Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 25 gennaio 2023

Esercizio 1

Sia dato l'integrale

$$I(a,n) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; \delta(2\phi - 2\theta)\; \frac{3\,\cos(\theta)\, e^{i\theta}}{e^{2in\phi} - a}\,, \tag{1}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $n \neq 0$.

(a) Ricondursi ad un integrale trigonometrico risolvendo la delta di Dirac.

(b) Determinare per quali valori dei parametri a e n l'integrale esista.

(c) Calcolare $I(1/2, 1)$, $I(1/3, 2)$.

(d) Calcolare $I(-2, 2)$.

Soluzione

(a) Riscriviamo $I(a,n)$ risolvendo la delta di Dirac in ϕ:

$$\delta(2\phi - 2\theta) = \frac{1}{2}\delta(\phi - \theta)\,. \tag{2}$$

Si ha

$$I(a,n) \;=\; \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \frac{\cos(\theta)\, e^{i\theta}}{e^{i2n\theta} - a}\,. \tag{3}$$

(b) L'integrale esiste per ogni valore di a e n per cui il denominatore non si annulli. Operando il cambio di variabile $z = e^{i\theta}$, con $dz = iz\, d\theta$, si ottiene

$$I(a,n) \;=\; \frac{3}{4}\oint_C \frac{dz}{iz}\,\frac{1+z^2}{z^{2n} - a}\,, \tag{4}$$

dove C è una circonferenza di raggio unitario percorsa in senso antiorario. Di conseguenza, l'integrale è definito per tutti i valori di a ed n per i quali non vi sia una singolarità su C. In particolare, il denominatore $z^{2n} - a$ ha $2n$ zeri

semplici in $z_k = |a|^{1/(2n)} e^{ik\pi/n}$, se $a > 0$ e in $z_k = |a|^{1/(2n)} e^{i(k+1/2)\pi/n}$, se $a < 0$, con $k = 1, ..., 2n$. Se $|a| \neq 1$ le radici z_k non giacciono su C e l'integrale è definito $\forall n$. Se $a = 1$ vi sono singolarità su C $\forall n$, e l'integrale non è definito. Se $a = -1$ l'integrando è regolare su tutto C solo se $n = 1$ (perché in quel caso numeratore e denominatore sono identici e si elidono).
Riassumendo, l'integrale $I(a, n)$ esiste se $|a| \neq 1$, $\forall n$ e se $a = -1$, $n = 1$.

(c) Nel caso in cui sia $|a| < 1$ contribuiscono al valore dell'integrale il polo semplice dell'integrando in $z = 0$ e i $2n$ poli semplici in $z = z_k$, quindi conviene ottenere il risultato calcolando il residuo all'infinito (ricorrendo al cambio di variabile $z = 1/t$):

$$
\begin{aligned}
|a| < 1: \quad I(a, n) &= -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{iz}\frac{1+z^2}{z^{2n}-a}\right]_{z=\infty} && (5)\\
&= -2\pi i \operatorname{Res}\left[-t^{2n-3}\frac{3}{4i}\frac{1+t^2}{1-a\,t^{2n}}\right]_{t=0} && (6)\\
&= \frac{3}{2}\pi\,\delta_{n1}\,. && (7)
\end{aligned}
$$

Pertanto $I(1/2, 1) = \frac{3}{2}\pi$, mentre $I(1/3, 2) = 0$.

(d) Se $|a| > 1$, l'unico polo nella regione interna a C è in $z = 0$, pertanto l'integrale vale

$$
\begin{aligned}
|a| > 1: \quad I(a, n) &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{iz}\frac{1+z^2}{z^{2n}-a}\right]_{z=0} && (8)\\
&= \frac{3}{2}\pi \lim_{z\to 0}\frac{1+z^2}{z^{2n}-a} && (9)\\
&= -\frac{3\pi}{2a}\,, && (10)
\end{aligned}
$$

da cui $I(-2, 2) = \frac{3}{4}\pi$.
Notiamo che, compatibilmente con lo studio dei parametri effettuato al punto (b), i due risultati coincidono per $a = -1$, $n = 1$.

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$4z^3(z+a)^2u''(z) + 4(z-2)(z+b)^c u'(z) + (z-d)z^3 u(z) = 0\,,$$

con $c \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $a, b, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(a) Quali condizioni devono essere soddisfatte dalle costanti a, b, c, d affinché l'equazione abbia solo singolarità fuchsiane?

(b) Per la soluzione intorno a $z_0 = 0$, determinare l'equazione indiciale e le sue soluzioni ρ_1, ρ_2 per tutti i valori permessi per a, b, c, d.

(c) Scrivere la soluzione $u_1(z)$ dell'equazione differenziale con i parametri

$$a = -2\,, \quad b = 0\,, \quad c = 2\,, \quad d = 2\,,$$

con $u_1(z)$ corrispondente alla soluzione dell'equazione indiciale $\rho_1 \geq \rho_2$. Trovare la relazione che determina il coefficiente c_1 e la relazione di ricorrenza per i coefficienti c_i con $i \geq 2$.

(d) Scrivere la forma della seconda soluzione $u_2(z)$ intorno a $z_0 = 0$ senza calcolarne i coefficienti.

Soluzione

(a) La forma standard dell'equazione differenziale è

$$u''(z) + \underbrace{\frac{(z-2)(z+b)^c}{z^3(z+a)^2}}_{P(z)} u'(z) + \underbrace{\frac{z-d}{4(z+a)^2}}_{Q(z)} u(z) = 0\,.$$

Siccome $c \geq 0$, le uniche singolarità potenziali sono a $z = 0, z = -a$. L'ordine di questi poli dipende dai parametri. Dall'esistenza di $\lim_{z\to z_0} P(z)(z-z_0)$ per $z_0 = 0, -a\ (\neq 0)$ segue

$$a = -2; \quad b = 0; \quad c \geq 2\,.$$

La relazione analoga per $Q(z)$ non risulta in un'altra condizione, siccome $Q(z)$ ha comunque al massimo un polo doppio. Quindi il parametro d non viene vincolato.

(b) Abbiamo

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z\to 0} zP(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^{c-2}}{z-2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{per} \quad c=2\,, \\ 0 & \text{per} \quad c\geq 3\,, \end{cases} \\ q_0 &= \lim_{z\to 0} z^2 Q(z) = 0\,, \end{aligned}$$

da cui segue l'equazione indiciale

$$\rho^2 + (p_0-1)\rho + q_0 = \begin{cases} \rho^2 - \frac{3}{2}\rho = 0\,, & \text{per} \quad c=2\,, \\ \rho^2-\rho = 0\,, & \text{per} \quad c\geq 3\,. \end{cases}$$

Le due soluzioni di queste equazioni sono

$$\rho_1 = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{per} \quad c=2\,, \\ 1 & \text{per} \quad c\geq 3\,, \end{cases} \qquad \rho_2 = 0 \quad \forall c\,.$$

(c) Per $a=-2\,,\ b=0\,,\ c=2\,,\ d=2$ abbiamo $\rho_1=\frac{3}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+3/2}\,, \quad c_0\neq 0\,, \\ u_1'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{3}{2}\right) c_n z^{n+1/2}\,, \\ u_1''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) c_n z^{n-1/2}\,. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned} & \cancel{z^2(z-2)}\Big[4z(z-2)u''(z) + 4\,u'(z) + z\,u(z)\Big] = 0\,, \\ \Leftrightarrow\quad & 4z(z-2)\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) c_n z^{n-1/2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{3}{2}\right) c_n z^{n+1/2} \\ & + z\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+3/2} = 0\,, \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\,(2n+1)\,c_n z^{n+3/2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\,(2n+1)\,c_n z^{n+1/2} + \\ & \sum_{n=0}^{\infty}(4n+6)\,c_n z^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+5/2} = 0\,. \end{aligned}$$

Per avere le serie con la stessa potenza di z, nella prima serie facciamo la sostituzione $n' = n+1$, mentre nell'ultima serie $n' = n+2$. Rinominando poi $n' \to n$ otteniamo:

$$\cancel{z^{1/2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(2n-1)c_{n-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-8n^2 - 12n) c_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n \right\} = 0 \,.$$

Ora, isolando le potenze z^0 e z^1 dalle prime due serie, otteniamo

$$0 + (3c_0 - 20c_1)z + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[c_{n-2} + (2n+1)(2n-1)c_{n-1} - 4n(2n+3)c_n \Big] z^n = 0 \,.$$

Poiché il coefficiente di ogni potenza di z deve essere nullo separatamente, per il termine con potenza z^1 otteniamo

$$3c_0 - 20c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{3}{20} c_0 \,,$$

mentre per i termini con potenza z^n ($n \geq 2$) abbiamo la relazione di ricorrenza

$$c_n = \frac{c_{n-2} + (2n+1)(2n-1)c_{n-1}}{4n(2n+3)} \qquad \forall n \geq 2 \,.$$

(d) Essendo $\rho_1 - \rho_2 = 3/2 \notin \mathbb{N}$, la soluzione $u_2(z)$ sarà del tipo

$$u_2(z) = z^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \,, \quad \text{con} \quad d_0 \neq 0 \,.$$

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, \frac{\sin^m(x)\, \cos^n(x)}{x^p}\,, \qquad m,n,p \in \mathbb{Z}^+ = \{1,2,\dots\}$$

(a) Determinare i valori di m, n, p per cui la trasfomata di Fourier di $f(x)$ esiste ed è derivabile.

(b) Per $m = p = 1$, $n = 2$, calcolare la trasformata di Fourier di $f(x)$ per

(1) $|k| > 3$.

(2) $1 < |k| < 3$.

(3) $|k| < 1$.

(4) $k = \pm 1, \pm 3$.

Soluzione

(a) La trasformata di Fourier di $f(x)$ esiste ed è una funzione derivabile se entrambe $f(x)$ e $xf(x)$ sono sommabili. Per dimostrate la sommbilità di una funzione dobbiamo controlare che (i) al finito abbia al massimo singolarità integrabili e che (ii) nel limite $x \to \pm\infty$ vada a zero più velocemente di $1/x$.

(i) Al finito, l'unico punto che potrebbe essere singolare è $x = 0$, per entrambe $f(x)$ e $xf(x)$. Il comportamento delle funzioni per $x \to 0$ è

$$f(x) \sim x^{m-p}\,, \qquad\qquad xf(x) \sim x^{m-p+1}\,.$$

Il punto $x = 0$ è una singolarità *non* integrabile di $f(x)$ se $m < p$, quindi deve essere $m \geq p$. Con questa condizione, $x = 0$ è uno zero di $xf(x)$ e quindi non ci sono ulteriori condizioni.

(ii) Per essere una funzione sommabile, $f(x)$ deve soddisfare

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin^m(x)\cos^n(x)}{x^{p-1}} \stackrel{?}{=} 0.$$

Il limite si annulla per $p \geq 2$. Invece per la sommabiltà di $xf(x)$ serve che sia

$$\lim_{x^2\to\pm\infty} xf(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin^m(x)\cos^n(x)}{x^{p-2}} \stackrel{?}{=} 0.$$

Questo limite si annulla per $p \geq 3$.

Quindi, richiedendo che entrambe $f(x)$ e $xf(x)$ siano sommabile si arriva alla condizione $p \geq 3$.

In entrambi i casi (i) e (ii), le condizioni sono soddisfatte indipendentemente dal valore di n. Mettendo tutto insieme abbiamo che

$$m, n, p \in \mathbb{N}, \quad m \geq p,\, p \geq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{F}_k\{f(x)\} \text{ esiste ed è derivabile.}$$

(b) Calcolo della trasformata di Fourier per $m = p = 1$, $n = 2$.

Possiamo prima portare l'integrale della trasformata di Fourier nel piano complesso, scrivendo le funzione trigonometriche di f in termini di funzioni esponenziali

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\,x\,k}\,\frac{\sin(x)\,\cos^2(x)}{x} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\,x\,k}\,\frac{1}{x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{e^{-i\,x\,k}}{x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\;\frac{e^{-i\,x\,k}}{x}\left(e^{i3x}-e^{ix}+e^{-ix}-e^{-i3x}+2e^{ix}-2e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-i\,x\,k}\left(\frac{e^{i3x}}{x}+\frac{e^{ix}}{x}-\frac{e^{-ix}}{x}-\frac{e^{-i3x}}{x}\right) \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{e^{ix(3-k)}}{x}+\frac{e^{ix(1-k)}}{x}-\frac{e^{ix(-1-k)}}{x}-\frac{e^{ix(-3-k)}}{x}\right) \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_{\sigma} dz\left(\frac{e^{iz(3-k)}}{z}+\frac{e^{iz(1-k)}}{z}-\frac{e^{iz(-1-k)}}{z}-\frac{e^{iz(-3-k)}}{z}\right),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo portato l'integrale nel piano complesso, e σ è il cammino di integrazione sulla retta reale, da $-\infty$ a ∞. Per risolvere l'integrale spezzandolo nei vari termini, dobbiamo prima deformare il cammino σ, per evitare così di passare per il punto $z = 0$ (che è punto regolare dell'integrando di partenza, ma costituisce una singolarità dei vari termini presi separatamente). Chiamando con $\bar{\sigma}$ un cammino omotopicamente equivalente a σ che non passa per il punto $z = 0$, possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\,\left(\frac{e^{iz(3-k)}}{z}+\frac{e^{iz(1-k)}}{z}-\frac{e^{iz(-1-k)}}{z}-\frac{e^{iz(-3-k)}}{z}\right)\\
&= \overbrace{\frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\,\frac{e^{iz(3-k)}}{z}}^{I_1}+\overbrace{\frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\,\frac{e^{iz(1-k)}}{z}}^{I_2}\\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\,\frac{e^{iz(-1-k)}}{z}}_{I_3}\underbrace{-\frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\,\frac{e^{iz(-3-k)}}{z}}_{I_4}\,.
\end{aligned}
$$

L'ultimo passaggio non può essere svolto prima del cambio di cammino $\sigma \to \bar\sigma$. Facciamo notare che $\bar\sigma$ può essere scelto in modo che passi sia sopra che sotto il punto $z = 0$, basta che non passi per $z = 0$ e che gli integrali I_1,I_2,I_3 e I_4 abbiano tutti lo stesso cammino di integrazione $\bar\sigma$. Tutti gli integrali sopra hanno la forma

$$
I_i = \frac{1}{4i\pi}\int_{\bar\sigma} dz\; e^{i\,z\,\alpha_i(k)}\,g(z) \qquad \text{con} \quad \lim_{z\to\infty} g(z) = 0
$$

e quindi si possono risolvere utilizzando il lemma di Jordan, basta controllare per ogni caso se il cammino di integrazione si deve chiudere sopra ($\alpha_i(k) > 0$) oppure sotto ($\alpha_i(k) < 0$). Noi abbiamo

$$
\alpha_1(k) = 3-k, \quad \alpha_2(k) = 1-k, \quad \alpha_3(k) = -1-k, \quad \alpha_4(k) = -3-k. \tag{11}
$$

(1) $|k| > 3$

Per $k > 3$, $\alpha_i < 0$ in tutti i casi, quindi il cammino si deve chiudere sotto per tutti gli integrali I_i. Scegliendo $\bar\sigma$ in modo che passi sotto il punto $z = 0$, abbiamo $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0$, perchè non ci sono delle singolarità nella regione interna al cammino chiuso. Quindi $F(k) = 0$ per $k > 3$.

Per calcolare il caso $k < -3$, notiamo che la partità di f implica che $F(k)$ deve essere una funzione pari, quindi $F(k)$ per $k < -3$ è uguale a $F(k)$ per $k > 3$. Pertanto abbiamo

$$
F(k) = 0\,, \qquad |k| > 3.
$$

(2) $1 < |k| < 3$

Dalla simmetria di f, ci serve solo determinare la trasformata di Fourier per $1 < k < 3$ e il risultato vale anche per $-3 < k < -1$. Per $1 < k < 3$, α_1 è positiva (chiusura sopra), mentre che α_2, α_3, α_4 sono negative (chiusura sotto). Quindi, scegliendo $\bar{\sigma}$ che passa sotto la singolarità $z = 0$, si trova che $I_2 = I_3 = I_4 = 0$, mentre

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i} \cdot 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{iz(3-k)}}{z} \right\}_{z=0} = \frac{1}{2}$$

Pertanto

$$F(k) = \frac{1}{2}, \qquad 1 < |k| < 3.$$

(3) $|k| < 1$

Possiamo controllare direttamente la regione $-1 < k < 1$. Come prima, partiamo dalle Eq. (11). Per $-1 < k < 1$, α_1 e α_2 sono entrambe positive (chiusura sopra), mentre che α_3 e α_4 sono negative (chiusura sotto). Scegliendo $\bar{\sigma}$ passando sotto la singolarità $z = 0$, si trova che $I_3 = I_4 = 0$, mentre che I_1 e I_2 hanno un valore diverso da zero. Nella parte (c) avevamo già trovato $I_1 = 1/2$. Basta solo calcolare il contributo di I_2 alla trasformata di Fourier:

$$I_2 = \frac{1}{4\pi i} \cdot 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{iz(1-k)}}{z} \right\}_{z=0} = \frac{1}{2},$$

Pertanto

$$F(k) = I_1 + I_2 = 1, \qquad |k| < 1.$$

(4) $k = \pm 1, \pm 3$

METODO I: Dirichlet

Il teorema di Dirichlet per la serie di Fourier vale anche in questo caso:

$$F(k_0) = \frac{1}{2} \left(F(k_0^+) + F(k_0^-) \right),$$

con $F(k_0^+)$ e $F(k_0^-)$ i limiti di $F(k)$ per $k \to k_0$ da destra e da sinistra, rispettivamente. Dai nostri risultati per (1),(2) e (3) abbiamo

$$F(k) = \begin{cases} 1, & |k| < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < |k| < 3 \\ 0, & |k| > 3 \end{cases},$$

da cui è facile ottenere il risultato richiesto facendo la media aritmetica tra i limiti da destra e sinistra. Per $k_0 = \pm 3$ viene $F(k) = 1/4$, mentre che per $k_0 = \pm 1$ si ha $F(k) = 3/4$. Quindi

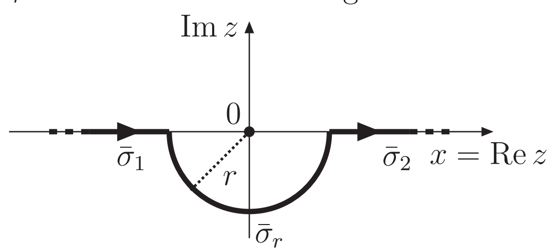
$$F(k) = \begin{cases} 1, & |k| < 1 \\ \frac{3}{4}, & |k| = 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < |k| < 3 \\ \frac{1}{4}, & |k| = 3 \\ 0, & |k| > 3 \end{cases} . \tag{12}$$

METODO II: Risolvendo gli integrali I_1, I_2, I_3, I_4.

Per $k = 3$ abbiamo

$$I_1 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-2iz}}{z}$$
$$I_3 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-4iz}}{z}, \qquad I_4 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-6iz}}{z}.$$

In questo caso il lemma di Jordan si può utilizzare solo per I_2, I_3 e I_4. In questi casi la chiusura viene sempre fatta sotto. Scegliendo $\bar{\sigma}$ passando sotto $z = 0$, si trova che $I_2 = I_3 = I_4 = 0$. Per I_1, dobbiamo calcolare l'integrale direttamente. Possiamo dividere il cammino di integrazione in tre parti $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ e $\bar{\sigma}_r$ come si mostra nella figura:



Quindi I_1 si può scrivere

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}_1} \frac{dz}{z} + \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}_2} \frac{dz}{z} + \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}_r} \frac{dz}{z} \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{4i\pi} \int_{-R}^{-r} \frac{dx}{x} + \frac{1}{4i\pi} \int_{r}^{R} \frac{dx}{x} \right) + \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}_r} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}_r} \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che l'integrando $1/x$ è una funzione dispari. L'integrale di $1/z$ su un camino di integrazione che gira intorno a $z=0$ di un angolo ϕ (in senso antiorario) viene $+i\phi$. Nel nostro caso

$$\int_{\bar{\sigma}_r} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{i\, r\, e^{i\theta} d\theta}{r\, e^{\theta}} = i \int_{-\pi}^{0} d\theta = i\pi\,. \tag{13}$$

Perciò

$$F(k=3) = I_1 = \frac{1}{4\pi i}\, i\pi = \frac{1}{4}\,.$$

Dalla simmetria della $F(k)$ abbiamo quindi

$$F(k) = \frac{1}{4}, \qquad k = \pm 3.$$

Per $k=1$ abbiamo

$$I_1 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{2iz}}{z}, \qquad I_2 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} \frac{dz}{z}$$
$$I_3 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-2iz}}{z}, \qquad I_4 = \frac{1}{4i\pi} \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-4iz}}{z}.$$

Solo I_1, I_3 e I_4 si possono risolvere con il lemma di Jordan, chiudendo sopra per I_1 e sotto per I_3 e I_4. Scelgliendo $\bar{\sigma}$ come prima, passando sotto la singolartà $z=0$, $I_3 = I_4 = 0$. Invece per I_1 e I_2

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i}\, 2\pi i \left\{ \text{Res}\, \frac{e^{2iz}}{z} \right\}_{z=0} = \frac{1}{2}, \qquad I_2 = \frac{1}{4\pi i} \int_{\bar{\sigma}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\bar{\sigma}_r} \frac{dz}{z} = \frac{1}{4}\,,$$

dove abbiamo usato per I_2 quanto calcolato in Eq. (13). Perciò

$$F(k=1) = I_1 + I_2 = \frac{3}{4},$$

Dalla simmetria di $F(k)$ abbiamo quindi

$$F(k) = \frac{3}{4}, \qquad k = \pm 1.$$

Abbiamo perciò confermato esplicitamente il risultato finale per la trasformata di Fourier mostrato nella Eq. (12)