Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 21 giugno 2023

Esercizio 1

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{a\,z^n}}{(1+z)^n}, \qquad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

(a) Determinare tutti i valori di a, n per cui $\mathrm{Res}[f(z)]_{z=0} \neq 0$.

(b) Determinare tutti i valori di a, n per cui $f(z)$ ammette lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z = \infty$.

(c) Calcolare il residuo all'infinito di $f(z)$ per $n = -1$.

Soluzione

(a) La condizione $\mathrm{Res}[f(z)]_{z=0} \neq 0$ può essere soddisfatta solo se f ha delle singolarità per $z = 0$.

Per $n \geq 0$ la funzione è regolare in $z = 0$ e quindi ha residuo sempre nullo in $z = 0$.

Per $n < 0$ la funzione ha una singolarità essenziale in $z = 0$ e quindi potrebbe avere residuo non nullo. Quindi, per $n < 0$, dobbiamo controllare se il coefficiente della potenza z^{-1} della serie di Laurent per f è diverso da zero. Definendo $m \equiv -n$ abbiamo

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{l!} \frac{1}{z^{lm}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k\,,$$

dove la seconda somma corrisponde al termine $1/(1+z)^n = (1+z)^m$. Possiamo quindi scrivere

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{a^l}{l!} \binom{m}{k} z^{k-lm}\,.$$

Il residuo di $f(z)$ in $z = 0$ è pertanto il coefficiente della serie di Laurent quando

$$k - l\,m = -1\,,$$

cioè quando

$$k = l\,m - 1\,.$$

Questa equazione ha sicuramente almeno una soluzione, per esempio $l = 1$, $k = m - 1$. Pertanto il residuo sarà dato da una somma di termini, tutti del tipo $\frac{a^l}{l!}\binom{m}{k}$, dove almeno il termine con $l = 1$, $k = m - 1$ sappiamo esistere (e vale $a\binom{m}{m-1} = m\,a > 0$). Ora, essendo a un numero reale positivo così come $\binom{m}{k}$, la somma dei termini del tipo $\frac{a^l}{l!}\binom{m}{k}$ che contribuiscono al residuo sono tutti positivi e quindi non ci possono essere cancellazioni e il residuo è sempre non nullo (e positivo)[1]. Pertanto

$$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=0} \neq 0\,, \quad \text{per} \quad n < 0, \quad a \in \mathbb{R}^+\,.$$

(b) Per sviluppare in serie di Taylor intorno all'infinito consideriamo il comportamento per $t \to 0$ della funzione

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{e^{a/t^n}}{(1 + 1/t)^n} = t^n\,\frac{e^{a/t^n}}{(t+1)^n}\,.$$

La funzione $f(1/t)$ ha una singolartià essenziale in $t = 0$ se $n > 0$ e, in tale caso, lo sviluppo in serie di potenze è una serie di Laurent. Per $n < 0$ non c'è più la singolarità essenziale dovuta all'esponenziale, ma $f(1/t)$ ha un polo di ordine n a causa del fattore t^n. Invece, se $n = 0$, $f(1/t) = e^a$ è regolare in $t = 0$ e pertanto $f(z)$ ammette lo sviluppo di Taylor in $z = \infty$. Si noti che questo vale indipendentemente dal valore di a. Visto che la funzione f non presenta altri punti singolari, la serie converge in tutto $\mathbb{C}$.

(c) Nel caso $n = -1$, la funzione diventa

$$f(z) = e^{a/z}(1 + z)\,.$$

Il residuo all'infinito è dato da

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z)]_{z=\infty} &= \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{t^2}\,f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{t=0} = \mathrm{Res}\left[-\frac{1}{t^2}\,t^{-1}\,e^{a\,t}(t+1)\right]_{t=0} \\
&= \mathrm{Res}\left[-\frac{e^{a\,t}}{t^3}(1+t)\right]_{t=0} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\,t^3\left(-\frac{e^{a\,t}}{t^3}(1+t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\left(-e^{a\,t}(1+t)\right) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\left(-a\,e^{a\,t}(1+t) - e^{a\,t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(-a^2\,e^{a\,t}(1+t) - 2\,a\,e^{a\,t}\right) = \frac{-a^2 - 2\,a}{2} \\
&= -a\left(1 + \frac{a}{2}\right)\,,
\end{aligned}$$

[1] In particolare, solo per $m = 1 (n = -1)$, ci sono due termini nella somma doppia che contribuiscono al residuo, in tutti gli altri casi $m > 1 (n < 1)$, il residuo è dovuto ad un solo termine.

dove abbiamo usato il fatto che $-1/t^2 f(1/t)$ ha un polo ordine 3 in $t = 0$.

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$z^2 u''(z) + (z + \beta)u'(z) + z^\gamma (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0\,,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\gamma \in \mathbb{Z}$.

(a) Quali condizioni devono essere soddisfatte dalle costanti α, β, γ affinché l'equazione abbia solo singolarità fuchsiane?

(b) Per la soluzione intorno a $z_0 = 0$, determinare l'equazione indiciale e le sue soluzioni ρ_1 e ρ_2 per il caso $\beta = \gamma = 0$.

(c) Scrivere la soluzione $u_1(z)$ dell'equazione differenziale con i parametri del punto (b), con $u_1(z)$ corrispondente a ρ_1, dove $\operatorname{Re}\rho_1 \geq \operatorname{Re}\rho_2$. Trovare la relazione che determina il coefficiente c_1 e la relazione di ricorrenza per i coefficienti c_i con $i \geq 2$. Valutare la relazione di ricorrenza per i primi 2 termini non nulli.

(d) Scrivere la forma della seconda soluzione $u_2(z)$ intorno a $z_0 = 0$ in funzione di α, senza calcolarne i coefficienti.

(e) Qual è il raggio di convergenza della soluzione generale dell'equazione intorno a $z_0 = 0$?

Soluzione

(a) Scriviamo l'equazione differenziale in forma standard:

$$u''(z) + \underbrace{\frac{z+\beta}{z^2}}_{P(z)} u'(z) + \underbrace{\frac{z^\gamma (z^2 - \alpha^2)}{z^2}}_{Q(z)} u(z) = 0\,.$$

L'unica potenziale singolarità è il polo $z = 0$. L'ordine del polo dipende dai parametri. Abbiamo i seguenti casi:

- Dall'esistenza di $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)P(z)$ per $z_0 = 0$ segue
$$\beta = 0\,.$$
- Dall'esistenza di $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 Q(z)$ per $z_0 = 0$ segue
$$\gamma \geq 0\,.$$

Quindi l'equazione ha solo singolarità fuchsiane per

$$\beta = 0\,, \quad \gamma \geq 0 \quad \text{e tutti i valori } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0\,.$$

(b) Per i valori dei parametri dati abbiamo

$$P(z) = \frac{1}{z} \qquad Q(z) = \frac{z^2 - \alpha^2}{z^2}\,,$$

da cui

$$p_0 = \lim_{z\to 0} zP(z) = 1 \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{z\to 0} z^2 Q(z) = -\alpha^2\,,$$

da cui segue l'equazione indiciale

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = \rho^2 - \alpha^2 = 0\,.$$

Siccome $\alpha > 0$, le due soluzioni ρ_1 e ρ_2 di quest'equazione con $\mathrm{Re}\,\rho_1 \geq \mathrm{Re}\,\rho_2$ sono

$$\rho_1 = +\alpha\,, \qquad \rho_2 = -\alpha\,.$$

(c) Abbiamo $\rho_1 = \alpha$, quindi

$$\begin{aligned}
u_1(z) &= z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\alpha+k}\,,\\
u_1'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k) c_k z^{\alpha+k-1}\,,\\
u_1''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k)(\alpha+k-1) c_k z^{\alpha+k-2}\,.
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k)(\alpha+k-1) c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha+k) c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z^{\alpha+k+2} - \alpha^2 z^{\alpha+k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\alpha) c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\alpha+k+2}\\
&\overset{k'=k+2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\alpha) c_k z^{\alpha+k} + \sum_{k'=2}^{\infty} c_{k'-2} z^{\alpha+k'}\\
&= 0 + (2\alpha+1) c_1 z^{\alpha+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (c_{k-2} + k(2\alpha+k) c_k) z^{\alpha+k}\,.
\end{aligned}$$

Il coefficiente di ogni potenza di z deve sparire separatamente, per cui otteniamo

$$c_1 = 0\,, \qquad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2\alpha+k)}\,,$$

da cui segue in particolare che

$$c_{2n+1} = 0\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Abbiamo per i primi due termini

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2(2+2\alpha)} c_0 \\ c_4 &= -\frac{1}{4(4+2\alpha)} c_2 = \frac{1}{8(2+2\alpha)(4+2\alpha)} c_0\,. \end{aligned}$$

(d) Per $2\alpha \notin \mathbb{N}$, la seconda soluzione è data da

$$u_2(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n\,,$$

mentre per $2\alpha \in \mathbb{N}$ in generale avremo

$$u_2(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + d u_1(z) \ln z\,.$$

(e) C'è solo uno punto singolare al finito, quindi il raggio di convergenza della serie intorno a $z_0 = 0$ è infinito.

Esercizio 3

Sia data la seguente funzione

$$f(x) \;=\; \frac{(a+1)\,x^2+b}{(a^2-1)\,x^3+x^2+s\,x+1}\,,$$

dove s può essere ± 1, mentre $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori di a, b, s per i quali $f(x)$ è trasformabile secondo Fourier in senso ordinario.

(b) Determinare, senza calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f] \equiv F(k)$, il comportamento asintotico di quest'ultima per $k \to \pm\infty$ e le sue proprietà di derivabilità per i valori dei parametri a, b, s che rendono $f(x)$ trasformabile in senso ordinario.

(c) Calcolare la trasformata di Fourier $F(k)$, verificando le proprietà trovate al punto precedente.

(d) Utilizzando i valori di a, b trovati al punto (a), determinare due valori reali di s che rendano $f(x)$ non trasformabile in senso ordinario, né nel senso delle distribuzioni.

Soluzione

(a) Affinché $f(x)$ sia trasformabile in senso ordinario essa deve essere sommabile su $\mathbb{R}$. Se $a \neq -1$, $f(x)$ va come $\sim x^{-1}$ per $x \to \infty$ (o addirittura come $\sim x^0$ se $a = 1$), pertanto non è sommabile. Di conseguenza deve valere $a = -1$. La funzione trasformanda diviene

$$f(x) \;=\; \frac{b}{x^2+s\,x+1} \;=\; \frac{b}{(x-x_+)(x-x_-)}\,,$$

con

$$x_\pm = \frac{-s \pm \sqrt{s^2-4}}{2} = \frac{-s \pm i\sqrt{3}}{2}\,,$$

che risulta trasformabile $\forall\, b \in \mathbb{R}$ e per entrambi i valori $s = \pm 1$.

(b) La funzione trasformanda è infinitamente derivabile con derivata sommabile, pertanto la trasformata tende a 0 per $k \to \infty$ più rapidamente di ogni potenza di k^{-1}. La funzione $f(x)$ è sommabile, pertanto la sua trasformata esiste ed è continua. La funzione $x\,f(x)$ non è sommabile, pertanto non è garantita la derivabilità della trasformata.

(c) Procediamo al calcolo della trasformata $F(k)$ secondo la definizione.

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \frac{b}{(x-x_+)(x-x_-)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dz\, e^{-ikz} \frac{b}{(z-x_+)(z-x_-)}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Se $k > 0$, il lemma di Jordan prescrive di chiudere il cammino d'integrazione su una semicirconferenza di raggio infinito nel semipiano immaginario negativo (γ_-). Il cammino d'integrazione racchiude solamente il polo semplice in $z = x_-$, pertanto

$$\begin{aligned} F(k>0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\mathbb{R}\cup\gamma_-} dz\, e^{-ikz} \frac{b}{(z-x_+)(z-x_-)} \\ &= -2\pi i \,\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikz} \frac{b}{(z-x_+)(z-x_-)}\Big]_{z=x_-} \\ &= -2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_-} \frac{b}{x_- - x_+} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_-} \frac{b}{i\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} b\, e^{-k(\sqrt{3}-is)/2}\,, \end{aligned}$$

dove il segno negativo nella seconda riga è dovuto al senso orario di percorrenza del cammino di integrazione.
Analogamente, se $k < 0$, si deve chiudere il cammino d'integrazione con una semicirconferenza di raggio infinito nel semipiano immaginario positivo (γ_+). Il cammino d'integrazione ora racchiude solamente il polo semplice in $z = x_+$, da cui

$$\begin{aligned} F(k<0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\mathbb{R}\cup\gamma_+} dz\, e^{-ikz} \frac{b}{(z-x_+)(z-x_-)} \\ &= 2\pi i \,\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikz} \frac{b}{(z-x_+)(z-x_-)}\Big]_{z=x_+} \\ &= 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_+} \frac{b}{x_+ - x_-} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_+} \frac{b}{i\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} b\, e^{-k(-\sqrt{3}-is)/2}\,. \end{aligned}$$

Per $k = 0$ si può chiudere il cammino indifferentemente su $\gamma_\pm$, ottenendo $F(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}b$.
Scriviamo i tre risultati ottenuti in forma compatta, valida $\forall\, k \in \mathbb{R}$:

$$F(k) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} b\, e^{-|k|\sqrt{3}/2}\, e^{iks/2}\,.$$

La trasformata è effettivamente continua ma non derivabile (si noti la presenza di un punto angoloso in $k = 0$), data la non sommabilità di $x\, f(x)$. La trasformata inoltre tende a 0 più rapidamente di ogni potenza di k^{-1} per $k \to \infty$, data la infinita derivabilità di $f(x)$.

(d) Lasciando ora variare s, abbiamo che la funzione trasformanda diviene

$$f(x) \;=\; \frac{b}{x^2 + s\,x + 1} \;=\; \frac{b}{(x - x_+)(x - x_-)}\,,$$

con

$$x_\pm = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4}}{2}\,,$$

che risulta non trasformabile (né in senso ordinario né nel senso delle distribuzioni) se le singolarità $x_\pm$ giacciono sull'asse reale. Questo succede per $s \leq -2$ o $s \geq 2$.

Due valori possibili sono pertanto $s = \pm 2$, per cui la funzione trasformanda diviene $f(x) = b/(x + s/2)^2$. In questo caso, data la presenza di un polo doppio in $-s/2$, la funzione non è localmente sommabile su $\mathbb{R}$, pertanto non è trasformabile né in senso ordinario né nel senso delle distribuzioni.