Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 17 luglio 2023

Esercizio 1

Dato il seguente integrale trigonometrico:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos\theta}{(R^2 + 4 + 4R\cos\theta)^2} \, , \qquad\qquad R \in \mathbb{R} \, ,$$

trasformarlo in un integrale su un cammino chiuso di un funzione $f(z)$ in campo complesso e quindi:

(a) determinare per quali valori di R l'integrale esiste;

(b) calcolare I con il metodo dei residui;

(c) verificare il teorema della somma dei residui con il punto all'infinito per la funzione $f(z)$.

Soluzione

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos\theta}{(R^2 + 4 + 4R\cos\theta)^2}$$

Per trasformarlo in un integrale su un cammino chiuso di un funzione $f(z)$ in campo complesso si effettua il cambio di variabile

$$z = e^{i\theta}, \qquad\qquad dz = i\, e^{i\theta}\, d\theta = i\, z\, d\theta, \qquad\qquad d\theta = -i\, \frac{dz}{z}.$$

e si scrive $\cos\theta$ come:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

I viene riscritto come integrale su una circonferenza C di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario:

$$I = -\, i \oint_C \frac{dz}{z} \, \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{\left(R^2 + 4 + 4R\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = -\, \frac{i}{2} \oint_C dz \, \frac{z^2+1}{[(R^2+4)z + 2R(z^2+1)]^2} = \oint_C dz\, f(z)$$

con

$$f(z) = -\frac{i}{2}\frac{z^2+1}{[2Rz^2+(R^2+4)z+2R]^2}\,.$$

Per determinare dove l'integrale esiste e per calcolarlo con il metodo dei residui, dobbiamo capire quali singolarità sono interne alla circonferenza. Cerchiamo pertanto gli zeri della quadratica a denominatore che sono:

$$z_\pm = \frac{-(R^2+4)\pm\sqrt{(R^2+4)^2-16R^2}}{4\,R} = \frac{-(R^2+4)\pm(R^2-4)}{4\,R}\,,$$

cioè

$$z_+ = \frac{-(R^2+4)+(R^2-4)}{4\,R} = -\frac{2}{R}\,, \qquad z_- = \frac{-(R^2+4)-(R^2-4)}{4\,R} = -\frac{R}{2}\,.$$

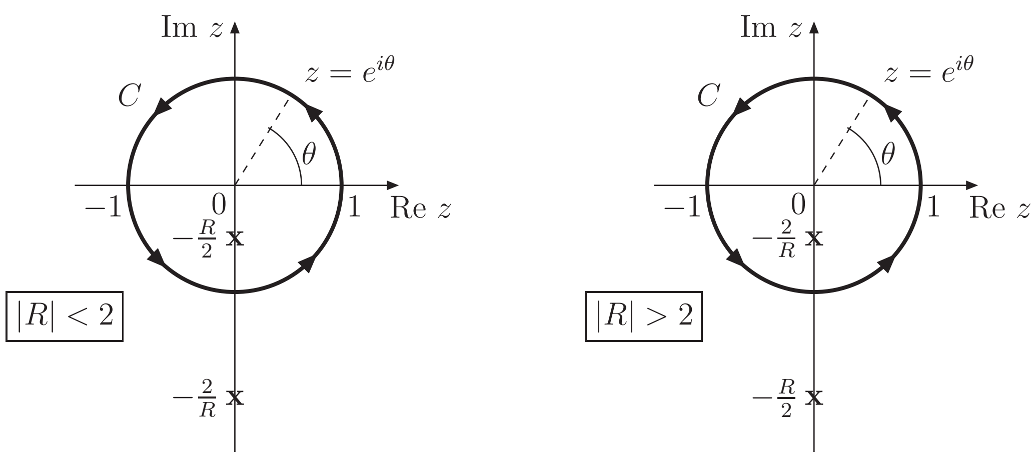
Quindi possiamo riscrivere $f(z)$ come

$$f(z) = -\frac{i}{8R^2}\,\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{2}{R}\right)^2\left(z+\frac{R}{2}\right)^2}\,.$$

(a) $f(z)$ ha due singolarità in $z=-2/R,-R/2$. L'integrale esiste quando nessuna di queste sta sulla circonferenza di raggio unitario. Poiché R è reale, questo succede per

$$R \neq \pm 2\,. \tag{1}$$

(b) Delle due singolarità di $f(z)$ ($z=-2/R,-R/2$), abbiamo che, per $|R|<2$, $z=-R/2$ è interna mentre $z=-2/R$ è esterna a C; per $|R|>2$ invece, $z=-R/2$ è esterna mentre $z=-2/R$ è interna a C.



Quindi per $|R| < 2$ l'integrale è dato da

$$I_{|R|<2} = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}\, f(z)\right\}_{z=-R/2}$$

Essendo $z = -R/2$ un polo doppio di $f(z)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathrm{Res}\, f(z)\right\}_{z=-R/2} &= \lim_{z\to-\frac{R}{2}} \frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{R}{2}\right)^2 f(z)\right] = -\frac{i}{8R^2} \lim_{z\to-\frac{R}{2}} \frac{d}{dz}\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{2}{R}\right)^2} \\
&= -\frac{i}{8R^2} \lim_{z\to-\frac{R}{2}} \left[\frac{2z}{\left(z+\frac{2}{R}\right)^2} - \frac{2(z^2+1)}{\left(z+\frac{2}{R}\right)^3}\right] \\
&= -\frac{i}{4R^2}\frac{1}{\left(-\frac{R}{2}+\frac{2}{R}\right)^2}\left[-\frac{R}{2} - \frac{\frac{R^2}{4}+1}{-\frac{R}{2}+\frac{2}{R}}\right] \\
&= \frac{i}{(4-R^2)^2}\left[\frac{R}{2} + \frac{\frac{R^2+4}{4}}{\frac{4-R^2}{2R}}\right] = \frac{i}{(4-R^2)^2}\left[\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\,\frac{4+R^2}{4-R^2}\right] \\
&= \frac{i}{(4-R^2)^2}\,\frac{R}{2}\left[1+\frac{4+R^2}{4-R^2}\right] = \frac{4iR}{(4-R^2)^3}\,.
\end{aligned}$$

Quindi per $|R| < 2$ l'integrale è:

$$I_{|R|<2} = 2\pi i\,\frac{4iR}{(4-R^2)^3} = \frac{8\pi R}{(R^2-4)^3}\,.$$

Notiamo che l'integrale è reale come atteso.

Analogamente, per $|R| > 2$ avremo

$$I_{|R|>2} = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}\, f(z)\right\}_{z=-2/R}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\mathrm{Res}\, f(z)\right\}_{z=-2/R} &= \lim_{z\to-\frac{2}{R}} \frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{2}{R}\right)^2 f(z)\right] = -\frac{i}{8R^2} \lim_{z\to-\frac{2}{R}} \frac{d}{dz}\frac{z^2+1}{\left(z+\frac{R}{2}\right)^2} \\
&= -\frac{i}{8R^2} \lim_{z\to-\frac{2}{R}} \left[\frac{2z}{\left(z+\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{2(z^2+1)}{\left(z+\frac{R}{2}\right)^3}\right] \\
&= -\frac{i}{4R^2}\frac{1}{\left(-\frac{2}{R}+\frac{R}{2}\right)^2}\left[-\frac{2}{R} - \frac{\frac{4}{R^2}+1}{-\frac{2}{R}+\frac{R}{2}}\right] \\
&= \frac{i}{(R^2-4)^2}\left[\frac{2}{R} + \frac{\frac{R^2+4}{R^2}}{\frac{R^2-4}{2R}}\right] = \frac{i}{(R^2-4)^2}\left[\frac{2}{R} + \frac{2}{R}\,\frac{R^2+4}{R^2-4}\right] \\
&= \frac{i}{(R^2-4)^2}\,\frac{2}{R}\left[1+\frac{R^2+4}{R^2-4}\right] = \frac{4iR}{(R^2-4)^3}\,.
\end{aligned}$$

Quindi per $|R| > 2$ l'integrale è:

$$I_{|R|>2} = 2\pi i \, \frac{4iR}{(R^2-4)^3} = \frac{8\pi R}{(4-R^2)^3} \, .$$

Notiamo che anche per $|R| > 2$ l'integrale è reale come atteso.

Possiamo riscrivere il risultato in un'unica formula come

$$I = -\frac{8\pi R}{|R^2-4|^3} \, , \qquad\qquad R \neq \pm 2 \, .$$

(c) Per verificare il teorema dei residui dobbiamo calcolare i residui in tutte le singolarità al finito e nel punto all'infinito. Per le singolarità in $z = -2/R, -R/2$ abbiamo trovato:

$$\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=-R/2} = \frac{4iR}{(4-R^2)^3} \, , \qquad \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=-2/R} = \frac{4iR}{(R^2-4)^3} \, .$$

Per calcolare il residuo all'infinito facciamo il cambio variabile $z = 1/t$ e calcoliamo:

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\text{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0}$$

La funzione

$$f(z) = -\frac{i}{8R^2} \, \frac{z^2+1}{\left(z+\frac{2}{R}\right)^2\left(z+\frac{R}{2}\right)^2} \, .$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = -\frac{i}{8R^2} \, \frac{\frac{1}{t^2}+1}{\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{R}\right)^2\left(\frac{1}{t}+\frac{R}{2}\right)^2}\frac{1}{t^2} = -\frac{i}{8R^2} \, \frac{1+t^2}{\left(1+\frac{2}{R}\,t\right)^2\left(1+\frac{R}{2}\,t\right)^2}$$

è regolare in $t = 0$. Quindi avremo:

$$\{\text{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\text{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = 0.$$

Pertanto possiamo verificare che la somma dei residui al finito e all'infinito fa zero:

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \{\text{Res}\, f(z)\} &= \sum_{z\in\mathbb{C}} \{\text{Res}\, f(z)\} + \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} \\
&= \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=-R/2} + \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=-2/R} + \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} \\
&= \frac{4iR}{(4-R^2)^3} + \frac{4iR}{(R^2-4)^3} + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Un sistema fisico viene rappresentato da una funzione del tempo $y(t)$ che soddisfa l'equazione

$$y''(t) + 2\,\eta\, y'(t) + \omega^2 y(t) = v\,\delta(t - t_0) \qquad \eta, \omega, v \in \mathbb{R}\,, \qquad \eta, \omega, v > 0$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0,$$

con $\delta(t - t_0)$ la delta di Dirac e $t_0 > 0$.

(a) Trovare un'espressione per la trasformata di Laplace $Y(s) = \mathcal{L}_s\{y(t)\}$, in termini di η, ω, v, t_0.

(b) Trovare l'ascissa di convergenza α_0 di $Y(s)$ per tutti i valori permessi di η, ω.

(c) Calcolando l'antitrasformata di Laplace di $Y(s)$, dimostrare che per $\eta < \omega$ il sistema segue un moto armonico smorzato per $t > t_0$.

Soluzione

(a) Definendo $Y(s) \equiv \mathcal{L}_s\{y(t)\}$, abbiamo che

$$\mathcal{L}_s\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}_s\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)\,,$$

dove in ogni caso abbiamo usato le condizioni iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

La trasformata di Laplace di $\delta(t - t_0)$ viene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s\{\delta(t - t_0)\} &= \int_0^\infty dt\, e^{-s\,t}\,\delta(t - t_0) \\ &= e^{-s\,t_0}.\end{aligned}$$

Nella seconda equazione sopra abbiamo usato il fatto che $t_0 > 0$ (altrimente l'integrale è nulla). Quindi possiamo scrivere

$$y''(t) + 2\,\eta\, y'(t) + \omega^2 y(t) = v\,\delta(t - t_0)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_s\{y''(t)\} + 2\,\eta\,\mathcal{L}_s\{y'(t)\} + \omega^2 \mathcal{L}_s\{y(t)\} = v\,\mathcal{L}_s\{\delta(t - t_0)\}$$

$$\Longrightarrow s^2\,Y(s) + 2\,\eta\,s\,Y(s) + \omega^2\,Y(s) = v\,e^{-s\,t_0}\,,$$

da cui si trova

$$Y(s) = \frac{v\, e^{-s\, t_0}}{s^2 + 2\, \eta\, s + \omega^2}\,.$$

(b) La ascissa di convergenza α_0 viene definita come la parte reale della singularità più a destra, nell piano complesso di s, di $Y(s)$. Al finito, le singolarità di $Y(s)$ sono date dai zeri del denominatore:

$$s^2 + 2\, \eta\, s + \omega^2 = 0 \implies s_\pm = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\,.$$

Ci sono tre casi:

- $\eta > \omega$
  In questo caso $s_\pm \in \mathbb{R}$ con $s_+ > s_-$, quindi $\alpha_0 = s_+$.
- $\eta < \omega$
  Visto che $\sqrt{\eta^2 - \omega^2}$ è un numero imaginario,
  $\mathrm{Re}\{s_+\} = \mathrm{Re}\{s_-\} = -\eta$, quindi $\alpha_0 = -\eta$.
- $\eta = \omega$
  Dato che $\sqrt{\eta^2 - \omega^2} = 0$, si tiene che $s_+ = s_- = -\eta$. Quindi, anche in questo caso $\alpha_0 = -\eta$. Si nota che per $\eta \neq \omega$, $Y(s)$ ha due poli semplici mentre che per $\eta = \omega$ ha solo un polo doppio per $s = -\eta$.

Per $\eta < \omega$, la anti-trasformata di Laplace di $Y(s)$ è

$$\theta(t) y(t) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{\alpha - i\,\infty}^{\alpha + i\,\infty} ds\, e^{s\,t}\, Y(s)\,, \qquad \alpha > -\eta.$$

Con la espressione per $Y(s)$ trovata nella parte (a), abbiamo

$$\begin{aligned} \theta(t) y(t) &= \frac{v}{2\,\pi\, i} \int_{\alpha - i\,\infty}^{\alpha + i\,\infty} dt\, \frac{e^{s\,(t - t_0)}}{s^2 + 2\,\eta\, s + \omega^2} \\ &\implies \frac{v}{2\,\pi\, i} \int_{\alpha - i\,\infty}^{\alpha + i\,\infty} dt\, \frac{e^{s\,(t - t_0)}}{(s - s_+)(s - s_-)}\,, \end{aligned}$$

con $s_\pm \equiv -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2} = -\eta \pm i\,\sqrt{\omega^2 - \eta^2}$ (visto che $\eta < \omega$). Possiamo risolvere l'integrale usando il lemma di Jordan. Per $t < t_0$, dobbiamo chiudere a destra, non avendo delle singularità dentro il cammino di integrazione

$$t < t_0\,, \qquad \theta(t) y(t) = 0.$$

Per $t > t_0$, il camino di integrazione si chiude a sinistra. Entrambe singularità s_+, s_- (poli semplici) sono dentro il camino chiuso, quindi

$$\begin{aligned}
\theta(t)y(t) =& \frac{v}{2\,\pi\,i}\int_{\alpha-i\,\infty}^{\alpha+i\,\infty} ds\,\frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)} \\
=& \, v\,\left(\operatorname*{Res}_{s=s_+}\left\{\frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)}\right\} + \operatorname*{Res}_{s=s_-}\left\{\frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)}\right\}\right) \\
=& \, v\,\left(\frac{e^{s_+\,(t-t_0)}}{s_+-s_-} + \frac{e^{s_-\,(t-t_0)}}{s_--s_+}\right) \\
=& \, v\,\left(\frac{e^{\left(-\eta+i\sqrt{\omega^2-\eta^2}\right)\,(t-t_0)}}{2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}} + \frac{e^{\left(-\eta-i\sqrt{\omega^2-\eta^2}\right)\,(t-t_0)}}{-2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\right) \\
=& \, v\,\frac{e^{-\eta(t-t_0)}}{2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\left(e^{+i\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)} - e^{-i\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)}\right)\,,
\end{aligned}$$

finalmente abbiamo

$$t > t_0\,, \qquad \theta(t)y(t) = v\,\frac{e^{-\eta(t-t_0)}}{\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)\right)\,,$$

che corrisponde a un sistema armonico smorzato con frequenza $\omega' = \sqrt{\omega^2-\eta^2}$ e costante di tempo $\tau = 1/\eta$. Si nota che per $\omega < \eta$, la stessa soluzione vale però in quel caso, avendo il seno argomento immaginario, il sistema non esegue moto oscillatorio.

Esercizio 3

Si consideri l'equazione differenziale

$$(z+\alpha)^\beta u''(z) + (z+1)u'(z) + z^\gamma u(z) = 0\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, mentre $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

(a) Quali condizioni devono essere soddisfatte dalle costanti α, β, γ affinché l'equazione abbia solo singolarità fuchsiane?

Nel seguito siano $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$.

(b) Per la soluzione intorno a $z_0 = -1$, determinare l'equazione indiciale e le sue soluzioni ρ_1 e ρ_2.

(c) Scrivere la soluzione $u_1(z)$ dell'equazione differenziale intorno a $z_0 = -1$, con $u_1(z)$ corrispondente a $\rho_1 \geq \rho_2$. Trovare la relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n con $n \geq 1$. Valutare la relazione di ricorrenza per c_1 e c_2.

(d) Scrivere la forma della seconda soluzione $u_2(z)$ intorno a $z_0 = -1$ senza calcolarne i coefficienti.

Soluzione

(a) La forma standard dell'equazione differenziale è

$$u''(z) + \frac{z+1}{(z+\alpha)^\beta}u'(z) + \frac{z^\gamma}{(z+\alpha)^\beta}u(z)\,. \tag{2}$$

Le due singolarità potenziali sono a $z = 0$ e $z = -\alpha$. Lordine di questi poli dipende dai parametri. Dobbiamo prestare attenzione a cancellazioni. Abbiamo i seguenti casi:

- $\alpha = 1$:
  In questo caso abbiamo

$$u''(z) + \frac{1}{(z+1)^{\beta-1}}u'(z) + \frac{z^\gamma}{(z+1)^\beta}u(z)\,. \tag{3}$$

  Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)$ segue per $z_0 = -1$ $\beta - 1 \leq 1$, quindi $\beta \leq 2$. Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 Q(z)$ segue per $z_0 = -1$ anche $\beta \leq 2$, ma per $z_0 = 0$ anche $\gamma \geq -2$.

- $\alpha = 0$: In questo caso abbiamo

$$u''(z) + \frac{z+1}{z^\beta}u'(z) + \frac{1}{z^{\beta-\gamma}}u(z)\,. \tag{4}$$

Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)$ segue per $z_0 = 0$ $\beta \le 1$. Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2Q(z)$ segue per $z_0 = 0$ $\beta - \gamma \le 2$ o $\gamma \ge \beta - 2$.

- $\alpha \ne 0, 1$:
In questo caso abbiamo la forma standard sopra senza cancellazioni. Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)$ segue per $z_0 = -\alpha$ $\beta \le 1$. Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2Q(z)$ segue per $z_0 = -1$ $\beta \le 2$, quindi una condizione soddisfatta automaticamente quando $\beta \le 1$ viene soddisfatta, ma per $z_0 = 0$ segue $\gamma \ge -2$.

(b) Con i parametri dati abbiamo

$$(z+1)^2u''(z) + (z+1)u'(z) + zu(z) = 0\,,$$

L'equazione indiciale intorno a $z_0 = -1$ diventa

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = \rho^2 - 1 = 0\,,$$

perché

$$p_0 = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z+1}{(z+1)^2} = 1\,, \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{z\to -1}(z+1)^2\frac{z}{(z+1)^2} = -1\,.$$

Quindi otteniamo

$$\rho_1 = 1\,, \quad \rho_2 = -1\,. \tag{5}$$

(c) Abbiamo $\rho_1 = 1$ e $z_0 = -1$, quindi

$$\begin{aligned}
u_1(z) &= (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+1)^{n+1}\,, \text{ quindi}\\
u_1'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n(z+1)^n \quad \text{e}\\
u_1''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n(z+1)^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n+1) + (n+1) + z\right]c_n(z+1)^{n+1} = 0\,. \tag{6}$$

Per identificare le potenze di $(z+1)$ in quest'espressione scriviamo

$$z = (z+1) - 1\,, \tag{7}$$

quindi

$$0 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [n(n+1) + (n+1) - 1]\, c_n (z+1)^{n+1} + c_n (z+1)^{n+2} \right\} = 0\,.$$

Cambiamo l'esponente del secondo termine, $n \to n-1$, e otteniamo

$$0 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+2)c_n + c_{n-1}]\,(z+1)^{n+1} = 0\,,$$

dove abbiamo usato che il termine con $n = 0$ diventa $0(0+1)+(0+1)-1 = 0$. Quindi non c'è una condizione per c_0 e otteniamo la relazione di ricorrenza

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(n+2)}\,, \quad \text{o} \quad c_{n+1} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+3)}\,.$$

Per c_1 e c_2 otteniamo esplicitamente

$$c_1 = -\frac{1}{3}c_0 \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{1}{8}c_1 = \frac{1}{24}c_0\,. \tag{8}$$

d) $\rho_1 - \rho_2 = 2 \in \mathbb{N}$, quindi la soluzione $u_2(z)$ è data in generale come

$$u_2(z) = (z+1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z+1)^n + d u_1(z) \ln(z+1)\,, \tag{9}$$

con $d_0 \neq 0$ e non sappiamo nullo dal termine logarithmico, siccome $\rho_1 \neq \rho_2$.