Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

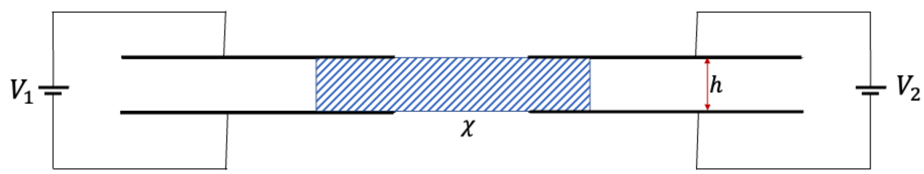
01/02/2023

Esercizio 1

Due condensatori piani eguali, aventi le armature quadrate di lato $\ell = 50$ cm e distanti $h = 5$ mm, sono connessi a due generatori ($V_1 = 500$ V e $V_2 = 1000$ V). Una lastra di materiale dielettrico ($\chi = 3$, $\rho = 1$ g/cm^3) di dimensioni $(50\times50\times0.5)$ cm^3 può scorrere senza attrito trai due condensatori, mantenendo sempre un estremo dentro il primo condensatore e l'altro dentro il secondo.

1) Calcolare in quale verso avviene il moto della lastra e il tempo che essa impiega per percorrere un tratto $x = 4$ cm, se al tempo $t = 0$ è ferma.

2) Determinare la densità di carica di polarizzazione presente sulla lastra, specificando dove è localizzata.



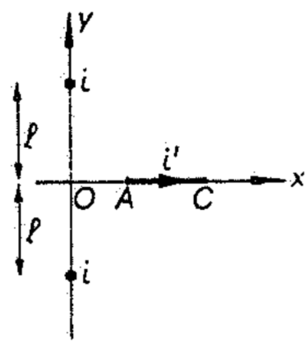
Esercizio 2

Due fili paralleli all'asse z, distanti $2\ell = 20$ cm l'uno dall'altro, sono percorsi entrambi dalla stessa corrente $i = 100$ A, di verso concorde con l'asse z. Un tratto di filo AC, lungo $a = 5$ cm, è posto sull'asse x con l'estremo A distante a dall'origine ed è percorso da una corrente $i' = 5$A diretta da A verso C. Calcolare:

1) la forza per unità di lunghezza tra i due fili paralleli (indicare se è attrattiva o repulsiva);

2) il valore del campo magnetico in un punto generico di coordinata x del tratto di filo AC, indicando la direzione e il verso;

3) la forza F, in modulo, direzione e verso, agente sul tratto di filo AC.



Esercizio 3

Un solenoide indefinito, di raggio $R = 4$ cm e con $n = 10$ spire al centimetro, è percorso da una corrente $i = 30$ A. All'istante $t = 0$ la corrente comincia a decrescere linearmente nel tempo per annullarsi dopo 5 s. Calcolare:

1) la variazione della densità di energia magnetica all'interno del solenoide tra $t = 0$ e $t = 5$ s;

2) il modulo, la direzione e il verso del campo elettrico indotto, in funzione della distanza r dall'asse del solenoide;

3) il modulo, la direzione e il verso della forza a cui è soggetta all'istante $t = 0$, una carica $q = 1$ nC, posta a una distanza $r = 4.5$ cm dall'asse del solenoide.

Prova Scritta di Fisica 2 e di Elettricità e Magnetismo

01/02/2023

Soluzioni

Esercizio 1

Consideriamo dapprima un unico condensatore con le stesse caratteristiche geometriche di quelli del problema, mantenuto alla d.d.p. costante V. La forza con cui un dielettrico, di spessore pari alla distanza tra le armature, parzialmente inserito tra di esse, viene risucchiato tra le armature è pari a

$$F = \frac{\epsilon_0 \ell \chi V^2}{2h}$$

Se indichiamo con x ($0 < x \leq \ell$) il tratto tra le armature tra cui c'è il dielettrico, si nota che la forza non dipende da x, come avviene invece quando il condensatore è carico, ma isolato, e quindi la differenza di potenziale tra le armature varia con x. Per la soluzione dell'esercizio, l'intensità della forza può essere assunta come una quantità nota. Per completezza si riporta qui la deduzione dell'espressione scritta sopra. La capacità del condensatore parzialmente occupato dal dielettrico è

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \ell \left(\ell + \chi x\right)}{h}$$

Se x aumenta di dx, l'aumento di energia elettrostatica è

$$dU_{\mathrm{es}}(x) = \frac{1}{2} V^2 dC = \frac{\epsilon_0 \ell \chi V^2}{2h} dx$$

Per ottenere questo incremento di energia elettrostatica, il generatore sposta una carica $dq = V dC$ da un'armatura all'altra, compiendo un lavoro, a spese della propria energia interna, pari a

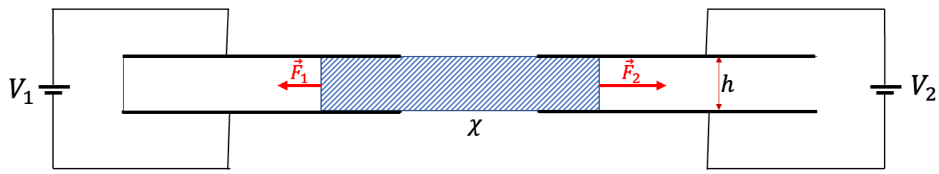
$$dW_{\mathrm{gen}} = V dq = V^2 dC = 2\, dU_{\mathrm{es}}(x)$$

Quindi metà di questo lavoro serve a mantenere costante la differenza di potenziale tra le armature e l'altra metà serve a far avanzare il dielettrico all'interno del condensatore. L'energia complessiva del sistema condensatore + generatore diminuisce della quantità

$$dU_{\mathrm{tot}} = dU_{\mathrm{gen}} + dU_{es} = -dW_{\mathrm{gen}} + dU_{es} = -\frac{1}{2} V^2 dC$$

La forza che determina il risucchio del dielettrico, spostando il proprio punto di applicazione di una quantità dx, compie il lavoro

$$F dx = \frac{1}{2} V^2 dC = dU_{\text{es}}(x) \implies F = \frac{dU_{\text{es}}(x)}{dx} = \frac{\epsilon_0 \ell \chi V^2}{2h}$$



Dopo questo lungo preambolo possiamo affrontare l'esercizio. Il dielettrico è soggetto a due forze opposte, come illustrato in figura. La forza risultante ha intensità:

$$F_2 - F_1 = \frac{\epsilon_0 \ell \chi}{2h} \left(V_2^2 - V_1^2 \right) = 9.96 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

La lastra si sposta verso destra con accelerazione

$$a = \frac{F_2 - F_1}{\rho \ell^2 h} = 7.97 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

Il tempo impiegato è dunque

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = 10.02 \text{ s}$$

Le cariche di polarizzazione sono solo superficiali, localizzate sulle facce del dielettrico per le porzioni che si trovano tra le armature dei condensatori. Le densità superficiali di carica di polarizzazione valgono:

$$\sigma_{p1} = \epsilon_0 \chi E_1 = \epsilon_0 \chi \frac{V_1}{h} = 2.655 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

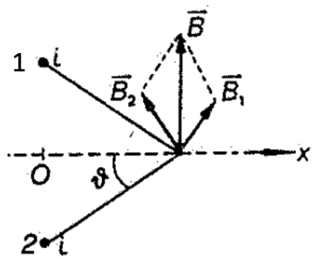
e

$$\sigma_{p2} = \epsilon_0 \chi E_2 = \epsilon_0 \chi \frac{V_2}{h} = 5.31 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

Esercizio 2

I due fili sono paralleli e percorsi da correnti aventi lo stesso verso. La forza è attrattiva, di intensità pari a

$$F = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi\ell} = 0.01 \text{ N/m}$$



Il campo magnetico creato da ciascuno dei due fili, in un punto dell'asse x di coordinata generica x ha intensità

$$B_1(x) = B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\sqrt{x^2 + \ell^2}}$$

La direzione e il verso dei campi prodotti da ciascuno dei due fili è illustrata in figura: la risultante è parallela e concorde all'asse y con modulo:

$$B(x) = 2\frac{\mu_0 i \cos\theta}{2\pi\sqrt{x^2 + \ell^2}} = \frac{\mu_0 i x}{\pi\left(x^2 + \ell^2\right)}$$

dove si è usata la relazione $\sqrt{x^2 + \ell^2}\cos\theta = x$. La forza sull'elemento di corrente $i'dx$ posto tra A e C a distanza x dall'origine è

$$d\vec{F} = i'dxB(x)\hat{u}_x \times \hat{u}_y = \frac{\mu_0 i i' x dx}{\pi\left(x^2 + \ell^2\right)}\hat{u}_z$$

Il modulo della forza si ottiene per integrazione:

$$F = \frac{\mu_0 i i'}{\pi}\int_a^{2a}\frac{xdx}{x^2 + \ell^2} = \frac{\mu_0 i i'}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{d\left(x^2 + \ell^2\right)}{x^2 + \ell^2} = \frac{\mu_0 i i'}{2\pi}\ln\frac{4a^2 + \ell^2}{a^2 + \ell^2} = 4.7{\cdot}10^{-5}\ \mathrm{N}$$

Esercizio 3

La corrente che percorre l'avvolgimento del solenoide è:

$$\begin{aligned}
i &= i_0 = 30\ \mathrm{A}\ \ \text{se } t \le 0 \\
i(t) &= i_0(1 - \alpha t)\ \text{se } 0 \le t \le 5\ \mathrm{s}\ \ \text{con } \alpha = 0.2\ \mathrm{s}^{-1} \\
i &= 0\ \text{se } t \ge 5\ \mathrm{s}
\end{aligned}$$

Pertanto il campo magnetico nel solenoide vale

$$B = B_0 = \mu_0 n i_0 = 3.77 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}\ \ \text{se } t \le 0$$

$$
\begin{aligned}
B(t) &= B_0(1-\alpha t) \text{ se } 0 \le t \le 5 \text{ s} \quad \text{con } \alpha = 0.2 \text{ s}^{-1} \\
B &= 0 \text{ se } t \ge 5 \text{ s}
\end{aligned}
$$

e varia nel tempo per 5 secondi a partire da $t = 0$: durante questo intervallo di tempo la densità di energia magnetica nel solenoide passerà dal valore che aveva per $t \le 0$ a 0 e, nello stesso tempo, si avrà un campo elettrico indotto diverso da zero. La variazione di energia magnetica è pari alla densità di energia magnetica a $t = 0$:

$$u_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = 565.5\ J/m^3$$

Per la simmetria del sistema le linee di forza del campo elettrico indotto sono delle circonferenze, appartenenti a piani normali all'asse del solenoide, con centro sull'asse stesso. Il verso del campo elettrico lungo tali linee è concorde con il verso della corrente nelle spire del solenoide, per la legge di Lenz. Consideriamo una di queste circonferenze, γ, con raggio $r < R$. Abbiamo che:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi B_0 \alpha r^2$$

Quindi:

$$E(r) = \frac{B_0 \alpha r}{2} \text{ se } r \le R$$

Si noti che il campo elettrico è costante e cresce linearmente con r fino al valore massimo

$$E_{\max} = \frac{B_0 \alpha R}{2}$$

All'esterno del solenoide il campo elettrico indotto è calcolabile valutando la circuitazione di $\vec{E}$ su una circonferenza di raggio $r > R$:

$$E(r)2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} = \pi R^2 B_0 \alpha \implies E(r) = \frac{B_0 \alpha R^2}{2r}$$

Il campo elettrico tende a zero come $1/r$ al crescere di r . Una carica $q > 0$, posta a distanza $r = 4.5$ cm dall'asse del solenoide è soggetta a una forza parallela al campo elettrico e quindi tangenziale alla circonferenza di raggio r centrata sull'asse del solenoide, posta su un piano ortogonale al suo asse e con verso concorde a quello della corrente, pari a:

$$F = qE(r) = \frac{qB_0 \alpha R^2}{2r} = 1.34 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$