Trasformata di Laplace

1 Introduzione

Se la funzione $f(x)$ non va a zero per $x \to \pm\infty$ più velocemente di $1/x$, non si può definire la trasformata di Fourier di $f(x)$. Partendo dalla trasformata di Fourier, definiamo qui un altro tipo di trasformata che possa essere applicato anche a funzioni che non vanno a zero o addirittura divergono all'infinito.

Partiamo da una funzione $f(t)$ che abbia solo singolarità integrabili sull'asse reale. Si può definire la trasformata di Fourier di $f(t)$ solo se, per $t \to \pm\infty$, $f(t)$ va a zero più velocemente di $1/t$. L'idea è di migliorare l'andamento per $t \to +\infty$ moltiplicando la $f(t)$ con un esponenziale decrescente $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$). Per migliorare l'andamento per $t \to -\infty$, non possiamo usare un altro esponenziale, che entrerebbe in conflitto con $e^{-\alpha t}$; usiamo invece la funzione a gradino di Heaviside:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Se infatti moltiplichiamo $e^{-\alpha t} f(t)$ con la $\theta(t)$ di Heaviside, questa uccide qualunque comportamento per $t \to -\infty$ e la funzione che si ottiene

$$g_\alpha(t) = e^{-\alpha t} f(t)\theta(t)$$

soddisfa molto più facilmente il comportamento all'infinito necessario per poterne definire la trasformata di Fourier. Quindi, se $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t} f(t)\theta(t)$ è sommabile, allora ammette trasformata di Fourier definita da:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega[g_\alpha(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t)\theta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-(\alpha+i\omega)t}\, dt \end{aligned}$$

Definiamo quindi la quantità $\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_\omega[g_\alpha(t)]$ come la trasformata di Laplace di $f(t)$.

2 Definizione e esistenza della trasformata di Laplace

Da quanto detto, possiamo definire la trasformata di Laplace come segue. Data la funzione $f(t)$ a variabile reale t, la **trasformata di Laplace** $\mathcal{L}_s[f(t)]$ di $f(t)$ è la funzione a variabile complessa s definita da:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)] \equiv \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt} \tag{1}$$

Per vedere che questa definizione coincide con quanto visto nell'introduzione, basta porre $s = \alpha + i\omega$.

Ragioniamo ora sull'esistenza di $\mathcal{L}_s[f(t)]$. La trasformata di Laplace $\mathcal{L}_s[f(t)]$ esiste se esiste l'integrale che la definisce. Questo succede naturalmente se la funzione integranda $f(t)\, e^{-st}$ è sommabile[1] tra 0 e $+\infty$, cioè se sono verificati i seguenti andamenti per t finito e per $t \to +\infty$.

- $f(t)\, e^{-st}$ deve avere solo singolarità integrabili sul cammino d'integrazione[2], cioè per $t \in [0, +\infty)$:
$$\lim_{t \to t_0} (t - t_0)\, f(t)\, e^{-st} = 0 \qquad\qquad \forall t_0 \in [0, +\infty)$$
Visto che l'esponenziale non ha singolarità al finito, questa condizione equivale a richiedere che $f(t)$ abbia solo singolarità integrabili per $t \in [0, +\infty)$:
$$\lim_{t \to t_0} (t - t_0)\, f(t) = 0 \qquad\qquad \forall t_0 \in [0, +\infty)$$

- $f(t)\, e^{-st}$ per $t \to +\infty$ deve andare a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, cioè:
$$f(t)\, e^{-st} \underset{t \to +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t \to +\infty} t\, f(t)\, e^{-st} = 0.$$
Questa condizione all'infinito è soddisfatta per tutte le funzioni $f(t)$ che per $t \to +\infty$ sono finite o divergono al peggio come una potenza, a patto che l'esponenziale e^{-st} sia decrescente per $t \to +\infty$. Essendo
$$e^{-st} = e^{-[\mathrm{Re}(s) + i\,\mathrm{Im}(s)]t} = e^{-\mathrm{Re}(s)t}\left[\cos(\mathrm{Im}(s)t) + i\,\sin(\mathrm{Im}(s)t)\right],$$
questo succede se
$$\mathrm{Re}(s) > 0.$$
Se invece $f(t)$ per $t \to +\infty$ ha un andamento esponenziale semplice del tipo $e^{\beta t}$ ($\beta \in \mathbb{R}$), la funzione integranda $f(t)\, e^{-st}$ ha ancora un buon comportamento all'infinito se la combinazione dei due esponenziali va a zero per $t \to +\infty$:
$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} t\, f(t)\, e^{-st} &= \lim_{t \to +\infty} t\, e^{\beta t} e^{-st} = \lim_{t \to +\infty} t\, e^{-(s-\beta)t} \\ &= \lim_{t \to +\infty} t\, e^{-[\mathrm{Re}(s)-\beta]t}\left[\cos(\mathrm{Im}(s)t) + i\,\sin(\mathrm{Im}(s)t)\right] = 0. \end{aligned}$$
Questo succede se:
$$\mathrm{Re}(s) > \beta.$$
Notiamo a questo punto che l'esistenza della trasformata di Laplace è sempre legata ad un valore limite minimo α_0 sulla parte reale di s, nel senso che $\mathrm{Re}(s)$ deve essere *strettamente superiore* a α_0 affinché esista $\mathcal{L}_s[f(t)]$. Questo valore limite α_0 è chiamato ascissa di convergenza ed è così definito:

[1] La sommabilità qui richiesta è equivalente a quella vista nella trattazione delle trasformate di Fourier e coincide quindi con l'"integrabilità alla Lesbegue".

[2] Come già visto per le trasformate di Fourier, la condizione di integrabilità al finito prevede che la funzione integranda abbia un numero finito o al massimo un'infinità numerabile di discontinuità integrabili. Però non tratteremo funzioni, di scarso interesse fisico, che abbiano un numero infinito di discontinuità, quindi al finito basta richiedere di avere solo singolarità integrabili.

Si definisce **ascissa di convergenza** quel numero reale α_0 tale per cui $\mathcal{L}_s[f(t)]$ esiste per $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$, mentre non esiste per $\mathrm{Re}(s) \leq \alpha_0$.

Perciò se $f(t) \sim \mathcal{O}(t^n)$ per $t \to +\infty$, l'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = 0$, mentre se $f(t) \sim \mathcal{O}(e^{\beta t})$ per $t \to +\infty$, allora l'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = \beta$.

Quindi, riassumendo, se $f(t)$ ha un andamento all'infinito di tipo potenza, la condizione per l'esistenza della trasformata di Laplace è che sia $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\text{Se} \quad \begin{array}{c} f(t) \text{ ha solo singolarità} \\ \text{integrabili al finito} \\ \text{e} \\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathcal{O}(t^n), \quad n \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \text{allora} \quad \mathcal{L}_s[f(t)] \quad \text{esiste per} \quad \mathrm{Re}(s) > \alpha_0 = 0$$

Se invece $f(t)$ ha un andamento all'infinito di tipo esponenziale semplice $e^{\beta t}$, la condizione per l'esistenza della trasformata di Laplace è che sia $\mathrm{Re}(s) > \beta$:

$$\text{Se} \quad \begin{array}{c} f(t) \text{ ha solo singolarità} \\ \text{integrabili al finito} \\ \text{e} \\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathcal{O}(e^{\beta t}), \quad \beta \in \mathbb{R} \end{array} \quad \text{allora} \quad \mathcal{L}_s[f(t)] \quad \text{esiste per} \quad \mathrm{Re}(s) > \alpha_0 = \beta$$

Se infine $f(t)$ diverge all'infinito peggio di un esponenziale semplice (per esempio se va all'infinito come $e^{\beta t^2}$), allora non esiste la trasformata di Laplace per nessun s.

2.1 Esempi di trasformata di Laplace

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = 1$ è

$$f(t) = 1, \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

  Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\mathrm{Re}(s) > 0$. L'integrale infatti converge per $\mathrm{Re}(s) > 0$, quindi l'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = 0$.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = t$ è:

$$\begin{aligned} f(t) = t, \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] &= \int_0^{+\infty} te^{-st} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

  L'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = 0$.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è

$$
\begin{aligned}
f(t) = t^n, \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-st} dt \\
&= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \; .
\end{aligned}
$$

L'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = 0$.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = \cos(bt)$ con $b \in \mathbb{R}$ è:

$$
\begin{aligned}
f(t) = \cos(bt), \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(bt)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(e^{ibt} + e^{-ibt} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{e^{-(s-ib)t}}{-(s-ib)} \right|_0^{+\infty} + \left. \frac{e^{-(s+ib)t}}{-(s+ib)} \right|_0^{+\infty} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib} \right] = \frac{s}{s^2+b^2} \; .
\end{aligned}
$$

$f(t)$ all'infinito è comunque limitata tra -1 e $+1$, quindi il suo andamento è assimilabile ad un andamento di tipo potenza. L'ascissa di convergenza è pertanto $\alpha_0 = 0$.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = \sin(bt)$ con $b \in \mathbb{R}$ è:

$$
\begin{aligned}
f(t) = \sin(bt), \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(bt)\, dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(e^{ibt} - e^{-ibt} \right) dt \\
&= \frac{1}{2i} \left\{ \left. \frac{e^{-(s-ib)t}}{-(s-ib)} \right|_0^{+\infty} - \left. \frac{e^{-(s+ib)t}}{-(s+ib)} \right|_0^{+\infty} \right\} \\
&= -\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-ib} - \frac{1}{s+ib} \right] = \frac{b}{s^2+b^2} \; .
\end{aligned}
$$

$f(t)$ all'infinito è comunque limitata tra -1 e $+1$, quindi il suo andamento è assimilabile ad un andamento di tipo potenza. L'ascissa di convergenza è pertanto $\alpha_0 = 0$.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = e^{\sigma t}$ con $\sigma \in \mathbb{C}$ è:

$$
f(t) = e^{\sigma t}, \qquad \mathcal{L}_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\sigma t} dt = \left. \frac{e^{-(s-\sigma)t}}{-(s-\sigma)} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\sigma},
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\sigma)$. Infatti solo in questo caso l'integrale converge. L'ascissa di convergenza è pertanto $\alpha_0 = \mathrm{Re}(\sigma)$.

3 Trasformata della derivata di una funzione $f(t)$

Se una funzione $f(t)$ che ammette trasformata di Laplace è derivabile e la derivata $f'(t)$ ammette trasformata di Laplace, allora la trasformata di Laplace di $f'(t)$ è legata alla trasformata di $f(t)$ dalla relazione:

$$\mathcal{L}_s[f'(t)] = s\,\mathcal{L}_s[f(t)] - f(0^+), \qquad f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

Infatti integrando per parti si ottiene:

$$\mathcal{L}_s[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = -f(0^+) + s\,\mathcal{L}_s[f(t)]\ .$$

La relazione trovata può essere iterata per ottenere le trasformate di Laplace delle derivate successive (se esistono e ammetto trasformata di Laplace):

$$\mathcal{L}_s[f''(t)] = s\mathcal{L}_s[f'(t)] - f'(0^+) = s^2\mathcal{L}_s[f(t)] - s\,f(0^+) - f'(0^+),$$

$$\boxed{\mathcal{L}_s[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}_s[f(t)] - s^{n-1}\,f(0^+) - s^{n-2}\,f'(0^+) - \cdots - s\,f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)}$$

Dall'ultima relazione segue che, se $f(t)$ è derivabile n volte e la derivata n-esima $f^{(n)}(t)$ ammette trasformata di Laplace, allora vale:

$$\mathcal{L}_s[f(t)] = \frac{f(0^+)}{s} + \frac{f'(0^+)}{s^2} + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(0^+)}{s^{n-1}} + \frac{f^{(n-1)}(0^+)}{s^n} + \frac{\mathcal{L}_s[f^{(n)}(t)]}{s^n}.$$

4 Derivata della trasformata di una funzione $f(t)$

Se si moltiplica la funzione $f(t)$ per t, la trasformata di Laplace diventa:

$$\mathcal{L}_s\left[t f(t)\right] = \int_0^{+\infty} t\,f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{ds}\left[-e^{-st}\right]dt = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}_s[f(t)].$$

Anche questa relazione si può iterare, ottenendo

$$\boxed{\mathcal{L}_s\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}_s[f(t)]}$$

È importante notare che, diversamente da quanto avviene per l'analoga relazione per la trasformata di Fourier, qui siamo sempre sicuri che,

se	$f(t)$ ammette trasformata di Laplace con ascissa di convergenza α_0	allora	$t^n f(t)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ammette trasformata di Laplace con ascissa di convergenza α_0

Infatti l'aggiunta di t^n ($n\in\mathbb{N}$) non aggiunge singolarità al finito a $f(t)$ né cambia l'andamento per $t\to+\infty$ in maniera sufficiente a modificare il vincolo su $\mathrm{Re}(s)$ (che dipende solo dal fatto che l'andamento sia di tipo potenza o no, e non da quale sia questa potenza).

Un'importante conseguenza di questa proprietà è che dove la trasformata di Laplace esiste (cioè nel semipiano a destra dell'ascissa di convergenza dove l'integrale è definito), esiste anche la sua derivata n-esima, $\forall n \in \mathbb{N}$. In altre parole la trasformata di Laplace è sempre infinitamente derivabile, quindi analitica, in tutto il semipiano destro dove è definito l'integrale $\mathcal{L}_s[f(t)]$. Quindi

$$\boxed{\mathcal{L}_s[f(t)] \text{ è una funzione di } s \textbf{ regolare in tutto il semipiano } \mathrm{Re}(s) > \alpha_0}$$

cioè a destra dell'ascissa di convergenza dove è definito l'integrale $\mathcal{L}_s[f(t)]$

5 Continuazione analitica di $\mathcal{L}_s[f(t)]$

È ora importante notare che il fatto che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}_s[f(t)]$ sia definita solo per valori di s appartenenti al semipiano a destra dell'ascissa di convergenza $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$, non impedisce che, una volta calcolato l'integrale che definisce $\mathcal{L}_s[f(t)]$, la funzione complessa $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$ che ne risulta sia definita in tutto il piano complesso (tranne in alcuni punti singolari). Un esempio semplice è la trasformata di Laplace di

$$f(t) = 1.$$

Abbiamo visto che la trasforamata di Laplace è definita per $\mathrm{Re}(s) > 0$ e vale:

$$F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)] = \mathcal{L}_s[1] = \frac{1}{s}$$

Come si può notare $F(s) = 1/s$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne nel punto $s = 0$ (dove ha un polo) e non solo nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > 0$.

In effetti questa è la situazione normale quando si riesce a dare a $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$ una rappresentazione attraverso funzioni note o comunque una rappresentazione alternativa a quella integrale data. Questa situazione è molto comune per le funzioni in campo complesso per cui esistono più rappresentazioni (come integrali, serie o attraverso funzioni note).

A questo punto potremmo chiederci se ha senso usare il risultato ottenuto per $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$ ovunque questo sia definito e non solo dove era definito l'integrale di partenza. La risposta è sì, grazie ad un importante teorema delle funzioni analitiche in campo complesso che va sotto il nome di **principio di continuazione analitica**. Questo teorema dimostra che c'è un solo modo di continuare analiticamente una funzione fuori dal proprio dominio di esistenza, cioè tutte le funzioni analitiche, che coincidono nell'intorno di un punto, coincidono tra loro in tutte le intersezioni dei propri domini di analiticità. In altre parole due funzioni, che sono definite su domini differenti ma coincidono almeno in un intorno di un punto, sono la continuazione analitica l'una dell'altra e questa è unica.

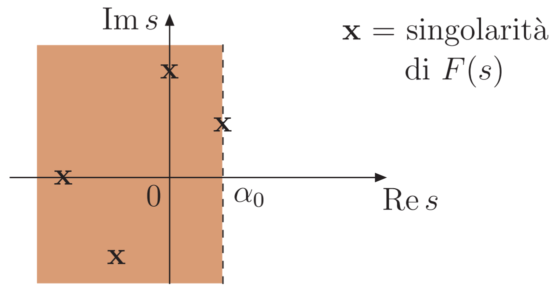
Questa unicità ci assicura che la funzione $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$, definita anche dove l'integrale che definisce $\mathcal{L}_s[f(t)]$ non converge, è l'unica continuazione analitica dell'integrale e si può considerare come la corretta estensione dell'integrale in tutto il piano complesso.

Quindi per esempio $F(s) = 1/s$ è la corretta e unica estensione a tutto il piano complesso di s dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ che è solo definito nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Pertanto, se chiamo con $F(s)$ la continuazione analitica di $\mathcal{L}_s[f(t)]$, questa è sicuramente regolare dove lo è $\mathcal{L}_s[f(t)]$, cioè per $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$. Inoltre, $F(s)$ deve avere almeno una singolarità sul bordo del semipiano dove è definito l'integrale $\mathcal{L}_s[f(t)]$, cioè sulla retta verticale che passa per l'ascissa di convergenza α_0. Naturalmente $F(s)$ può avere altre singolrità, ma queste possono essere solo a sinistra dell'ascissa di convergenza α_0. Avremo quindi una situazione del tipo:

$F(s)$ non ha singolarità a destra dell'ascissa di convergenza α_0

$F(s)$ ha almeno una singolarità sulla retta verticale che passa per l'ascissa di convergenza α_0



Nella figura il semipiano bianco è quello dove è definito l'integrale $\mathcal{L}_s[f(t)]$, mentre quello più scuro è quello contenente le singolarità di $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$.

La continuazione analitica oltre il dominio dell'integrale che definisce la trasformata di Laplace è centrale nel calcolo dell'antitrasformata, cioè nel calcolo di $f(t)$ una volta nota la $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$.

6 Proprietà della trasformata di Laplace

6.1 Trasformata di Laplace di $e^{\sigma t} f(t)$

Se si motiplica $f(t)$ per un esponenziale $e^{\sigma t}$ ($\sigma \in \mathbb{C}$) abbiamo:

$$\mathcal{L}_s[e^{\sigma t} f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{\sigma t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-\sigma)t} dt = \mathcal{L}_{s-\sigma}[f(t)]$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{L}_s[e^{\sigma t} f(t)] = \mathcal{L}_{s-\sigma}[f(t)]}$$

6.2 Trasformata di Laplace di $f(t+a)$

Se si trasla t di una costante $a \in \mathbb{R}$, dobbiamo distinguere i casi $a > 0$ e $a < 0$.

- Se $a > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_s[f(t+a)] = \int_0^{+\infty} f(t+a) e^{-st} dt.$$

Ora facciamo il cambio di variabile

$$t' = t + a, \qquad t = t' - a, \qquad dt = dt'.$$

e, essendo $a > 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s[f(t+a)] &= \int_a^{+\infty} f(t')e^{-s(t'-a)}dt' = e^{sa}\int_a^{+\infty} f(t')e^{-st'}dt' \\
&= e^{sa}\int_0^{+\infty} \theta(t'-a)f(t')e^{-st'}dt' = e^{sa}\int_0^{+\infty} \theta(t-a)f(t)e^{-st}dt \\
&= e^{sa}\mathcal{L}_s[\theta(t-a)f(t)].
\end{aligned}$$

- Se invece $a < 0$, dobbiamo considerare $\mathcal{L}_s[\theta(t+a)f(t+a)]$:

$$\mathcal{L}_s[\theta(t+a)f(t+a)] = \int_0^{+\infty} \theta(t+a)f(t+a)e^{-st}dt = \int_{-a}^{+\infty} f(t+a)e^{-st}dt,$$

dove abbiamo tenuto conto che $-a > 0$. Ora facciamo il cambio di variabile

$$t' = t+a, \qquad t = t'-a, \qquad e^{-st} = e^{-s(t'-a)} = e^{sa}\,e^{-st'}, \qquad dt = dt'.$$

e otteniamo

$$\mathcal{L}_s[\theta(t+a)f(t+a)] = e^{sa}\int_0^{+\infty} f(t')e^{-st'}dt' = e^{sa}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = e^{sa}\mathcal{L}_s[f(t)].$$

Quindi riassumendo abbiamo le seguenti proprietà della trasformata di Laplace:

$$\boxed{\text{Se } \ a > 0 \quad \text{allora} \quad \mathcal{L}_s[f(t+a)] = e^{sa}\mathcal{L}_s[\theta(t-a)f(t)]}$$

$$\boxed{\text{Se } \ a < 0 \quad \text{allora} \quad \mathcal{L}_s[\theta(t+a)f(t+a)] = e^{sa}\mathcal{L}_s[f(t)]}$$

7 L'antitrasformata di Laplace

Essendo la trasformata di Laplace di $f(t)$ nient'altro che la trasformata di Fourier di $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t}f(t)\theta(t)$, possiamo ottenere l'antitrasformata di Laplace dalla formula per l'antitrasformata di Fourier:

$$e^{-\alpha t}f(t)\theta(t) = g_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega, \qquad G_\alpha(\omega) = \mathcal{F}_\omega[g_\alpha(t)].$$

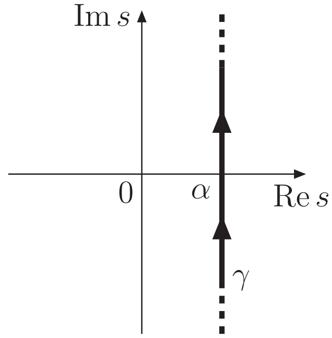
A questo punto basta moltiplicare ambo i membri per $e^{\alpha t}$, per avere la formula per l'antitrasformata di Laplace:

$$f(t)\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\omega)\,e^{(\alpha+i\omega)t}\,d\omega, \qquad G_\alpha(\omega) = \mathcal{F}_\omega[g_\alpha(t)].$$

Se ora riscriviamo l'integrale in ω come un integrale nel piano complesso della variabile

$$s = \alpha + i\omega, \qquad ds = i\,d\omega, \qquad d\omega = \frac{ds}{i},$$

ci accorgiamo che stiamo integrando sulla parte immaginaria di s tra $-\infty$ e $+\infty$, cioè il cammino d'integrazione γ è una retta verticale con ascissa α.



Ricordando poi che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}_s[f(t)]$ altro non è che $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_\omega[g_\alpha(t)] = \sqrt{2\pi}G_\alpha(\omega)$ con $s = \alpha + i\omega$, abbiamo che l'**antitrasformata di Laplace** di $F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]$ è:

$$\boxed{f(t)\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\,e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)\,e^{st}\,ds, \qquad F(s) = \mathcal{L}_s[f(t)]} \tag{2}$$

Notiamo che la $\theta(t)$ a primo membro dice che, partendo dalla trasformata di Laplace $F(s)$, si può ricavare solo la parte delle t positive di $f(t)$, mentre il comportamento di $f(t)$ per $t < 0$ rimane completamente indeterminato. In altre parole, la trasformata di Laplace $\mathcal{L}_s[f(t)]$ contiene solo informazioni sul comportamento di $f(t)$ per $t > 0$ e non dice niente riguardo al suo andamento per t negativi.

7.1 Il cammino d'integrazione dell'antitrasformata

Abbiamo visto che l'antitrasformata è un integrale calcolato nel piano complesso di s su un cammino d'integrazione γ che è una retta verticale con ascissa α. Qui è importante capire bene quale deve essere l'ascissa α del cammino d'integrazione γ dell'antitrasformata di Laplace.

Il parametro α è quello che definisce l'esponenziale che assicura che $e^{-\alpha t}f(t)\theta(t)$ vada a zero per $t \to +\infty$ più velocemente di $1/t$. Notiamo che, se questo succede per un certo $\alpha = \alpha_1$, qualunque altro $\alpha > \alpha_1$ va ancora bene, perchè non fa che aumentare la velocità con cui $e^{-\alpha t}f(t)\theta(t)$ va a zero per $t \to +\infty$. Quindi capiamo subito che abbiamo una certa libertà nella scelta di α.

Poiché l'unica condizione su α è che renda integrabile $e^{-\alpha t}f(t)\theta(t)$, cioè che permetta di definire $\mathcal{L}_s[f(t)]$, e visto che α è la parte reale della varibile $s = \alpha + i\omega$, è sufficiente che α soddisfi la condizione che imponiamo su $\mathrm{Re}(s)$ per definire la trasformata di Laplace, cioè che sia maggiore dell'ascissa di convergenza α_0. Quindi abbiamo che:

$$\boxed{\alpha > \alpha_0, \qquad \alpha_0 = \text{ ascissa di convergenza}}$$

Ora però potremmo chiederci: ma se noi conosciamo solo $F(s)$ e non $f(t)$, come possiamo conoscere l'ascissa di convergenza α_0 e decidere quale α prendere?

Per rispondere ricordiamo un'importante proprietà della continuazione analitica $F(s)$ della trasformata di Laplace e cioè che $F(s)$ è regolare in tutto il semipiano a destra dell'ascissa di convergenza α_0 (dove è definito l'integrale $\mathcal{L}_s[f(t)]$) e che ha almeno una singolarità sulla retta verticale che passa per α_0. Questo significa che

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ascissa di convergenza } \alpha_0 \text{ è la parte reale} \\ \text{della singolarità di } F(s) \text{ più a destra}\end{array}}$$

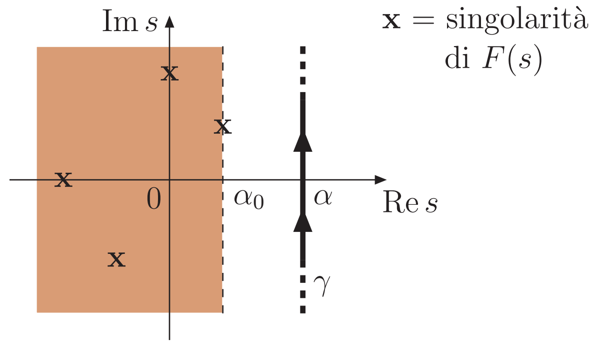
cioè della singolarità di $F(s)$ con parte reale maggiore.

A questo punto deduciamo quindi che il vincolo $\alpha > \alpha_0$ per l'ascissa del cammino d'integrazione γ dell'antitrasformata impone semplicemente che

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il cammino } \gamma \text{ è qualunque retta verticale che ha} \\ \text{alla sua sinistra tutte le singolarità di } F(s).\end{array}}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\, e^{st}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds, \end{aligned}$$



Questa libertà di scegliere il cammino γ deve naturalmente rispecchiarsi nel fatto che l'integrale dell'antitrasformata non deve dipendere da questa scelta (fintanto che γ resta a destra di tutte le singolarità di $F(s)$). Ma questo è assicurato dal teorema di Cauchy, perchè questi cammini sono deformabili l'uno nell'altro senza incontrare singolarità di $F(s)$ e quindi gli integrali su queste rette coincidono.

7.2 Esistenza dell'antitrasformata

Cerchiamo di ora di capire quali condizioni deve soddisfare una funzione $F(s)$ affinché sia una trasformata di Laplace, cioè affinché esista l'antitrasformata di $F(s)$. Sostanzialmente abbiamo due condizioni:

- Da quanto visto nella sezione 5, la continuazione analitica della trasformata di Laplace non ha singolarità a destra dell'ascissa di convergenza α_0, che è l'ascissa della singolarità più a destra. Da qui si deduce subito la prima condizione affinché $F(s)$ sia una trasformata di Laplace: deve esistere un'ascissa di convergenza α_0 tale che $F(s)$ non abbia singolarità nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$.

- Dalla definizione (1) di trasformata di Laplace possiamo vedere come è il comportamento di $F(s)$ per $s \to \infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$. Se infatti scriviamo
$$s = \alpha_0 + \rho e^{i\theta} = \underbrace{\alpha_0 + \rho\cos\theta}_{\mathrm{Re}(s)} + i\,\rho\sin\theta\,,$$

allora fare il limite $s \to \infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ equivale a fare il limite $\rho \to +\infty$ con $\rho \cos\theta > 0$, cioè $\rho \to +\infty$ con $\cos\theta > 0$. L'esponenziale e^{-st} diventa

$$e^{-st} = e^{-(\alpha_0 + \rho\cos\theta)t}\, e^{-i\rho\sin\theta\, t}\,,$$

e nel limite $s \to \infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ avremo che

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} f(t)\, e^{-st} = \lim_{\substack{\rho\to+\infty \\ \cos\theta>0}} f(t)\, e^{-(\alpha_0+\rho\cos\theta)t}\, e^{-i\rho\sin\theta\, t} = 0\,, \quad \text{per } t > 0.$$

Di conseguenza la trasformata di Laplace $\mathcal{L}_s[f(t)]$ della funzione $f(t)$ soddisfa sempre il seguente limite:

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} \mathcal{L}_s[f(t)] = \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>\alpha_0}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = 0\,.$$

Pertanto, se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di una qualche funzione, è necessario che $F(s)$ tenda a zero per $s \to \infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$.

Questo significa che se una funzione $F(s)$ non soddisfa la condizione

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \;\text{ per }\; \mathrm{Re}(s) > \alpha_0,$$

allora non può essere la trasformata di Laplace di nessuna funzione e l'antitrasformata non è definita.

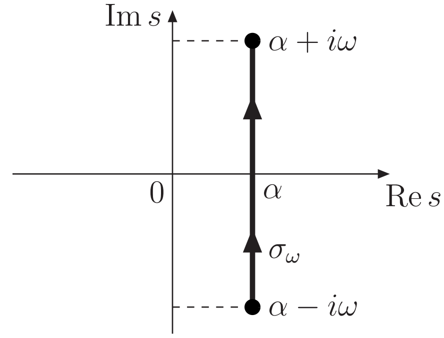
Riassumendo, abbiamo che

$F(s)$ può essere una trasformata di Laplace	cioè	Esiste l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$	se	Esiste α_0 tale che $F(s)$ non ha singolarità nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$ e $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ per $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$

7.3 Calcolo dell'antitrasformata

Una volta fissato il cammino γ in modo che tutte le singolarità di $F(s)$ stiano alla sua sinistra, possiamo calcolare l'antitrasformata usando il lemma di Jordan, cioè con la chiusura del cammino di integrazione e il metodo dei residui. Prima di tutto, analogamente a quanto fatto con gli integrali sulla retta reale, riscriviamo nel seguente modo l'integrale che definisce l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\, e^{st}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to+\infty}\int_{\sigma_\omega} F(s)\, e^{st}\, ds \end{aligned}$$



dove σ_ω è il segmento di retta che va da $\alpha - i\omega$ a $\alpha + i\omega$.

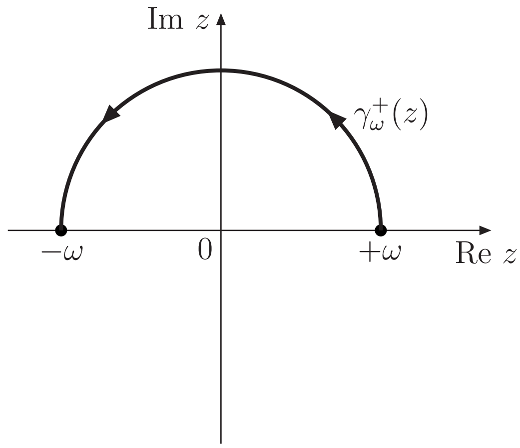
A questo punto ricordiamo che il lemma di Jordan ci assicura che, data una funzione $f(z)$ è del tipo:

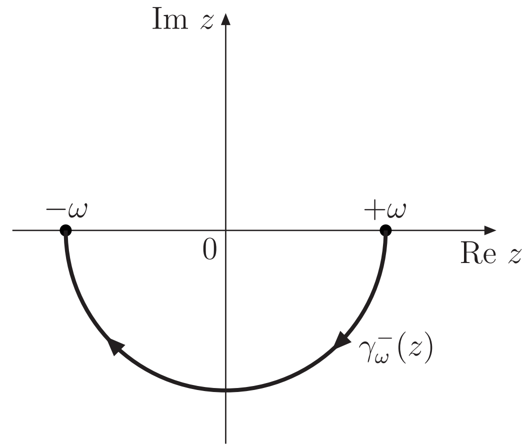
$$f(z) = g(z)\, e^{i\,t\,z}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{se} \quad \lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} g(z) = 0 \quad \text{e} \quad t > 0 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{\omega\to+\infty} \int_{\gamma_\omega^+(z)} g(z)\, e^{i\,t\,z}\, dz = 0,$$

$$\text{se} \quad \lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z \leq 0}} g(z) = 0 \quad \text{e} \quad t < 0 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{\omega\to+\infty} \int_{\gamma_\omega^-(z)} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = 0,$$

dove i cammini aperti $\gamma_\omega^+(z)$ e $\gamma_\omega^-(z)$ sono le semicirconferenze nel piano complesso di z, con centro in $z = 0$ e raggio ω, che vanno da $+\omega$ a $-\omega$ rispettivamente nel semipiano superiore (cioè $\operatorname{Im} z \geq 0$) e inferiore (cioè $\operatorname{Im} z \leq 0$):





Nella formula dell'antitrasformata di Laplace, l'integrando è

$$F(s)\, e^{st}$$

che è proprio del tipo del lemma di Jordan una volta che si fanno le seguenti sostituzioni

$$s = \alpha + i\,z, \qquad g(z) = e^{\alpha t}\, F(s) = e^{\alpha t}\, F(\alpha + i\,z).$$

Infatti otteniamo

$$F(s)\, e^{st} = F(\alpha + i\,z)\, e^{(\alpha + i\,z)t} = e^{\alpha t}\, F(\alpha + i\,z)\, e^{i\,t\,z} = g(z)\, e^{i\,t\,z}$$

Con queste sostituzioni inoltre abbiamo

$$s = \alpha + i\,z = \alpha + i\left[\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z))\right] = \alpha - \operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Re}(z)$$

da cui segue

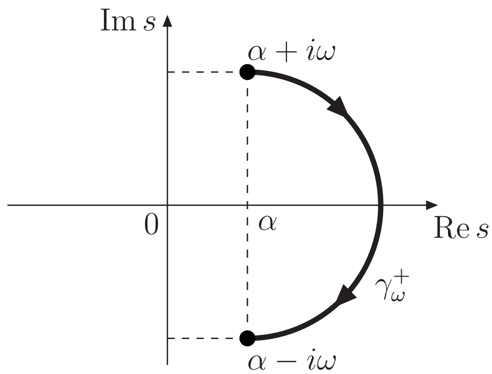
$$\operatorname{Re}(s) = \alpha - \operatorname{Im}(z), \qquad \operatorname{Im}(s) = \operatorname{Re}(z).$$

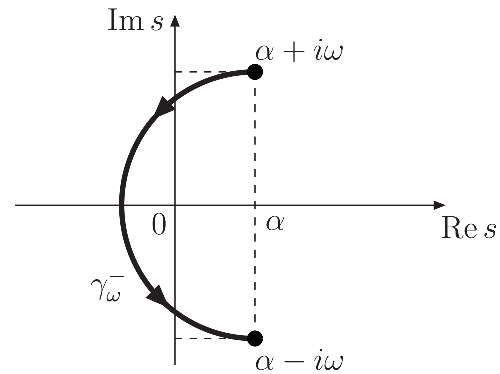
Perciò

$$\operatorname{Im}(z) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(s) \ge \alpha, \qquad\qquad \operatorname{Im}(z) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(s) \le \alpha.$$

Pertanto le semicirconferenze $\gamma_\omega^\pm(z)$ diventano nel piano complesso $s = \alpha + i\,z$ semicirconferenze hanno centro in $s = \alpha$ (corrispondente a $z = 0$) e raggio ω e vanno da $\alpha + i\omega$ a $\alpha - i\omega$ (corrispondentemente a $\gamma_\omega^\pm(z)$ che vanno da $+\omega$ a $-\omega$). Inoltre $\gamma_\omega^-(z)$ (che giace nel semipiano inferiore $\operatorname{Im} z \le 0$) diventa la semicirconferenza $\gamma_\omega^+(s)$ (che d'ora in poi indicheremo semplicemente con γ_ω^+) che giace nel semipiano destro $\operatorname{Re}(s) \ge \alpha$, mentre $\gamma_\omega^+(z)$ (che giace nel semipiano superiore $\operatorname{Im} z \ge 0$) diventa la semicirconferenza $\gamma_\omega^-(s)$ (che indicheremo semplicemente con γ_ω^-) che sta nel semipiano sinistro $\operatorname{Re}(s) \le \alpha$. Graficamente abbiamo quindi

$$\gamma_\omega^-(z) \xrightarrow{s=\alpha+i\,z} \gamma_\omega^+(s) \equiv \gamma_\omega^+ \qquad\qquad \gamma_\omega^+(z) \xrightarrow{s=\alpha+i\,z} \gamma_\omega^-(s) \equiv \gamma_\omega^-$$





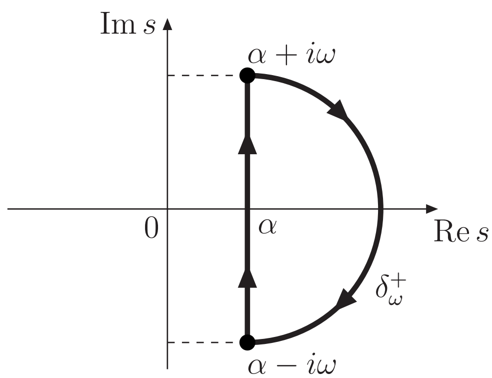
Perciò il lemma di Jordan, applicato all'integrale dell'antitrasformata, ci assicura che

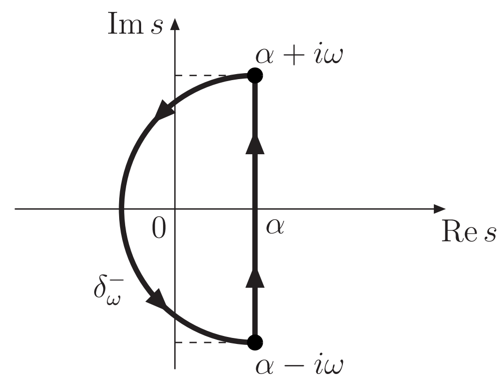
$$\text{se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \operatorname{Re}(s)\ge\alpha}} F(s) = 0 \quad \text{e} \quad t < 0 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{\omega\to+\infty} \int_{\gamma_\omega^+} F(s)\, e^{st}\, ds = 0,$$

$$\text{se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \operatorname{Re}(s)\le\alpha}} F(s) = 0 \quad \text{e} \quad t > 0 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{\omega\to+\infty} \int_{\gamma_\omega^-} F(s)\, e^{st}\, ds = 0,$$

Chiamiamo ora δ_ω^+ e δ_ω^-, i cammini chiusi che si ottengono unendo a σ_ω rispettivamente γ_ω^+ e γ_ω^-:

$$\delta_\omega^+ = \sigma_\omega + \gamma_\omega^+, \qquad\qquad \delta_\omega^- = \sigma_\omega + \gamma_\omega^-,$$





Notiamo che la curva δ_ω^+ è percorsa in senso orario, mentre la curva δ_ω^- è percorsa in senso antiorario. Per il lemma di Jordan possiamo quindi calcolare l'antitrasformata nel seguente modo:

$$\text{se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\geq\alpha}} F(s) = 0 \quad \text{e} \quad t<0 \qquad \text{allora} \qquad f(t)\theta(t) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_\omega^+} F(s)\, e^{st}\, ds.$$

$$\text{se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} F(s) = 0 \quad \text{e} \quad t>0 \qquad \text{allora} \qquad f(t)\theta(t) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_\omega^-} F(s)\, e^{st}\, ds.$$

L'integrale su δ_ω^+ merita un commento particolare. Infatti il cammino δ_ω^+ non ha al suo interno nessuna singolarità di $F(s)$, poiché tutte le singolarità di $F(s)$ giacciono alla sinistra dell'ascissa di convergenza α. Quindi per $t<0$ l'antitrasformata è nulla:

$$\text{Se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\geq\alpha}} F(s) = 0 \quad \text{e} \quad t<0 \qquad \text{allora} \qquad f(t)\theta(t) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_\omega^+} F(s)\, e^{st}\, ds = 0.$$

Questa in effetti è esattamente l'informazione contenuta nella $\theta(t)$ a primo membro.

È importante ora analizzare più nel dettaglio le condizioni richieste precedentemente riguardo al comportamento di $F(s)$ per $s\to\infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s)\geq\alpha$ (nel caso $t<0$) e nel semipiano sinistro $\mathrm{Re}(s)\leq\alpha$ (nel caso $t>0$). Queste condizioni sono necessarie per poter applicare la chiusura del cammino nei due casi e ci si può chiedere come procedere quando queste condizioni non siano soddisfatte.

Analizziamo prima di tutto il caso $t<0$, dove per chiudere il cammino è necessario che $F(s)$ tenda a zero per $s\to\infty$ nel semipiano destro $\mathrm{Re}(s)\geq\alpha$. Da quanto visto nella sezione precedente, se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di una qualche funzione, questo è sempre verificato. Infatti una delle condizione affinché $F(s)$ sia una trasformata di Laplace è che $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ per $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$. Pertanto, essendo $\alpha>\alpha_0$, se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di una qualche funzione, avremo sempre che $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ per $\mathrm{Re}(s)\geq\alpha$.

Per $t>0$ invece, per chiudere il cammino è necessario che $F(s)$ tenda a zero per $s\to\infty$ nel semipiano sinistro $\mathrm{Re}(s)\leq\alpha$. Se questa condizione non è verificata, ma è soddisfatta la condizione $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ per $\mathrm{Re}(s)\geq\alpha$, l'antitrasformata potrebbe essere ancora definita, ma bisogna modificare l'approccio per calcolarla.

Se in particolare $F(s)$ ha per $s\to\infty$ un andamento esponenziale semplice del tipo $e^{-a\,s}$ con $a\in\mathbb{R}$ e $a>0$ ($a<0$ non è permesso, perchè comporterebbe $\lim_{s\to\infty} F(s)\neq 0$ per $\mathrm{Re}(s)\geq\alpha$), allora l'antitrasformata si può ancora calcolare con la chiusura del cammino, ma con una piccola modifica. Ad essere più espliciti, abbiamo che se $F(s)$ è del tipo

$$F(s) = e^{-as} G(s),$$

allora, combinando l'esponenziale e^{-as} con l'esponenziale e^{st} avremo che

$$f(t)\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(s)\, e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(s)\, e^{-as}\, e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(s)\, e^{(t-a)s}\, ds.$$

A questo punto possiamo ripetere la chiusura del cammino vista prima per $F(s)$, sostituendo $F(s)$ con $G(s)$ e t con $(t-a)$, ottenendo:

$$\text{Se } t-a<0 \text{ e } \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\geq\alpha}} G(s)=0 \quad \text{allora} \quad f(t)\theta(t) = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_\omega^+} G(s)e^{(t-a)s}ds = 0;$$

$$\text{Se } t-a>0 \text{ e } \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} G(s)=0 \quad \text{allora} \quad f(t)\theta(t) = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_\omega^-} G(s)\,e^{(t-a)s}\,ds.$$

La prima relazione dice semplicemente che ora l'antitrasformata fa zero per $t-a<0$ (cioè per $t<a$ e non come prima per $t<0$). Questo è di fatto l'unico effetto dell'andamento esponenziale all'infinito, che si può rendere esplicito con una $\theta(t-a)$.

Notiamo anche che se poniamo $a=0$, ricopriamo esattamente il caso trattato precedentemente.

Riassumendo tutti i casi visti, abbiamo quindi che

$$\boxed{\text{Se } \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\geq\alpha}} F(s)\neq 0, \qquad \text{allora} \qquad f(t)\theta(t) \text{ non è definita}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\geq\alpha}} F(s)=0, \quad \text{e} \quad F(s)=e^{-as}\,G(s), \quad a\geq 0, \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} G(s)=0, \\ \text{allora} \quad f(t)\theta(t)=\theta(t-a)\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_\omega^-} F(s)\,e^{st}\,ds = \theta(t-a)\,\left\{\mathrm{Res}\,F(s)\,e^{st}\right\}_{\mathrm{Re}(s)\leq\alpha} \end{array}}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema dei residui.

7.4 Esempio 1: Antitrasformata di $\frac{1}{s}$

Calcoliamo l'antitrasformata di

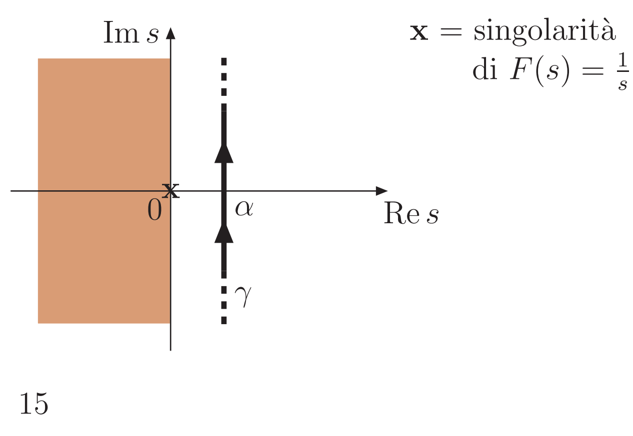
$$F(s)=\frac{1}{s}.$$

$F(s)$ ha una sola singolarità in $s=0$, quindi l'ascissa di convergenza è

$$\alpha_0 = 0.$$

L'ascissa α con cui calcolare l'antitrasformata deve soddisfare:

$$\alpha > \alpha_0 = 0.$$



Poi notiamo che

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \qquad \text{per ogni } s,$$

quindi in particolare vale

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \;\text{ per }\; \mathrm{Re}(s) > \alpha_0.$$

Pertanto l'antitrasformata è definita.

Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $F(s)$ è del tipo

$$F(s) = e^{-as}G(s), \quad \text{con} \quad a = 0, \qquad G(s) = \frac{1}{s}, \qquad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\le\alpha}} G(s) = 0.$$

e possiamo calcolare l'antitrasformata chiudendo il cammino γ nel semipiano sinistro:

$$f(t)\theta(t) = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} F(s)\, e^{st}\, ds = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{st}}{s}\, ds.$$

Calcoliamo ora l'integrale su γ_ω^- grazie al teorema dei residui:

$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_{\gamma_\omega^-} F(s)\, e^{st}\, ds = 2\pi i \sum_{\mathrm{Re}(s)\le\alpha} \{\mathrm{Res}\, F(s)\, e^{st}\}$$

da cui segue che

$$f(t)\theta(t) = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{st}}{s}\, ds = \theta(t) \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{st}}{s} \right\}_{s=0} = \theta(t) \lim_{s\to 0} s\, \frac{e^{st}}{s} = \theta(t).$$

Perciò $f(t)$ per $t > 0$ vale:

$$f(t) = 1, \qquad \text{per} \qquad t > 0.$$

7.5 Esempio 2: Antitrasformata di $\dfrac{e^{-s}}{s}$

Calcoliamo l'antitrasformata di

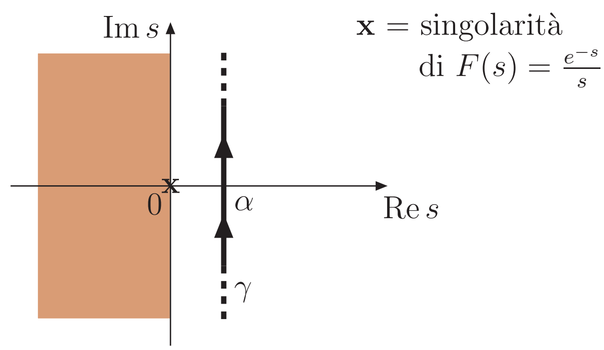
$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

$F(s)$ ha una sola singolarità in $s = 0$, quindi l'ascissa di convergenza è

$$\alpha_0 = 0.$$

L'ascissa α con cui calcolare l'antitrasformata deve soddisfare:

$$\alpha > \alpha_0 = 0.$$



Poi notiamo che
$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) \geq 0.$$
Pertanto vale anche
$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) > \alpha_0 = 0,$$
e l'antitrasformata è definita.

Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $F(s)$ è del tipo
$$F(s) = e^{-as} G(s), \quad \text{con} \quad a = 1, \qquad G(s) = \frac{1}{s}, \qquad \lim_{\substack{s\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)\leq\alpha}} G(s) = 0.$$
Quindi la chiusura del cammino γ produce:
$$f(t)\theta(t) = \theta(t-a) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} G(s)\, e^{(t-a)s}\, ds = \theta(t-1) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t-1)s}}{s}\, ds$$
Calcoliamo ora l'integrale su γ_ω^- grazie al teorema dei residui:
$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \theta(t-1) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t-1)s}}{s}\, ds = \theta(t-1) \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{(t-1)s}}{s} \right\}_{s=0} \\ &= \theta(t-1) \lim_{s\to 0} s\, \frac{e^{(t-1)s}}{s} = \theta(t-1). \end{aligned}$$
Perciò $f(t)$ per $t > 0$ vale:
$$\text{Per } \ t > 0, \qquad f(t) = \theta(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{per} \quad t > 1 \end{cases}$$

8 Trasformate di Laplace ed equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

La trasformata di Laplace permette di risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti
$$c_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + c_1 \frac{du}{dt} + c_0\, u = f(t)$$
in tutti i casi in cui le funzioni in gioco ammettono trasformata di Laplace. La trasformata di Laplace offre anche un modo immediato di tenere conto delle condizioni al contorno, quando queste sono fornite a $t = 0$:
$$u(0^+) = u_0 \qquad\qquad u'(0^+) = u_1\ .$$
Infatti trasformando secondo Laplace entrambi i membri dell'equazione differenziale e ponendo (ammesso che queste esistano)
$$\mathcal{L}_s[f(t)] \equiv F(s), \qquad\qquad \mathcal{L}_s[u(t)] \equiv U(s),$$

avremo che

$$\mathcal{L}_s[u'(t)] = sU(s) - u_0, \qquad \mathcal{L}_s[u''(t)] = s^2U(s) - su_0 - u_1.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$c_2\left[s^2U(s) - su_0 - u_1\right] + c_1\left[sU(s) - u_0\right] + c_0U(s) = F(s),$$

da cui si può ricavare $U(s)$:

$$U(s) = \frac{c_2su_0 + c_2u_1 + c_1u_0}{c_2s^2 + c_1s + c_0} + \frac{F(s)}{c_2s^2 + c_1s + c_0}.$$

Antitrasformando $U(s)$ si ottiene $\theta(t)u(t)$. L'antitrasformata di Laplace del primo addendo dà la soluzione generale dell'omogenea associata (interpretando u_0 e u_1 come costanti d'integrazione), mentre l'antitrasformata di Laplace del secondo dà la soluzione particolare dell'inomogenea con condizioni iniziali $u(0^+) = u'(0^+) = 0$.