Geometria e Algebra Lineare 2 - GAL 2

Tommaso Pacini*

December 14, 2024

Abstract

Chiacchiere relative al corso GAL2, Dip. di Fisica, Univ. di Torino. Versione preliminare, certamente bacata o comunque rozza, da non stampare nè distribuire.

1 Introduzione

La parentesi (?) DAD, indotta dal Covid-19, serve se non altro a ribadire due punti:

1. Ogni docente onesto deve chiedersi cosa ci sta a fare in classe, considerata l'imponente mole di materiale cartaceo e online già disponibile.

2. Ogni studente maturo deve chiedersi come approfittare della risorsa aggiuntiva di avere un docente in classe.

Il secondo punto non spetta a me. Per quanto riguarda il primo e la geometria differenziale, per non fare torto a nessuno cito un testo solo: Differential Geometry of Curves and Surfaces, autore M. do Carmo. Coniuga efficienza, intuizione, eleganza espositiva e argomenti avanzati. Volendo sfruttarlo nel modo più semplice, basterebbe copiarlo badando solo a non rovinare nulla.

Detto questo, anche a do Carmo qualche critica la si può fare: l'efficienza arriva a volte a scapito dell'igiene mentale (vedi trattazione del differenziale di mappe tra superfici), ed è difficile apprezzare il Theorema Egregium finchè non abbiamo capito che esistono anche varietà Riemanniane astratte.

Più che altro, però , il problema di come e cosa insegnare a GAL2 è legato agli studenti stessi: essendo un corso del terzo anno di Fisica, alcuni concetti (curve e superfici parametrizzate) sono già stati introdotti in Analisi e molti altri sono stati intravisti in corsi di fisica e fisica matematica, ma non tutti gli studenti hanno seguito gli stessi corsi.

Come creare un corso che possa utilmente tener conto di tutto ciò ? Proviamo così .

*Dipartimento di Matematica, Università di Torino, `tommaso.pacini@unito.it`

2 Una bussola

... sennò ci si perde.

La Fisica tenta di capire la struttura e le proprietà dell'universo a partire dalla classificazione di qualche decina di tipologie di particelle elementari. Un ruolo cruciale è però giocato dalle loro interazioni che, organizzando tali particelle in atomi, molecole e corpi celesti, creano infine un tessuto coerente. Il risultato è una teoria formata dalla combinazione di insiemi di particelle e di strutture addizionali su questi insiemi, le forze.

La Matematica si è , nei secoli, organizzata in modo analogo, con la differenza che, in questo caso, i demiurghi siamo noi: possiamo riorganizzare gli elementi iniziali in più e più modi, a nostro piacimento. Pian piano alcune costruzioni emergeranno come più interessanti o utili, ma sfruttare questa libertà , giocare con tali ingredienti, sarà comunque palestra utile per capire come funzionano.

Al livello più basso abbiamo a nostra disposizione la teoria degli insiemi. Il contenuto specifico di tali insiemi, che siano pecore, forze fisiche o simmetrie, interessa poco. Si danno le nozioni di unione, intersezione, prodotto cartesiano e, soprattutto, di funzione. Si definisce il concetto di corrispondenza biunivoca, ossia di una relazione 1:1 tra due insiemi. Scegliere una tale corrispondenza serve ad identificare, da ogni punto di vista insiemistico, quei due insiemi.

La natura specifica degli elementi dell'insieme inizia a giocare un ruolo solo al livello successivo. Le pecore si possono contare, comprare e vendere: conviene identificarle con insiemi numerici, nasce l'aritmetica. Le forze fisiche possono essere sommate, invertite, modificate di intensità : nasce l'algebra lineare. Le simmetrie possono essere composte: nasce l'algebra. Ciascuno di questi settori della matematica riceve una trattazione teorica indipendente da applicazioni specifiche, ma vive, muore o evolve nei secoli grazie a tale applicabilità .

Ad ogni struttura corrisponde una nozione di isomorfismo, ossia un rafforzamento del concetto di corrispondenza biunivoca: si richiede che la relazione 1:1 identifichi non solo gli insiemi, ma anche la struttura su di essi.

Consideriamo il caso degli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Dal punto di vista insiemistico, non c'è differenza sostanziale: contengono la stessa cardinalità di elementi, dunque esistono corrispondenze biunivoche che le possono identificare. La prima differenza nasce a livello algebrico, tramite nozioni distinte di somma. L'algebra lineare gli assegnerà poi dimensioni diverse.

Il ruolo delle interazioni tra particelle è emulato da un'altra struttura ancora: la topologia. A partire da un insieme X qualunque, la scelta di una topologia genera il tessuto che collega gli elementi dell'insieme in un tutt'uno organico. Nel caso di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, è la topologia che decide se allinearle o disporle su un piano. A volte, come in effetti nel caso di $\mathbb{R}^n$, una topologia risulta più naturale e utile di altre, ma inventare topologie alternative serve comunque per capire meglio le specificità di quella prescelta.

Su queste fondazioni possiamo finalmente costruire l'analisi, che sfrutta sia la topologia sia le strutture algebriche su $\mathbb{R}^n$ per definire limiti e derivate, fornendoci così gli strumenti essenziali per costruire modelli matematici per un sistema fisico di interesse: equazioni per definire l'insieme delle posizioni possibili di un corpo vincolato (spazio delle configurazioni), equazioni differenziali per studiarne l'evoluzione.

Scopo della geometria differenziale è di fornire la teoria necessaria per studiare meglio tali spazi di configurazioni. Dal punto di vista applicativo, il suo ruolo consiste nell'estendere l'analisi da $\mathbb{R}^n$ a curve, superfici, etc. Più in generale, serve a mettere in evidenza quali elementi definiscono la specificità di una superficie rispetto ad un'altra.

Detto ciò , queste dispense si basano su alcuni fili conduttori che legano i corsi GAL1 e GAL2.

Gerarchie strutturali. L'algebra lineare ci ha educati a processi mentali molto metodici. La teoria viene costruita tramite un graduale accumulo di strutture algebriche. Al primo livello troviamo solo le operazioni di somma tra vettori e di prodotto per scalari. Da qui le nozioni di spazio vettoriale, sottospazio, dimensione, applicazione lineare, diagonalizzazione, etc. Al secondo livello aggiungiamo una struttura extra: un prodotto scalare. Da qui le nozioni di lunghezza, angolo, ortogonalità , applicazioni auto-aggiunte, etc.

Costruire la teoria in questo modo aiuta sia a graduare il passaggio dal semplice al complesso, sia ad apprezzare, ad ogni tappa, le potenzialità di ciascuna struttura prima di passare a quella successiva.

La geometria può essere costruita in modo analogo. Ad un primo livello si parla solo di varietà (immersa o astratta che sia), sottovarietà , spazio tangente, mappa differenziabile, etc. Indicheremo questo livello come geometria differenziale (anche se, in assenza almeno di una connessione, sarebbe forse più appropriato parlare di topologia differenziale). Al secondo livello si aggiunge una metrica. Da qui le nozioni di lunghezza, area, curvatura, etc. In tal caso parleremo di geometria Riemanniana.

Concretezza/astrazione. Una seconda analogia tra algebra lineare e geometria riguarda le interazioni tra il punto di vista astratto e quello concreto. Spazi vettoriali, o $\mathbb{R}^n$. Applicazioni lineari, o matrici. Forme bilineari simmetriche, o matrici simmetriche. La connessione tra i due punti di vista è data dalla scelta di una base, che fornisce il dizionario necessario per tradurre tutti i concetti astratti in coordinate e matrici. Ci sono infinite basi possibili, quindi dobbiamo stare attenti a cosa succede quando cambiamo base.

La geometria differenziale lavora in modo simile: da una parte ci sono le varietà differenziabili, dall'altra l'Analisi su domini aperti in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$). Il ruolo di una base verrà assunto dal concetto di parametrizzazione; cambiare base è analogo ad un cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$. Dovremo continuamente fare attenzione a cosa succede quando cambiamo parametrizzazione.

Nozioni geometriche/fisiche. Vediamo più nel dettaglio il rapporto tra oggetti astratti e concreti. GAL1 ci insegna cosa sono traccia, determinante e polinomio caratteristico di una matrice M. A priori, non sapremmo come definirli per un endomorfismo f; il fatto però che tali oggetti sono invarianti rispetto a trasformazioni del tipo $P^{-1}MP$ ci dice che in realtà essi sono direttamente associabili alla f rappresentata da tali matrici. Si noti che le informazioni contenute in questi oggetti sono molto utili: la f è invertibile sse il determinante è diverso da zero, la f preserva il volume di parallelepipedi sse il determinante è 1, e il polinomio caratteristico contiene il 50% delle info necessarie per sapere se f è diagonalizzabile.

Il fatto che tali oggetti non sono invarianti rispetto a trasformazioni del tipo P^tMP ci dice che essi non sono invece ben definiti per forme bilineari. Questo corrisponde, per esempio, al fatto che la nozione di autovalore ha senso solo per endomorfismi, non per forme bilineari. L'unica informazione sensata, nel secondo caso, è per l'appunto quella messa in evidenza dal teorema di Sylvester, riguardante il segno degli autovalori della matrice.

Analogamente, la geometria differenziale spesso vive al livello astratto, ma usa coordinate per definire certi oggetti e per eseguire calcoli. Esattamente come nel caso delle forme bilineari, rischiamo però di generare nozioni non geometriche, legate a scelte soggettive del sistema di coordinate. Dovremo dunque dimostrare che le quantità di interesse sono invarianti rispetto a tali scelte.

Detto ciò , molte volte le coordinate hanno invece un interesse specifico. Tendenzialmente, in tal caso usiamo la parola "parametrizzazione". Dal punto di vista fisico, il moto di una particella è descritto non solo dall'oggetto geometrico dato dalla sua traiettoria, ma anche dalla legge oraria data dalla parametrizzazione di quella traiettoria. In altre parole: il moto corrisponde ad una curva parametrizzata, la traiettoria ad una curva parametrizzabile.

Insomma: di volta in volta sarà importante capire lo scopo a cui tendiamo, in modo da includere nella nostra analisi tutto e solo ciò che davvero conta.

Nozioni intrinseche/estrinseche. Spazi vettoriali ottenuti come sottospazi di qualcos'altro sono certamente importanti, ma non bastano per sviluppare una teoria soddisfacente. Molte loro proprietà sono peraltro tipiche di qualunque spazio vettoriale, mentre solo alcune proprietà o nozioni sono specifiche: sottospazio supplementare, proiezione, estensione di una base, etc. La teoria astratta serve anche per sottolineare queste differenze.

Allo stesso modo, può certamente risultare utile iniziare un corso di geometria differenziale parlando solo di curve e superfici nello spazio, ma prima o poi bisogna affrontare anche oggetti astratti, non contenuti in nessuno spazio più grande. La teoria degli oggetti immersi tipicamente si appoggia sulla teoria dell'insieme ambiente: in tal caso parliamo di definizioni, nozioni, proprietà estrinseche. La teoria degli oggetti astratti deve, in qualche modo, risultare auto-sufficiente: intrinseca.

Nel corso di queste dispense tenteremo di portare avanti, simultaneamente, ambo punti di vista in modo da sottolinearne, di volta in volta, pregi, difetti e difficoltà .

3 Strumenti

Ricapitoleremo qui alcune nozioni che ci accompagneranno per tutto il corso.

Algebra lineare. Daremo per noti molti concetti elementari. Ricordiamo solamente i seguenti punti.

1. Lo spazio fisico V_3 ha un prodotto scalare standard creato da madre natura, definito tramite righello e goniometro: $v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos\theta$. Anche $\mathbb{R}^n$ ha un prodotto scalare standard $v \cdot w = \sum v_i w_i$. Ogni spazio vettoriale, però , ha in realtà infiniti prodotti scalari: in particolare ciò vale anche per V_3 e $\mathbb{R}^n$.

Gli spazi vettoriali che compaiono come spazi tangente di una varietà differenziabile immersa in $\mathbb{R}^3$ hanno un prodotto scalare standard, indotto da quello su $\mathbb{R}^3$. Possiamo però scegliere di usare, alternativamente, qualunque altro prodotto scalare. Ogni tale scelta (tra le infinite possibili) non modifica in alcun modo la geometria differenziale della varietà , ma produce una geometria Riemanniana diversa.

Gli spazi vettoriali che compaiono come spazi tangente di una varietà differenziabile astratta non hanno un prodotto scalare standard. Per fare geometria Riemanniana siamo costretti a fare una scelta.

2. Siano dati n vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il parallelogramma generato da essi. Usando il prodotto scalare standard, possiamo definire il volume di tale figura. A meno di segno, tale volume coincide con il determinante della matrice avente come colonne i vettori dati. Infatti, a meno di trasformazioni ortogonali che non modificano nè il determinante (a parte forse il segno) nè il volume, posso supporre che il primo vettore sia $v_1 = \lambda_{11} e_1$, il secondo $v_2 = \lambda_{12} e_1 + \lambda_{22} e_2$, etc. In questo caso $\det = \Pi \lambda_{ii}$, che è il prodotto della lunghezza della base v_1 per le varie altezze.

Alternativamente, il volume è dato dalla formula $\sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}$ (sempre positivo). La matrice $(v_i \cdot v_j)$ coincide infatti con la matrice prodotto $M^t \cdot M$.

3. Siano dati k vettori $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il parallelogramma generato da essi. In questo caso, per calcolare il volume rispetto al prodotto scalare standard, possiamo usare la formula $\sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}$. Infatti, a meno di trasformazioni ortogonali, possiamo supporre che i vettori appartengano a $\mathbb{R}^k \times 0 \leq \mathbb{R}^n$ e quindi ci riportiamo nella situazione in cui il numero k di vettori coincide con la dimensione dell'ambiente $\mathbb{R}^k$.

Più in generale, dati k vettori $\{v_1, \ldots, v_k\}$ in uno spazio Euclideo $(V, \cdot)$, il volume del parallelogramma da essi generato coincide con $\sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}$ perchè qualunque base ortonormale per V genera una isometria con $\mathbb{R}^n$, e quindi ci riportiamo nella situazione precedente.

4. Lo spazio vettoriale fisico V_3 si distingue anche per la presenza di una operazione addizionale: il prodotto vettoriale. Per definizione, $\|v \times w\|$ coincide con l'area del parallelogramma generato da v e w, quindi con la formula $\sqrt{\det}$ vista sopra.

Analisi. Daremo per buoni tutti i concetti elementari, e molti teoremi standard. Sottolineamo però che l'Analisi funziona al meglio quando tratta funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$ definiti su sottoinsiemi aperti: in questo contesto non c'è alcun problema a trattare rapporti incrementali e loro limiti. Uno dei nostri compiti, in questo corso, sarà di estendere questa teoria per includere funzioni definite su sottoinsiemi non aperti, quali la sfera in $\mathbb{R}^3$.

In queste dispense useremo la parola differenziabile per indicare funzioni C^∞. Questa ipotesi è solitamente più forte del necessario: a seconda del contesto basterà C^k, per qualche k, ma non ci sarà mai utile fare tali distinzioni.

Per quanto riguarda la notazione, data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ed un punto $p \in A$, indicheremo con $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ il differenziale di f nel punto p. Specificamente, $df_p(v)$ è la derivata direzionale di f nel punto p con direzione v, ossia $df_p(v) = \frac{d}{dt} f(p + tv)_{|t=0}$. Si può dimostrare che df_p è lineare rispetto a v, ossia è un'applicazione lineare tra gli spazi indicati. La regola di derivazione di funzioni composte mostra poi che $df_p(v) = \frac{d}{dt}((f \circ \alpha)(t))_{|t=0}$, per qualunque curva $\alpha(t)$ tale che $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$.

Usando le basi standard, possiamo rappresentare df_p tramite una matrice $k \times n$ contenente tutte le derivate parziali $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}$: in tal modo, come in GAL1, il vettore $df_p(v)$ avrà le coordinate date dal prodotto di tale matrice per il vettore contenente, in colonna, le coordinate di v.

Definizione 3.1 *Una mappa $\phi : A_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice un diffeomorfismo se è differenziabile, invertibile, con inversa differenziabile.*

I due aperti si diranno allora diffeomorfi.

Dal punto di vista analitico, non c'è alcuna differenza sostanziale tra dominii diffeomorfi.

Useremo più volte il seguente risultato, che è per inciso uno dei più bei teoremi dell'Analisi elementare, sia per i collegamenti con l'algebra lineare sia per la tecnica dimostrativa (teorema della contrazione in spazi di Banach).

Theorem 3.2 (Teorema della funzione inversa) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile e $p \in A$. Se il differenziale df_p è invertibile, allora f è un diffeomorfismo locale: esistono intorni aperti di p ed $f(p)$ tali che la restrizione di f a tali aperti sia un diffeomorfismo.*

L'enunciato mette in luce una particolarità . Molto spesso ci troveremo nella condizione di poter affermare qualcosa solo su una opportuna restrizione della mappa data, anzichè sulla mappa iniziale. Tale situazione viene tipicamente segnalata con l'aggettivo locale, spesso senza indicare precisamente qual'è il nuovo dominio di studio.

Si osservi che il teorema non fornisce invece un criterio per dimostrare che f è un diffeomorfismo sull'intero dominio A. Il problema è che, tipicamente, non possiamo controllare l'iniettività : si pensi, per esempio, alla funzione olomorfa (dunque, vista su $\mathbb{R}^2$, differenziabile) $z \mapsto z^2$ definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il caso $n = 1$ è un'eccezione: in Analisi si dimostra che se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ ha derivata diversa da zero in ogni punto, allora f è invertibile.

Un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ può anche essere inteso come un cambiamento di variabili. Ricordiamo le formule di cambiamento variabili sotto integrazione. Bisogna distinguere due casi.

1. Dato un intervallo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, generalmente si inizia la teoria dell'integrazione dando la definizione di $\int_a^b f dx$, poi si definisce anche $\int_b^a f dx := -\int_a^b f dx$. Dato un diffeomorfismo $\phi : (c,d) \to (a,b)$, questa distinzione porta alla regola di cambiamento coordinate

$$\int_a^b f dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f \circ \phi)\phi'(\xi) d\xi.$$

2. Dato un dominio aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, generalmente si definisce solo $\int_U f dx$ senza concedere la possibilità di una seconda orientazione. Dato un diffeomorfismo $\phi : V \to U$, ciò porta alla regola di cambiamento coordinate

$$\int_U f dx = \int_V (f \circ \phi) |\det d\phi| d\xi.$$

Si noti che in questo caso il termine correttivo compare con valore assoluto.[1]

4 Curve in $\mathbb{R}^n$: teoria locale

Cos'è una curva? In Fisica interessano curve parametrizzate, ossia moti. In Geometria vogliamo liberarci dalla parametrizzazione. Discuteremo dunque la geometria delle curve che ammettono una parametrizzazione, ma elaborando concetti indipendenti dalla parametrizzazione scelta. La trattazione sarà piuttosto sbrigativa: molti concetti verranno meglio elaborati in seguito.

Definizione 4.1 *Una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è una mappa*

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)),$$

dove I è un intervallo aperto, con le seguenti proprietà :

1. *α è C^∞.*
2. *In ogni punto $t \in I$, la derivata $\dot{\alpha}(t) \neq 0$.*
3. *$\alpha : I \to Im(\alpha)$ è un omeomorfismo, ossia una mappa 1:1, continua, con inversa continua.*[2]

Diremo che il sottoinsieme $C := Im(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ è una curva parametrizzabile. La mappa inversa α^{-1} si dice coordinata su C.

[1] Future version should discuss Cauchy's existence/uniqueness theorem for ODEs.

[2] La nozione di continuità della funzione inversa verrà meglio discussa in seguito, quando parleremo di topologia.

Fisicamente, una curva parametrizzata si può pensare come il moto di una particella. A noi però interessa fare geometria, ossia concentrarci solo sulla sua traiettoria C. Intuitivamente, la seconda condizione assicura che questa curva non abbia spigoli mentre la terza implica che C non si auto-interseca o comunque non ritorna infinitamente vicina a se stessa, come una figura 6. Tali condizioni sono però espresse in termini del moto che ha generato la traiettoria. E' chiaro che la stessa traiettoria può essere generata da infiniti altri moti, semplicemente cambiando la velocità di percorrenza. Definiamo meglio questa situazione.

Definizione 4.2 *Sia α una curva parametrizzata. Un cambiamento di variabili è un diffeomorfismo*

$$\tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}, \quad \tau \mapsto t(\tau)$$

tra intervalli aperti della retta, ossia: C^∞, invertibile, con inversa C^∞.

Sia α una parametrizzazione di C. Una riparametrizzazione è una mappa

$$\tilde{\alpha} : \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \to C, \quad \tilde{\alpha}(\tau) = (\alpha \circ t)(\tau)$$

ottenuta tramite composizione con un cambiamento di variabili.

Le regole che governano le derivate delle funzioni composte dimostrano che le condizioni richieste sopra sono in effetti indipendenti dalla parametrizzazione scelta.

Esempi. Diamo qualche esempio.

1. Il grafico di una funzione differenziabile $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una curva parametrizzabile in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Una circonferenza nel piano non è una curva parametrizzabile nel senso visto sopra, ma è intuitivo che, in qualche modo, lo è localmente. Definiremo meglio questo concetto più avanti, nel contesto delle superfici regolari. Altri esempi di questo tipo si possono ottenere tramite il teorema della funzione implicita, che verrà anch'esso trattato meglio in seguito.

3. La spirale $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ definisce una curva parametrizzata.

Si noti che una stessa traiettoria può essere percorsa in due direzioni opposte. A volte interessa tener conto di questo fatto. Arriviamo dunque alla nozione di curva orientata.

Definizione 4.3 *Diciamo che un diffeomorfismo $t = t(\tau)$è positivo se t è crescente rispetto a τ, ossia se $t'(\tau) > 0$, per ogni τ.*

Diciamo che due curve parametrizzate sono equivalenti se differiscono per composizione con un diffeomorfismo positivo.

Una curva parametrizzabile orientata è una classe di equivalenza di curve parametrizzate.

Lunghezza. Le nozioni geometriche più interessanti sfruttano non solo la curva, ma anche la metrica standard esistente sul suo spazio ambiente $\mathbb{R}^n$. L'esempio più semplice è la nozione di lunghezza e le nozioni ad essa associate.

Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata. La lunghezza di α è definita dall'integrale

$$L(\alpha) := \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Osservazione. Nel tentativo di scansare l'ira funesta degli Analisti osserviamo che, non avendo imposto condizioni sul comportamento di α vicino agli estremi, rischiamo che l'integrale prenda valore ∞ oppure (in altre situazioni) che sia indefinito. Sarebbe dunque meglio definire l'integrale su un sottointervallo chiuso di (a, b). Commetteremo lo stesso crimine piu' volte in seguito, senza ribadire questo punto.

Il senso di questa definizione è spiegato da un teorema: tale valore coincide con il valore limite delle lunghezze di curve poligonali a tratti che approssimano la curva data.

Infine: è intuitivamente chiaro che la lunghezza di α non dipende dalla parametrizzazione scelta, ma in realtà va dimostrato, usando la regola che governa il cambiamento di variabili sotto integrazione. Possiamo dunque parlare di $L(C)$.

Usando la nozione di lunghezza possiamo iniziare ad integrare lungo curve.

Definizione 4.4 *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzabile. Sia f una funzione differenziabile definita su un intorno aperto di C. L'integrale di f lungo C è la quantità*

$$\int_C f ds := \int_a^b (f \circ \alpha)(t) |\dot{\alpha}(t)| dt,$$

dove $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ è una qualunque parametrizzazione di C.

Si dimostra che tale quantità è indipendente dalla scelta della parametrizzazione.

Osservazione. Si noti che, al momento, la notazione ds non ha senso compiuto. E' legata alla nozione di lunghezza d'arco che introduciamo sotto. Nel caso delle curve orientate, potremmo darle un senso interpretandola come una forma differenziale su C; in dimensione più alta, corrisponderebbe alla forma volume indotta dalla metrica. L'oggetto fds diventa allora una forma differenziale. In questo senso, l'integrale definito sopra è un caso speciale dell'integrale di forme differenziali, che incontreremo più avanti.

Come già detto e appena vista, tendenzialmente definiremo nozioni geometriche tramite una scelta di parametrizzazione. Questo metodo ha però il difetto di constringerci a dimostrare, di volta in volta, che i concetti introdotti sono indipendenti dalla parametrizzazione scelta. Introduciamo allora una nuova idea: vogliamo individuare, una volta per tutte, una parametrizzazione canonica, ossia associata alla curva senza alcun grado di libertà . Concetti definiti tramite questa parametrizzazione saranno automaticamente indipendenti da scelte arbitrarie. La possiamo introdurre come segue.

Sia C una curva parametrizzabile. Scegliamo un punto $p \in C$. Diciamo che una sua parametrizzazione $s \mapsto \alpha(s)$ è per lunghezza d'arco se, per ogni punto $p' \in C$, dunque $p' = \alpha(s)$, la lunghezza del tratto di curva tra p e p' coincide con il valore del parametro s. In particolare, $p = \alpha(0)$ e quindi il dominio di α include $s = 0$.

Lemma 4.5 *Sia C una curva parametrizzabile e $p \in C$. Una sua parametrizzazione $\alpha = \alpha(s)$ è per lunghezza d'arco sse $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$.*

Proof: Se $\alpha(s)$ è una parametrizzazione per lunghezza d'arco allora, per ogni s, la lunghezza $L(s)$ calcolata tra p e $\alpha(s)$ coincide con s, dunque $L'(s) \equiv 1$. D'altra parte, $L'(s) = |\dot{\alpha}(s)|$ e quindi $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$. Viceversa, se $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$ allora, integrando, si ottiene che $L(s) = s$. □

In altre parole, tra tutti i moti possibili lungo quella traiettoria siamo interessati a quelli con velocità costante 1. Il problema principale è il seguente: esiste sempre un modo di percorrere una curva data, comunque complicata, con un tale moto uniforme? La risposta, positiva, nasce dalla seguente costruzione.

Scegliamo una parametrizzazione iniziale α qualsiasi. Supponiamo $p = \alpha(t_0)$. Poniamo $s(t) := \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt$, di modo che $s'(t) = |\dot{\alpha}(t)| \neq 0$. Ne consegue che la funzione $t \mapsto s(t)$ è un diffeomorfismo, e dunque esiste la sua inversa $s \mapsto t(s)$. L'Analisi insegna che $t'(s) = 1/s'(t)_{|t=t(s)}$. Consideriamo la nuova parametrizzazione ottenuta per composizione: $s \mapsto (\alpha \circ t)(s)$. Per definizione, oppure usando il lemma, possiamo verificare che questa è una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

Osservazione. Urge una precisazione. In realtà abbiamo appena definito una famiglia di parametrizzazioni dipendenti da due scelte arbitrarie: (i) la scelta del punto iniziale $p \in C$, (ii) la direzione di percorrenza. La prima scelta comporta una traslazione delle lunghezze che non sarà mai rilevante per quel che faremo. La seconda scelta è invece spesso rilevante, e riguarda la nozione di orientazione. Scelte opposte implicano, talvolta, una differenza di segno nei risultati. Concludiamo che qualunque nozione definita usando la parametrizzazione per lunghezza d'arco fornisce informazioni geometriche sulla corrispondente curva orientata C.

Terminiamo con la seguente considerazione. La lunghezza d'arco ha un interesse teorico addizionale: la sua esistenza dimostra che qualunque curva parametrizzabile in $\mathbb{R}^n$ è isometrica ad un intervallo di $\mathbb{R}$. In altre parole, dal punto di vista intrinseco, non esiste differenza tra roba curva e roba piatta. Le nozioni di curvatura e torsione che stiamo per esaminare riguardano allora solo le proprietà estrinseche della curva, ossia la sua relazione con lo spazio ambiente in cui vive. Questa situazione è profondamente diversa da quella che vedremo, più avanti, per le superfici.

Curvatura e torsione. Vogliamo caratterizzare come una curva si contorce all'interno del suo spazio ambiente. L'idea è di studiare come ruota la sua retta tangente (ossia la retta che meglio approssima la curva), poi come ruota il piano che meglio approssima la curva, etc. Il caso più semplice è quello delle curve in $\mathbb{R}^2$. Passeremo poi alle curve in $\mathbb{R}^3$. Il caso generale è simile.

Due utili accorgimenti: (i) L'Analisi ci insegna che i cambiamenti si misurano tramite derivate. Considerato però che rette, piani, etc. non sono facilmente derivabili, lavoreremo piuttosto in termini di basi adattate a tali sottospazi, costruite ad hoc. In questo modo ci riduciamo a derivare vettori. (ii) Useremo la lunghezza d'arco: produce formule più semplici e dimostra direttamente che le nozioni introdotte sono indipendenti da scelte arbitrarie. Ciò non toglie che, in situazioni pratiche, può essere difficile individuare la parametrizzazione per lunghezza d'arco: per questo motivo conviene conoscere anche le formule valide per parametrizzazioni generali (vedasi do Carmo).

1. Sia C una curva orientata in $\mathbb{R}^2$. Sia $\alpha(s)$ la sua parametrizzazione per lunghezza d'arco. Poniamo $\mathbf{t}(s) := \dot\alpha(s)$: è un vettore tangente unitario. Sia $\mathbf{n}(s)$ la sua rotazione di angolo $\pi/2$ in senso anti-orario. Detto altrimenti, scegliamo $\mathbf{n}(s)$ in modo che $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ sia una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla sua orientazione standard (nel senso discusso più avanti). Notiamo che $\dot\alpha(s) \cdot \dot\alpha(s) \equiv 1$, dunque la sua derivata $2\ddot\alpha(s) \cdot \dot\alpha(s) \equiv 0$, ossia l'accelerazione è perpendicolare a $\mathbf{t}(s)$. Ne consegue che $\ddot\alpha(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$, per qualche funzione $k(s)$. Per definizione, $k(s)$ è la curvatura di C. Si tratta di una funzione di segno variabile. Scrivendola come $k(s) = \ddot\alpha(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ notiamo che è C^∞.

Per costruzione, $k(s) \equiv 0$ sse $\ddot\alpha(s) \equiv 0$, ossia sse $\dot\alpha(s)$ è costante, ossia sse $\alpha(s)$ è rettilineo.

2. Sia C una curva orientata in $\mathbb{R}^3$. Sia $\alpha(s)$ la sua parametrizzazione per lunghezza d'arco. Come prima, poniamo $\mathbf{t}(s) := \dot\alpha(s)$. In questo contesto non abbiamo un modo immediato per definire $\mathbf{n}(s)$. Come sopra, possiamo però notare che l'accelerazione è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$. Per sfruttare questo fatto bisogna introdurre una nuova ipotesi: $\ddot\alpha(s) \neq 0$. Questo ci permette di definire $\mathbf{n}(s) := \ddot\alpha(s)/|\ddot\alpha(s)|$. Possiamo ora scegliere $\mathbf{b}(s)$ in modo che $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ sia una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$, ossia $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.

Definizione 4.6 *La terna di vettori* $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ *si chiama base di Frenet della curva* C*.*

Per costruzione tale terna dipende in modo C^∞ dalla variabile s.

Definiamo ora la funzione curvatura $k(s) := |\ddot\alpha(s)|$, di modo che $\dot{\mathbf{t}}(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$. Si noti che, grazie alla ipotesi aggiuntiva, $k(s)$ è C^∞. Rispetto al caso 2-dimensionale, ha la proprietà di essere sempre positiva.

La definizione di $k(s)$ corrisponde alla nostra intuizione che la curvatura nasce dalla variazione della retta (in realtà del versore) tangente. Dobbiamo ora tener conto della variazione anche del piano generato da $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ (noto come piano osculatore). Equivalentemente, ma più facilmente, studiamo la variazione di $\mathbf{b}(s)$.

A priori, $\dot{\mathbf{b}}(s)$ dovrebbe avere componenti in ciascuna direzione della base di Frenet. Si noti però che $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \equiv 0$, $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \equiv 0$. Derivando la prima identità troviamo $\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \cdot \dot{\mathbf{t}}(s) \equiv 0$. Sostituendo, otteniamo

$$0 \equiv \dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \cdot k(s)\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{t}(s).$$

Abbiamo così trovato che $\dot{\mathbf{b}}(s)$ non ha componenti in direzione $\mathbf{t}(s)$. Il fatto $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1$ implica che $\dot{\mathbf{b}}(s)$ non ha componenti neppure in direzione $\mathbf{b}(s)$. Poniamo dunque $\dot{\mathbf{b}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, ossia $\tau(s) = \dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$: otteniamo così una funzione C^∞ di segno variabile, chiamata torsione.

Si può dimostrare che $\tau(s) \equiv 0$ sse la curva C è contenuta in un qualche piano in $\mathbb{R}^3$, coerentemente con l'intuizione con cui l'abbiamo definita.

3. Le definizioni in $\mathbb{R}^n$ sono analoghe: bisogna supporre $n-1$ derivate diverse da zero, si trova una gerarchia di funzioni torsione (positive fino al penultimo), e la direzione dell'ultimo vettore della base di Frenet viene scelta in modo che il determinante di cambiamento base, rispetto alla base standard, sia positivo.

Ribadiamo che tutto quanto sopra è definito rispetto al parametro di lunghezza d'arco, ed è quindi geometricamente valido. E' bene osservare che alcuni vettori/funzioni dipendono dall'orientazione scelta. Per esempio, data $C \subseteq \mathbb{R}^2$, se cambiamo il verso di percorrenza allora $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e k (ma non $\ddot{\alpha}$) cambiano di segno.

Equazioni di Frenet. Ci siamo fissati sullo studio della variazione del piano $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$. Conoscendo la variazione di $\mathbf{t}(s)$, sappiamo anche come varia il piano $\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$. Potremmo chiederci anche come varia il piano $\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)$, ossia come varia $\mathbf{n}(s)$. Notiamo che $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)$, dunque

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}(s) &= \dot{\mathbf{b}}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \dot{\mathbf{t}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times k(s)\mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s)\mathbf{b}(s) - k(s)\mathbf{t}(s) \end{aligned}$$

Fatto interessante: non è comparsa una nuova funzione, possiamo riciclare k, τ. Siamo così arrivati alle Equazioni di Frenet:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) &= & k(s)\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= & -k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= & \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases}$$

che possiamo riscrivere in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(s) & \dot{\mathbf{n}}(s) & \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo, a futura memoria, la struttura $\dot{M}(s) = M(s)A(s)$, dove $M(s) \in \mathrm{SO}(3)$ e $A(s)$ è anti-simmetrica.

Dal punto di vista teorico, l'interesse per tali equazioni è dovuto al seguente risultato, che sostanzialmente afferma che le funzioni di curvatura e torsione sono sufficienti per ricostruire l'intera curva C (a meno di rotazioni e traslazioni).

Theorem 4.7 (Teorema di Frenet) *Siano date funzioni differenziabili*

$$k(s), \tau(s) : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

con $0 \in (a,b)$ *e* $\tau(s) > 0$. *Per ogni* $p \in \mathbb{R}^3$ *e* $M \in \mathrm{SO}(3)$ *esiste un'unica curva* $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *tale che: (i)* $\alpha(0) = p$*, (ii) le colonne di* M *sono la base di Frenet per* $s = 0$*, (iii)* k *e* τ *sono la sua curvatura e torsione (equivalentemente:* α *soddisfa le equazioni di Frenet). Il parametro* s *coincide con la lunghezza d'arco.*

Il primo passo consiste nel trovare la base di Frenet $M(s)$ della α desiderata. L'esistenza di $M(s)$ si basa sul teorema di esistenza ed unicità di soluzioni di equazioni differenziali, applicata alle equazioni di Frenet. Tali equazioni sono lineari, dunque l'esistenza è garantita per il massimo intervallo di tempo possibile, ossia quello di esistenza dei coefficienti. La condizione iniziale M da' l'unicità . La questione più interessante è il perchè $M(s) \in SO(3)$: rinviamo la discussione di questo punto a fine corso, quando parleremo di gruppi di Lie. Avendo così trovato $M(s)$, otteniamo $\alpha(s)$ per integrazione di $\mathbf{t}(s)$, usando la condizione iniziale $\alpha(0) = p$. Il fatto che $M(s) \in \mathrm{SO}(3)$ garantisce anche che $|\mathbf{t}(s)| \equiv 1$, e dunque che s è la lunghezza d'arco.

Dal punto di vista pratico, questo teorema ci assicura per esempio che se α ha curvatura 0 e torsione 0, oppure ha curvature e torsione uguali a quelli di una spirale, allora è davvero una retta oppure una spirale.

E' anche interessante confrontare il teorema di Frenet con l'equazione $F = ma$ in Fisica: entrambi danno una curva, ma la prima necessita solo di due dati (curvature e torsione), la seconda di tre (le componenti della forza). Perchè ?

Infine, una piccola correzione: la curva α trovata dal teorema potrebbe autointersecarsi e quindi non essere parametrizzata nel senso della nostra definizione. Poco male.

Osservazione. La scorciatoia per ottenere informazioni geometriche offerta dalla lunghezza d'arco non è estendibile alle superfici. Queste ammettono sì parametrizzazioni interessanti, ma non così univocamente determinate.

L'alternativa è di imparare a lavorare direttamente sulla varietà data, anzichè sulle sue carte locali; per esempio, ad usare una metrica g senza rappresentarla come matrice g_{ij}.

5 Curve in $\mathbb{R}^2$: germi per la teoria globale

Osserveremo che le curve chiuse sono soggette a molti vincoli aggiuntivi, rispetto a quelli di Frenet.

Il teorema di Frenet afferma che qualunque curvatura e torsione (sotto ipotesi assai blande) corrispondono ad una qualche curva. Tipicamente, però , tale curva sarà aperta, nel senso che non si richiude su se stessa.

Questa sezione vuole mostrare che le curve chiuse devono invece soddisfare condizioni molto più stringenti, di carattere globale; curvatura e torsione, per contro, in ogni punto vedono solo un intorno locale della curva. La distinzione tra teoria locale e teoria globale è uno dei temi fondamentali della geometria.

Il seguente risultato compare in do Carmo, sezione 1.7 B, col nome Theorem of turning tangents.

Theorem 5.1 *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva localmente parametrizzabile e chiusa. Allora la sua curvatura k deve soddisfare il seguente vincolo: $\int_C k\, ds = 2\pi n$, per qualche $n \in \mathbb{Z}$. In particolare, se C non ha autointersezioni allora $\int_C k\, ds = \pm 2\pi$.*

L'idea della dimostrazione tira in ballo un secondo, interessante, punto di vista su k. Parametrizziamo C per arco lunghezza, di modo che $\dot{\alpha}(s)$ sia un versore. Possiamo allora scrivere $\dot{\alpha}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$. Si noti che, in ogni punto, la funzione $\theta(s)$ è ben definita solo a meno di multipli di 2π, ma costruendo $\theta(s)$ in modo che sia continua tali multipli sono localmente costanti, e quindi $\dot{\theta}(s)$ risulta una funzione ben definita. Derivando, troviamo

$$\ddot{\alpha}(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))\dot{\theta}(s) = \dot{\theta}(s)\mathbf{n}(s),$$

ossia $\dot{\theta}(s)$ coincide con $k(s)$. Il risultato segue per integrazione. L'indice n si chiama indice di rotazione della curva. Il fatto che curve senza autointersezioni abbiano indice ± 1 e' intuitivo, ma necessita di dimostrazione. Vedasi do Carmo.

Un secondo risultato globale riguarda la relazione tra area e perimetro. Esempi semplici mostrano che, a parità di perimetro, l'area racchiusa da una curva chiusa può tendere a zero. Il contrario, invece, non è possibile. Specificamente, vale la seguente disuguaglianza.

Theorem 5.2 (Disuguaglianza isoperimetrica) *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva chiusa senza autointersezioni. Sia A la misura dell'area da essa racchiusa, e sia L la lunghezza del suo perimetro. Allora*

$$4\pi A \leq L^2,$$

e l'uguaglianza vale sse C è un cerchio.

Il teorema mostra un fatto intuitivo: a parità di area, non possiamo diminuire arbitrariamente il perimetro. Il nome del teorema si riferisce al gioco opposto:

a parità di perimetro, non possiamo aumentare arbitrariamente l'area. L'area massima ottenibile è quella raggiunta dal cerchio. Per la dimostrazione rimandiamo a do Carmo.

6 Superfici parametrizzabili in $\mathbb{R}^3$

Iniziamo a parlare di superfici. Rispetto a quanto fatto per le curve, procederemo molto più lentamente. In questa sezione mostreremo come estendere l'Analisi a tali spazi.

Definizione 6.1 *Una superficie parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ è una mappa*

$$\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

dove U è un dominio aperto, con le seguenti proprietà :

1. *ϕ è C^∞. Scelto un punto $(\bar{u}, \bar{v})$, identificheremo il suo differenziale, rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, con la matrice*

$$d\phi_{|(\bar{u},\bar{v})} \simeq \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix},$$

   dove tutte le derivate sono calcolate nel punto $(\bar{u}, \bar{v})$.

2. *Il differenziale di ϕ, in ogni punto, ha rango massimo, ossia 2: ciò significa che i vettori $\phi_u = d\phi(1,0)$, $\phi_v = d\phi(0,1)$ sono linearmente indipendenti o equivalentemente che la matrice contiene una sottomatrice 2×2 invertibile.*

3. *$\phi : U \to Im(\phi)$ è un omeomorfismo, ossia una mappa 1:1, continua, con inversa continua.*[3]

Diremo che il sottoinsieme $S := \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzabile. Le due componenti della mappa inversa ϕ^{-1} si dicono coordinate su S.

Definizione 6.2 *Sia S una superficie parametrizzata. Un cambiamento di variabili è una mappa*

$$\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to U \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (\xi, \eta) \mapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$$

tra dominii aperti del piano. Si richiede che la mappa sia un diffeomorfismo, ossia C^∞, invertibile, con inversa C^∞.

Sia ϕ una parametrizzazione di S. Una riparametrizzazione è una mappa

$$\tilde{\phi} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to S, \quad \tilde{\phi}(\xi,\eta) = \phi(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$$

ottenuta tramite composizione con un cambiamento di variabili.

[3] Di nuovo: la nozione di continuità della funzione inversa verrà meglio discussa in seguito, quando parleremo di topologia.

Esempi. Diamo qualche esempio.

1. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $S := \{(u, v, f(u, v)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Allora S è parametrizzabile. Una parametrizzazione è data da $\phi(u, v) := (u, v, f(u, v))$. Analogamente, è una superficie parametrizzabile anche $S := \{(u, f(u, v), v))\}$, etc.

2. Viceversa, ogni S parametrizzabile è localmente di questo tipo. Sia infatti $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di S. Scegliamo un punto $(\bar{u}, \bar{v}) \in U$. Supponiamo per esempio che sia invertibile la sottomatrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$, calcolata nel punto $(\bar{u}, \bar{v})$. Allora, per il teorema della funzione inversa, possiamo localmente esplicitare (u, v) in termini di (x, y), ottenendo un diffeomorfismo $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Componendo con ϕ, troviamo una nuova parametrizzazione della forma $\tilde{\phi}(x, y) := (x, y, z(x, y))$, come desiderato.

   Questo fatto può essere utilizzato per dimostrare che il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ non è una superficie parametrizzabile. In un intorno dell'origine, infatti, l'unico modo di rappresentarlo come grafico di funzione è rispetto alle variabili (x, y), ossia nella forma $f = f(x, y)$. Tale rappresentazione è però necessariamente unica e l'abbiamo già data tramite l'equazione del cono: il problema è che tale f non è differenziabile.

3. Sia $t \in (a, b) \mapsto (r(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$ una curva regolare con $r(t) > 0$. Allora

$$\phi : (0, 2\pi) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(\theta, t) := (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t))$$

   è una superficie regolare, detta superficie di rotazione della curva data (attorno all'asse z).

4. Altri esempi arrivano dal seguente teorema.

Theorem 6.3 (Teorema della funzione implicita) *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $p \in f^{-1}(0)$ tale che $\nabla f_p \neq 0$. Allora, localmente, $f^{-1}(0)$ è il grafico di una funzione differenziabile. Più precisamente, esiste un intorno V_p di p in $\mathbb{R}^3$ ed una funzione differenziabile $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ tale che $f^{-1}(0) \cap V_p$ sia il grafico di g, dunque sia una superficie parametrizzabile.*

La difficoltà principale è dimostrare che tale funzione g esiste. Supponiamo per esempio che $f_z(p) \neq 0$. Per continuità , esiste allora un intorno di p in cui questa condizione continua a verificarsi. Inoltre, considerato che $f(p) = 0$, vediamo che lungo il segmento verticale passante per p la f è monotona, dunque da una parte raggiunge il valore ϵ, dall'altra il valore $-\epsilon$. Anche questi valori rimangono diversi da zero in un intorno di p. Possiamo così costruire un intorno, per esempio cubico, di p tale che la (i) f sia monotona lungo ogni segmento verticale dentro tale intorno, (ii) f assuma valori di segno opposto sui tappi orizzontali opposti. Per continuità , segue che f ammette un unico zero su ogni tale segmento verticale. L'altezza di questi zeri definisce la funzione $g = g(x, y)$. Il fatto che tale g è differenziabile segue dall'identità $f(x, y, g(x, y)) = 0$.

Se l'ipotesi è soddisfatta in ogni punto $p \in f^{-1}(0)$, tale insieme può essere ricoperto da superfici parametrizzabili: è una superficie regolare, nel senso che vedremo in seguito.

Ciò accade, per esempio, nel caso della sfera $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$, dell'ellissoide, etc. Ogni superficie parametrizzabile ammette però infinite parametrizzazioni, non tutte scrivibili come grafico di una funzione. Per esempio, la sfera (eccetto un meridiano) può essere alternativamente parametrizzata mediante la mappa

$$\phi : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(\theta, \psi) := (\cos\psi \cos\theta, \cos\psi \sin\theta, \sin\psi),$$

che evidenzia il fatto che la sfera può essere ottenuta per rotazione di una circonferenza.

Il teorema ammette una formulazione più generale, dimostrabile tramite il teorema della funzione inversa.

Theorem 6.4 (Teorema della funzione implicita, versione generale) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile. Sia $p \in f^{-1}(0)$ tale che df_p abbia rango k. Allora, localmente, $f^{-1}(0)$ è il grafico di una funzione differenziabile. Più precisamente, esiste un intorno V_p di p in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione differenziabile $g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ tale che $f^{-1}(0) \cap V_p$ sia il grafico di g.*

In tale situazione il punto p si dice punto regolare per f, e il valore 0 si dice valore regolare. Se la condizione non è verificata, il punto si dice critico.

L'idea della dimostrazione è semplice. Vediamo il caso semplificato $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, scrivendo (ξ, η) per le componenti di f. Supponiamo che $p = (x_0, y_0, z_0)$ e che il minore di $d(\xi, \eta)_p$ definito dalle derivate rispetto a x, y sia invertibile. Per il teorema della funzione inversa possiamo allora invertire (x, y) rispetto a (ξ, η). Stiamo tenendo fissato z_0. La funzione inversa dipende dunque da z_0: possiamo scrivere $x = x(\xi, \eta, z_0)$, $y = y(\xi, \eta, z_0)$. Per continuità ciò vale anche per z vicino a z_0, quindi otteniamo $x = x(\xi, \eta, z)$, $y = y(\xi, \eta, z)$. Scegliendo ora $(\xi, \eta) = (0, 0)$ troviamo $x = x(z), y = y(z)$.

Una dimostrazione formalmente più completa consiste nel definire la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (f(x, y, z), z)$. E' chiaro che (nelle ipotesi precedenti) dF è invertibile in p, dunque F stessa è invertibile: $x = x(\xi, \eta, z)$, $y = y(\xi, \eta, z)$, $z = z$. Scegliendo come sopra $(\xi, \eta) = (0, 0)$, troviamo il risultato voluto. Questa dimostrazione mette in evidenza anche il fatto che $x(z)$, $y(z)$ sono C^∞.

Osservazione. Nel caso $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ appena presentato, $f^{-1}(0, 0)$ risulta essere una curva parametrizzabile $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$. Possiamo alternativamente descriverla come intersezione delle superfici di livello delle due componenti (ξ, η) di f: $\mathcal{C} = \xi^{-1}(0) \cap \eta^{-1}(0)$. Da questo punto di vista, l'ipotesi iniziale su df è equivalente al fatto che le due superfici sono trasverse, ossia $\nabla\xi(p)$, $\nabla\eta(p)$ sono linearmente indipendenti.

Analisi su superfici parametrizzabili. Il nostro scopo è di mostrare che tali definizioni ci permettono di estendere tutte le classiche nozioni dell'Analisi matematica dal piano alle superfici. Considerato che, in questa fase, le superfici trattate non sono enti astratti ma sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, ci sono due modi per farlo.

- Approccio estrinseco: sfruttiamo l'immersione di S in $\mathbb{R}^3$ e la teoria nota in $\mathbb{R}^3$. L'ingrediente centrale consisterà nel mostrare che dati su S sono estendibili ad intorni aperti in $\mathbb{R}^3$, in modo da poter usare l'Analisi usuale.
- Approccio intrinseco: sfruttiamo le parametrizzazioni per ricondurci alla teoria nota in $\mathbb{R}^2$. L'ingrediente centrale consisterà nel mostrare che ogni nozione è indipendente dalla particolare parametrizzazione scelta.

L'approccio estrinseco garantisce piena compatibilità tra ciò che facciamo su S e ciò che facciamo nello spazio circostante. L'approccio intrinseco diventerà fondamentale in futuro, quando tratteremo superfici, più generalmente varietà , astratte (ossia non immerse a priori in uno spazio più grande).

Elaboreremo qui ambo punti di vista, spiegando in particolare in che senso sono equivalenti. Per quanto riguarda l'approccio estrinseco, ci baseremo sul seguente fatto fondamentale.

Proposizione 6.5 *Sia $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata. Per ogni $p = \phi(\bar{u}, \bar{v})$, esiste un intorno aperto $V_p \subseteq \mathbb{R}^3$ di p, un intorno aperto $U_{(\bar{u},\bar{v})} \subseteq \mathbb{R}^2$ di $(\bar{u}, \bar{v})$ e un diffeomorfismo $\Phi : U_{(\bar{u},\bar{v})} \times (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che Φ estenda ϕ.*

La dimostrazione inizia individuando la sottomatrice 2x2 invertibile nella matrice che rappresenta $d\phi_{(\bar{u},\bar{v})}$. Supponiamo per esempio che sia $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$. Definiamo allora $\Phi(u, v, t) := \phi(u, v) + (0, 0, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$: sostanzialmente, al variare di t stiamo variando l'altezza della superficie iniziale. Applicando il teorema della funzione inversa al punto $(\bar{u}, \bar{v}, 0)$ troviamo che Φ è un diffeomorfismo locale. Estende ϕ per costruzione.

Osservazione: L'idea è chiara: lo stesso ragionamento ci aveva permesso di rappresentare la superficie come grafico di $f = f(x, y)$. Ora la inseriamo in una famiglia di superfici della forma $f(x, y) + t$. Il punto è che, stavolta, non cambiamo coordinate per esplicitare tale funzione: l'enunciato riguarda le variabili scelte inizialmente.

Notazione: Molto spesso, per non perderci nel dettaglio dei dominii di definizione, scriveremo semplicemente che un tale diffeomorfismo è una mappa locale $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

In sostanza questa proposizione mostra che l'appiattimento di una superficie in $\mathbb{R}^3$ su un dominio di $\mathbb{R}^2$, garantito da ϕ^{-1}, può essere esteso ad un diffeomorfismo (locale) $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Tale diffeomorfismo ci permette per esempio di estendere qualunque funzione da S ad $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f : S \to \mathbb{R} &\rightsquigarrow f \circ \phi : U \to \mathbb{R} \\ &\rightsquigarrow \bar{f}(u, v, t) := f \circ \phi(u, v) : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R} \\ &\rightsquigarrow F(x, y, z) := \bar{f} \circ \Phi^{-1}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il fatto contrario, ossia che ogni funzione su $\mathbb{R}^3$ si può restringere a S, è invece ovvio. Si noti che la nostra estensione dipende dalla parametrizzazione scelta, dunque esistono infinite estensioni.

Una costruzione analoga ci permette di estendere mappe $f : S_1 \to S_2$ tra superfici parametrizzate a mappe (locali) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Funzioni differenziabili. Consideriamo il concetto di funzione o mappa differenziabile. Può risultare utile distinguere due casi: (i) quelle uscenti da S, ossia aventi S (o un suo sottoinsieme aperto) come dominio, (ii) quelle entranti, la cui immagine è contenuta in S. Nel primo caso forse risulta più naturale l'approccio intrinseco, nel secondo l'approccio estrinseco. In ogni caso, vogliamo far vedere che, in ambo i casi, sono possibili entrambi approcci e che danno lo stesso risultato. I dettagli varianno leggermente a seconda della specifica tipologia di mappa considerata. Diamo qualche esempio indicativo.

Definizione 6.6 *Sia S una superficie parametrizzabile. Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile se:*

- *Approccio estrinseco: esiste una sua estensione locale F (ottenuta per esempio come sopra) che è differenziabile nel senso usuale.*
- *Approccio intrinseco: data una parametrizzazione ϕ, la funzione composta $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile nel senso usuale.*

La prima definizione non richiede particolari accortezze. La seconda introduce invece un dato addizionale: la scelta della parametrizzazione. Bisogna dunque verificare che tale definizione è ben posta, ossia indipendente da tale scelta. La verifica è semplice: se cambiamo variabili in $\mathbb{R}^2$, la funzione $f \circ \tilde{\phi}$ è differenziabile sse lo è $f \circ \phi$.

Dimostriamo ora che le due definizioni sono equivalenti. Supponiamo che F sia differenziabile. Allora $F \circ \phi$ è differenziabile grazie alla teoria usuale, e questa mappa coincide con $f \circ \phi$. Viceversa, supponiamo che $f \circ \phi$ sia differenziabile su U. Allora anche la sua estensione $\bar{f}(u, v, t)$ è differenziabile, e quindi lo è $F = \bar{f} \circ \Phi^{-1}$.

Osservazione. C'è un po' di ridondanza nelle verifiche sopra. Sapendo per esempio che le due definizioni sono equivalenti e che la prima è ben posta, otteniamo gratis che anche la seconda lo è . D'altra parte, in futuro avremo a disposizione solo la definizione intrinseca e quindi conviene abituarsi fin da subito a trattare ciascuna in modo autonomo.

Esempio. Ogni $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ristretta ad una superficie parametrizzabile S, dà una funzione differenziabile $f : S \to \mathbb{R}$. Dal punto di vista estrinseco il motivo è che possiamo scegliere proprio F come estensione di f. Dal punto di vista intrinseco basta notare che $f \circ \phi = F \circ \phi$.

Consideriamo ora un semplice caso entrante: una curva $\alpha : (a, b) \to S$.

Definizione 6.7 *Sia S una superficie parametrizzabile. Una mappa $\alpha : (a,b) \to S$ si dice differenziabile se:*

- *Approccio estrinseco: la stessa mappa, vista ora come $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, è differenziabile nel senso usuale.*
- *Approccio intrinseco: la mappa $\phi^{-1} \circ \alpha : (a,b) \to U$ è differenziabile nel senso usuale.*

Al solito, è semplice mostrare che la seconda definizione è indipendente da un cambiamento di variabili.

Per quanto riguarda l'equivalenza, se $\alpha : (a,b) \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ è differenziabile allora $\phi^{-1} \circ \alpha$ è differenziabile perchè restrizione della composizione $\Phi^{-1} \circ \alpha$. Viceversa, se $\phi^{-1} \circ \alpha$ è differenziabile, allora $\alpha = \phi \circ (\phi^{-1} \circ \alpha)$ è differenziabile.

Più in generale, le stesse idee forniscono la definizione (anzi: due definizioni equivalenti) di mappe differenziabili $f : S_1 \to S_2$ tra superfici parametrizzabili. Lasciamo i dettagli al lettore.

A questo punto possiamo chiederci se continua a valere il fatto, noto nell'Analisi usuale, che la composizione di funzioni differenziabili è differenziabile. La risposta è sì . Consideriamo per esempio il caso di composizioni della forma $g \circ f$, dove $f : S_1 \to S_2$ e $g : S_2 \to S_3$: basta applicare la definizione intrinseca a $g \circ f = (g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f)$. Lasciamo la dimostrazione estrinseca al lettore.

Definizione 6.8 *Una mappa $f : S_1 \to S_2$ è un diffeomorfismo se è differenziabile, invertibile, con inversa differenziabile. In tal caso diciamo che S_1, S_2 sono diffeomorfi.*

Per esempio, ϕ è differenziabile e, con la definizione intrinseca, anche $\phi^{-1} : S \to U$ è differenziabile perchè $\phi^{-1} \circ \phi = Id$. Possiamo concludere che S è diffeomorfo all'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Intuitivamente, due superfici diffeomorfi sono perfettamente uguali dal punto di vista analitico (ma non necessariamente metrico).

Spazio tangente e differenziale. Il prossimo passo sarà definire il concetto di differenziale di una funzione o mappa differenziabile. La nozione di piano tangente fornisce il supporto adeguato. Al solito ci sono due punti di vista ma, diversamente da sopra, in questa fase introdurremo solo l'approccio estrinseco, più semplice. Vedremo l'approccio intrinseco più avanti, parlando di varietà astratte.

Definizione 6.9 *Sia S una superficie parametrizzabile e ϕ una sua parametrizzazione. Sia $p \in S$, $p = \phi(\bar{u}, \bar{v})$. Il piano tangente a S in p è il sottospazio $T_pS \leq \mathbb{R}^3$ ottenuto come immagine dell'applicazione lineare $d\phi_{|(\bar{u},\bar{v})} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.*

Osservazione. Per definizione, T_pS è un piano passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$. È dunque uno spazio vettoriale, con l'operazione di somma indotta da $\mathbb{R}^3$. Alternativamente, a volte si intende per T_pS il sottospazio affine ottenuto traslando tale piano in modo che passi per il punto p. Questo punto di vista evidenzia meglio la relazione con S ma ha il difetto di rendere meno naturale la nozione di somma. In questo caso bisogna infatti usare l'operazione $(p+v)+(p+w) := p+v+w$. I due spazi diventano così isomorfi.

È importante notare che il piano tangente è invariante rispetto ad un cambiamento di variabili: ciò segue dal fatto che $d\tilde{\phi} = d\phi \circ d(u,v)$, per cui cambiare parametrizzazione comporta semplicemente una composizione, a sinistra, rispetto ad un isomorfismo di $\mathbb{R}^2$: questo non modifica la sua immagine.

Osservazione. È ragionevole considerare questa definizione estrinseca, perchè produce T_pS non come spazio vettoriale astratto, ma come sottospazio dell'ambiente $\mathbb{R}^3$.

Per quanto riguarda il differenziale, illustriamo solo il caso di mappe lasciando l'analogo, ma più semplice, caso delle funzioni al lettore.

Definizione 6.10 *Sia $f : S_1 \to S_2$ una mappa differenziabile tra superfici parametrizzabili. Sia $p \in S_1$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una estensione (locale) di f in un intorno di p. Il differenziale di f in p è la restrizione della mappa lineare $dF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ agli spazi tangente:*

$$df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2, \quad df_p := dF_{p|T_pS_1}.$$

Il differenziale è lineare per definizione, ma dobbiamo fare due verifiche per mostrare che è ben definito: (i) è indipendente dalla scelta di F, (ii) ha davvero immagine in $T_{f(p)}S_2$.

Per quanto riguarda (i), sia $p = \phi(\bar{u},\bar{v})$ e $v \in T_pS_1$. Per definizione, $v = d\phi_{(\bar{u},\bar{v})}(w)$ per qualche $w \in \mathbb{R}^2$. Scriviamo ora $w = (u'(0), v'(0))$, per qualche curva $(u(t), v(t)) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ con $(u(0), v(0)) = (\bar{u},\bar{v})$. Allora, per definizione di estensione,

$$dF_p(v) = dF_p(d\phi_{(\bar{u},\bar{v})}(w)) = \frac{d}{dt}(F \circ \phi \circ (u(t), v(t)))_{|t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi \circ (u(t), v(t)))_{|t=0},$$

il che dimostra che il valore di $dF_p(v)$ dipende solo da f.

Tale dimostrazione fornisce anche l'idea giusta per dimostrare (ii). Si noti infatti che $\alpha(t) := f \circ \phi \circ (u(t), v(t))$ è una curva con immagine in S_2. Per ottenere il risultato voluto, basta dunque la seguente osservazione.

Proposizione 6.11 *Sia S una superficie parametrizzabile e $p \in S$. Il piano tangente a S in p coincide con l'insieme dei vettori tangenti $\dot{\alpha}(0)$, al variare di tutte le curve parametrizzate $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ tali che $\alpha(0) = p$ e aventi immagine in S.*

Sia infatti $v = d\phi_{(\bar{u},\bar{v})}(w)$. Possiamo allora usare w per generare la curva $(u(t), v(t)) := (\bar{u},\bar{v}) + tw$ in U. Definendo $\alpha(t) := \phi(u(t), v(t))$, troviamo che

$\dot{\alpha}(0) = v$. Viceversa, sia $v = \dot{\alpha}(0)$. Scegliendo allora $w := (\phi^{-1} \circ \alpha)'(0)$, troviamo che $d\phi_{(\bar{u},\bar{v})}(w) = (\phi \circ \phi^{-1} \circ \alpha)'(0) = \dot{\alpha}(0) = v$.

Osservazione. Si noti che esistono infinite curve in S aventi la stessa velocità per $t = 0$. Se diciamo che tali curve sono equivalenti, v rappresenta la classe di equivalenza e il piano tangente è l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Questa caratterizzazione dello spazio tangente è l'inizio del percorso che ci porterà all'approccio intrinseco, ma come visto ha il difetto di nascondere la struttura algebrica dello spazio tangente. Dovremo dunque esaminarla più a fondo.

Orientazione. Sia V uno spazio vettoriale. Data una base $\mathcal{B}$, ogni altra base $\mathcal{B}'$ è riconducibile ad essa tramite la matrice di cambiamento base $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Tale matrice è invertibile, dunque ha determinante diverso da zero. Diremo che le due basi sono equivalenti se il determinante è positivo.

Scegliere una base conduce dunque ad una classe di equivalenza di basi. Supponiamo che $\mathcal{B}'$ non sia equivalente a $\mathcal{B}$. Anche $\mathcal{B}'$ definisce una classe di equivalenza. È semplice mostrare che questi due insiemi di basi sono disgiunti, e che qualunque base appartiene all'una o all'altra. Concludiamo che esistono solo due classi di equivalenza.

Definizione 6.12 *Sia V uno spazio vettoriale. Una orientazione è la scelta di una di queste due classi di equivalenza di basi.*

V si dice allora orientato, e le basi in tale classe si dicono positive.

Esempio. Se uno spazio vettoriale ha una base standard, ha anche una orientazione standard. Ciò accade per esempio per $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, spazi di matrici, etc. Lo spazio V_3 non ha una base standard ma ha un'orientazione standard, definibile tramite la costruzione nota come regola della mano destra. Il piano tangente ad una superficie non ha solitamente nè base nè orientazione standard.

Se V ha dimensione 1, una orientazione su V è un insieme di vettori che differiscono per una costante positiva.

Sia ora W un sottospazio di V. Scegliamo uno spazio supplementare W', ossia $V = W \oplus W'$. A partire da basi $\mathcal{B}$ di W e $\mathcal{B}'$ di W', otteniamo una base di V tramite l'unione $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ (dove i vettori vengono elencati nell'ordine indicato). Ogni orientazione di W e di W' genera dunque una orientazione di V secondo la seguente regola: accostando una base positiva di W ed una positiva di W' otteniamo una base positiva di V.

Osservazione. Questa costruzione generalizza la regola della mano destra in V_3: se dito indice e dito medio generano W, con l'orientazione data da quest'ordinamento, e W' è lo spazio ortogonale con l'orientazione data dal pollice destro, il risultato è l'orientazione standard su V_3.

Viceversa, sia data una orientazione di W e di V. È semplice mostrare che solo una delle due orientazioni di W' riproduce, tramite la stessa regola, l'orientazione di V. Sceglieremo dunque tale orientazione per W'. Si ottiene così il seguente fatto.

Proposizione 6.13 *Siano dati tre spazi vettoriali tali che $V = W \oplus W'$ (in quest'ordine). Ogni orientazione di due di essi genera una orientazione del terzo in modo che valga la regola sopra.*

In particolare: se $V := \mathbb{R}^3$ con l'orientazione standard, orientare un piano $W \leq V$ è equivalente a orientare la sua retta normale, ossia a scegliere un vettore normale (a meno di dilatazioni positive).

Osservazione. Dato $W \leq V$, la discussione sopra sembra dare molta importanza alla specifica scelta di W'. In realtà , se consideriamo due decomposizioni $W \oplus W' = V = W \oplus W''$, la proiezione di V su W'' genera un isomorfismo canonico tra W' e W''. La costruzione sopra è dunque indipendente dalla specifica scelta dello spazio supplementare. In particolare, nel caso $V = \mathbb{R}^3$, la scelta dello spazio $W' := W^\perp$ ed il ruolo della metrica sono irrilevanti.

Il modo migliore per formalizzare la nostra costruzione sarebbe dunque in termini della terna di spazi $V, W, V/W$ anzichè V, W, W', dove V/W denota lo spazio quoziente astratto.

Consideriamo ora una superficie S. Intuitivamente, orientarla corrisponde a scegliere una orientazione per ogni piano tangente, con il vincolo che vorremmo poter trovare, per ogni punto, una base positiva che varii in modo continuo al cambiare del punto. A questo proposito, notiamo che ogni parametrizzazione ϕ di S, sfruttando la base standard di $\mathbb{R}^2$, induce una base $\{\phi_u, \phi_v\}$ per ogni punto $p = \phi(\bar{u}, \bar{v})$: due vettori che, appunto, variano con continuità al variare di $(\bar{u}, \bar{v})$, dunque di p. Ogni parametrizzazione induce dunque una orientazione.

Definizione 6.14 *Diciamo che un diffeomorfismo $(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ tra aperti di $\mathbb{R}^2$ è positivo se, in ogni punto, il suo differenziale preserva l'orientazione standard di $\mathbb{R}^2$, ossia se il determinante del suo differenziale è sempre positivo.*

Diciamo che due superfici parametrizzate sono equivalenti se differiscono per composizione con un diffeomorfismo positivo.

Una superficie parametrizzabile orientata è una classe di equivalenza di superfici parametrizzate. Le parametrizzazioni in tale classe si dicono positive.

Considerato che $\det(d(u, v))$ non può mai annullarsi, l'insieme di tutte le parametrizzazioni contiene solo due classi di equivalenza.

In ogni punto $p \in S$ possiamo anche considerare la retta normale a T_pS. Abbiamo detto che orientare T_pS è equivalente ad orientare tale retta, ossia a scegliere un vettore normale (a meno di dilatazioni positive).

Dal punto di vista delle parametrizzazioni, possiamo riformulare questo fatto come segue.

Proposizione 6.15 *Sia S una superficie parametrizzabile. Orientare S è equivalente a scegliere una mappa differenziabile $N : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $N(p)$ sia un vettore normale non nullo, per ogni $p \in S$.*

Data infatti ϕ possiamo scegliere $N := \phi_u \times \phi_v$. Viceversa, dato un campo differenziabile di vettori normali N non-nulli, possiamo orientare S tramite quelle parametrizzazioni ϕ tali che $\phi_u \times \phi_v = N$ (a meno di dilatazioni positive). Un cambio di coordinate produce infatti il risultato

$$\tilde{\phi}_\xi \times \tilde{\phi}_\eta = \det(d(u,v))(\phi_u \times \phi_v) = \det(d(u,v))N,$$

ossia restituisce N o $-N$ (a meno di dilatazioni positive) precisamente a seconda del segno del determinante del suo differenziale.

Osservazione. Quanto sopra mostra in particolare che ogni superficie parametrizzabile ammette una orientazione. Questo non sarà più vero nel contesto delle superfici regolari.

7 Superfici regolari in $\mathbb{R}^3$

Introdurremo un concetto di superficie più globale, necessitante più superfici parametrizzabili per ricoprirla interamente. Mostreremo che ogni salto da una di queste superfici parametrizzate ad un'altra è riconducibile ad un cambiamento di variabili, permettendoci di riutilizzare tutta la teoria precedente.

La nozione di superficie parametrizzabile non è sufficiente per poter studiare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ quale la sfera. Arriviamo così alla seguente nozione.

Definizione 7.1 *Una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ è un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni $p \in S$, esista un intorno aperto V_p in $\mathbb{R}^3$ tale che $S \cap V_p$ sia una superficie parametrizzabile.*

Una parametrizzazione locale per S è una parametrizzazione di qualche $S \cap V_p$.

Esempio. Ogni superficie parametrizzabile è regolare.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che ogni $p \in f^{-1}(0)$ sia un punto regolare, nel senso del teorema della funzione implicita. Allora, per quel teorema, $S := f^{-1}(0)$ è una superficie regolare. In particolare, sfere ed ellissoidi sono regolari.

Abbiamo visto che ogni curva regolare $t \mapsto (r(t), z(t))$, con $r(t) > 0$, genera una mappa della forma $(t, \theta) \mapsto (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t))$. Restringendo $\theta \in (0, 2\pi)$ la sua immagine è una superficie parametrizzabile. Se invece $\theta \in \mathbb{R}$ la sua immagine è una superficie regolare.

Un'osservazione fondamentale riguardante le superfici regolari è che lo stesso punto $p \in S$ può appartenere a due intorni $V_p, \tilde{V}_p$ tali che sia $S \cap V_p$ sia $S \cap$

$\tilde{V}_p$ siano parametrizzabili. Siano $\phi : U \to S \cap V_p$ e $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to S \cap \tilde{V}_p$ due parametrizzazioni. In tal caso risulta definita una mappa

$$\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}((S \cap V_p) \cap (S \cap \tilde{V}_p)) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \tilde{\phi}^{-1}((S \cap V_p) \cap (S \cap \tilde{V}_p)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

tra aperti del piano. Questa mappa è ben definita e 1:1 per costruzione. La teoria precedente ci permette di asserire che si tratta di una composizione di mappe differenziabili, dunque è differenziabile. Possiamo dimostrare allo stesso modo che la sua inversa è differenziabile.

Definizione 7.2 *Sia S una superficie regolare. Chiameremo mappa di transizione qualunque mappa $\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi$ costruita nel modo sopra, a partire da due parametrizzazioni diverse.*

Quanto detto dimostra che ogni mappa di transizione è un diffeomorfismo del piano, ossia un cambiamento di variabili nel senso già visto. Date due parametrizzazioni locali, possono allora verificarsi solo due situazioni: o le loro immagini non si intersecano, oppure si intersecano e le due parametrizzazioni sono localmente legate da un cambiamento di variabili.

Analisi su superfici regolari. Considerato che le nozioni di funzione/mappa differenziabile, piano tangente, differenziale sono invarianti per cambiamenti di variabili, possiamo dedurre che si estendono senza problemi anche alle superfici regolari. Come prima, ci sono due approcci. Possiamo per esempio dire che una mappa $f : S_1 \to S_2$ tra superfici regolari è differenziabile se, per ogni punto $p \in S_1$, ammette una estensione differenziabile locale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oppure, equivalentemente, se tutte le composizioni tramite parametrizzazioni della forma $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$ sono differenziabili. Ogni tale mappa genera un'applicazione lineare $df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$, per ogni $p \in S_1$.

Orientabilità . La teoria delle superfici regolari si differenzia da quella delle superfici parametrizzate solo in un punto: l'esistenza di un'orientazione. Il punto è che ogni parametrizzazione genera una orientazione locale, ma bisogna verificare che tali orientazioni coincidono quando si cambia parametrizzazione.

Definizione 7.3 *Una superficie regolare S si dice orientabile se esiste una collezione di parametrizzazioni $\{U_i, V_i, \phi_i\}_{i \in I}$ tale che (i) $S = \cup V_i$, e (ii) tutte le mappe di transizione abbiano differenziale con determinante positivo.*

Esempio. Supponiamo S sia ottenibile, come sopra, tramite una collezione di due sole parametrizzazioni e che l'intersezione $V_1 \cap V_2$ sia connessa (nel senso che vedremo sotto). Allora, a meno di sostituire una delle due parametrizzazioni con la sua riflessione, possiamo supporre che la mappa di transizione soddisfi la proprietà richiesta. Ogni tale S è dunque orientabile. Questo avviene, per esempio, con la sfera.

Come prima, si può dimostrare quanto segue.

Proposizione 7.4 *Sia S una superficie regolare. Orientare S è equivalente a scegliere una mappa differenziabile $N : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $N(p)$ sia un vettore normale non nullo, per ogni $p \in S$.*

Esempio. Supponiamo $S = f^{-1}(0)$, per qualche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che ogni punto $p \in f^{-1}(0)$ sia regolare nel senso del teorema della funzione implicita. Sia $v = \dot{\alpha}(0) \in T_pS$, per qualche curva α in S. Allora $(f \circ \alpha)(t) \equiv 0$, dunque $\nabla f_{|p} \cdot v = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)_{|t=0} = 0$: ciò dimostra che $\nabla f_{|p}$ è normale a T_pS. La mappa $p \mapsto \nabla f_{|p}$ definisce dunque un campo normale mai nullo, e quindi S è orientabile.

Fin qui la situazione appare identica a quella delle superfici parametrizzabili. In realtà , in questo contesto compaiono anche superfici non orientabili; equivalentemente, esistono superfici regolari $S \subseteq \mathbb{R}^3$ per le quali non è possibile generare un campo di vettori normali mai nullo e continuo.

Esempio. Il nastro di Möbius in $\mathbb{R}^3$ (vedi do Carmo sezione 2.6), senza bordo, è una superficie regolare non orientabile.

Le superfici regolari orientabili ammettono la seguente bella caratterizzazione. Per la dimostrazione, rimandiamo a do Carmo 2.7.

Proposizione 7.5 *Una superficie regolare è orientabile sse esiste una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che (i) ogni $p \in f^{-1}(0)$ è regolare nel senso del teorema della funzione implicita, e (ii) $S = f^{-1}(0)$.*

∇(f)lp ≠ 0

In un senso l'abbiamo già dimostrato. Nell'altro, si tratta di trovare un'appropriata estensione della funzione $f = 0$, definita su S, ad un suo intorno aperto. L'idea è di costruire tale estensione lungo ciascuna retta normale (almeno localmente, ossia lungo un segmento): la direzione normale prescelta servirà per decidere su quale lato la funzione estesa sarà positiva. La difficoltà consiste nel dimostrare che, per ogni punto, si può appunto individuare un segmento normale in modo che tali segmenti non si intersechino. Si tratta del problema di individuare un intorno tubolare della superficie: cosa fattibile con tecniche elementari, comunque non banale.

Altro fatto, meno elementare, da tenere presente è il seguente.

Theorem 7.6 *Ogni superficie regolare compatta $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile.*

Vedremo sotto la nozione di compattezza. Forse conviene insistere sul fatto che il nastro di Möbius, menzionato sopra, è tipicamente inteso senza bordo. Se includiamo il bordo il nastro di Möbius diventa compatto ma non è più una superficie regolare, quindi non contraddice il teorema. Diventa, appunto, una superficie-con-bordo, che è una categoria diversa.

L'ultimo problema da affrontare è quante orientazioni possono esistere su una data superficie regolare. Il problema della definizione di orientabilità , formulata sopra, è che ci possono essere infinite collezioni diverse di parametrizzazioni, aventi le proprietà richieste. Per poter confrontare due orientazioni conviene dunque imitare il caso degli spazi vettoriali, in cui fin dall'inizio consideriamo l'insieme di tutte le basi. Analogamente, data una collezione di parametrizzazioni, vogliamo preliminarmente estenderla, includendovi tutte le possibili parametrizzazioni compatibili con quelle date (nel senso che le mappe di transizione abbiano la proprietà sopra). Si noti che in generale può essere fondazionalmente problematico costruire un insieme contenente tutti gli oggetti di un certo tipo. Si può però dimostrare, tramite il lemma di Zorn (fatto fondazionale della teoria degli insiemi, equivalente all'assioma della scelta) che una tale collezione massimale esiste davvero.

Diremo orientazione una collezione massimale di parametrizzazioni compatibili. Posta questa definizione, si può dimostrare che una S orientabile ammette solo due orientazioni distinte.

8 Elementi di topologia generale

Senza uno spazio ambiente in cui crescere, una superficie/varietà non può ereditare nulla: deve farsi da sè . Il primo passo è capire cosa vuol dire assomigliare a $\mathbb{R}^n$*. Nozioni topologiche sono fondamentali anche nella ricerca di soluzioni di problemi di Eulero-Lagrange (massimi, minimi) e in Meccanica Quantistica (operatori continui, spazi completi). Infine, la topologia fornisce il linguaggio giusto per formalizzare costruzioni usate in Analisi Complessa quali la sfera di Riemann o il dominio di definizione di* $\sqrt{z}$*. Dedichiamo dunque un capitoletto a queste tematiche.*

In $\mathbb{R}^n$ i concetti di sottoinsieme aperto e chiuso nascono a partire da una nozione di distanza. Prima definiamo la nozione di palla aperta, poi diciamo che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se, per ogni suo punto $p \in A$, esiste una palla aperta $B(p, r)$, con centro p e raggio r, contenuta in A. Un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto. Su queste basi si costruiscono concetti fondamentali quali continuità , convergenza, limiti, etc., genericamente riassunti nel termine topologia di $\mathbb{R}^n$.

Si noti però che, in questo contesto, essere aperto o chiuso dipende fortemente dall'ambiente prescelto: una palla 2-dimensionale (disco) è un aperto in $\mathbb{R}^2$, ma se immergiamo il piano $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ossia identifichiamo $\{(x, y)\}$ con $\{(x, y, 0)\}$, il disco corrispondente ora non è nè aperto nè chiuso. Più generalmente, le superfici parametrizzabili sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ solitamente nè aperti nè chiusi, ma se le identifichiamo con il dominio di una parametrizzazione allora sono aperti in $\mathbb{R}^2$. Passando invece ad insiemi non contenuti in $\mathbb{R}^n$, possiamo certamente parlare di funzioni ma non è chiaro come definire la continuità . Si rende dunque necessario uno sviluppo più approfondito della teoria per ottenere un concetto di topologia più flessibile, che riguardi l'insieme stesso piuttosto che il mondo che lo contiene: approccio intrinseco. È straordinario quanto poco serve.

Nel definire le nozioni fondamentali, procederemo per gradi. Il livello più rozzo corrisponde, sostanzialmente, all'intuizione di iniziare a organizzare i punti per "bacini di influenza".

Definizione 8.1 *Una topologia su un insieme X è una collezione di sottoinsiemi $\tau = \{A_i \subseteq X\}_{i\in I}$, chiamati aperti, con le seguenti proprietà :*

1. *l'insieme vuoto e l'insieme X sono aperti.*
2. *ogni unione di aperti è un aperto;*
3. *ogni intersezione finita di aperti è un aperto.*

Diremo che (X, τ) è uno spazio topologico.

Una base per τ è un sottoinsieme di aperti tale che ogni altro aperto (non vuoto) sia unione di aperti della base.

Per esempio, gli aperti usuali di $\mathbb{R}^n$ definiscono una topologia su $\mathbb{R}^n$; le palle aperte forniscono una base. Si noti che la scelta degli assiomi imita quanto avviene in $\mathbb{R}^n$. Per esempio, qualunque unione di intervalli aperti in $\mathbb{R}$ è effettivamente un sottoinsieme aperto, ma l'intersezione di una infinità di intervalli aperti, quali $(-1/n, 1/n)$, può non essere aperto.

Come prima, diremo che un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso (per la topologia data) se il suo complementare è aperto.

L'eventuale esistenza di zone "non comunicanti" dentro X corrisponde alla seguente definizione.

Definizione 8.2 *Uno spazio topologico (X, τ) si dice sconnesso se esistono aperti non-vuoti e disgiunti $A, B \in \tau$ tali che $X = A \cup B$.*

In caso contrario, X si dice connesso.

Una delle proprietà fondamentali di questa nozione di topologia è che essa si trasmette facilmente anche ai sottoinsiemi di X: dato per esempio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (con la sua topologia usuale), otteniamo una topologia su X semplicemente definendo come aperti di X i sottoinsiemi $X \cap A_i$. In questo modo otteniamo una topologia su qualunque superficie regolare. Risulta, inoltre, che le due topologie indotte su una superficie parametrizzabile, vista come sottoinsieme prima di $\mathbb{R}^3$ poi (tramite una parametrizzazione ϕ) di $\mathbb{R}^2$, coincidono (nel senso che contengono gli stessi aperti): il motivo è che, secondo la nostra definizione di parametrizzazione, ϕ fornisce un omeomorfismo tra le due topologie, nel senso seguente.

Definizione 8.3 *Siano (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) due spazi topologici. Una funzione $f : X_1 \to X_2$ si dice continua se la retroimmagine di ogni aperto di X_2 è un aperto di X_1. (Equivalentemente: la retroimmagine di ogni chiuso di X_2 è un chiuso di X_1).*

Una funzione f si dice omeomorfismo se è continua, invertibile, con inversa continua. In tal case i due spazi topologici si dicono omeomorfi.

Intuitivamente, dal punto di vista topologico, due spazi omeomorfi sono perfettamente uguali dal punto di vista topologico (ma non necessariamente da punti di vista più raffinati, quali quello differenziale o metrico).

È semplice dimostrare che, per controllare la continuità , basta controllare cosa succede per gli aperti di una base di X_2. Ne consegue, per esempio, che per controllare la continuità di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ basta dimostrare che la retroimmagine di una palla di raggio ϵ in $\mathbb{R}^k$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, ossia che per ogni punto della retroimmagine esiste una palla aperta di raggio δ completamente contenuta nella retroimmagine: ci siamo dunque ricondotti alla definizione usuale, usata in Analisi.

Abbiamo visto che la nozione astratta di prodotto scalare amplia enormemente i nostri orizzonti anche per $\mathbb{R}^n$: su ogni spazio vettoriale esistono infiniti prodotti scalari. Lo stesso accade con la nozione astratta di topologia: su ogni insieme X sono in generale possibili infinite topologie. Come già detto, l'intuizione è che la topologia governa le interazioni tra singoli punti. Cambiare topologia corrisponde a riassemblare il tessuto in modo diverso. Diamo qualche esempio.

Esempi. Sia $X = \mathbb{R}^n$.

La topologia più comunemente usata è quella descritta sopra, costruita tramite la distanza standard.

Una seconda topologia possibile è la cosiddetta topologia discreta, che denoteremo τ_∞: ogni sottoinsieme è definito aperto. In tal caso una base è data dai singoli punti: il tessuto si è totalmente polverizzato, ogni punto è indipendente dagli altri. Con questa topologia, ogni funzione $f : (\mathbb{R}^n, \tau_\infty) \to (X, \tau)$ risulta continua. Questa scelta penalizza invece le funzioni $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}^n, \tau_\infty)$, per cui la continuità diventa molto più difficile.

All'estremo opposto troviamo invece la cosiddetta topologia grossolana, che denoteremo τ_0: gli unici aperti sono $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$. Cone questa topologia, le funzioni $f : (\mathbb{R}^n, \tau_0) \to (X, \tau)$ non sono quasi mai continue, mentre lo sono tutte quelle $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}^n, \tau_0)$.

Un'altra topologia su $\mathbb{R}$ (analogamente, $\mathbb{R}^n$) ha come base la collezione dei seguenti insiemi: (i) quelli della forma (a, b) che non includono i punti $0, 1$; (ii) quelli della forma $(a, 0) \cup \{1\} \cup (0, b)$; (iii) quelli della forma $(a, 1) \cup \{0\} \cup (1, b)$. L'effetto finale è uno spazio omeomorfo ad $\mathbb{R}$ (con la sua topologia standard), ma in cui i punti 0 e 1 compaiono in posizione scambiata.

Osservazione. È chiaro che giochi del genere si possono fare su qualunque insieme. In particolare, su ogni X possiamo definire sia la topologia grossolana sia la topologia discreta.

Una formalizzazione concreta di tale intuizione arriva tramite la seguente nozione, che inizia a dirigere la nostra attenzione verso i singoli punti.

Definizione 8.4 *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $x \in X$. Un intorno (aperto)* *di x è un sottoinsieme aperto contenente x.*

Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Il punto $x \in X$ si dice aderente a Y se ogni suo intorno ha intersezione non-vuota con Y.

Ogni punto di Y è aderente ad Y. I punti aderenti al disco aperto in $\mathbb{R}^2$ formano il disco chiuso. L'insieme di tutti i punti aderenti ad un sottoinsieme Y si chiama chiusura, indicata con $\bar{Y}$. Arriviamo così alla seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi.

Proposizione 8.5 *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso sse coincide con l'insieme di tutti i suoi punti aderenti, ossia $C = \bar{C}$.*

Avremo bisogno anche della nozione seguente.

Definizione 8.6 *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un ricoprimento aperto di X è una collezione di aperti $A_i \in \tau$ tale che $X = \cup A_i$.*

Il sottoinsieme X stesso fornisce un possibile ricoprimento. Di solito, però , la scelta di un ricoprimento serve per suddividere X in pezzi più semplici, legati tra loro dalle loro reciproche intersezioni. Per esempio, la definizione stessa di superficie regolare determina un ricoprimento aperto tramite intorni $S \cap V_p$, al variare di p. Ogni tale aperto è controllabile tramite la parametrizzazione corrispondente, mentre le mappe di transizione controllano cosa succede sulle intersezioni.

Osservazione. Sia dato un insieme X ed una collezione di sottoinsiemi $\{X_i\}$ aventi l'unica proprietà che la loro unione è X, ossia di essere un ricoprimento (insiemistico) di X. Consideriamo la collezione σ di tutti i sottoinsiemi ottenibili come intersezioni finite degli X_i, poi la collezione τ di tutte le possibili unioni (incluso $\emptyset$) di elementi di σ. La collezione τ è allora una topologia su X. Si dice che τ è generata dalla collezione $\{X_i\}$, che viene chiamata prebase. La collezione σ è invece una base per τ, nel senso già visto.

Per esempio, se $X = \mathbb{R}$ la collezione di tutte le semirette (a, ∞) e (∞, a) è una prebase per la topologia usuale; la base σ è la collezione di tutti gli intervalli aperti.

Esempio. La topologia fornisce il contesto e linguaggio giusto per formalizzare costruzioni di taglia/incolla, o in cui si aggiunge un punto all'infinito, tipiche dell'Analisi complessa. Basta indicare quali sono gli intorni aperti dei punti su cui operiamo tale costruzione. Aggiungendoli agli intorni usuali dei punti restanti si ottiene una prebase, dunque una topologia. Consideriamo per esempio la costruzione della sfera di Riemann. Il punto di partenza è l'unione $X := \mathbb{C} \cup \{p\}$. A questo insieme diamo la topologia generata dalla prebase formata da tutte gli aperti di $\mathbb{R}^2$ e da tutti i sottoinsiemi della forma $\{|z| > R\} \cup \{p\}$. La nozione di successione, trattata sotto, aiuta a formalizzare l'idea che p corrisponde ad un "punto all'infinito". In alternativa, possiamo trovare un omeomorfismo tra questo spazio e la sfera usuale in $\mathbb{R}^3$, tramite proiezione stereografica: in tal caso, p corrisponde al punto di proiezione.

Successioni e limiti. La topologia generale è un mondo immenso (e spesso paludoso). Per andare avanti scegliamo come filo conduttore le nozioni di successione, convergenza e limite: nozioni d'interesse sia per il fatto che, finalmente, hanno come protagonisti i singoli punti e le relazioni tra loro, sia per le loro applicazioni, sia come introduzione a varie particolarità degli spazi topologici.

Definizione 8.7 *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico e* $x \in X$*. Una successione* $\{x_n\} \subseteq X$ *converge a* x *se, per ogni intorno* U *che contiene* x*, esiste un* N *tale che, per ogni* $n > N$*,* $x_n \in U$*. In tal caso* x *si dice limite di* $\{x_n\}$*.*

Osservazione. Uno degli scopi della definizione di topologia è di liberare la nozione di aperto da qualunque nozione di distanza. Analogamente, si noti che abbiamo definito nozioni di convergenza e limite indipendenti da qualunque misurazione quantitativa.

Ecco però che in questo contesto cominciano ad apparire le prime crepe: la nozione di topologia è tanto generale quanto debole. In particolare, non garantisce l'unicità del limite di una successione perchè non garantisce la possibilità di separare punti nel senso menzionato sopra. Si considerino gli esempi seguenti.

Esempio. Sia X l'unione dell'intervallo $(0, 2)$ con un punto extra, che denoteremo $1'$. Consideriamo la collezione di sottoinsiemi data da tutti gli intervalli aperti della forma $(a, b) \subseteq (0, 2)$ e dai sottoinsiemi della forma $(a, 1) \cup \{1'\} \cup (1, b)$. Sia τ la topologia generata da questa collezione. L'effetto finale è una sdoppiatura del punto 1, per cui una successione x_n converge a 1 sse converge anche a $1'$.

Più drasticamente, sia X un qualunque insieme dotato della topologia grossolana $\tau_0 := \{X, \emptyset\}$. Allora ogni successione converge, simultaneamente, ad ogni punto.

Esistono varie nozioni di separabilità . A noi interesserà la seguente.

Definizione 8.8 *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice spazio di Hausdorff se, per ogni due punti* $x_1, x_2 \in X$*, esistono intorni* U_i *di* x_i *tali che* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$*.*

In tal caso si dice anche che vale il secondo assioma di separabilità , tipicamente indicato con T_2*.*

È semplice mostrare che, se vale tale proprietà , allora ogni successione convergente ha limite unico.

Una seconda crepa riguarda il concetto di aderenza. Se una successione è contenuta in Y ed è convergente, allora ogni suo limite è un punto aderente ad Y. In generale non vale però il viceversa. Serve un assioma extra che garantisca la possibilità di controllare la collezione (potenzialmente enorme) di tutti gli intorni di un punto tramite un'infinità al più numerabile, in modo da poter poi costruire una successione convergente al punto d'interesse.

Definizione 8.9 *Uno spazio topologico* (X, τ) *soddisfa il primo assioma di numerabilità se, per ogni suo punto, esiste una collezione numerabile di intorni aperti tale che ogni altro intorno contenga uno di essi.*

Lo spazio soddisfa il secondo assioma di numerabilità se ammette una base numerabile.

Il secondo assioma garantisce anche il primo. A partire dalle collezioni numerabili di intorni garantite dal primo assioma, per ogni punto $x \in X$ possiamo costruire una nuova collezione di intorni $\{A_x^n\}$ aventi la proprieta' aggiuntiva $A_x^{n+1} \subseteq A_x^n$: basta intersecare opportunamente quelli dati. In tal modo otteniamo la seguente caratterizzazione dei punti aderenti, dunque della chiusura di un insieme.

Proposizione 8.10 *Sia X uno spazio topologico soddisfacente il primo assioma di numerabilità e $Y \subseteq X$. Allora $x \in \bar{Y}$ sse è limite di una successione a valori in Y. La chiusura di Y coincide dunque con l'insieme di tutti i possibili punti limite di successioni in Y.*

A partire da questo fatto otteniamo anche una caratterizzazione delle funzioni continue. In generale, una funzione continua $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ tra spazi topologici manda successioni convergenti in successioni convergenti: $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$. Per studiare il problema inverso dobbiamo considerare, dato un chiuso $C \subseteq X_2$, se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1, ossia se contiene tutti i suoi punti aderenti. La nostra caratterizzazione di tali punti ci permette di dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 8.11 *Sia $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ una funzione tra spazi topologici. Supponiamo che (X_1, τ_1) soddisfi il primo assioma di numerabilità . Allora f è continua sse è continua per successioni, nel senso seguente: per ogni successione $\{x_n\}$ in X_1, $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$.*

Osservazione. Essenzialmente, il primo assioma di numerabilità ci permette di riportare questioni topologiche di carattere molto generale a questioni riguardanti successioni.

È bene sottolineare un aspetto cruciale di quanto discusso fin qui: data una successione $\{x_n\}$, ci siamo interessati al comportamento della successione per intero. In particolare, abbiamo ragionato su posizione e unicità di eventuali limiti di tale successione. Altra cosa è l'esistenza del limite. Tanti risultati di Analisi (dunque in Fisica), riguardanti l'esistenza di punti di massimo/minimo (dunque trovare soluzioni di equazioni differenziali legati a problemi variazionali), si basano sulla possibilità di dimostrare che certe successioni convergono. Questo problema necessita di un esame più raffinato, come segue.

Come già detto, nella topologia grossolana ogni successione è convergente, ossia i limiti esistono sempre. Questa situazione è però da intendersi come una manifestazione della particolare perversità di quella topologia. Nella maggior parte degli spazi topologici non è possibile sperare in una situazione simile: basti pensare alla successione numerica $x_n := (-1)^n$ in $\mathbb{R}$ (con la topologia standard). Una migliore comprensione di questa situazione richiede l'esame delle (infinite) sottosuccessioni di $\{x_n\}$. Tipicamente, sottosuccessioni diverse di una successione data esibiranno comportamenti diversi.

Esempio. Nel caso $\{x_n\} := (-1)^n$ troviamo 3 tipologie di sottosuccessioni.

(i) Sottosuccessioni che (da un certo punto in poi) contengono solo indici pari: convergono al punto $+1$.

(ii) Sottosuccessioni che (da un certo punto in poi) contengono solo indici dispari: convergono al punto -1.

(iii) Sottosuccessioni che oscillano per sempre tra indici pari e indici dispari: non convergono.

Definizione 8.12 *Data una successione $\{x_n\}$, l'insieme costituito da tutti i punti limite di tutte le sue sottosuccessioni si chiama insieme limite di $\{x_n\}$.*

Tale insieme ci fornisce informazioni cruciali sul comportamente della successione.

Mettendo insieme queste considerazioni, in generale il meglio che si possa auspicare (e per molte applicazioni già basta) è che ogni successione converga parzialmente, nel senso seguente.

Definizione 8.13 *Uno spazio topologico (X, τ) si dice compatto (per successioni) se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente.*

In tal caso, a forza di iterativamente estrarre sottosuccessioni, l'insieme limite di una successione $\{x_n\}$ ci dà informazioni sostanzialmente complete sul suo comportamento.

Capita spesso di lavorare in spazi topologici non compatti, ma di restare confinati in un sottoinsieme. Risulta allora importante osservare che, secondo la definizione sopra, un sottoinsieme $K \subseteq X$ è compatto (rispetto alla topologia indotta) se ogni successione a valori in K ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di K. Una volta che abbiamo individuato uno spazio compatto, ne troviamo facilmente molti altri: ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Esempio. $\mathbb{R}^n$ con la topologia standard, per esempio, non è compatto. Dentro $\mathbb{R}^n$ sono compatti tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, invece, l'insieme $\{\|x\| \leq 1\}$ è chiuso e limitato ma non compatto.

Applicazioni. Il concetto di spazio compatto ha numerose applicazioni.

1. In Analisi, se ci accorgiamo che il nostro spazio è compatto possiamo garantire che una funzione continua abbia massimo e minimo.

2. Se uno spazio non è compatto può risultare molto utile compattificarlo, nel modo già visto per la sfera di Riemann, aggiungendo tutti i punti limite necessari. Questo procedimento capita spesso in Geometria. Consideriamo per esempio l'insieme di tutte le iperboli nel piano. Dotando tale collezione di una topologia opportuna, possiamo formalizzare l'idea che certe successioni di iperboli, quali $xy = 1/n$, stanno convergendo a qualcosa che non appartiene all'insieme iniziale. Conviene allora aggiungere all'insieme dato anche l'oggetto

$xy = 0$: tale oggetto limite ci fornisce una descrizione concreta della degenerazione di quelle iperboli. In sostanza, la nozione di compattificazione serve allora a meglio descrivere il possibile comportamento degli oggetti sotto studio.

Achtung! Questa nozione di compattezza è tipicamente utile solo in spazi che soddisfano il primo assioma di numerabilità (che permette di costruire successioni opportune) ed il secondo assioma di separazione (che dà l'unicità del limite). In questo contesto, per esempio, si può dimostrare che ogni compatto è chiuso.

Esistono anche altre nozioni di compattezza, indipendenti dal concetto di successione e non sempre equivalenti a questa. La più comune è la seguente: uno spazio si dice compatto (rispetto ai ricoprimenti) se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un ricoprimento finito. Questa nozione ha varie ottime proprietà e applicazioni anche in spazi topologici molto generali.

Se davvero siamo interessati alla convergenza di una successione data, studiare la compattezza dell'ambiente in cui vive ovviamente non basta. Serve un criterio di convergenza, che sia alternativo rispetto alla semplice definizione.

La soluzione si colloca nel seguente contesto.

Topologie e distanze. L'esempio di $\mathbb{R}^n$, dotato della sua topologia usuale, mostra l'interesse ad intrecciare concetti topologici con altri di carattere metrico, per ottenere spazi topologici ben controllati e senza perversioni.

Definizione 8.14 *Una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice distanza se*

1. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$.
2. $d(x_1, x_2) \geq 0$, *con* $d(x_1, x_2) = 0$ *sse* $x_1 = x_2$.
3. $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$, *per ogni* x_3.

In tal caso (X, d) si dice spazio metrico.

Definizione 8.15 *Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice limitato se esiste $M > 0$ tale che, per ogni $y_1, y_2 \in Y$, $d(y_1, y_2) < M$.*

In uno spazio metrico possiamo definire la nozione di palla aperta esattamente come in $\mathbb{R}^n$, e quindi ottenere una topologia corrispondente. Per esempio, ogni varietà differenziabile M ammette una metrica Riemanniana, dunque una distanza, e la topologia indotta coincide con quella di M.

Topologie costruite in questo modo hanno proprietà molto migliori delle topologie generiche. Per esempio:

1. Vale l'assioma T_2.
2. Vale il primo assioma di numerabilità .
3. Le due nozioni di compattezza menzionate sopra coincidono.
4. Ogni sottoinsieme compatto è chiuso e limitato.

5. Ogni successione $\{x_n\}$ convergente ha la seguente proprietà : per ogni ϵ esiste N tale che, per ogni $n, m > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Più in generale, ogni tale successione si dice di Cauchy. Possiamo finalmente portare alla luce una classe di spazi dotati anche di un criterio generale di convergenza per successioni.

Definizione 8.16 *Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy converge.*

Gli spazi vettoriali di Banach e di Hilbert sono, per definizione, completi rispetto alla distanza costruita usando la norma: $d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|$. In particolare, $\mathbb{R}^n$ è completo. Molti spazi funzionali (C^k, $C^{k,\alpha}$, Sobolev, etc.) sono completi (rispetto alla norma giusta).

Altri esempi arrivano dal seguente risultato.

Proposizione 8.17 *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $C \subseteq X$ chiuso. Allora C è completo.*

Sia infatti $\{c_n\}$ una successione di Cauchy in C. Allora è una successione di Cauchy anche in X, quindi ammette un limite x. Tale punto risulta aderente a C, dunque contenuto in C.

In particolare, i compatti di X sono talvolta facilmente riconoscibili: per esempio, in varietà Riemanniane complete o in spazi di Banach o Hilbert che abbiano dimensione finita, un sottoinsieme K è compatto sse è chiuso e limitato.[4] Per tali sottoinsiemi, dunque, data una successione sappiamo non solo di poter estrarre sottosuccessioni convergenti, ma abbiamo anche un buon criterio di convergenza per l'intera successione.[5]

Osservazione. Se uno spazio metrico (X, d) contiene un sottoinsieme $Y \subseteq X$ numerabile denso, ossia $\bar{Y} = X$, allora come spazio topologico X soddisfa anche il secondo assioma di numerabilità . Questo succede, per esempio, per $X := \mathbb{R}^n$ con la metrica standard.

9 Varietà

Come premio per la fatica precedente, diamo subito la nozione di varietà topologica e differenziabile, in particolare di superficie astratta, completando così la nostra presentazione della teoria differenziale.

[4] Future versions might prove this. Also: mention link to Hopf-Rinow.

[5] Cute example: $(0, \infty)$ and $\mathbb{R}$ are diffeomorphic but not isometric, because only the latter is complete.

Varietà topologiche. Intuitivamente, una varietà topologica è uno spazio topologico modellato (localmente, non necessariamente globalmente) su $\mathbb{R}^n$. Tale intuizione viene formalizzata come segue.

Definizione 9.1 *Sia M uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, che soddisfa il secondo assioma di numerabilità .*[6]

Una carta su M è una terna (U, V, ϕ) tale che U sia aperto in $\mathbb{R}^n$, V aperto in M e $\phi : U \to V$ un omeomorfismo. Un atlante è un ricoprimento di M tramite carte.

Segue dalla definizione che, se due carte (U_1, V_1, ϕ_1) e (U_2, V_2, ϕ_2) sono tali che $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, allora la mappa

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \phi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

è un omeomorfismo, chiamata mappa di transizione tra le due carte. D'ora in poi spesso tralasceremo di indicare il dominio preciso di definizione di tali mappe.

La definizione non richiede che l'atlante contenga tutte le possibili carte su M: solo abbastanza carte per ricoprirla. Si può però dimostrare, tramite il lemma di Zorn che un tale atlante massimale esiste davvero. Usare questo atlante evita problemi nel confrontare atlanti contenenti carte diverse.

Definizione 9.2 *Una varietà topologica è il dato di M e di un atlante massimale $\{U_i, V_i, \phi_i\}_{i \in I}$. La dimensione di M è il numero n.*

Quando $n = 1$ si parla di curva topologica astratta. Quando $n = 2$ si parla di superficie topologica astratta.

Su una varietà topologica M si può discutere qualunque nozione topologica: funzioni continue, omeomorfismi, successioni, limiti, etc. In particolare diremo che due varietà topologiche M_1, M_2 sono equivalenti se esiste un omeomorfismo $f : M_1 \to M_2$. Tali varietà hanno necessariamente la stessa dimensione. Non è invece possibile discutere concetti quali differenziabilità , piano tangente, etc.

Esempio. Due segmenti aperti (dotati della topologia usuale, indotta da $\mathbb{R}$), sono sempre omeomorfi: possiamo anzi trovare un omeomorfismo lineare, ossia della forma $ax + b$, tra di essi. Ogni segmento aperto è omeomorfo ad $\mathbb{R}$: possiamo costruire un tale omeomorfismo usando, per esempio, la funzione tan.

Due circonferenze, dotate della topologia indotta da $\mathbb{R}^2$, sono sempre omeomorfe. Un segmento chiuso $[a, b]$ non è una varietà topologica.

Nel tempo si è arrivati ad una classificazione di alcune categorie di varietà topologiche. In dimensione 1 sappiamo che, a meno di omeomorfismi, esistono solo due possibilità : il segmento (0,1) e la circonferenza. Il secondo è compatto, il primo no. In dimensione 2 la lista è più lunga ma comunque nota. Tra le

[6] Future versions should justify second axiom by mentioning partitions of unity and construction of metrics.

superfici compatte troviamo per esempio la sfera, il toro, e tutte le superfici ottenute incollando n tori per avere n buchi.

Osservazione. La struttura particolare delle varietà porta a risultati nuovi anche dal punto di vista topologico. Per esempio, può essere utile eliminare l'ipotesi che M sia connessa, in modo da incorporare più situazioni. In tal caso, risulta che una varietà M è connessa se e solo se è connessa per archi, nel senso che per ogni due punti $p, q \in M$ esiste una funzione continua $\alpha : [0, 1] \to M$ tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.

Varietà differenziabili. L'analoga nozione nel caso differenziabile richiede un passo extra.

Definizione 9.3 *Sia M una varietà topologica. Due carte (U_1, V_1, ϕ_1), (U_2, V_2, ϕ_2) appartenenti all'atlante massimale di M sono differenziabilmente compatibili se $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oppure la corrispondente mappa di transizione $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ è un diffeomorfismo.*

Un atlante differenziabile è un ricoprimento di M tramite carte differenziabilmente compatibili.

Per definizione, un atlante differenziabile è un sotto-insieme di carte appartenti all'atlante topologico di M. Il lemma di Zorn assicura l'esistenza di un atlante differenziabile massimale.

Definizione 9.4 *Una varietà differenziabile è il dato di una varietà topologica M e di un atlante differenziabile massimale.*

Il punto cruciale di questa definizione è che la nozione di varietà è data indipendentemente da qualunque spazio più grande. Questo fatto è da intendersi come la liberazione da ogni costrizione esterna: ci permetterà non solo di capire meglio la struttura interna della varietà stessa, piuttosto che la sua compatibilità con un'altra, ma di immaginare superfici non realizzabili dentro $\mathbb{R}^3$.

Esempio. La nostra discussione delle superfici regolari dimostra che ogni superficie regolare S puo' essere vista come superficie astratta: la definizione stessa genera un atlante $\{(U_p, S \cap V_p, \phi_p)\}_{p \in S}$, e abbiamo verificato che le mappe di transizione sono diffeomorfismi. Fondamentalmente, tale descrizione riproduce S dimenticandosi di $\mathbb{R}^3$.

Osservazione. La definizione lascia aperta la possibilità che lo stesso atlante massimale topologico contenga vari atlanti massimali differenziabili distinti. Questo in effetti può accadere, ottenendo strutture così dette esotiche sulla stessa varietà . Tutto ciò che riguarda la topologia di tali varietà differenziabili sarà comune, ma ognuna avrà la propria classe di funzioni differenziabili, campi vettoriali, etc. È una tematica assai delicata e complessa, che non approfondiremo.

Nota linguistica: In inglese il termine corrispondente a varietà è manifold. Il termine variety viene riservato ad un concetto analogo nell'ambito della geometria algebrica, dove però ci si restringe a lavorare solo con polinomi, anzichè con mappe differenziabili, e tipicamente si ammettono anche oggetti con singolarità : coni, cuspidi, etc.

Analisi su varietà differenziabili. Per quanto appena detto, per costruire la teoria non possiamo cercare scorciatoie estrinseche. L'unica opzione a disposizione è quella intrinseca. In parte la conosciamo già .

Definizione 9.5 *Una mappa $f : M_1 \to M_2$ è differenziabile se, per ogni $p \in S_1$, esistono carte (U_1, V_1, ϕ_1) e (U_2, V_2, ϕ_2) con $p \in V_1$ e $f(p) \in V_2$ tali che $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1$ sia differenziabile.*

Questa definizione è indipendente dalla scelta di carte. Contiene in sè tutti i casi d'interesse: $f : M \to \mathbb{R}^n$, $f : (a, b) \to M$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, etc.

Costruire le nozioni di piano tangente e differenziale, che avevamo visto solo nel caso estrinseco, richiede invece uno sforzo nuovo. Il punto di partenza è l'idea, già incontrata, che i vettori tangenti in $p \in M$ possono essere realizzati tramite curve differenziabili $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Avendo appena definito cosa sono tali curve, vorremmo ora rovesciare questa costruzione usando le curve per definire i vettori. Ciò però comporta molteplici difficoltà . Non ha senso definire semplicemente $v := \dot{\alpha}(0)$, perchè tale derivata non risulta ancora definita. Peraltro, ci aspettiamo che ad ogni vettore corrispondano più curve: serve dunque una nozione di equivalenza. Infine, non avendo una nozione di somma su M, non è ancora chiaro quale sarebbe la struttura di spazio vettoriale su tali vettori/classi di curve.

Come spesso succede, per arrivare alla soluzione più utile, efficiente ed elegante conviene aumentare il grado di astrazione: dall'alto si vede meglio. Adotteremo un nuovo punto di vista: non più geometrico ma analitico. Analysis rules.

Definizione 9.6 *Sia M una varietà differenziabile e $p \in M$. Due funzioni $f, g : M \to \mathbb{R}$ si dicono equivalenti se esiste un intorno U di p tale che $f_{|U} = g_{|U}$. Una tale classe d'equivalenza $[f]$ si chiama germe di funzione differenziabile in p. L'insieme di tali germi si indica con C_p^∞.*

L'insieme C_p^∞ ha una naturale struttura di algebra, indotta da quella usuale sulle funzioni: $[f] + [g] := [f + g]$, $\lambda[f] := [\lambda f]$, $[f][g] := [fg]$.

Definizione 9.7 *Sia M una varietà differenziabile e $p \in M$. Una derivazione in p è un'applicazione lineare $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ con la seguente proprietà aggiuntiva (regola di Leibniz): $D([fg]) = g(p)D([f]) + f(p)D([g])$.*

La regola di Leibniz imita la nota regola per la derivata di un prodotto di funzioni. Più in generale, in $\mathbb{R}^n$, vale per ogni operatore differenziale lineare del primo ordine.

Esempio. Ogni curva differenziabile $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\alpha(0) = p$, definisce una derivazione in p: $D([f]) := \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)_{|t=0}$. Tale operazione è infatti indipendente dalla scelta di $f \in [f]$ e ha le proprietà richieste. Arriveremo a dimostrare che ogni derivazione è di questa forma. In particolare, su una superficie regolare si ottiene così un isomorfismo canonico tra piano tangente geometrico, definito estrinsecamente, e piano tangente analitico, definito come derivazioni.

Come spazio vettoriale, C_p^∞ è chiaramente infinito-dimensionale: anche solo limitandoci alle funzioni analitiche, infatti, ogni germe deve tenere conto del valore di f e di tutte le sue derivate nel punto p. Ne consegue che anche lo spazio delle applicazioni lineari $C_p^\infty \to \mathbb{R}$ è infinito-dimensionale. Il punto fondamentale è che la proprietà extra che definisce le derivazioni impone un vincolo fortissimo.

Theorem 9.8 (Teorema delle derivazioni) *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $p \in M$. Allora lo spazio vettoriale delle derivazioni in p ha dimensione n.*

Inoltre, ogni derivazione è della forma $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)_{|t=0}$, per qualche curva α.

Dimostreremo il teorema più avanti. Per il momento, notiamo che questo risultato ci permette di associare ad ogni punto $p \in M$ uno spazio vettoriale della dimensione giusta. Ne approfittiamo subito.

Definizione 9.9 *Sia M una varietà differenziabile e $p \in M$. Lo spazio tangente a M in p è lo spazio vettoriale delle derivazioni in p. Lo indichiamo con la notazione T_pM.*

Per dimostrare il teorema dobbiamo approfondire la struttura algebrica di germi e derivazioni. Serve una digressione di algebra lineare.

Dualità e differenziale. La nozione seguente compare in geometria in più situazioni.

Definizione 9.10 *Sia V uno spazio vettoriale. Il suo spazio duale è lo spazio vettoriale*

$$V^* := \{\alpha : V \to \mathbb{R} \quad \textit{lineare}\},$$

dotato della struttura algebrica indotta da $\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)(v) := \alpha(v)+\beta(v)$, $(\lambda\alpha)(v) := \lambda\alpha(v)$.

La relazione tra V e V^* è per definizione molto stretta, ma anche un poco delicata. Per esempio, nel caso finito-dimensionale i due spazi sono isomorfi, ma non in modo canonico. Ci sono almeno due modi per ottenere tali isomorfismi.

1. Ogni base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ induce una base dello spazio duale $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ secondo la seguente definizione: $v_i^*(v_j) := \delta_{ij}$, con estensione lineare a tutto V.

La mappa $v_i \mapsto v_i^*$ induce un isomorfismo $V \to V^*$ che dipende dalla scelta di base.

2. Ogni prodotto scalare su V induce un isomorfismo $V \to V^*$, $v \mapsto (v, \cdot)$ che dipende dalla scelta di prodotto scalare.

Questi due metodi coincidono se V ha un prodotto scalare e scegliamo una base ortonormale. Non essendo isomorfismi canonici, non è corretto pensare che V e V^* siano identificabili.

Anche nel caso infinito-dimensionale può succedere che un prodotto scalare su V induca un isomorfismo con V^*. Ciò succede, per esempio, nel caso degli spazi di Hilbert (teorema di Riesz).

Osservazione. La costruzione del duale può essere iterata portando alla definizione dello spazio biduale V^{**}, contenente le applicazioni lineari $V^* \to \mathbb{R}$. Applicazioni di questo tipo sembrano assai astratte, ma in realtà esistono esempi semplicissimi: ogni $v \in V$ definisce un'applicazione lineare $V^* \to \mathbb{R}$ semplicemente per valutazione: $v(\alpha) := \alpha(v)$. In questo modo troviamo un'applicazione lineare iniettiva $V \to V^{**}$.

In generale tale applicazione non è necessariamente suriettiva. Quando succede, V si dice riflessivo. In tal caso l'applicazione $V \to V^{**}$ fornisce un isomorfismo, questa volta canonico, tra V e il suo biduale. Gli spazi V e V^{**} sono dunque perfettamente identificabili.

Per esempio, se V ha dimensione n anche V^*, dunque V^{**}, ha dimensione n e dunque ogni applicazione iniettiva è automaticamente suriettiva. Tale V è dunque riflessivo. Altro esempio: ogni spazio di Hilbert è riflessivo.

La relazione tra spazio e duale induce una relazione opposta tra applicazioni lineari. Ogni $f : V \to W$ lineare induce infatti un'applicazione lineare $f^* : W^* \to V^*$ nel modo seguente:

$$f^*(\alpha) := \alpha \circ f, \quad \text{ossia} \quad f^*(\alpha)(v) := \alpha(f(v)).$$

Per quanto riguarda le rappresentazioni matriciali di tali applicazioni, osserviamo quanto segue.

Proposizione 9.11 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e $f^* : W^* \to V^*$ l'applicazione duale. Siano $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{C} := \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V, W e $\mathcal{B}^* := \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, $\mathcal{C}^* := \{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ le basi duali, definite imponendo $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, etc.*

Se $Q := M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ è la matrice associata a f, allora $M^{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}(f^*) = Q^t$.

Osservazione. Questo fatto potrebbe ricordare una situazione analoga per le mappe aggiunte (e basi ortonormali). In quel contesto, però , era presente una struttura extra: il prodotto scalare. Usando l'identificazione (2) vista sopra, si trova che $f^* \simeq f^t$. Se le basi sono ortonormali, otteniamo anche identificazioni $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}^*$, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^*$. Questo spiega tutto.

Per il momento a noi interessa soprattutto il seguente esempio.

Esempio. Sia M una varietà differenziabile, $p \in M$ e $V := C_p^\infty$. Le derivazioni sono allora un sottospazio di V^*. Ogni mappa differenziabile $F : M_1 \to M_2$ induce una mappa tra germi nel modo seguente:

$$F^* : C_{F(p)}^\infty \to C_p^\infty, \quad F^*[f] := [f \circ F].$$

Tale mappa è ben definita ed è un omomorfismo tra algebre. In particolare è lineare dal punto di vista vettoriale. La sua mappa duale è generalmente indicata come $F_* : (C_p^\infty)^* \to (C_{F(p)}^\infty)^*$. Se applichiamo questa mappa ad una derivazione D in p, troviamo $F_*(D)([f]) = D(F^*[f]) = D([f \circ F])$. Usando questa formula, è semplice mostrare che $F_*(D)$ è una derivazione in $F(p)$. Concludiamo che la restrizione di F_* induce una mappa lineare $F_* : T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$.

Definizione 9.12 *Siano M_1, M_2 varietà differenziabili e $F : M_1 \to M_2$ una mappa differenziabile. Sia $p \in M$. Il differenziale di F in p è l'applicazione lineare $dF_p := F_* : T_pM_1 \to T_{F(p)}M_2$ definita nell'esempio precedente.*

Esempio. Supponiamo D corrisponda alla derivata lungo la curva α. Allora $dF_p(D)([f]) = F_*(D)([f]) = D([f \circ F]) = \frac{d}{dt}(f \circ F \circ \alpha)_{|t=0}$, dunque $dF_p(D)$ corrisponde alla derivata lungo la curva $F \circ \alpha$.

Si noti l'effetto finale: definizioni molto astratte per T_pM, dF_p, ma poi anche loro realizzazioni molto concrete.

L'algebra lineare mostra che, date mappe $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. L'analogo geometrico è il fatto che, date mappe $M_1 \xrightarrow{F} M_2 \xrightarrow{G} M_3$, $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$. Considerato che la mappa $Id : M \to M$ induce chiaramente l'identità sulle derivazioni, otteniamo quanto segue.

Proposizione 9.13 *Sia $F : M \to M$ un diffeomorfismo. Allora, per ogni $p \in M$, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}M$ è un isomorfismo.*

Immersioni. Usando queste nozioni possiamo finalmente capire il nesso tra superfici astratte e superfici regolari.

Definizione 9.14 *Sia $f : M_1 \to M_2$ una mappa differenziabile. Si dice che f è un'immersione se, per ogni $p \in M_1$, $df_{|p} : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ è iniettivo.*

In tal caso l'immagine si dice sottovarietà immersa di M_2.

Una sottovarietà immersa può contenere autointersezioni, oppure può ripiegarsi su se stessa avvicinandosi infinitesimalmente senza però mai autointersecarsi. Tali comportamenti sono esclusi dalla seguente condizione, più forte.

Definizione 9.15 *Sia $f : M_1 \to M_2$ un'immersione. Si dice che f è un'immersione regolare se fornisce un omeomorfismo tra M_1 e la sua immagine in M_2, dotata della topologia indotta da M_2.*

In tal caso l'immmagine di f si dice sottovarietà regolare di M_2.

Una superficie regolare S è dunque, in questo senso, una sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^3$, ottenuta come immagine dell' immersione regolare $f = Id : S \to \mathbb{R}^3$, dove S è la stessa superficie vista come superficie astratta.

Più in generale, possiamo elaborare una teoria estrinseca delle sottovarietà regolari analoga a quella delle superfici regolari. Le differenze principali riguardano il fatto che lo spazio ambiente non è più limitato ad essere solo $\mathbb{R}^n$, e che lo spazio vettoriale normale (ossia ortogonale allo spazio tangente) non è necessariamente una retta: può avere dimensione maggiore (come nel caso di curve in $\mathbb{R}^3$).

Nota linguistica: In inglese la terminologia è , rispettivamente, immersion e embedding.

Teorema delle derivazioni. Vogliamo ora dimostrare il teorema delle derivazioni. Per quanto riguarda il calcolo della dimensione, abbiamo visto che ogni parametrizzazione è un diffeomorfismo, e che ogni diffeomorfismo induce, tra spazi tangente, un isomorfismo. Basta allora dimostrare il risultato voluto nel caso $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Iniziamo con le seguenti considerazioni (in cui tralasciamo la notazione $[f]$).

1. Sia f la funzione costante $f = 1$. Allora, per ogni derivazione D in 0, la regola di Leibniz implica che

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 2(1 \cdot D(1)) = 2D(1),$$

dunque $D(1) = 0$. Analogamente, la linearità implica che $D(c) = 0$.

2. Sia D una derivazione in 0. Supponiamo di conoscere il risultato $D(x_i)$, per ciascuna funzione lineare x_i. Data qualunque altra funzione differenziabile f, possiamo scrivere

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ (tx))\,dt = \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$$

dunque $f(x) = f(0) + x_i g(x)$, dove $g(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$. Si noti, in particolare, che $g(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Ponendo $c := f(0)$, otteniamo allora

$$D(f) = D(c) + x_{i_{|0}} D(g) + g(0)D(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)D(x_i).$$

Ne consegue che possiamo ricostruire $D(f)$ a partire da $D(x_i)$.

Consideriamo ora la mappa lineare

$$\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n, \quad v = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto D_v : D_v(f) = v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

È chiaramente iniettiva. Inoltre, sia D una qualunque derivazione in 0. Ponendo $v_i := D(x_i)$ e $v := (v_1, \ldots, v_n)$, otteniamo che $D_v = D$ sulle funzioni lineari. La considerazione (2) implica allora che $D_v(f) = D(f)$ per qualunque f, ossia che la mappa è anche suriettiva. Concludiamo che è un isomorfismo e che lo spazio tangente $T_0\mathbb{R}^n$ ha dimensione n.

Per concludere la dimostrazione del teorema, si noti che la mappa sopra può essere riscritta come

$$\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n, \quad \mapsto D_v : D_v(f) = \frac{\partial f}{\partial v}(0).$$

Essendo un isomorfismo, ciò dimostra che le derivazioni coincidono con le derivate direzionali, dunque con le derivate lungo curve rettilinee. Considerato che ogni parametrizzazione è un diffeomorfismo, dunque manda curve in curve, otteniamo che su qualunque varietà M ogni derivazione coincide con una derivata lungo una qualche curva in M.

Osservazione. Un approccio alternativo, sempre intrinseco, al piano tangente consiste nell'insistere maggiormente sul ruolo delle curve. In questo caso, per iniziare, dobbiamo dichiarare che due curve passanti per p sono equivalenti se coincidono in un intorno di p. Ogni parametrizzazione ci permette allora di riportare tali curve in M a curve in $\mathbb{R}^n$, dunque di definire una loro somma/prodotto per scalare. E' importante notare che tali operazioni non sono ben definite su M, nel senso che dipendono fortissimamente dalla parametrizzazione scelta. D'altra parte, inducono operazioni sulle classi d'equivalenza, e queste operazioni sono indipendenti dalla parametrizzazione. Si tratta dunque di dimostrare che l'insieme di queste classi d'equivalenza, assieme a tali operazioni, è uno spazio vettoriale di dimensione n. Uno dei vantaggi della nostra definizione analitica è che le operazioni algebriche sono definite fin da subito in modo indipendente da ogni parametrizzazione. Usiamo una parametrizzazione (qualsiasi) solo per calcolarne la dimensione.

Orientabilità . Il concetto di orientabilità e di orientazione per le varietà differenziabili è analogo a quello visto per le superfici regolari.

Definizione 9.16 *Una varietà differenziabile M si dice orientabile se ammette un sotto-atlante differenziabile $\{U_i, V_i, \phi_i\}_{i\in I}$ tale che tutte le mappe di transizione abbiano differenziale con determinante positivo.*

Un'orientazione è un atlante massimale avente tale proprietà .

Come prima, si può dimostrare che ogni M orientabile ammette solo due orientazioni. Si noti che, in questo contesto, non ha più senso cercare caratterizzazioni alternative all'orientabilità in termini di campi normali: sarebbe un punto di vista estrinseco.

Commenti conclusivi. A cosa serve generalizzare il concetto di superficie, ottenendone una versione astratta? Il punto è che immergere una superficie in $\mathbb{R}^3$ implica vincoli addizionali sulla superficie. In altre parole, per le superfici si ripresenta la stessa situazione già vista per certe curve (quelle chiuse) in $\mathbb{R}^2$:

la geometria estrinseca impone vincoli che rischiano di cozzare con le proprietà intrinseche (compattezza) della curva/superficie.

Nel caso delle superfici, per esempio, abbiamo visto che ogni superficie astratta compatta che si possa immergere in modo regolare in $\mathbb{R}^3$ è necessariamente orientabile. Esistono però infinite superfici astratte compatte non orientabili: esempi semplici sono il piano proiettivo reale e la bottiglia di Klein.[7] Se studiassimo solo le superfici regolari, non ci accorgeremmo della loro esistenza. Ora invece abbiamo il linguaggio giusto per studiarle.

Questa situazione si ripropone ad ogni livello geometrico. Sarà particolarmente importante in geometria Riemanniana.

10 Fibrato tangente, campi vettoriali

Una presentazione breve-ma-non-troppo del calculus dei campi vettoriali. Molte di queste nozioni sono utili in Meccanica Hamiltoniana, o più in generale nello studio delle simmetrie di un sistema fisico.

Dotando M della struttura giusta, l'insieme dei suoi punti dà luogo ad un oggetto bellissimo: localmente uguale a $\mathbb{R}^n$, ma globalmente libero di creare le forme più fantasiose: sfere, tori, etc. Non appena associamo ad ogni $p \in M$ il suo spazio tangente T_pM otteniamo però l'insieme $TM := \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$ di tutti i possibili vettori tangente: un'accozzaglia di oggetti senza interazioni tra di loro. In particolare, non ha senso parlare di campo vettoriale continuo/differenziabile su M perchè TM non ha ancora la struttura adeguata. Il primo scopo di questa sezione è di generare una struttura differenziabile su TM che sia in qualche modo compatibile con quella di M. Un punto di vista leggermente diverso rispetto a quello adottato fin qui ci permetterà di costruire simultaneamente sia la topologia/struttura di varietà topologica sia la struttura differenziabile, in un colpo solo. Ci baseremo sul seguente procedimento, valido per qualunque insieme X.

Supponiamo di avere:
1. Un ricoprimento di X tramite sottoinsiemi X_i.
2. Corrispondenze biunivoche $\phi_i : U_i \to X_i$, dove $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto.

Ogni ϕ_i determina una topologia su X_i: $\tau_i := \{\phi_i(A) \subseteq X_i\}$, al variare di $A \subseteq U_i$ aperto. Per costruzione, con questa topologia X_i è una varietà topologica. Poniamo ora $\sigma := \cup\tau_i$ e τ la topologia su X generata da σ (tramite intersezioni finite e unioni).

Potrebbe sembrare che siamo già vicini ad aver costruito una struttura di varietà topologica su X. A ben vedere, però , ci sono alcuni problemi. Per esempio, se $X = X_1 = X_2$ e non chiediamo alcuna compatibilità tra ϕ_1 e ϕ_2, allora le due strutture topologiche indotte su X potrebbero non avere nulla in

[7] A lezione abbiamo discusso la costruzione di toro astratto, nastro di Möbius, bottiglia di Klein e piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$.

comune. La costruzione di τ genererebbe allora aperti extra, che non corrispondono ad aperti né in U_1 né in U_2: il nostro modello locale sarebbe rovinato. Una situazione simile è evidenziata anche dal seguente esempio.

Esempio. Sia $X := (0,2)$, $X_1 := (0,1]$, $X_2 := [1,2)$. Per motivi di cardinalità possiamo trovare corrispondenze biunivoche $\phi_i : (0,1) \to X_i$, ma allora τ contiene l'aperto $X_1 \cap X_2 = \{1\}$: impossibile per una varietà topologica.

Per rimediare, occorre aggiungere le ipotesi (i) ogni $X_i \cap X_j$ sia aperto per ogni τ_i, e (ii) ogni $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ sia un omeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$.

Un secondo problema è che nulla implica che τ sia T_2 e che soddisfi il secondo assioma di numerabilità . Sotto queste ipotesi aggiuntive, X è una varietà topologica con atlante $\{(U_i, V_i := X_i, \phi_i)\}$.

Sostituendo a (ii) l'ipotesi che ciascun $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ sia un diffeomorfismo, X è anche una varietà differenziabile.

Fibrato tangente. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $\{U_i, V_i, \phi_i\}$ un atlante. Vogliamo applicare la nostra costruzione a $X := TM$. Poniamo $X_i := TV_i = \{(p, v) : p \in V_i, v \in T_pM\}$ e

$$\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to X_i, \quad (x, v) \mapsto (\phi_i(x), d(\phi_i)_{|x}(D_v)),$$

dove D_v è la derivazione nel punto $x \in \mathrm{U}_i$ indotta dalla direzione $v \in \mathbb{R}^n$. La mappa Φ_i fornisce simultaneamente coordinate su V_i ed una base $\{d\phi_i(e_1), \dots, d\phi_i(e_n)\}$ per TV_i in ogni punto (dunque coordinate per i vettori tangente), generalizzando quanto visto per le superfici parametrizzate. La mappa di transizione (locale) coincide con

$$U_i \times \mathbb{R}^n \to U_j \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), Q_x v),$$

dove Q_x è la matrice $n \times n$ invertibile associata a $(d\phi_j^{-1})_{|\phi_i(x)} \circ (d\phi_i)_{|x}$ (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^n$). Questa mappa è un diffeomorfismo locale e possiamo verificare che valgono anche tutte le altre ipotesi richieste. Il risultato è che l'insieme TM è ora diventato una varietà differenziabile di dimensione $2n$, chiamato fibrato tangente.

Arriviamo ora alla definizione centrale di questa sezione: la nozione di campo vettoriale. Possiamo dare due definizioni equivalenti: una globale, una locale. Il punto di vista globale spiega meglio "cosa sta succedendo"; il punto di vista locale semplifica i calcoli. Tale duplice punto di vista è comune a tutto il calcolo tensoriale sulle varietà .

Definizione 10.1 *Un campo vettoriale su M è una sezione di TM, ossia una mappa differenziabile $X : M \to TM$ tale che, per ogni $p \in M$, $X(p) \in T_pM$.*

Alternativamente: dato un atlante $\{(U_i, V_i, \phi_i)\}$ su M, un campo vettoriale è una collezione di mappe $X_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tali che, in corrispondenza di ciascuna intersezione $V_i \cap V_j$, si abbia $(y, X_j(y)) = ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), Q_x(X_i))$.

Ogni costruzione basata sul secondo punto di vista necessita di un ragionamento che dimostri la sua indipendenza rispetto al sistema di coordinate scelto. Per questo motivo tenteremo solitamente di seguire il punto di vista globale.

Denoteremo con $\mathcal{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali su M. Si tratta di uno spazio vettoriale infinito-dimensionale.

La struttura di TM è , in vari modi, compatibile con quella di M. In particolare:

1. La mappa
$$M \to TM, \quad p \mapsto (p, 0 \in T_pM)$$
è una immersione regolare. In questo senso M è una sottovarietà di TM.

Più in generale, ogni campo vettoriale X corrisponde ad una immersione regolare $p \mapsto (p, X_p)$ di M in TM.

2. Ogni mappa $\phi : M_1 \to M_2$ induce una mappa $d\phi : TM_1 \to TM_2$, definita da $d\phi(p, v) := (\phi(p), d\phi_{|p}(v))$.

3. Ogni diffeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$ (ma non ogni mappa!) induce un isomorfismo $\phi : \mathcal{X}(M_1) \to \mathcal{X}(M_2)$, chiamato push-forward, definito da $\phi(Y)_p := d\phi_{|\phi^{-1}(p)}(Y) \in T_pM$.

Osservazione. Si noti la differenza tra $\phi(Y)$ e $d\phi(Y)$. In particolare: il primo è un campo vettoriale, il secondo è solo una collezione di vettori.

L'equivalenza tra le due definizioni di campo vettoriale si ottiene proprio usando l'operazione push-forward, ossia definendo $X := \phi_i(X_i)$.[8]

Per definizione, un campo vettoriale X è una derivazione in ogni punto $p \in M$: denoteremo Xf la sua azione su una funzione f (tralasciando dunque il fatto che potremmo scrivere $[f]$). Le nostre considerazioni precedenti mostrano che $Xf = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)_{|t=0} = df(X)$ (per qualche α).

E' semplice mostrare che $(\phi(X)f) \circ \phi = X(f \circ \phi)$.

La teoria differenziale (in inglese, calculus) dei campi vettoriali si basa sulle seguenti operazioni.[9]

Parentesi di Lie. Dato un campo vettoriale X ed una funzione f, notiamo che Xf è una nuova funzione su M. Possiamo dunque iterare la stessa operazione. Dati due campi vettoriali X, Y, definiamo un campo $[X, Y]$ nel modo seguente:
$$[X, Y]_{|p}(f) := X_{|p}(Yf) - Y_{|p}(Xf).$$
Possiamo verificare che è lineare e che soddisfa la regola di Leibniz, quindi la definizione è ben posta. Si noti, a questo riguardo, il seguente miracolo: sia

[8] Caru lettoru, occhio: nelle versioni precedenti di queste dispense avevo fatto confusione tra $d\phi_i(X_i)$ e $\phi_i(X_i)$. Sto tentando di correggere, ma forse non sono sempre coerente!

[9] Here, should already start presenting the concept of symmetry, ie invariance under pullback, thus explaining the importance of Lie derivatives.

$X(Yf)$ sia $Y(Xf)$ generano termini contenenti derivate seconde di f, che non dovrebbero apparire in una derivazione. Poi, però , questi termini si cancellano.

Osservazione. Per il motivo appena detto, su una varietà astratta è meglio non cadere nella tentazione di scrivere $[X,Y] = XY - YX$ (tralasciando f), che indurrebbe a pensare che le singole parti XY e YX hanno un senso autonomo. Ha senso solo il pacchetto intero $[X,Y]$, inteso come derivazione. In altre parole, per definire l'operazione $[X,Y]$ usiamo pesantemente il punto di vista su T_pM offerto dalle derivazioni.

Il prossimo esempio, invece, mostra che quando $M = \mathbb{R}^n$ possiamo anche derivare le singole coordinate di X, Y e definire $XY := dY(X)$, $YX := dX(Y)$. In tal caso si trova dunque l'identità $[X,Y] = XY - YX$.

Esempio. Sia $M = \mathbb{R}^n$ e $X = a^i e_i$. Allora X agisce su f in $p \in \mathbb{R}^n$ nel modo seguente: $(Xf)_{|p} = a^i_{|p} \frac{\partial f}{\partial i}_{|p}$.

Prendiamo un secondo campo $Y = b^i e_i$. Allora

$$X(Yf) = X(b^i \frac{\partial f}{\partial i}) = a^j \frac{\partial b^i}{\partial j} \frac{\partial f}{\partial i} + a^j b^i \frac{\partial^2 f}{\partial ij},$$
$$Y(Xf) = Y(a^i \frac{\partial f}{\partial i}) = b^j \frac{\partial a^i}{\partial j} \frac{\partial f}{\partial i} + b^j a^i \frac{\partial^2 f}{\partial ij}.$$

Dunque $[X,Y]f = (a^j \frac{\partial b^i}{\partial j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial j}) \frac{\partial f}{\partial i}$. Osserviamo che (i) i termini contenenti derivate seconde di f si cancellano a vicenda, (ii) le coordinate del campo vettoriale [X,Y] contengono derivate di X e di Y.

Si noti, in particolare, che $[X,Y] = 0$ sse $X(Yf) = Y(Xf)$ per ogni f, ossia le derivate seconde commutano (come usuale per le derivate parziali in Analisi, o per qualunque coppia di campi vettoriali che in coordinate locali abbiano coefficienti costanti, ma falso per campi vettoriali generici).

Il risultato finale è che lo spazio vettoriale $\mathcal{X}(M)$ è stato arricchito di una nuova operazione

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad (X,Y) \mapsto [X,Y],$$

chiamata parentesi di Lie, con varie interessanti proprietà algebriche: è diventato un'algebra di Lie, nel senso che discuteremo in seguito.

Lemma 10.2 *Siano $\phi : M_1 \to M_2$ un diffeomorfismo e X, Y campi vettoriali. Allora $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.*

In altre parole, la mappa indotta da ϕ su campi vettoriali è un isomorfismo non solo nel senso degli spazi vettoriali, ma anche nel senso delle algebre di Lie.

Per dimostrarlo, dobbiamo mostrare che, per ogni f su M_2,

$$([\phi(X), \phi(Y)]f) \circ \phi = (\phi([X,Y])f) \circ \phi.$$

E' sufficiente esplicitare i due lati, sfruttando per esempio il fatto che

$$(\phi(X)(\phi(Y)f)) \circ \phi = X((\phi(Y)f) \circ \phi) = X(Y(f \circ \phi)).$$

Flussi. Sia X un campo vettoriale su M e $p \in M$. La linea di flusso (o curva integrale) passante per p è una curva del tipo $t \in (-\delta, \delta) \mapsto \phi_t(p) \in M$ tale che $\phi_0(p) = p$, $\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{|\phi_t(p)}$, ossia avente velocità , in ogni punto, uguale al vettore X in quel punto. Tale proprietà corrisponde ad una equazione differenziale ordinaria (in inglese, ODE), dunque l'esistenza di tali curve è assicurata dal teorema generale di esistenza di soluzioni di tali equazioni.[10]

Ora proviamo a variare il punto p. Vorremmo allora che l'insieme di tutte le linee di flusso formassero una famiglia di mappe differenziabili $t \in (-\delta, \delta) \mapsto \phi_t : M \to M$ dipendenti dal tempo. Una tale famiglia si chiama flusso di X e ha la proprietà

$$\phi_0(p) = p, \quad \frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{|\phi_t(p)},$$

per ogni t e p. In tal caso si può dimostrare che ogni ϕ_t è un diffeomorfismo, dunque la famiglia descrive una curva di diffeomorfismi.

Bisogna però stare attenti al tempo d'esistenza di tale famiglia. Per esempio, se M è un segmento e $X = e_1$ è il campo vettoriale costante, man mano che p si avvicina agli estremi la soluzione esiste solo per tempi sempre più corti. In questo caso ogni linea di flusso corrisponde, localmente, a traslazioni ma non esiste una famiglia di mappe avente tempi di esistenza che vadano bene per tutti i punti.

La situazione ideale è quella dei campi completi che, per definizione, ammettono per ogni punto una linea di flusso definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. In tal caso risulta definita una mappa

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M), \quad t \mapsto \phi_t.$$

Possiamo alternativamente scriverla come mappa $\mathbb{R} \times M \to M$, usando dunque la notazione $\phi(t, p) := \phi_t(p)$.

Esempio. La teoria generale delle ODE implica che se M è compatto allora ogni campo vettoriale è completo.

Si noti che sia $\mathbb{R}$ sia $\mathrm{Diff}(M)$ sono esempi di gruppi. E' affascinante (e importante) osservare che la mappa $t \mapsto \phi_t$ è un omomorfismo, ossia $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Per ogni s e ogni p, infatti, sia $\psi_t := \phi_{t+s}$ sia $\psi_t := \phi_t \circ \phi_s$ soddisfano la stessa equazione differenziale $\frac{d}{dt}\psi_t(p) = X_{|\psi_t(p)}$, con stesso dato iniziale.

In particolare, la scelta $s = -t$ e mostra che $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ e il fatto che $\mathbb{R}$ sia commutativo implica che $\phi_{t+s} = \phi_{s+t}$. Viceversa, ogni tale omomorfismo genera un campo vettoriale autonomo in modo che tali dati soddisfino l'equazione del flusso. Il risultato (almeno su varietà compatte) è una corrispondenza biunivoca tra campi vettoriali e sottogruppi ad un parametro di diffeomorfismi

$$\mathcal{X}(M) \leftrightarrow \{\phi_t \leq \mathrm{Diff}(M)\}.$$

[10] Mention that on $\mathbb{R}^n$ this is the ODE $x' = F(x)$, in Mechanics one integrates the Hamiltonian vector field to describe motion.

Useremo i diffeomorfismi per codificare le simmetrie globali di M, i campi vettoriali per le simmetrie infinitesimali.

Osservazione. La costruzione del flusso associato ad un campo vettoriale autonomo è un caso particolare di due situazioni più generali che esploreremo meglio più avanti. 1) Il flusso $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ può essere interpretato come un'azione del gruppo di Lie $\mathbb{R}$ sulla varietà M. 2) $\mathcal{X}(M)$ è l'algebra di Lie del gruppo $\mathrm{Diff}(M)$; il gruppo $\mathbb{R}$ ha $\mathbb{R}$ come algebra di Lie. Il flusso, inteso come omomorfismo tra gruppi, corrisponde ad un omomorfismo $\mathbb{R} \to \mathcal{X}(M)$ tra le due algebre.

Derivata di Lie. La nozione di flusso consente una prima, rozza, nozione di derivata di un campo vettoriale.

Definizione 10.3 *Sia X un campo vettoriale su M e ϕ_t il suo flusso. Sia Y un secondo campo vettoriale e $\phi_t(Y)$ la curva di campi vettoriali determinata applicando il flusso. La derivata di Lie del campo Y nella direzione X è il campo vettoriale su M dato da*

$$\mathcal{L}_X Y(p) := -\frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t(Y)(p).$$

Si noti che tale derivata è ben definita perchè ha luogo dentro lo stesso spazio vettoriale T_pM.

Detto a parole: a meno di segno, $\mathcal{L}_X Y$ è la variazione infinitesimale del campo vettoriale Y, quando lo si trascina lungo la varietà usando il flusso di X.

La criticità di questa definizione sta nel fatto che esige che X sia un campo vettoriale, piuttosto che un singolo vettore nel punto p, e il risultato incorpora anche le derivate di X. Questo è reso ben evidente dal seguente risultato, che serve però anche ad indicare un intimo legame tra flussi e parentesi di Lie.

Proposizione 10.4 *Siano X, Y campi vettoriali su M. Allora*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Più in generale, $-\frac{d}{dt}_{|t_0} \phi_t(Y) = \phi_{|t_0}([X, Y])$.

Usando infatti l'identità $(\phi_t(Y)f) \circ \phi_t = Y(f \circ \phi_t)$, troviamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y(f)(p) &= -\frac{d}{dt}(\phi_t(Y)f)_{|t=0}(p) \\
&= -\frac{d}{dt}(Y(f \circ \phi_t) \circ \phi_{-t})_{|t=0}(p) \\
&= -\frac{d}{dt}(g((\phi_{-t}(p), t)_{|t=0},
\end{aligned}$$

dove $g(\cdot,t) = Y(f\circ\phi_t)(\cdot)$. Proseguendo il calcolo, troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y(f)(p) &= -dg_{|(p,0)}\frac{d}{dt}\phi_{-t}(p)_{|t=0} - \frac{d}{dt}g(p,t)_{|t=0}\\ &= d(Yf)_p(X) - \frac{d}{dt}Y(f\circ\phi_t)_{|t=0}(p)\\ &= X(Yf)(p) - Y\frac{d}{dt}(f\circ\phi_t)_{|t=0}(p)\\ &= ([X,Y]f)(p).\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la formula generale, iniziamo osservando che, per ogni t_0, $\phi_{t_0}(X) = X$: infatti, per ogni $p\in M$,

$$\begin{aligned}\phi_{t_0}(X)_{|\phi_{t_0}(p)} &= d\phi_{t_0}(X_p) = d\phi_{t_0}(\frac{d}{dt}\phi_t(p)_{|t=0})\\ &= \frac{d}{dt}\phi_{t_0+t}(p)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\phi_t(p)_{|t=t_0} = X_{\phi_{t_0}(p)}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t_0}\phi_t(Y) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_{t+t_0}(Y) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_t(\phi_{t_0}(Y))\\ &= -\mathcal{L}_X(\phi_{t_0}(Y)) = -[X,\phi_{t_0}(Y)]\\ &= -[\phi_{t_0}(X),\phi_{t_0}(Y)] = -\phi_{t_0}([X,Y]).\end{aligned}$$

La proposizione è utile per dare un significato geometrico alla parentesi di Lie. Serve anche a chiarire alcune proprietà della derivata di Lie, per esempio che $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$ e che $\phi(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{\phi(X)}\phi(Y)$. Forse la proprietà fondamentale della derivata di Lie è , comunque, che essa si estende a qualunque campo tensoriale: in questo modo, è lo strumento essenziale per calcolare come varia tale tensore sotto l'effetto del flusso di X.

Osservazione. Anche la proposizione sopra ha un'interpretazione specifica dal punto di vista della teoria dei gruppi di Lie. Corrisponde al fatto che, in generale, il differenziale dell'azione aggiunta di un gruppo sulla sua algebra coincide con l'azione aggiunta dell'algebra su se stessa.

Osservazione. Può essere utile studiare anche campi vettoriali X_t che dipendono dal tempo. In questo caso, quando M è compatto, il tempo massimale di esistenza del flusso coincide con il tempo massimale di esistenza del campo vettoriale. Una differenza importante tra il caso autonomo (ossia X indipendente dal tempo) e il caso non-autonomo è il fatto che, nel secondo caso, la mappa vista sopra non è un omomorfismo.

Come prima, ogni curva di diffeomorfismi ϕ_t genera un campo vettoriale X_t definito imponendo l'identità $\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_t(\phi_t(p))$. Supponiamo per esempio di voler conoscere $X_t(q)$ per qualche $t\in\mathbb{R}$, $q\in M$ fissati. Per maggiore chiarezza, conviene allora adottare la scrittura $\phi = \phi(t,p)$ che evidenzia la possibilità di derivate parziali. Sostituendo $q = \phi_t(p)$ ossia $p = \phi_t^{-1}(q)$, troviamo $X_t(q) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \phi_t^{-1}(q))$ (dove la derivata parziale compensa il fatto che nella formula precedente p era indipendente dal tempo).

Applicazione: immersioni e coordinate. Possiamo ora trovare varie caratterizzazioni geometriche della condizione $[X, Y] = 0$.

Per iniziare, ripartiamo dal fatto che ogni campo vettoriale definisce, tramite le sue linee di flusso, mappe $t \mapsto \phi_t(p)$ di $\mathbb{R}$ in M (per ogni $p \in M$). Se X non si annulla mai, tali mappe sono immersioni. Il campo X determina così una base per le rette tangenti della curva immagine, corrispondente a ∂t lungo $\mathbb{R}$. Possiamo chiederci sotto quali ipotesi k campi definiscono un'immersione di $\mathbb{R}^k$. Il caso in cui $k = dim(M)$ è particolarmente interessante: corrisponde ad un sistema di coordinate. La seguente proposizione vale, più in generale, per ogni $k \leq n$.

Proposizione 10.5 *Siano X, Y campi vettoriali linearmente indipendenti in ogni punto e ϕ_t, ψ_s i loro flussi. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $[X, Y] = 0$.
2. $\phi_t(Y) \equiv Y$*, ossia Y è invariante rispetto al flusso generato da X.*
3. $\psi_s(X) \equiv X$*, ossia X è invariante rispetto al flusso generato da Y.*
4. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$.

Sotto tali condizioni, dato qualunque $p \in M$ la mappa

$$\mathbb{R}^2 \to M, \quad (t, s) \mapsto (\phi_s \circ \phi_t)(p)$$

è un'immersione e X, Y sono una base per i piani tangenti della sottovarietà immagine, indotta da ∂t, ∂s.

Il punto di partenza è che $\phi_t(Y) \equiv Y$ sse la sua derivata si annulla. L'equivalenza di 1,2,3 è dunque diretta conseguenza della formula $\frac{d}{dt}_{|t_0} \phi_t(Y) = \phi_{t_0}([X, Y])$ e della formula analoga ottenuta scambiando i ruoli di X, Y.

Ora dimostriamo che 3 implica 4. Basta dimostrare che, per ogni s_0, le curve $\phi_t \circ \psi_{s_0}$ e $\psi_{s_0} \circ \phi_t$ coincidono (applicate al punto p). Derivando, troviamo che entrambi sono linee di flusso di X:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\phi_t \circ \psi_{s_0}) = X_{|\phi_t \circ \psi_{s_0}} \\
&\frac{d}{dt}(\psi_{s_0} \circ \phi_t) = d\psi_{s_0|\phi_t}(X_{|\phi_t}) = \psi_{s_0}(X)_{|\psi_{s_0} \circ \phi_t} = X_{|\psi_{s_0} \circ \phi_t}
\end{aligned}$$

Considerato che coincidono per $t = 0$, sono allora uguali per ogni t. Il viceversa usa lo stesso conto.

Tali conti mostrano anche che il differenziale della mappa manda ∂t in X. Un conto simile mostra che manda ∂s in Y. È dunque un'immersione.

Osservazione. Riallacciandoci a quanto già detto, quanto sopra può essere riassunto come segue. Un dato spazio di campi vettoriali, chiuso rispetto alla parentesi di Lie, crea un algebra di Lie. A questa corrisponde un gruppo di Lie semplicemente connesso. Integrare i campi corrisponde a definire un'azione del gruppo su M. Nel caso sopra si ottiene un'azione del gruppo $\mathbb{R}^k$.

Esempio. Una curva $t \mapsto (x(t), z(t))$ nel piano (x, z) genera una superficie di rotazione $\phi : (t, \theta) \mapsto (x(t)\cos(\theta), x(t)\sin(\theta), z(t))$. Consideriamo i campi vettoriali $X := \phi(\partial t)$, $Y := \phi(\partial\theta)$ sulla superficie. Il fatto $[\partial t, \partial\theta] = 0$ implica che $0 = \phi([\partial t, \partial\theta]) = [X, Y]$, dunque $\mathcal{L}_X Y = 0$. E' geometricamente chiaro che ciascuno è conservato dal flusso dell'altro.

11 Fibrato cotangente, 1-forme differenziali

Una breve presentazione del calculus delle 1-forme differenziali.

Nello stesso modo, usando gli spazi duali degli spazi tangente, possiamo considerare l'insieme $T^*M := \{(p, \alpha) : p \in M, \alpha \in T^*_pM\}$ e dotarlo di una struttura differenziabile in modo da ottenere una varietà di dimensione $2n$, chiamata fibrato cotangente.

In questo caso costruiamo le carte dualizzando quelle usate per TM (con un'inversione per assicurare che vadano nella direzione giusta):

$$\Psi_i : U_i \times (\mathbb{R}^n)^* \to T^*V_i, \quad (x, a) \mapsto (\phi_i(x), (d(\phi_i)^*_{|x})^{-1}(a)).$$

Si noti che, in questo particolare caso, la base canonica (o il prodotto scalare standard) permetterebbe di identificare $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$. Usando tale identificazione, le corrispondenti mappe di transizione (locali) sono

$$U_i \times \mathbb{R}^n \to U_j \times \mathbb{R}^n, \quad (x, a) \mapsto ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), (d(\phi_j)^*_{|\phi_i(x)}) \circ (d(\phi_i)^*_{|x})^{-1}(a)).$$

Osservazione. Abbiamo visto che, se $f : V \to W$ è invertibile e, rispetto a certe basi, ha matrice Q allora, usando le basi duali, $(f^*)^{-1} : V^* \to W^*$ ha matrice $(Q^t)^{-1}$. Ne consegue che la matrice associata alla (seconda componente di tale) mappa di transizione è $(Q^t_x)^{-1}$, dove Q_x è la matrice associata alla mappa di transizione di TM.

Definizione 11.1 *Una 1-forma differenziale su M è una sezione di T^*M, ossia una mappa differenziabile $\alpha : M \to T^*M$ tale che, per ogni $p \in M$, $\alpha(p) \in T^*_pM$.*

Alternativamente: dato un atlante $\{(U_i, V_i, \phi_i)\}$ su M, una 1-forma differenziale è una collezione di mappe $A_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tali che, in corrispondenza di ciascuna intersezione $V_i \cap V_j$, si abbia $(y, A_j(y)) = ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), (Q^t_x)^{-1}(X_i))$.

Ciascuna $A_i = (a^i_1, \ldots, a^i_n)$ definisce una 1-forma su U_i in termini dell'identificazione $A_i = a^i_j dx^j$; la collezione delle A_i definisce una 1-forma α su M ponendo $\alpha(d\phi_i(v)) := A_i(v)$.

L'interesse nelle 1-forme differenziali risiede, in gran parte, in due fatti.

1. Il differenziale df di una $f : M \to \mathbb{R}$ è una 1-forma differenziale. Tali 1-forme si dicono esatte.

Achtung! Al momento non ha invece senso il concetto di campo vettoriale gradiente associato ad f. Questa nozione necessita di una metrica. In altre parole, la nozione di 1-forma esatta, e più in generale la teoria delle forme differenziali, è piuttosto diversa da quella dei campi vettoriali (o di altri tipi di tensori): si può sviluppare senza richiedere alcuna struttura ulteriore. Si noti che la presenza di una metrica permette identificazioni tra tensori di vario genere, oscurando queste differenze.

2. Possiamo integrarle lungo curve.

Definizione 11.2 *Sia α una 1-forma su M e $\gamma : (a,b) \to M$ una curva in M. L'integrale di α lungo γ è*

$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \alpha_{|\gamma(t)}(\gamma')(t)dt.$$

La linearità di α implica che se γ' è una riparametrizzazione di γ, ossia $\gamma'(\tau) = \gamma \circ t(\tau)$, allora l'integrale lungo γ' coincide con quello lungo γ a meno di segno, a seconda del segno di $t'(\tau)$. Ne deduciamo che tale integrale è ben definito per curve regolari orientate in M.

Solitamente l'integrale dipende dalla curva prescelta. Il caso in cui α è esatta corrisponde al caso conservativo, in cui il risultato dell'integrale è $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. In particolare, dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale della curva.

Osservazione. Se scegliamo una 1-forma α di riferimento, possiamo usarla per definire $\int_\gamma f\alpha := \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\alpha_{|\gamma(t)}(\gamma')(t)dt$. In questo senso, α sostituisce il ruolo di ds, introdotto per le curve, ma che aveva senso solo grazie alla presenza di una metrica. Integrali di questo tipo giocano un ruolo molto importante in analisi complessa, con la scrittura $\int_C f(z)dz$. Qui, dz deve essere inteso come una 1-forma sul dominio di f a valori complessi e C è spesso una curva chiusa. Se f è olomorfa allora fdz è una forma chiusa (nel senso che vedremo sotto), dunque l'integrale è costante rispetto a deformazioni di C. Se fdz è una 1-forma esatta allora l'integrale è zero. Se f è meromorfa allora l'integrale dà la somma dei residui di fdz nel dominio racchiuso da C.

Data una mappa $\phi : M_1 \to M_2$ ed una 1-forma α su M_2, possiamo definire l'operazione di pull-back nel modo seguente: $(\phi^*\alpha)_p(v) := \alpha_{\phi(p)}(d\phi_p(v))$. Il risultato è una 1-forma su M_1.

Sfruttando questa operazione possiamo anche definire la derivata di Lie di α su M rispetto ad un campo vettoriale X:

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(p) := \frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha(p)_{|t=0}.$$

Il risultato è una nuova 1-forma. Confrontando con l'operazione analoga sui campi vettoriali, notiamo una differenza di segno. Ciò è legato al fatto che campi vettoriali e 1-forme si comportano in modo opposto rispetto alle mappe ϕ: le 1-forme sono esempi di tensori covarianti, i campi sono esempi di tensori controvarianti.

Uno degli aspetti più interessanti della teoria delle 1-forme differenziali sta però nel fatto che esse fanno parte di una gerarchia più vasta, definita dalle k-forme differenziali su M. All'interno di questa gerarchia è possibile definire una nozione di derivata diversa. Per capire tutto ciò , conviene fare una digressione più ampia.

12 Fibrati tensoriali, forme differenziali.

Una mai-abbastanza-breve presentazione del calculus tensoriale generale.

Il calculus tensoriale si basa su due argomenti, GAL1 e analisi, entrambi diarroici. A volerlo fare bene, non si finirebbe più . Diamo solo qualche cenno.

Algebra tensoriale su spazi vettoriali. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Definiamo il loro prodotto tensoriale $V \otimes W$ come lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari $V^* \times W^* \to \mathbb{R}$.

Dati vettori $v \in V$, $w \in W$, definiamo $v \otimes w \in V \otimes W$ nel modo seguente: $(v \otimes w)(\alpha, \beta) := \alpha(v)\beta(w)$. Elementi della forma $v \otimes w$ si dicono semplici. Otteniamo in questo modo una mappa

$$V \times W \to V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w.$$

In particolare, usando vettori scelti da basi di V, W otteniamo una base di $V \otimes W$, confermando il fatto che $V \otimes W$ ha come dimensione il prodotto delle dimensioni di V, W. Un vettore generico di $V \otimes W$ è combinazione lineare di vettori semplici.

A partire da queste definizioni, possiamo fare varie cose.

1. L'isomorfismo $V^{**} \simeq V$ dimostra che $V^* \otimes W^*$ può essere identificato con le applicazioni bilineari $V \times W \to \mathbb{R}$.

Un prodotto scalare su V, per esempio, è dunque un elemento di $V^* \otimes V^*$.

2. La costruzione può essere iterata, ottenendo per esempio spazi $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Tale spazio ammette un isomorfismo canonico con $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$, permettendoci di scrivere $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ senza specificare l'ordine in cui eseguiamo i prodotti tensoriali. In tal modo risulta ben definito il prodotto tensoriale di qualunque numero finito di spazi vettoriali. Possiamo identificarlo con lo spazio delle applicazioni multilineari.

3. Mescolando, otteniamo per esempio lo spazio $V^* \otimes W$, che può essere identificato con lo spazio delle applicazioni lineari da V in W.

Un endomorfismo di V, in particolare, è un elemento di $V^* \otimes V$.

Possiamo concludere che il prodotto tensoriale codifica praticamente tutti gli oggetti di interesse quotidiano.

Date applicazioni lineari $f : V \to W$, $g : V' \to W'$, definiamo $f \otimes g : V \otimes V' \to W \otimes W'$ come l'estensione lineare dell'operazione $(f \otimes g)(v \otimes v') := f(v) \otimes g(v')$.

La corrispondente operazione matriciale è la seguente. Scegliamo basi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ per V, $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ per V', $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ per W, $\mathcal{C}' = \{f'_1, \ldots, f'_s\}$ per W'. Otteniamo così matrici $A := M^{B,C}(f)$, $B := M^{B',C'}(g)$. Consideriamo le basi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' &:= \{e_1 \otimes e'_1, e_1 \otimes e'_2, \ldots, e_1 \otimes e'_n, e_2 \otimes e'_1, \ldots, e_m \otimes e'_n\}, \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}' &:= \{f_1 \otimes f'_1, f_1 \otimes f'_2, \ldots, f_1 \otimes f'_s, f_2 \otimes f'_1, \ldots, f_r \otimes f'_s\} \end{aligned}$$

per $V \otimes V'$, $W \otimes W'$. L'applicazione $f \otimes g$ è allora rappresentata dalla matrice che, scritta a blocchi, ha la seguente forma:

$$M^{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}',\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}(f \otimes g) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1m}B \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}B & \ldots & a_{rm}B \end{pmatrix}.$$

Tale operazione tra matrici si dice prodotto di Kronecker.

All'interno dello spazio delle forme bilineari, più in generale r-multilineari, troviamo i sottospazi $S^r(V)$ delle forme simmetriche e delle forme alternanti (anti-simmetriche) $\Lambda^r(V)$ su V^*. Tali sottospazi possono essere codificati, dentro l'opportuno prodotto tensoriale, come le immagini delle applicazioni lineari ottenute per estensione di

$$\begin{aligned} S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) &:= \frac{1}{r!} \sum_\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \\ A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) &:= \frac{1}{r!} \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \end{aligned}$$

dove sommiamo rispetto a tutte le permutazioni σ dell'insieme $\{1, \ldots, r\}$. Il coefficiente serve per ottenere $S^2 = S$, $A^2 = A$.[11]

[11]Compared to abstract vector spaces, the definition of alternating spaces implies that they have a curious property. They contain a distinguished subset of vectors, known as decomposable/simple: those of the form $\omega := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$, for some v_i. They can alternatively be characterized by the following fact: $\forall \omega, \dim\{v : (v \wedge \omega) = 0\} \leq k$, with equality iff ω is simple. These vectors can also be used to describe the Grassmannian of k-planes: they are precisely the image of the Plücker embedding (up to projectivization). A dimension count thus confirms that most ω are not simple. This also shows that the Grassmannian has the natural structure of an algebraic variety. We remark that there exist alternative descriptions of the Grassmannian: as a set of orthogonal projection operators of constant rank k, or as a homogeneous space. Each description provides new info on the natural geometry of the Grassmannian. Of course, this is part of a broader conversation, of interest both to Mathematicians and Physicists: how to geometrize a given set, ie give it a topology/diff structure/Riemannian metric/group action...

Esempio. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base duale. Allora

$$\begin{aligned} A(v_i^* \otimes v_j^*)(v, w) &= \frac{1}{2}(v_i(v)v_j(w) - v_j(v)v_i(w)) \\ &= \frac{1}{2}((v_i \otimes v_j)(v, w) - (v_i \otimes v_j)(w, v)). \end{aligned}$$

In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base standard, allora $A(e_1^* \otimes \cdots \otimes e_n^*) = \frac{1}{n!} \det$.

Una degli aspetti più interessanti di questi spazi è che ammettono una naturale moltiplicazione. In particolare otteniamo una operazione, nota come prodotto esterno, $\Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) \to \Lambda^{r+s}(V)$ tramite l'estensione lineare di

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta := \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\alpha \otimes \beta).$$

Il coefficiente serve per controbilanciare quello usato nella definizione di A.

Esempio. Dati $v, w \in V$,

$$v \wedge w = 2\frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) = v \otimes w - w \otimes v.$$

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base standard, allora

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \det .$$

Questa formula motiva la presenza di quel coefficiente nella definizione di $\wedge$.

Dato V, solitamente interessano gli spazi $\Lambda^r(V^*)$, corrispondenti alle forme multilineari alternanti $V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$. Intuitivamente, ogni tale forma definisce una nozione di r-volume per un parallelepipedo in V generato da r vettori $v_1, \ldots, v_r$.

Ogni applicazione lineare $f : V \to W$ determina una operazione lineare, chiamata pull-back, della forma

$$\Lambda^r(W^*) \to \Lambda^r(V^*), \quad \alpha \mapsto f^*\alpha := \alpha(f\cdot, \ldots, f\cdot).$$

Data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, la base duale determina una base di $\Lambda^r(V^*)$ formata da elementi della forma $v_{i_1}^* \wedge \ldots v_{i_r}^*$, dove $1 \le i_1 \le \cdots \le i_r \le n$. Usando notazione compatta, lo scriveremo v^I. Ne deduciamo che $\Lambda^r(V^*)$ ha dimensione $\binom{n}{r}$.

Esempio. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ sono due basi di V e $M := M^{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}$, allora $\tilde{v}_1^* \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_n^* = \det(M) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ (usando $\det(M^t) = \det(M)$).

Se $f : V \to W$ ha matrice M rispetto a basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, allora

$$f^*(w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*) = \det(M) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*.$$

Algebra tensoriale su varietà . Sia M una varietà differenziabile. Applicando le operazioni viste sopra a T_pM, T_p^*M, per ogni $p \in M$, otteniamo fibrati tensoriali su M della forma $TM^{r,s} := (TM^{\otimes^r}) \otimes (T^*M^{\otimes^s})$, etc. Tali insiemi possono essere dotati di strutture differenziabili nel solito modo. Localmente TM e T^*M corrispondono a dominii $U_i \times \mathbb{R}^n$, $U_i \times (\mathbb{R}^n)^*$. Facendo il prodotto tensoriale tra spazi $\{x\} \times \mathbb{R}^n$, $\{x\} \times (\mathbb{R}^n)^*$ otteniamo dominii $U_i \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes^r}) \otimes (((\mathbb{R}^n)^*)^{\otimes^s})$. Li incolliamo tra loro tramite prodotti di Kronecker delle matrici che rappresentano $d\phi_j^{-1} \circ d\phi_i$, $d\phi_j^* \circ (d\phi_i^*)^{-1}$.

Definizione 12.1 *Un tensore su M è una sezione di un qualche fibrato tensoriale, ossia una mappa differenziabile $T : M \to T^{r,s}M$ tale che, per ogni $p \in M$, $T(p) \in (T_pM^{\otimes^r}) \otimes (T_p^*M^{\otimes^s})$.*

Osservazione. Al solito, possiamo equivalentemente definire un tensore come una collezione di mappe $U_i \to ((\mathbb{R}^n)^{\otimes^r}) \otimes (((\mathbb{R}^n)^*)^{\otimes^s})$ che si comportano in modo adeguato rispetto a cambiamenti di coordinate. Come già detto, tale definizione può essere pratico dal punto di vista computazionale ma rischia di nascondere il significato intrinseco dell'oggetto in questione, ossia il suo legame con TM, T^*M. Ancora una volta si tratta della differenza tra astratto e concreto, analogo a quanto vista in GAL1 riguardo a spazi vettoriali V e spazi di coordinate $\mathbb{R}^n$.

Dato un diffeomorfismo ϕ, possiamo definire l'operazione pull-back su qualunque tensore usando opportunamente le operazioni di pull-back e push-forward: per esempio, $\phi^*(X \otimes \alpha) := \phi^{-1}(X) \otimes \phi^*\alpha$. Usando corrispondentemente i flussi di campi vettoriali possiamo definire la derivata di Lie: $\mathcal{L}_X T := \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t^* T$. Questo per esempio implica:

- Sia $T := f$ una funzione. Allora $\mathcal{L}_X f = df(X)$.
- Sia $T := \alpha$ una 1-forma. Allora
$$d(\alpha(Y))(X) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y).$$
  Analogamente, scegliendo $T := g$,
$$d(g(Y,Z))(X) = \mathcal{L}_X(g(Y,Z)) = (\mathcal{L}_X g)(Y,Z) + g(\mathcal{L}_X Y, Z) + g(Y, \mathcal{L}_X Z).$$
- Siano T_1, T_2 tensori. Allora
$$\mathcal{L}_X(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_X T_2).$$

L'utilità pratica di tale operazione è soprattutto evidente per il fatto seguente: $\mathcal{L}_X T = 0$ sse il flusso di X preserva T. In tal caso, diremo che ϕ_t sono simmetrie di M rispetto alla struttura algebrica definita da T. Il campo vettoriale corrispondente X si dirà simmetria infinitesimale.

Esempio. La condizione $\mathcal{L}_X g = 0$ significa che le ϕ_t sono isometrie. Il campo X si dice allora campo vettoriale di Killing. In Meccanica, ogni campo vettoriale Hamiltoniano è una simmetria infinitesimale rispetto alla forma simplettica ω.

Dentro i fibrati tensoriali ritroviamo, come sottovarietà , i fibrati dei tensori simmetrici e dei tensori alternanti. In quanto tali, ereditano una struttura differenziabile da quella sul $TM^{r,s}$ ambiente. In particolare:

1. Una metrica su M è una sezione del fibrato $T^*M \otimes T^*M$ che, in ogni punto, è definito positiva nel senso dell'algebra lineare.

2. Denotiamo con $\Lambda^r(T^*M)$ il fibrato delle forme r-multilineari alternanti su T^*M e con $\Lambda^r(M)$ lo spazio vettoriale (infinito-dimensionale) delle sue sezioni, ossia delle r-forme differenziali su M.

Esempio. Per dare una struttura differenziale a $\Lambda^r(T^*M)$, possiamo alternativamente calcolare come sono fatte le mappe di transizione. Il caso più semplice è quando $r = dim(M)$. In tal caso l'algebra lineare vista sopra mostra che le carte locali sono della forma $U_i \times \mathbb{R}$ e che le mappe di transizione sono della forma

$$U_i \times \mathbb{R} \to U_j \times \mathbb{R}, \quad (x, a) \mapsto ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), \det((d(\phi_j)^*_{|\phi_i(x)}) \circ (d(\phi_i)^*_{|x})^{-1})(a)).$$

Una presentazione dignitosa della teoria delle forme differenziali dovrebbe contenere almeno i seguenti elementi:

- Definizione dell'operatore d, che associa ad ogni r-forma una $(r+1)$-forma. Forme chiuse, forme esatte. Ogni forma esatta è chiusa, ossia $d(d\alpha) = 0$.
- Integrazione di r-forme su r-sottovarietà orientate (possibilmente con bordo) $\Sigma \subseteq M$. In particolare, quando $r = dim(M)$ e M è orientata, possiamo integrare una r-forma α su M e sfruttarla per definire l'integrale di funzioni: $\int_M f\alpha$.
- Teorema di Stokes: se Σ ha dimensione r e α è una $(r-1)$-forma, allora $\int_\Sigma d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha$.
- Applicazioni del teorema di Stokes agli integrali di forme chiuse/esatte.
- Relazione tra d e derivata di Lie: $\mathcal{L}_X\alpha = d\iota_X\alpha + \iota_X d\alpha$.

Rimandiamo altrove per una tale trattazione, limitandoci ad osservare che, al solito, sono possibili due approcci: locale, globale. La definizione di $d\alpha$, per esempio, si può dare molto agevolmente in coordinate locali: data $\alpha = \sum a_I dx^I$, poniamo $d\alpha := \sum d(a_I) \wedge dx^I$. Bisogna poi dimostrare che tale definizione è indipendente dalla scelta di coordinate, il che equivale a dimostrare che, per ogni diffeomorfismo ϕ (e più in generale per ogni mappa ϕ), $d(\phi^*\alpha) = \phi^*(d\alpha)$.

Alternativamente, esiste una formula globale in termini di come opera su campi vettoriali. Nel caso $\alpha \in \Lambda^1(M)$, per esempio, si trova che

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]).$$

Osservazione. A proposito di integrazione di funzioni, potrebbe essere utile dettagliare il problema nel modo seguente. Prendiamo la funzione più semplice possibile $f \equiv 1$. Scegliamo una carta (U, V, ϕ) su M. Proviamo a definire l'integrale di f senza usare una forma differenziale: la definizione ovvia è $\int_V f := \int_U (f \circ \phi)\, dx$, che in questo caso dà come risultato il volume di U. Proviamo ora a cambiare coordinate, per esempio con una semplice dilatazione $y = rx$: la nuova carta è allora (rU, V, ψ), dove $\psi(y) = \phi(r^{-1}y)$. Con questa scelta otteniamo il risultato diverso $\int_V f = \mathrm{vol}(rU) = r^n \mathrm{vol}(U)$, confermando che la definizione non ha senso. Il problema è legato al fatto che gli integrali in $\mathbb{R}^n$ non sono invarianti rispetto a diffeomorfismi. La formula di cambiamento variabili spiega che cambiano con il (valore assoluto del) determinante dello Jacobiano.

Dal punto di vista intuitivo, il problema è che la definizione (fallimentare) sopra sfrutta, di volta in volta, l'unità di misura naturale corrispondente alle variabili usate: dx in un caso, dy in un altro. Cambiando coordinate, cambia dunque unità di misura. Una buona nozione di integrazione deve invece scegliere fin dall'inizio una unità di misura e usare solo quella. In $\mathbb{R}^n$, se scegliamo l'unità di misura $\alpha := dy$, allora l'unità di misura indotta rispetto alle variabili x non è dx ma $r^n dx$, il che corrisponde esattamente alla formula di cambiamento variabili.

Su M la strategia sarà simile. Introdurre la forma differenziale α serve precisamente a scegliere una unità di misura iniziale. In ciascun sistema di coordinate non useremo l'unità di misura naturale, ma quella indotta $\phi_i^*\alpha$. Si noti che

$$(\phi_i)^*\alpha = (\phi_j \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_i)^*\alpha = (\phi_j^{-1} \circ \phi_i)^*\phi_j^*\alpha,$$

il che dimostra che le due misure indotte $(\phi_i)^*\alpha$, $(\phi_j)^*\alpha$, rispetto a variabili diverse, sono legate esattamente dalla formula di cambiamento variabili. Questo implica che danno luogo allo stesso integrale.[12]

Fibrati vettoriali. Si noti che, sia per TM sia per T^*M, le mappe di transizione non sono diffeomorfismi a casaccio: la seconda componente è una mappa lineare, anzi un isomorfismo, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ciò corrisponde al fatto che le varietà TM e T^*M sono unione di spazi vettoriali. La struttura algebrica su ciascun spazio vettoriale corrisponde alla struttura algebrica standard sulla seconda componente di ciascuna carta locale, della forma $U_i \times \mathbb{R}^n$.

Anche i fibrati tensoriali hanno forma simile. Sono tutti casi particolari della seguente nozione.

Definizione 12.2 *Sia M una varietà differenziabile con atlante $\{(U_i, V_i, \phi_i)\}$. Un fibrato vettoriale su M è una varietà differenziabile E con un atlante $\{(U_i \times \mathbb{R}^k, W_i, \psi_i)\}$ tale che $(\psi_j^{-1} \circ \psi_i)(x, v) = ((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(x), M_{ij|x}v)$, con $M_{ij|x} \in GL(k, \mathbb{R})$.*

[12] Maybe next year define $\int_M \alpha$, using pullback and coordinate chart. Mention role of partition of unity: it avoids multiple counting on overlaps.

Risulta allora che E ha dimensione $n + k$ e che esiste una mappa $\pi : E \to M$ che, localmente, coincide con $(x, v) \mapsto x$. Ogni controimmagine $\pi^{-1}(p)$ ha una struttura di spazio vettoriale.

Osservazione. Spesso i fibrati vettoriali vengono dotati di struttura ulteriore, quali un prodotto scalare o una struttura complessa. La nozione di fibrato fornisce il linguaggio appropriato, per esempio, per parlare di spinori.

13 Connessioni.

Ci eravamo posti l'obbiettivo di ricostruire tutta l'Analisi, già nota su $\mathbb{R}^n$, su qualunque varietà differenziabile M. Fin qui siamo arrivati a definire le derivate prime di mappe differenziabili. Nel frattempo abbiamo anche definito oggetti nuovi, che in $\mathbb{R}^n$ sapremmo, banalmente, derivare una componente alla volta: campi vettoriali, forme differenziali, tensori.

Domanda: riusciamo su M a derivare anch'essi? Riusciamo a definire derivate di ordine superiore? Studiamo meglio quanto già visto.

1. A prima vista l'operazione $Y \mapsto [X, Y]$ sembrerebbe una derivazione del campo vettoriale Y, in direzione X. Come già detto, c'è però un problema: $[X, Y]$ (più in generale, la derivata di Lie di un tensore) contiene in sè derivate non solo di Y, ma anche di X. Questo non succede per esempio nella definizione della derivata direzionale $df(v)$ di una funzione, che invece sfrutta solo il valore della direzione v nel punto dato. In questo senso la derivata di Lie non costituisce una nozione appropriata di derivata direzionale.

2. La derivata esterna $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ ha proprietà molto interessanti. In particolare, dato $v \in T_pM$, $d\alpha(v, \cdot, \dots, \cdot)$ potrebbe essere visto come una derivata direzionale di α. Usando il linguaggio sotto, potremmo semplificare il comportamento di d e dire che definisce un'applicazione lineare $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^k(M)$ e che rispetta una regola di Leibniz, come richiesto ad una connessione. Si noti però che ha la seguente peculiarità : $d(d\alpha) = 0$, rendendo impossibile una derivata seconda. Inoltre, ha senso solo per forme differenziali, non per altri tipi di tensori.

3. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Supponiamo di voler definire le sue derivate seconde. Si noti che l'espressione $X(Yf))$, già usata per definire $[X, Y]$, non è adatta perchè contiene derivate prime di Y (oltre a derivate seconde di f). Alternativamente possiamo tentare di partire dal fatto che il suo differenziale df è una 1-forma. Purtroppo, però , abbiamo appena argomentato che non sappiamo come derivarlo per ottenere le derivate seconde di f.

In effetti, per tutti questi scopi la struttura di varietà differenziale non è ancora sufficiente. È necessario scegliere una struttura ulteriore su M, chiamata connessione. Il primo passo consiste nel chiarire esattamente quali sono le proprietà che vogliamo ottenere. Si tratta, in sostanza, di imitare le proprietà dell'operazione d dallo spazio delle funzioni (sezioni del fibrato banale $M \times \mathbb{R}$) allo spazio delle 1-forme (sezioni di T^*M).

Definizione 13.1 *Una connessione su M è un'applicazione lineare ∇ dallo spazio delle sezioni di TM (campi vettoriali) allo spazio delle sezioni di $T^*M \otimes TM$ (endomorfismi di TM) con la seguente proprietà aggiuntiva (regola di Leibniz): $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$.*

In questo modo, per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$, risulta definita la derivata direzionale $\nabla_v X(p)$.

Osservazione. Questa definizione è tremendamente importante per la Fisica: senza la nozione di connessione non avremmo la nozione di accelerazione, dunque non sapremmo impostare $F = ma$!

Osservazione. Localmente, per capire il funzionamento di ∇ basta sapere come agisce sulla base corrispondente ad una parametrizzazione. Tale azione viene solitamente definita in termini di certe funzioni Γ_{ij}^k definite localmente dalla seguente relazione, note come simboli di Christoffel:

$$\nabla_{\phi(\partial x_i)}\phi(\partial x_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \, \phi(\partial x_k).$$

Per calcolare ∇X basta allora scrivere X in termini di coordinate, e usare la regola di Leibniz.

Notare, per inciso, l'uso del push-forward (che per l'appunto genera campi vettoriali) piuttosto che di $d\phi(\partial x_i)$. In questo modo Γ_{ij}^k risultano essere funzioni (locali) su M. La definizione di connessione ci lascia la libertà , in alternativa, di scrivere

$$\nabla_{d\phi(\partial x_i)}\phi(\partial x_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \, \phi(\partial x_k),$$

ottenendo funzioni Γ_{ij}^k su $\mathbb{R}^n$.

Non avrebbe invece senso per esempio scrivere $\nabla_{\phi(\partial x_i)} d\phi(\partial x_j)$, perchè vorrebbe dire applicare ∇ a qualcosa che non è un campo vettoriale su M.

Si può dimostrare che ogni M ammette infinite connessioni. Tipicamente si tenta di scegliere una connessione avente compatibilità extra con M o con le sue altre strutture aggiuntive. Per esempio, si può dimostrare che ogni varietà Riemanniana ha una connessione speciale, chiamata connessione di Levi-Civita.

Una delle prime applicazioni della nozione di connessione consiste nel formulare il concetto seguente.

Definizione 13.2 *Sia M una varietà differenziabile dotata di una connessione ∇. Sia X un campo vettoriale su M. Tale X si dice parallelo se $\nabla_v X = 0$ per ogni $v \in T_pM$ ed ogni $p \in M$.*

Sia X un campo vettoriale definito lungo una curva regolare α in M. Tale X si dice parallelo se $\nabla_v X = 0$ per ogni v tangente alla curva e ogni p sulla curva (equivalentemente, data una parametrizzazione, $\nabla_{\dot\alpha} X = 0$).

In realtà , la proprietà di essere parallelo su M (anche solo su un aperto di M) è tendenzialmente troppo forte: tali campi solitamente non esistono. La proprietà più interessante è quella di essere parallelo lungo una curva. Data una parametrizzazione di α, tale condizione definisce infatti un sistema di equazioni differenziali ordinari lungo $\alpha(t)$ (lo si vede bene in coordinate locali). Basta allora fornire un punto iniziale $p := \alpha(0)$ ed un dato iniziale $X \in T_pM$ per ottenere un'unico campo vettoriale parallelo $X(t)$ definito lungo α. Tale operazione prende il nome di "trasporto parallelo" di $X \in T_pM$ lungo $\alpha(t)$.

Supponiamo ora di scegliere una base X_i di T_pM e di fare il trasporto parallelo di ciascun X_i lungo $\alpha(t)$. Il risultato è una base $X_i(t)$ per ciascun $T_{\alpha(t)}M$, dunque isomorfismi tra tali spazi. In questo senso, una connessione "connette" tra loro spazi tangente diversi. Sia ora X un campo vettoriale lungo α, dunque $X(t) = \sum x_i(t) X_i(t)$. Sia $v \in T_pM$. Allora

$$\nabla_v X = \sum dx_i(v) X_i + x_i \nabla_v X_i = \sum dx_i(v) X_i.$$

In altre parole, l'uso di una base parallela riduce la derivata covariante di X alle derivate usuali delle sue coordinate.

Osservazione. Una connessione genera anche una nozione di geodetiche e di curvatura. Ne parleremo più avanti, nel caso specifico della connessione di Levi Civita.

A partire da una connessione come sopra, possiamo definire la derivata direzionale di qualunque tensore T. Si tratta semplicemente di imporre alcune regole naturali, seguendo il modello della regola di Leibniz. Per esempio:

- Sia f una funzione. Imponiamo che $\nabla_v f = df(v)$.
- Sia α una 1-forma. Per definire $\nabla_v \alpha$ imponiamo che, per ogni campo vettoriale X,

  $$d(\alpha(X))(v) = \nabla_v(\alpha(X)) = (\nabla_v \alpha)(X) + \alpha(\nabla_v X).$$

  In particolare, $\nabla(df)$ produce una nozione di Hessiana di f. Una definizione analoga vale per le k-forme. Si noti che $\nabla\alpha$ non coincide con $d\alpha$.
- Siano T_1, T_2 tensori. Imponiamo che

  $$\nabla_v(T_1 \otimes T_2) = \nabla_v T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_v T_2.$$

Osservazione. Se invece vogliamo derivare sezioni di un fibrato vettoriale $E \to M$ di altro tipo, dobbiamo estendere la nozione di connessione. A questo scopo conviene introdurre il fibrato $\Lambda^r(T^*M) \otimes E$ e lo spazio delle sue sezioni

$\Lambda^r(E)$. Una connessione su E è allora un operatore $\nabla : \Lambda^0(E) \to \Lambda^1(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz. In questo caso possiamo ancora definire trasporto parallelo e curvatura, ma non ha senso parlare di geodetiche.

Riflessioni conclusive. Torniamo alla domanda originale: come derivare un tensore in una direzione v? Abbiamo individuato due strategie distinte.

1. Per semplificare, guardiamo il caso di un campo vettoriale X.

La prima cosa da capire è dove, esattamente, sta la difficoltà . Il punto è che la definizione di rapporto incrementale richiede di lavorare all'interno di uno stesso spazio vettoriale, mentre i vettori X_p che compongono X appartengono a tanti spazi diversi T_pM. Questo problema non si pone derivando funzioni.

Abbiamo allora trovato due soluzioni diverse: la derivata di Lie trascina X usando il flusso di v, in modo da riportarlo sempre ad uno stesso punto p. In questo modo, il rapporto incrementale ha senso. Il prezzo che si paga è che v deve essere un campo vettoriale: non basta un singolo $v \in T_pM$.

Il funzionamento di una connessione si basa invece su un'idea differente: scegliere una curva $\alpha(t)$ tangente a v e costruire isomorfismi tra gli spazi tangente lungo tale curva, in modo da poter identificare tutti i vettori $X_{|\alpha(t)}$ con vettori nell'unico spazio tangente T_pM.

2. L'altra strategia si applica solo alle forme differenziali: definiamo $d\alpha$ in modo da ottenere una cancellazione dei termini indesiderati (come nella formula vista sopra per le 1-forme). Questa strategia ha però funzionato solo per questo specifico tipo di tensore, mettendo dunque in risalto la peculiarità (potremmo dire naturalità) delle forme differenziali rispetto a tensori più generali.

Si noti che la stessa strategia è stata usata, a fini diversi (cancellazione delle derivate seconde di f), per definire $[X, Y]$.

14 Orizzonti differenziali.

Qualcuno, una volta, disse:

"Fatti non foste a viver come bruti, ma per seguir virtute e canoscenza."

Poi, però , colò a picco.

A dimostrazione del fatto che non la teoria finisce mai, indichiamo qualche direzione ulteriore.

Analisi e Topologia. Uno degli aspetti più affascinanti della geometria differenziale è la scoperta di una fortissima simbiosi tra Analisi e Topologia, che si manifesta in svariati modi.

Funzioni. Una funzione continua su un compatto ha sempre punti di massimo e di minimo. Se la funzione è differenziabile, in coordinate locali tali punti hanno rispettivamente Hessiana non-positiva/non-negativa. In altre parole, la topologia (compattezza) influenza l'esistenza di certi punti critici. Più in generale, in ogni punto critico l'Hessiana ha una certa segnatura. La teoria di Morse spiega i legami tra la struttura topologica di una varietà e l'esistenza di punti critici di segnatura data.

Campi vettoriali. Una varietà M si dice, informalmente, pettinabile se ammette un campo vettoriale mai nullo. Non è una proprietà scontata: il toro T^2 è pettinabile, la sfera $\mathbb{S}^2$ no. Il teorema di Poincarè -Hopf spiega i legami tra la struttura topologica di M e la sua pettinabilità .

Alcune varietà ammettono più campi vettoriali aventi la proprietà di essere, punto per punto, linearmente indipendenti (dunque non-zero). La situazione migliore è quando ne hanno il massimo numero possibile, pari alla loro dimensione. Tali varietà si dicono parallelizzabili. Per esempio, tori e, più in generale, gruppi di Lie sono parallelizzabili.

Forme differenziali. La simbiosi tra forme differenziali e topologia si manifesta in svariati modi. In particolare:

1. Una forma volume su M è , per definizione, una sezione mai nulla di $\Lambda^n(M)$, dove $n = dim(M)$. Non è detto che tali forme esistano. L'esistenza di una tale forma è equivalente alla orientabilità di M.

2. La teoria di de Rham sfrutta le nozioni di forme chiuse/esatte per costruire spazi vettoriali che codificano aspetti della topologia di M. In particolare, tali spazi risultano essere isomorfi ai duali degli spazi di omologia singolare, costruiti con metodi della topologia algebrica.

Connessioni. La teoria di Chern-Weil usa connessioni e forme differenziali per studiare invarianti di fibrati vettoriali. Una delle grandi scoperte degli anni '80 è stata la scoperta di relazioni tra connessioni, strutture differenziabili e topologia di una varietà . Questo fa parte della teoria di gauge.

Meccanica classica. Maybe next year (tanto la sapete già).[13][14]

15 Geometria Riemanniana: nozioni di base

Dividiamo questa sezione in due parti.

[13] This article is a stub

[14] Emphasize: (i) Mechanics is basically built upon differential calculus, not Riemannian geometry. However, physical applications usually need a metric to define the Lagrangian. This metric is induced on the configuration space by the metric in V_3 (actually, the affine space modelled on V_3). (ii) We integrate the Lagrangian along curves in a way which depends on the parametrization. This makes sense because we are doing physics, not geometry. (iii) Compared with what we discuss in this course, Lagrangian mechanics represents a major leap. It doesn't waste time fiddling with F=ma, it starts by choosing energy as the founding principle. This level incorporates the configuration space from the start, gives new meaning to paths satisfying F=ma (critical points), provides an ideal platform for detecting preserved quantities, etc. Of course, all this applies only to those systems which admit a Lagrangian. (iv) The symplectic structure is used to transform the Hamiltonian into a vector field. Solving Hamiltonian equations corresponds to finding flow of this vector field.

Algebra lineare: Ci serviranno le seguenti nozioni di GAL1.

1. La nozione astratta di forma bilineare simmetrica $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ può al solito essere concretizzata scegliendo una base $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$. Possiamo allora associare a ϕ la matrice

$$\phi(\cdot, \cdot) \simeq M := \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) & \ldots & \phi(v_1, v_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi(v_n, v_1) & \phi(v_n, v_2) & \ldots & \phi(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

in modo che $\phi(v, w) = X^t M Y$, dove X, Y sono le coordinate di v, w rispetto a $\mathcal{B}$. La simmetria di ϕ corrisponde alla simmetria di M.

2. Il risultato centrale sulle forme bilineari simmetriche è il teorema di Sylvester, che associa ad ogni tale ϕ la sua segnatura. In particolare si distinguono le nozioni di ϕ non degenere, ϕ di Minkowski, ϕ definita positiva. In quest'ultimo caso useremo spesso la notazione $v_1 \cdot v_2$, $< v_1, v_2 >$ oppure $g(v_1, v_2)$.[15]

3. Dato (V, ϕ) ed un sottospazio $W \leq V$, la restrizione di ϕ a W rimane bilineare e simmetrica. Se ϕ è non-degenere, la sua restrizione può invece diventare degenere. Questo è rilevante per chi lavora con la metrica di Minkowski. Supponiamo però che ϕ sia un prodotto scalare, ossia sia definita positiva. Allora la sua restrizione rimane definita positiva, e definisce dunque un prodotto scalare su W.

4. Supponiamo ϕ sia definita positiva, ossia sia un prodotto scalare. In tal caso, indicando tale prodotto scalare con g, scelta qualunque base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e ponendo $g_{ij} = g(v_i, v_j)$, il numero $\det(g_{ij})$ definisce il volume del parallelogramma generato da tale base. Se V è orientata e la base è positiva, diciamo che la forma $\mathrm{vol}_g := \det(g_{ij}) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ è la forma volume di (V, g) (rispetto all'orientazione scelta). Tale forma risulta allora indipendente dalla base scelta.

Varietà Riemanniane. Sia M una varietà differenziabile. Una struttura Riemanniana (metrica) su M è il dato di un prodotto scalare g_p su ciascun piano tangente T_pM, che varii in modo differenziabile al variare di $p \in M$. Al solito, il modo più efficiente per formalizzare questa nozione è in termini di sezioni differenziabili del fibrato $T^*M \otimes T^*M$. Considerato che ogni spazio vettoriale ammette infiniti prodotti scalari, è chiaro che ogni varietà differenziabile ammette infinite metriche.[16]

I modi più semplici per sfruttare una metrica sono:

[15] I fisici usano anche la notazione $< \cdot | \cdot >$, ma questo è un problema loro.

[16] Oversimplification: must prove the existence of Riemannian metrics. Turns out that Lorentzian metrics are actually obstructed! By the way: in special relativity the metric is built bottom-up, by noticing that the relevant Lorentz transformations are isometries of a certain quadratic form. This (together with the fact that their job is to measure stuff, ie reduce everything to numbers) partly explains the Physicists' maniacal impulse to work in coordinates. In general relativity the metric is built top-down, via Einstein's equations.

1. Possiamo definire la lunghezza di una curva differenziabile $\alpha : (a,b) \to M$ come segue:

$$\ell(\alpha) := \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt.$$

Usando la nozione di lunghezza, possiamo dotare (M,g) di una distanza: $d(p,q) := \inf_\alpha \ell(\alpha)$, al variare di tutte le curve $\alpha : (0,1) \to S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. M è dunque uno spazio metrico. Si può dimostrare che la topologia indotta su M da questa distanza coincide con la topologia di M.

A questo punto possiamo parlare, su M, di successioni di Cauchy e di completezza. Ne riparleremo più avanti, a proposito del teorema di Hopf-Rinow.

2. Supponiamo (M,g) sia orientata. Otteniamo allora, come sopra, una forma differenziale canonica vol_g su ciascun piano tangente, di grado $n = dim(M)$. Data una carta (U,V,ϕ) compatibile con l'orientazione, possiamo scrivere $\mathrm{vol}_g = \det(g_{ij}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ su U. In questo caso, $g_{ij} = g(d\phi(\partial x_i), d\phi(\partial x_j))$. Questa espressione dimostra che vol_g è differenziabile.

A questo punto possiamo definire il volume di $V \subseteq M$ (o sua porzione) come segue

$$\mathcal{A}(V) := \int_V \mathrm{vol}_g = \int_U \det(g_{ij}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Osservazione. Per quanto detto, ogni sottovarietà regolare Σ^k in (M,g) ha una metrica naturale, indotta per restrizione. Se è orientata, ha dunque anche una k-forma volume corrispondente. Integrandola, otteniamo il volume di Σ. Nel caso di una curva, tale forma si scrive tipicamente ds.

3. Data una funzione f su (M,g) orientata, possiamo parimenti definire l'integrale di f su $V \subseteq M$ come

$$\int_V f \, \mathrm{vol}_g = \int_U (f \circ \phi) \det(g_{ij}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

4. Data (M,g) ed una funzione $f : M \to \mathbb{R}$, possiamo sfruttare in ogni punto l'isomorfismo $T_pM \simeq T_p^*M$ indotto dalla metrica per trasformare la 1-forma df in un campo vettoriale ∇f, chiamato gradiente. Per costruzione, $df(X) = g(\nabla f, X)$.

5. La nozione di metrica porta alla seguente definizione.

Definizione 15.1 *Due varietà Riemanniane (M_1, g_1), (M_2, g_2) si dicono isometriche se esiste un diffeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$ tale che, per ogni $p \in M_1$, $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{(\phi(p))}M_2$ è una isometria tra spazi Euclidei. Detto altrimenti: $\phi^* g_2 = g_1$.*

Le due superfici si dicono localmente isometriche se per ogni $p \in M_1$ esiste una isometria locale $M_1 \to M_2$, e per ogni $q \in M_2$ esiste una isometria locale $M_2 \to M_1$.

Vedremo sotto esempi concreti nel caso delle superfici in $\mathbb{R}^3$.

6. Abbiamo menzionato che ogni varietà Riemanniana ha una connessione naturale, chiamata connessione di Levi-Civita. Lo stesso vale per le varietà dotate di una forma bilineare simmetrica non-degenere, quale quella di Minkowski. A partire da tale connessione possiamo definire geodetiche e curvatura. Rimandiamo però la trattazione di queste nozioni a più avanti, dopo una digressione sul caso specifico delle superfici in $\mathbb{R}^3$ che ci aiuterà a capire meglio tali concetti.

16 Geometria Riemanniana: superfici regolari

Il minimo sindacale (o forse il massimo legale?) per fisici/fisichesse/fisiq+ del XXI secolo.

Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Tale superficie ha una metrica canonica: quella indotta dall'immersione, per restrizione. Classicamente, tale metrica viene anche chiamata la prima forma fondamentale di S. In questa sezione vogliamo capire quale e quanta geometria (estrinseca) ulteriore possiamo sviluppare su S sfruttando tale metrica. In particolare, svilupperemo la nozione di curvatura. Quanto faremo darà lo spunto e l'intuizione necessari per sviluppare una nozione di curvatura su varietà Riemanniane astratte, legata alla connessione di Levi Civita.

Per cominciare, rivediamo rapidamente in questo caso specifico quanto già detto per le varietà Riemanniane in generale.

Scelta una carta locale $\{U, V, \phi\}$, sappiamo che $\{\phi_u, \phi_v\}$ fornisce una base per ciascun T_pS, con $p \in V$. Possiamo dunque rappresentare la metrica con una matrice. La notazione solitamente usata è la seguente:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \phi_u \cdot \phi_u & \phi_u \cdot \phi_v \\ \phi_v \cdot \phi_u & \phi_v \cdot \phi_v \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è $\sqrt{EG - F^2}$, che si trova coincidere con $\|\phi_u \times \phi_v\|$.[17]

Usando questa metrica, su S risultano definite le seguenti nozioni.

1. La lunghezza $\ell(\alpha)$ di una curva differenziabile $\alpha : (a, b) \to S$ coincide con la lunghezza della stessa curva vista invece come $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$.

Come sopra, indichiamo con d la distanza $d(p, q) := \inf_\alpha \ell(\alpha)$, al variare di tutte le curve $\alpha : (0, 1) \to S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Si può dimostrare che la topologia indotta su S da questa distanza coincide con la topologia usuale di S (indotta da $\mathbb{R}^3$).

Si noti che su S risulta definita una seconda distanza, indotta da $\mathbb{R}^3$: $d_3(p, q) := \|p - q\|$. Nel caso di una sfera, per esempio, tale distanza misura la lunghezza

[17] Al solito, la scelta $\phi_u = d\phi(\partial u)$ implica che stiamo parametrizzando tramite punti in U. Se volessimo parametrizzare tramite punti in V, useremmo il push-forward $\phi(\partial u)$.

della corda che, attraverso lo spazio, parte da p e arriva in q. Ovviamente tale distanza non c'entra nulla con le distanze effettivamente percorse da un oggetto che si muove da p a q restando vincolato alla sfera. La distanza d è dunque più adatta alla geometria di S.

Si noti che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio metrico completo. Ogni $S \subseteq \mathbb{R}^3$ chiusa è dunque uno spazio metrico completo rispetto alla distanza indotta da d_3. D'altra parte, quando S è chiusa si dimostra che d e d_3 definiscono le stesse successioni di Cauchy, dunque la stessa nozione di completezza. Concludiamo che ogni S chiusa è uno spazio metrico completo anche rispetto a d.

Esempio. Una sfera $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è uno spazio metrico completo.

Sia S un piano meno un punto, in $\mathbb{R}^3$. In questo caso le due distanze coincidono, ma S non è completo.

Sia S un cilindro meno una retta, in $\mathbb{R}^3$. Prendiamo una successione di punti x_n posti alternativamente su lati opposti della retta, tale che x_n converge ad un punto della retta. Allora tale successione è di Cauchy rispetto a d_3 ma non rispetto a d (perchè ogni curva che congiunge x_n, x_{n+1} deve fare il giro del cilindro).

2. Data una carta (U, V, ϕ) su S, possiamo definire l'area di $V \subseteq S$ (o sua porzione) come segue

$$\mathcal{A}(V) := \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint_U \|\phi_u \times \phi_v\| dudv.$$

Si può dimostrare che ciò coincide con il limite dell'area di superfici poligonali approssimanti $V \subseteq S$.

Cambiando coordinate con $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ si trova che

$$\|\phi_\xi \times \phi_\eta\| = \|\phi_u \times \phi_v\| \cdot |\det d(u, v)_{|(\xi,\eta)}|.$$

Questo conferma che, cambiando variabili, l'area rimane invariata.

Osservazione. Possiamo definire l'area di S tramite una suddivisione iniziale di S in sottoinsiemi di questo tipo, poi sommandone le aree. La nozione di area non richiede dunque l'orientabilità di S. Se però S è orientata, la quantità $\sqrt{EG - F^2}\, dudv$, definita tramite carte locali, si trasforma nel modo richiesto per definire una 2-forma differenziale globale su S: si tratta della forma vol_g, definita precedentemente. L'area di S si può ottenere come integrale di questa forma.

3. Data una funzione f su V, possiamo definire l'integrale di f su $V \subseteq S$ (o sua porzione) come

$$\iint_U (f \circ \phi)\sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint_U (f \circ \phi)\|\phi_u \times \phi_v\| dudv.$$

Per quanto riguarda la nozione di superfici isometriche, diamo semplicemente il seguente esempio.

Esempio. Il piano ed un cilindro non sono isometrici perchè non sono globalmente omeomorfi/diffeomorfi. Sono però localmente isometrici. Intuitivamente, ciò corrisponde al fatto che possiamo tagliare il cilindro e stenderlo per ottenere una porzione di piano, senza localmente distorcere le distanze tra punti. Lo stesso avviene per un cono (inteso senza il punto vertice). Piano, cilindro e cono sono dunque tutti localmente isometrici. Cono e cilindro sono anche globalmente diffeomorfi, ma non isometrici.

Curvatura. Studiando le curve abbiamo deciso che la nozione di curvatura deve codificare la variazione della retta tangente, arrivando così a definirla tramite $\ddot{\alpha}(s)$. Analogamente, ora decidiamo che la curvatura di S deve codificare la variazione del piano tangente. Considerato che tale piano è alternativamente caratterizzabile dalla sua retta normale, risulta naturale definire la curvatura di S tramite la variazione di tale retta, ossia di un suo versore normale N. Definiremo dunque la curvatura solo per S orientabili, usando l'orientazione per scegliere il versore N.

Osservazione. Si noti che questa impostazione del concetto di curvatura è pesantemente estrinseca.

Definizione 16.1 *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata. Sia $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria. La mappa di Gauss è la mappa*

$$N : S \to \mathbb{S}^2, \quad p \mapsto N(p)$$

che individua il versore normale corrispondente all'orientazione scelta.

Usando coordinate compatibili con l'orientazione troviamo $N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$, dunque la mappa di Gauss è differenziabile.

La variazione di N è codificata dal suo differenziale dN_p, che in teoria è una mappa $T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Si noti però che $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ è l'insieme di vettori in $\mathbb{R}^3$ normali a $N(p)$, dunque $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$ (visti come spazi vettoriali passanti per $O \in \mathbb{R}^3$). Penseremo dunque al differenziale della mappa di Gauss come un endomorfismo $dN_p : T_pS \to T_pS$.

A questo punto ci sono due modi per estrarre da dN_p un numero che possa definire la curvatura. Vedremo sotto perchè , in realtà , preferiamo lavorare con $-dN_p$.

Definizione 16.2 *La curvatura Gaussiana di $p \in S$ è $K_p := \det(-dN_p)$.*

La curvatura media di $p \in S$ è $H_p := \operatorname{tr}(-dN_p)$.

Osservazione. Se cambiamo l'orientazione di S, N e dN_p cambiano di segno. La curvatura Gaussiana rimane invariata (ossia $\det(-dN_p) = \det(dN_p)$), quella media cambia di segno. Questo significa che la curvatura Gaussiana può anche essere definita per superfici non orientabili, la curvatura media no.

I principali fatti riguardanti la mappa di Gauss nascono dal seguente calcolo. Sia X un campo tangente su S, $p \in S$, $v \in T_pS$. Derivando la relazione $N \cdot X = 0$, troviamo

$$-dN_p(v) \cdot X = dX(v) \cdot N_p,$$

dove dX è calcolato come mappa $S \to \mathbb{R}^3$. In altre parole, $-dN \cdot X$ esprime la componente normale di dX.

In particolare, sia ϕ una parametrizzazione locale di S. Applicando quanto detto ai vettori ϕ_u, ϕ_v,

$$\begin{aligned} dN(\phi_u) \cdot \phi_u + N_{|\phi} \cdot \phi_{uu} = 0, \quad dN(\phi_v) \cdot \phi_u + N_{|\phi} \cdot \phi_{uv} = 0, \\ dN(\phi_u) \cdot \phi_v + N_{|\phi} \cdot \phi_{vu} = 0, \quad dN(\phi_v) \cdot \phi_v + N_{|\phi} \cdot \phi_{vv} = 0. \end{aligned}$$

Proposizione 16.3 *$-dN_p : T_pS \to T_pS$ è un endomorfismo auto-aggiunto: $\forall v, w \in T_pS$,*

$$(-dN_p(v)) \cdot w = v \cdot (-dN_p(w)).$$

Il calcolo mostra infatti che

$$(-dN(\phi_u)) \cdot \phi_v = N \cdot \phi_{vu} = N \cdot \phi_{uv} = (-dN(\phi_v)) \cdot \phi_u,$$

che è quanto basta per dimostrare la relazione voluta sui vettori di una base, dunque in generale.

L'endomorfismo $-dN$ è dunque equivalente al seguente oggetto.

Definizione 16.4 *Sia S una superficie regolare orientata, con versore normale N. La seconda forma fondamentale di S in $p \in S$ è la forma bilineare simmetrica (possibilmente degenere o con segnatura mista)*

$$T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \quad (w_1, w_2) \mapsto -dN_p(w_1) \cdot w_2.$$

Il senso geometrico della seconda forma fondamentale è determinato dalla formula vista sopra: applicata ad un campo vettoriale tangente, rappresenta la proiezione normale delle sue usuali derivate direzionali.

Il teorema spettrale implica che $-dN_p$ è diagonalizzabile tramite una base ortonormale:

$$-dN_p \simeq \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

I numeri k_1, k_2 si dicono curvature principali di $p \in S$. In questi termini otteniamo $K_p = k_1 k_2$, $H_p = k_1 + k_2$. La segnatura della seconda forma fondamentale dipende dai segni di k_1, k_2. Vedremo più avanti come le curvature principali legano la seconda forma fondamentale alla curvatura di certe curve in S.

Vogliamo ora capire quali informazioni geometriche sono contenute nelle funzioni $K, H : S \to \mathbb{R}$. Di seguito alcuni esempi.

1. Il segno della curvatura Gaussiana corrisponde ad una certa convessità della superficie, nel senso seguente.

Sia ϕ una parametrizzazione compatibile con l'orientazione. Supponiamo $\phi(0,0) = p$. Scriviamo

$$\begin{aligned}\phi(u,v) =& \phi(0,0) + u\,\phi_{u|(0,0)} + v\,\phi_{v|(0,0)} \\ &+ \frac{1}{2}(u^2\phi_{uu|(0,0)} + 2uv\,\phi_{uv|(0,0)} + v^2\phi_{vv|(0,0)}) + R(u,v)\end{aligned}$$

Facendo il prodotto scalare di ambo lati con N_p, otteniamo

$$\begin{aligned}(\phi(u,v) - p)\cdot N_p &= (u^2\phi_{uu|(0,0)} + 2uv\,\phi_{uv|(0,0)} + v^2\phi_{vv|(0,0)})\cdot N_p + R(u,v)\cdot N_p \\ &= -u^2\phi_{u|(0,0)}\cdot dN(\phi_u)_{|p} - uv\,\phi_{u|(0,0)}\cdot dN(\phi_v)_{|p} \\ &\quad - uv\,\phi_{v|(0,0)}\cdot dN(\phi_u)_{|p} - v^2\phi_{v|(0,0)}\cdot dN(\phi_v)_{|p} + R(u,v)\cdot N_p \\ &= -\frac{1}{2}dN_p(w)\cdot w + R(u,v)\cdot N_p,\end{aligned}$$

dove $w = u\phi_{u|(0,0)} + v\phi_{v|(0,0)} = d\phi_{|(0,0)}((u,v)) \in T_pS$.

Il termine a sinistra rappresenta l'altezza del punto $\phi(u,v)$ rispetto al piano T_pM. Tenendo conto del fatto che R tende a zero più rapidamente degli altri termini, risulta che il segno di tale altezza è determinato dal valore assunto dalla seconda forma fondamentale. Più precisamente, ciò che interessa è la corrispondente forma quadratica $Q_p(w) := -dN_p(w)\cdot w$. In particolare, evidenziamo i seguenti casi.

Se $K_p > 0$ allora gli autovalori k_1, k_2 di $-dN_p$ hanno lo stesso segno, dunque la forma bilineare è definita positiva o negativa. In ambo casi l'altezza ha segno costante in un intorno di p, dunque otteniamo la seguente informazione geometrica riguardo S: localmente, la superficie si colloca in uno solo dei due semispazi definiti da T_pS. Detto altrimenti, la condizione $K > 0$ può essere intesa come una condizione di convessità /concavità per la funzione altezza.

Se invece $K_p < 0$ allora la forma bilineare ha segnatura mista: l'altezza cambia dunque di segno, ossia la superficie invade ambo semispazi.

Esempio. In alcuni casi la mappa di Gauss è molto semplice: per la sfera unitaria è l'identità , per il piano è costante. In tali casi è facile calcolare le curvature. Rimandiamo al do Carmo per il calcolo della curvatura di varie altre superfici: possiamo per esempio esplicitare $-dN_p(v)$ tramite curve tangenti a v. In particolare, risulta che la sfera ha curvatura Gaussiana positiva, ed infatti verifica la condizione geometrica vista sopra. Il paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$ ha curvatura Gaussiana negativa nell'origine, e infatti verifica l'altra condizione geometrica.

2. Il valore assoluto della curvatura Gaussiana permette di paragonare l'area di intorni $V_p \subseteq S$ di $p \in S$ con l'area delle loro immagini $N(V_p) \subseteq \mathbb{S}^2$, nel senso seguente.

Supponiamo V_p sia contenuto in una carta (compatibile con l'orientazione) $\{U, V, \phi\}$, con $p = \phi(\bar{u}, \bar{v})$. Scriviamo $V_p = \phi(U_p)$. Supponiamo $K_p \neq 0$. In tal caso dN_p è iniettivo, dunque $N \circ \phi$ fornisce (localmente) una parametrizzazione di $\mathbb{S}^2$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(V_p) &= \int_{U_p} \|\phi_u \times \phi_v\| dudv \\ \mathcal{A}(N(V_p)) &= \int_{U_p} \|dN_{|\phi}(\phi_u) \times dN_{|\phi}(\phi_v)\| dudv = \int_{U_p} |K_{|\phi}| \|\phi_u \times \phi_v\| dudv\end{aligned}$$

Sia ora $V_n = \phi(U_n)$ una successione fondamentale di intorni di $p \in S$. Il teorema della media integrale asserisce che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(V_n)}{\mathcal{A}(U_n)} = \|\phi_u \times \phi_v\|_{|p}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(N(V_n))}{\mathcal{A}(U_n)} = |K_p| \|\phi_u \times \phi_v\|_{|p}.$$

Segue che $|K_p| = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(N(V_n))}{\mathcal{A}(V_n)}$.

3. La curvatura media è strettamente legata alle proprietà dell'area di S, nel senso seguente.

Data una qualunque funzione $f : S \to \mathbb{R}$, consideriamo la famiglia di superfici $t \mapsto S_t := \{p + tf(p)N_p : p \in S\}$. Si può dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(S_t)_{|t=0} = -\int_S Hf \,\mathrm{vol}_S = \int_S < -HN, fN > \mathrm{vol}_S,$$

dove vol_S è la 2-forma differenziale di area della superficie S. Ne segue una interpretazione del campo vettoriale $p \mapsto -H_p N_p$ come gradiente del funzionale area $\mathcal{A}$ rispetto a variazioni normali della superficie S.

In particolare, la condizione $H = 0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange di tale funzionale, ossia corrisponde alla condizione che S sia un punto critico per l'area. Tali superfici si dicono minimali. Si noti che tali superfici hanno $k_1 = -k_2$, dunque $K \leq 0$. In particolare, non hanno alcun punto di convessità nel senso visto sopra.

In un capitolo successivo dimostreremo un enunciato analogo, parlando di curve minimali su superfici.

Osservazione. Le superfici minimali sono una classe molto speciale di superfici regolari. Dal punto di vista matematico tali superfici sono strettamente legate alla classe di funzioni armoniche. Dal punto di vista fisico tali superfici possono essere viste come modelli matematici per le membrane di acqua saponata, che appunto hanno la proprietà di formare superfici che sono punti d'equilibrio per il funzionale di area.

Si noti la differenza tra essere un punto d'equilibrio ed essere un punto di minimo (locale o globale). Le superfici minimizzanti, la cui area è minore o uguale a quella di ogni loro variazione normale, sono una sottoclasse di superfici minimali: sono i punti di minimo locali.

Si noti che una sfera non è minimale; ciò corrisponde al fatto che una bolla di sapone tenta di minimizzare la propria area e dunque di creare una superficie minima (anzi minimizzante), ma è soggetta ad un vincolo addizionale: deve contenere un volume prefissato di aria. Questo vincolo le impedisce certe variazioni normali, quali rimpicciolirsi radialmente.

Per finire vediamo come rappresentare la seconda forma fondamentale in termini matriciali. Se scegliamo una parametrizzazione ϕ (compatibile con l'orientazione), otteniamo una base locale $\{\phi_u, \phi_v\}$. La notazione solitamente usata è la seguente:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -dN_p(\phi_u)\cdot\phi_u & -dN_p(\phi_u)\cdot\phi_v \\ -dN_p(\phi_v)\cdot\phi_u & -dN_p(\phi_v)\cdot\phi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{|\phi}\cdot\phi_{uu} & N_{|\phi}\cdot\phi_{uv} \\ N_{|\phi}\cdot\phi_{uv} & N_{|\phi}\cdot\phi_{vv} \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Ricordiamo che abbiamo definito H, K come traccia/det dell'endomorfismo $-dN$. Per ottenere H, K in termini della seconda forma fondamentale, dobbiamo tener conto del ruolo della metrica. Sia A la matrice che rappresenta dN_p rispetto a tale base, ossia $dN_p(\phi_u) = a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v$ etc. Allora, sostituendo sopra, si ottiene la relazione

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

da cui $K_p = \det(-A) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, $H_p = \mathrm{tr}(-A) = \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$.

In particolare, se in p la base $\{\phi_u, \phi_v\}$ è ON allora H_p, K_p sono traccia/det anche della matrice associata alla seconda forma fondamentale.

Connessione di Levi-Civita. Abbiamo menzionato che, per proseguire la costruzione di una teoria completa di Analisi su varietà , è necessaria una struttura ulteriore: una connessione.

Data una superficie regolare S ed un campo vettoriale tangente $X : S \to TS$, un'analista non si farebbe scrupoli a definire la derivata di X in un punto $p \in S$ e direzione $v \in T_pS$ notando che X può anche essere inteso come mappa $X : S \to \mathbb{R}^3$, dunque derivando le sue tre funzioni componenti per ottenere il vettore $dX_p(v)$. Si noti però che l'esito sarebbe un vettore di $\mathbb{R}^3$ non necessariamente appartenente a T_pS. Da questo punto di vista, tale nozione non è accettabile dal punto di vista geometrico.

D'altra parte, la proiezione di tale vettore su T_pS è invece un vettore tangente. Risulta che tale nozione di derivata ha le proprietà giuste per essere una connessione su S.

Definizione 16.5 *Sia S una superficie regolare (non necessariamente orientabile). Sia X un campo vettoriale tangente ad S, $p \in S$ e $v \in T_pS$. La derivata covariante di X in p è il vettore tangente $\nabla_v X := dX_p(v)^T$ ottenuto per proiezione ortogonale di $dX_p(v)$ su T_pS.*

È semplice mostrare che ∇ ha la linearità richiesta per essere una connessione, e che $\nabla_v(fX) = df(v)X + f\nabla_v X$. E' dunque una connessione su S. Per definizione, si ha

$$dX_p(v) = \nabla_v X_{|p} + dX_p(v) \cdot N.$$

In altre parole, l'altra possibile proiezione corrisponde esattamente alla seconda forma fondamentale. Questa particolare connessione gode però anche di due proprietà aggiuntive.

1. Parlando della parentesi di Lie, abbiamo messo in evidenza il fatto che, in $\mathbb{R}^n$, è possibile definire singolarmente le due operazioni $X(Y) = dY(X)$ e $Y(X) = dX(Y)$. La loro differenza coincide con $[X, Y]$. Se X, Y sono campi tangenti a S, possiamo estendere le loro coordinate a tutto $\mathbb{R}^3$. Lungo S, come su qualunque varietà , il risultato $[X, Y]$ sarà comunque tangente a S. Confrontandoci con la definizione di ∇, segue il seguente fatto:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = dY(X)^T - dX(Y)^T = [X, Y]^T = [X, Y].$$

2. Dati due campi vettoriali X, Y su S e una direzione v, si ha

$$v(g(X, Y)) = g(\nabla_v X, Y) + g(X, \nabla_v Y).$$

Detto altrimenti, data una curva $\alpha(t)$,

$$\frac{d}{dt} g(X, Y)_{|\alpha(t)} = g(dX(\dot{\alpha}), Y) + g(X, dY(\dot{\alpha})) = g(\nabla_{\dot{\alpha}} X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\alpha}} Y).$$

Spoiler. Su una varietà Riemanniana astratta, queste due condizioni aggiuntive saranno esattamente quelle che distingueranno la connessione di Levi-Civita da tutte le altre.

Esempio. Consideriamo il campo $\phi(\partial u)$ su S definito tramite una parametrizzazione locale. Allora (parametrizzando tramite U)

$$\begin{aligned}
\nabla_{d\phi(\partial u)} \phi(\partial u) &= [d(\phi(\partial u))(d\phi(\partial u))]^T \\
&= [d(d\phi_{|\phi^{-1}(\cdot)}(\partial u))(d\phi(\partial u))]^T \\
&= [d(\phi_u \circ \phi^{-1})(d\phi(\partial u))]^T \\
&= [d(\phi_u \circ \phi^{-1} \circ \phi)(\partial u)]^T \\
&= (\phi_{uu})^T.
\end{aligned}$$

Abbiamo già visto che, avendo a disposizione una connessione, possiamo definire il concetto di campo parallelo e l'operazione di trasporto parallelo.

Esempio. Quando S è un piano la derivazione usuale produce automaticamente vettori tangenti, dunque la derivazione covariante coincide con la derivazione usuale ed i campi paralleli sono quelli costanti.

Più in generale, considerato che hanno derivate nulle, l'intuizione è che i campi vettoriali paralleli su S sono l'analogo dei campi vettoriali costanti nel piano o nello spazio. Tale intuizione è rinforzata dal seguente fatto.

Proposizione 16.6 *Sia X un campo vettoriale parallelo lungo una curva α. Allora la lunghezza di X è costante lungo α.*

Siano X, Y campi vettoriali paralleli lungo α. Allora il loro prodotto scalare è costante lungo α.

La dimostrazione segue immediatamente dalla proprietà 2 vista sopra.

Esempio. Supponiamo che la curva abbia la proprietà che $\dot{\alpha}$ sia parallela, ossia $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0$. Sotto studieremo meglio questa proprietà . In tal caso un qualunque altro campo parallelo lungo α è interamente definito dalla sua lunghezza iniziale e dal suo angolo iniziale rispetto a $\dot{\alpha}$. Questo facilita l'individuazione della soluzione del trasporto parallelo lungo α.

L'operazione di trasporto parallelo mette in evidenza un altro effetto della curvatura Gaussiana sulla geometria della varietà . Se la curva è chiusa, il trasporto parallelo prende un vettore iniziale X, gli fa fare il giro della curva, poi lo riporta nel piano tangente inziale. Non è però detto che questo vettore finale coincida con quello iniziale: potrebbe aver subito una rotazione. Detto altrimenti, se noi partiamo per un viaggio lungo la curva e durante il viaggio ci assicuriamo di guardare sempre nella stessa direzione, non è detto che al ritorno ci ritroviamo a guardare nella direzione iniziale. Questa distorsione viene formalizzata tramite la nozione di olonomia della connessione, che però non approfondiremo.[18]

Esempio. Sia S un piano. In questo caso il trasporto parallelo costruisce campi vettoriali costanti, dunque percorrendo una curva chiusa ritroviamo esattamente il vettore iniziale.

Ora consideriamo il caso in cui S è una sfera. Prendiamo un triangolo sulla sfera avente un vertice al polo nord e due vertici sull'equatore e lati definiti da segmenti di circonferenze massime passanti per quei punti. Sotto dimostreremo che tali curve sono geodetiche, ossia sono parametrizzabili in modo che $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0$. Come visto sopra, questo facilita l'individuazione del trasporto parallelo lungo i lati del triangolo. Se iniziamo da un vettore posizionato al polo nord e

[18]Compare in teoria di gauge e si manifesta, in meccanica quantistica, nell'esperimento di Bohm-Aharanov.

perpendicolare ad un lato, seguendone l'evoluzione lungo i tre lati risulta chiaro che il trasporto parallelo non lo riporta su se stesso.[19]

La differenza tra i due casi è che nel primo abbiamo curvatura Gaussiana nulla, nel secondo curvatura Gaussiana diversa da zero. La teoria dell'olonomia spiega in che modo questo influisce sul trasporto parallelo. Si noti che, in generale, tale distorsione può essere causata anche da un secondo fattore: la topologia della varietà , specificamente il suo gruppo fondamentale. Nel caso della sfera e del piano, però , questo non entra in gioco.

La costruzione della connessione di Levi-Civita è pesantemente estrinseca. Uno studio più accurato in termini di coordinate locali mostra però una sorpresa.[20]

Sia ϕ una parametrizzazione locale di S. Siano ϕ_u, ϕ_v i campi vettoriali corrispondenti. Al solito, definiamo i loro simboli di Christoffel tramite le seguenti relazioni

$$\nabla_{\phi_u}\phi_u = \Gamma^1_{11}\phi_u + \Gamma^2_{11}\phi_v, \quad \nabla_{\phi_u}\phi_v = \Gamma^1_{12}\phi_u + \Gamma^2_{12}\phi_v$$
$$\nabla_{\phi_v}\phi_u = \Gamma^1_{21}\phi_u + \Gamma^2_{21}\phi_v, \quad \nabla_{\phi_v}\phi_v = \Gamma^1_{22}\phi_u + \Gamma^2_{22}\phi_v.$$

Facendo il prodotto scalare con ϕ_u troviamo

$$d\phi_u(\phi_u)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F, \quad d\phi_v(\phi_u)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F$$
$$d\phi_u(\phi_v)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{21}E + \Gamma^2_{21}F, \quad d\phi_v(\phi_v)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F.$$

Facendo invece il prodotto scalare con ϕ_v troviamo

$$d\phi_u(\phi_u)\cdot\phi_v = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G, \quad d\phi_v(\phi_u)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G$$
$$d\phi_u(\phi_v)\cdot\phi_v = \Gamma^1_{21}F + \Gamma^2_{21}G, \quad d\phi_v(\phi_v)\cdot\phi_u = \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G.$$

Si noti che $d\phi_u(\phi_u)\cdot\phi_u = \phi_{uu}\cdot\phi_u = \frac{1}{2}(\phi_u\cdot\phi_u)_u = \frac{1}{2}E_u$, etc. Le equazioni sopra sono dunque equivalenti ad equazioni della forma

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u \\ 2F_u - E_v \end{pmatrix},$$

etc. Possiamo risolvere queste equazioni per trovare i simboli di Christoffel, ossia ricostruire la connessione. Ciò dimostra che dipendono solo dalla metrica, non da tutta l'immersione, dunque dimostra il seguente teorema.

Theorem 16.7 *Sia S una superficie regolare. La connessione di Levi-Civita dipende esclusivamente dalla metrica indotta, non dall'immersione che la realizza.*

In particolare, superfici localmente isometriche hanno, in punti corrispondenti, gli stessi simboli di Christoffel.

[19] Practical demo: holding pen in hand, move arm along described trajectory so that pen remains tangent to sphere centered in shoulder. Surprise!

[20] Attenzione! Qui, poi di nuovo sotto, sto confondendo ϕ_u con il push-forward $\phi(\partial u)$. Non è sano. Forse in futuro diventerò una persona migliore. Il risultato finale è comunque corretto.

Theorema Egregium. Vogliamo ora studiare più in dettaglio la curvatura di S. Tornando alle equazioni che definiscono i simboli di Christoffel, notiamo che se a sinistra al posto di $\nabla\phi_u, \nabla\phi_v$ usiamo le derivate classiche $d\phi_u, d\phi_v$, a destra compare un terzo termine che rappresenta la componente in direzione N. Per trovare le coordinate corrispondenti basta fare il prodotto scalare di tali equazioni con N. Specificamente, troviamo che

$$d\phi_u(\phi_u) = \Gamma_{11}^1\phi_u + \Gamma_{11}^2\phi_v + eN, \quad d\phi_v(\phi_u) = \Gamma_{12}^1\phi_u + \Gamma_{12}^2\phi_v + fN,$$
$$d\phi_u(\phi_v) = \Gamma_{21}^1\phi_u + \Gamma_{21}^2\phi_v + fN, \quad d\phi_v(\phi_v) = \Gamma_{22}^1\phi_u + \Gamma_{22}^2\phi_v + gN.$$

Si noti che a sinistra abbiamo tutte le derivate seconde di ϕ. Le derivate terze di ϕ soddisfano equazioni della forma

$$(\phi_{uu})_u - (\phi_{uv})_u = 0, \quad (\phi_{vv})_u - (\phi_{vu})_v = 0.$$

Sostituendo dentro queste equazioni le espressioni trovate per le derivate seconde e usando la rappresentazione matriciale di dN, ossia

$$N_u = a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v, \quad N_v = a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v,$$

otteniamo combinazioni lineari di ϕ_u, ϕ_v, N aventi risultato zero. Essendo linearmente indipendenti, tutti i coefficienti devono essere uguali a zero. Scrivendoli esplicitamente si trovano nuove relazioni tra $\Gamma_{ij}^k, E, F, G, e, f, g$ e le loro derivate prime. In particolare, una di queste descrive K in termini di Γ_{ij}^k e di E, F, G (e loro derivate; do Carmo dà la formula precisa). Ne consegue una situazione identica a quella già vista per i simboli di Christoffel.

Theorem 16.8 (Theorema Egregium) *Sia S una superficie regolare. La sua curvatura Gaussiana dipende esclusivamente dalla metrica indotta, non dall'immersione che la realizza.*

In particolare, superfici localmente isometriche hanno, in punti corrispondenti, la stessa curvatura Gaussiana.

Possiamo pensare a questi teoremi nel modo seguente. Per studiare $S \subseteq \mathbb{R}^3$ abbiamo inizialmente costruito attorno ad essa una impalcatura di piani tangente e rette normali definite in termini dell'ambiente $\mathbb{R}^3$. In questo modo, usando proiezioni e derivate in $\mathbb{R}^3$, abbiamo definito connessione e curvature. Un passo alla volta, sulla scia di quanto già fatto per piano tangente e orientazioni, stiamo ora smontando l'impalcatura. Miracolosamente, molta geometria rimane ancora in piedi. Sia la connessione sia K ammettono una formulazione puramente metrica: esprimono dunque le distorsioni interne della superficie (in sostanza, le derivate del prodotto scalare), piuttosto che le sue contorsioni in $\mathbb{R}^3$. Specificamente, le nostre formule indicano che ∇ dipende dalla derivate prime della metrica, K dalle derivate seconde.

Detto ciò , il Theorema dice in realtà qualcosa di più preciso: K dipende da ∇. Possiamo allora chiederci se esiste una formula esplicita per K che illustri tale relazione. Arriviamo così al seguente risultato, che fornisce anche una dimostrazione alternativa del Theorema Egregium.

Proposizione 16.9 *Sia $p \in S$ e ϕ una parametrizzazione tale che $\{\phi_u, \phi_v\}$ sia ON in p. Allora*

$$K_p = (\nabla_{\phi_u} \nabla_{\phi_v} \phi_v - \nabla_{\phi_v} \nabla_{\phi_u} \phi_v) \cdot \phi_u.$$

In particolare, K dipende solo dalla metrica.

La dimostrazione usa le proprietà metriche della connessione di Levi-Civita, discusse sopra: usando notazione semplificata,

$$\begin{aligned}
(\nabla_u \nabla_v v - \nabla_v \nabla_u v) \cdot \phi_u &= \nabla_u \nabla_v v \cdot \phi_u - \nabla_v \nabla_u v \cdot \phi_u \\
&= (\nabla_v v \cdot \phi_u)_u - \nabla_v v \cdot \nabla_u u - (\nabla_u v \cdot \phi_u)_v + \nabla_u v \cdot \nabla_v u \\
&= (\phi_{vv} \cdot \phi_u)_u - \nabla_v v \cdot \phi_{uu} - (\phi_{uv} \cdot \phi_u)_v + \nabla_u v \cdot \phi_{uv} \\
&= (\phi_{vv} - \nabla_v v) \cdot \phi_{uu} - (\phi_{uv} - \nabla_u v) \cdot \phi_{uv} \\
&= \phi_{vv}^{\perp} \cdot \phi_{uu} - \phi_{uv}^{\perp} \cdot \phi_{uv} \\
&= (\phi_{vv} \cdot N)(\phi_{uu} \cdot N) - (\phi_{uv} \cdot N)(\phi_{uv} \cdot N).
\end{aligned}$$

Riscrivendo l'ultimo rigo in termini di $-dN$ e usando il fatto che la base è ON in p, otteniamo quanto voluto.

Il Theorema Egregium ha applicazioni anche molto pratiche.

- È impossibile costruire una cartina geografica perfetta.
- In generale, non esiste su una superficie S un sistema di coordinate analogo all'arco-lunghezza per le curve.

Per quanto riguarda il primo punto, il problema è che la terra è sferica dunque ha curvatura diversa da 0. Un foglio di carta ha invece curvatura 0. Non può dunque esistere nessuna isometria, neppure locale, tra di essi. Ogni cartina deve insomma distorcere alcune proprietà metriche.

Osservazione. In generale K non è un invariante completo della metrica, nel senso che possono esistere mappe tra superfici che mettono in relazioni punti con la stessa curvatura, ma che non sono isometrie: il do Carmo dà un esempio esplicito tra gli esercizi della sezione 4.3. La curvatura diventa un invariante completo solo in certi casi particolari, per esempio quando è costante. Si può infatti dimostrare che qualunque superficie avente curvatura costante 1/0/-1 è localmente isometrica a certi esempi standard quali sfera/piano/pseudo-sfera (definita in do Carmo, tra gli esercizi della sezione 3.3).

Per quanto riguarda il secondo punto, l'arco-lunghezza è una isometria tra curva e segmento. Abbiamo appena spiegato che, in due dimensioni, l'analogo non è generalmente possibile. Questo risultato spiega perchè non abbiamo, finora, tentato di definire nozioni su S a partire da parametrizzazioni speciali.

Osservazione. Detto ciò , possiamo comunque tentare di trovare parametrizzazioni che siano speciali in altro modo. Per esempio, è possibile trovare parametrizzazioni tali che le direzioni ϕ_u, ϕ_v siano ortogonali, ossia $F = 0$. Ovviamente non possiamo simultaneamente sperare che $E = G = 1$, altrimenti avremmo una isometria con il piano. Un'altro esempio di parametrizzazione speciale sono le cosiddette coordinate isoterme, definite in do Carmo sezione 4.2.

I vari coefficienti trovati nelle equazioni sopra non forniscono invece una espressione analoga per la curvatura media H. Il fatto è che H non è un invariante della metrica: dipende fortemente dalla specifica immersione. Per esempio, piano e cilindro sono localmente isometrici ma il piano ha $H = 0$ (è minimale), il cilindro no (possiamo ridurne l'area tramite deformazioni radiali). Ciò indica che le due curvature K, H sono di natura fondamentalmente molto diversa: una intrinseca, l'altra estrinseca.

Si noti anche che la curvatura k di una curva è molto più simile ad H che a K perchè , essendo due curve sempre localmente isometriche (grazie all'arcolunghezza), esse non possono avere invarianti metrici interessanti e quindi k deve per forza essere quantità estrinseca.

Osservazione. Anche in questo contesto possiamo chiederci se i dati fin qui trovati per studiare S sono sufficienti per caratterizzarla completamente. Nel caso delle curve i dati erano k, τ; in questo caso i dati sono la prima e seconda forma fondamentale. Un teorema di Bonnet afferma un risultato di esistenza/unicità per S analogo al teorema di Frenet. In questo caso, però , servono condizioni aggiuntive di compatibilità tra tali dati. Rimandiamo altrove per dettagli.

Curve su superfici. Abbiamo discusso la geometria di curve in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Ora vogliamo discutere la geometria di curve su superfici.

Consideriamo dunque una curva regolare α su una superficie regolare S. La sua accelerazione $\ddot{\alpha}(t)$ è un campo vettoriale a valori in $\mathbb{R}^3$ lungo la curva, dunque ha due componenti di interesse.

- Per definizione, la sua componente tangenziale coincide con $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$.
- La sua componente normale è $(\ddot{\alpha} \cdot N_{|\alpha})N_{|\alpha}$. Notando, come per la mappa di Gauss, che
$$0 = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha} \cdot N_{|\alpha}) = \ddot{\alpha} \cdot N + \dot{\alpha} \cdot dN(\dot{\alpha}),$$
possiamo riscrivere la componente normale come $(-dN(\dot{\alpha}) \cdot \dot{\alpha})N$, ossia in termini della seconda forma fondamentale.

Ritroviamo così la scomposizione, sostanzialmente già vista,
$$\ddot{\alpha}(t) = \nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + (-dN(\dot{\alpha}) \cdot \dot{\alpha})N.$$

Dal punto di vista fisico la componente normale non è di interesse, nel senso che viene neutralizzata dalla forza esercitata dal vincolo che mantiene la curva su S. La componente tangenziale esprime invece l'accelerazione di α lungo S.

Definizione 16.10 *Una curva parametrizzata $\alpha(t)$ su S è una geodetica se soddisfa l'equazione $\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0$. Equivalentemente: la sua velocità è un campo vettoriale parallelo lungo α, ossia la sua accelerazione tangenziale è nulla.*

Osservazione. In tal caso la velocità $\|\dot\alpha\|$ è costante e dunque, a meno di un cambiamento di coordinate della forma $t = cs$, la parametrizzazione coincide con l'arco-lunghezza.

Fisicamente, le geodetiche sono i moti inerziali su una superficie e le loro immagini generalizzano le rette. Per esempio, quando S è un piano le geodetiche coincidono con i moti rettilinei uniformi.

Dal punto di vista matematico, l'interesse nelle geodetiche è in gran parte dovuto al fatto che sono punti critici del funzionale lunghezza. In questo senso, sono l'analogo 1-dimensionale delle superfici minimali. Dimostreremo questo fatto più avanti. Al solito, non tutti i punti critici sono punti di minimo. Le geodetiche costituiscono però una naturale classe di curve tra cui cercare le curve di lunghezza minima.

Si noti che la nozione di geodetica riguarda solo la connessione ossia la metrica su S, non l'immersione specifica di S in $\mathbb{R}^3$.

A volte confonderemo la geodetica con la sua immagine ma la parametrizzazione è un ingrediente fondamentale; permette anche che, nel caso di curve chiuse, la stessa traiettoria sia percorsa più volte.

Come già per i campi vettoriali paralleli, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie assicura che per ogni punto $p \in S$ ed ogni direzione iniziale $v \in T_pS$ esiste un'unica geodetica $\alpha(t)$ che inizia in p e abbia velocità iniziale v. Si noti che, essendo $\dot\alpha$ un campo parallelo, se v ha lunghezza 1 questo rimane vero per ogni tempo e dunque la parametrizzazione di α è per arco-lunghezza.

Esempio. Sia S una sfera e α una circonferenza massima. In tal caso $\ddot\alpha(s)$ è normale alla superficie, dunque la sua componente tangenziale è zero: α è una geodetica. Considerato che per ogni $p \in S$ ed ogni direzione v esiste una circonferenza massima, abbiamo trovato tutte le geodetiche della sfera.

Sia S una superficie di rotazione. Allora la curva generatrice $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$ nel piano $y = 0$, parametrizzata per arcolunghezza, è una geodetica: sappiamo infatti che $\ddot\gamma(s) = k(s)n(s)$ appartiene ancora al piano $y = 0$, dove n è la normale nel piano. Tale normale coincide però con quella di S, dunque $\ddot\gamma(s)^T = 0$. Un ragionamento simile indica che i paralleli corrispondenti ai punti di massimo/minimo di $x(s)$ sono geodetiche.

In generale, le geodetiche minimizzanti tra due punti possono essere più d'una. Per esempio, punti opposti su una sfera sono congiungibili tramite un numero infinito di tali curve.

Sia S un cilindro. Considerato che il cilindro è isometrico al piano, possiamo trovare tutte le sue geodetiche a partire dalle rette nel piano.

In ambo casi si noti che ogni coppia di punti è congiungibile tramite infinite geodetiche (permettendo, nel caso della sfera, che la stessa traiettoria sia percorsa più volte).

Esempio. Il principio di Fermat afferma che la luce percorre geodetiche nello spazio. Una stessa sorgente luminosa è dunque potenzialmente visibile in più posizioni perchè la sua luce arriva sulla terra da direzioni diverse, a seconda della geodetica percorsa. Considerazioni di questo tipo in astronomia sono alla base delle cosiddette lenti gravitazionali.

È interessante anche studiare la curvatura di curve in una superficie orientata S. Come primo passo, ricordiamo che la teoria delle curve in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ dà due definizioni diverse per il campo di versori normali $n(s)$: in $\mathbb{R}^2$ scegliamo $n(s)$ in modo che $\{\dot\alpha(s), n(s)\}$ sia una base positiva per $\mathbb{R}^2$, in $\mathbb{R}^3$ definiamo $n(s)$ in modo che abbia la stessa direzione e verso di $\ddot\alpha(s)$ (supponendo che α sia biregolare). Ne conseguono definizioni diverse per la curvatura k, che nel primo caso può avere anche segno negativo, nel secondo è sempre positiva.

Considerato che ora stiamo di nuovo analizzando curve in un oggetto 2-dimensionale orientato S, useremo arco-lunghezza ed il primo punto di vista per definire il versore normale $N \times \dot\alpha$, tangente a S: si noti che $\{\dot\alpha, N \times \dot\alpha\}$ è una base positiva per S perchè $\dot\alpha \times (N \times \dot\alpha) = N$. Considerato che $\dot\alpha$ ha lunghezza costante, $\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha$ deve essere ortogonale a $\dot\alpha$, dunque (essendo tangente a S) parallelo a $N \times \dot\alpha$. Definiamo allora la curvatura geodetica k_g di α in modo che $\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha = k_g(N \times \dot\alpha)$. Si noti che $k_g = 0$ se e solo se α è una geodetica e che $|k_g| = |\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha|$, ma k_g può avere valore anche negativo.

Con queste definizioni, la scomposizione di $\ddot\alpha(s)$ mostra che

$$k^2 = k_g^2 + |(-dN(\dot\alpha) \cdot \dot\alpha)|^2.$$

Il primo termine a destra misura la non-geodeticità della curva. Intuitivamente, esprime la parte intrinseca della curvatura di $\alpha \subseteq S$, mentre il secondo termine esprime quella parte della curvatura di α che deriva dal fatto che S stessa è curva in $\mathbb{R}^3$. Al solito, k_g compare nella formula di variazione prima del funzionale lunghezza per curve in S.

Osservazione. Sia S regolare e orientata in $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$. Consideriamo un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per p e contenente N_p. Tale piano interseca S in una curva α. Parametrizziamola per arco-lunghezza. Per costruzione, α è contenuta nel piano, dunque la sua accelerazione è parallela al piano. In particolare, in p la sua accelerazione è parallela a N_p. Ne consegue che $k = |-dN(\dot\alpha) \cdot \dot\alpha|$. Otteniamo così un'altra interpretazione geometrica della seconda forma fondamentale: la sua forma quadratica dà la curvatura delle sezioni normali di S.

17 Geometria Riemanniana: varietà astratte

Torniamo ora a ragionare sulle varietà Riemanniane (M, g) in generale. La teoria delle superfici suggerisce che dovrebbe essere possibile definire una connessione speciale su (M, g) a partire da sue proprietà ulteriori.

La prima definizione, piuttosto astratta, è la seguente: la connessione di Levi-Civita è l'unica connessione tale che valgano le seguenti due proprietà aggiuntive:
(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
(ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

La condizione (i) può essere vista come una condizione di compatibilità tra calcolo differenziale e ∇. Estendendo ∇ a tensori, implica per esempio che:

- Per ogni $\alpha \in \Lambda^1(M)$,

  $$(\nabla\alpha)(X, Y) - (\nabla\alpha)(Y, X) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

  In altre parole, l'alternatore di $\nabla\alpha$ coincide con $d\alpha$.

  Analogamente, per ogni endomorfismo $T \in T^*M \otimes TM$,

  $$(\nabla T)(X, Y) - (\nabla T)(Y, X) = \nabla_X(T(Y)) - \nabla_Y(T(X)) - T([X, Y]).$$

- La Hessiana di f, definita come ∇df, è simmetrica.

La condizione (ii) può essere riformulata nel modo seguente: $\nabla g = 0$.

La seconda definizione è tramite la formula di Koszul, che esprime ∇ imponendo l'identità

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X).\end{aligned}$$

Si noti che questa espressione è data puramente in termini della metrica e della geometria intrinseca di M. Si dimostra che questa identità implica le condizioni (i), (ii) sopra.

In questo contesto usiamo molte delle stesse definizioni già viste per le superfici. Ricordiamo per esempio la seguente: un campo vettoriale X si dice parallelo se $\nabla X = 0$. Il seguente calcolo conferma che si tratta di una condizione molto forte.

Lemma 17.1 *Sia X un campo parallelo su una varietà Riemanniana. Allora X è una isometria infinitesimale.*

Si tratta di dimostrare che $\nabla X = 0$ implica $\mathcal{L}_X g = 0$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= Xg(Y, Z) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z)\\ &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X)\\ &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)\\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) = 0.\end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre che una curva $\alpha(t)$ si dice geodetica se $\nabla_{\dot\alpha}\dot\alpha = 0$.

Connessione indotta su sottovarietà . Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. La connessione di Levi-Civita di $\mathbb{R}^3$ coincide con la derivata usuale. L'identità $dX_p(v) = \nabla_v X_{|p} + dX_p(v) \cdot N$ serve dunque a mettere in chiaro le relazioni tra le due connessioni di Levi-Civita su $\mathbb{R}^3$ e su S.

Supponiamo ora di avere una sottovarietà Σ immersa in una varietà Riemanniana astratta (M, g). Sia $\overline{\nabla}$ la connessione di Levi-Civita su M. A priori, su Σ abbiamo due connessioni: la connessione ∇ di Levi-Civita, definita rispetto alla metrica indotta, e la connessione definita dalla componente tangenziale di $\overline{\nabla}$ (come nel caso di $S \subseteq \mathbb{R}^3$). Usando le proprietà (i), (ii), si dimostra però che queste due connessioni coincidono.

Sia X un campo tangente lungo Σ. Per quanto detto, vale la decomposizione

$$\overline{\nabla}_v X = \nabla_v X + \overline{\nabla}_v X^\perp.$$

Di nuovo, il termine $\overline{\nabla}_v X^\perp$ rappresenta la seconda forma fondamentale, che per l'appunto viene tipicamente definita da

$$T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to T_p\Sigma^\perp, \quad (v, w) \mapsto (\overline{\nabla}_v w)^\perp.$$

L'identità $dX_p(v) \cdot N = X \cdot (-dN_p(v))$ si generalizza a $\overline{\nabla}_v X \cdot N = X \cdot (-\overline{\nabla}_v N)$, per ogni campo normale N lungo Σ.

Curvatura. Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. La proposizione che segue il Theorema Egregium può essere interpretata come una definizione alternativa della curvatura K. Da qui otteniamo anche l'idea di come definire una curvatura Gaussiana per varietà Riemanniane astratte. La procedura consiste nel definire un tensore di tipo $(T^*M)^{\otimes^3} \otimes TM$ su M, chiamato tensore di curvatura, nel modo seguente:

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Nel caso delle superfici, usando il fatto che $[\phi_u, \phi_v] = 0$, la proposizione mostra che $K = R(\phi_u, \phi_v)\phi_v \cdot \phi_u$. In dimensione maggiore, usando una base ON, otteniamo un valore per ciascun piano 2-dimensionale in T_pM, chiamato curvatura sezionale.

Il tensore di curvatura gode di varie simmetrie. In particolare:

- $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,
- $R(X,Y)Z \cdot W = -R(X,Y)W \cdot Z$,
- $R(X,Y)Z \cdot W = R(Z,W)X \cdot Y$.

Ne consegue che

$$R' : \Lambda^2(T^*M) \times \Lambda^2(T^*M) \to \mathbb{R}, \quad R'(X,Y,W,Z) := R(X,Y)Z \cdot W$$

è una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2(T^*M)$. Diremo che R è positivo se R' lo è nel senso usuale per le forme bilineari: $R'(X,Y,X,Y) = R(X,Y)Y \cdot X \geq 0$ per ogni X, Y. Equivalentemente, ogni curvatura sezionale è positiva. La nozione di negatività è analoga. Sono entrambe condizioni molto forti: la situazione più tipica è di positività in certe direzioni, negatività in altre.

Osservazione. La definizione di R' è impostata in modo che, per le superfici immerse, le nozioni di positività per K e per R coincidano.

La relazione tra la curvatura di M e la curvatura di una sottovarietà Σ è governata dalle cosiddette equazioni di Gauss. Tali equazioni tirano però in ballo anche la seconda forma fondamentale di Σ. Nel caso di $S \subseteq \mathbb{R}^3$, il fatto che $\mathbb{R}^3$ ha tensore di curvatura nullo semplifica queste equazioni, mettendo in evidenza la relazione tra K e $\det(-dN)$ da cui siamo inizialmente partiti.

Osservazione. Torniamo a guardare la condizione (i) che definisce la connessione di Levi-Civita: sostanzialmente dice che l'analogo di R sulle funzioni, ossia $\nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f - [X, Y]f$, è identicamente zero; in altre parole, il fibrato banale $M \times \mathbb{R}$ ha curvatura zero.

Osservazione. Ripensare al percorso fin qui seguito offre utili spunti per capire il senso della teoria avanzata. Lavorando con superfici immerse, abbiamo costruito una nozione di curvatura legata alla geometria estrinseca della superficie. Con questa definizione abbiamo raggiunto una visione geometrica molto concreta del significato di K. Il Theorema Egregium e le equazioni di Gauss spiegano però che abbiamo preso un granchio: il legame tra seconda forma fondamentale e K esiste solo in virtù di un fatto accidentale: stavamo lavorando in un ambiente piatto. Abbiamo ora reimpostato l'intera costruzione su basi molto più astratte. Al solito, Analysis rules: $R(X, Y)Z$ misura la non-commutatività delle derivate seconde del campo vettoriale Z, al netto dell'eventualità che $[X, Y] \neq 0$. Tale non-commutatività è dunque interamente riconducibile alle proprietà di g.

In altre parole: R è l'analogo (nel contesto dei campi vettoriali, dunque usando ∇), della parentesi di Lie (nel contesto delle funzioni, usando la teoria differenziale).

Abbiamo così una nuova nozione di curvatura, ma non abbiamo la più pallida idea di quale sia il suo contenuto geometrico. La teoria avanzata, ma anche la ricerca attuale, mostrano che il tensore R, ed in particolare il suo segno, governa molti aspetti della geometria della varietà .[21][22]

Completezza. Nel caso delle superfici abbiamo studiato la completezza di S a partire da quella di $\mathbb{R}^3$, con la difficoltà che le rispettive nozioni di distanza,

[21] Essendo R un oggetto molto più complicato di g, è forse improprio pensarlo prevalentemente come invariante di g: lo si usa per dimostrare che due metriche sono distinte solo in casi eccezionali, per esempio quando le curvature sezionali sono costanti. Diciamo che contiene informazioni sul comportamento fine di g.

[22] Note to self: There are at least 3 ways to do computations in Riemannian geometry: intrinsically (Lie/∇ calculus), local coordinates, moving frames. Mention this? Maybe no good reason...

d_3 e d, non coincidono. Per quanto riguarda le varietà astratte, il principale risultato in questo contesto è la seguente caratterizzazione intrinseca.

Theorem 17.2 (Teorema di Hopf-Rinow) *Sia (M, g) una varietà Riemannian. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *M, con la distanza indotta dalla metrica, è uno spazio metrico completo.*
2. *Un sottoinsieme di M è compatto sse è chiuso e limitato in M.*
3. *Ogni geodetica $\alpha(t)$ esiste per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$.*

Sotto queste ipotesi si può dimostrare che ogni coppia di punti è congiungibile tramite una curva di lunghezza minima, che realizza dunque la distanza tra quei punti. La teoria generale dimostra che tale curva (opportunamente parametrizzata) è una geodetica.[23]

Osservazione. Il teorema indica che una varietà Riemanniana completa è compatta sse è limitata. M è infatti automaticamente un sottoinsieme chiuso di se stesso.

Si noti che, al punto 2, il fatto: compatto implica chiuso e limitato è vero in qualunque spazio metrico. Il bello del teorema sta nell'asserzione contraria, che necessita sia della completezza sia del fatto di lavorare in uno spazio modellato su un qualche $\mathbb{R}^n$.

Esempio. Sia S una superficie regolare chiusa in $\mathbb{R}^3$. Per quanto visto, è uno spazio metrico completo. Il teorema dimostra allora che vale la condizione 3: le sue geodetiche sono definite per ogni tempo.

Supponiamo M sia compatta (per esempio, la bottiglia di Klein). Allora la condizione 2 vale per ogni metrica. Le sue geodetiche sono allora definite per ogni tempo, per ogni metrica.

La superficie $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, con la metrica standard, non soddisfa nessuna delle condizioni 1,2,3. Tale superficie è però diffeomorfa al cilindro. Usando la metrica standard del cilindro, risulta essere uno spazio metrico completo.

18 Orizzonti Riemanniani

"Vuolsi così colà dove si puote ciò che si vuole..." E tu continua a dimandar.

Consideriamo il funzionale lunghezza L sull'insieme delle curve in S che collegano p a q. Sia $\alpha(t)$ una tale curva. Una variazione di α è una famiglia $\alpha(t, \tau)$ tale che $\alpha(t, 0) = \alpha(t)$. La corrispondente variazione infinitesimale è

[23] Il viceversa è falso: il disco aperto ha la proprietà che ogni coppia di punti è congiungibile da una geodetica minimizzante, ma non è uno spazio metrico completo.

allora il campo vettoriale lungo α definito da $Z(t) := \frac{\partial \alpha(t,\tau)}{\partial \tau}_{|\tau=0}$. Il fatto che gli estremi sono fissi implica che $Z(p) = Z(q) = 0$.[24]

Proposizione 18.1 *Sia Z una variazione infinitesimale di α tale che $Z(p) = Z(q) = 0$. Sia e il campo vettoriale tangente unitario lungo α. Allora*[25]

$$dL_{|\alpha}(Z) = \frac{d}{d\tau}(L \circ \alpha)(\tau)_{|\tau=0} = -\int_a^b (Z, \nabla_e e)|\dot{\alpha}|dt.$$

Per dimostrarlo iniziamo con l'osservazione che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\sqrt{|\alpha_t|^2}_{|\tau=0} &= (1/2)\frac{1}{|\alpha_t|}\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_t, \alpha_t)_{|\tau=0} \\
&= \frac{1}{|\alpha_t|}(\alpha_{t\tau|\tau=0}, \alpha_t) = (\alpha_{\tau t|\tau=0}, \alpha_t/|\alpha_t|) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_\tau, \alpha_t/|\alpha_t|) - (\alpha_\tau, (\alpha_t/|\alpha_t|)_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(Z, e) - (Z, \nabla_e e)|\alpha_t|.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(L \circ \alpha)(\tau)_{|\tau=0} &= \frac{d}{d\tau}(\int_a^b \sqrt{|\alpha_t|^2}dt)_{|\tau=0} = \int_a^b \frac{d}{d\tau}\sqrt{|\alpha_t|^2}_{|\tau=0}dt \\
&= -\int_a^b (Z, \nabla_e e)|\dot{\alpha}|dt.
\end{aligned}$$

Si osservi che, in questa formula, ogni fattore Z, $\nabla_e e$, $|\dot{\alpha}|dt$ ha dignità geometrica, sostanzialmente indipendente dalla parametrizzazione scelta.

Corollario 18.2 *La curva α è un punto critico per L sse $\nabla_e e \equiv 0$.*

In particolare: (i) ogni geodetica è un punto critico per L, (ii) se α è parametrizzata per arco-lunghezza (o almeno: $|\dot{\alpha}| \equiv c$) ed è un punto critico per L, allora α è una geodetica.

Osservazione. L è indipendente dalla parametrizzazione, ossia dipende solo dalla traiettoria. Lo stesso dunque vale per i suoi punti critici, e infatti la condizione $\nabla_e e \equiv 0$ dipende solo dalla traiettoria.

[24] Should emphasize that here we're studying the concept of distance between two points. This explains the choice of boundary data. If instead we want to study the distance between p and a submanifold, then use different boundary data: fix p but allow other point to move on the submanifold. See Shiga, Hadamard manifolds, 1984. Also interesting to allow both ends to move: formula then shows that only way to change length of geodesic is by moving boundary points. Again, see Shiga.

[25] Note to self: if you use arc-length to do this calc, the first variation formula is geometrically less clear and you can't use it for a second variation.

Non sarebbe dunque ragionevole sperare che i suoi punti critici fossero le geodetiche, senza specificare la parametrizzazione utile. Se considerassimo invece il funzionale di energia $\alpha \mapsto \int_a^b |\dot\alpha|^2 dt$, troveremmo che esso dipende dalla parametrizzazione e che i suoi punti critici sono esattamente le geodetiche.[26]

Osservazione. Quanto sopra vale per curve in qualunque (M, g), e in particolare in $\mathbb{R}^n$: in tal caso, $\nabla_e e = d/ds(\dot\alpha(s)) = \ddot\alpha(s)$, quindi i punti critici sono le rette. Si noti tra l'altro che $\ddot\alpha(s)$ è ortogonale a e e che in $\mathbb{R}^2$ si ha $\ddot\alpha(s) = k(s)n(s)$. In questo contesto la formula diventa

$$\frac{d}{d\tau}(L \circ \alpha)(\tau)_{|\tau=0} = -\int_0^{L(\alpha)} k(s)(Z, n)ds,$$

che, oltre a fornire una nuova intuizione del concetto di curvatura per le curve planari, è esattamente analoga alla formula di variazione per le superfici in $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo già detto che la curvatura influenza la geometria in più modi. Possiamo fornire un esempio semplice completando la nostra analisi delle proprietà del funzionale lunghezza. Supponiamo di aver trovato una curva $\alpha(t)$ che sia un punto critico per L. Chiediamoci se è un punto di minimo locale. Si tratta di calcolare le derivate seconde di $L \circ \alpha$ rispetto a tutte le variazioni di α.

Il punto di partenza è che, con le estensioni ovvie della definizione di Z, e, la formula di variazione prima

$$\frac{d}{d\tau}(L \circ \alpha)(\tau) = -\int_a^b (Z, \nabla_e e)|\dot\alpha|dt$$

vale per ogni τ. Basta dunque derivarla una seconda volta. Considerato inoltre che L è invariante per riparametrizzazioni, dunque per variazioni tangenziali, possiamo restringerci alle variazioni normali, ossia supporre che $Z \cdot \dot\alpha \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\tau^2}(L \circ \alpha)(\tau)_{|\tau=0} &= -\frac{d}{d\tau}\int_a^b (Z, \nabla_e e)|\dot\alpha|dt_{|\tau=0} \\
&= -\int_a^b (\nabla_Z Z, \nabla_e e)|\dot\alpha|dt - \int_a^b (Z, \nabla_Z \nabla_e e)|\dot\alpha|dt \\
&\quad + \int_a^b (Z, \nabla_e e)^2|\dot\alpha|dt \\
&= -\int_a^b (Z, \nabla_Z \nabla_e e)|\dot\alpha|dt,
\end{aligned}$$

dove usiamo i conti precedenti per calcolare $d/d\tau(|\dot\alpha|)$ e sfruttiamo il fatto che, essendo α un punto critico, $\nabla_e e = 0$. Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned}
[Z, e] &= [Z, \dot\alpha/|\dot\alpha|] = Z(1/|\dot\alpha|)\dot\alpha + (1/|\dot\alpha|)[Z, \dot\alpha] \\
&= -(Z(|\dot\alpha|)/|\dot\alpha|)e,
\end{aligned}$$

[26] Insomma: geometria cerca i moti rettilinei, analisi/Fisica cerca i moti rettilinei uniformi. La differenza e' importante!

perchè $[Z,\dot\alpha]=[\alpha_\tau,\alpha_t]=0$. Ne consegue che

$$\begin{aligned}
-\int_a^b (Z,\nabla_Z\nabla_e e)|\dot\alpha|dt &= -\int_a^b (Z,\nabla_e\nabla_Z e)|\dot\alpha|dt - \int_a^b (Z,\nabla_{[Z,e]}e)|\dot\alpha|dt\\
&\quad -\int_a^b (Z,R(Z,e)e)|\dot\alpha|dt\\
&= -\int_a^b (Z,\nabla_{\dot\alpha}\nabla_Z e)dt + \int_a^b (Z(|\dot\alpha|)/|\dot\alpha|)(Z,\nabla_e e)|\dot\alpha|dt\\
&\quad -\int_a^b (Z,R(Z,e)e)|\dot\alpha|dt\\
&= -\int_a^b (Z,\nabla_{\dot\alpha}\nabla_Z e)dt - \int_a^b (Z,R(Z,e)e)|\dot\alpha|dt\\
&= -\int_a^b \frac{d}{dt}(Z,\nabla_Z e)dt + \int_a^b (\nabla_{\dot\alpha}Z,\nabla_Z e)dt\\
&\quad -\int_a^b (Z,R(Z,e)e)|\dot\alpha|dt\\
&= \int_a^b (\nabla_e Z,\nabla_Z e)|\dot\alpha|dt - \int_a^b (Z,R(Z,e)e)|\dot\alpha|dt.
\end{aligned}$$

Si ha inoltre che

$$\begin{aligned}
(\nabla_e Z,\nabla_Z e) &= (\nabla_e Z,\nabla_e Z+[Z,e])\\
&= (\nabla_e Z,\nabla_e Z) - (Z(|\dot\alpha|)/|\dot\alpha|)(\nabla_e Z,e)\\
&= (\nabla_e Z,\nabla_e Z) + (Z(|\dot\alpha|)/|\dot\alpha|)(Z,\nabla_e e)\\
&= (\nabla_e Z,\nabla_e Z).
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato quanto segue.

Proposizione 18.3 *Sia α un punto critico per L. Allora, per ogni variazione normale,*

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(L\circ\alpha)(\tau)_{|\tau=0} = \int_a^b (\nabla_e Z,\nabla_e Z)|\dot\alpha|dt - \int_a^b (R(Z,e)e,Z)|\dot\alpha|dt.$$

Gli stessi conti valgono per curve in qualunque varietà Riemanniana. Otteniamo allora il seguente risultato.[27]

Corollario 18.4 *Sia (M,g) una varietà Riemanniana con curvatura non-positiva. Allora ogni punto critico per il funzionale lunghezza è un punto di minimo locale.*

In particolare, ogni geodetica è una curva di lunghezza localmente minima tra qualunque coppia p,q di punti su di essa.

[27] Would be nice to use this result to show that geodesics are always minimizing, if two points are sufficiently close. However, unclear whether this follows from these formulae.

Esempio. Consideriamo un cerchio massimo su una sfera. Scegliamo due punti p, q su tale cerchio, vicini tra loro. Tali punti dividono il cerchio in due archi. Consideriamo quello più lungo. Tale arco, opportunamente parametrizzato, è una geodetica ma è geometricamente chiaro che, perturbandolo mentre teniamo fissi i due punti estremi, lo possiamo accorciare.

Consideriamo, nel cilindro, due punti congiungibili da un segmento. Tale segmento minimizza la distanza tra i punti, ma ogni altra geodetica che li congiunge e' comunque un punto di minimo locale.[28]

Osservazione. La formula di variazione seconda può alternativamente essere scritta nella forma

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(L \circ \alpha)(\tau)_{|\tau=0} = -\int_a^b (\nabla_e \nabla_e Z + R(Z, e)e, Z)|\dot{\alpha}|dt,$$

sfruttando il fatto che $\frac{d}{dt}(\nabla_e Z, Z) = (\nabla_{\dot{\alpha}} \nabla_e Z, Z) + (\nabla_e Z, \nabla_{\dot{\alpha}} Z)$.

L'apparente libertà che abbiamo nel scegliere una metrica su una varietà differenziabile astratta oscura una questione fondamentale, che costituisce tutt'oggi una delle principali direzioni di ricerca in geometria. Il punto di partenza è quanto già visto riguardo alle interazioni tra Analisi e Topologia. Analogamente, esistono profonde relazioni tra curvatura, topologia e geometria, tali che ognuna condiziona le altre. Raccogliamo qui alcuni risultati classici in questa direzione.

1. È un fatto classico che la somma degli angoli interni di un triangolo nel piano è π. Il problema analogo su una superficie Riemanniana S riguarda la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico $T \subseteq S$.

Il teorema di Gauss-Bonnet locale afferma che tale somma è $\pi + \int_T K \,\mathrm{vol}_S$.

Nel caso delle superfici regolari ne consegue che, in una sfera, la somma degli angoli interni è strettamente maggiore di π. In una pseudo-sfera la somma degli angoli interni è strettamente minore di π.

Oltre a essere di per sè interessante, questo fatto ha conseguenze riguardo l'esistenza di certe geodetiche. Supponiamo per esempio che in S esista una geodetica chiusa (liscia) che racchiuda una porzione di S (quale un cerchio massimo nella sfera). Scegliendo tre punti a caso su di essa, possiamo suddividere la geodetica in tre parti formando un triangolo geodetico. Per costruzione, la somma degli angoli interni è 3π. Una geodetica siffatta non può dunque esistere su una superficie con $K \leq 0$.

In sintesi: la curvatura condiziona le geodetiche. Altre relazioni tra curvatura e geodetiche sono legate alla nozione di campo di Jacobi, vedi do Carmo sezione 5.5. Per esempio, il fatto che possiamo trovare una famiglia continua di

[28] Mention also plane: geodesics between two points are isolated. Actually, unique. This is stronger statement, true for all Hadamard manifolds (complete, simply connected, $K \leq 0$). Notice: cylinder non simply connected, and indeed geodesics not unique. Basically: second variation is stability result, uniqueness is convexity result.

cerchi massimi (ossia geodetiche) passanti per poli opposti di una sfera è legato al fatto che la sfera ha curvatura positiva.[29]

2. Ad ogni superficie compatta astratta possiamo associare un numero $\chi(S)$, chiamato caratteristica di Eulero-Poincarè , che ne codifica alcune proprietà topologiche. Per esempio. la sfera ha $\chi(S) = 2$, il toro ha $\chi(S) = 0$ e le superfici ottenute incollando tra loro g tori hanno $\chi(S) = 2 - 2g$.

Supponiamo tale S sia orientabile e di scegliere su di essa una struttura Riemanniana (per esempio tramite un'immersione regolare in $\mathbb{R}^3$). Allora il teorema di Gauss-Bonnet globale afferma che $\int_S K \, \mathrm{vol}_S = 2\pi\chi(S)$.

In particolare, l'unica tale superficie che ammette una metrica con curvatura ovunque positiva è la sfera, l'unica che ammette curvatura ovunque zero è il toro, etc. In sintesi: la topologia condiziona la curvatura.[30]

3. Un teorema di Bonnet (generalizzato a più dimensioni da Myers) afferma che se una superficie Riemanniana completa ha curvatura positiva (nel senso $K \geq \delta > 0$) allora è limitata, dunque (per Hopf-Rinow) compatta. La dimostrazine di Bonnet sfrutta la formula di variazione seconda del funzionale lunghezza, vedi do Carmo sezione 5.4.

In sintesi: la curvatura condiziona la topologia.

4. Abbiamo affermato che, tra le superfici orientabili compatte, solo il toro può avere una metrica con curvatura Gaussiana zero. Una tale metrica non può però essere ottenuta tramite un'immersione in $\mathbb{R}^3$. Per costruirne un esempio astratto possiamo invece prendere la metrica ottenuta tramite l'identificazione dei lati opposti di un quadrato.

Analogamente, un teorema di Hilbert afferma che non esistono superfici regolari complete in $\mathbb{R}^3$ aventi curvatura costante -1. È però possibile costruire superfici Riemanniane astratte complete aventi tale curvatura: per esempio, il disco di Poincaré.

In sintesi, la curvatura condiziona l'immergibilità . Questi risultati ed esempi mostrano l'importanza di una teoria Riemanniana astratta.[31]

---

[29] These results provide an intrinsic way of distinguishing positive/negative curvature, compared to the extrinsic convexity/concavity point of view seen above, regarding surfaces in $\mathbb{R}^3$. The intrinsic point of view is important for answering questions such as "Is the earth curved or flat?", or for understanding the effects of curvature on spacetime. See also Wheeler, Gravity and Spacetime.

[30] Compare with formula $\int_C k ds = 2\pi$, seen for curves, but remember that curvatures contain different info in the two cases.

[31] Maybe good to add paragraph concerning issues relevant to relativity. For example, 0: the existence of the Levi-Civita connection, geodesics in every direction, etc holds for any non-degenerate metric. Curvature is defined in the same way. Maybe small differences in the sign of some terms in formulae for the sectional or Ricci curvature. Also, 1: The fact that geodesics are uniquely defined as parametrized curves by their initial data defines a parameter t for a free-falling observer. However: this is not the proper time for the observer (otherwise photons would also have a time). The proper time is defined as $\int_\gamma \sqrt{|Q|}$. Bottom line: General relativity is geometric, the parameter t is artificial. We can calculate proper time by integrating $\sqrt{|Q|}$, no need for a parametrization. Note: rescaling initial data or changing

19 Gruppi di Lie

Mare magnum. Ci inzupperemo solo il pollicione: quanto basta per porre le basi per il concetto di simmetria.

Dal punto di vista teorico, la teoria di Lie è il punto d'incontro tra la geometria differenziale e la teoria dei gruppi, in algebra. Più specificamente, l'idea è di studiare insiemi sui quali siano definiti simultaneamente, e in modo compatibile, sia una struttura di varietà sia una operazione di gruppo. La teoria mostra come le due strutture si possono aiutare a vicenda, generando risultati molto più forti di quelli ottenibili con una struttura singola.

Dal punto di vista applicato, i gruppi di Lie sono lo strumento ideale per codificare simmetrie di sistemi matematici o fisici. Una parola chiave, in questo contesto, è azione di gruppo su uno spazio vettoriale o su una varietà . La meccanica classica si basa su tutto ciò per individuare quantità conservate dal moto, e quindi imparare qualcosa su di esso anche senza determinarlo con esattatezza.

Definizione 19.1 *Un insieme G si dice gruppo se è dotato di un'operazione binaria interna*

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

avente le seguenti proprietà :

1. *Associatività , ossia $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.*
2. *Esistenza di un elemento neutro e, ossia $ge = eg = g$.*
3. *Esistenza di elementi inversi, ossia per ogni g esiste g^{-1} tale che $gg^{-1} = g^{-1} g = e$.*

---

t_0 corresponds to affine translations of the proper time, ie to changing unit of measure of time. Also, 2: The fact that geodesics on $\mathbb{R}^3$ are so different from geodesics on a cylinder is analogous to the fact that free fall is geodesic in spacetime, but not in space: eg earth's orbit or the trajectory of a bullet are geodesics in spacetime but not in space. In general, the geodesics coincide only if the submanifold is totally geodesic. Also, 3: In relativity textbooks one reads "from the viewpoint of an observer in free fall, spacetime looks flat (eg, Minkowski)". This is known as the equivalence principle. I think the point is roughly as follows. Choose a point on a geodesic in spacetime. Find the space orthogonal to velocity. It is automatically spacelike. Choose an ON frame on it, and use normal coordinates to build and parametrize a local spacelike slice. Now apply parallel transport along the geodesic to move the frame, obtaining a family of spacelike coordinates at each point. Locally, the result is a family of flat spaces with a map giving a good approximation of a tubular nbd of the geodesic. Note: The equivalence principle thus holds only up to small errors. This construction also serves to explain the relevance of parallel transport in relativity. Also, 4: To be clear, the equivalence principle applies to any free-falling observers. In particular, it applies to an observer who is orbiting around the sun, thus classically accelerated. It does not apply to an observer who is sitting on a merry-go-round. Indeed, even though the motion is similarly rotational, the cause is different. In the first case, both spaceship and observer feel the sun's gravity. In the second case, only the merry-go-round feels a mechanical centripetal force. Our geometry incorporates only gravity, not other forces. Also, 5: the concept of "simultaneous" in GR is usually defined via a chosen, spacelike, foliation of spacetime. One sees different choices in the literature.

Un gruppo di dice Abeliano, o commutativo, se vale anche la proprietà $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Un sottoinsieme $H \subseteq G$ si dice sottogruppo se è chiuso rispetto all'operazione di gruppo. In tal caso scriveremo $H \leq G$.

Una funzione $\phi : G \to G'$ tra due gruppi si dice omomorfismo se, per ogni $g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_1)$. Tale funzione si dice isomorfismo se è iniettiva e suriettiva. In tal caso la funzione inversa è automaticamente un omomorfismo.

Queste definizioni implicano che l'elemento neutro è unico, che ogni g ha unico elemento inverso, che $\ker(\phi) := \{g \in G : \phi(g) = e'\}$ è un sottogruppo di G e che $\mathrm{Im}(\phi)$ è un sottogruppo di G'.

Esempi. Esempi di gruppi finiti sono l'insieme delle permutazioni di un insieme finito, dotato dell'operazione di composizione, oppure l'insieme $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ dotato dell'operazione di addizione modulo n (come le ore su un orologio). Il primo non è Abeliano, il secondo sì .

Esempi di gruppi non finiti sono $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con l'addizione, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ o $\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ con la moltiplicazione, qualunque spazio vettoriale (ignorando la possibilità del prodotto per scalari), ed i gruppi di matrici che vedremo sotto.

La mappa esponenziale reale $x \mapsto e^x$ determina un isomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$. La mappa esponenziale complessa $z \mapsto e^z$ determina un omomorfismo suriettivo tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ avente $\ker = \{(2\pi n)i : n \in \mathbb{Z}\}$.

Definizione 19.2 *Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile G (non necessariamente connessa) avente simultaneamente una struttura di gruppo, tale che la mappa*

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

sia differenziabile.

Un sottogruppo di Lie è una varietà differenziabile H dotata di un'immersione iniettiva $H \to G$ la cui immagine sia un sottogruppo di G.

Un omomorfismo tra gruppi di Lie è un omomorfismo tra gruppi che sia anche differenziabile. Se è anche invertibile, si dice isomorfismo.

Terminologia. Nonostante il rischio di appesantire la terminologia, è talvolta utile (come anche per gli spazi vettoriali), introdurre le parole endomorfismo e automorfismo per evidenziare il caso particolare di omomorfismi e isomorfismi $\phi : G \to G$. In questo contesto $\mathrm{Aut}(G)$ indica l'insieme degli automorfismi di G. È un sottogruppo di $\mathrm{Diff}(G)$.

Si noti che, fissato $g \in G$, le mappe

$$L_g : G \to G, \quad h \mapsto gh, \quad R_g : G \to G, \quad h \mapsto hg$$

sono diffeomorfismi perchè differenziabili, con inverse $L_{g^{-1}}, R_{g^{-1}}$ differenziabili.

Esempio. Se $G = \mathbb{R}^n$ con l'operazione $+$, le mappe L_M, R_M coincidono e sono traslazioni.

Si può dimostrare che la mappa di inversione $g \mapsto g^{-1}$ è automaticamente differenziabile, con inversa differenziabile, quindi anch'esso definisce un diffeomorfismo. Nessuna di queste mappe è un omomorfismo, ma (per ogni g) lo è la loro composizione

$$Ad_g : G \to G, \quad Ad_g(h) := L_g \circ R_{g^{-1}}(h).$$

Il seguente risultato è piuttosto sorprendente dal punto di vista differenziale. È un primo indizio della forza delle due strutture congiunte.

Theorem 19.3 *Sia G un gruppo di Lie e $H \leq G$ un sottogruppo in senso algebrico. Se H è topologicamente chiuso in G allora H è una sottovarietà regolare di G (ossia la mappa identità è una immersione regolare). Con questa struttura differenziabile H è un gruppo di Lie (ed un sottogruppo di Lie di G).*

Osservazione. Esistono sottogruppi di Lie che non sono sottoinsiemi topologicamente chiusi, ed esistono sottogruppi algebrici che non sono di Lie. Vedi Bryant.

Abbiamo detto che una varietà M è connessa nel senso topologico sse è connessa per archi, ossia sse per ogni due punti $p, q \in M$ esiste una curva continua $\alpha : [0, 1] \to M$ tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.

Se G non è connesso, la sua componente connessa G^0 contenente l'elemento neutro si distingue rispetto alle altre componenti per essere un sottogruppo di Lie. Le altre componenti sono solo sottovarietà .

Esempio. I gruppi finiti sono gruppi di Lie 0-dimensionali, rispetto alla topologia discreta. Anche gli altri gruppi visti sopra sono gruppi di Lie.

Si può dimostrare che l'insieme delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g), rispetto all'operazione di composizione, è un gruppo di Lie di dimensione finita.

L'insieme $\mathrm{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di M, dotato della composizione, può essere dotato di una struttura di varietà differenziabile infinito-dimensionale. La teoria dei gruppi di Lie di dimensione infinita è però barcollante. Conviene limitarsi all'affermazione che "$\mathrm{Diff}(M)$ è formalmente un gruppo di Lie infinito-dimensionale".

Gruppi di matrici. Molti gruppi di matrici sono gruppi di Lie. Tra l'altro, essendo contenuti in $\mathbb{R}^{n^2}$, sono una bella generalizzazione dell'esempio delle superfici in $\mathbb{R}^3$. In quanto gruppi di Lie, possiamo commentarli sia dal punto di vista topologico/differenziale sia dal punto di vista algebrico, in tal modo ripassando praticamente tutto quanto visto nel corso.

Diamo qualche esempio.

1. Sia $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dato da tutte le matrici $n \times n$. Usando la base standard possiamo identificarlo con $\mathbb{R}^{n^2}$. Si noti che in questo modo identifichiamo anche il prodotto scalare standard $\mathrm{tr}(A^t B)$ su $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ con quello standard su $\mathbb{R}^{n^2}$.

Sia $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ il sottoinsieme di tutte le matrici invertibili. Usando la base standard, possiamo identificarlo con l'insieme di tutti gli isomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie rispetto alla struttura di varietà differenziabile indotta come aperto di $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ e la struttura di gruppo rispetto alla moltiplicazione. Ha dimensione n^2.

Essere un sottoinsieme aperto di $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ implica che, per ogni $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $T_M \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = T_M \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$, dunque può essere identicato con $\mathbb{R}^{n^2}$. Possiamo usare il diffeomorfismo $L_M : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, R)$ per ottenere l'isomorfismo

$$dL_M : T_{Id} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to T_M \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto MA.$$

L'insieme $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ può alternativamente essere identificato come lo spazio delle matrici con determinante non-zero. Si noti che il determinante è una funzione continua. Ne consegue che una curva che collega una matrice con determinante negativo ad una con determinante positivo dovrebbe necessariamente passare da una matrice con determinante nullo. Questo dimostra che $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ non è connesso. Si può dimostrare che ha due componenti connesse. La componente contenente l'identità è data dalle matrici con determinante positivo, indicata $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.

Per quanto riguarda altre sue proprietà topologiche, notiamo che non è compatto (perchè non è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^{n^2}$). Ne consegue che i flussi di suoi campi vettoriali possono esistere anche solo per un tempo limitato. Usando la metrica indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$ possiamo anche studiare le sue proprietà metrico-Riemanniane: non è completo, dunque le geodetiche possono esistere anche solo per tempi limitati.

2. Sia $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici $n \times n$ aventi determinante 1. Usando la base standard, possiamo identificarlo con l'insieme di tutte le applicazioni lineari che preservano il volume del parallelepipedo generato da tale base. Algebricamente, è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Per dimostrare che è un sottogruppo di Lie basta notare che è un sottoinsieme topologicamente chiuso in quanto controimmagine dell'insieme chiuso $\{1\}$ tramite la funzione differenziabile $\det : \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. In alternativa possiamo usare il teorema della funzione implicita. A questo scopo sono utili le formule (valide per M invertibile)

$$\frac{d}{dt} \det(I + tA)_{|t=0} = \mathrm{tr}(A), \quad \frac{d}{dt} \det(M + tA)_{|t=0} = \det(M) \, \mathrm{tr}(M^{-1}A).$$

La prima formula si dimostra direttamente dalla definizione di determinante, la seconda segue dal teorema di Binet. Le formule indicano come trovare una direzione A in modo da dimostrare che $\nabla \det_{|M} \neq 0$, per ogni $M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Il teorema della funzione implicita mette in evidenza che $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ha dimensione n^2-1 e che $T_{Id}\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. E' un gruppo connesso. Come sopra, abbiamo isomorfismi

$$dL_M : T_{Id}\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \to T_M\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \quad A \mapsto MA.$$

E' completo (perchè chiuso in $\mathbb{R}^{n^2}$) ma non è compatto: per esempio, la successione

$$M_k := \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

non ha sottosuccessioni convergenti e mostra che $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ non è limitato.

3. Sia $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici ortogonali, ossia tali che $M^TM = Id$. Usando la base standard, possiamo identificarlo con l'insieme di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$. Algebricamente, è un gruppo rispetto alla moltiplicazione di matrici (ossia la composizione di isometrie); si può dimostrare che è algebricamente generato da rotazioni e riflessioni. Essendo un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, per dimostrare che è un gruppo di Lie basta notare che è un sottoinsieme topologicamente chiuso in quanto retroimmagine del sottoinsieme chiuso $\{0\}$ tramite la funzione differenziabile

$$\phi : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}), \quad \phi(M) := M^TM - Id.$$

In alternativa, possiamo mostrare che ϕ soddisfa le ipotesi del seguente teorema, che generalizza il teorema della funzione implicita.

Theorem 19.4 (Teorema del rango) *Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Supponiamo che, per ogni punto $p \in \phi^{-1}(0)$, il rango di $d\phi_{|p}$ abbia valore costante k. Allora $\phi^{-1}(0)$ è una sottovarietà di dimensione $n-k$.*

In questo modo troviamo che $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.[32] Data una curva $M(t)$ in $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ tale che $M(0) = Id$, derivando la relazione $M^TM = Id$ troviamo $(\dot{M}^T + \dot{M})_{|t=0} = 0$. Ne consegue che il piano tangente $T_{Id}\,\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ è contenuto nello spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche. Questi due spazi hanno però la stessa dimensione, dunque coincidono. Al solito, gli altri piani tangente possono essere studiati tramite L_M.

Il teorema di Binet mostra che le matrici ortogonali hanno determinante ± 1, dunque $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ non è connesso. La sua componente connessa contenente l'identità è l'insieme $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ definito dalle matrici ortogonali con determinante 1.

Sia $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ sia $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sono compatti (perchè chiusi e limitati in $\mathbb{R}^{n^2}$), dunque ogni campo vettoriale e' integrabile per ogni tempo.

[32] Numerology: The condition $M^TM - Id = 0$ looks like n^2 equations, but $M^TM - Id$ is symmetric so it is actually $n(n+1)/2$ equations. Now notice that $n = n(n+1)/2 + n(n-1)/2$.

Esempio. Il gruppo $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ è il gruppo delle rotazioni nel piano e può dunque essere identificato con la circonferenza unitaria. Si noti che una tale matrice non ha autovalori. Sia invece $M \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Allora

$$\det(M-Id) = \det(M)\det(Id-M^T) = (-1)^3\det(M)\det(M^T-Id) = -\det(M-Id),$$

dunque $\det(M - Id) = 0$: ciò dimostra che M ha autovalore 1, dunque almeno un autovettore. Geometricamente, questo dimostra che ogni rotazione di $\mathbb{R}^3$ ha un'asse di rotazione.

4. Il gruppo di Heisenberg è il gruppo delle matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, rispetto alla moltiplicazione. Si tratta di un sottogruppo di $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ di dimensione 3. Essendo diffeomorfo a $\mathbb{R}^3$, è connesso e non compatto. Non è Abeliano.

Il piano tangente in Id è dato dalle matrici della forma $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osservazione. Questo esempio serve anche a dimostrare che una stessa varietà , quale $\mathbb{R}^3$, può essere dotata di diverse strutture di gruppo di Lie. Un'altra tale struttura è definita tramite il gruppo Sol(3).

5. Parallelamente alla teoria delle varietà reali esiste una teoria delle varietà complesse, modellate su aperti di $\mathbb{C}^n$. In questo caso le mappe di transizione sono biolomorfismi; in termini della identificazione $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ogni biolomorfismo è in particolare un diffeomorfismo, quindi ogni varietà complessa è anche reale. In questo contesto, la nostra definizione di gruppo di Lie riguarda specificamente i gruppi di Lie reali. Esiste una teoria corrispondente per i gruppi di Lie complessi. Gruppi di matrici complesse danno luogo talvolta a gruppi di Lie reali, talvolta a gruppi di Lie complessi. Citiamo per esempio i gruppi $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ (gruppi di Lie complessi), $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ (gruppi di Lie reali).

Azioni di gruppi. In Fisica, i gruppi interessano soprattutto nella veste di gruppi di simmetrie. Questa nozione si formalizza come segue, in due situazioni diverse: simmetrie di spazi vettoriali e simmetrie di varietà .

Definizione 19.5 *Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale. Un'azione di G su V è un omomorfismo $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$. Risulta così definita una mappa*

$$G \times V \to V, \quad (g, v) \mapsto \rho(g)(v).$$

Se G è un gruppo di Lie, si chiede che tale mappa sia differenziabile.

L'omomorfismo ρ si dice anche rappresentazione di G. La rappresentazione si dice fedele se è iniettiva. In tal caso, ρ identifica G con un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(V)$.

Intuitivamente, $\mathrm{Im}(\rho)$ raggruppa l'insieme delle simmetrie di V governate dal gruppo. Spesso semplificheremo la notazione scrivendo $g(v)$ anzichè $\rho(g)(v)$.

Esempio. Ciascuno dei gruppi di matrici visti sopra è definito a partire dalla sua azione su $\mathbb{R}^n$. Ha dunque un'azione tautologica, e tale azione è fedele. Viceversa, sia G un gruppo qualunque. Scegliamo una base per V. Allora ogni azione fedele di G su V identifica G con un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, dunque con un gruppo di matrici.

Esistono però esempi di gruppi di Lie che non ammettono rappresentazioni fedeli su uno spazio vettoriale, e che dunque non sono realizzabili come gruppi di matrici.[33] Questo spiega il perchè di una teoria apparentemente più astratta del necessario.

Osservazione. Nel caso di gruppi finiti, il problema corrispondente all'esistenza di rappresentazioni fedeli riguarda l'esistenza di un omomorfismo iniettivo del gruppo dato in un qualche gruppo di permutazioni. In ambo i casi, si tratta di ricondurre un oggetto astratto ad uno più concreto, in modo da analizzarlo meglio.

E' bene sottolineare le analogie con altri grandi problemi della geometria, quali: (i) Trovare immersioni regolari di una varietà astratta in $\mathbb{R}^n$, (ii) trovare immersioni regolari isometriche di una varietà Riemanniana astratta in $\mathbb{R}^n$ con la metrica standard, (iii) trovare immersioni proiettive di una varietà complessa. I teoremi di Whitney e Nash affermano che (i), (ii) sono sempre possibili a patto di scegliere n sufficientemente grande. La teoria delle varietà complesse afferma che immersioni olomorfe in $\mathbb{CP}^n$ non sono sempre possibili.

Osservazione. In GAL1 studiavamo gli automorfismi di V individualmente. Lo studio di un gruppo di automorfismi si chiama Teoria delle Rappresentazioni (dei gruppi). Lo stesso gruppo può esercitare azioni distinte. Per esempio, $G := \mathrm{SO}(n)$ rappresenta le isometrie di $\mathbb{R}^n$ se usiamo l'azione tautologica, ma rappresenta solo l'identità se usiamo la rappresentazione $\rho(M) \equiv Id$.

Definizione 19.6 *Sia G un gruppo e M una varietà differenziabile. Un'azione di G su M è un omomorfismo $\rho : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Risulta così definita una mappa*

$$G \times M \to M, \quad (g,p) \mapsto \rho(g)p.$$

Se G è un gruppo di Lie, si chiede che tale mappa sia differenziabile.

Come prima, l'omomorfismo ρ si dice anche rappresentazione di G. La rappresentazione si dice fedele se è iniettiva. In tal caso, ρ identifica G con un sottogruppo di $\mathrm{Diff}(M)$. Spesso semplificheremo la notazione scrivendo $g(p)$ anzichè $\rho(g)(p)$.

[33] Vedere appendice del libro di Brian Hall.

Esempio. Il flusso di un campo vettoriale su M definisce un omomorfismo $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, dunque un'azione del gruppo $\mathbb{R}$ su M.

$G := \mathrm{SO}(2)$ agisce per rotazioni sulla circonferenza $M := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $G := \mathrm{SO}(3)$ agisce per rotazioni sulla sfera $M := \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Sono rappresentazioni fedeli, che realizzano G come gruppo delle isometrie della sfera.

$G := \mathrm{SO}(2)$ agisce anche sul cilindro $M := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$. Si tratta di nuovo di una rappresentazione fedele, ma in questo caso l'immagine è solo un sottogruppo delle isometrie, perchè non include le traslazioni lungo l'asse z.

Ogni azione di G su M definisce un'azione indotta di G su qualunque fibrato tensoriale associato ad M. La differenza tra tensori covarianti e controvarianti corrisponde a comportamenti opposti riguardo alle composizioni. Per esempio, l'azione di G su M definisce un'azione su TM tramite push-forward: $g(p, v) := (gp, g_*(v))$. Per ottenere un'azione di G su T^*M bisogna usare il diffeomorfismo inverso: $g(p, \alpha) := (gp, (g^{-1})^*\alpha)$.

Simmetrie. Il concetto di simmetria dipende dal contesto. Su una varietà differenziabile M, una simmetria potrebbe essere semplicemente un diffeomorfismo. Su una varietà Riemanniana (M, g), un simmetria sarà tipicamente intesa come un'isometria: $\phi^*g = g$ ossia, per ogni $p \in M$,

$$d\phi_{|p} : T_pM \to T_{\phi(p)}M, \quad g(d\phi_{|p}(v_1), d\phi_{|p}(v_2)) = g(v_1, v_2).$$

Il fatto interessante riguardo alle simmetrie è che formano, naturalmente, un gruppo: per esempio, se $\phi^*g = g$ e $\psi^*g = g$ allora $(\phi \circ \psi)^*g = g$. Il rapporto con M viene codificato dalla nozione di azione. E' dunque naturale presupporre, fin dall'inizio, di lavorare con gruppi di simmetrie.

Se M è dotato di un tensore T, possiamo incorporarlo nella nozione di simmetrie tramite la condizione seguente.

Definizione 19.7 *Un'azione di G su M preserva un tensore T se T è invariante rispetto all'operazione di pull-back: $g^*T = T$, per ogni $g \in G$.*

Esempio. Sia M ha una metrica, tale condizione significa che $\mathrm{Im}(\rho)$ è contenuto nel sottogruppo di $\mathrm{Diff}(M)$ definito dalle isometrie.

Se il gruppo risulta essere un gruppo di Lie, la teoria che svilupperemo mostrerà che possiamo controllarne la geometria e l'azione in modo molto forte, aiutandoci con il concetto di algebra.

In Fisica, si comincia tipicamente definendo lo spazio delle configurazioni o delle fasi del sistema, dunque una varietà differenziabile. Su questa possono essere presenti campi vettoriali (forze), metriche, forme differenziali (2-forma simplettica) o tensori T di altro tipo. Questi dati definiranno la nozione di simmetria per il sistema.

Fissato tale contesto, il problema fisico corrisponderà ad una qualche equazione differenziale. Tendenzialmente, tale equazione sarà automaticamente anch'essa invariante per l'azione di G, nel senso che il suo spazio di soluzioni $\mathcal{S}$ sarà invariante in un senso opportuno, legato alla natura del problema.

Esempio. Per esempio, se il problema riguarda funzioni $f : M \to \mathbb{R}$, un sottoinsieme $\mathcal{S}$ si dice invariante se, per ogni $f \in \mathcal{S}$ e ogni $g \in G$, si ha che $f \circ g \in \mathcal{S}$.

Se il problema riguarda moti $\alpha : (a, b) \to M$, un sottoinsieme $\mathcal{S}$ si dice invariante se, per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$ e ogni $g \in G$, si ha $g \circ \alpha \in \mathcal{S}$.

20 Algebre di Lie

Passiamo ora ad una seconda nozione. Vedremo in seguito il profondo legame tra queste diverse nozioni.

Definizione 20.1 *Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale* $\mathfrak{g}$ *dotato di un'operazione bilineare*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

avente le seguenti proprietà :

1. *Anti-commutatività :* $[X, Y] = -[Y, X]$.
2. *Identità di Jacobi (associatività debole):*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

La dimensione di $\mathfrak{g}$ *è quella dello spazio vettoriale sottostante. Un'algebra di Lie si dice Abeliana se* $[\cdot, \cdot] = 0$.

Un omomorfismo di algebre di Lie è un omomorfismo $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *di spazi vettoriali tale che* $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

Al solito possiamo poi definire isomorfismi, endomorfismi e automorfismi di un'algebra di Lie.

Esempio. Su ogni spazio vettoriale esiste una struttura di algebra di Lie banale: quella Abeliana.

Il commutatore $[A, B] := AB - BA$ di matrici produce una nuova matrice: con questa operazione $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ è un'algebra di Lie.

Se A, B sono anti-simmetriche (oppure: hanno traccia nulla), anche $[A, B]$ è anti-simmetrica (oppure: ha traccia nulla): tali matrici formano dunque una sottoalgebra di $\mathrm{gl}(n, R)$.

In dimensione 1 la proprietà anti-simmetrica implica che la struttura di algebra di Lie Abeliana è l'unica struttura possibile.

In dimensione 2 è semplice dimostrare che qualunque operazione bilineare antisimmetrica $V \times V \to V$ soddisfa l'identità di Jacobi. Data una base $\{v_1, v_2\}$, una seconda struttura di algebra di Lie è data ponendo $[v_1, v_2] := v_1$. Si dimostra che ogni altra struttura di algebra di Lie è isomorfa a quella Abeliana o a questa.

In dimensione 3 le strutture di algebra di Lie non-isomorfe furono classificate da Bianchi nel 1898. Ce ne sono infinite. Il prodotto vettoriale su $\mathbb{R}^3$ fornisce un esempio non Abeliano: $[i, j] := i \times j = k$, etc. La mappa

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

dà un isomorfismo tra l'algebra di Lie definito tramite il prodotto vettoriale e l'algebra di Lie delle matrici anti-simmetriche 3x3.

Anche le matrici che appartengono al piano tangente in Id al gruppo di Heisenberg sono un sottoinsieme chiuso rispetto al commutatore. In tal modo si trova un secondo esempio di algebra di Lie 3-dimensionale non Abeliana.

Lo spazio $\mathcal{X}(M)$ dei campi vettoriali su M è un'algebra di Lie infinito-dimensionale rispetto all'operazione $[X, Y]$.

Azioni di algebre di Lie. Parallelamente alla teoria delle azioni di gruppi, si può sviluppare la teoria delle azioni di algebre.

Definizione 20.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e V uno spazio vettoriale. Un'azione di $\mathfrak{g}$ su V è un omomorfismo di algebre di Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$.*

Lo studio di tali azioni costituisce la Teoria delle Rappresentazioni (di algebre). A noi interesserà soprattutto il seguente caso particolare.

Definizione 20.3 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e M una varietà differenziabile. Un'azione di $\mathfrak{g}$ su M è un omomorfismo di algebre di Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$.*

Esempio. Sia X un campo vettoriale su M. La mappa $\mathbb{R} \to \mathcal{X}(M)$, $t \mapsto tX$, definisce un'azione dell'algebra di Lie $\mathbb{R}$ su M.

Siano dati campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k$ su M aventi la proprietà seguente: esistono $c_{ij}^m \in \mathbb{R}$ tali che $[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^m X_m$. Allora lo spazio vettoriale generato da tali campi, con il bracket di Lie, è un'algebra di Lie con un'azione naturale su M.

Al solito, spesso eviteremo di includere l'omomorfismo ρ nella notazione. In questo contesto si parla di simmetrie infinitesimali, definite in termini della derivata di Lie.

Definizione 20.4 *Un'azione di $\mathfrak{g}$ su M preserva un tensore T se $\mathcal{L}_X T = 0$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$.*

Sottolineiamo due cose.

1. Abbiamo visto che un campo vettoriale definisce un'azione dell'algebra $\mathbb{R}$ su M, il suo flusso definisce un'azione del gruppo $\mathbb{R}$ su M. Il flusso viene costruito a partire dal campo, dunque l'azione del gruppo viene costruito a

partire dall'azione di un'algebra. Uno dei nostri scopi sarà capire come generalizzare questa situazione a dimensioni maggiori: data un'azione di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su M, esiste una corrispondente azione di un qualche gruppo G su M?

2. Si noti la semplicità delle nozioni di algebra/azione rispetto a quelle di gruppo/azione. Nonostante ciò , nel rispondere alla domanda sopra troveremo che sono sostanzialmente equivalenti: gran parte della complessità geometrica della nozione di gruppo di Lie è incapsulata nell'algebra lineare di un'algebra di Lie ad esso associata. Ciò fornisce un doppio punto di vista sulle azioni: al punto di vista globale, legato ai gruppi, corrisponde un punto di vista infinitesimale, legato alle algebre.[34]

21 Campi vettoriali su G

Il fatto che G sia un gruppo di Lie ha implicazioni profonde sulla sua geometria. Ci limiteremo a discutere i campi vettoriali.

I diffeomorfismi L_g generano isomorfismi $dL_g : T_eG \to T_gG$, permettendoci di identificare in modo canonico ogni spazio tangente con T_eG. In altre parole, ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.

Osservazione. La sfera $\mathbb{S}^2$ non è parallelizzabile, quindi non esiste su di essa un'operazione tale che sia un gruppo di Lie.

In particolare, otteniamo una identificazione tra campi vettoriali su G e mappe differenziabili $G \to T_eG$. In questo contesto esiste una classe di campi vettoriali speciali: quelli generati da mappe costanti $G \to T_eG$. Detto altrimenti, fissato $X \in T_eG$ possiamo costruire un campo vettoriale $\tilde{X}$ come segue:

$$g \in G \mapsto \tilde{X}_g := dL_g(X) \in T_gG.$$

Osservazione. Sottolineiamo la semplificazione: siamo passati da sezioni di TM a mappe con valori in uno spazio vettoriale.

Esempio. Sia G un gruppo di matrici. Ogni $M \in G$ determina il diffeomorfismo

$$L_M : G \to G, \quad N \mapsto MN$$

con $dL_M : T_{Id}G \to T_MG$, $X \mapsto MX$. Qualunque mappa $G \to T_{Id}G$, $M \mapsto X(M)$ determina un campo vettoriale $M \mapsto MX(M)$. Tra questi ci sono i campi corrispondenti alle mappe costanti $X(M) = X$.

Esiste una caratterizzazione alternativa di tali campi. Ricordiamo che ogni diffeomorfismo ϕ di una varietà M determina un modo di spostare campi vettoriali: l'operazione push-forward. Fissiamo dunque $g \in G$ e poniamo $\phi := L_g$.

[34] Future versions should prove (i) G Abelian implies $\mathfrak{g}$ Abelian, (ii) the space of inf. symmetries of T is a subalgebra.

Allora

$$\begin{aligned} L_g(\tilde{X})_{|h} &= dL_{g|g^{-1}h}(\tilde{X}) = dL_{g|g^{-1}h}(dL_{g^{-1}h}(X)) = d(L_g \circ L_{g^{-1}h})(X) \\ &= dL_h(X) = \tilde{X}_{|h}. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che, per ogni g e X, $L_g(\tilde{X}) = \tilde{X}$, ossia che i campi costruiti come sopra sono invarianti rispetto a qualunque tale spostamento. I campi vettoriali su G con questa proprietà si chiamano, appunto, campi vettoriali invarianti.

È semplice dimostrare che i campi invarianti sono chiusi rispetto a somma e prodotto per scalare, ossia formano un sottospazio vettoriale dello spazio di tutti i campi vettoriali su G. Inoltre, qualunque campo invariante X' deve soddisfare in particolare la condizione $dL_{g^{-1}|g}(X'_g) = X'_e$. Invertendo, troviamo $X'_g = dL_g(X'_e)$. Ponendo $X := X'_e$, troviamo dunque che $X' = \tilde{X}$, dove $\tilde{X}$ è generato come sopra dal vettore $X \in T_eG$. Otteniamo così il seguente risultato.

Proposizione 21.1 *Sia G un gruppo di Lie. La costruzione*

$$X \in T_eG \mapsto \tilde{X} \in \mathcal{X}(G)$$

definisce un isomorfismo tra T_eG e lo spazio vettoriale dei campi vettoriali invarianti.

Osservazione. Abbiamo già osservato che il modo geometrico di definire il concetto di campo constante è tramite una connessione. Per l'appunto, su ogni gruppo di Lie esiste una connessione per la quale i campi paralleli sono esattamente quelli invarianti.

Applicazione: il Teorema di Frenet. Quanto detto ha un'interessante interpretazione nell'ambito della teoria delle curve. Ricordiamo il teorema di Frenet, nella seguente formulazione: ogni scelta di funzioni $k(s) > 0$, $\tau(s)$ e base ortonormale positiva iniziale $\{t, n, b\}$ determina un'unica curva di basi ortonormali positive $\{t(s), n(s), b(s)\}$ soddisfacente il sistema di equazioni di Frenet.

Se identifichiamo i vettori $\{t, n, b\}$ con le colonne di matrici $M \in \mathrm{SO}(3)$, possiamo riformulare il sistema di Frenet come la seguente ODE per una curva in $\mathrm{SO}(3)$:

$$M(0) = Id, \quad \dot{M}(s) = M \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $X_s := \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$. Essendo antisimmetrica, possiamo associarle un campo vettoriale invariante $\tilde{X}_s(M)$ dipendente dal parametro s. L'equazione diventa allora

$$M(0) = Id, \quad \frac{d}{ds}M(s) := \tilde{X}_{s|M(s)},$$

che è l'ODE della linea di flusso di questo campo, passante per Id. Poichè SO(3) è compatto, la soluzione esiste per ogni s per cui risultano definite le funzioni iniziali.

Per ricollegarsi alla teoria delle curve basta notare che, per integrazione, ogni scelta di $p \in \mathbb{R}^3$ determina un'unica curva $\alpha(s)$ avente velocità $t(s)$ e tale che $\alpha(0) = p$. Tale curva è automaticamente parametrizzata per arco-lunghezza. Ha curvatura $k(s)$ e torsione $\tau(s)$.

22 Gruppi ed algebre

L'algebra di Lie di G, parte I. Ricordiamo che, data qualunque varietà differenziabile M, sullo spazio vettoriale dei campi vettoriali risulta definita un'operazione aggiuntiva: la parentesi di Lie. Sappiamo che, per qualunque diffeomorfismo ϕ, $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

Consideriamo ora il caso particolare in cui $M := G$, un gruppo di Lie. Usando $\phi := L_g$ e campi vettoriali invarianti, otteniamo $L_g([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$: i campi vettoriali invarianti sono dunque chiusi rispetto alla parentesi di Lie. Usando l'identificazione menzionata, possiamo trasferire questa operazione su T_eG ottenendo l'operazione

$$T_eG \times T_eG \to T_eG, \quad (X,Y) \mapsto [X,Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{|e}.$$

Per definizione, $\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Formalizziamo questa costruzione come segue.

Definizione 22.1 *L'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie G è $\mathfrak{g} := (T_eG, [\cdot,\cdot])$, dotata della struttura di algebra indotta dai campi vettoriali invarianti.*

Osservazione. È appena successo qualcosa di molto importante. Abbiamo scoperto che la struttura algebrica di G definisce su uno dei suoi spazi tangente una struttura extra. Lo spazio T_eG non è più solo uno spazio vettoriale.

Esempio. Sia G il gruppo di matrici $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Vettori $X, Y \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ definiscono mappe costanti $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, dunque campi vettoriali invarianti $M \mapsto MX, MY$. Il fatto $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ implica che la parentesi di Lie obbedisce ad una formula analoga a quella vista per $\mathbb{R}^n$. Troviamo dunque

$$\begin{aligned}
[X,Y] &:= [MX, MY]_{|Id} = (MX(MY) - MY(MX))_{|Id} \\
&= (MX(M))_{|Id}Y - (MY(M))_{|Id}X \\
&= dM_{|Id}(X)Y - dM_{|Id}(Y)X \\
&= XY - YX,
\end{aligned}$$

dove usiamo il fatto che dM si riferisce ad M vista come mappa e dipendente dalla variabile M, ossia alla mappa identità $M \mapsto M$. Tale mappa ha come differenziale l'identità .

Ciò dimostra che la parentesi di Lie su $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ coincide con il commutatore. In altre parole: la struttura di algebra di Lie su $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ indotta dalla teoria generale coincide con quella standard, definita tramite il commutatore.

Lo stesso vale per ogni gruppo di matrici, generando i seguenti esempi.

Esempio. L'algebra di Lie di SO(2) è data dalle matrici antisimmetriche 2×2. È Abeliana. Più in generale, vedremo sotto che ogni gruppo di Lie Abeliano ha algebra di Lie Abeliana.

Per quanto visto, l'algebra di Lie di SO(3) è isomorfa a $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale.

L'algebra di Lie di $\mathrm{SO}(n)$ è data dallo spazio delle matrici anti-simmetriche nxn, con il commutatore. Lo stesso vale per $\mathrm{O}(n)$, mostrando che gruppi diversi possono avere la stessa algebra.

L'algebra di Lie di $\mathrm{SL}(n)$ è data dallo spazio delle matrici nxn aventi traccia nulla, con il commutatore.

L'algebra di Lie di G, parte II. Ora vogliamo, al contrario, evidenziare che conoscere $\mathfrak{g}$ permette di ricostruire molte informazioni su G.

Il punto di partenza consiste nello studiare i flussi definiti dai campi vettoriali invarianti. In particolare si può dimostrare quanto segue.

Proposizione 22.2 *Sia G un gruppo di Lie. Allora ogni campo vettoriale invariante è completo, ossia ogni sua curva di flusso $t \mapsto \phi_t(p)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Scegliendo $p := e \in G$, si ottiene in tal modo un omomorfismo $\mathbb{R} \to G$.*

Dimostriamo solo che si tratta di un omomorfismo: $\forall t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{t_1+t_2}(e) = \phi_{t_1}(e) \cdot \phi_{t_2}(e).$$

La prima tappa consiste nel dimostrare che, per ogni t_1 fissato, le due curve

$$t_2 \mapsto \phi_{t_1+t_2}(e), \quad t_2 \mapsto \phi_{t_1}(e) \cdot \phi_{t_2}(e)$$

soddisfano la stessa equazione differenziale.

Per quanto riguarda la prima curva, poniamo $t := t_1 + t_2 = t(t_2)$, dunque $\frac{dt}{dt_2} = 1$. La regola della derivata di una composizione implica allora che

$$\frac{d}{dt_2}\phi_{t_1+t_2}(e) = \frac{d}{dt}\phi_t(e)\frac{dt}{dt_2} = \tilde{X}_{|\phi_t(e)} = \tilde{X}_{|\phi_{t_1+t_2}(e)}$$

Per quanto riguarda la seconda,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt_2}(\phi_{t_1}(e) \cdot \phi_{t_2}(e)) &= \frac{d}{dt_2}(L_{\phi_{t_1}(e)}\phi_{t_2}(e)) = dL_{\phi_{t_1}(e)}(\frac{d}{dt_2}\phi_{t_2}(e)) \\ &= dL_{\phi_{t_1}(e)}(\tilde{X}_{\phi_{t_2}(e)}) = dL_{\phi_{t_1}(e)}dL_{\phi_{t_2}(e)}(X) \\ &= dL_{\phi_{t_1}(e)\cdot\phi_{t_2}(e)}(X) = \tilde{X}_{\phi_{t_1}(e)\cdot\phi_{t_2}(e)}.\end{aligned}$$

Le due equazioni coincidono, come speravamo.

La seconda tappa consiste nel notare che, per il dato iniziale $t_2 = 0$, le due curve hanno lo stesso valore iniziale.

Il teorema di unicità per le ODE implica dunque che le due curve coincidono per ogni t_2 di esistenza.

In altre parole, abbiamo associato ad ogni $X \in \mathfrak{g}$ un sottogruppo 1-dimensionale di G. Usando il vettore $\lambda X \in \mathfrak{g}$ troviamo lo stesso sottogruppo (riparametrizzato con l'isomorfismo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \lambda t$).

Si osservi che la retta generata da X può essere intesa come sottoalgebra Abeliana di $\mathfrak{g}$. In conclusione, abbiamo costruito una corrispondenza

$$\{\text{sottoalgebre 1-dimensionali di } \mathfrak{g}\} \to \{\text{sottogruppi 1-dimensionali di } G\}.$$

Si tratta di una corrispondenza biunivoca: dato un sottogruppo $\mathbb{R} \to G$, la derivata in e definisce un vettore $X \in \mathfrak{g}$, dunque un campo invariante $\tilde{X}$, il cui flusso per e coincide con il sottogruppo grazie al teorema di unicità per le ODE.

Esempio. Sia G un gruppo di matrici. Scegliamo $X \in \mathfrak{g}$. Sia $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_t(Id) \in G$ la linea di flusso di $\tilde{X}$ passante per Id:

$$\phi_0(Id) = Id, \quad \frac{d}{dt}\phi_t(Id) = \tilde{X}_{|\phi_t(Id)}.$$

La teoria delle ODE insegna a risolvere equazioni di questo tipo tramite la nozione di esponenziale di matrici: $e^M := \sum \frac{M^n}{n!}$. In particolare, il fatto che la soluzione sia unica implica che, se troviamo una soluzione, allora essa è quella giusta. In questo caso consideriamo la curva di matrici $t \mapsto e^{tX} := \sum \frac{(tX)^n}{n!}$. Le proprietà dell'esponenziale implicano che

$$e^{0X} = Id, \quad \frac{d}{dt}e^{tX} = e^{tX}X = \tilde{X}_{|e^{tX}}.$$

Questo dimostra che $\phi_t(Id) := e^{tX}$ risolve l'equazione. In realtà non abbiamo ancora finito: dobbiamo ancora dimostrare che $e^{tX} \in G$. Possiamo controllare questo fatto in ogni caso specifico, sempre usando le proprietà dell'esponenziale. Per esempio:

- Se $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ allora la proprietà $\det(e^M) = e^{\mathrm{tr}(M)}$ implica che $\det(e^{tX}) \neq 0$, come desiderato.
- Se $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ allora $\mathrm{tr}(X) = 0$. La proprietà $\det(e^M) = e^{\mathrm{tr}(M)}$ implica che $\det(e^{tX}) = 1$, come desiderato.
- Se $G = \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ allora $X^T = -X$. La proprietà $(e^M)^T = e^{(M^T)}$ implica che $(e^{tX})^T = e^{-tX} = (e^{tX})^{-1}$, come desiderato.

Concludiamo che $\phi_t(Id) = e^{tX}$.

Osservazione. Si noti che $t \mapsto e^{tX}$ è una curva continua, dunque la sua immagine è interamente contenuta nella componente connessa G^0 contenente $Id = e^{0X}$.

Abbiamo così costruito quanto serve per descrivere il legame fondamentale tra $\mathfrak{g}$ e G.

Definizione 22.3 *Sia G un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra. La mappa esponenziale è la mappa*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad X \mapsto \phi_1(e)$$

che associa ad X il punto di G raggiunto al tempo $t = 1$ dalla linea di flusso di $\tilde{X}$ passante da e.

Si può dimostrare che $d(\exp)_{|0}(X) = X$, ossia che $d(\exp)_{|0} = Id$. Ne consegue che exp è un diffeomorfismo locale tra un intorno di $0 \in \mathfrak{g}$ ed un intorno di $e \in G$. Inoltre, $t \mapsto \exp(tX)$ coincide con il flusso di $\tilde{X}$.

Esempio. Abbiamo visto che quando G è un gruppo di matrici $\exp(X) = e^X$. In questo contesto

$$d(\exp)_{|0}(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX})_{|t=0} = e^{tX}_{|t=0}X = X.$$

È chiaro che di diffeomorfismi locali tra T_eG e G ce n'è tanti. L'interesse nella mappa exp è che è canonicamente definita dalla struttura di G. Vogliamo far vedere che, di conseguenza, riesce a mettere in relazione la struttura di T_eG con quella di G.

Ovviamente, la relazione più semplice sarebbe che exp fosse un omomorfismo tra le strutture di gruppo su T_eG e su G, ossia $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$. La realtà è invece più complessa: la formula corretta contiene termini aggiuntivi, che possono essere scritti in modo molto esplicito. Il punto chiave è che tali termini dipendono dalla struttura di algebra di Lie.

Theorem 22.4 (Baker-Campbell-Hausdorff) *Sia G un gruppo di Lie e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora*

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] - [Y,[X,Y]]) + ...),$$

dove ogni termine addizionale può essere scritto in termini della parentesi di Lie su $\mathfrak{g}$.

Esempio. Se $\mathfrak{g}$ è Abeliano allora G^0 è Abeliano e exp è un omomorfismo di gruppi. Non è detto che G sia Abeliano: si consideri l'esempio $G = \mathrm{O}(2)$, $G^0 = \mathrm{SO}(2)$.

Il teorema implica che la struttura di gruppo su G è , localmente, interamente identificata dalla struttura di algebra su T_eG. Si può poi dimostrare che la struttura locale di gruppo determina quella globale, su tutto G^0. La conclusione è che $\mathfrak{g}$ determina interamente la struttura di gruppo su G^0. Considerato che vale anche il viceversa, possiamo riassumere la situazione nel modo seguente.

Principio. Sia G un gruppo di Lie connesso e T_eG il suo piano tangente. Allora la struttura di gruppo su G determina la struttura di algebra su T_eG, e viceversa.

Sottogruppi e sottoalgebre. La corrispondenza biunivoca tra sottoalgebre e sottogruppi di Lie 1-dimensionali si estende ad ogni dimensione.

Sia H un sottogruppo di G. Per definizione di sottovarietà , $T_eH \leq T_eG$. Inoltre, ogni campo invariante su H si estende, tramite i diffeomorfismi L_g, ad un campo invariante su G. Ne consegue che l'algebra $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$.

Il punto interessante è che vale anche il viceversa: ogni sottoalgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ determina un sottogruppo $H \leq G$. Ciò segue o dalla formula di Baker-Campbell-Hausdorf oppure dal teorema di Frobenius, che dimostra che il sottofibrato di TG determinato dai campi vettoriali invarianti di $\mathfrak{h}$ determina una sottovarietà H contenente $e \in G$. Si dimostra poi che H è chiuso rispetto alla moltiplicazione. Si arriva così al seguente risultato.

Principio. Sia G un gruppo di Lie connesso e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Allora la mappa exp definisce una corrispondenza biunivoca tra le sottoalgebre $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ e i sottogruppi connessi $H \leq G$.

Esempio. Ciascuno dei sottogruppi che abbiamo visto in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ corrisponde, come visto, ad una sottoalgebra di $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$. Si noti però che ambo i sottogruppi $\mathrm{SO}(n)$ (connesso) e $\mathrm{O}(n)$ (non connesso) corrispondono alla stessa sottoalgebra delle matrici anti-simmetriche.

Omomorfismi e azioni. Lo stretto legame tra gruppi e algebre si estende anche agli omomorfismi.

Proposizione 22.5 *Sia $\phi : G_1 \to G_2$ un omomorfismo tra gruppi. Sia $\phi' := d\phi_{|e_1} : T_{e_1}G_1 \to T_{e_2}G_2$ il suo differenziale in e_1. Allora ϕ' è un omomorfismo di algebre. In particolare, ogni azione di G induce un'azione di $\mathfrak{g}$.*

Siano infatti $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ e $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ i campi invarianti corrispondenti. Usando le proprietà del push-forward, troviamo

$$\begin{aligned}\phi'([X,Y]) &= d\phi_{|e_1}([\tilde{X},\tilde{Y}]_{e_1}) = \phi([\tilde{X},\tilde{Y}])_{|e_2} = [\phi(\tilde{X})_{|e_2}, \phi(\tilde{Y})_{|e_2}] \\ &= [d\phi_{|e_1}(\tilde{X}), d\phi_{e_1}(\tilde{Y})] = [\phi'(X), \phi'(Y)].\end{aligned}$$

In questo caso, però , il viceversa è più delicato: tendenzialmente, un omomorfismo di algebre $\phi' : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ induce solo un "omomorfismo locale" $\phi : U \subseteq G_1 \to G_2$ tale che $d\phi_{|e_1} = \phi'$.

Osservazione. Condizione sufficiente affinchè ϕ si estenda a tutto G_1 è che G_1 sia "semplicemente connesso". Tale condizione appare anche in un secondo contesto. Finora abbiamo supposto che l'algebra di Lie fosse definita a partire da un gruppo G. Possiamo però chiedere: data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, esiste sempre un gruppo di Lie G a cui è associata? Tale gruppo è unico?

La risposta alla prima domanda è sì , alla seconda no. Per cominciare, $\mathfrak{g}$ determina solo G^0. Inoltre, tale G^0 è unico solo a meno di "rivestimenti". Ne consegue che G^0 è unico solo se specifichiamo che sia semplicemente connesso.

Esempio. I due gruppi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^1$ hanno la stessa algebra di Lie $\mathfrak{g} := \mathbb{R}$. Consideriamo $M := \mathbb{R}^2$ e $X := \partial x$, campo vettoriale su M. Integrando X troviamo un'azione di $\mathbb{R}$ (semplicemente connesso), ma non di $\mathbb{S}^1$.

Analogamente, non è vero che ogni rappresentazione dell'algebra di Lie delle matrici anti-simmetriche genera una rappresentazione di $\mathrm{SO}(n)$, ma è vero che genera una rappresentazione del suo rivestimento $\mathrm{Spin}(n)$. Questo è rilevante in Meccanica Quantistica.

Esempio. Sia M una varietà e $X_1, \ldots, X_k$ campi vettoriali completi su M tali che $[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^m X_m$. Allora tali campi generano un'algebra di Lie k-dimensionale e, come sopra, corrispondono localmente all'azione di un gruppo G su M o, se vogliamo, all'azione globale del suo rivestimento universale (ossia semplicemente connesso). In particolare, se $c_{ij}^m = 0$ allora l'algebra è Abeliana e possiamo prendere $G = \mathbb{R}^k$.

Arriviamo infine alle simmetrie.

Proposizione 22.6 *Sia T un tensore su M e G un gruppo connesso che agisce su M. Allora l'azione di G preserva T sse l'azione indotta di $\mathfrak{g}$ preserva T.*

Supponiamo infatti che $g^*T = T$ per ogni $g \in G$. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Allora $\exp(tX)^*T = T$ dunque, derivando, otteniamo $\mathcal{L}_X T = 0$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{L}_X T = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Allora $\exp(tX)^*T = T$. Considerato che exp è un diffeomorfismo locale, questo implica che $g^*T = T$ per ogni g in un intorno di e. Il fatto che tali elementi generino tutto G^0 completa la dimostrazione.

Sintetizziamo, grossolanamente, il contenuto di questa sezione nel modo seguente.

Principio. Qualunque questione riguardante gruppi di Lie può essere ricondotta ad una questione riguardante algebre di Lie, e viceversa.

23 Post scriptum

"Kodachrome, they give us those nice bright colors, They give us the greens of summers, Makes you think all the world's a sunny day, oh yeah..." (Simon and Garfunkel). Poi aggiungono "Everything looks better in black and white".

Sono un matematico teorico. Per anni ho difeso con convinzione il punto di vista che la Matematica è un'arte astratta, fine a se stessa, libera di scegliere gli assiomi che vuole e di scoprirne le conseguenze tenendo conto solo della loro intrinseca bellezza e fertilità .

Tre anni di insegnamento di GAL2 hanno lasciato il segno. Ogni anno mi trovo a ripensare il senso degli argomenti trattati, e il perchè vale la pena di insegnarli, alla luce delle interazioni con gli studenti di Fisica e delle tesi che mi capita di seguire. Ogni anno mi stupisco per l'attinenza tra ciò che studiamo in Matematica e ciò che è utile in Fisica.

Provo a sintetizzare così :

La Matematica è in bianco e nero. La Fisica le dà colore.

Il bianco e nero è minimalista ed elegante. Scopre l'essenziale. Un bel risultato richiede, da parte dell'artista, massimo sforzo, scrupolo e attenzione al dettaglio. Usato male, diventa grigio.

I colori danno vita, luce, allegria. Attirano l'attenzione. Usati male, diventano sguaiati, volgari.

Per chiudere in bellezza, meglio comunque lasciare la parola a due saggi:

"That non-Abelian gauge fields are conceptually identical to ideas in the beautiful theory of fiber bundles, developed by mathematicians without reference to the physical world, was a great marvel to me. In 1975, I discussed my feelings with Chern, and said, "This is both thrilling and puzzling, since you mathematicians dreamed up these concepts out of nowhere." He immediately protested, "No, no, these concepts were not dreamed up. They were natural and real." (C. N. Yang, "Magnetic monopoles, fibre bundles, and gauge fields", 1996).