Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

17/06/2022

Esercizio 1

In un condensatore piano (armature di area $\Sigma = 400$ cm^2, distanti tra loro $h = 1$ cm) viene inserita parallelamente alle armature una lastra conduttrice a facce piane parallele, ciascuna di area Σ, e spessa $x = 5$ mm. Calcolare di quanto varia la capacità del condensatore e quanto lavoro viene speso per inserire la lastra, nelle due ipotesi che l'inserimento avvenga

1) mantenendo costante la carica sulle armature ($q_0 = 3.54 \cdot 10^{-7}$ C);

2) mantenendo la differenza di potenziale tra le medesime al valore costante $\Delta V_0 = 10^4$ V.

Esercizio 2

Una sfera conduttrice carica ($q = 10^{-6}$ C) di raggio $R = 10$ cm e momento di inerzia $I = 0.04 \text{ kg m}^2$, ruota con velocità angolare $\omega = 10^3$ rad/s attorno a un suo diametro. Calcolare:

1) il campo magnetico $\vec{B}$ nel centro della sfera in modulo, direzione e verso;

2) il momento magnetico $\vec{\mu}$ della sfera in modulo direzione e verso;

3) il rapporto giromagnetico μ/L della sfera (dove L è il momento angolare).

Esercizio 3

Su un solenoide toroidale a sezione rettangolare (con riferimento alla Figura 3A: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm) di raggio interno $R = 5$ cm sono avvolte $N = 500$ spire. Lungo l'asse di simmetria del solenoide è disposto un filo rettilineo (si veda la Figura 3A), percorso da una corrente variabile secondo la legge $i(t) = i_0 \cos \omega t$ con $i_0 = 50$ A e $\omega = 2.5 \cdot 10^3$ rad/s. Calcolare:

1) il coefficiente di mutua induzione del sistema;

2) la corrente i' indotta nel solenoide, assumento trascurabile la resistenza R_0 dell'avvolgimento;

3) il coefficiente di mutua induzione nel caso in cui, invece di avere un filo rettilineo, si abbia una spira circolare concatenata con il solenoide, come in Figura 3B.

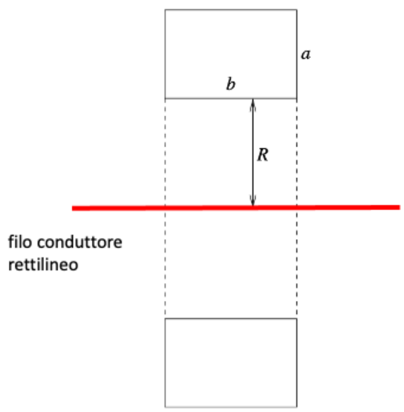


Figura 3A

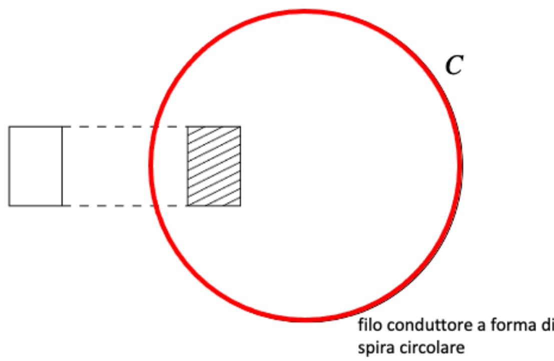


Figura 3B

Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

17/06/2022

Soluzioni

Esercizio 1

Assumiamo che vi sia induzione completa. Prima dell'inserimento della lastra la capacità del condensatore è

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} = 35.4 \text{ pF}$$

Dopo l'inserimento il sistema è equivalente a due condensatori in aria, in serie, di spessori pari a x_1 e x_2 rispettivamente, con $x_1 + x_2 = h - x$. La capacità del sistema è

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x_1}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{x_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h-x}{\epsilon_0 \Sigma} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h-x} = \frac{C_0}{k} = 2 \cdot C_0 = 70.8 \text{ pF}$$

dove abbiamo indicato con k la quantità

$$k = \frac{h}{h-x} = 0.5$$

L'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore prima dell'inserimento della lastra è

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_0} = 17.7 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

mentre dopo l'inserimento è

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = k\frac{q_0^2}{2C_0} = 0.5 \cdot W_0 = 8.85 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

La differenza di energia elettrostatica rappresenta il lavoro che le forze del campo hanno compiuto per attirare la lastra all'interno del condensatore:

$$L_{q=\text{cost}} = W_0 - W = (1-k)W_0 = 8.85 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Nel caso in cui la d.d.p. sia invece mantenuta costante, il sistema deve essere collegato a un generatore di tensione durante il processo di inserimento della lastra. In questo caso, la carica collocata sul sistema aumenta dal valore iniziale q_0 a:

$$q = C\Delta V_0 = \frac{C_0 \Delta V_0}{k} = \frac{q_0}{k} = 2q_0 = 7.08 \cdot 10^{-7}\ C$$

L'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema passa dal valore iniziale

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = 17.7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

a quello finale

$$W_f = \frac{1}{2} C \Delta V_0^2 = \frac{1}{k}\frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = 35.4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

L'aumento di energia elettrostatica è

$$\Delta W = W_f - W_0 = 17.7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

Per questo il generatore compie un lavoro

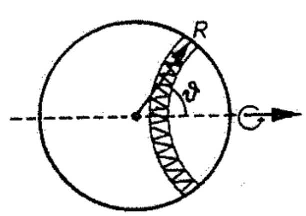
$$L_{\mathrm{gen}} = (q - q_0)\Delta V_0 = 2\Delta W = 35.4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

metà del quale va ad aumentare l'energia immagazzinata nel sistema e il restante ΔW per attirare la lastra.

Esercizio 2

La carica è distribuita uniformemente sulla superficie sferica con densità superficiale σ. Isoliamo sulla sfera la superficie elementare illustrata in figura di area

$$d\Sigma = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$



su di essa è collocata la carica $dq = \sigma d\Sigma$. Per effetto della rotazione, questo elemento di superficie è equivalente a una spira percorsa dalla corrente

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = \omega\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

Il centro della sfera si trova sull'asse di questa "spira" a una distanza $x = R\cos\theta$ da esso. Il campo magnetico dovuto alla corrente che percorre la spira equivalente è diretto parallelamente al vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ e vale in modulo

$$dB = \mu_0 di \frac{R^2 \sin^2\theta}{2\left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \mu_0 di \frac{R^2\sin^2\theta}{2R^3} = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R \sin^3\theta d\theta$$

Il campo B si ottiene integrando su θ tra 0 e π:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R = \frac{2\omega q}{3R}\frac{\mu_0}{4\pi} = 6.67 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{T}$$

Per calcolare il momento magnetico si parte dalla spira equivalente, che ha area $A = \pi R^2 \sin^2\theta$ e ha momento magnetico diretto parallelamente a $\vec{\omega}$ di modulo

$$d\mu = diA = \omega\sigma\pi R^4 \sin^3\theta d\theta$$

Il momento magnetico della sfera si ottiene per integrazione

$$\mu = \omega\sigma\pi R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\omega\sigma\pi R^4 = \frac{1}{3}\omega R^2 q = 3.33 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{A\,m^2}$$

Il rapporto giromagnetico vale

$$G = \frac{\mu}{L} = \frac{\mu}{I\omega} = \frac{1}{3I}R^2 q = 8.33 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/kg}$$

Esercizio 3

Per calcolare il coefficiente di mutua induzione nel primo caso (filo rettilineo) assumiamo che il filo sia percorso da una corrente i, dando luogo a un campo magnetico avente linee di campo che sono circonferenze che giacciono su piani perpendicolari al filo, centrate sul filo stesso. Il modulo del campo a distanza r dal filo è

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Il flusso attraverso una sezione del solenoide è

$$\Phi_s = \frac{\mu_0 i b}{2\pi}\int_R^{R+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)$$

Il flusso concatenato con tutto il solenoide è

$$\Phi = N\Phi_s = \frac{\mu_0 N i b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)$$

Il coefficiente di mutua induzione è quindi

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right) = 3.527\cdot 10^{-6}\ \mathrm{H}$$

Il filo è percorso da una corrente che dipende dal tempo, quindi c'è una f.e.m. indotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Mi_0\frac{d}{dt}\cos\omega t = \omega M i_0 \sin\omega t$$

Se indichiamo con R_0 la resistenza dell'avvolgimento, con L il coefficiente di autoinduzione, e con i' la corrente indotta l'equazione del circuito è

$$\mathcal{E} - L\frac{di'}{dt} = R_0 i'$$

nel limite di $R_0 \to 0$ diventa

$$\frac{di'}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\omega M i_0}{L}\sin\omega t \implies i'(t) = -\frac{Mi_0}{L}\cos\omega t$$

Il campo generato dalla corrente che percorre il solenoide si calcola facilmente con il teorema di Ampère e vale

$$B(r) = N\frac{\mu_0 i'}{2\pi r}$$

cioè N volte il valore che abbiamo trovato per il campo del filo rettilineo. Il coefficiente di autoinduzione quindi si trova senza rifare i conti e vale

$$L = NM \implies i'(t) = -\frac{i_0}{N}\cos\omega t = -0.1\cos\omega t\ \ \mathrm{A}$$

L'ultima domanda riguarda il caso in cui al posto del filo rettilineo ci sia una spira. In questo caso il coefficiente di mutua induzione lo calcoliamo assumendo che il solenoide sia percorso da una corrente i' . Il flusso concatenato con la spira C (Figura 3B) è

$$\Phi_C = \frac{\mu_0 N i' b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right) \implies M = \frac{\Phi_C}{i'} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right) = 3.527{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{H}$$

Si trova lo stesso valore che abbiamo determinato per il caso del filo rettilineo.