Trasformata di Fourier

1 Definizione

Abbiamo visto che attraverso la serie di Fourier abbiamo una scomposizione delle funzioni definite nell'intervallo $[a, b]$, con a e b finito, nei suoi modi di oscillazione. Viene spontaneo chiedersi: è possibile avere una cosa analoga anche per le funzioni $f(x)$ definite in $(-\infty, +\infty)$?

Data una funzione $f(x)$ definita in $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, la sua serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-ik_n x}\, dx, \qquad k_n = \frac{2\pi}{L}\, n.$$

converge alla $f(x)$ nell'intervallo $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ secondo il teorema di Dirichlet.

Per avere un'analisi di Fourier di una funzione (non periodica) su tutta la retta reale si può immaginare quindi di mandare all'infinito la larghezza dell'intervallo L. Vediamo però che L compare a denominatore della serie e un semplice limite $L \to +\infty$ sembra mandare semplicemente a zero ogni termine della serie. In realtà bisogna procedere con più attenzione. Infatti per $L \to +\infty$ c'è anche un'altra quantità che tende a zero, è la distanza Δk tra due valori successivi di k_n:

$$\Delta k = k_n - k_{n-1} = \frac{2\pi}{L}\, n - \frac{2\pi}{L}\,(n-1) = \frac{2\pi}{L} \quad \underset{L\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

Questo significa che per $L \to +\infty$ i valori di k_n, che normalmente sono quantizzati, tendono invece a variare con continuità. In pratica è come se il limite $L \to +\infty$ togliesse la quantizzazione e questo comporta che la somma su n deve modificarsi per rispettare la variabilità con continuità di k_n.

Per procedere correttamente, riscriviamo la serie di Fourier mettendo in evidenza Δk:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} \frac{L}{2\pi}\, \Delta k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}\, \Delta k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}\, \Delta k$$

dove abbiamo introdotto per comodità i coefficienti

$$b_n = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-ik_n x}\, dx.$$

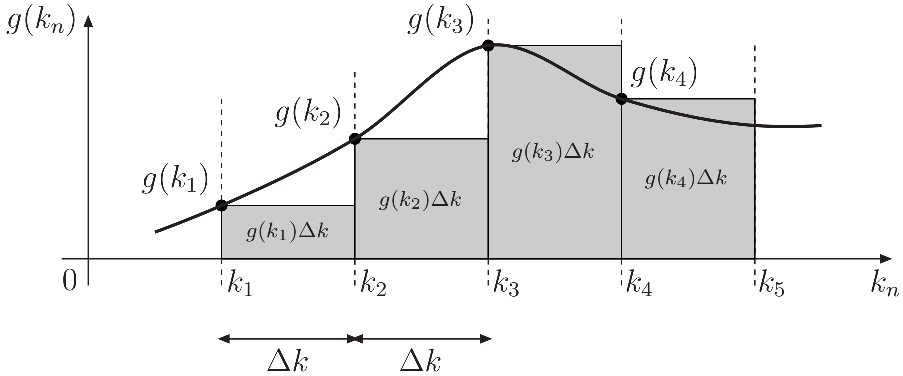
che dipendono da L solo negli estremi di integrazione e attraverso $k_n = \frac{2\pi}{L} n$. Se ora definiamo la funzione $g(k_n)$ come

$$g(k_n) = b_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}$$

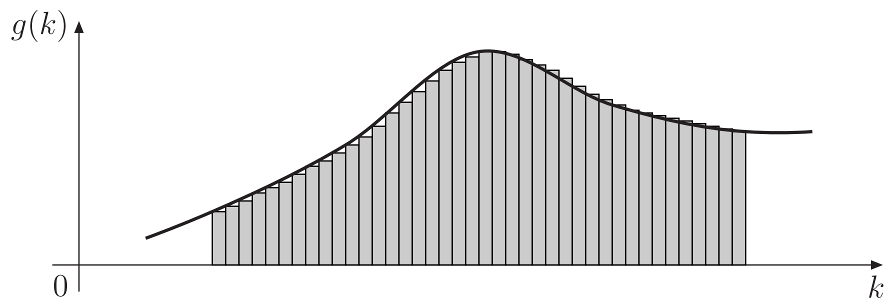
ci accorgiamo che la serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k_n)\,\Delta k = \cdots + g(k_1)\,\Delta k + g(k_2)\,\Delta k + g(k_3)\,\Delta k + g(k_4)\,\Delta k + \ldots$$

altro non è che la somma delle aree di infiniti rettangoli (ognuno etichettato da n) di base Δk (uguale per tutti gli n) e di altezza $g(k_n)$ (che cambia per ogni n). Se la funzione $g(k_n)$ è reale, possiamo anche vederlo graficamente:



Da questa interpretazione grafica si capisce bene che, quando $L \to +\infty$ (e quindi $\Delta k \to 0$), i vari $\ldots, k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$ si avvicinano tra loro, la variabile discreta k_n tende a diventare una variabile continua (che chiamiamo k) e l'area grigia tende a diventare l'area sottesa dalla curva $g(k)$,



che altro non è che l'integrale della funzione $g(k)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k_n)\,\Delta k \underset{L\to+\infty}{\sim} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\,dk \tag{1}$$

Pertanto, nel limite $L \to +\infty$, la variabile dicreta k_n diventa la variabile continua k e per i coefficienti b_n abbiamo:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-ik_n x}\, dx \underset{L\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \equiv F(k),$$

dove abbiamo indicato con $F(k)$ il limite dei b_n per $L \to +\infty$. Possiamo ora dare un'espressione precisa alla funzione $g(k)$, limite per $L \to +\infty$ della funzione $g(k_n)$:

$$g(k_n) = b_n \, \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \underset{L\to+\infty}{\sim} g(k) = F(k) \, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},$$

Inserendo questa espressione in eq. (1), otteniamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k_n) \, \Delta k \underset{L\to+\infty}{\sim} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \, dk = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \, dk$$

Riassumendo, i coefficienti b_n dipendenti dalla variabile discreta $k_n = 2\pi n/L$ sono diventati nel limite $L \to +\infty$ una funzione nella variabile continua k

$$\boxed{\mathcal{F}_k[f(x)] \equiv F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-ikx} \, dx} \tag{2}$$

che viene detta **trasformata di Fourier** di $f(x)$. Invece, la serie di Fourier è diventata nel limite $L \to +\infty$ l'integrale

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \, e^{ikx} \, dk, \qquad F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)]} \tag{3}$$

che viene detta **antitrasformata di Fourier** di $F(k)$.

Per discutere più precisamente l'esistenza della trasformata di Fourier e la convergenza dell'antitraformata alla funzione $f(x)$ enunciamo il teorema di Dirichlet dell'integrale di Fourier.

2 Teorema di Dirichlet dell'integrale di Fourier

Data una funzione complessa a variabile reale $f(x)$ **sommabile** *in $\mathbb{R}$*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad \textit{tale che} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty \,,$$

allora esiste ed è finita la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-ikx} \, dx \,,$$

e per la convergenza dell'antitrasformata abbiamo i seguenti casi:

- *Se $f(x)$ è continua*[1] *in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora l'antitrasformata di Fourier converge a $f(x_0)$:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \, e^{ikx_0} \, dk = f(x_0) \,, \qquad F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)] \,.$$

[1]Sulle dispense il teorema è enunciato nel caso in cui la funzione è di classe C^1 in un intorno di x_0, ma in realtà basta che sia continua in x_0.

- *Se $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie in $x_0 \in \mathbb{R}$ (cioè $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ con $f'(x_0^+), f'(x_0^-)$ finiti), allora l'antitrasformata di Fourier converge al valor medio del salto:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ikx_0}\, dk = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \qquad\qquad F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)]\,.$$

Prima di tutto notiamo che se $f(x)$ è sommabile in $\mathbb{R}$, allora la trasformata di Fourier definita in eq. (2) esiste ed è finita:

$$\Big|\mathcal{F}_k[f(x)]\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\, e^{-ikx}\right|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty\,, \qquad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Questo significa che se una $f(x)$ è sommabile, allora ammette trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$ e la trasformata di Fourier $F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)]$ come funzione di k è limitata per ogni valore di k.

Per dimostrare il resto del teorema si segue la dimostrazione del teorema di Dirichlet per la serie di Fourier, introducendo invece della somma $S_N(x)$, l'integrale $I_K(x)$ ($K \in \mathbb{R}$)

$$I_K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{+K} F(k)\, e^{ikx}\, dk\,, \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk = \lim_{K\to+\infty} I_K(x)\,,$$

e invece della funzione $\sigma_N(x)$, l'integrale $\Sigma_K(x)$

$$\Sigma_K(x) = \int_{-K}^{+K} e^{-ik(x-x_0)}\, dk = \frac{e^{-iK(x-x_0)} - e^{iK(x-x_0)}}{-i(x-x_0)} = \frac{2\,\sin[K(x-x_0)]}{x-x_0}\,.$$

2.1 Discussione dell'esistenza della trasformata di Fourier

Con il teorema di Dirichlet dell'integrale di Fourier abbiamo dimostrato che condizione **sufficiente** affinché esista la trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è che $f(x)$ sia **sommabile**:

$$\text{Se} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{è finito}\,, \qquad \text{allora} \quad \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \quad \text{è finito}\,.$$

Affinché $f(x)$ sia sommabile devono verificarsi due condizioni su $f(x)$:

- La prima condizione è che $f(x)$ abbia al finito al più singolarità integrabili, cioè che valga:
$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0) f(x) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in\,]-\infty, +\infty[$$
- Questa condizione non basta per la sommabilità di $f(x)$, perché l'integrale si estende fino a $\pm\infty$ e l'integrale che si estende su una regione di integrazione infinita è di per sé infinito. Se per esempio consideriamo la funzione costante dovunque $f(x) = 1$, l'integrale di $|f(x)|$ tra $-\infty$ e $+\infty$ è infinito:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx = [x]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty.$$

Quindi affinché sia sommabile, $f(x)$ deve tendere a zero per $x \to \pm\infty$. In realtà, non basta neanche questo; se infatti per esempio proviamo ad integrare tra $a > 0$ e $+\infty$ la funzione $1/x$, che per $x \to +\infty$ tende a zero, otteniamo[2]:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty.$$

Quindi la seconda condizione affinché $f(x)$ sia sommabile è che:

$$\boxed{f(x) \text{ per } x \to \pm\infty \text{ va a zero più velocemente di } \frac{1}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\, f(x) = 0.}$$

Queste sono le condizioni affinché $f(x)$ sia sommabile, che come abbiamo detto è una condizione sufficiente affinché $f(x)$ ammetta trasformata di Fourier. In realtà esistono funzioni non sommabili che però ammettono trasformata di Fourier, cioè tali per cui esiste l'integrale:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

anche se non esiste

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Un esempio di funzioni così è la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,,$$

che ammette trasformata di Fourier, ma non è assolutamente integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty\,, \qquad \mathcal{F}_k\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ikx}\, dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

3 Equazione di Parseval

Come per la serie di Fourier, anche per la trasformata di Fourier si ha un'equazione di Parseval. Se $f(x)$ ammette la trasformata di Fourier $F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)]$ e l'anititrasformata di $F(k)$ converge a $f(x)$, allora abbiamo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk F(k)\, e^{ikx}, \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx},$$

[2] in questo caso la regione di integrazione non può contenere lo zero dove la funzione è singolare

e quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|f(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,[f(x)]^*\,f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk[F(k)e^{ikx}]^*\,f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[F(k)]^*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,f(x)\,e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[F(k)]^*\,F(k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,|F(k)|^2.\end{aligned}$$

Nella derivazione abbiamo invertito l'ordine dei due integrali, permesso se la trasformata e l'antitrasformata esistono.

4 Parità della trasformata di Fourier

Considerando la trasformata di Fourier come una funzione di k

$$F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}dx,$$

avremo

$$\begin{aligned}F(-k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(-x')\,e^{-ikx'}dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x')\,e^{-ikx'}dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,e^{-ikx}dx,\end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo fatto il cambio di variabile $x' = -x$ e poi nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato $x' \to x$.
Quindi se $f(x)$ è pari in x, cioè se $f(-x) = f(x)$, abbiamo che

$$F(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}dx = \mathcal{F}_k[f(x)] = F(k),$$

cioè anche $F(k)$ è pari.
Similmente, se $f(x)$ è dispari in x, cioè se $f(-x) = -f(x)$, avremo che anche $F(k)$ è dispari:

$$F(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,e^{-ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}dx = -\mathcal{F}_k[f(x)] = -\,F(k).$$

Riassumendo:

$$\boxed{\text{Se } f(x) \text{ è } \textbf{pari} \text{ in } x, \quad \text{allora } F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}dx \text{ è } \textbf{pari} \text{ in } k}$$

$$\boxed{\text{Se } f(x) \text{ è } \textbf{dispari} \text{ in } x, \quad \text{allora } F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}dx \text{ è } \textbf{dispari} \text{ in } k}$$

5 Teorema della convoluzione

5.1 Definizione di convoluzione

La convoluzione è un'operazione, indicata con il simbolo "$*''$, tra funzioni definite in $\mathbb{R}$ che restituisce una funzione definita in $\mathbb{R}$:

$$* \quad : \qquad f_1, f_2 \quad \to \quad f_1 * f_2$$

In particolare, date due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ si definisce **convoluzione di f_1 e f_2** la funzione

$$[f_1 * f_2](x) \;\equiv\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x')\, f_2(x-x')\, dx'$$

5.2 Proprietà della convoluzione

L'operazione a convoluzione soddisfa le seguenti proprietà:

- Commutatività:
$$\boxed{f_1 * f_2 \;=\; f_2 * f_1}$$
Infatti, facendo il cambio variabile $x'' = x - x'$ ($x' = x - x''$), abbiamo
$$\begin{aligned}
[f_2 * f_1](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x')\, f_1(x-x')\, dx' = -\int_{+\infty}^{-\infty} f_2(x-x'')\, f_1(x'')\, dx'' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x'')\, f_2(x-x'')\, dx'' = [f_1 * f_2](x)
\end{aligned}$$

- Associatività:
$$\boxed{f_1 * (f_2 * f_3) \;=\; (f_1 * f_2) * f_3}$$
Infatti
$$\begin{aligned}
[f_1 * (f_2 * f_3)](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x')\, [f_2 * f_3](x-x') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx''\, f_2(x'')\, f_3(x-x'-x'')
\end{aligned}$$
Facendo il cambio variabile $x''' = x' + x''$ ($x'' = x''' - x'$), abbiamo
$$\begin{aligned}
[f_1 * (f_2 * f_3)](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx'''\, f_2(x'''-x')\, f_3(x-x''') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx''' \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x')\, f_2(x'''-x')\, f_3(x-x''') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'''\, [f_1 * f_2](x''')\, f_3(x-x''') \\
&= [(f_1 * f_2) * f_3](x).
\end{aligned}$$
Nel secondo passaggio abbiamo invertito l'ordine di integrazione, nell'ipotesi che gli integrali esistano.

5.3 Teorema della convoluzione

Il teorema della convoluzione asserisce che la trasformata di Fourier della convoluzione delle funzioni f_1 e f_2 è sostanzialmente il **prodotto** delle trasformate di Fourier di f_1 e f_2:

$$\boxed{\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big] \; = \; \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\,\mathcal{F}_k\big[f_2(x)\big]}$$

Per la dimostrazione partiamo da

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,[f_1 * f_2](x)\,e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x')\,f_2(x-x')\,e^{-ikx}.\end{aligned}$$

A questo punto moltiplichiamo per

$$e^{ikx'}\,e^{-ikx'} = 1,$$

ottenendo

$$\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x')\,e^{-ikx'}f_2(x-x')\,e^{-ik(x-x')}.$$

Ora, invertendo l'ordine degli integrali dove necessario, facciamo il cambio di variabile $x'' = x - x'$ $(x = x'' + x')$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, f_1(x')\,e^{-ikx'}f_2(x'')\,e^{-ikx''} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx''\,\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\,f_2(x'')\,e^{-ikx''} \\ &= \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx''\,f_2(x'')\,e^{-ikx''} \\ &= \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\,\mathcal{F}_k\big[f_2(x)\big],\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione.

Questo teorema mette in evidenza una proprietà interessante della trasformata di Fourier. Infatti la trasformata di Fourier fa diventare l'operazione di convoluzione (che è praticamente un operatore integrale) in un semplice prodotto.
Questo significa che per calcolare la convoluzione di due funzioni f_1 e f_2, se possiamo passare allo spazio delle trasformate di Fourier, spesso il procedimento più semplice da seguire è:

- calcolare le trasformate di Fourier $\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]$, $\mathcal{F}_k\big[f_2(x)\big]$;
- ottenere la trasformata di Fourier della convoluzione
$$\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\,\mathcal{F}_k\big[f_2(x)\big];$$
- trovare $[f_1 * f_2](x)$ facendone l'antitrasformata
$$[f_1 * f_2](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}_k\big[[f_1 * f_2](x)\big]\,e^{ikx}dk = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}_k\big[f_1(x)\big]\,\mathcal{F}_k\big[f_2(x)\big]\,e^{ikx}dk.$$

6 Comportamento all'infinito della trasformata di Fourier

Considerando la trasformata di Fourier come una funzione di k

$$F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx,$$

possiamo applicare il lemma di Riemann che assicura che, data una funzione $f(x)$ sommabile in un intervallo $[a,b]$ finito o infinito,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx = 0\,.$$

Applicandolo all'integrale che definisce la trasformata di Fourier abbiamo che

$$\boxed{\lim_{k\to\pm\infty} \mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = 0}$$

7 Trasformata della derivata di una funzione $f(x)$

Se una funzione $f(x)$ sommabile è continua e derivabile e se la $f'(x)$ è sommabile[3], allora la trasformata di Fourier della derivata $f'(x)$ è legata alla trasformata di $f(x)$ dalla relazione:

$$\mathcal{F}_k[f'(x)] = ik\, \mathcal{F}_k[f(x)] \tag{4}$$

Infatti integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx \\ &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = ik\, \mathcal{F}_k[f(x)]\ , \end{aligned}$$

dove il termine di superficie deve essere nullo affinché la trasformata di f esista (f deve essere sommabile). La relazione trovata può essere iterata per ottenere le trasformate di Fourier delle derivate successive:

$$\mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f(x)]\ ,$$

ovviamente supponendo che la funzione $f(x)$ sia n volte derivabile, che le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ siano continue e che tutte le derivate fino alla n-esima siano sommabili sull'asse reale.

[3]La richiesta di derivabilità di $f(x)$ non implica la continuità di $f'(x)$, che pertanto può avere un numero finito di punti in cui ha dei salti o delle singolarità. La richiesta che la $f'(x)$ sia sommabile implica però che tali singolarità siano integrabili.

Moltiplicando ambo i membri dell'eq. (4) per $-i$ si può simbolicamente stabilire la corrispondenza:

$$-i\frac{d}{dx} \longleftrightarrow k$$

fra l'operatore derivata nello spazio delle funzioni $f(x)$ e la semplice moltiplicazione per k nello spazio delle funzioni $F(k)$; tale corrispondenza è di grande importanza in Meccanica Quantistica.

8 Derivata della trasformata di una funzione $f(x)$

Se si moltiplica la funzione $f(x)$ per x, **nell'ipotesi che** $xf(x)$ **sia sommabile**, abbiamo

$$\mathcal{F}_k\,[xf(x)] \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dk}\left[i\,e^{-ikx}\right]dx = i\frac{d}{dk}\,\mathcal{F}_k[f(x)].$$

Anche questa relazione si può iterare, ottenendo

$$\mathcal{F}_k\,[x^n f(x)] = i^n\,\frac{d^n}{dk^n}\mathcal{F}_k[f(x)],$$

sempre nell'ipotesi che la funzione $x^n f(x)$ sia ancora sommabile sull'asse reale. Questa relazione stabilisce la corrispondenza

$$x \longleftrightarrow i\frac{d}{dk},$$

fra moltiplicazione per x nello spazio delle $f(x)$ e la derivata nello spazio delle $F(k)$.

9 Dedurre il comportamento della $\mathcal{F}_k[f(x)]$ dalla $f(x)$

Dal calcolo della trasformata della derivata si può vedere il legame tra la derivabilità della $f(x)$ e il comportamento per $k \to \pm\infty$ della trasformata di Fourier $F(k) = \mathcal{F}_k[f(x)]$. Infatti se $f(x)$ è n volte derivabile, e se le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ sono continue e se la funzione con tutte le sue derivate fino alla n-esima sono sommabili, allora

$$\mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)] = (ik)^n\mathcal{F}_k[f(x)] \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{\mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)]}{(ik)^n}\ .$$

Poiché $\mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)$ è la trasformata di Fourier di una funzione sommabile, allora, da quanto visto nella sezione 6, abbiamo

$$\lim_{k\to\pm\infty}\mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)] \sim o\left(\frac{1}{k^0}\right)\ .$$

Pertanto abbiamo che

$$\mathcal{F}_k[f(x)] \sim \frac{1}{k^n}\,o\left(\frac{1}{k^0}\right) \sim o\left(\frac{1}{k^n}\right) \quad \text{per} \quad k \to \pm\infty\ .$$

cioè $\mathcal{F}_k[f(x)]$ va a zero per grandi k più velocemente di $1/k^n$. Quindi abbiamo il seguente legame tra derivabilità della $f(x)$ e comportamento all'infinito della $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se } f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x) \text{ sono sommabili e continue} \\ \text{e se } f^{(n)}(x) \text{ è sommabile} \\ \Downarrow \\ \mathcal{F}_k[f(x)] \underset{k\to\pm\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{k^n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\pm\infty} k^n\, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0\end{array}}$$

Quindi quanto più una funzione è liscia (ovvero quanto maggiore è il suo ordine di derivabilità) tanto più velocemente la sua trasformata di Fourier va a zero all'infinito.

Questo risultato si può rendere anche più preciso, analizzando il procedimento dell'integrazione per parti nel caso in cui la $f(x)$ non sia continua, ma abbia un numero finito di salti[4]. In questo caso si deve procedere spezzando l'integrale secondo i salti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di $f(x)$ e ottenere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f'(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{x_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \cdots + \int_{x_n}^{+\infty} dx\right] f'(x)\, e^{-ikx} \\ &= \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{x_1} + \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\Big|_{x_1}^{x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\Big|_{x_n}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}\end{aligned}$$

Il valore di $f(x)$ agli estremi $\pm\infty$ continua ad essere zero, mentre nei salti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la $f(x)$ assume valori differenti (ma finiti) a seconda se si arriva a quei punti da destra o da sinistra:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[f'(x)] &= \frac{f(x_1^{(-)})}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_1} - 0 + \frac{f(x_2^{(-)})}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_2} - \frac{f(x_1^{(+)})}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_1} + \cdots + 0 - \frac{f(x_n^{(+)})}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_n} + ik\, \mathcal{F}_k[f(x)] \\ &= \text{cost.} + ik\, \mathcal{F}_k[f(x)]\ .\end{aligned}$$

La costante è in generale diversa da zero ed è sicuramente zero se $f(x)$ è continua. Iterando il procedimento possiamo dire che, se $f(x)$ è n volte derivabile ed è sommabile con tutte le sue derivate fino alla n-esima e se le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-2)}(x)$ sono continue, mentre $f^{(n-1)}(x)$ ha dei salti, allora

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{\text{cost.} + \mathcal{F}_k[f^{(n)}(x)]}{(ik)^n} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}_k[f(x)] \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^n}\right) \quad \text{per} \quad k \to \pm\infty$$

Quindi il legame tra derivabilità della $f(x)$ e il comportamento all'infinito della $\mathcal{F}_k[f(x)]$ si può riassumere così:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se } f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-2)}(x) \text{ sono sommabili e continue} \\ \text{e se } f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x) \text{ sono sommabili} \\ \Downarrow \\ \mathcal{F}_k[f(x)] \underset{k\to\pm\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\pm\infty} k^n\, \mathcal{F}_k[f(x)] = \text{cost.} \\ \hline \text{Se anche } f^{(n-1)}(x) \text{ è continua} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_k[f(x)] \underset{k\to\pm\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{k^n}\right) \ \Leftrightarrow \ \lim_{k\to\pm\infty} k^n \mathcal{F}_k[f(x)] = 0\end{array}}$$

[4]Altri tipi di discontinuità non sono permesse perché impedirebbero alla $f'(x)$ di essere sommabile.

Invece dalla formula per la derivata della trasformata segue che, se $x^n f(x)$ è sommabile, allora

$$\frac{d^n}{dk^n}\mathcal{F}_k[f(x)] = (-i)^n\,\mathcal{F}_k\left[x^n f(x)\right]$$

Però $x^n f(x)$ è sommabile se e solo se $f(x)$ è sommabile e va a zero per x che tende a $\pm\infty$ più velocemente di x^{n+1}. Quindi abbiamo il seguente legame tra comportamento di $f(x)$ all'infinito e derivabilità della $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se } f(x) \text{ è sommabile} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} x^{n+1} f(x) = 0 \\ \Downarrow \\ \mathcal{F}_k[f(x)] \text{ è derivabile } n \text{ volte}\end{array}}$$

Questo significa che quanto più rapidamente una funzione decresce all'infinito, tanto più la sua trasformata di Fourier è liscia, cioè maggiormente derivabile.

È importante notare il verso delle frecce di implicazione nelle relazioni trovate.
La derivabilità della $f(x)$ implica un certo comportamento all'infinito della $\mathcal{F}_k[f(x)]$, ma non vale in generale il negativo. Cioè se una funzione non è derivabile neanche una volta, non possiamo dedurre qualcosa sul comportamento all'infinito della trasformata.
Similmente se $f(x)$ è sommabile, ma $xf(x)$ no (cioè $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x) \neq 0$) non possiamo dire che $\mathcal{F}_k[f(x)]$ non sia derivabile neanche una volta, ma dobbiamo astenerci dal dire qualcosa sulla derivabilità della $\mathcal{F}_k[f(x)]$. Oppure se $xf(x)$ è sommabile, ma $x^2 f(x)$ no, allora $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è sicuramente derivabile una volta, ma non sappiamo se è derivabile una seconda volta.

10 Esempi

……