Punto all'infinito

Il punto all'infinito è il risultato del legame topologico tra una superficie sferica bidimensionale, indicata con $\mathbb{S}^2$, e un piano, indicato con $\mathbb{R}^2$. Studiando la proiezione stereografica si vede che c'è "quasi" una corrispondenza uno a uno tra i punti su una superficie sferica $\mathbb{S}^2$ e i punti del piano $\mathbb{R}^2$. Il "quasi" è dovuto al fatto che il polo (nord o sud) su cui si costruisce la proiezione stereografica non ha il suo corrispettivo sul piano. O meglio, avrebbe il suo corrispettivo se considerassimo tutti i punti all'infinito del piano come un unico punto appartenente al piano. Cioè possiamo completare la corrispondenza uno a uno aggiungendo al piano $\mathbb{R}^2$ un unico punto all'infinito, indicato con ∞. Usando il simbolo $\sim$ per descrivere la corrispondenza uno a uno tra varietà differenziabili (omeomorfismo), abbiamo:

$$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \sim \mathbb{S}^2.$$

Quasta proprietà topologica ha importanti consequenze sul campo dei numeri complessi, perché $\mathbb{C}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Quindi in particolare avremo:

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim \mathbb{S}^2$$

La sfera $\mathbb{S}^2$ omeomorfa all'estensione di $\mathbb{C}$ all'infinito è detta sfera di Riemann. L'utilità di questa estensione del piano complesso con il punto all'infinito risulta nella possibilità di sfruttare le proprietà topologiche della sfera $\mathbb{S}^2$ per lavorare con i numeri complessi.

Queste proprietà sono in pratica in larga misura basate sulla *funzione di transizione* che descrive come si passa da una carta all'altra della proiezione stereografica. La proiezione stereografica non è altro che l'atlante minimo per mappare una sfera sul piano equatoriale (senza punto all'infinito) e consiste di due sole carte:

- la carta che proietta i punti della sfera sul piano equatoriale attraverso rette che passano per il polo nord;
- la carta che proietta i punti della sfera sul piano equatoriale attraverso rette che passano per il polo sud.

Chiamiamo ϕ_N e ϕ_S le funzioni che mappano i punti p della sfera nei punti del piano z_N e z_S secondo le due carte:

$$z_N = \phi_N(p), \qquad\qquad z_S = \phi_S(p).$$

La funzione di transizione è la funzione

$$\psi_{NS} = \phi_S \circ \phi_N^{-1}, \qquad\qquad z_S = \phi_S(p) = \phi_S \circ \phi_N^{-1}(z_N) = \psi_{NS}(z_N)$$

che esprime il legame tra i punti z_N del piano della proiezione nord con i punti z_S del piano della proiezione sud. Questo legame è:

$$z_N = \frac{1}{z_S}, \qquad \Leftrightarrow \qquad z_S = \frac{1}{z_N}. \tag{1}$$

Se ora estendiamo i piani delle due proiezioni nord e sud con il punto all'infinito, notiamo che l'eq. (1) non fa altro che mappare il punto all'infinito di un piano nell'origine dell'altro piano e viversa.

1 Studio del punto all'infinito

L'eq. (1) ci permette di capire in maniera intuitiva come studiare il punto all'infinito del piano complesso $\mathbb{C}$ (i cui punti siano descritti, diciamo, dalla variabile z). Basta immaginare il piano complesso $\mathbb{C}$ come la carta stereografica nord di una sfera e costruirne la carta stereografica sud, che sarà a sua volta un piano complesso (i cui punti siano descritti, diciamo, dalla variabile t), legato al campo complesso di z dalla relazione:

$$z = \frac{1}{t}. \tag{2}$$

Quindi lo studio del punto all'infinito $z = \infty$ dell'estensione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ del piano complesso di z può essere fatto studiando l'origine $t = 0$ del piano complesso di t attraverso la sostituzione in eq. (2). In particolare lo studio del punto all'infinito $z = \infty$ di una funzione $f(z)$ può essere fatto con la sostituzione di eq. (2) studiando la funzione $f(1/t)$ in $t = 0$. In particolare avremo che:

$$f(z) \text{ ha una sing. essenziale in } z = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ ha una sing. essenziale in } t = 0$$

$$f(z) \text{ ha un polo di ordine } n \text{ in } z = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ ha un polo di ordine } n \text{ in } t = 0$$

$$f(z) \text{ ha uno zero di ordine } n \text{ in } z = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ ha uno zero di ordine } n \text{ in } t = 0$$

Anche gli sviluppi in serie di Taylor e di Laurent intorno a $z = \infty$ si fanno con la sostituzione di eq. (2) a partire dagli sviluppi di Taylor e di Laurent di $f(1/t)$ intorno a $t = 0$.

- Sviluppo di Taylor

  Se $f(1/t)$ ammette intorno a $t = 0$ lo sviluppo di Taylor

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \dots$$

allora $f(z)$ ammette intorno a $z=\infty$ lo sviluppo di Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{-k} = a_0 + a_1\,\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \ldots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} a_{-k}\, z^k = \cdots + a_2\,\frac{1}{z^2} + a_1\,\frac{1}{z} + a_0\ .
\end{aligned}
$$

Come si vede, uno sviluppo di Taylor intorno all'infinito è uno sviluppo in $1/z$ senza potenze negative o, equivalentemente, uno sviluppo in z senza potenze positive.

- Sviluppo di Laurent

  Se $f(1/t)$ ammette intorno a $t=0$ lo sviluppo di Laurent

$$
f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^k = \cdots + d_{-2}\frac{1}{t^2} + d_{-1}\frac{1}{t} + d_0 + d_1\, t + d_2\, t^2 + \ldots
$$

allora $f(z)$ ammette intorno a $z=\infty$ lo sviluppo di Laurent:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, z^{-k} \\
&= \cdots + d_{-2}\, z^2 + d_{-1}\, z + d_0 + d_1\,\frac{1}{z} + d_2\,\frac{1}{z^2} + \ldots \\
&= \cdots + d_2\,\frac{1}{z^2} + d_1\,\frac{1}{z} + d_0 + d_{-1}\, z + d_{-2}\, z^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Se la funzione $f(z)$ ha un polo di ordine n intorno all'infinito, cioè la funzione $f(1/t)$ ha un polo di ordine n in $t=0$, avremo:

$$
f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k\, t^k
$$

e quindi lo sviluppo di Laurent intorno a $z=\infty$ sarà:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k\, t^k = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k \left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=-n}^{\infty} d_k\, z^{-k} = d_{-n}\, z^n + \cdots + d_{-2}\, z^2 + d_{-1}\, z + d_0 + d_1\,\frac{1}{z} + d_2\,\frac{1}{z^2} + \ldots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n} d_{-k}\, z^k = \cdots + d_2\,\frac{1}{z^2} + d_1\,\frac{1}{z} + d_0 + d_{-1}\, z + d_{-2}\, z^2 + \cdots + d_{-n}\, z^n
\end{aligned}
$$

Quindi una funzione con un polo di ordine n intorno all'infinito ha uno sviluppo di Laurent intorno all'infinito in $1/z$ con potenze negative a partire da $-n$ o, equivalentemente, uno sviluppo in z con potenze positive solo fino a n.

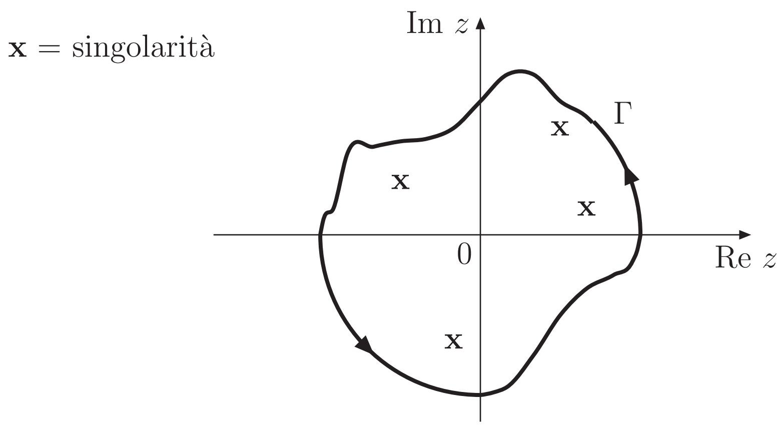
Per tutte le funzioni che al finito hanno al più una singolarità in $z = 0$, lo sviluppo intorno a $z = 0$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \, z^k$$

è anche lo sviluppo intorno all'infinito, visto che, non essendoci altre singolarità, il raggio di convergenza della serie è infinito.
Se invece la funzione $f(z)$ ha una singolarità al finito diversa da $z = 0$, non si può usare la serie intorno a $z = 0$ per ottenere lo sviluppo intorno all'infinito, ma l'unico modo di ottenere la serie intorno a $z = \infty$ è quello di estrarre la serie di $f(1/t)$ intorno a $t = 0$.

2 Residuo nel punto all'infinito

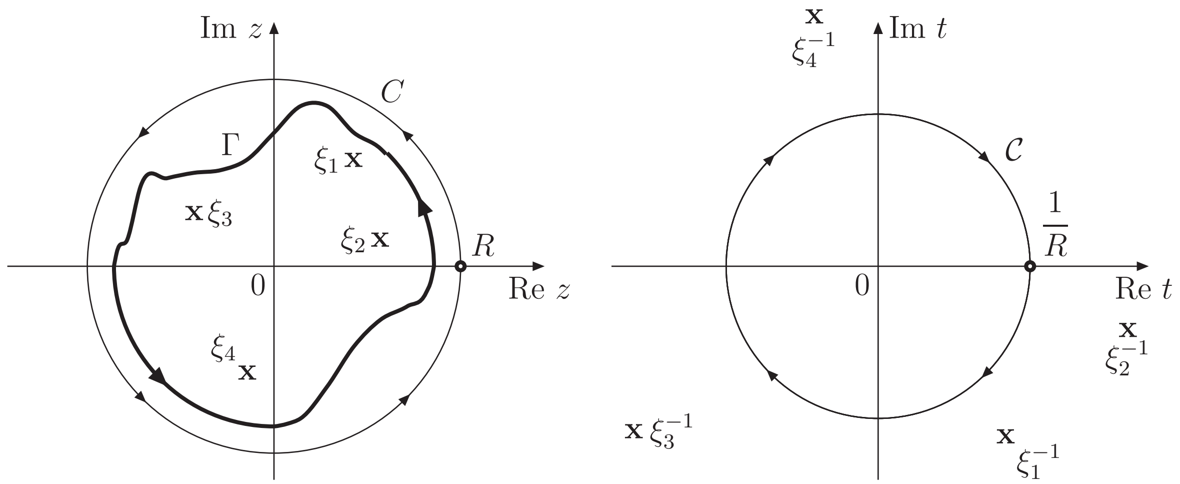
Per definre il residuo del punto all'infinito di una funzione $f(z)$, si deve considerare una curva di Jordan Γ regolare a tratti percorsa in senso antiorario tale per cui la sua regione interna contenga *tutte* le singolarità al finito di $f(z)$,



allora si definisce residuo di $f(z)$ all'infinito l'integrale:

$$\boxed{\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)\, dz.}$$

Per calcolare il residuo all'infinito, introduciamo la circonferenza C di raggio R percorsa in senso antiorario che contiene al suo interno l'intera curva Γ



e sfruttiamo che nella regione compresa tra Γ e C non ci sono singolarità di $f(z)$ per scrivere:

$$\{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz.$$

Introduciamo una parametrizzazione esplicita di C:

$$C: \qquad z(\theta) = R\,e^{2\pi i\,\theta}, \qquad\qquad \theta \in [0,1].$$

Facciamo ora il cambio di variabile

$$z = \frac{1}{t}, \qquad\qquad t = \frac{1}{z}$$

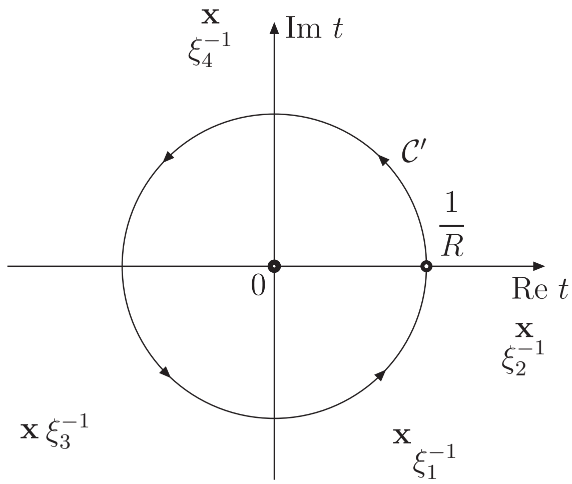
e consideriamo la curva $\mathcal{C}$ nel piano complesso di t, corrispettiva della circonferenza C:

$$\mathcal{C}: \qquad t(\theta) = \frac{1}{z(\theta)} = \frac{1}{R}\,e^{-2\pi i\,\theta}, \qquad\qquad \theta \in [0,1].$$

Come si capisce dalla parametrizzazione, $\mathcal{C}$ è una circonferenza di raggio $r = 1/R$ percorsa in senso orario. Quindi abbiamo:

$$\{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} f\left(\frac{1}{t}\right)\,\frac{dz}{dt}\,dt = +\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}'} f\left(\frac{1}{t}\right)\,\frac{dz}{dt}\,dt.$$

dove la curva $\mathcal{C}' = -\mathcal{C}$ è ora percorsa in senso antiorario:



Tutte le singolarità ξ_i al finito di $f(z)$ nel piano di z sono mappate nelle singolarità ξ_i^{-1} di $f(1/t)$ nel piano di t, che giacciono tutte all'esterno della circonferenza $\mathcal{C}'$. Infatti visto che le ξ_i sono interne a C, allora $|\xi_i| < R$, da cui segue che $|\xi_i^{-1}| = |\xi_i|^{-1} > 1/R = r$, che significa che le ξ_i^{-1} sono esterne a $\mathcal{C}'$.
Il punto $t = 0$ riveste un ruolo privilegiato, perché è l'unico punto nel piano di t che potrebbe essere una singolarità della funzione integranda $f(1/t)\, dz/dt$ interna alla curva $\mathcal{C}'$ e quindi dare un contributo al residuo. È importante notare che nel piano di t la funzione integranda non è solo $f(1/t)$, ma dobbiamo considerare anche lo jakobiano dz/dt del cambio variabile:

$$z = \frac{1}{t}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{t^2}$$

Essendo $t = 0$ l'unica possibile singolarità interna a $\mathcal{C}'$, l'integrale su $\mathcal{C}'$ può essere calcolato attraverso il residuo in $t = 0$:

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = +\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}'} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dz}{dt}\, dt = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}'} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\, dt = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0}$$

Quindi il residuo di $f(z)$ all'infinito non è uguale al residuo di $f(1/t)$ in $t = 0$, ma

$$\boxed{\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0}} \qquad (3)$$

2.1 Residuo all'infinito e serie di Laurent intorno all'infinito

Se scriviamo lo sviluppo di Laurent di $f(1/t)$ intorno a $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^k = \cdots + d_{-2}\frac{1}{t^2} + d_{-1}\frac{1}{t} + d_0 + d_1\, t + \ldots$$

otteniamo per lo sviluppo di $1/t^2 f(1/t)$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^{k-2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{k+2}\, t^k = \cdots + d_0\frac{1}{t^2} + d_1\frac{1}{t} + d_2 + d_3\, t + \ldots$$

Quindi, ricordando che il residuo in $t = 0$ è il coefficiente del termine $1/t$ dello sviluppo di Laurent, abbiamo:

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = -\,d_1, \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^k \quad \text{intorno a } t=0.$$

Visto il legame tra la serie di $f(1/t)$ intorno a $t = 0$ e la serie di $f(z)$ intorno a $z = \infty$ abbiamo

$$\boxed{\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = -\,d_1}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, t^k = \cdots + d_{-2}\frac{1}{t^2} + d_{-1}\frac{1}{t} + d_0 + d_1\, t + d_2\, t^2 + \ldots \quad \text{intorno a } t=0 \\ f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, z^{-k} = \cdots + d_{-2}\, z^2 + d_{-1}\, z + d_0 + d_1\frac{1}{z} + d_2\frac{1}{z^2} + \ldots \quad \text{intorno a } z=\infty \end{aligned}$$

Quindi *il residuo all'infinito è uguale al coefficiente, cambiato di segno, del termine* $1/z$ *dello sviluppo di Laurent intorno all'infinito.*

2.2 Residuo all'infinito e comportamente di $f(z)$ all'infinito

Per i punti al finito sappiamo che, se un punto z_0 non è una singolarità di $f(z)$, allora il residuo di $f(z)$ in z_0 è nullo. Dall'eq. (3) capiamo che questo **non** è più necessariamente vero se z_0 è il punto all'infinito. Infatti se $f(z)$ è regolare in $z = \infty$, questo significa che $f(1/t)$ è regolare in $t = 0$ e la funzione $1/t^2 f(1/t)$ potrebbe essere singolare in $t = 0$ (a causa del fattore $1/t^2$), generare un residuo non nullo per $1/t^2 f(1/t)$ in $t = 0$ e quindi generare un residuo non nullo per $f(z)$ in $z = \infty$.
Si capisce quindi che per capire quando si annulla il residuo all'infinito non dobbiamo guardare il comportamento in $t = 0$ di $f(1/t)$, ma di $1/t^2 f(1/t)$. Cioè, se $1/t^2 f(1/t)$ è regolare in $t = 0$, allora il residuo di $1/t^2 f(1/t)$ in $t = 0$ è nullo e, per l'equazione (3), anche il residuo di $f(z)$ in $z = \infty$ è nullo:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{regolare in } t=0 \qquad \Rightarrow \qquad \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = 0.$$

Quindi per trovare un comportamento all'infinito che generi un residuo all'infinito nullo, basta notare che $1/t^2 f(1/t) = \frac{f(1/t)}{t^2}$ è regolare in $t = 0$ se e solo se $f(1/t)$ ha almeno uno zero doppio in $t = 0$: infatti solo così $f(1/t)$ può compensare in $t = 0$ il polo doppio di $1/t^2$. Uno zero doppio di $f(1/t)$ in $t = 0$ corrisponde ad uno zero doppio di $f(z)$ in $z = \infty$. Avremo quindi:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{regolare in } t=0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{ha almeno uno zero doppio in } t=0 \\
&\Leftrightarrow \qquad f(z) \quad \text{ha almeno uno zero doppio in } z=\infty
\end{aligned}
$$

Mettendo tutto insieme abbiamo che:

$$
\boxed{\text{Se } \; f(z) \; \text{ ha almeno uno } \textbf{zero doppio} \text{ in } z=\infty \qquad \Rightarrow \qquad \{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty} = 0}
$$

Quindi per il punto all'infinito non basta in generale che la funzione sia ivi regolare, ma deve avere all'infinito almeno uno zero doppio. Naturalmente, come nel caso dei punti al finito, questo è solo una condizione sufficiente e non necessaria per avere residuo nullo; cioè può succedere che il residuo all'infinito sia nullo anche se la funzione non ha uno zero doppio, però se ha uno zero doppio, il residuo è necessariamente nullo.

2.3 Teorema dei residui con il punto all'infinito

Possiamo ora estendere il teorema dei residui al punto all'infinito. Consideriamo nuovamente la curva chiusa Γ, già usata per definire il residuo all'infinito, che sia regolare a tratti, percorsa in senso antiorario e tale per cui la sua regione interna contenga tutte le singolarità al finito di $f(z)$. Richiediamo ora che tutte le singolarità di $f(z)$ siano isolate. Allora, per il teorema dei residui, si ha

$$
\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{C}} \{\operatorname{Res} f(z)\}
$$

Invece dalla definizione del residuo all'infinito abbiamo

$$
\oint_\Gamma f(z)\,dz = -\,2\pi i\, \{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty}
$$

Eguagliando i secondi membri otteniamo:

$$
\sum_{z\in\mathbb{C}} \{\operatorname{Res} f(z)\} = -\, \{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty}
$$

da cui segue

$$
\boxed{\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \{\operatorname{Res} f(z)\} = \sum_{z\in\mathbb{C}} \{\operatorname{Res} f(z)\} + \{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty} = 0}
$$

Quindi, se una funzione analitica $f(z)$ possiede solo singolarità isolate in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la somma di tutti i suoi residui, compreso il residuo all'infinito, è zero.

Attraverso questo teorema, si capisce come lo studio del punto all'infinito possa essere utile per il calcolo dei residui di una funzione al finito. Infatti il calcolo dei residui nei poli o nei punti regolari, che siano punti al finito o il punto all'infinito, si riduce sempre al calcolo di un limite. Invece per le singolarità essenziali la situazione è più complicata e in generale bisogna conoscere lo sviluppo di Laurent. Ora abbiamo un'altra possibilità, nel caso in cui la funzione abbia una sola singolarità essenziale. Infatti per calcolare il residuo in una singolarità essenziale al finito, se questa è l'unica, basta calcolare i residui all'infinito e in tutte le altre singolarità al finito (che sono dei poli); questi si calcolano con un limite e il residuo nella singolarità essenziale sarà la somma, cambiata di segno, di tutti questi residui:

Se z_0 è l'unica singolarità essenziale di $f(z)$ e $z_1, \ldots, z_n$ sono poli al finito di $f(z)$,

allora

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_0} = -\sum_{i=1}^{n} \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_i} - \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} .$$

Se invece la funzione ha come unica singolarità essenziale il punto all'infinito, il residuo si calcola come la somma, cambiata di segno, di tutti i residui al finito (che possono essere calcolati con dei limiti).

Se $z = \infty$ è l'unica singolarità essenziale di $f(z)$ e $z_1, \ldots, z_n$ sono poli al finito di $f(z)$,

allora

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\sum_{i=1}^{n} \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_i} .$$