particolare la Meccanica Quantistica è formulata in termini di spazi di Hilbert separabili, che possono essere realizzati da spazi di funzioni quadrato sommabili. È quindi concettualmente molto importante estendere la definizione di Trasformata di Fourier, che nella sua forma (199) si applica solo a  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ , anche a  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ .

Su intervallo infinito una funzione può essere quadrato sommabile senza essere sommabile, come abbiamo visto in (261), ma su intervallo finito  $L^2(a, b) \subset L(a, b)$ ; quindi per una generica  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-ikx} f(x) dx = F_N(k) \quad (292)$$

esiste certamente, ma non è detto che ne esista il limite (puntuale, cioè per ogni valore di  $k$ ) per  $N \rightarrow \infty$ . Si può invece dimostrare (**Teorema di Plancherel**) che  $\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  esiste sempre una  $F(k) \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$F(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} l.i.m. F_N(k) ,$$

dove *l.i.m.* è stato definito sopra la (271), ovvero

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|F - F_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k) - F_N(k)|^2 dk = 0 .$$

Si può anche dimostrare che la  $f(x)$  è la antitrasformata di Fourier della  $F(k)$  nello stesso senso di media quadratica, ovvero

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} l.i.m. f_N(x) \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0 , \quad (293)$$

dove

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{ikx} F(k) dk . \quad (294)$$

Nei testi di fisica si scrive generalmente

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(k) dk \quad (295)$$

anche per  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , ma la scrittura corretta è data dalle equazioni (292–294). Naturalmente le (295) sono anche formalmente corrette se  $f(x) \in L(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $F(k) \in L(\mathbb{R})$  e  $f(x)$  è di classe  $C^1$  nel punto  $x$ .

Come esempio si consideri la funzione  $f(x) = x/(1+x^2)$  che non ammette TF in senso stretto. Tuttavia la TF di  $f$  si calcola usando la (217),

$$\mathcal{F}_k(f) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ e^k \theta(-k) - e^{-k} \theta(k) \right],$$

ed è discontinua nell'origine ma quadrato sommabile su  $\mathbb{R}$ . Un altro esempio simile è quello di  $f(x) = \sin x/x$ , la cui TF è una funzione a scalino.

La dimostrazione del teorema di Plancherel<sup>10</sup> parte dal fatto che la base ONC di  $L^2(\mathbb{R})$  che già conosciamo, quella delle funzioni associate di Hermite  $\psi_n$ , è formata da funzioni sommabili su  $\mathbb{R}$ , la cui TF esiste certamente. Una qualsiasi funzione di  $L^2(\mathbb{R})$  può quindi essere scritta come  $\sum_n c_n \psi_n$  e per linearità la sua TF è la serie delle TF delle  $\psi_n$ . Dal momento che poi le  $\psi_n$  sono autofunzioni dell'operatore lineare  $\mathcal{F}$  che effettua la TF, cioè  $\mathcal{F}_k(\psi_n) = \lambda \psi_n(k)$ , con  $|\lambda| = 1$  (si ricordi per es. che la TF di una gaussiana è una gaussiana), la convergenza di questa seconda serie è assicurata dalla convergenza della serie  $\sum_n |c_n|^2$  e dalla completezza di  $L^2(\mathbb{R})$ .

Come lo sviluppo in serie di Fourier, anche la TF conserva i prodotti scalari (adesso ha senso parlare di questi perché lavoriamo in  $L^2$ ); vale infatti l'uguaglianza di Parseval generalizzata (223) che riscriviamo come

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(k) G(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx = (f, g), \quad (296)$$

dove  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  e  $F, G \in L^2(\mathbb{R})$  sono le loro TF.

#### 5.4 LA $\delta$ DI DIRAC E CENNI SULLE DISTRIBUZIONI

Le funzioni  $e^{i\lambda x}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sono autofunzioni **non** quadrato sommabili dell'operatore autoaggiunto  $-id/dx$  e costituiscono una “base generalizzata” in  $L^2(\mathbb{R})$  nel senso che ogni  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  è sviluppabile, per così dire, in una loro “combinazione lineare continua” mediante l'antitrasformata di Fourier (295). Non si può invece dire che le funzioni  $\phi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$  costituiscano un sistema ortogonale in senso stretto in  $L^2(\mathbb{R})$ ; infatti, proprio perché non sono quadrato sommabili, se cerchiamo di calcolare il prodotto scalare  $(\phi_\lambda, \phi_\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\lambda x} e^{i\mu x}$  troviamo un integrale privo di senso. Tuttavia se ci ricordiamo la definizione (199) di Trasformata di Fourier e quella (201) di antitrasformata, per ogni funzione  $f(x)$  sommabile e di classe  $C^1$  su tutto  $\mathbb{R}$  possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk F(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} f(y). \quad (297)$$

<sup>10</sup> Si vedano, per es., le dispense di Zanghì.

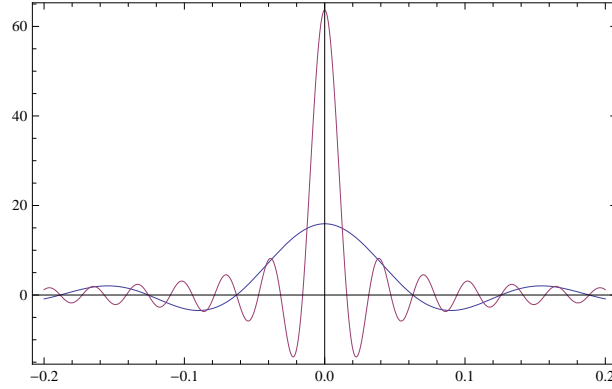


Figura 28.: La funzione  $d_N(t)$  per  $N = 50$  e  $200$ .

Per la stessa ragione per cui non esiste il prodotto scalare  $(\phi_\lambda, \phi_\mu)$  non è possibile scambiare l'ordine di integrazione in (297). Se scriviamo però

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} f(y)$$

il teorema di Fubini Tonelli ci permette di scambiare l'ordine di integrazione ottenendo

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d_N(y-x) f(y) dy, \quad (298)$$

dove

$$d_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} dk e^{-ikt} = \frac{N \sin Nt}{\pi Nt}.$$

Ovviamente non ha senso scambiare il limite con l'integrale poiché il limite puntuale per  $N \rightarrow \infty$  di  $d_N(t)$  non esiste. Tuttavia si può scrivere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_N(t) = \delta(t), \quad (299)$$

dove la  $\delta$  di Dirac non è una funzione ma un nuovo oggetto chiamato **distribuzione**; il limite è inteso **in senso debole** o **nel senso delle distribuzioni** e significa esattamente la eq. (298); per dare senso alla (299) si deve cioè moltiplicare per una **funzione di prova** (infinitamente derivabile e decrescente all'infinito più rapidamente di ogni potenza; l'abbiamo incontrata in (219)), integrare sulla variabile e **poi** fare il limite. Si scrive allora per ogni funzione di prova  $g(x)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d_N(y-x) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x) g(y) dy = g(x). \quad (300)$$

L'ultima uguaglianza, che si può anche scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0), \quad (301)$$

va intesa come definizione della  $\delta$  di Dirac, dove il segno di integrale è puramente simbolico. Simbolicamente si scrive anche

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \sin Nt}{\pi Nt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikt}, \quad (302)$$

dove il limite (anche degli estremi di integrazione) va inteso in senso **debole**; si deve cioè prima moltiplicare per una funzione di  $t$ , integrare su  $t$ , e **poi** integrare su  $k$ . La  $\delta$  di Dirac non è che un esempio (il più importante) di **distribuzione**, definita nel modo seguente:

**DEFINIZIONE** Una distribuzione (temperata)  $T$  è un funzionale lineare continuo sullo spazio  $\mathcal{S}$  delle funzioni di prova, cioè un'applicazione lineare continua<sup>11</sup> di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{C}$ :

$$T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$$

che si indica con la notazione seguente:

$$T : g \mapsto (T, g) \in \mathbb{C}, \quad (303)$$

dove  $g$  è una qualsiasi funzione di prova.

Il simbolo  $(T, g)$  richiama quello di prodotto scalare, e infatti in fisica si scrive abitualmente

$$(T, g) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)^* g(x) dx; \quad (304)$$

tuttavia l'integrale a secondo membro non sempre è un vero integrale (di Lebesgue); lo è se, per esempio,  $T(x)$  e  $g(x)$  sono entrambe funzioni quadrato sommabili. Nella teoria delle distribuzioni  $g(x)$  è una funzione non solo quadrato sommabile ma che va a zero più rapidamente di  $1/x^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ( $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$ ); in compenso non è necessario che  $T(x)$  sia quadrato sommabile; basta che sia **localmente sommabile** e non troppo crescente per  $x \rightarrow \pm\infty$  (ci pensa  $g(x)$  ad assicurare la convergenza dell'integrale) o addirittura, come nel caso della  $\delta$  di Dirac, non è nemmeno necessario che sia una funzione; in quest'ultimo caso la (304) non è che un modo simbolico di scrivere la (303), dove la prescrizione per associare ad ogni  $g \in \mathcal{S}$  il numero complesso  $(T, g)$  è data in un altro modo, per esempio per la  $\delta$  di Dirac

$$\delta : g \mapsto g(0) \in \mathbb{C}, \quad \forall g(x) \in \mathcal{S} \quad (305)$$

che i fisici scrivono nella forma (301). Il concetto di distribuzione generalizza quindi quello di funzione (le distribuzioni vengono anche dette *funzioni generalizzate*). La  $\delta$

<sup>11</sup> Per dare un senso compiuto all'aggettivo "continua" dovremmo definire il concetto di limite in  $\mathcal{S}$ , che è molto più forte del semplice limite puntuale, ma non abbiamo tempo di farlo qui.

di Dirac può essere rappresentata come **limite debole** di una successione non solo mediante la (302). Per ogni funzione  $D(x) \in L(\mathbb{R})$  e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D(x) dx = 1 \quad (306)$$

si può provare

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} ND(Nx) \quad \text{debole}; \quad (307)$$

basta infatti moltiplicare per una funzione di prova qualsiasi  $g(x)$  e integrare per ottenere

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)g(x)dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ND(Nx)g(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(y)g\left(\frac{y}{N}\right)dy \\ &= g(0), \end{aligned}$$

dove

- a) si è prima integrato e poi preso il limite, in accordo con la definizione di limite debole;
- b) si è fatto il limite sotto il segno usando il teorema (347) dell'Appendice C, tenendo conto che  $g \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists M > 0 / |g(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$  e quindi che  $|D(y)g(y/N)| < M|D(y)|$ .

Tra le possibili rappresentazioni della delta di Dirac citiamo le seguenti ( $\epsilon = 1/N$ ):

$$1. \quad D(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \Rightarrow \delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\sqrt{\pi}}e^{-(Nx)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\epsilon^2} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad D(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \delta(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2N} \\ N & |x| < \frac{1}{2N} \\ 0 & x > \frac{1}{2N} \end{cases} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \begin{cases} 0 & x \notin \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \\ \frac{1}{\epsilon} & x \in \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (309)$$

$$3. \quad D(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow \delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\pi} \frac{1}{(Nx)^2 + 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (310)$$

È importante osservare che il limite debole nella (307) non ha niente a che fare con il limite puntuale, che ha tuttavia importanza storica poiché esso coincide con la definizione intuitiva data da Dirac alla sua funzione  $\delta$ : “una funzione che è nulla dappertutto salvo che nell'origine, dove vale infinito, in modo tale che il suo integrale sull'asse reale valga uno” (notare che  $\int_{-\infty}^{+\infty} ND(Nx)dx = 1, \forall N$ ).



Ritornando al “prodotto scalare”  $(\phi_\lambda, \phi_\mu)$ , con  $\phi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ , si può quindi scrivere

$$(\phi_\lambda, \phi_\mu) = 2\pi\delta(\lambda - \mu) , \quad (311)$$

che generalizza a intervallo infinito la relazione di ortogonalità in  $L^2(-\pi, \pi)$

$$(\phi_l, \phi_m) = 2\pi\delta_{lm} \quad (312)$$

con  $\phi_l(x) = e^{ilx}$ . La  $\delta$  di Dirac può quindi essere vista come generalizzazione della  $\delta$  di Kronecker a indice continuo; si confrontino anche le proprietà caratteristiche

$$\begin{aligned} \delta_{lm} = 0, \quad l \neq m &\leftrightarrow \delta(\lambda - \mu) = 0, \quad \lambda \neq \mu \\ \sum_l \delta_{lm} = 1 &\leftrightarrow \int d\lambda \delta(\lambda - \mu) = 1. \end{aligned}$$

Enunciamo ora un'importante proprietà della delta di Dirac. Sia  $f(x)$  una funzione con  $n$  zeri semplici:

$$f(x) = 0 \text{ per } x = x_1, x_2, \dots, x_n; \quad f'(x_i) \neq 0.$$

Allora:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}}. \quad (313)$$

Per esempio, se  $f(x) = x^2 - a^2$ , la (313) fornisce

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a)}{2|a|} + \frac{\delta(x + a)}{2|a|} = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

Caso particolare importante della (313) è

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (314)$$

Un'altra proprietà della  $\delta$  di Dirac è

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0),$$

per ogni funzione  $f$  continua in  $x_0$ , come si dimostra moltiplicando ambo i membri per una qualsiasi funzione di prova  $g(x)$  e integrando su  $x$ .

Si consideri come esempio

$$\int_0^3 (5x - 2)\delta(1 - 2x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\theta(3 - x)(5x - 2) \frac{\delta(x - \frac{1}{2})}{2} dx = \frac{1}{2}(5\frac{1}{2} - 2) = \frac{1}{4}.$$

Si sarà notato che la funzione discontinua che moltiplica la  $\delta(x - 1/2)$  non è una funzione di prova. Tuttavia è in  $L^2(\mathbb{R})$  e come tale può essere scritta come serie di funzioni associate di Hermite,  $\psi_n(x)$ , che sono funzioni di prova. La  $\delta$  agisce su ognuna di esse e ne estrae il valore in  $x = 1/2$ , la cui somma converge a  $1/4$ .

**Ogni distribuzione  $T$  è infinitamente derivabile** secondo la definizione

$$\left(\frac{dT}{dx}, g\right) \equiv - \left(T, \frac{dg}{dx}\right), \quad (315)$$

che è la generalizzazione dell'identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT^*}{dx} g(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} T^*(x) \frac{dg}{dx} dx \quad (316)$$

valida per ogni funzione di prova  $g \in \mathcal{S}$  se  $T \in L \cap C^1$  (nell'integrazione per parti il contributo agli estremi sparisce perché  $g(x)$  va rapidamente a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ ). La definizione (316) detta per esempio l'azione della derivata della  $\delta(x)$  su una funzione di prova  $g(x)$ :

$$(\delta'(x), g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g'(x) dx = -g'(0).$$

La definizione (316) di derivata generalizzata permette inoltre di derivare **nel senso delle distribuzioni** anche funzioni non derivabili in senso ordinario, purché localmente sommabili. Per esempio è possibile derivare anche funzioni dotate di discontinuità di prima specie, il cui esempio paradigmatico è la funzione  $\theta$  di Heaviside:

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x) \quad (317)$$

nel senso delle distribuzioni<sup>12</sup>. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{dx} g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) g'(x) dx = - \int_0^{\infty} g'(x) dx = -g(x)|_0^{+\infty} = g(0).$$

La derivata nel senso delle distribuzioni è **continua** rispetto al limite debole:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \text{ debole} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dT_n}{dx} \text{ debole}. \quad (318)$$

La (318) fornisce un altro modo per ricavare la (317): partendo dalla rappresentazione

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\epsilon};$$

della  $\theta$  di Heaviside, derivando ambo i membri e scambiando il limite con la derivata (il che è sempre lecito solo nel senso delle distribuzioni) si ottiene la rappresentazione (310) della  $\delta$ .

<sup>12</sup> In senso ordinario vale invece  $\frac{d\theta}{dx} = 0$  quasi ovunque.

Ogni distribuzione temperata  $T$  ammette Trasformata di Fourier, secondo la definizione:

$$(\mathcal{F}_k(T), \mathcal{F}_k(g)) \equiv (T, g) , \quad \forall g \in \mathcal{S} \quad (319)$$

che generalizza l'analogia identità (296) valida per funzioni quadrato sommabili. La definizione (319) è sensata poiché, come dimostrato nel paragrafo 4.1.3, la TF manda lo spazio  $\mathcal{S}$  in se stesso, quindi  $\mathcal{F}_k(g) \in \mathcal{S}, \forall g \in \mathcal{S}$ , e quindi  $\mathcal{F}_k(T)$  è a sua volta una distribuzione temperata. Grazie alla definizione (319) si può calcolare la TF anche di funzioni che non siano né sommabili né quadrato sommabili su  $\mathbb{R}$ ; basta che siano localmente sommabili e *non troppo crescenti*<sup>13</sup>. In particolare si può calcolare la TF  $F(k)$  della funzione  $f(x) = e^{ik_0x}$  ( $k_0 \in \mathbb{R}$ ); detta

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} g(x) dx$$

la TF di  $g(x)$ , per la (319) abbiamo

$$(F, G) = (f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_0x} g(x) dx = \sqrt{2\pi} G(k_0) ,$$

da cui si deduce

$$F(k) \equiv \mathcal{F}_k(e^{ik_0x}) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0) . \quad (320)$$

Per  $k_0 = 0$  la TF di  $f(x) = 1$  è  $\sqrt{2\pi}\delta(k)$ . Viceversa scegliendo  $f(x) = \delta(x - x_0)$  la catena di identità

$$(F, G) = (f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx_0} G(k) dk$$

implica

$$F(k) \equiv \mathcal{F}_k(\delta(x - x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} . \quad (321)$$

Notare che le (320) e (321) potevano anche essere dedotte (in modo rozzo e scorretto ma efficace) scrivendo semplicemente

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (322)$$

<sup>13</sup> Non si può invece calcolare la TF di funzioni  $f$  che all'infinito crescano più di ogni potenza, per esempio esponenzialmente; queste infatti non sono distribuzioni **temperate** e per dare senso a

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx$$

bisognerebbe usare funzioni di prova "a supporto compatto" che non sono però mandate in se stesse dalla TF.

ed utilizzando rispettivamente la rappresentazione (302) della  $\delta$  di Dirac e la sua definizione (300). Invitiamo lo studente a verificare che tale modo diventa corretto se si usano invece i limiti deboli

$$\begin{aligned} e^{ik_0x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{ik_0x} e^{-x^2/N^2} \\ \delta(x - x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\sqrt{\pi}} e^{-N^2 x^2}, \end{aligned}$$

la TF della gaussiana (207), e il fatto che la TF nel senso delle distribuzioni è continua rispetto al limite debole:

$$T = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N \text{ debole} \Rightarrow \mathcal{F}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}(T_N) \text{ debole}. \quad (323)$$

Usando infatti le (323) l'integrale (322) acquista senso proprio, poiché il suo integrando diventa sommabile.

Da quanto abbiamo sommariamente detto si deduce che la TF è lo strumento più utile per risolvere **equazioni differenziali a coefficienti costanti**, purché venga estesa alle distribuzioni temperate. L'unica delle tecniche discusse in questo corso che non viene del tutto riassorbita dalla TF estesa alle distribuzioni è la Trasformata di Laplace, che permette anche di studiare soluzioni che crescono esponenzialmente per  $t \rightarrow \infty$  (di solito per evitarle!).

## COROLLARI DELLA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI CAUCHY

---

### 1. PRINCIPIO DELLA MEDIA

Il *principio della media* si ricava dalla rappresentazione integrale di Cauchy (38) nel caso in cui la curva  $\gamma$  sia una circonferenza. Se  $f(z)$  è una funzione analitica in una regione  $S$  semplicemente connessa e  $C$  è una circonferenza di raggio  $r$  e centro  $z_0 \in S$  interna a  $S$ :

$$C = \{z \in S / |z - z_0| = r\} ,$$

allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[z(\varphi)] d\varphi \quad \forall z \in C . \quad (324)$$

**Dimostrazione:** Applichiamo la rappresentazione integrale di Cauchy con  $\gamma = C$  e passiamo a coordinate polari ( $z \in C$ )

$$z(\varphi) = z_0 + re^{i\varphi} \longrightarrow dz = ire^{i\varphi} d\varphi = i(z - z_0) d\varphi$$

da cui segue

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{z - z_0}{z - z_0} f[z(\varphi)] d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[z(\varphi)] d\varphi . \quad [\text{q.e.d.}]$$

### 2. TEOREMA SULL'ASSENZA DI ESTREMI

*Né la parte reale né la parte immaginaria di una funzione  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  analitica in un dominio  $D$  s.c. possono avere estremi all'interno di  $D$ .*

**Dimostrazione:** dimostriamo il teorema per la parte reale  $u(x, y)$ . La dimostrazione è analoga per  $v(x, y)$ . Sia  $z_0$  un punto interno a  $D$ , tale cioè che esista un intorno  $I(z_0)$  tutto contenuto in  $D$ . Mostriamo che possono esistere solo due alternative:

$$a) \quad \exists I(z_0) \subset D / \forall z \in I(z_0) \quad u(z) = u(z_0) ,$$

esiste cioè un intorno di  $z_0$  in cui la funzione  $u(x, y)$  è costante;

$$b) \quad \forall I(z_0) \subset D \quad \exists z_1, z_2 \in I(z_0) / u(z_2) < u(z_0) < u(z_1) ,$$

cioè in qualunque intorno di  $z_0$  la funzione  $u$  assume valori sia maggiori che minori di  $u(z_0)$ .

Neghiamo infatti l'alternativa b), ammettiamo cioè che esista un intorno  $I(z_0) \subset D$  tale che  $\forall z \in I(z_0)$  sia, per esempio,  $u(z) \geq u(z_0)$ . Dalla parte reale del principio della media (324) segue allora che

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u[z(\varphi)] d\varphi . \quad (325)$$

D'altra parte è vera la relazione

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0) d\varphi . \quad (326)$$

Uguagliando le (325) e (326) si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \{u[z(\varphi)] - u(z_0)\} d\varphi = 0 ,$$

che implica, poiché la funzione integranda è per ipotesi continua e non negativa,

$$u(z) = u(z_0)$$

ovvero l'alternativa a).

L'altro modo di negare l'alternativa b) è di affermare che esiste un intorno  $I(z_0) \subset D$  tale che  $\forall z \in I(z_0)$  sia  $u(z) \leq u(z_0)$ ; allora dalle (325) e (326) deduciamo di nuovo che

$$\int_0^{2\pi} \{u(z_0) - u[z(\varphi)]\} d\varphi = 0;$$

poiché la funzione integranda è per ipotesi continua e non negativa, ne segue ancora l'alternativa a):

$$u(z) = u(z_0) . \quad [\text{q.e.d.}]$$

### 3. TEOREMA SULL'ASSENZA DI MASSIMI DEL VALORE ASSOLUTO

*Sia  $f(z)$  una funzione analitica in un dominio  $D$  s.c. . Il suo valore assoluto  $|f(z)|$  non può avere massimi all'interno di  $D$  e può avere minimi solo nei punti in cui  $f(z) = 0$ .*

**Dimostrazione:** Per quanto riguarda il massimo, la dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente. Supponiamo che:

$$\exists I(z_0) \subset D / |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in I(z_0) .$$

Per ogni circonferenza  $C$  centrata in  $z_0$  e interna a  $I(z_0)$  vale, per il principio della media, la seguente relazione

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[z(\varphi)] d\varphi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f[z(\varphi)]| d\varphi. \quad (327)$$

È vero inoltre che

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\varphi. \quad (328)$$

Sottraendo membro a membro le (327) e (328) si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \{|f[z(\varphi)]| - |f(z_0)|\} d\varphi \geq 0$$

Poiché l'integrando è per ipotesi una funzione continua e non positiva, ne segue che

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

per ogni  $z \in C$ . Variando il raggio  $r$  della circonferenza  $C$  in modo da coprire tutto l'intorno  $I(z_0)$  si dimostra che  $|f(z)| = |f(z_0)|$  per ogni  $z \in I(z_0)$ .

Abbiamo così dimostrato che  $|f(z)|$  non può avere un massimo all'interno di  $D$ .

Per dimostrare che  $|f(z)|$  non può avere minimi, se non nei punti in cui si annulla, consideriamo la funzione  $g(z) = 1/f(z)$ , analitica in  $D$  esclusi gli zeri  $z_i$  di  $f(z)$ . In questi punti  $|f(z_i)|$  è ovviamente minima. Se  $z \neq z_i$ , i minimi di  $|f(z)|$  corrispondono ai massimi di  $|g(z)|$ . Ma, come si è appena dimostrato, la funzione  $|g(z)|$ , analitica in  $D$ , non può avere massimi in  $D$ , e quindi la  $|f(z)|$  non può avere minimi.

[q.e.d.]

#### 4. TEOREMA

Sia  $f(z)$  una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso  $S$ ,  $\gamma \subset S$  una curva di Jordan di lunghezza  $l$ ,  $f(z)$  limitata sulla curva  $\gamma$  e  $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$  il suo valore massimo su  $\gamma$ ,  $z_0$  un punto appartenente alla regione interna a  $\gamma$  e  $\delta = \min_{z \in \gamma} |z - z_0|$  la distanza minima della curva  $\gamma$  dal punto  $z_0$ . Sotto queste ipotesi:

$$\text{a) } |f(z_0)| \leq \frac{Ml}{2\pi\delta} \quad (329)$$

$$\text{b) } \left| \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \leq n! \frac{Ml}{2\pi\delta^{n+1}} \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (330)$$

**Dimostrazione:** La dimostrazione segue immediatamente dalle rappresentazioni di Cauchy (38) e (40) e dalla disuguaglianza di Darboux (26):

$$\begin{aligned}
 a) \qquad |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi i} \max_{z \in \gamma} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| l \\
 &\leq \frac{1}{2\pi i} \frac{Ml}{\delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \qquad \left| \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\
 &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{Ml}{\delta^{n+1}}
 \end{aligned}$$

[q.e.d.]



## EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECOND'ORDINE

---

La maggior parte dei problemi in fisica è formulata in termini di equazioni differenziali, che sono molto spesso *equazioni differenziali alle derivate parziali*, che coinvolgono cioè derivate rispetto a più di una variabile. Tra queste, le equazioni che si incontrano più frequentemente sono:

- 1) L'equazione di Laplace:

$$\Delta\psi(\vec{r}) = 0 , \quad (331)$$

dove l'operatore Laplaciano (in tre dimensioni) è

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

L'equazione di Laplace compare spesso nello studio di fenomeni elettromagnetici, nell'idrodinamica, nella propagazione del calore e nello studio della gravitazione.

- 2) L'equazione di Poisson:

$$\Delta\psi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (332)$$

che è una generalizzazione dell'equazione di Laplace (331) in presenza di una sorgente.

- 3) L'equazione di Helmholtz, o equazione delle onde

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \quad (333)$$

e l'equazione di diffusione indipendente dal tempo

$$\Delta\psi(\vec{r}) - k^2\psi(\vec{r}) = 0 . \quad (334)$$

Queste equazioni si incontrano nello studio di diversi fenomeni, come la propagazione di onde elastiche nei solidi, la propagazione del suono e l'acustica, le onde elettromagnetiche e i reattori nucleari.

- 4) L'equazione delle onde dipendente dal tempo, o equazione di d'Alembert,

$$\square\psi(\vec{r}, t) = 0 , \quad (335)$$

dove si è introdotto l'operatore *d'alembertiano*:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta .$$

5) L'equazione del potenziale scalare:

$$\square\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

6) L'equazione di Klein-Gordon

$$\square\psi(\vec{r}, t) = \mu^2\psi(\vec{r}, t) . \quad (336)$$

7) L'equazione di Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} ,$$

che è alla base della meccanica quantistica non relativistica.

8) Le equazioni di Maxwell, che sono un sistema di equazioni alle derivate parziale accoppiate per i campi elettrico e magnetico.

9) L'equazione di Dirac, che governa la meccanica quantistica relativistica.

Tutte queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$H\psi = F ,$$

dove  $H$  è un *operatore differenziale*,

$$H = H\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, x, y, z\right) ,$$

$F$  è una funzione nota e  $\psi$  è la funzione incognita (scalare o vettoriale). Inoltre le equazioni (1,3,4,6,7,9) sono *lineari*: questo significa che, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono soluzioni dell'equazione differenziale, qualsiasi loro combinazione lineare

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

ne è ancora soluzione. Le equazioni (1-8) sono tutte equazioni del secondo ordine: esse contengono cioè derivate di ordine massimo 2 (in realtà le equazioni di Maxwell sono del prim'ordine, ma contengono due funzioni incognite e possono essere ricondotte, eliminando una delle due incognite, a equazioni del second'ordine). Esistono diversi metodi per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali del second'ordine:

- 1) metodo di separazione delle variabili;
- 2) metodo delle funzioni di Green;
- 3) metodo delle trasformate integrali di Fourier e di Laplace;
- 4) metodi numerici.

## B.1 METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Il metodo di separazione delle variabili consiste nel separare una equazione differenziale alle derivate parziali in  $n$  variabili in  $n$  equazioni differenziali *ordinarie* (contenenti cioè derivate totali), ciascuna corrispondente a una variabile. Ogni separazione introduce una costante arbitraria, detta *costante di separazione*. Se le variabili sono  $n$ , si ottengono  $n - 1$  costanti di separazione, determinate dalle condizioni al contorno del problema. Illustriamo il funzionamento di questo metodo con un esempio: la soluzione dell'equazione di Helmholtz (333). In coordinate cartesiane l'equazione (333) diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \psi(x, y, z) = 0. \quad (337)$$

Il metodo di separazione delle variabili consiste nel cercare una soluzione fattorizzata del tipo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (338)$$

dove  $X(x)$  dipende solo dalla variabile  $x$ ,  $Y(y)$  solo dalla  $y$  e  $Z(z)$  solo dalla  $z$ . Non è detto, in generale, che una soluzione di questo tipo esista, ma, se esiste, il procedimento è giustificato. Se non esiste, si dovrà risolvere l'equazione con un altro metodo. Sostituiamo dunque la (338) nell'equazione (337):

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

e dividiamo per  $X(x)Y(y)Z(z)$ , supponendo che  $\psi \neq 0$  (soluzione banale dell'equazione differenziale):

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Si noti che le derivate sono derivate ordinarie, non parziali. Separiamo ora i termini che dipendono da  $x$  da quelli che non ne dipendono:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2. \quad (339)$$

Ora, il primo membro è una funzione della sola variabile  $x$ , mentre il secondo membro dipende solo da  $y$  e  $z$ . Poichè  $x, y$  e  $z$  sono variabili indipendenti, questo è possibile solo se entrambi i membri della (339) sono uguali a una costante, la *costante di separazione*, che indicheremo con  $-l^2$ . Otteniamo così due equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -l^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 &= l^2. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la seconda di queste equazioni e ripetiamo il procedimento; separiamo i termini dipendenti da  $y$ :

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - k^2 + l^2 .$$

Questa equazione può essere verificata solo se ambo i suoi membri sono uguali a una costante di separazione,  $-m^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= -m^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= -k^2 + m^2 + l^2 = -n^2 , \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto, per motivi di simmetria formale, la costante  $n^2$ , legata a  $l$ ,  $m$  e  $k$  dalla relazione

$$l^2 + m^2 + n^2 = k^2 .$$

Riassumendo, abbiamo trasformato l'equazione differenziale alle derivate parziali in  $n=3$  variabili

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \psi(x, y, z) = 0$$

in  $n=3$  equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -l^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= -m^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= -n^2 \end{aligned}$$

e abbiamo introdotto  $n-1=2$  costanti di separazione  $l$  e  $m$  (la terza costante,  $n$ , non è indipendente dalle altre due). La nostra soluzione sarà caratterizzata da tre indici  $l, m, n$ :

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x) Y_m(y) Z_n(z) \quad (340)$$

e varrà per qualunque scelta delle costanti  $l, m, n$  purchè  $l^2 + m^2 + n^2 = k^2$ . La soluzione generale sarà una combinazione lineare delle (340):

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{l, m, n} a_{lmn} \psi_{lmn}(x, y, z) ,$$

dove i coefficienti  $a_{lmn}$  saranno determinati dalle condizioni al contorno. Risolviamo ora l'equazione di Helmholtz in coordinate sferiche. Cerchiamo una soluzione fattorizzata del tipo

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (341)$$

L'espressione dell'operatore laplaciano in coordinate sferiche è:

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (342)$$

Le (341) e (342), sostituite nell'equazione (333), forniscono:

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -k^2.$$

Si noti che le derivate sono diventate derivate ordinarie, perchè agiscono su funzioni di una sola variabile. Moltiplicando per  $r^2 \sin^2 \theta$  possiamo isolare i termini dipendenti da  $\phi$ :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[ -k^2 - \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right]. \quad (343)$$

Questa equazione è una uguaglianza fra una funzione che dipende solo da  $\phi$  e una che dipende solo da  $r$  e  $\theta$ : l'unica soluzione possibile è che ambo i membri della (343) siano uguali a una costante, che indicheremo con  $-m^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= -m^2 \\ \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} &= -k^2. \end{aligned} \quad (344)$$

Moltiplicando ora la seconda equazione per  $r^2$  e riarrangiando i termini si ottiene:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}.$$

Le variabili  $r$  e  $\theta$  sono così separate. Se uguagliamo il primo e il secondo membro ad un'unica costante  $Q$  otteniamo:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0 \quad (345)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta + Q\Theta = 0. \quad (346)$$

Abbiamo ottenuto così tre equazioni differenziali ordinarie (344), (345) e (346), con l'introduzione di 2 costanti di separazione,  $m^2$  e  $Q$ . La soluzione di queste equazioni

è discussa nel capitolo 2.1.1. La soluzione generale dell'equazione di Helmholtz in coordinate sferiche avrà la forma:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{Q,m} a_{Qm} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\phi) .$$

Mediante il metodo di separazione delle variabili ci siamo quindi ricondotti a equazioni differenziali ordinarie del second'ordine, delle quali ci occupiamo qui.

## PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE

---

Elenchiamo qui di seguito (senza dimostrarle) alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue che lo rendono spesso molto più maneggevole dell'integrale di Riemann.

- **Teorema di Lebesgue** sullo *scambio di limite con integrale* (per successioni).

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{q.o.}{=} f(x) ,$$

con le  $f_n(x)$  sommabili, ed esiste una  $F(x)$  sommabile tale che  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq_{q.o.} F(x)$ , allora anche  $f(x)$  è sommabile e si può scambiare il limite con l'integrale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \equiv \int_a^b f(x) dx . \quad (347)$$

La seconda proprietà è molto simile:

- **Scambio di limite con integrale** (per integrali dipendenti da un parametro).

Se in  $y_0$  la funzione  $f(x, y)$ , intesa come funzione di  $y$ , è continua per quasi ogni  $x \in (a, b)$ , cioè se vale

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =_{q.o.} f(x, y_0), \quad (348)$$

ed esiste una  $F(x)$  sommabile tale che in un opportuno intorno di  $y_0$  valga  $|f(x, y)| \leq_{q.o.} F(x)$ , allora si può scambiare il limite con l'integrale:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx \equiv \int_a^b f(x, y_0) dx . \quad (349)$$

Anche la terza proprietà vale sotto condizioni analoghe:

- **Derivazione sotto il segno.**

Posto

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx ,$$

se in un opportuno intorno di  $y_0$  e per quasi ogni  $x \in (a, b)$  la derivata parziale  $f'_y(x, y)$  esiste e vale

$$|f'_y(x, y)| \leq_{q.o.} F(x) \text{ con } F(x) \text{ sommabile ,}$$

allora si può derivare sotto il segno:

$$\left. \frac{dG}{dy} \right|_{y=y_0} = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx . \quad (350)$$

Enunciamo infine

• **Teorema di Fubini Tonelli sullo scambio dell'ordine di integrazione.**

Se esiste almeno uno degli integrali

$$\int_a^b dx \int_c^d dy |f(x, y)| , \quad \int_c^d dy \int_a^b dx |f(x, y)|$$

allora vale

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (351)$$

L'importanza di questi quattro teoremi diventa evidente se si osserva che essi valgono sia per intervallo finito che infinito e sia per funzioni limitate che non limitate; gli analoghi teoremi validi per integrali di Riemann, specie per integrali di Riemann impropri, richiedono condizioni sufficienti estremamente più restrittive e difficili da verificare.

Naturalmente nel caso di **intervallo finito** anche per l'integrale di Lebesgue si possono avere ulteriori semplificazioni: se e solo se l'intervallo è finito,  $F(x) = M$  costante è sommabile; si può quindi dire, come caso particolare della proprietà (347), che condizione sufficiente affinché valga la (347) è che le  $f_n(x)$  siano q.o. *uniformemente limitate*, cioè che esista una costante  $M$ , *indipendente da  $n$* , che le maggiori tutte (in modulo) quasi ovunque.

Affermazioni analoghe si possono fare per le proprietà (349) e (350).