Serie di Fourier

1 Definizione

Dato $L \in \mathbb{R}$ si definisce serie di Fourier di coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}, \qquad \text{con} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n. \tag{1}$$

2 Periodicità della serie di Fourier

Prima di tutto notiamo che la serie di Fourier, se converge, essa converge ad una funzione **periodica** di periodo L. Infatti, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, avremo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n(x+mL)}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} e^{ik_n mL} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L} nmL} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} e^{2\pi\, nm\, i}.$$

Essendo $nm \in \mathbb{Z}$, avremo che $e^{2\pi\, nm\, i} = 1$ e quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n(x+mL)}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}, \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

3 Ortonormalità delle funzioni $\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}$

Dato un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ di lunghezza L, cioè tale che

$$b - a = L,$$

le funzioni

$$\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} \qquad \text{con} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n,$$

soddisfano la seguente proprietà, detta di **Ortonormalità***:*

$$\boxed{\int_a^b dx \left(\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}\right)^* \frac{e^{ik_l x}}{\sqrt{L}} = \int_a^b dx \, \frac{e^{i(k_l - k_n)x}}{L} = \delta_{nl}} \tag{3}$$

È importante notare che eq. (3) vale per *qualunque* intervallo $[a,b]$ di lunghezza L.

Per la dimostrazione inseriamo innanzitutto l'espressione esplicita per k_n e k_l:

$$\int_a^b dx \left(\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}\right)^* \frac{e^{ik_l x}}{\sqrt{L}} = \int_a^b dx\, \frac{e^{i(k_l-k_n)x}}{L} = \int_a^b dx\, \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)x}}{L}$$

Perciò, per $n = l$, avremo

$$\int_a^b dx \left(\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}\right)^* \frac{e^{ik_l x}}{\sqrt{L}}\Bigg|_{n=l} = \int_a^b dx\, \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)x}}{L}\Bigg|_{n=l} = \int_a^b dx\, \frac{1}{L} = \frac{b-a}{L} = 1\,.$$

Invece, per $n \neq l$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx \left(\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}\right)^* \frac{e^{ik_l x}}{\sqrt{L}} &= \int_a^b dx\, \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)x}}{L} = \left[\frac{1}{L}\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)x}}{i\frac{2\pi}{L}(l-n)}\right]_a^b = \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)b} - e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}}{2\pi(l-n)i} \\
&= \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}}{2\pi(l-n)i}\left[\frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)b}}{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}} - 1\right] = \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}}{2\pi(l-n)i}\left[e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)(b-a)} - 1\right] \\
&= \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}}{2\pi(l-n)i}\left[e^{2\pi(l-n)i} - 1\right] = \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(l-n)a}}{2\pi(l-n)i}\left[1-1\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, essendo $(l-n) \in \mathbb{Z}$, abbiamo $e^{2\pi(l-n)i} = 1$.

4 Convergenza della serie di Fourier

Per discutere la convergenza della serie Fourier, dimostriamo il lemma di Riemann e il teorema di Dirichlet.

4.1 Lemma di Riemann

Data una funzione complessa a variabile reale definita su un intervallo $[a,b]$ *finito o infinito*

$$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{C}\,,$$

se $f(x)$ *è* **sommabile**[1] *in* $[a,b]$, *cioè se*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

allora

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx = 0\,, \tag{4}$$

[1] "Sommabile" significa "integrabile alla Lesbegue". Ci sono diverse teorie per l'intergazione: quella comunemente usata è la teoria di Riemann ed è normalmente sufficiente per tutti i casi di interesse in fisica. Quindi per tutti i casi di interesse fisico "sommabile" equivale a "assolutamente integrabile".

e pertanto anche

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\cos(kx)\,dx = 0\,, \qquad\qquad \lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\sin(kx)\,dx = 0\,. \qquad (5)$$

La dimostrazione si fa in due step. Prima di tutto consideriamo il caso in cui $f(x)$ sia di classe C^1, cioè continua con la sua derivata prima. In questo caso possiamo integrare per parti

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,e^{\pm ikx}\,dx &= \left[f(x)\,\frac{e^{\pm ikx}}{\pm ik}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,\frac{e^{\pm ikx}}{\pm ik}\,dx \\
&= \frac{1}{\pm ik}\left[f(b)\,e^{\pm ikb} - f(a)\,e^{\pm ika} - \int_a^b f'(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right]
\end{aligned}$$

e ottenere

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right| &= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{\pm ik}\right|\,\left|f(b)\,e^{\pm ikb} - f(a)\,e^{\pm ika} - \int_a^b f'(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right| \\
&\le \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{\pm ik}\right|\,\left[\left|f(b)\,e^{\pm ikb}\right| + \left|f(a)\,e^{\pm ika}\right| + \left|\int_a^b f'(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right|\right] \\
&\le \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{\pm ik}\right|\,\left[\left|f(b)\,e^{\pm ikb}\right| + \left|f(a)\,e^{\pm ika}\right| + \int_a^b \left|f'(x)\,e^{\pm ikx}\right|\,dx\right] \\
&= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{|k|}\,\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)|\,dx\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che tutte le quantità nella parentesi quadra sono indipendenti da k e finite (essendo $f(x)$ di classe C^1).

Passiamo ora al caso generale con $f(x)$ sommabile. In questo caso sappiamo che esiste sicuramente una funzione di classe C^1 il cui integrale in $[a,b]$ approssima in modulo infinitamente bene l'integrale di $f(x)$, cioè in formule

$$\forall\,\epsilon>0,\quad \exists\,g_\epsilon(x)\in C^1\quad \text{tale che}\quad \int_a^b |f(x)-g_\epsilon(x)|\,dx < \epsilon\,.$$

Pertanto $\forall\,\epsilon>0$, esiste $g_\epsilon(x)$ di classe C^1 tale che

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right| &= \lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b \left[f(x)-g_\epsilon(x)\right]e^{\pm ikx}\,dx + \int_a^b g_\epsilon(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right| \\
&\le \lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b \left[f(x)-g_\epsilon(x)\right]e^{\pm ikx}\,dx\right| + \lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b g_\epsilon(x)\,e^{\pm ikx}\,dx\right|\,.
\end{aligned}$$

Essendo $g_\epsilon(x)$ di classe C^1, l'ultimo termine è nullo per la parte di teorema appena dimostrata e quindi

$$\begin{aligned}\forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx\right| \;&\le\; \lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b \big[f(x)-g_\epsilon(x)\big]\, e^{\pm ikx}\, dx\right| \\ &\le\; \lim_{k\to+\infty}\int_a^b \left|\big[f(x)-g_\epsilon(x)\big]\, e^{\pm ikx}\right|\, dx \\ &=\; \lim_{k\to+\infty}\int_a^b |f(x)-g_\epsilon(x)|\, dx \;<\; \epsilon\,.\end{aligned}$$

Essendo quindi

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx\right|$$

minore di qualunque numero positivo ϵ, non può che essere nullo:

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx\right| = 0$$

e quindi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx = 0\,.$$

L'ultima parte del teorema, riguardante il coseno e il seno, si dimostra banalmente usando le formule di Eulero:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, \cos(kx)\, dx \;&=\; \frac{1}{2}\left[\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, e^{ikx}\, dx + \lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, e^{-ikx}\, dx\right] = 0\,, \\ \lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, \sin(kx)\, dx \;&=\; \frac{1}{2i}\left[\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, e^{ikx}\, dx - \lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\, e^{-ikx}\, dx\right] = 0\,.\end{aligned}$$

4.2 Teorema di Dirichlet

Data una funzione complessa a variabile reale **sommabile** *su un intervallo* **finito** $[a,b]$ *di lunghezza* L

$$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{C}\,,$$

se i coefficienti della serie di Fourier sono dati da

$$a_n = \int_a^b f(x)\, \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}}\, dx\,, \qquad \text{con} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n\,, \qquad L = b - a, \qquad (6)$$

allora abbiamo i seguenti casi:

- *Se $f(x)$ è continua*[2] *in $x_0 \in\,]a,b[$, allora la serie di Fourier* **converge puntualmente** *a $f(x_0)$:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = f(x_0)\,;$$

[2]Sulle dispense il teorema è enunciato nel caso in cui la funzione è di classe C^1 in un intorno di x_0, ma in realtà basta che sia continua in x_0 per la convergenza puntuale (vedere dimostrazione che segue).

- *Se $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie in $x_0 \in]a,b[$ (cioè $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ con $f'(x_0^+), f'(x_0^-)$ finiti), allora la serie di Fourier* **converge puntualmente** *al valor medio del salto:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \,;$$

Per dimostrare il teorema prima di tutto notiamo che se $f(x)$ è sommabile in $[a,b]$, allora i coefficienti a_n definiti dall'eq. (6) esistono e sono finiti:

$$|a_n| = \left| \int_a^b f(x) \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \, dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \right| dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Poi introduciamo la somma ($N \in \mathbb{N}$)

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}$$

tale per cui

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \lim_{N \to +\infty} S_N(x_0)$$

Inserendo in $S_N(x_0)$ i coefficienti a_n definiti dall'eq. (6) otteniamo

$$S_N(x_0) = \sum_{n=-N}^{+N} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-N}^{+N} \int_a^b f(x) \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \, dx \, \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}}$$

A questo punto, sottraendo e sommando $f_0(x)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \sum_{n=-N}^{+N} \int_a^b [f(x) - f(x_0)] \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \, dx \, \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} + \sum_{n=-N}^{+N} \int_a^b f(x_0) \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} \, dx \, \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^{+N} \int_a^b [f(x) - f(x_0)] \, e^{-ik_n (x - x_0)} \, dx + f(x_0) \sum_{n=-N}^{+N} e^{ik_n x_0} \int_a^b \frac{e^{-ik_n x}}{L} \, dx \,. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n \qquad \Rightarrow \qquad k_0 = 0 \,,$$

nell'ultimo termine possiamo usare l'ortogonalità delle funzioni $\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}}$

$$\sum_{n=-N}^{+N} e^{ik_n x_0} \int_a^b \frac{e^{-ik_n x}}{L} \, dx = \sum_{n=-N}^{+N} e^{ik_n x_0} \int_a^b \frac{e^{i(k_0 - k_n)x}}{L} \, dx = \sum_{n=-N}^{+N} e^{ik_n x_0} \, \delta_{n0} = e^{ik_0 x_0} = e^0 = 1 \,.$$

Nel primo termine, invertendo la sommatoria (finita) e l'integrale, otteniamo quindi

$$S_N(x_0) \;=\; \frac{1}{L} \int_a^b dx \, [f(x) - f(x_0)] \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n (x - x_0)} + f(x_0)$$

Analizziamo ora la funzione

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x-x_0)}\,,$$

e notiamo che

- $\sigma_N(x)$ è periodica di periodo L. Infatti, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, avremo:

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x+mL) &= \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x+mL-x_0)} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x-x_0)} e^{-ik_n mL} \\
&= \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x-x_0)} e^{i\frac{2\pi}{L}nmL} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x-x_0)} = \sigma_N(x)\,.
\end{aligned}$$

- È pari rispetto a x_0:

$$\sigma_N(x_0-\delta) = \sigma_N(x_0+\delta)\,.$$

  Infatti

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x_0-\delta) &= \sum_{n=-N}^{+N} e^{ik_n\,\delta} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{i\frac{2\pi}{L}n\,\delta} \underset{n'=-n}{=} \sum_{n'=N}^{-N} e^{-i\frac{2\pi}{L}n'\delta} \\
&= \sum_{n'=-N}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{L}n'\delta} \underset{n'=n}{=} \sum_{n=-N}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{L}n\,\delta} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n\delta} = \sigma_N(x_0+\delta)
\end{aligned}$$

- Possiamo calcolare $\sigma_N(x)$. Per farlo, poniamo per comodità $\alpha = \frac{2\pi}{L}(x-x_0)$ e otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x) &= \sum_{n=-N}^{+N} e^{-ik_n(x-x_0)} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-i\frac{2\pi}{L}n(x-x_0)} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-i\alpha\,n} \underset{l=n+N}{=} \sum_{l=0}^{2N} e^{-i\alpha\,(l-N)} \\
&= e^{i\alpha N}\sum_{l=0}^{2N} e^{-i\alpha\,l} = e^{i\alpha N}\sum_{l=0}^{2N}\left(e^{-i\alpha}\right)^l
\end{aligned}$$

  Sfruttando la realzione

$$\sum_{k=0}^{K} z^k = \frac{1-z^{K+1}}{1-z}$$

  abbiamo

$$\begin{aligned}
\sigma_N(x) &= e^{i\alpha N}\sum_{l=0}^{2N}\left(e^{-i\alpha}\right)^l = e^{i\alpha N}\frac{1-\left(e^{-i\alpha}\right)^{2N+1}}{1-e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha N}\frac{1-e^{-i(2N+1)\alpha}}{1-e^{-i\alpha}} \\
&= e^{i\alpha N}\frac{e^{-i(2N+1)\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{e^{i(2N+1)\frac{\alpha}{2}}-e^{-i(2N+1)\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \\
&= e^{i\alpha\left(N-(2N+1)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{2i\sin\left[(2N+1)\frac{\alpha}{2}\right]}{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\alpha}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,.
\end{aligned}$$

Inserendo quest'ultimo risultato nell'espressione per $S_N(x_0)$ e ricordando che $\alpha = \frac{2\pi}{L}(x - x_0)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \frac{1}{L}\int_a^b dx\,[f(x) - f(x_0)]\,\sigma_N(x) + f(x_0) \\ &= \frac{1}{L}\int_a^b dx\,\frac{f(x) - f(x_0)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]}\,\sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right] + f(x_0) \end{aligned}$$

L'integrale di questa espressione è esattamente del tipo del lemma di Riemann. Infatti l'argomento del seno a numeratore tende a $+\infty$ per $N \to +\infty$. Inoltre la funzione che lo moltiplica

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]}$$

è sommabile in $[a, b]$. Per dimostrare questo basta notare che

- il numeratore di $g(x)$ ha al più singolarità integrabili in $[a, b]$, poiché $f(x)$ è sommabile per ipotesi.
- Pertanto gli unici punti in cui $g(x)$ può avere singolarità non integrabili sono gli zeri del seno a denominatore, che sono

  $$x = x_0 + k\,L \qquad \text{con} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

  Di questi l'unico punto contenuto in $[a, b]$ è $x = x_0$ (essendo L la lunghezza di $[a, b]$). Però, se $f(x)$ è continua in $x = x_0$, la funzione $g(x)$ ha al più una singolarità integrabile. Infatti abbiamo:

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\,g(x) &= \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]} = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{\pi}{L}(x - x_0)} \\ &= \frac{L}{\pi}\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0\,. \end{aligned}$$

Facendo il limite $N \to +\infty$ di $S_N(x_0)$, possiamo pertanto applicare il lemma di Riemann all'integrale e ottenere la prima tesi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} &= \lim_{N\to+\infty} S_N(x_0) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{L}\int_a^b dx\,\frac{f(x) - f(x_0)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]}\,\sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right] + f(x_0) \\ &= f(x_0)\,. \end{aligned}$$

Passiamo ora alla seconda parte del teorema, considerando il caso in cui $f(x)$ ha una discontinuità di prima specia in x_0 (cioè $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ finiti). In questo caso partiamo dall'espressione per $S_N(x_0)$

$$S_N(x_0) = \sum_{n=-N}^{+N} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-N}^{+N} \int_a^b f(x) \frac{e^{-ik_n x}}{\sqrt{L}}\, dx \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x)\, \sigma_N(x)\, dx\,.$$

Separiamo a questo punto l'integrale su $[a, b]$ nella somma dell'integrale su $[a, x_0]$ e di quello su $[x_0, b]$ e successivamente sottraiamo e sommiamo $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ opportunamente:

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &= \frac{1}{L} \int_a^{x_0} f(x)\, \sigma_N(x)\, dx + \frac{1}{L} \int_{x_0}^b f(x)\, \sigma_N(x)\, dx \\ &= \frac{1}{L} \int_a^{x_0} [f(x) - f(x_0^-)]\, \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^-)}{L} \int_a^{x_0} \sigma_N(x)\, dx \\ &\quad + \frac{1}{L} \int_{x_0}^b [f(x) - f(x_0^+)]\, \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^+)}{L} \int_{x_0}^b \sigma_N(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

I due integrali contenenti $f(x)$ sono nuovamente del tipo del lemma di Riemann:

$$\int_a^{x_0} [f(x) - f(x_0^\pm)]\, \sigma_N(x)\, dx = \int_a^{x_0} g^{(\pm)}(x) \sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right] dx$$

dove le funzioni

$$g^{(\pm)}(x) = \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]}$$

sono sommabili nelle rispettive regioni di integrazione ($g^{(-)}(x)$ è sommabile in $[a, x_0]$, $g^{(+)}(x)$ è sommabile in $[x_0, b]$). Infatti nuovamente l'unico punto interno alle regioni di integrazione in cui $g^{(-)}(x)$ e $g^{(+)}(x)$ possono avere una singolarità non integrabile è $x = x_0$ che si trova sul bordo delle due regioni $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$. Però abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} (x - x_0) g^{(-)}(x) &= \lim_{x \to x_0^-} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0^-)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]} = \lim_{x \to x_0^-} \cancel{(x - x_0)} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{\frac{\pi}{L}\cancel{(x - x_0)}} = 0\,, \\ \lim_{x \to x_0^+} (x - x_0) g^{(+)}(x) &= \lim_{x \to x_0^+} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0^+)}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x - x_0)\right]} = \lim_{x \to x_0^+} \cancel{(x - x_0)} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{\frac{\pi}{L}\cancel{(x - x_0)}} = 0\,, \end{aligned}$$

e pertanto $g^{(-)}(x)$ è sommabile in $[a, x_0]$ e $g^{(+)}(x)$ è sommabile in $[x_0, b]$. Perciò facendo il limite $N \to +\infty$ di $S_N(x_0)$, applichiamo il lemma di Riemann a questi integrali ottenendo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} &= \lim_{N\to+\infty} S_N(x_0) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{1}{L}\int_a^{x_0} g^{(-)}(x) \sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right] dx + \frac{f(x_0^-)}{L}\int_a^{x_0} \sigma_N(x)\, dx \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{L}\int_{x_0}^{b} g^{(+)}(x) \sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right] dx + \frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0}^{b} \sigma_N(x)\, dx \right\} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{f(x_0^-)}{L}\int_a^{x_0} \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0}^{b} \sigma_N(x)\, dx \right\} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{f(x_0^-)}{L}\int_a^{x_0-\frac{L}{2}} \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^-)}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0} \sigma_N(x)\, dx \right. \\
&\qquad \left. + \frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0}^{x_0+\frac{L}{2}} \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0+\frac{L}{2}}^{b} \sigma_N(x)\, dx \right\}.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente suddiviso ulteriormente gli intervalli d'integrazione. Per il primo e l'ultimo integrale usiamo nuovamente il lemma di Riemann:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \int_a^{x_0-\frac{L}{2}} \sigma_N(x)\, dx &= \lim_{N\to+\infty} \int_a^{x_0-\frac{L}{2}} \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right]}\, dx = 0\,, \\
\lim_{N\to+\infty} \int_{x_0+\frac{L}{2}}^{b} \sigma_N(x)\, dx &= \lim_{N\to+\infty} \int_{x_0+\frac{L}{2}}^{b} \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right]}\, dx = 0\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $x_0 \notin [a, x_0 - \frac{L}{2}]$ e $x_0 \notin [x_0 + \frac{L}{2}, b]$ e pertanto la funzione $\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{L}(x-x_0)\right]}$ non è mai singolare in questi intervalli ed è quindi ivi sommabile. Otteniamo quindi:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x_0}}{\sqrt{L}} = \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{f(x_0^-)}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0} \sigma_N(x)\, dx + \frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0}^{x_0+\frac{L}{2}} \sigma_N(x)\, dx \right\}.$$

Ora sfruttando il fatto che $\sigma_N(x)$ è pari rispetto a x_0, abbiamo che

$$\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0} \sigma_N(x)\, dx = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+\frac{L}{2}} \sigma_N(x)\, dx\,.$$

e quindi anche:

$$
\begin{aligned}
2\,\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx &= \frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx+\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx\\
&= \frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx+\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+\frac{L}{2}}\sigma_N(x)\,dx=\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0+\frac{L}{2}}\sigma_N(x)\,dx\\
&= \frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0+\frac{L}{2}}\sum_{n=-N}^{+N}e^{-ik_n(x-x_0)}\,dx=\sum_{n=-N}^{+N}e^{ik_nx_0}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0+\frac{L}{2}}\frac{e^{-ik_nx}}{L}\,dx\\
&= \sum_{n=-N}^{+N}e^{ik_nx_0}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0+\frac{L}{2}}\frac{e^{i(k_0-k_n)x}}{L}\,dx=\sum_{n=-N}^{+N}e^{ik_nx_0}\,\delta_{n0}=e^{ik_0x_0}=e^0=1\,.
\end{aligned}
$$

Negli ultimi passaggi abbiamo nuovamente usato l'ortogonalità delle funzioni $\frac{e^{ik_nx}}{\sqrt{L}}$ in tutti gli intervalli di lunghezza L (stavolta applicandolo all'intervallo $\left[x_0-\frac{L}{2},x_0+\frac{L}{2}\right]$) e il fatto che $k_0=0$. In conclusione abbiamo pertanto

$$\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx=\frac{1}{2}\,,$$

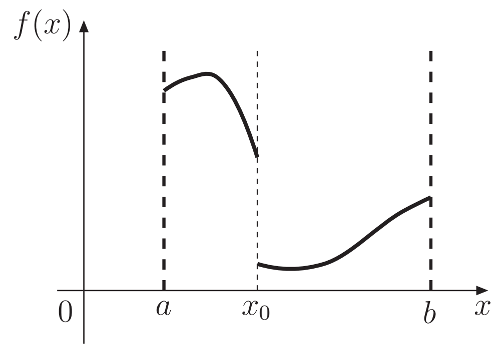
e quindi

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\,\frac{e^{ik_nx_0}}{\sqrt{L}} &= \lim_{N\to+\infty}\left\{\frac{f(x_0^-)}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx+\frac{f(x_0^+)}{L}\int_{x_0}^{x_0+\frac{L}{2}}\sigma_N(x)\,dx\right\}\\
&= \left[f(x_0^-)+f(x_0^+)\right]\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{L}\int_{x_0-\frac{L}{2}}^{x_0}\sigma_N(x)\,dx=\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}\,,
\end{aligned}
$$

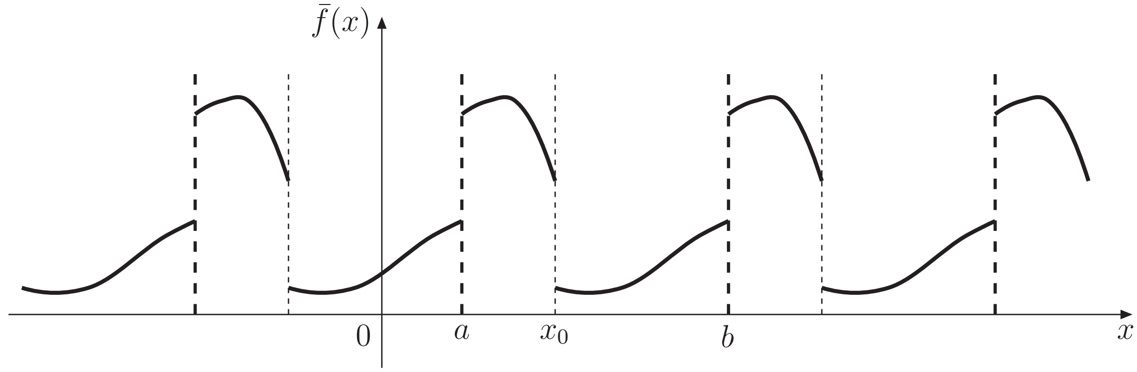
che dimostra la seconda tesi.

4.3 Convergenza della serie di Fourier in tutto $\mathbb{R}$

Grazie al teorema di Dirichlet e alla periodicità della serie di Fourier, possiamo ora discutere la convergenza della serie di Fourier dentro e fuori l'intervallo $[a,b]$. Infatti il teorema di Dirichlet descrive la convergenza della serie nei punti $x_0\in]a,b[$, però noi sappiamo che la serie di Fourier è periodica di periodo L e quindi fuori da $]a,b[$ la serie replica il comportamento che ha nell'intervallo $]a,b[$. Perciò per descrivere il comportamento della serie in tutto $\mathbb{R}$, data la funzione $f(x)$ definita in $[a,b]$



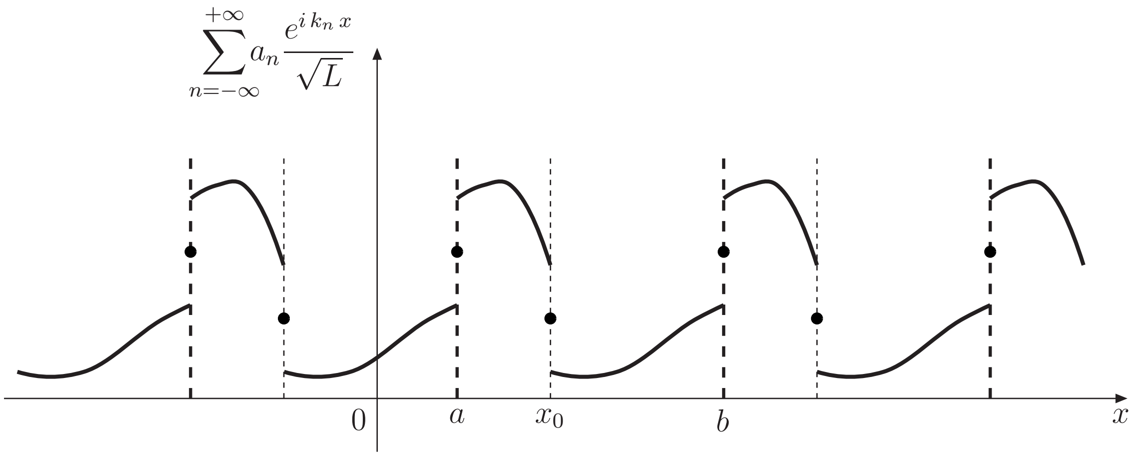
definiamo la funzione $\bar{f}(x)$, che chiamiamo $f(x)$ *periodicizzata*, come la funzione che si ottiene replicando l'intervallo $[a, b]$ infinite volte, sia a destra che a sinistra:



Dopodiché applichiamo il teorema di Dirichlet alla $\bar{f}(x)$ su tutto $\mathbb{R}$:

> *Data una funzione $f(x)$, sommabile su un intervallo $[a, b]$ di lunghezza finita $L = b - a$, per la serie di Fourier*
>
> $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}},$$
>
> *con*
>
> $$a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b f(x)\, e^{-ik_n x}\, dx; \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n, \qquad L = b - a,$$
>
> *risulta che:*
>
> - *In tutti i punti $x_0[$ in cui la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ è* **continua** *con la sua derivata, la serie di Fourier converge a $\bar{f}(x)$:*
>
> $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\, k_n\, x}}{\sqrt{L}} = \bar{f}(x)\,, \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\, k_n\, x}\, f(x)\, dx\,.$$
>
> - *In tutti i punti x_0 in cui la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ ha un salto (cioè una discontinuità di prima specie), la serie di Fourier converge a al valor medio del salto:*
>
> $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\, k_n\, x}}{\sqrt{L}} = \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2}\,, \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\, k_n\, x}\, f(x)\, dx\,.$$

Graficamente avremo:



5 Intergrabilità termine a termine della serie di Fourier

......

6 Equazione di Parseval

......

7 La serie trigonometrica di Fourier

Esiste una formulazione alternativa della serie di Fourier tramite funzioni trigonometriche che può essere più facilmente visualizzabile e aiutare a capirne il significato. Infatti, sfruttando la formula di Eulero $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, possiamo riscrivere la serie di Fourier come una serie di seni e coseni:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} &= \frac{a_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{\sqrt{L}} e^{i\,k_n\,x} + \frac{a_{-n}}{\sqrt{L}} e^{-i\,k_n\,x} \right] \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_n}{\sqrt{L}} \Big[\cos(k_n x) + i\, \sin(k_n x) \Big] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{a_{-n}}{\sqrt{L}} \Big[\cos(-\,k_n x) + i\, \sin(-\,k_n x) \Big] \right\} \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_n}{\sqrt{L}} \Big[\cos(k_n x) + i\, \sin(k_n x) \Big] + \frac{a_{-n}}{\sqrt{L}} \Big[\cos(k_n x) - i\, \sin(k_n x) \Big] \right\} \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) + i\, \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) \right]
\end{aligned}$$

Dando un nome ai coefficienti di seno e coseno

$$A_n = \frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{L}} \qquad \left(\Rightarrow\ A_0 = \left[\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{L}} \right]_{n=0} = \frac{2\,a_0}{\sqrt{L}} \right), \qquad B_n = i\, \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{L}}$$

la serie di Fourier diventa:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\,k_n x}}{\sqrt{L}} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x) \Big],$$

che è detta **serie trigonometrica di Fourier**.

Perciò la serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\,k_n\,x}}{\sqrt{L}}, \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\,k_n\,x} f(x)\, dx, \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n, \qquad L = b - a.$$

si può riscrivere come

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{i\,k_n\,x}}{\sqrt{L}} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x) \Big], \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n, \qquad L = b - a}$$

dove i coefficienti A_n e B_n possono essere calcolati tramite gli integrali che definiscono i coefficienti a_n. Per A_0 abbiamo:

$$A_0 = \frac{2\,a_0}{\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\,k_0\,x} f(x)\, dx, \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_0 = \frac{2}{L} \int_a^b f(x)\, dx}$$

dove abbiamo sfruttato che $k_0 = \frac{2\pi}{L} \cdot 0 = 0$. Gli altri A_n sono invece dati da:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\,k_n\,x} f(x)\, dx + \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b e^{-i\,k_{-n}\,x} f(x)\, dx \right] \\
&= \frac{1}{L} \left[\int_a^b e^{-i\,k_n\,x} f(x)\, dx + \int_a^b e^{i\,k_n\,x} f(x)\, dx \right] = \frac{1}{L} \int_a^b \left(e^{-i\,k_n\,x} + e^{i\,k_n\,x} \right) f(x)\, dx
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che $k_{-n} = \frac{2\pi}{L}(-n) = -k_n$. Grazie alla relazione trigonometrica $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ otteniamo infine:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L}\int_a^b \cos(k_n x)\, f(x)\, dx}$$

Analogamente, per i B_n abbiamo:

$$\begin{aligned} B_n &= i\,\frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{L}} = \frac{i}{\sqrt{L}}\left[\frac{1}{\sqrt{L}}\int_a^b e^{-i\,k_n\,x}\, f(x)\, dx - \frac{1}{\sqrt{L}}\int_a^b e^{-i\,k_{-n}\,x}\, f(x)\, dx\right] \\ &= \frac{i}{L}\left[\int_a^b e^{-i\,k_n\,x}\, f(x)\, dx - \int_a^b e^{i\,k_n\,x}\, f(x)\, dx\right] = \frac{-i}{L}\int_a^b \left(e^{i\,k_n\,x} - e^{-i\,k_n\,x}\right)\, f(x)\, dx \end{aligned}$$

che, grazie alla relazione trigonometrica $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ diventa:

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L}\int_a^b \sin(k_n x)\, f(x)\, dx}$$

7.1 Serie trigonometrica di Fourier per funzioni pari e dispari

Per la serie trigonometrica di Fourier vale naturalmente il teorema di Dirichlet (essendo la serie trigonometrica di Fourier una semplice riscrittura della la serie di Fourier) e pertanto essa convergerà puntualmente alla funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ dove questa è continua:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[A_n\,\cos(k_n x) + B_n\,\sin(k_n x)\Big] = \bar{f}(x)\,.$$

Guardando il membro di sinistra vediamo che esso è la somma di termini con parità definita:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{2}\,,\ A_n\cos(k_n x)\ \ (n\in\mathbb{Z}^+) \quad &\to \quad \text{sono funzioni pari di } x \\ B_n\sin(k_n x)\ \ (n\in\mathbb{Z}^+) \quad &\to \quad \text{sono funzioni dispari di } x \end{aligned}$$

Pertanto se anche la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ ha parità definita, cioè se $\bar{f}(x)$ è pari o dispari, affinché i due membri dell'equazione possano avere la stessa parità, deve essere:

- Se la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ è **pari**, cioè se

  $$\bar{f}(-x) = \bar{f}(x)$$

  allora i coefficienti B_n sono tutti zero:

  $$B_n = 0 \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

  e quindi

  $$\boxed{\text{Se}\quad \bar{f}(x)\quad \text{è } \textbf{pari}, \qquad \bar{f}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\,\cos(k_n x), \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\,n, \qquad L = b - a}$$

- Se la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ è **dispari**, cioè se

$$\bar{f}(-x) = -\bar{f}(x)$$

allora i coefficienti A_n sono tutti zero:

$$A_n = 0 \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

e quindi

$$\boxed{\text{Se} \quad \bar{f}(x) \quad \text{è } \textbf{dispari}, \qquad \bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n, \qquad L = b - a}$$

8 Esempio di serie di Fourier

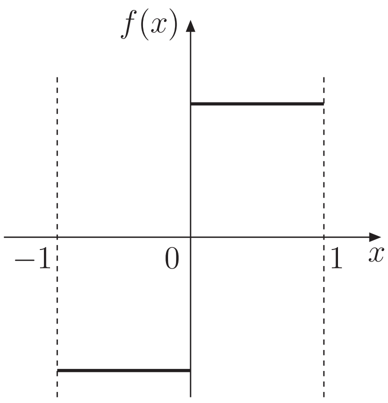
Consideriamo una semplice funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$, con una discontinuità di prima specie e che non soddisfa la condizione $f(-1) = f(1)$:

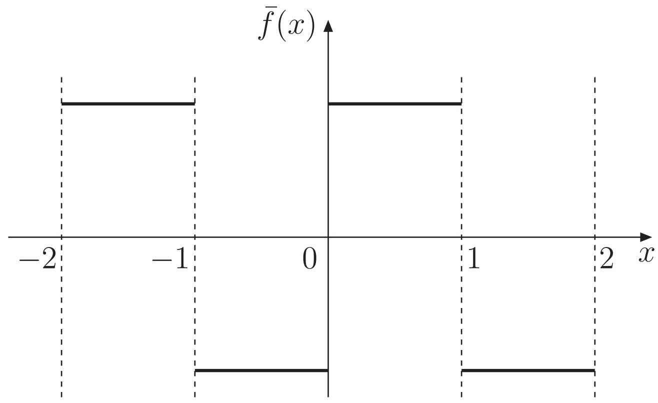
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ +1 & \;\;\,0 < x < 1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$a = -1, \qquad b = 1, \qquad L = b - a = 1 - (-1) = 2.$$

Vista la semplicità della funzione, possiamo disegnarla, insieme alla sua versione periodicizzata $\bar{f}(x)$:





Quindi la funzione ha un salto in $x = 0$

$$f(0^-) = -1, \qquad f(0^+) = 1,$$

e agli estremi -1 e 1 assume valori differenti:

$$f(-1) = -1, \qquad f(1) = 1.$$

Calcoliamo ora i coefficienti a_n della serie di Fourier:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{L}}\int_a^b e^{-i\,\frac{2\pi}{L}\,n\,x}\,f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 e^{-i\,\pi\,n\,x}\,f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^0 e^{-i\,\pi\,n\,x}\,f(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-i\,\pi\,n\,x}\,f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Nel primo integrale x è compresa tra -1 e 0, quindi $f(x) = -1$; invece nel secondo integrale x è compresa tra 0 e 1 e quindi $f(x) = 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^0 e^{-i\,\pi\,n\,x}\,(-1)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-i\,\pi\,n\,x}\,(1)\,dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\,\pi\,n\,x}}{-i\,\pi\,n}\right]_{-1}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\,\pi\,n\,x}}{-i\,\pi\,n}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{-i\,\pi\,n} - \frac{e^{i\,\pi\,n}}{-i\,\pi\,n}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{e^{-i\,\pi\,n}}{-i\,\pi\,n} - \frac{1}{-i\,\pi\,n}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{-i\pi n}\left(-1 + e^{i\,\pi\,n} + e^{-i\,\pi\,n} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{i\pi n}\left(2 - e^{i\,\pi\,n} - e^{-i\,\pi\,n}\right) \end{aligned}$$

Per proseguire conviene distinguire i coefficienti con n pari da quelli con n dispari:

- Se n è pari, allora $e^{i\,\pi\,n} = e^{-i\,\pi\,n} = 1$ e quindi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{i\pi n}\,(2 - 1 - 1) = 0.$$

- Se n è dispari, allora $e^{i\,\pi\,n} = e^{-i\,\pi\,n} = -1$ e quindi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{i\pi n}\,(2 + 1 + 1) = \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{i\pi n}.$$

Quindi lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ è dato da:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\frac{e^{i\,\frac{2\pi}{L}\,n\,x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\frac{e^{i\,\pi\,n\,x}}{\sqrt{2}} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{i\pi n}\,\frac{e^{i\,\pi\,n\,x}}{\sqrt{2}} = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\,e^{i\,\pi\,n\,x}.$$

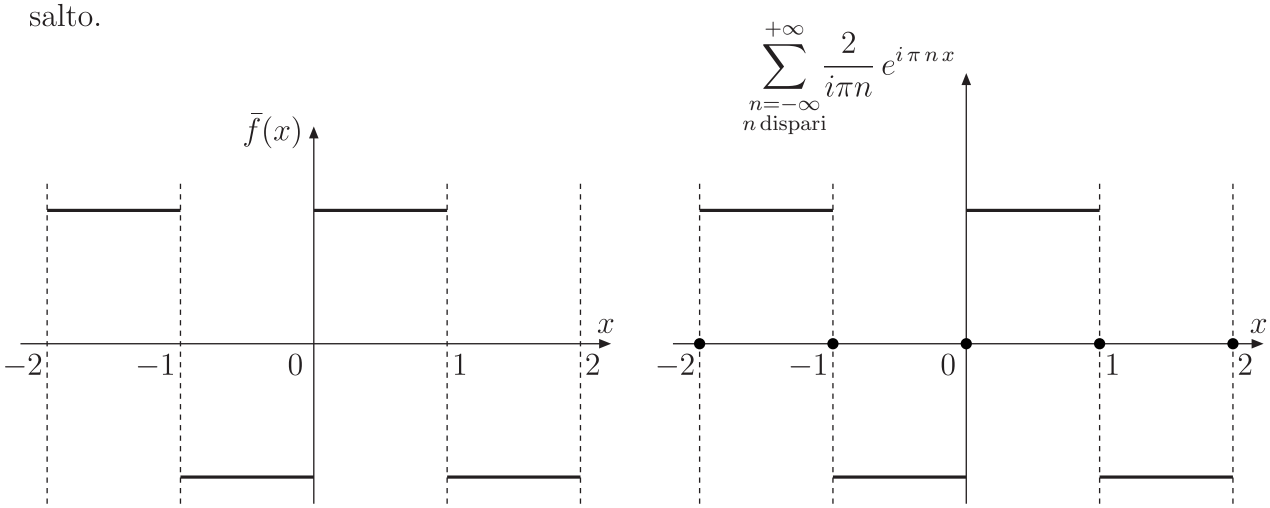
Da questo risultato possiamo verificare come si comporta la serie nel punto di discontinuità:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\,e^{i\,\pi\,n\,x}\right]_{x=0} &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n} = \frac{2}{i\pi(1)} + \frac{2}{i\pi(-1)} + \frac{2}{i\pi(3)} + \frac{2}{i\pi(-3)} + \cdots = 0, \\ \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} &= \frac{-1+1}{2} = 0, \end{aligned}$$

e agli estremi:

$$
\begin{aligned}
\Bigg[\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\, e^{i\,\pi\,n\,x}\Bigg]_{x=-1} &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\, e^{-i\,\pi\,n} = -\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n} \\
&= -\frac{2}{i\pi(1)} - \frac{2}{i\pi(-1)} - \frac{2}{i\pi(3)} - \frac{2}{i\pi(-3)} - \cdots = 0, \\
\Bigg[\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\, e^{i\,\pi\,n\,x}\Bigg]_{x=1} &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n}\, e^{i\,\pi\,n} = -\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{2}{i\pi n} \\
&= -\frac{2}{i\pi(1)} - \frac{2}{i\pi(-1)} - \frac{2}{i\pi(3)} - \frac{2}{i\pi(-3)} - \cdots = 0, \\
\frac{f(-1)+f(1)}{2} &= \frac{-1+1}{2} = 0,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato nuovamente che $e^{i\,\pi\,n} == e^{-i\,\pi\,n} = -1$ per n dispari.
Effettivamente nei punti di discontinuità di $\bar{f}(x)$, la serie di Fourier converge a metà del salto.



9 Esempio di serie trigonometrica di Fourier

Calcoliamo la serie trigonometrica di Fourier

$$
\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)\Big], \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n, \qquad L = b - a
$$

dell'esempio precedente:

$$
f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ +1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad a = -1, \quad b = 1, \quad L = b - a = 1 - (-1) = 2.
$$

Prima di calcolare i coefficienti, notiamo che la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$ è dispari. Ci aspettiamo quindi di avere $A_0 = A_n = 0$. Verifichiamolo.

Per il coefficiente A_0 abbiamo:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = -\int_{-1}^0 dx + \int_0^1 dx \\
&= -\Big[x\Big]_{-1}^0 + \Big[x\Big]_0^1 = -\big[0-(-1)\big] + \big[1-0\big] = -1+1 = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente per A_n otteniamo:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b \cos\left(\frac{2\pi}{L}\,n\,x\right) f(x)\,dx = \int_{-1}^1 \cos(\pi n x)\, f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^0 \cos(\pi n x)\, f(x)\,dx + \int_0^1 \cos(\pi n x)\, f(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^0 \cos(\pi n x)\,dx + \int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx = -\left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 \\
&= -\left[\frac{\sin(0)}{\pi n} - \frac{\sin(-\pi n)}{\pi n}\right] + \left[\frac{\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{\sin(0)}{\pi n}\right] = 0.
\end{aligned}$$

I coefficienti B_n invece sono:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b \sin\left(\frac{2\pi}{L}\,n\,x\right) f(x)\,dx = \int_{-1}^1 \sin(\pi n x)\, f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^0 \sin(\pi n x)\, f(x)\,dx + \int_0^1 \sin(\pi n x)\, f(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^0 \sin(\pi n x)\,dx + \int_0^1 \sin(\pi n x)\,dx = \left[\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{\cos(0)}{\pi n} - \frac{\cos(-\pi n)}{\pi n}\right] - \left[\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} - \frac{\cos(0)}{\pi n}\right] = \frac{1}{\pi n} - \frac{\cos(\pi n)}{\pi n} - \frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} \\
&= 2\,\frac{1-\cos(\pi n)}{\pi n}
\end{aligned}$$

Distinguendo gli n pari da quelli dispari, abbiamo:

$$\cos(\pi n) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{array} \right. = (-1)^n.$$

Quindi avremo

- Per n è pari:
$$B_n = 2\,\frac{1-(+1)}{\pi n} = 0.$$
- Per n è dispari:
$$B_n = 2\,\frac{1-(-1)}{\pi n} = \frac{4}{\pi n}.$$

Perciò lo sviluppo in serie trigonometrica di Fourier di $f(x)$ è dato da:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}\, n\, x\right), = \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x).$$

Anche per la serie trigonometrica possiamo verificare come si comporta la serie nel punto di discontinuità:

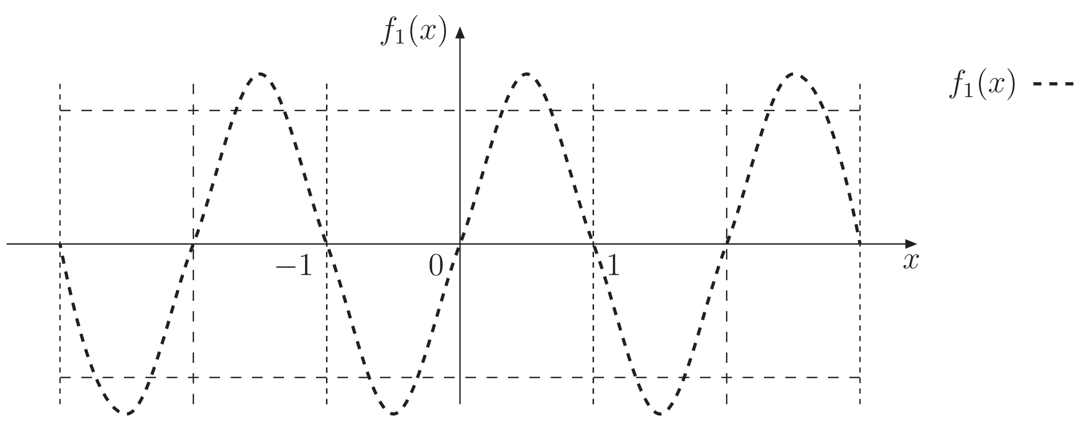
$$\begin{aligned} \left[\sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x)\right]_{x=0} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n}(0) = 0, \\ \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} &= \frac{-1+1}{2} = 0, \end{aligned}$$

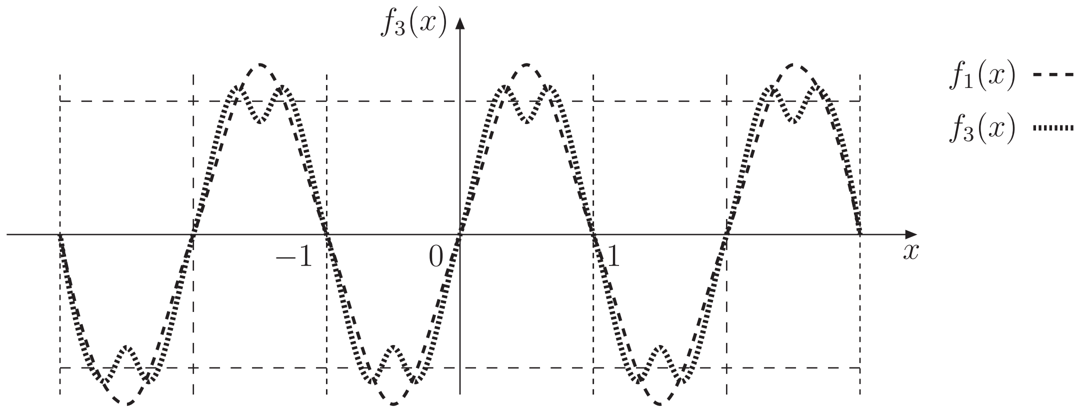
e agli estremi:

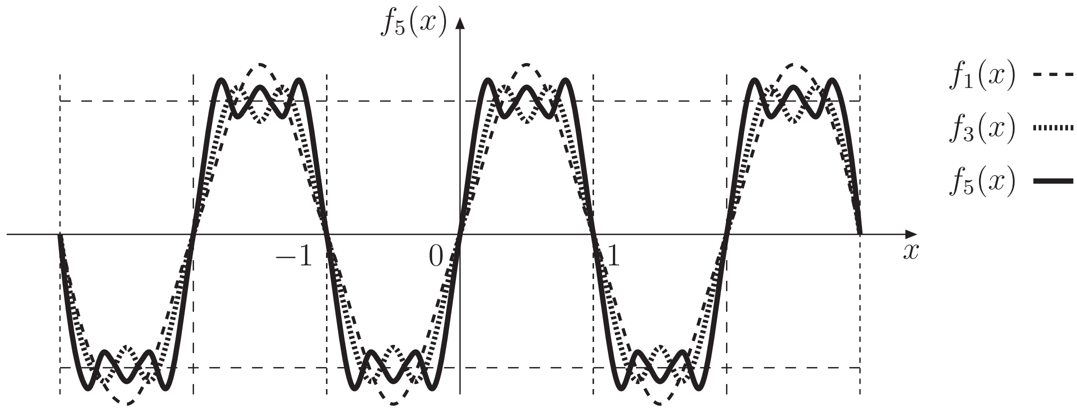
$$\begin{aligned} \left[\sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x)\right]_{x=-1} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(-\pi n) = 0, \\ \left[\sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x)\right]_{x=1} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n) = 0, \\ \frac{f(-1)+f(1)}{2} = \frac{-1+1}{2} &= 0, \end{aligned}$$

Con la serie trigonometrica è più semplice rappresentare graficamente i contributi dei vari termini della serie:

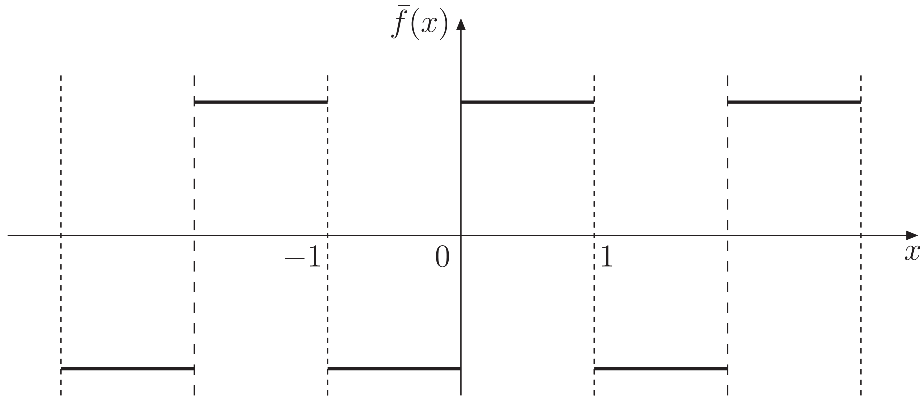
$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\,\text{dispari}}}^{+\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{4}{\pi}\sin(\pi x)}_{f_1(x)} + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x)}_{f_3(x)} + \frac{4}{5\pi}\sin(5\pi x)}_{f_5(x)} + \ldots.$$







e confrontarli con la funzione periodicizzata $\bar{f}(x)$:



Come si può notare, già il solo primo termine $f_1(x)$ della serie trigonometrica di Fourier riproduce l'andamento periodico di $\bar{f}(x)$, ma ne approssima in maniera in po' rozza il comportamento costante -1 e $+1$. Aumentando il numero dei termini, l'andamento viene sempre migliorato e diventa sempre più simile ad una costante nei vari intervalli. Tuttavia i punti dove $\bar{f}(x)$ ha un salto rimangono fissi a metà del salto: questo ci dice che ogni singolo termine della serie (che è continua) passa a metà di ogni salto di $\bar{f}(x)$ (che non è dappertutto continua).

10 Significato della serie di Fourier

La serie trigonometrica di Fourier è molto utile per capire il significato della serie di Fourier e quale tipo di approssimazione della funzione i suoi termini descrivono. I termini della serie trigonometrica di Fourier sono seni e coseni, i cui argomenti crescono al crescere di n (k_n è proporzionale a n). Il seno e il coseno sono funzioni oscillanti periodiche regolari, che in fisica sono usate per descrivere fenomeni oscillatori con frequenza costante. Questi fenomeni oscillatori possono essere di vario tipo: per esempio nel caso dell'oscillatore armonico abbiamo il movimento oscillatorio di un corpo; nelle onde sonore è la pressione dell'aria ad oscillare nel tempo e nello spazio; nelle onde elettromagnetiche l'oscillazione riguarda invece i vettori campo elettrico e campo magnetico; in un circuito in corrente altenata, è la corrente elettrica ad oscillare.

In ognuno di questi casi, la *frequenza dell'oscillazione* è data dalla quantità che moltiplica la variabile nell'argomento del seno o del coseno. Nel caso della serie trigonometrica quindi ogni termine della serie descrive un'oscillazione con frequanza k_n. Come si vede bene nel grafico dell'esempio della sezione 9, man mano che cresce il parametro n su cui sommiamo, tanto più cresce k_n e quindi la frequenza dell'oscillazione. Quindi i termini della serie trigonometrica descrivono da $n = 1$ a $n = +\infty$ oscillazioni a frequenza via via maggiore.

Se il seno o il coseno sono moltiplicati da una costante, questa a sua volta descrive l'*ampiezza dell'oscillazione*, che determina quali sono i valori massimo e minimo tra cui oscilla la quantità fisica tipica del fenomeno oscillatorio. Nell'oscillatore armonico l'ampiezza dell'oscillazione determina la distanza dei punti dello spazio tra i quali oscilla il corpo; nelle onde sonore l'ampiezza dell'oscillazione descrive i valori massimo e minimo della pressione dell'aria; e così via. Nel caso della serie trigonometrica la costante che moltiplica i coseni e i seni sono i coefficienti A_n e B_n, che pertanto descrivono l'ampiezza dell'oscillazione corrispondente. Avendo a che fare con una somma di seni e coseni con frequenze diverse, i coefficienti A_n e B_n dicono quanto è importante la corrispondente oscillazione.

Mettendo tutto insieme, possiamo dire che la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ scompone la funzione nelle sue oscillazioni elementari (cioè a frequanze costanti multiple di $2\pi/L$). La $f(x)$ descrive in pratica anch'essa un'oscillazione (non per forza periodica e regolare) che è la somma di tante oscillazioni elementari, che sono descritte dai singoli termini della serie di Fourier. L'importanza del contributo della singola oscillazione nel formare la funzione $f(x)$ è determinata dal corrispondente coefficiente A_n o B_n. Si chiama frequenza *portante* la frequenza predominante, cioè la frequenza del termine della serie con coefficiente (A_n o B_n) maggiore. Normalmente i coefficienti della serie trigonometrica sono decrescenti, quindi il primo termine non nullo è quello della frequenza portante e, al crescere di n, si hanno i contributi con ampiezza via via più piccola[3]. Capiamo quindi ora il tipo di approssimazione descritta dai singoli termini della serie di Fourier: al crescere di

[3] Nell'esempio trattato nella sezione 9, si vede che la frequenza portante è data dal termine $n = 1$, con frequenza $k_1 = \pi$ e ampiezza $B_1 = 4/\pi$. I termini successivi poi *modulano* la frequenza portante con oscillazioni di ampiezza via via minore ($B_3 = 4/(3\pi) < B_1$, $B_3 = 4/(5\pi) < B_3 < B_1$, ecc...).

n ogni termine aggiunge alla serie un *modo di oscillazione* a frequenza via via maggiore e, normalmente, di ampiezza via via minore.