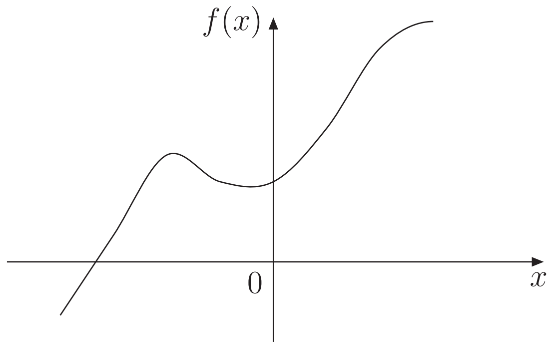
Funzioni analitiche

1 Funzioni reali a variabile reale

La funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} & \longrightarrow & f(x) \in \mathbb{R} \end{array}$$

è una funzione reale a variabile reale. Questa di solito si può rappresentare graficamente:



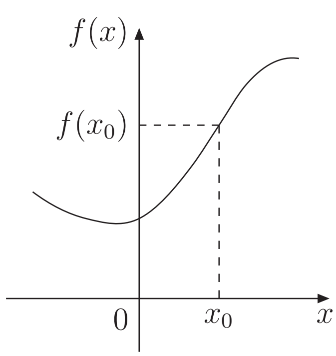
Una funzione reale a variabile reale $f(x)$ è **continua** in un punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

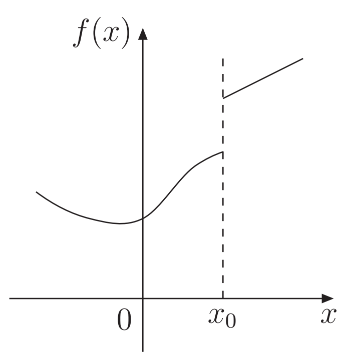
ossia, ricordando la definizione di limite, se

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0 \qquad / \qquad \text{se} \quad |x - x_0| < \delta, \qquad \text{allora} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

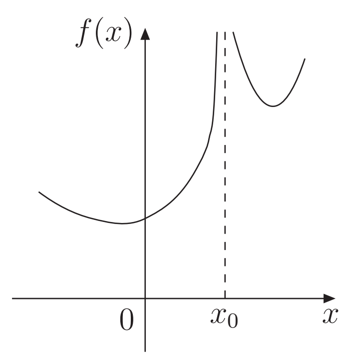
Detto in maniera più intuitiva, una funzione reale a variabile reale $f(x)$ è **continua** in un punto x_0 se, nel disegnarla, al passaggio per l'ascissa x_0 non devo staccare la matita dal foglio:



continua in x_0



discontinua in x_0

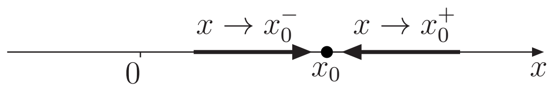


discontinua in x_0

Ci accorgiamo che, per avere la continuità in x_0, la funzione $f(x)$ deve tendere allo stesso valore finito $f(x_0)$ da qualunque parte si raggiunga x_0, cioè sia che si raggiunga x_0 da sinistra, sia che lo si faccia da destra:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Abbiamo indicato con $x \to x_0^-$ il limite sinistro e con $x \to x_0^+$ il limite destro:



2 Funzioni complesse a variabile reale

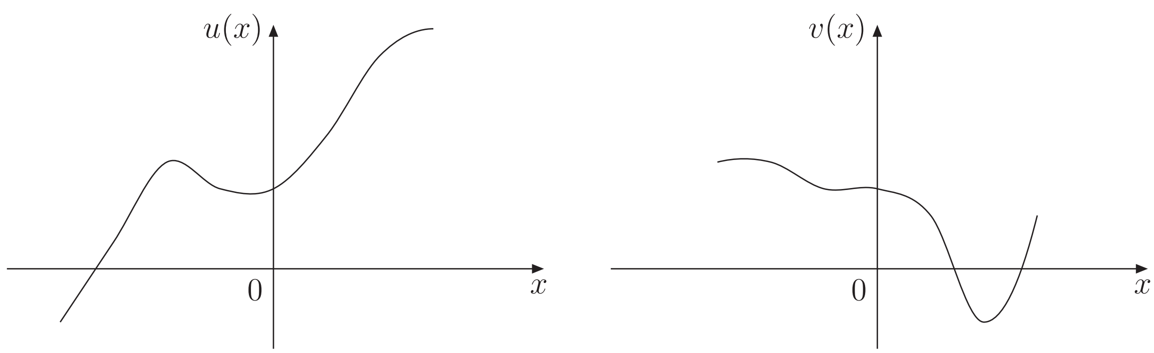
La funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x \in \mathbb{R} & \longrightarrow & f(x) \in \mathbb{C} \end{array}$$

è una funzione complessa a variabile reale. Poichè $f(x)$ è un numero complesso, esso ha una parte reale e una parte immaginaria. Poiché questo è vero per ogni punto x, la parte reale e la parte immaginaria di $f(x)$ sono entrambe funzioni reali a variabile reale:

$$f(x) = u(x) + i\, v(x)$$

dove, come detto, $u(x)$ e $v(x)$ sono funzioni reali a variabile reale. Quindi di fatto una funzione complessa a variabile reale è rappresentabile come una coppia di funzioni reali a variabile reale. Quindi la rappresentazione grafica di $f(x)$ sarà data da quella di $u(x)$ e $v(x)$:



Analogamente alle funzioni reali a variabile reale, una funzione complessa a variabile reale $f(x)$ è **continua** in un punto x_0 se

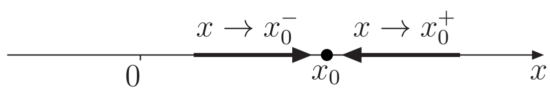
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0 \qquad / \qquad \text{se} \quad |x - x_0| < \delta, \qquad \text{allora} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Questo equivale a richiedere che siano continue le funzioni reali a variabile reale $u(x)$ e $v(x)$, o equivalentemente le funzioni reali a variabile reale $\rho(x)$ e $\theta(x)$.
Continuando l'analogia con le funzioni reali a variabile reale, per avere la continuità in x_0, la funzione complessa $f(x)$ deve tendere allo stesso valore complesso finito $f(x_0)$ da qualunque parte si raggiunga x_0, cioè sia che si raggiunga x_0 da sinistra, sia che lo si faccia da destra:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

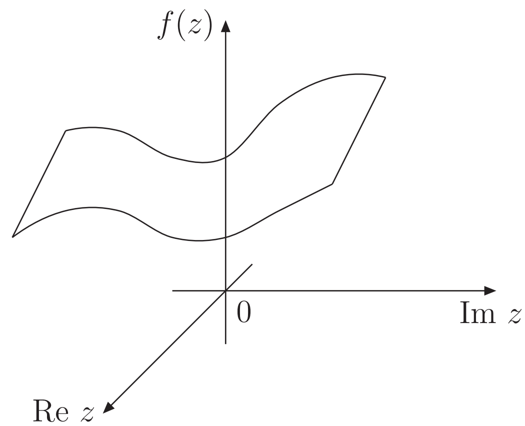


3 Funzioni reali a variabile complessa

La funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z \in \mathbb{C} & \longrightarrow & f(z) \in \mathbb{R} \end{array}$$

è una funzione reale a variabile complessa. Questa si può più difficilmente rappresentare graficamente perché l'ascissa è un numero complesso, quindi al posto dell'asse x dovremmo considerare il piano complesso con assi cartesiani $\mathrm{Re}\{z\}$ e $\mathrm{Im}\{z\}$



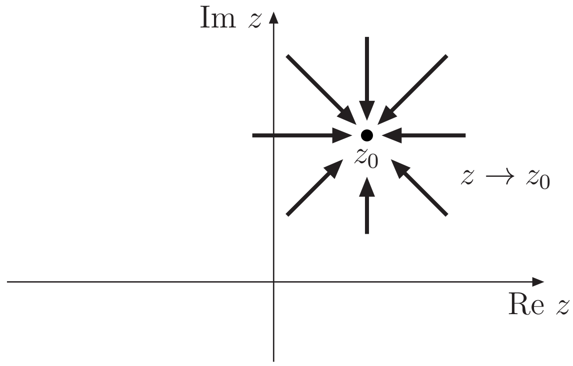
e la funzione è rappresentata da una superficie. Dalla rappresentazione grafica si capisce che una funzione a variabile complessa è difficile da immaginare.
Per la continuità avremo che, anche in questo caso, una funzione reale a variabile complessa $f(z)$ è **continua** in un punto z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ossia, ricordando la definizione di limite, se

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0 \qquad / \qquad \text{se} \quad |z - z_0| < \delta, \qquad \text{allora} \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

La traduzione grafica di questa definizione è più difficile e non lo faremo. Usiamo però l'analogia con le funzioni reali a variabile reale, nel dire che anche per le funzioni reali a variabile complessa, per avere la continuità in z_0, la funzione complessa $f(z)$ deve tendere allo stesso valore finito $f(z_0)$ da qualunque parte si raggiunga z_0. A differenza però delle funzioni reali a variabile reale, ora i modi di raggiungere z_0 non sono solo da sinistra e da destra. Infatti essendo z_0 un numero complesso si può raggiungere z_0, da sinistra, da destra, dall'alto, dal basso o da qualunque direzione:



Esempi di funzioni reali a variabile complessa sono:

- $f(z) = |z|$
- $f(z) = \mathrm{Re}\, z$
- $f(z) = \mathrm{Im}\, z$
- $\phi(z) = \arg z$

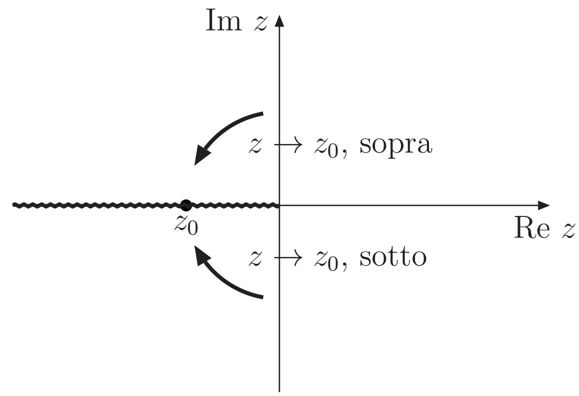
  In questo caso abbiamo

$$\phi : \qquad \mathbb{C} - \{0\} \qquad \longrightarrow \qquad I_{2\pi} \subseteq \mathbb{R}$$

  dove $I_{2\pi}$ è un intervallo semi aperto di lunghezza 2π.

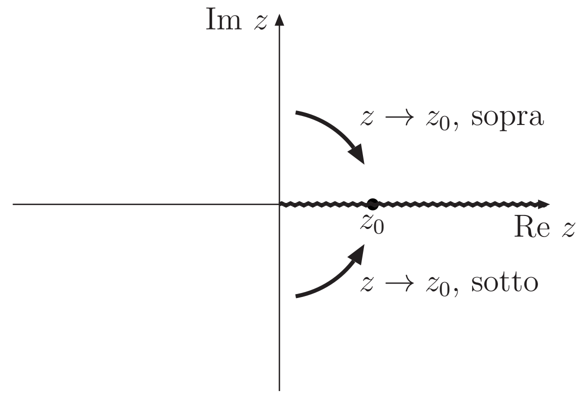
  In ogni caso, qualunque sia la scelta dell'intervallo $I_{2\pi}$, la funzione $\phi(z) = \arg z$ è discontinua su una semiretta che parte dall'origine $z = 0$ e va all'infinito. Vediamolo esplicitamente con due scelte per $I_{2\pi}$:

  (a) $I_{2\pi} \;=\; \big] -\pi, +\pi \big]$
  In questo caso la funzione $\phi(z) = \arg z$ è discontinua su tutto il semiasse reale negativo, cioè in tutti i punti z_0 tali che $\mathrm{Im}\, z_0 = 0, \mathrm{Re}\, z_0 \leq 0$



$$\lim_{z\to z_0,\ \text{sopra}} \phi(z) = +\,\pi\,, \qquad\qquad \lim_{z\to z_0,\ \text{sotto}} \phi(z) = -\,\pi$$

(b) $I_{2\pi} \;=\; \big[0, 2\pi\big[$
In questo caso la funzione $\phi(z) = \arg z$ è discontinua su tutto il semiasse reale positivo, cioè in tutti i punti z_0 tali che $\operatorname{Im} z_0 = 0, \operatorname{Re} z_0 \geq 0$



$$\lim_{z\to z_0,\ \text{sopra}} \phi(z) = 0\,, \qquad\qquad \lim_{z\to z_0,\ \text{sotto}} \phi(z) = 2\pi$$

4 Funzioni complesse a variabile complessa

La funzione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z \in \mathbb{C} & \longrightarrow & f(z) \in \mathbb{C} \end{array}$$

è una funzione complessa a variabile complessa. Scomponendo z nella sua parte reale x e parte immaginaria y

$$z = x + i\,y$$

e f nella sua parte reale u e parte immaginaria v, otteniamo

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

abbiamo che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono funzioni reali a due variabili reali. Una rappresentazione grafica è ancora più difficile: per farlo dovremmo disegnare entrambe le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ che sono delle superfici analoghe alla $f(z)$ della sezione **??**.

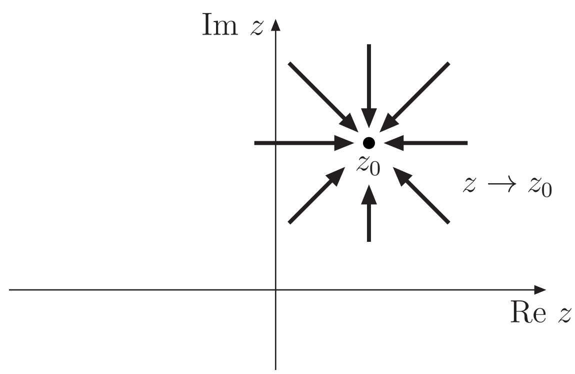
Per la continuità possiamo procedere in maniera analoga al caso delle funzioni reali a variabile reale. Una funzione complessa a variabile complessa $f(z)$ è **continua** in un punto z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ossia, ricordando la definizione di limite, se

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0 \qquad / \qquad \text{se} \quad |z - z_0| < \delta, \qquad \text{allora} \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Tralasciando anche in questo caso la traduzione grafica di questa definizione usiamo ancora l'analogia con le funzioni reali a variabile reale, nel dire che, per avere la continuità in z_0, la funzione complessa $f(z)$ deve tendere allo stesso valore finito $f(z_0)$ da qualunque parte si raggiunga z_0. Di nuovo, essendo z_0 un numero complesso, esso si può raggiungere non solo da sinistra e da destra, ma anche dall'alto, dal basso o da qualunque direzione:



Esempi di funzioni reali a variabile complessa sono:

- $f(z) = z^2$

  In questo caso, scrivendo $z = x + i\,y$ abbiamo

  $$f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

  e pertanto le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono

  $$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad\qquad v(x, y) = 2xy.$$

- $f(z) = z^*$

  In questo caso, scrivendo $z = x + i\,y$ abbiamo

  $$f(z) = z^* = (x + i\,y)^* = x - i\,y$$

  e pertanto le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono

  $$u(x, y) = x, \qquad\qquad v(x, y) = -\,y.$$

- $f(z) = \ln z$

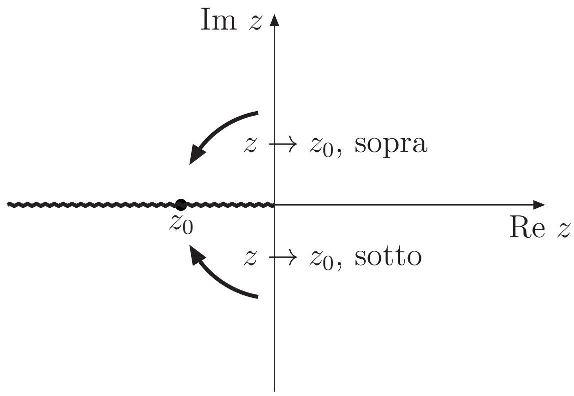
  In questo caso, scrivendo $z = r\,e^{i\theta}$ abbiamo

$$f(z) = \ln z = \ln\left(r\,e^{i\theta}\right) = \ln r + \ln\left(e^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta$$

  Scrivendo $\ln z$ in funzione di $|z|$ e $\arg z$, abbiamo

$$f(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z$$

  Pertanto $\ln z$ ha le stesse discontinuità di $\arg z$. Usando convenzionalmente l'intervallo $I_{2\pi} = \left]-\pi, +\pi\right]$ per definire $\arg z$, abbiamo che $f(z) = \ln z$ è discontinua su tutto il semiasse reale negativo, cioè in tutti i punti z_0 tali che $\operatorname{Im} z_0 = 0, \operatorname{Re} z_0 \leq 0$



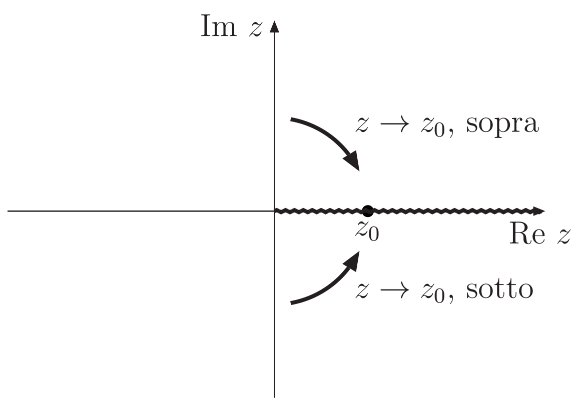
$$\lim_{z\to z_0,\ \text{sopra}} \ln(z) = \ln|z_0| + i\,\pi\,, \qquad \lim_{z\to z_0,\ \text{sotto}} \ln(z) = \ln|z_0| - i\,\pi$$

- $f(z) = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$

  Per $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f(z) = z^\alpha$ ha le stesse discontinuità di $\ln z$. Per rendersene conto basta riscrivere

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha\,\ln z} = e^{\alpha\,(\ln|z| + i\arg z)} = e^{\alpha\,\ln|z|}\,e^{i\,\alpha\,\arg z} = |z|^\alpha\,e^{i\,\alpha\,\arg z}.$$

  Usando convenzionalmente l'intervallo $I_{2\pi} = \left[0, 2\pi\right[$ per definire $\arg z$, abbiamo che $f(z) = z^\alpha$ è discontinua su tutto il semiasse reale positivo, cioè in tutti i punti z_0 tali che $\operatorname{Im} z_0 = 0, \operatorname{Re} z_0 \geq 0$



$$\lim_{z\to z_0,\,\text{sopra}} z^\alpha = |z_0|^\alpha\,, \qquad\qquad \lim_{z\to z_0,\,\text{sotto}} z^\alpha = |z_0|^\alpha\, e^{i\,2\pi\alpha}$$

Da quest'ultima formula si capisce che se α è un numero intero n la discontinuità sparisce. Infatti

$$\text{Se} \quad \alpha = n \in \mathbb{Z} \qquad \text{allora} \quad e^{i\,2\pi\alpha} = e^{i\,2\pi n} = 1.$$

5 Definifione di funzione analitica

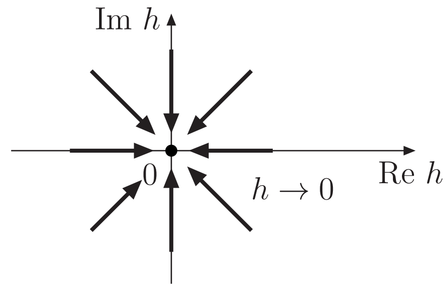
Una funzione complessa $f(z)$ si dice **analitica**, o **olomorfa**, o **regolare** in un punto z_0, se esiste un intorno $I(z_0)$ tale che in ogni punto $z \in I(z_0)$ il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$$

è **finito** e **indipendente dal modo in cui** h **va a** 0.
Se definiamo

$$h = \rho\, e^{i\theta},$$

allora



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+\rho\, e^{i\theta})-f(z)}{\rho\, e^{i\theta}}$$

Quindi la funzione $f(z)$ è analitica in z_0 se esiste un intorno $I(z_0)$ tale che in ogni punto $z \in I(z_0)$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+\rho\, e^{i\theta})-f(z)}{\rho\, e^{i\theta}}$$

è **finito** e **indipendente da** θ.
Si osservi che la defizione di olomorficità in z_0 assume che la funzione $f(z)$ sia definita in un intorno di tale punto.

5.1 Esempi

(a) $f(z) = c$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito e indipendente da θ, da cui segue che $f(z) = c$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$.

(b) $f(z) = z$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito e indipendente da θ, da cui segue che $f(z) = z$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{\frac{1}{z+h}-\frac{1}{z}}{h} = \frac{z-(z+h)}{(z+h)z\,h} = \frac{z-z-h}{(z+h)z\,h} = \\ &= \frac{-h}{(z+h)z\,h} = -\frac{1}{(z+h)z}.\end{aligned}$$

Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = -\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(z+h)z} = -\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(z+\rho\, e^{i\theta})z} = -\frac{1}{z^2}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto indipendente da θ e finito dappertutto, tranne in $z=0$. Quindi $f(z) = 1/z$ è analitica in $\mathbb{C} - \{0\}$.

(d) $f(z) = z^*$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{z^*+h^*-z^*}{h} = \frac{h^*}{h} = \frac{\rho\, e^{-i\theta}}{\rho\, e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito, ma dipende sempre da θ. Quindi $f(z) = z^*$ non è analitica in nessun punto di $\mathbb{C}$.

(e) $f(z) = |z|^2$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \frac{(z^*+h^*)(z+h)-z^*z}{h} \\ &= \frac{z^*z+h^*z+z^*h+h^*h-z^*z}{h} = \frac{h^*z+z^*h+h^*h}{h}.\end{aligned}$$

Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{h^*z+z^*h+|h|^2}{h} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\, e^{-i\theta}\, z+z^*\,\rho\, e^{i\theta}+\rho^2}{\rho\, e^{i\theta}} \\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-i\theta}\, z+z^*\, e^{i\theta}+\rho}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}\, z+z^*\, e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}\, z+z^*\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito, ma dipende sempre da θ (tranne in $z=0$). Quindi $f(z) = |z|^2$ non è analitica in nessun punto di $\mathbb{C}$ (neanche in $z=0$, perché l'analiticità richiede la derivabilità in un intorno, mentre $f(z)$ è derivabile solo in $z=0$, ma non in un suo intorno).