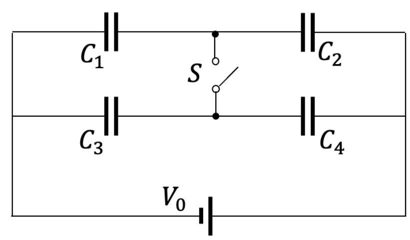
Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

12/07/2022

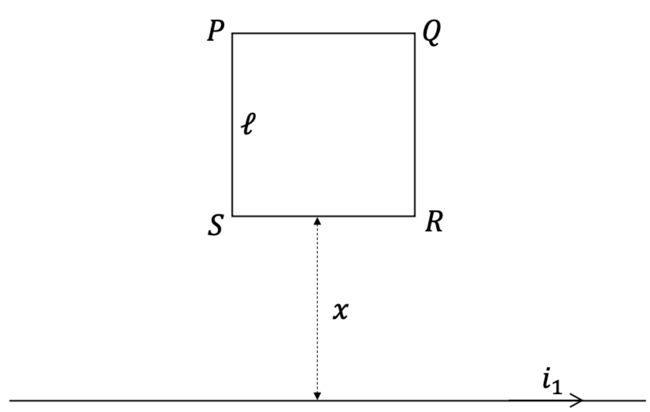
Esercizio 1

Nel circuito in figura la batteria fornisce una d.d.p. $V_0 = 12$ V. Le capacità dei condensatori sono $C_1 = 330$ pF, $C_2 = 470$ pF, $C_3 = 560$ pF, $C_4 = 1000$ pF. Determinare la carica di ciascun condensatore e l'energia elettrostatica del sistema a seconda che l'interruttore S sia aperto o chiuso.



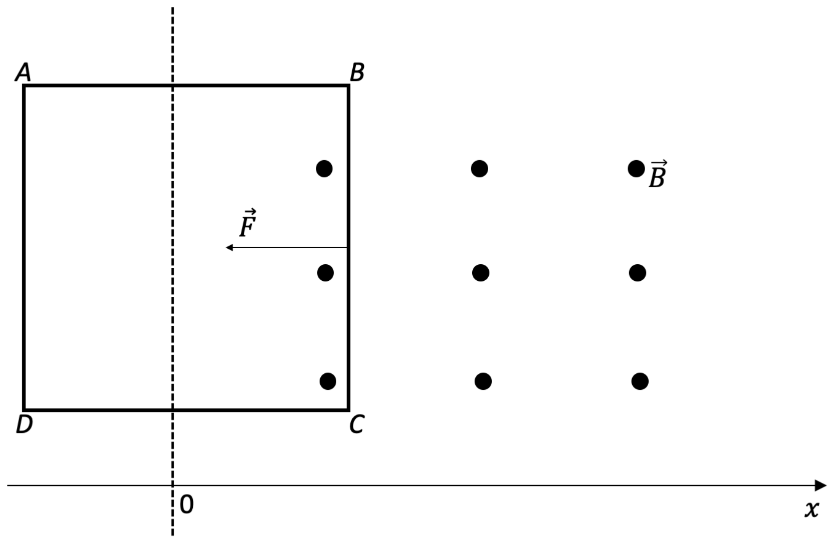
Esercizio 2

Una bobina rigida, quadrata di lato ℓ, formata da $N = 10$ spire, è posta a distanza $x = \ell$ da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente $i_1 = 100$ A nel verso indicato in figura; bobina e filo stanno sullo stesso piano orizzontale. Quando la bobina è percorsa da una corrente i_2 bisogna applicarle una forza $F = 1.96 \cdot 10^{-4}$ N, ortogonale al filo, per impedirle di andare verso il filo. Calcolare il valore e il verso di i_2. Calcolare inoltre il lavoro che bisogna spendere per far compiere alla bobina una traslazione che la porti da $x_1 = \ell$ a $x_2 = 2\ell$ rispetto al filo, con $\ell = 0.5$ m. Se invece della traslazione la spira compie una rotazione di 180^o rispetto al lato PQ, quanto vale il lavoro?



Esercizio 3

Una spira conduttrice quadrata rigida, di lato $a = 10$ cm, massa $m = 4$ g e resistenza $R = 6.24\,\Omega$, si muove con velocità costante $v_0 = 5$ m/s lungo l'asse x (vedi figura). Nel semipiano $x > 0$ esiste un campo magnetico B, uniforme e costante, ortogonale al disegno, di modulo $B = 0.8$ T, mentre nel semipiano $x < 0$ è $B = 0$. Si calcoli:



1) La forza $\vec{F}(t = 0)$ che agisce sulla spira all'istante $t = 0$ in cui il lato BC entra nel semipiano $x > 0$;

2) la velocità v_1 della spira dopo che essa è entrata completamente nel semipiano $x > 0$;

3) il tempo Δt che occorre perché ciò avvenga, a partire dall'istante $t = 0$.

Si trascuri l'autoinduzione della spira.

Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

12/07/2022

Soluzioni

Esercizio 1 Quando l'interruttore S è aperto, C_1 e C_2 sono in serie, come pure C_3 e C_4. Le capacità delle due serie valgono rispettivamente:

$$C_{s12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 193.9\,\text{pF}$$

e

$$C_{s34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 359.0\,\text{pF}$$

La carica localizzata sui condensatori 1 e 2 è

$$q_{12} = q_1 = q_2 = C_{s12} V_0 = 2.33 \text{ nC}$$

e quella sui condensatori 3 e 4 è

$$q_{34} = q_3 = q_4 = C_{s34} V_0 = 4.31 \text{ nC}$$

Visto che le due capacità C_{s12} e C_{s34} sono in parallelo(552.9 pF), l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema è

$$U = \frac{1}{2} \left(C_{s12} + C_{s34} \right) V_0^2 = 39.8 \; nJ$$

Nel caso in cui l'interruttore sia chiuso, i condensatori 1 e 3 sono in parallelo, come pure i condensatori 2 e 4. Le capacità dei due paralleli sono $C_{p13} = 890$ pF e $C_{p24} = 1.47$ nF. I due paralleli sono in serie tra loro e la capacità equivalente del sistema è $C_{eq} = 554.4$ pF. L'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema è

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V_0^2 = 39.9 \; nJ$$

Questo valore è prossimo, ma non uguale, a quello trovato nel caso di S aperto. Le d.d.p. ai capi dei due paralleli C_{p13} e C_{p24} valgono rispettivamente:

$$V_{p13} = \frac{C_{eq}}{C_{p13}} V_0 = 7.47 \text{ V}$$

e

$$V_{p24} = \frac{C_{eq}}{C_{p24}} V_0 = 4.53 \text{ V}$$

Le cariche sui 4 condensatori sono pertanto pari a $q_1 = C_1 V_{p13} = 2.47$ nC, $q_2 = C_2 V_{p24} = 2.13$ nC, $q_3 = C_3 V_{p13} = 4.19$ nC, e $q_4 = C_4 V_{p24} = 4.52$ nC.

Esercizio 2

Indichiamo con r la distanza dal filo e lavoriamo in coordinate cilindriche. Il campo magnetico generato dalla corrente nel filo dipende soltanto da r e vale in modulo:

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

Il flusso di $\vec{B}$ attraverso una singola spira della bobina vale:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \ell dr \implies \Phi = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \int_x^{x+r} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln \frac{\ell + x}{x}$$

La forza che il campo generato dal filo esercita sulla spira quando questa è percorsa da una corrente i_2 vale:

$$\vec{F} = N i_2 \nabla \Phi = -\frac{\mu_0 N i_1 i_2 \ell}{2\pi} \frac{x}{\ell + x} \frac{\ell}{x^2} \hat{u}_r = -\frac{\mu_0 N i_1 i_2 \ell^2}{2\pi x (\ell + x)} \hat{u}_r$$

La forza è attrattiva se la corrente nella bobina scorre in verso antiorario, quindi la forza applicata dall'esterno per mantenere in posizione la bobina è diretta verso l'alto. Il valore di i_2 si determina uguagliando il modulo della forza esercitata dal campo magnetico a $F = 1.96 \cdot 10^{-4}$ N per $x = \ell$:

$$F = \frac{\mu_0 N i_1 i_2}{4\pi} \implies i_2 = \frac{4\pi F}{\mu_0 N i_1} = 1.96 \text{ A}$$

Il lavoro che compiuto dal campo per spostare la bobina da $x_1 = \ell = 0.5m$ a $x_2 = 2\ell$ è dato dall'espressione:

$$L = N i_2 \left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right] = \frac{\mu_0 N i_1 i_2 \ell}{2\pi} \ln \frac{3}{4} = -5.64 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Quindi dall'esterno occorre spendere un lavoro contro il campo magnetico pari a $5.64 \cdot 10^{-5}$ J.

Se si fa ruotare la bobina attorno al lato PQ, la posizione finale sarà ancora caratterizzata da $x_2 = 2\ell$, ma la corrente i_2 percorrerà la bobina in verso orario e il flusso di $\vec{B}$ avrà segno negativo. Pertanto si ha

$$L = Ni_2 \left[-\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right] = -\frac{\mu_0 N i_1 i_2 \ell}{2\pi} \ln 3 = -21.53 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Esercizio 3

Quando il ramo BC entra nel semipiano a $x > 0$, nella spira inizia a scorrere in senso orario una corrente

$$i = \frac{v(t)aB}{R}$$

con $v(0) = v_0 = 5$ m/s. L'espressione della corrente può essere dedotta dalla forza di Lorentz che agisce sui portatori di carica o, il che è lo stesso, dalla legge di Faraday :

$$\Phi = Bax \implies \frac{d\Phi}{dt} = v(t)aB \implies i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{v(t)aB}{R}$$

dove il segno meno indica il fatto che il verso della corrente è orario.

La forza che agisce sul ramo BC e di conseguenza su tutta la spira, data la sua rigidità si ricava a partire dalla seconda legge di Laplace:

$$\vec{F} = -iaB\hat{u}_x = -\frac{v(t)a^2B^2}{R}\hat{u}_x$$

La forza quindi frena il moto progressivo della spira e agisce fino a quando anche il ramo AD entra nel semipiano $x > 0$: da quel momento in poi, dato che il campo magnetico è uniforme e costante, la derivata temporale del flusso di $\vec{B}$ è nulla e di conseguenza non c'è corrente nella spira e non ci sono azioni dinamiche su di essa. A $t = 0$ la forza vale in modulo

$$F = \frac{v_0 a^2 B^2}{R} = 5.13 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

La proiezione sull'asse x della seconda legge della dinamica è

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{v(t)a^2B^2}{R} \tag{1}$$

La relazione 1 può essere usata per trovare un'espressione che fornisce la velocità in funzione della coordinata del ramo BC, x:

$$dv = -\frac{a^2B^2}{mR}dx \implies \int_{v_0}^{v} dv = -\frac{a^2B^2}{mR}\int_0^x dx \implies v = v_0 - \frac{a^2B^2}{mR}x$$

La velocità v_1 corrisponde a $x = a$ e quindi

$$v_1 = v_0 - \frac{a^3B^2}{mR} = 4.97 \text{ m/s}$$

Per rispondere alla terza domanda occorre ricavare la legge del moto dall'equazione 1:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{a^2B^2}{mR}dt \implies \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{a^2B^2}{mR}t \implies v = v_0 e^{-\frac{a^2B^2}{mR}t}$$

Il tempo Δt richiesto corrisponde al tempo in cui la velocità è scesa al valore v_1:

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{-\frac{a^2B^2}{mR}\Delta t} \implies \Delta t = \frac{mR}{a^2B^2}\ln\frac{v_0}{v_1} = 0.02 \text{ s}$$