Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 18 giugno 2024

Esercizio 1

Sia data la funzione di variabile complessa z

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{z\,n}} \frac{1}{1 - e^{z/n}}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

(a) Studiare la funzione in $z = \infty$ per tutti i valori permessi di n, specificando se è un punto regolare o singolare, il tipo di singolarità e l'ordine del polo o zero secondo il caso.

(b) Determinare tutti i punti singolari di $f(z)$ al finito per $n = 2$, indicando il tipo di singolarità e l'ordine dei poli.

(c) Per $n = 1$, calcolare l'integrale di $f(z)$ su un cammino di integrazione circolare chiuso, centrato su $z = 0$ con $|z| = 1$ (cammino in senso antiorario).

Soluzione

Definiamo per comodità

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - e^{z\,n}}, \qquad f_2(z) = \frac{1}{1 - e^{z/n}}.$$

(a) Studiamo il punto all'infinito controllando il comportamento di $f_{1/2}(1/t)$ per $t = 0$. Abbiamo

$$f_1(1/t) = \frac{1}{1 - e^{n/t}}, \qquad f_2(1/t) = \frac{1}{1 - e^{1/(n\,t)}}.$$

Per $t = 0$, entrambe le funzioni hanno un punto di accumulazione di singolarità. Questo si può vedere riscrivendo f_1 e f_2 come

$$\begin{aligned} f_1(1/t) &= \frac{e^{-n/(2\,t)}}{e^{-n/(2\,t)}\,(1 - e^{n/t})} = \frac{e^{-n/(2\,t)}}{e^{-n/(2\,t)} - e^{n/(2\,t)}} = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{-n/(2\,t)}}{\sinh\left(n/(2\,t)\right)} \\ f_2(1/t) &= \frac{e^{-1/(2\,n\,t)}}{e^{-1/(2\,n\,t)}\,(1 - e^{1/(n\,t)})} = \frac{e^{-1/(2\,n\,t)}}{e^{-1/(2\,n\,t)} - e^{1/(2\,n\,t)}} = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{-1/(2\,n\,t)}}{\sinh\left(1/(2\,n\,t)\right)}. \end{aligned}$$

Per entrambe le funzioni, indipendentemente dal valore di n, a causa del seno iperbolico, c'è un'infinità di singolarità sull'asse immaginario che si accumulano in $t = 0$, che risulta pertanto essere un punto di accumulazione di singolarità. Quindi, la funzione $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ ha una singolarità non isolata per $z = \infty$, per tutti i valori permessi di n.

(b) Si trovano punti singolari per valori di z per cui il denominatore di f_1 o f_2 si annulla:

$$f_1: \qquad 1 - e^{z\,n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{z\,n} = e^{i\,2\pi\,k_1} \qquad \Longrightarrow \qquad z_{k_1} = 2\pi i\,\frac{k_1}{n}, \quad k_1 \in \mathbb{Z};$$

$$f_2: \qquad 1 - e^{z/n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{z/n} = e^{i\,2\pi k_2} \qquad \Longrightarrow \qquad z_{k_2} = 2\pi i\,k_2\,n, \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

I valori trovati sopra sono zeri semplici dei denominatori, visto che

$$f_1: \qquad \lim_{z \to z_{k_1}} \frac{d}{d\,z}\left(1 - e^{z\,n}\right) = \lim_{z \to z_{k_1}} \left(-n\,e^{z\,n}\right) = -\,n\,e^{z_{k_1}\,n} = -\,n;$$

$$f_2: \qquad \lim_{z \to z_{k_2}} \frac{d}{d\,z}\left(1 - e^{z/n}\right) = \lim_{z \to z_{k_2}} \frac{-e^{z/n}}{n} = \frac{-e^{z_{k_2}/n}}{n} = -\,\frac{1}{n}.$$

Quindi mettendo $n = 2$ abbiamo che

$$f_1 \quad \text{ha poli semplici in} \quad z_{k_1} = i\,\pi\,k_1\,, \quad k_1 \in \mathbb{Z};$$
$$f_2 \quad \text{ha poli semplici in} \quad z_{k_2} = i\,4\pi\,k_2\,, \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Per la funzione $f = f_1\,f_2$, notiamo che tutti i poli di f_2 sono anche poli di f_1 e di conseguenza essi sono poli doppi di f, mentre tutti gli altri poli di f_1 sono anche poli semplici di f. Quindi possiamo scrivere

$$f \quad \text{ha poli semplici in} \quad z_k = i\,\pi\,k, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{\text{multipli di } 4\};$$
$$f \quad \text{ha poli doppi in} \quad z_k = i\,4\pi\,k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Dobbiamo calcolare

$$I \equiv \oint dz \frac{1}{\left(1 - e^z\right)^2} = 2\pi i \sum_{z_i} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(1 - e^z\right)^2}\right]_{z = z_i}$$

dove z_i sono le singolarità all'interno del cammino circolare centrato nell'origine del piano complesso con $|z| = 1$. Nel nostro caso, c'è solo un polo doppio che contribuisce all'integrale, in $z = 0$. Per calcolare il residuo scriviamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(1 - e^z\right)^2}\right]_{z=0} &= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{\left(1 - e^z\right)^2} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{1 - e^z}\right)^2 \\
&= \lim_{z \to 0} 2\,\frac{z}{1 - e^z}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1 - e^z}\right) \\
&= \lim_{z \to 0} 2\,\frac{z}{1 - e^z}\,\frac{1 - e^z + z\,e^z}{\left(1 - e^z\right)^2}.
\end{aligned}$$

Per calcolare il limite, sviluppiamo e^z intorno a $z=0$

$$e^z = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l\,!}\,,$$

da cui si possono ricavare le relazioni

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + O\left(z^3\right) \\ 1 - e^z &= \, - z - \frac{z^2}{2} + O\left(z^3\right) \\ z\, e^z &= z + z^2 + O\left(z^3\right)\ , \end{aligned}$$

da cui abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(1-e^z\right)^2}\right]_{z=0} &= \lim_{z\to 0} 2\,\frac{z}{1-e^z}\,\frac{1-e^z+z\,e^z}{\left(1-e^z\right)^2} \\ &= \lim_{z\to 0} 2\,\frac{z}{-z+O\left(z^2\right)}\,\frac{z^2/2+O\left(z^3\right)}{z^2+O\left(z^3\right)} \\ &= \lim_{z\to 0} 2\,\frac{z}{-z}\,\frac{z^2/2}{z^2} = \lim_{z\to 0} 2\,(-1)\,\left(\frac{1}{2}\right) = -1\,. \end{aligned}$$

Quindi, si trova che l'integrale vale

$$I = 2\pi i\,(-1) = -\,2\pi\, i.$$

Esercizio 2

Data l'equazione differenziale

$$(z-1)^2 u''(z) + (z+c)u'(z) - azu(z) = 0, \qquad a, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

(a) Quali condizioni devono essere soddisfatte da a, c, affinché l'equazione abbia *solo* singolarità fuchsiane?

(b) Determinare l'equazione indiciale con i parametri che soddisfano le condizioni ottenute in (a) per tutte le singolarità fuchsiane al finito.

(c) Risolvere l'equazione indiciale per $a = 4$. Scrivere la soluzione per $u_1(z)$, corrispondente a $\rho_1 \geq \rho_2$, e trovare la relazione di ricorrenza per i coefficienti c_k (senza risolverla in forma chiusa). Qual è il raggio di convergenza di questa soluzione? La soluzione $u_1(z)$ è un polinomio nella variabile z?

(d) Scrivere la forma della seconda soluzione $u_2(z)$ senza calcolarne i coefficienti.

Soluzione

Sia data l'equazione differenziale

$$(z-1)^2 u''(z) + (z+c)u'(z) - azu(z) = 0, \qquad a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0. \tag{1}$$

La si può riscrivere in forma normale

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0, \tag{2}$$

con $P(z) = (z+c)/(z-1)^2$, $Q(z) = -az/(z-1)^2$.

(a) Affinché l'equazione sia fuchsiana per ogni $z \in \mathbb{C}$, i limiti $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)$ e $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 Q(z)$ devono essere finiti per tutte le singolarità z_0 di $P(z), Q(z)$, in questo caso $z_0 = 1$. Segue che $c = -1$, memtre non vi sono vincoli su a.

b) L'unica singolarità al finito è $z_0 = 1$. Con $c = -1$ abbiamo

$$P(z) = \frac{1}{z-1} \qquad \text{e} \qquad Q(z) = -\frac{az}{(z-1)^2}, \tag{3}$$

quindi

$$p_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)P(z) = 1 \qquad \text{e} \qquad q_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)^2 Q(z) = -a. \tag{4}$$

L'equazione indiciale è quindi data da

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = \rho^2 - a = 0. \tag{5}$$

c) Per $a = 4$, $\rho_{1,2} = \pm 2$. La forma di $u_1(z)$ è

$$
\begin{aligned}
u_1(z) &= (z-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^k \quad (c_0 \neq 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^{k+2} \,, \\
u_1'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) c_k (z-1)^{k+1} \,, \\
u_1''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_k (z-1)^k \,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Inseriamo le derivate nell'equazione differenziale:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ (k+2)(k+1) c_k (z-1)^{k+2} + (k+2) c_k (z-1)^{k+2} \\
&\qquad - 4[1 + (z-1)] c_k (z-1)^{k+2} \Big\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+4) c_k (z-1)^{k+2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^{k+3} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+4) c_k (z-1)^{k+2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^{k+3} \\
&= \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+1)(k'+5) c_{k'+1} (z-1)^{k'+3} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-1)^{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+1)(k+5) c_{k+1} - 4 c_k \Big] (z-1)^{k+3} \,.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Quindi otteniamo

$$
c_{k+1} = \frac{4}{(k+1)(k+5)} c_k \,, \qquad k = 0, 1, \ldots \,. \tag{8}
$$

Il raggio di convergenza è dato da

$$
\left[\lim_{k \to \infty} \frac{4}{(k+1)(k+5)} \right]^{-1} = \infty \,. \tag{9}
$$

Dal momento che $4/[(k+1)(k+5)]$ non si annulla mai, $u_1(z)$ non è un polinomio in z.

(d) Siccome $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$u_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-1)^{k-2} + d\, u_1(z) \ln(z-1)\,, \tag{10}$$

dove d può essere uguale o diverso da 0.

Esercizio 3

Si consideri la funzione a variabile complessa s

$$F(s) = \frac{1}{s\,\sin(\frac{\pi\,s}{c})}, \qquad\qquad c = a + i\,b \in \mathbb{C}.$$

(a) Dire per quali valori del parametro complesso $c = a + i\,b$ la funzione $F(s)$ possa essere interpretata come una trasformata di Laplace e trovare l'ascissa di convergenza.

(b) Nel caso $c = i$, calcolare l'antitrasformata di Laplace $f(t)\theta(t)$ di $F(s)$.

(c) Calcolare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo $L = 2\pi$

$$g(t) = t, \qquad -\pi \leq t \leq \pi\,.$$

(d) Grazie al risultato del punto (c) è possibile semplificare il risultato ottenuto al punto (b) per la $f(t)\theta(t)$. Calcolare quanto vale $f(t)\theta(t)$ in $t = 4$ e dire se vale 0, $2i$, $4i$ oppure $\frac{4i}{\pi}$.

Soluzione

(a) Perchè una funzione $F(s)$ sia una trasformata di Laplace deve esistere un'ascissa di convergenza α_0 tale che $F(s)$ non abbia singolarità nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ e che

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \;\text{ per }\; \mathrm{Re}(s) > \alpha_0.$$

La prima condizione implica che deve esistere una singolarità s_0 di $F(s)$ a destra della quale $F(s)$ è regolare. Per la funzione in questione, le uniche singolarità sono il polo doppio in $s = 0$ e i poli semplici in

$$\frac{\pi\,s}{c} = \pi\,n \qquad \Leftrightarrow \qquad s = n\,c = n(a+ib) \qquad \text{con} \qquad n \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

La parte reale di questi poli semplici è $n\,a$ con $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Essendo una successione infinita di poli con parte reale sempre più grande (a destra come a sinistra), l'unica possibilità affinché esista una singolarità di $F(s)$ a destra della quale $F(s)$ è regolare è che sia

$$a = 0.$$

In questo caso la funzione diventa

$$F(s) = \frac{1}{s\,\sin(\frac{\pi\, s}{ib})}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

e ha un polo doppio in $s = 0$ e poli semplici in

$$s_n = i\,n\,b \qquad n \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

che hanno tutti parte reale nulla:

$$\mathrm{Re}(s_n) = \mathrm{Re}(i\,n\,b) = 0.$$

Pertanto l'ascissa di convergenza è

$$\boxed{\alpha_0 = 0}$$

Affinché la $F(s)$ sia ben definita, deve naturalmente essere

$$b \neq 0.$$

Verifichiamo ora l'altra condizione:

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} F(s) = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} \frac{1}{s\,\sin(\frac{\pi\, s}{ib})} = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} \frac{2\,i}{s\,(e^{\frac{\pi\, s}{b}} - e^{-\frac{\pi\, s}{b}})} = 0.$$

Infatti per $b > 0$ il secondo esponenziale va a zero, mentre il primo va a $+\infty$, mandando così la funzione a zero. Se invece $b < 0$, è il primo esponenziale ad andare a zero, mentre il secondo va a $+\infty$, mandando ancora la funzione a zero.

Riassumendo le condizioni su $c = a + ib$ affinché $F(s)$ possa essere interpretata come una trasformata di Laplace sono

$$\boxed{a = 0, \qquad b \neq 0}$$

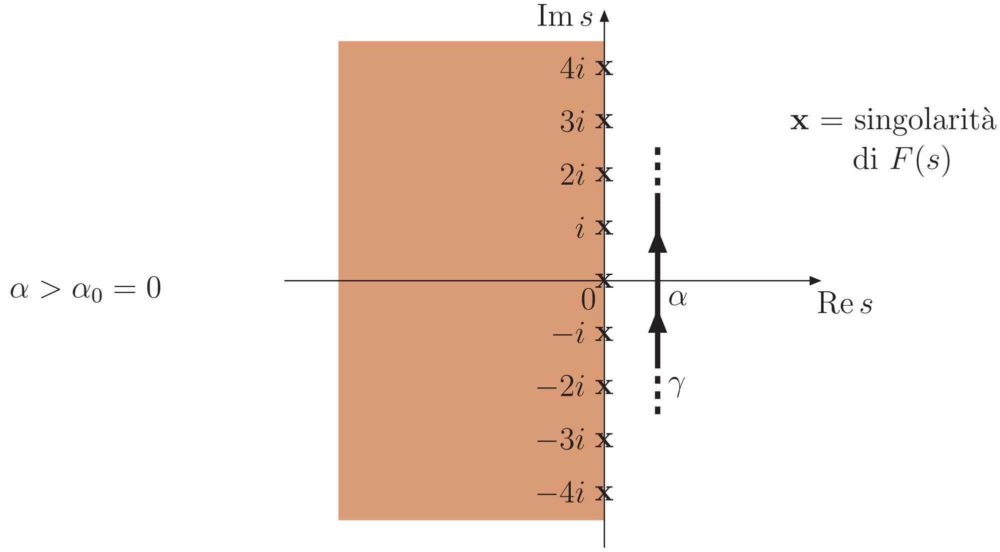
(b) Ponendo $c = i$, la funzione $F(s)$ diventa

$$F(s) = \frac{1}{s\,\sin(-i\pi s)},$$

Essendo l'ascissa di convergenza $\alpha_0 = 0$, l'antitrasformata di $F(s)$ sarà

$$f(t)\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\,e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s)\,e^{st}\,ds,$$

con l'ascissa α che deve soddisfare:



Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $F(s)$ soddisfa

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} F(s) = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} \frac{1}{s\,\sin(-i\pi s)} = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} \frac{2\,i}{s\,(e^{\pi s} - e^{-\pi\,s})} = 0.$$

Infatti per $\mathrm{Re}(s) \to -\infty$ il primo esponenziale va a zero, mentre il secondo va a $+\infty$, mandando così la funzione a zero. Invece se $\mathrm{Re}(s)$ è finita, è il fattore $1/s$ a mandare la funzione a zero nel limite.

Possiamo quindi chiudere il cammino γ a sinistra

$$f(t)\theta(t) = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} F(s)\, e^{ts}\, ds$$

e calcolare l'integrale su γ_ω^- con il teorema dei residui:

$$f(t)\theta(t) \;=\; \theta(t)\left\{\mathrm{Res}\,F(s)\,e^{st}\right\}_{s=0} + \theta(t) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left\{\mathrm{Res}\,F(s)\,e^{st}\right\}_{s=s_n}$$

dove ora $s_n = in$. Essendo $s = 0$ un polo doppio e $s = s_n$ poli semplici, otteniamo

$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \theta(t) \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{s\,e^{st}}{\sin(-i\pi s)} + \theta(t) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{s_n t}}{s_n} \lim_{s\to s_n} \frac{s - s_n}{\sin(-i\pi s)} \\ &= \theta(t) \lim_{s\to 0} \frac{(1+st)e^{st}\sin(-i\pi s) + s\,e^{st} i\pi\cos(-i\pi s)}{\sin^2(-i\pi s)} \\ &\quad + \theta(t) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{s_n t}}{s_n} \lim_{s\to s_n} \frac{1}{-i\pi\cos(-i\pi s)}\,. \end{aligned}$$

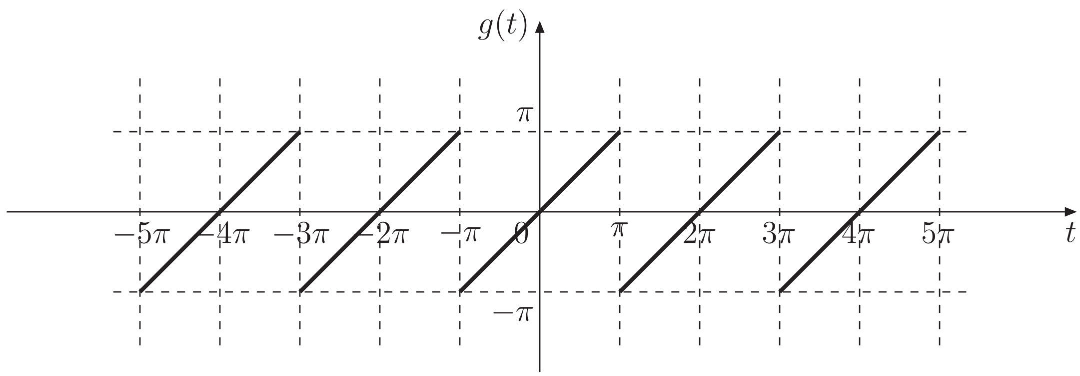
Nell'ultimo passaggio abbiamo usato de l'Hôpital. Per calcolare il primo limite conviene fare un'espansione in s del seno e del coseno:

$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \theta(t)\left[\lim_{s\to 0}\frac{(1+st)e^{st}(-i\pi s)+s\,e^{st}i\pi+\mathcal{O}(s^3)}{(-i\pi s)^2+\mathcal{O}(s^3)}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{e^{int}}{n\pi\cos(\pi n)}\right] \\ &= \theta(t)\left[\frac{it}{\pi}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\,e^{int}\right]. \end{aligned}$$

(c) La funzione periodica di periodo $L = 2\pi$

$$g(t) = t, \qquad -\pi \le t \le \pi$$

assume questa forma



cioè

$$g(t) = \begin{cases} \dots & \\ t+4\pi & \text{per} \quad -5\pi \le t \le -3\pi \\ t+2\pi & \text{per} \quad -3\pi \le t \le -\pi \\ t & \text{per} \quad -\pi \le t \le +\pi \\ t-2\pi & \text{per} \quad +\pi \le t \le +3\pi \\ t-4\pi & \text{per} \quad +3\pi \le t \le +5\pi \\ \dots & \end{cases}$$

La serie di Fourier di $g(t) = t$ è data da

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}\,e^{int}$$

dove, distinguendo i casi $n \neq 0$ e $n = 0$, i coefficienti valgono

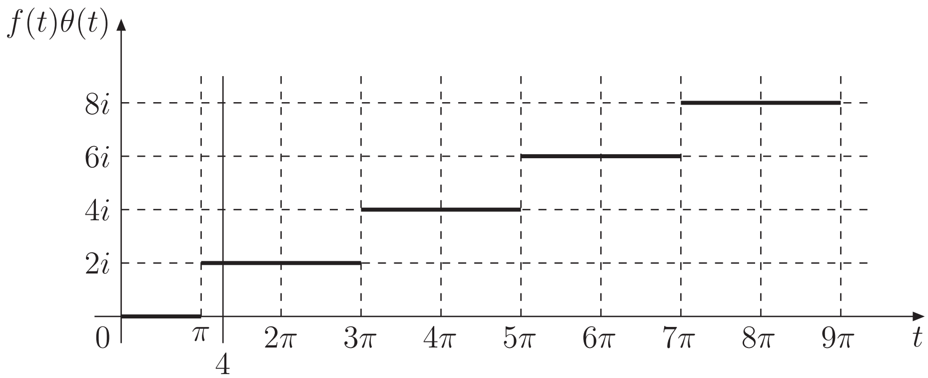
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, g(t)\, e^{-int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, t\, e^{-int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, t\, \frac{d}{dt} \frac{e^{-int}}{-in} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi e^{-i\pi n} - (-\pi) e^{i\pi n}}{-in} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, \frac{e^{-int}}{-in} \\
&= -\sqrt{2\pi}\, \frac{(-1)^n}{in} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\pi n} - e^{i\pi n}}{(-in)^2} = i\,\sqrt{2\pi}\, \frac{(-1)^n}{n} \\
a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, t = 0\,,
\end{aligned}
$$

Pertanto la serie di Fourier di $g(t)$ è

$$
g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{int} = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, e^{int}
$$

(d) Confrontando il risultato ottenuto per la serie di Fourier di $g(t)$ con il risultato ottenuto al punto (b), possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
f(t)\theta(t) = \theta(t)\, \frac{i}{\pi} \big[t - g(t)\big] \quad &= \begin{cases} \frac{i}{\pi}[t - t] & \text{per} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{i}{\pi}[t - (t - 2\pi)] & \text{per} \quad \pi \leq t \leq 3\pi \\ \frac{i}{\pi}[t - (t - 4\pi)] & \text{per} \quad 3\pi \leq t \leq 5\pi \\ \dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 2i & \text{per} \quad \pi \leq t \leq 3\pi \\ 4i & \text{per} \quad 3\pi \leq t \leq 5\pi \\ \dots \end{cases}
\end{aligned}
$$



Pertanto

$$
\boxed{\text{in } t = 4, \qquad f(t)\theta(t) = 2i}
$$