# Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

02/02/2022

## Esercizio 1

Cinque corone sferiche conduttrici concentriche, di spessore trascurabile, di raggi $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 2$ cm, $R_3 = 3$ cm, $R_4 = 4$ cm, e $R_5 = 5$ cm, hanno inizialmente carica nulla. La seconda e la terza sono unite da un filo conduttore, come pure la quarta e la quinta. Sul conduttore più interno si deposita una carica $q = 4 \cdot 10^{-9}$ C.
Calcolare:

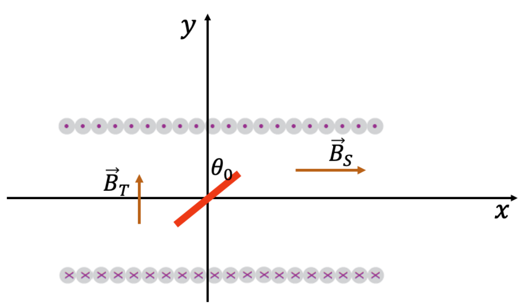
1) la carica indotta su ogni corona sferica;

2) la differenza di potenziale tra la corona più interna e quella più esterna;

3) l'energia elettrostatica totale.

## Esercizio 2

Un solenoide rettilineo indefinito con densità di spire $n = 10$ spire/cm è percorso da una corrente $i = 12$ mA. Il solenoide ha asse perpendicolare al campo magnetico terrestre $\vec{B}_T$. Un ago magnetico con momento di dipolo $\mu = 6.6 \cdot 10^{-4}$ Am$^2$, massa $m = 10$ g e lunghezza $\ell = 1$ cm, situato all'interno del solenoide, si dispone in modo da formare un angolo $\theta_0 = 30^o$ rispetto a $\vec{B}_T$. Calcolare:




1) l'intensità del campo magnetico terrestre ($B_T$);

2) la frequenza delle piccole oscillazioni del dipolo intorno alla posizione di equilibrio;

3) il momento meccanico che occorre applicare per tenere fermo il dipolo lungo $\vec{B}_T$;

4) il lavoro meccanico necessario per invertire la direzione del dipolo rispetto alla configurazione del punto 3).

Nota: il momento di inerzia di una barretta di lunghezza $\ell$ e massa $m$ rispetto a un asse passante per il centro e ad essa ortogonale è $\frac{1}{12}m\ell^2$.

## Esercizio 3

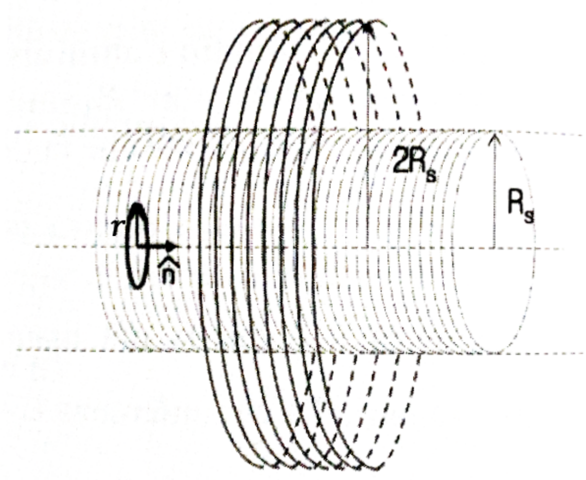
Un solenoide ideale, costituito da spire avvolte su un cilindro di raggio $R_S = 1$ cm con densità $n = 1000$ spire al metro è alimentato con una corrente $i(t) = i_0 \sin \omega t$ A ($i_0 = 4$ A e $\omega = 100$ s$^{-1}$). Determinare

1) l'espressione del campo elettrico, nonché la sua intensità massima alla distanza $r_1 = R_s/2$ dall'asse del solenoide;

3) l'espressione del campo elettrico, nonché la sua intensità massima alla distanza $r_2 = 2R_s$ dall'asse del solenoide;

3) la corrente (espressione e intensità massima)che circola in una bobina di raggio $r_2 = 2R_S$, disposta come in figura, formata da $N = 10$ spire di resistenza totale $R = 2\,\Omega$.

4) la corrente che circola in una bobina di raggio $r_3 = 3R_S$, disposta come in figura, formata da $N = 10$ spire di resistenza totale $R = 2\,\Omega$.



# Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

02/02/2022

## Soluzioni

### Esercizio 1

Posta la carica $q$ sul conduttore più interno, sugli altri si avrà, per induzione completa:

$$q_1 = q_3 = q_5 = q \quad \text{e} \quad q_2 = q_4 = -q$$

Le corone 2 e 3 sono allo stesso potenziale, perché unite con un conduttore. Lo stesso vale per le corone 4 e 5. La differenza di potenziale tra la prima corona e l'ultima vale pertanto

$$\Delta V_{1,5} = \Delta V_{1,2} + \Delta V_{3,4} = q\left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{3,4}}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{R_4 - R_3}{R_3 R_4}\right) \simeq 2100V$$

Ponendo a 0 il potenziale all'infinito, l'energia elettrostatica totale è data dalla somma dell'energia elettrostatica dei due condensatori sferici $(1, 2)$ e $(3, 4)$, e di quella della corona sferica 5 che ha una carica $q$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{q^2}{2C_{1,2}} + \frac{q^2}{2C_{3,4}} + \frac{q^2}{2C_5} \\ &= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{R_4 - R_3}{R_3 R_4} + \frac{1}{R_5}\right) \\ &= 5.63 \cdot 10^{-6}\ \text{J} \end{aligned}$$

### Esercizio 2

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano. Supponiamo che l'asse del solenoide sia disposto lungo l'asse $x$ e indichiamo il campo generato dalla corrente nel solenoide come $\vec{B}_S = \mu_0 n i \hat{u}_x$. Il campo magnetico terrestre è invece diretto lungo l'asse y: $\vec{B}_T = B_T \hat{u}_y$. Il campo risultante è nel piano $xy$ e vale

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_T + \vec{B}_S = B_T \hat{u}_y + \mu_0 n i \hat{u}_x$$

Se indichiamo con $\theta$ l'angolo tra il momento magnetico dell'ago e il campo magnetico terrestre (quindi con l'asse $y$), il momento meccanico che agisce sull'ago è

$$\vec{M}(\theta) = \vec{\mu} \times \vec{B}_{tot} = \mu B_T \sin\theta \hat{u}_z - \mu\mu_0 n i \cos\theta \hat{u}_z$$

Per inciso, si noti che

$$\vec{M}(0) = -\mu\mu_0 n i \hat{u}_z$$

All'equilibrio, il momento meccanico è nullo e quindi

$$\mu B_T \sin\theta_0 = \mu\mu_0 n i \cos\theta_0 \implies B_T = \frac{\mu_0 n i}{\tan\theta_0} = 2.61 \cdot 10^{-5}\, T$$

Il modulo del campo magnetico risultante è

$$B_{tot} = \sqrt{B_T^2 + \mu_0^2 n^2 i^2} = 3.016 \cdot 10^{-5}\, T$$

Si tratta di una posizione di equilibrio stabile attorno alla quale l'ago magnetico può compiere delle oscillazioni. Indichiamo con $\alpha$ l'angolo tra il momento magnetico della sbarretta e il campo magnetico risultante $\vec{B}_{tot}$. La seconda equazione cardinale del moto si scrive come:

$$\vec{\mu} \times \vec{B}_{tot} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

dove $I = 1/12 m\ell^2$ è il momento di inerzia dell'ago magnetico rispetto a un asse ortogonale passante per il suo centro. Tenendo conto che si tratta di un momento di richiamo, la proiezione di questa equazione sull'asse $z$ nel limite di piccole oscillazioni ($\sin\alpha \simeq \alpha$) è

$$-\mu B_{tot}\alpha = \frac{m\ell^2}{12}\frac{d^2\alpha}{dt^2} \implies \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{12\mu B_{tot}}{m\ell^2}\right)\alpha = 0$$

La frequenza di oscillazione è pertanto:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12\mu B_{tot}}{m\ell^2}} = 0.0778\, s$$

Se si vuole invece mantenere l'ago magnetico allineato con l'asse $y$ ($\theta = 0$), occorre applicare un momento meccanico esterno $\vec{M}_e$ in modo che il momento risultante sia nullo per $\theta = 0$:

$$\vec{M}_e + \vec{M}(0) = 0 \implies \vec{M}_e = \mu\mu_0 n i \hat{u}_z \implies M_e = 9.95 \cdot 10^{-9}\ Nm$$

Il lavoro che occorre compiere per ruotare di $\pi$ rad l'ago magnetico a partire dalla posizione in cui è allineato con il campo magnetico terrestre è pari alla variazione di energia potenziale magnetica ($U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{tot}$):

$$L = U_f - U_i = \mu B_T - (-\mu B_T) = 2\mu B_T = 3.45 \cdot 10^{-8}\ J$$

## Esercizio 3

All'interno del solenoide, l'induzione magnetica è in modulo:

$$B(t) = \mu_0 n i(t)$$

Per la simmetria del sistema, il campo elettrico indotto all'interno del solenoide può essere valutato applicando la legge di Faraday su un percorso chiuso circolare di raggio $r < R_S$ centrato sull'asse del solenoide e disposto normalmente ad esso (cfr figura). Si ottiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} \implies 2\pi r E(r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}$$

da cui si ricava per $r_1 = R_S/2$

$$E(r_1) = -\frac{\mu_0 n R_S}{4} \omega i_0 \cos \omega t = 1.26 \cdot 10^{-3} \cos \omega t \quad V/m$$

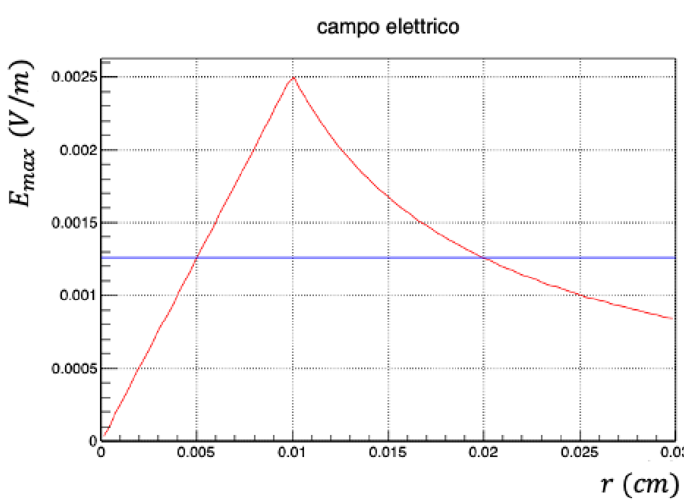
Se $r > R_S$, la circuitazione del campo elettrico è

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E(r) = -\pi R_S^2 \mu_0 n \frac{di}{dt} = -\pi R_S^2 \mu_0 n \omega i_0 \cos \omega t$$

da cui si ricava, per $r_2 = 2R_S$

$$E(r_2) = -\frac{\mu_0 n R_S}{4} \omega i_0 \cos \omega t = 1.26 \cdot 10^{-3} \cos \omega t \quad V/m$$

che coincide con il valore trovato per $r_1$. In figura è riportato l'andamento dell'intensità massima del campo con la distanza dall'asse.



La forza elettromotrice indotta sulle $N$ spire della bobina vale:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\pi R_S^2 \mu_0 n N \omega i_0 \cos \omega t$$

Si noti che, per $r > R_S$, la f.e.m. non dipende dalla distanza dall'asse del solenoide. La corrente che percorre la bobina è

$$i_B(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{\pi R_S^2 \mu_0 n N \omega i_0}{R} \cos \omega t = 0.79 \cos \omega t \quad mA$$

Nel caso in cui il raggio della bobina sia $r_3 = 3R_S$, la corrente ha lo stesso valore trovato per il raggio $r_2$ in quanto la resistenza dell'avvolgimento è la medesima e la f.e.m. non dipende dalla distanza.