Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 17 settembre 2024

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{z}}}\,.$$

(a) Studiare gli zeri della funzione a numeratore $N(z) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)$ e di quella a denominatore $D(z) = 1 - e^{\frac{2\pi i}{z}}$, determinandone l'ordine.

(b) Studiare le singolarità (tipo e ordine) di $f(z)$ al finito;

(c) Studiare il punto all'infinito (se è una singolarità determinarne il tipo, se è un polo o uno zero stabilirne l'ordine);

(d) Calcolare l'integrale

$$I = \oint_C f(z)\,dz$$

dove C è la circonferenza di raggio 2 percorsa in senso antiorario.

Soluzione

(a) Il numeratore $N(z) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)$ si annulla quando

$$\cos\left(\frac{2\pi}{z}\right) = 1$$

che succede per

$$\frac{2\pi}{z} = 2\pi\, n, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \qquad \text{cioè per} \qquad z = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

Per capirne l'ordine conviene studiarne le derivate. La derivata prima

$$\frac{dN}{dz} = \frac{d}{dz}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)\right] = -\frac{2\pi}{z^2}\sin\left(\frac{2\pi}{z}\right)$$

si annulla anch'esse in $z = \frac{1}{n}$:

$$\left.\frac{dN}{dz}\right|_{z=1/n} = -2\pi n^2 \sin(2\pi n) = 0\,.$$

Dobbiamo quindi calcolare anche la derivata seconda:

$$\frac{d^2N}{dz^2} = -\frac{d}{dz}\frac{2\pi}{z^2}\,\sin\left(\frac{2\pi}{z}\right) = \frac{4\pi}{z^3}\,\sin\left(\frac{2\pi}{z}\right) + \frac{4\pi^2}{z^4}\,\cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)$$

Poiché la derivata seconda non si annulla in $z = \frac{1}{n}$

$$\left.\frac{d^2N}{dz^2}\right|_{z=1/n} = 4\pi n^3\,\sin(2\pi n) + 4\pi^2 n^4\,\cos(2\pi n) = 4\pi^2 n^4 \neq 0\,,$$

deduciamo che gli zeri in $z = \frac{1}{n}$ sono zeri doppi di $N(z)$.

Il denominatore $D(z) = 1 - e^{\frac{2\pi i}{z}}$ si annulla quando

$$e^{\frac{2\pi i}{z}} = 1$$

che succede per

$$\frac{2\pi i}{z} = 2\pi i\, n, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \qquad \text{cioè per} \qquad z = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

Questi sono zeri semplici del denominatore $D(z) = 1 - e^{\frac{2\pi i}{z}}$, infatti la sua derivata

$$\frac{dD}{dz} = \frac{d}{dz}\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{z}}\right) = \frac{2\pi i}{z^2}\,e^{\frac{2\pi i}{z}}$$

non si annulla in $z = \frac{1}{n}$.

(b) Dai risultati del punto (a) vediamo che il numeratore e il denominatore hanno gli zeri negli stessi punti $z = \frac{1}{n}$. Questi sono zeri semplici del denominatore e zeri doppi del numeratore. Pertanto i punti $z = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ non sono punti singolari di $f(z)$, ma sono zeri semplici di $f(z)$.

L'unico altro punto al finito che può essere una singolarità di $f(z)$ è dove il coseno e l'esponenziale hanno una singolarità essenziale. Questo succede per entrambe nel punto $z = 0$, che risulta pertanto una singolarità essenziale di $f(z)$.

(c) Per studiare il punto all'infinito facciamo la sostituzione $z = 1/t$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1 - \cos(2\pi t)}{1 - e^{2\pi i t}}\,.$$

Quando t va a zero sia il numeratore che il denominatore si annullano. Per capire l'ordine dello zero del numeratore, facciamone la derivata:

$$\frac{d}{dt}\Big[1 - \cos(2\pi t)\Big] = 2\pi\,\sin(2\pi t)$$

che si annulla in $t = 0$. Vediamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big[1 - \cos(2\pi t)\Big] = \frac{d}{dt}\Big[2\pi\,\sin(2\pi t)\Big] = 4\pi^2\,\cos(2\pi t)$$

Vediamo che la derivata seconda non si annulla in $t = 0$. Pertanto $t = 0$ è uno zero doppio del numeratore.

Per capire l'ordine dello zero del denominatore, facciamone la derivata:

$$\frac{d}{dt}\Big[1 - e^{2\pi i t}\Big] = -2\pi i\, e^{2\pi i t}$$

Vediamo che non si annulla in $t = 0$ che, pertanto, è uno zero semplice anche del denominatore. Mettendo insieme numeratore e denominatore, vediamo che $t = 0$ è uno zero semplice di $f(1/t)$. Di conseguenza $z = \infty$ è uno zero semplice di $f(z)$.

(d) Visto che l'unica singolarità di $f(z)$ è $z = 0$ ed è interna alla circonferenza C, avremo

$$I = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=0}$$

Essendo $z = 0$ una singolarità essenziale, e non avendo $f(z)$ altre singolarità al finito, conviene usare il teorema dei residui e calcolare

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=0} = -2\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z)\big]_{z=\infty} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{t=0}$$

Avendo $f(1/t)$ uno zero semplice in $t = 0$, la funzione $\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$ avrà un polo semplice in $t = 0$ e pertanto

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{t=0} = 2\pi i \lim_{t\to 0} t\,\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= 2\pi i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{1-\cos(2\pi t)}{1-e^{2\pi i t}} = 2\pi i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}(2\pi t)^2 + \mathcal{O}(t^4)\right]}{1-[1+2\pi i t + \mathcal{O}(t^2)]} \\
&= 2\pi i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{\frac{1}{2}(2\pi t)^2\,[1+\mathcal{O}(t^2)]}{-2\pi i t[1+\mathcal{O}(t)]} = 2\pi i\,\frac{\frac{1}{2}(2\pi)^2}{-2\pi i} = -2\pi^2\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$z^3 u''(z) + z(z+\beta)u'(z) + z^\gamma(z^2-\alpha^2)u(z) = 0\,,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, e $\gamma \in \mathbb{Z}$.

(a) Quali condizioni devono essere soddisfatte dalle costanti α, β, γ affinché l'equazione abbia solo singolarità fuchsiane?

(b) Per la soluzione intorno a $z_0 = 0$, determinare l'equazione indiciale e le sue soluzioni ρ_1 e ρ_2 per il caso $\beta = 0\,\gamma = 1$.

(c) Scrivere la soluzione $u_1(z)$ dell'equazione differenziale con i parametri del punto (b), con $u_1(z)$ corrispondente a $\rho_1 \geq \rho_2$. Trovare la relazione che determina il coefficiente c_1 e la relazione di ricorrenza per i coefficienti c_i con $i \geq 2$. Valutare la relazione di ricorrenza per i primi 2 termini non nulli.

(d) Scrivere la forma della seconda soluzione $u_2(z)$ intorno a $z_0 = 0$ in dipendenza da α, senza calcolarne i coefficienti.

(e) Qual'è il raggio di convergenza della soluzione generale dell'equazione intorno a $z_0 = 0$?

Soluzione

(a) La forma standard dell'equazione differenziale è

$$u''(z) + \underbrace{\frac{z+\beta}{z^2}}_{P(z)}u'(z) + \underbrace{\frac{z^\gamma(z^2-\alpha^2)}{z^3}}_{Q(z)}u(z) = 0\,.$$

L'unica singolarità potenziale è a $z = 0$. L'ordine di questi poli dipende dai parametri. Abbiamo i seguenti casi:

- Dall'esistenza di $\lim_{z\to 0} z\,P(z)$ segue

$$\beta = 0\,.$$

- Dall'esistenza di $\lim_{z\to 0} z^2\,Q(z)$, essendo $alpha > 0$, segue

$$\gamma \geq 1\,.$$

Quindi l'equazione ha solo singolarità fuchsiane per

$$\beta = 0\,, \quad \gamma \geq 1\,, \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0\,.$$

(b) Per i valori dei parametri dati abbiamo

$$P(z) = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad Q(z) = \frac{z^2 - \alpha^2}{z^2}\,.$$

Per cui avremo

$$p_0 = \lim_{z\to 0} zP(z) = 1 \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{z\to 0} z^2 Q(z) = -\alpha^2\,,$$

da cui segue l'equazione indiciale

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = \rho^2 - \alpha^2 = 0\,.$$

Siccome $\alpha > 0$, le due soluzioni di quest'equazione sono

$$\rho_1 = +\alpha\,, \qquad \rho_2 = -\alpha\,.$$

(c) Essendo $\rho_1 = \alpha$, avremo

$$u_1(z) \;=\; z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\alpha+k}\,, \quad \text{con} \quad c_0 \neq 0\,.$$

Scriviamo quindi le derivate prima e seconda:

$$\begin{aligned} u_1'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k) c_k z^{\alpha+k-1}\,, \\ u_1''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k)(\alpha+k-1) c_k z^{\alpha+k-2}\,. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\big(z^{\alpha+k+2} - \alpha^2 z^{\alpha+k}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\alpha)c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\alpha+k+2} \\ &\overset{k'=k+2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\alpha)c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k'=2}^{\infty} c_{k'-2} z^{\alpha+k'} \\ &= 0 + (2\alpha+1)c_1 z^{\alpha+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\big[c_{k-2} + k(2\alpha+k)c_k\big] z^{\alpha+k}\,. \end{aligned}$$

Il coefficiente di ogni potenza di z deve annullarsi separatamente, per cui otteniamo

$$c_1 = 0\,, \qquad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2\alpha + k)}\,,$$

da cui in particolare segue che $c_{2n+1} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Abbiamo quindi per i primi due termini non nulli

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2(2+2\alpha)} c_0\,, \\ c_4 &= -\frac{1}{4(4+2\alpha)} c_2 = \frac{1}{8(2+2\alpha)(4+2\alpha)}\,. \end{aligned}$$

(d) Se 2α non è un numero intero (positivo), la seconda soluzione è data da

$$u_2(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n\,, \quad d_0 \neq 0, \qquad \text{per} \quad 2\alpha \notin \mathbb{N}\,.$$

Mentre se $2\alpha \in \mathbb{N}$ in generale avremo

$$u_2(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + d u_1(z) \ln z\,, \quad \text{per} \quad 2\alpha \in \mathbb{N}\,.$$

e) C'è solo uno punto singolare al finito, $z = 0$, quindi il raggio di convergenza intorno a $z_0 = 0$ è infinito.

Esercizio 3

Sia data la funzione di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos(x)\,, & |x| \le b \\ a + \cos(b)\,, & |x| > b \end{cases}, \qquad a \ge 0, \quad 0 \le b \le \pi\,.$$

con trasformata di Fourier $F(k) = \mathcal{F}_k\{f(x)\}$.

(a) Determinare le condizioni per a, b per cui la trasformata di Fourier esiste in senso ordinario ($f(x)$ sommabile).

(b) Per $a = 1, b = \pi$ determinare il comportamento asintotico di $F(k)$ per $k \to \pm\infty$, senza calcolarla, a partire delle proprietà di $f(x)$.

(c) Per $a = 1, b = \pi$ calcolare la trasformata $F(k)$.

Soluzione

(a) Visto che la funzione $f(x)$ è costante per $|x| > b$, per essere sommabile essa deve annullarsi in questa regione. Quindi deve valere $a + \cos b = 0$. Dato che il coseno prende valori nel intevalo $[-1, 1]$, il modulo di a non può essere maggiore di 1. Quindi

$$a \le 1\,, \quad b = \arccos(-a)\,,$$

dove abbiamo preso in considerazione che $a \ge 0$ e $0 \le b \le \pi$. Nella regione $|x| < b$, $f(x)$ è sempre regolare, quindi non ci sono ulteriori condizioni per la sommabilità.

(b) Per $a = 1, b = \pi$ abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos(x) & , |x| \le \pi \\ 0 & , |x| > \pi \end{cases}.$$

Dato che $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi)$, la funzione $f(x)$ è continua per $x = \pi$. In modo simile si verifica la continuità in $x = -\pi$. Quindi $f(x)$ è continua dappertutto e possiamo vedere se è derivabile e se $f'(x)$ è sommabile.

La derivata di $f(x)$ vale

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) & , |x| \le \pi \\ 0 & , |x| > \pi \end{cases}.$$

ed è sommabile. Dalla derivabilità di $f(x)$ e dalla sommabilità di $f'(x)$ deduciamo che la $F(k)$ va a zero per $k \to \pm\infty$ più velocemente di $1/k$. Poiché $f'(x)$ è continua dappertutto (anche in $x = \pm\pi$), possiamo vedere se $f'(x)$ è derivabile e se $f''(x)$ è sommabile.

La derivata seconda si può calcolare a tratti

$$f''(x) = \begin{cases} -\cos(x) & , |x| < \pi \\ 0 & , |x| > \pi \end{cases} .$$

ed è sommabile. Dalla derivabilità (a tratti) di $f'(x)$ e dalla sommabilità di $f''(x)$ deduciamo che la $F(k)$ va a zero per $k \to \pm\infty$ più velocemente di $1/k^2$.

Dato che la $f''(x)$ non è continua (ha salti in $x = \pm\pi$), sicuramente non è derivabile e non possiamo andare avanti a controllare ulteriori derivate. Quindi tutto quello che possiamo dire è che

$$F(k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{per} \quad k \to \pm\infty\,.$$

(d) Per $a = 1, b = \pi$ abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos(x) & , |x| \le \pi \\ 0 & , |x| > \pi \end{cases} .$$

Calcoliamo la trasformata

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx}\, (1 + \cos(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} + \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx}\, \cos(x) \right\} . \end{aligned}$$

Il primo integrale vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} = \left.\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}}{-ik} = \frac{2}{k}\,\frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{2i} = \frac{2\sin(k\pi)}{k}\,,$$

mentre per il secondo abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx}\, \cos(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx}\, \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{i(1-k)x} - e^{i(-1-k)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{ix(1-k)}}{i(1-k)} + \frac{e^{ix(-1-k)}}{i(-1-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{i\pi(1-k)}}{2i(1-k)} - \frac{e^{-i\pi(1-k)}}{2i(1-k)} + \frac{e^{i\pi(-1-k)}}{2i(-1-k)} - \frac{e^{-i\pi(-1-k)}}{2i(-1-k)} . \end{aligned}$$

Essendo $e^{\pm i\pi} = -1$, il secondo integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-ikx} \cos(x) &= -\frac{e^{-i\pi k}}{2i(1-k)} + \frac{e^{i\pi k}}{2i(1-k)} - \frac{e^{-i\pi k}}{2i(-1-k)} + \frac{e^{i\pi k}}{2i(-1-k)} \\
&= \frac{1}{1-k}\frac{e^{i\pi k} - e^{-i\pi k}}{2i} + \frac{1}{-1-k}\frac{e^{i\pi k} - e^{-i\pi k}}{2i} \\
&= \left[\frac{1}{1-k} + \frac{1}{-1-k}\right] \sin(k\pi) = \frac{2k\sin(k\pi)}{1-k^2}
\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, la trasformata è quindi

$$F(k) = \frac{2\sin(\pi k)}{\sqrt{2\,\pi}} \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{1-k^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\pi k)}{k(1-k^2)}\,.$$

La $F(k)$ è di ordine $1/k^3$ per $k \to \pm\infty$, quindi si verifica il risultato della parte (b), cioè $F(k) = o(1/k^2)$.