

DOMANDE DI ANALISI 1

Gestionale UNIPD

Matteo Mognato - Ing.

(1) Scrivere la definizione di maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.

Saper fornire un esempio di un insieme non limitato superiormente, di un insieme non limitato inferiormente, di un insieme limitato superiormente privo di massimo, di un insieme limitato inferiormente privo di minimo.

Def Maggiorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante per X se $M \geq x \forall x \in X$.

Def Minorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante per X se $m \leq x \forall x \in X$.

Def massimo: Se \exists un el. $x_1 \in X$ / x_1 è maggiorante per X , $x_1 \in X \Rightarrow$ allora x_1 è massimo di X .

Def minimo: Se \exists un el. $x_2 \in X$ / x_2 è minorante per X , $x_2 \in X \Rightarrow$ allora x_2 è minimo di X .

Def estremo sup: Si dice estremo sup di X il più piccolo fra i maggioranti di X se \exists .

Def estremo inf: Si dice estremo inf di X il più grande fra i minoranti di X se \exists .

Esempi

a) $A=[0,+\infty)$ limitato inferiormente ma non superiormente.

b) $B=(-\infty, 10)$ limitato superiormente ma non inferiormente.

c) $C=[0, 10)$ limitato privo di massimo, $\min C=0$.

d) $D=(-3,+\infty)$ limitato inferiormente ma non superiormente, non ha ne massimo ne minimo.

(2) Scrivere la proprietà caratteristica di estremo superiore ed estremo inferiore per un insieme di numeri reali.

Proprietà caratteristica di $\inf X=i$, $X \subseteq \mathbb{R}$:

a) $i \leq x \forall x \in X$

b) $\forall r > i, r \in \mathbb{R}, \exists x \in X / x < r$

Proprietà caratteristica di $\sup X=s$, $X \subseteq \mathbb{R}$:

a) $s \geq x \forall x \in X$

b) $\forall s < r, r \in \mathbb{R}, \exists x \in X / x > r$

(3) Definire il fattoriale di un numero naturale e il coefficiente binomiale di due numeri naturali. Scrivere le prime righe del Triangolo di Tartaglia.

Def Fattoriale: dato $n \in \mathbb{N}$ si def. fattoriale di n il numero $n!=n(n-1)(n-2)...3*2*1$ (per def. $0!=1$).

Def coefficiente binomiale: dati $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, si definisce coefficiente

binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Triangolo di Tartaglia:

(0 0)				1			
(1 0)	(1 1)			1	1		
(2 0)	(2 1)	(2 2)			1	2	1
(3 0)	(3 1)	(3 2)	(3 3)			1	3
				1	4	6	4
							1

(4) Enunciare il teorema del binomio di Newton.

Teorema del binomio di Newton:

$a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ vale: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(5) Enunciare il Principio di Induzione ed esibire un esempio di applicazione.

Il **principio di induzione** è utilizzato per dimostrare che un predicato $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposizione $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$ se:

a) $P(n_0)$ è vero, $n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

b) se $P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera

allora $P(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

Esempio:

Dimostrare $2^n \geq n+1 \forall n \in \mathbb{N}$:

a) $P(0) = 2^0 \geq 1$ VERA

b) $P(n) = 2^n \geq n+1$

$P(n+1) = 2^{n+1} \geq n+2 \Rightarrow 2^n \cdot 2 \geq n+2 \Rightarrow \text{applico } P(n) \Rightarrow 2^n \geq n+1 \Rightarrow 2n+2 \geq n+2 \Rightarrow 2n \geq n$ VERA

Dato che entrambe le condizioni sono vere allora $P(n)$ è vera.

(6) Data $f: A \rightarrow B$, con $X \subset A$, scrivere la definizione dell'insieme immagine $f(X)$. Dato $Y \subset B$, scrivere la definizione dell'insieme controimmagine $f^{-1}(Y)$.

Def insieme Immagine $f(X)$: si definisce immagine di $f(X)$ il sottoinsieme di B definito da:

$$f(X) = \{ b \in B, \exists a \in X \text{ t.c. } b = f(a) \} = \left\{ b \in B \mid \exists a \in X \text{ t.c. } b = f(a) \right\}$$

Def insieme Controimmagine $f^{-1}(Y)$: Sia $Y \subset B$, si dice controimmagine di Y secondo f il sottoinsieme di A definito da:

$$f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid \exists b \in Y \text{ t.c. } f(a) = b \}$$

(7) Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva.

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:

$$\forall a, a' \in A, a \neq a' \text{ si ha: } f(a) \neq f(a')$$

Def f. suriettiva: una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice suriettiva se $\text{Im} f = B$.

Def f. biiettiva: una f. si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

(8) Data una funzione biiettiva, definire la funzione inversa, Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.

Data una funzione $f: A \rightarrow B$ biiettiva risulta definita una funzione $g: B \rightarrow A$.

Dato il $\Gamma(f)$ è possibile ottenere $\Gamma(g)$ per simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante $y=x$.

(8b) Scrivere la definizione di funzione iniettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa, data una funzione invertibile. Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:

$$\forall a, a' \in A, a \neq a' \text{ si ha: } f(a) \neq f(a').$$

Sia $f: A \rightarrow B$ biiettiva allora è sia suriettiva che iniettiva risulta quindi definita una funzione g su B perché ad ogni elemento $b \in B$ corrisponde un unico elemento $a \in A$ $f(a) = b$. Tale funzione g si dice funzione inversa di f e si

denota con f^{-1} il suo dominio è B e il codominio è A. Inoltre se una funzione è biettiva anche la sua inversa è biettiva. Dato il grafico di una funzione invertibile il grafico della sua inversa si disegna come la simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante $y=x$.

(9) Definire una funzione $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e strettamente monotona.

Sia $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$

Def monotona: f si dice monotona se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (crescente)

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (decescente)

Def stret. monotona: f si dice strettamente monotona ... (casi sopra senza '=')...

(10) Data $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dimostrare che la stretta monotonia implica l'iniettività di una funzione. Vale anche il viceversa?

Dimostrazione

Tesi: $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Siano $x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 \neq x_2$ supponiamo $x_1 < x_2$

-f strettamente crescente, allora $f(x_1) < f(x_2)$

-f strettamente decrescente, allora $f(x_1) > f(x_2)$

In entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$ c.v.d

ATT!! Non vale il viceversa quindi una funzione iniettiva può non essere monotona.

(11) Definire una funzione $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Definire una funzione $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pari, dispari, periodica.

Def f. Limitata: f si dice limitata se $\exists m, m' \in \mathbb{R} / m \leq f(x) \leq m' \forall x \in \text{dom } f$ cioè se $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}$

Def f. pari: f si dice pari se $x \in \text{dom } f \Rightarrow -x \in \text{dom } f$ e $f(x) = f(-x)$

Def f. dispari: f si dice dispari se $x \in \text{dom } f \Rightarrow -x \in \text{dom } f$ e $f(x) = -f(-x)$

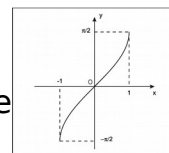
Def f. periodica: f si dice periodica di periodo T $\forall x \in \text{dom } f$ si ha $x+T \in \text{dom } f$ e $f(x) = f(x+T)$ e T è il più piccolo num. Positivo per cui vale $f(x) = f(x+T)$.

(12) Definire le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.

Innanzitutto si tratta delle funzioni trigonometriche inverse:

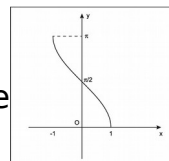
-**Arcoseno** è la funzione inversa di $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ che risulta quindi essere così definita:

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



-**Arcocoseno** è la funzione inversa di $\cos|_{[0, \pi]}$ che risulta quindi essere così definita:

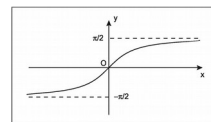
$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.



-**Arcotangente** è la funzione inversa di $\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ che risulta quindi essere così

definita:

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

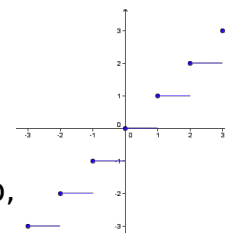


(13) Definire le funzioni parte intera e mantissa, indicando il dominio, l'immagine

e il grafico per ciascuna di esse.

Si tratta di funzioni definite a tratti.

-funz. parte intera è così definita $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} [x] = \lfloor x \rfloor = \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \leq x \right\}$



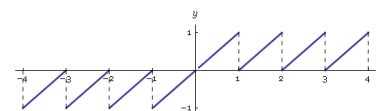
Quindi la **parte intera** di un numero reale x è il numero intero, indicato con il simbolo $[x]$ che meglio approssima x per difetto.

-funzione mantissa è così definita

$$M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} M(x) = x - [x] \Rightarrow M(x) \in [0, 1) \forall x \in \mathbb{R}, M(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$$

Quindi la **mantissa** di un numero x è:

- ☐ $x > 0$ è uguale alla parte decimale
- ☐ $x < 0$ è uguale ad 1-parte decimale (presa in valore assoluto)



(14) Definire le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e arcotangente iperbolica, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.

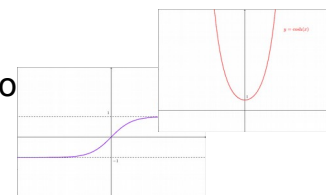
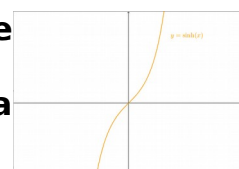
-Seno Iperbolico(senh) è così definito $\operatorname{senh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

-Coseno Iperbolico(cosh) è definito

$$\operatorname{cosh}: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty) \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

-Tangente Iperbolica(tgh) è così definito

$$\operatorname{tgh}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \operatorname{senh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x}, x \in \mathbb{R}$$



(15) Scrivere la definizione di successione convergente e di limite finito per una successione. Fornire almeno un esempio.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **convergente** quindi che $a_n \rightarrow l$

$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n_\epsilon > n \Rightarrow \forall a_n - l < \epsilon$. Il **lim finito** per una successione è il valore a cui tende la successione per $n \rightarrow +\infty$.

Es. $\{a_n\} = 1/n \rightarrow 0$ (pag. 40 quaderno dimostrazione)

(16) Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed

irregolare.

Esibire un esempio per tipo.

Succ. convergente (guarda 15)

Succ. divergente la successione $\{a_n\}$ si dice:

-divergente(positivamente) quindi che $a_n \rightarrow +\infty$ se $\forall A \exists n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n > A$

-divergente(negativamente) quindi che $a_n \rightarrow -\infty$ se $\forall A \exists n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n < A$;

Es. $n^2 \rightarrow +\infty$ (pag. 42 quaderno dimostrazione)

Una successione $\{a_n\}$ è detta irregolare o indeterminata il suo limite non esiste. Es. $(-1)^n$ vale -1 se n dispari, 1 se n pari.

(17) Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente, allora essa è anche limitata. Dire se è vero il viceversa (in caso contrario, esibire un controesempio).

Una succ. $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists m, M \in \mathbb{R} / m \leq a_n \leq M \forall n$

Dim Convergenza implica la limitatezza:

Per ipotesi della succ. convergente $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

se pongo $\epsilon = 1$ allora $|a_n - l| < 1 \Rightarrow l - 1 < a_n < l + 1$ definitivamente vero quindi è limitata.

Il viceversa non è sempre vero ne è esempio la successione $\{b_n\} = (-1)^n$

(18) Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite per le successioni.

Se $\{A_n\}$ converge, il suo limite è unico.

Dim: Per assurdo supponiamo che $\{A_n\} \rightarrow L$ e $\{A_n\} \rightarrow L'$ per $n \rightarrow +\infty$

Allora

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0$$

$$\exists m_\epsilon \in \mathbb{N} / n > m_\epsilon \Rightarrow |a_n - L'| < \epsilon$$

Ora

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| = |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\epsilon \quad n = \max(n_\epsilon, m_\epsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 |L - L'| < 2\epsilon \Rightarrow L = L'$$

(19) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma o del prodotto.

Siano $\{A_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti t.c. $A_n \rightarrow a$ e $B_n \rightarrow b$ per $n \rightarrow +\infty$

Allora: $A_n + B_n \rightarrow a + b$; $A_n \cdot B_n \rightarrow a \cdot b$; $A_n - B_n \rightarrow a - b$; $A_n / B_n \rightarrow a / b$ con B_n e $b \neq 0$; $A_n^{B_n} \rightarrow a^b$

Dimostrazione Prodotto: $A_n \cdot B_n \rightarrow a \cdot b$;

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0$$

$$\exists m_\epsilon \in \mathbb{N} / n > m_\epsilon \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon$$

Quindi

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$$

$$\Rightarrow \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M\epsilon + |b|\epsilon = \epsilon(M + |b|)$$

Quindi $|a_n b_n - ab| < \epsilon \Rightarrow a_n b_n = ab$.

(20) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno

per successioni, nelle due forme.

1) se $A_n \rightarrow a$ e $a > 0$, allora $A_n > 0$ definitivamente (cioè da un certo indice in poi)

2) se $A_n \rightarrow a$ e $A_n > 0$ definitivamente, allora $a \geq 0$

Dim

1) hp: $A_n \rightarrow a$ e $a > 0$ th: $A_n > 0$ definitivamente

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

scegliamo $\epsilon = a/2$, allora $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \quad \forall n > n_\epsilon$ poichè $a > 0$ (hp) $\Rightarrow a_n > 0$ definitivamente $\forall n > n_\epsilon$

2) hp: $A_n \rightarrow a$ e $A_n > 0$ th: $a \geq 0$

PER ASSURDO supponiamo $a < 0$. Applicando quindi il punto 1) dimostrato precedentemente allora se $A_n \rightarrow a$ e $a < 0$ quindi $A_n < 0$ definitivamente ma per ipotesi $A_n > 0$ definitivamente. Ciò conduce ad un assurdo quindi $a \geq 0$.

(21) Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il Teorema sul limite delle successioni monotone.

Una successione si dirà $\{a_n\}$ si dirà: monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$; strettamente crescente

$a_n < a_{n+1}$, monotona decrescente $a_n \geq a_{n+1}$; strettamente decrescente $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$ nel dominio della successione.

Teorema sul limite delle successioni monotone:

1. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona crescente se

a1) $\{a_n\}$ NON sup. limitata, $a_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

b1) $\{a_n\}$ sup. limitata, $a_n \rightarrow l$ ove $l = \sup \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$

2. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona decrescente se

a2) $\{a_n\}$ NON è inf. limitata, $a_n \rightarrow -\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

b2) $\{a_n\}$ inf. limitata, $a_n \rightarrow l'$ ove $l' = \inf \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$

Dimostrazione

a1) Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata si dimostra con l'enunciato contenuto nel teorema di monotonìa:

$$\text{th: } a_n \rightarrow l \text{ cioè } \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \Rightarrow \sup a_n - \epsilon < a_n < \sup a_n + \epsilon$$

Da dimostrare

Sempre vera sup
 a_n maggiorante
di a_n

Per la proprietà caratteristica di sup: $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \sup a_n - \epsilon < a_{n_\epsilon}$

Osservo che la successione è monotona crescente per ipotesi quindi $a_n > a_{n_\epsilon} \quad \forall n > n_\epsilon$

quindi posso dire $\sup a_n - \epsilon < a_n \quad \forall n > n_\epsilon$

Si è quindi provato che $a_n \rightarrow \sup a_n$ quindi $a_n \rightarrow l$ ove $l = \sup \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$ quindi la successione è superiormente limitata.

b1) Se invece $\{a_n\}$ è sup illimitata, allora $\forall A > 0 \exists n_A \in \mathbb{N} / a_{n_A} > A$ poichè $\{a_n\}$ è monotona

crescente allora $a_n \geq a_{n+1} \geq A$ quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

(22) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per successioni.

Se $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ soddisfano $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n > N$ e $a_n \rightarrow l$ e $c_n \rightarrow l$ Allora $b_n \rightarrow l$
Dimostrazione

Fissiamo $\varepsilon > 0$ su ha $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$; $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$

Allora $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon \quad \forall n > N = \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$

Quindi $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \Rightarrow |b_n - l| < \varepsilon \Rightarrow b_n \rightarrow l$

(23) Definire la successione geometrica e discuterne le proprietà di convergenza al variare della ragione.

Si definisce successione geometrica la successione $a_n = q^n, \quad n \in \mathbb{N}$

- se $q > 1$ la successione è monotona crescente e non limitata sup. $\Rightarrow q^n \rightarrow +\infty$
- se $q = 1, q^n = 1$
- se $q < 0$ la succ. non è monotona
- se $0 \leq q < 1$ la successione è monotona decrescente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

(24) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ("algebra degli infiniti"). Fare esempi di forme indeterminate.

Algebra dei Limiti: vedi 19

Algebra degli Infiniti:

Date 2 successioni a_n, b_n delle quali una o entrambe sono divergenti possiamo avere le seguenti regole:

$$a + \infty = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

(il segno è da determinare a seconda del segno degli infiniti, infinitesimi)

$$a * \infty = \infty$$

$$a / 0 = \infty$$

$$a / \infty = 0$$

Sono forme indeterminate $\infty - \infty$; $0 * \infty$; $0 / 0$; ∞ / ∞ ;

Esempio F.I. n^4 / n^2 per $n \rightarrow +\infty$ è F.I. ∞ / ∞

(25) Definire il numero e di Nepero.

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n$$

(26) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni

positive.

Sia $\{a_n\}$ una succ. positiva e sia $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n = l$ si hanno 3 casi:

1. $l < 1, a_n \rightarrow 0$
2. $l > 1, a_n \rightarrow +\infty$
3. $l = 1$ non si può concludere

Dim1

1. th: $a_n \rightarrow 0$

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1$ allora $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon < 1$ devo dimostrare

che $\rightarrow 0$ quindi minore di qualcosa che converge a 0 considero quindi il secondo membro si ha quindi, (poiché $l < 1$ scelgo ε piccolo in modo che $l + \varepsilon < 1$):

$$a_{n_0+1} < (l + \varepsilon) a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} < (l + \varepsilon) a_{n_1} = (l + \varepsilon) * [(l + \varepsilon) a_{n_0}] = (l + \varepsilon)^2 a_{n_0}$$

...

$a_{n_0+k} < (l + \varepsilon)^k a_{n_0}$ poiché $l + \varepsilon < 1$ successione geometrica di ragione < 1 quindi $a_{n_0+k} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

Dim 2

th: $a_n \rightarrow +\infty$

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$ allora $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} / n > n_1 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon$ si ha quindi:

$$a_{n_1+1} < (l + \varepsilon) a_{n_1}$$

$$a_{n_1+2} < (l + \varepsilon) a_{n_2} = (l + \varepsilon) * [(l + \varepsilon) a_{n_1}] = (l + \varepsilon)^2 a_{n_1}$$

...

$a_{n_1+k} < (l + \varepsilon)^k a_{n_1}$ poiché $l + \varepsilon > 1$ successione geometrica di ragione > 1 quindi $(l + \varepsilon)^k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$

$a_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

(27) Scrivere la definizione di successioni asintotiche ed enunciarne le principali proprietà; dimostrare poi almeno una di queste proprietà (a scelta).

Def: 2 successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ si dicono asintotiche se $a_n/b_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$.

Proprietà:

1) Se $a_n \sim b_n$ allora $\{a_n\}, \{b_n\}$ hanno le stesse caratteristiche

a) se $a_n \rightarrow l$ anche $b_n \rightarrow l$

b) se a_n diverge anche b_n diverge

c) se a_n non ha limite anche b_n non ha limite

2) Se $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

3) Se $a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n \Rightarrow a_n b_n / c_n = a'_n b'_n / c'_n$

Dimostrazione 1c)

hp: a_n non ha limite th: b_n non ha limite

Per ASSURDO sia $b_n \rightarrow l$ (o ∞)

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} * b_n \Rightarrow a_n \rightarrow l \text{ o } \infty \text{ ma per ipotesi } a_n \text{ non ha limite ciò porta ad un assurdo quindi anche } b_n$$

non avrà limite.

L'asintotico è una relazione d'equivalenza poiché valgono la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(28) Fissato $c \in \mathbb{R}$, scrivere la definizione successionale di limite di funzione per $x \rightarrow c$. Scrivere

la definizione topologica di limite di funzione per $x \rightarrow c$.

Def Successionale di limite:

Sia I un intervallo di \mathbb{R} , c un p.to di tale intervallo e la funzione f definita in I tranne al più c Si dice che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) se $\forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \rightarrow c, x_n \neq c \forall n$ si ha $f(x_n) \rightarrow l$

Def Topologica di limite:

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in I_{\delta(x_0)} \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ **(29) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \pi$ indicando esplicitamente gli intornoi.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\} \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

(30) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$ indicando esplicitamente gli intornoi.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 / x \in (-\infty, -M) \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

(31) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = +\infty$ indicando esplicitamente gli intornoi.

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\} \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) > A$$

(32) Scrivere la definizione di limite destro e sinistro per funzioni. (Facoltativo: dare qualche esempio)Sia $c \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, si dice che il limite destro (sinistro) di $f(x)$ per $x \rightarrow c$ è l , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \quad (\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l) \quad \text{se} \quad \forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \rightarrow c, x_n > c \quad (x_n < c) \text{ definitivamente si ha } f(x_n) \rightarrow l$$

DESTRO

SINISTRO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$$

;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1/x \text{ NON esiste!}$$

(33) Scrivere la definizione di funzione continua in un punto. Classificare le possibili discontinuitàSia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I$ intervallo, $c \in I$ si dice che f è continua in c se $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Discontinuità:

1) Si dice che f ha discontinuità eliminabile in $x=c$ se per $x \rightarrow c$ $f(x) \rightarrow l$ ma $l \neq f(c)$. Si potrà allora andare a definire una nuova funzione in modo da eliminare la discontinuità nel p.to, effettuando quindi un prolungamento per continuità nel punto.2) Si dice che f ha una discontinuità di 1° specie in $x=c$ se esistono finiti i limiti s_x e d_x per $x \rightarrow c$ ma sono diversi tra loro (salto).3) si dice che f presenta una discontinuità di 2° specie quando almeno uno dei due limiti non esiste o diverge.**(34) Enunciare il Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni e per funzioni continue in un punto.****Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni**1) se $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$ e $l > 0$ allora \exists un intorno bucato I di c / $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$ 2) se $f(x) > 0$ in un intorno bucato I di c e $f(x) \rightarrow l$ allora $l \geq 0 \quad \forall x \in I$ **Teorema della permanenza del segno per funzioni continue in un punto**Se f continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) > 0$ allora \exists un intorno bucato I di x_0 / $f(x_0) > 0$

$$\forall x \in I$$

(35) Enunciare il Teorema del confronto per limiti di funzione.

hp: f, g, h definite in un intorno di x_0 , tranne al più x_0
 Se

- 1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$ l'intorno bucato in c
- 2) $f(x) \rightarrow l$ e $h(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$

Allora

$g(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$

(36) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per funzioni. Enunciare il teorema sull'algebra delle funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0 , allora

- 1) $f \pm g$ è continua in x_0
- 2) $f \cdot g$ è continua in x_0
- 3) f/g è continua in x_0 , purché $g(x_0) \neq 0$

(37) Enunciare e dimostrare il teorema di cambiamento di variabile nei limiti (detto anche teorema sul limite di funzione composta).

TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE nei LIMITI

1° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f composta $f \circ g$ sia def in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq \pm \infty$).

Se:

- ① $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R})$
- ② $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ FINITO o INFINITO

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(t_0)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \text{dom } f \circ g, x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \quad \forall n$, si ha $f(g(x_n)) \rightarrow l$

Per hp ①, $g(x_n) \rightarrow t_0$

Per hp ②, f continua in t_0 , cioè $\forall y_n \rightarrow t_0, f(y_n) \rightarrow f(t_0)$

Allora se scegliamo $y_n = g(x_n)$

avremo $f(g(x_n)) \rightarrow f(t_0)$ ■

2° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f composta $f \circ g$ sia def in un intorno di x_0

Se

- ① $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R})$
- ② $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$
- ③ $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ cioè in un intorno di x_0

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \text{dom } f \circ g, x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ si ha $f(g(x_n)) \rightarrow l$

per hp ①, $g(x_n) \rightarrow t_0$

per hp ②, $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ cioè che $\forall \{t_n\}, t_n \rightarrow t_0, f(t_n) \rightarrow l$ e $t_n \neq t_0$

Allora, scegliendo come $\{t_n\}$ la successione $\{g(x_n)\}$ si ha:

$$g(x_n) \rightarrow t_0, g(x_n) \neq t_0 \Rightarrow f(g(x_n)) \rightarrow l \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

ossia all'hp ③ $g(x_n) \neq t_0$ avremo quindi la th. ■

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dim basta considerare $x > 0$ e x piccolo ($x < \frac{\pi}{2}$)

Se $x < 0, x = -y, y > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

Assumiamo quindi che $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Osservo che $\angle(\widehat{OPA}) \leq \angle(\widehat{OQA}) \leq \angle(\widehat{O^*A})$

Calcolo:

$$\angle(\widehat{OPA}) = \frac{\text{sen } x \cos x}{2} + \frac{(1 - \cos x)(\text{sen } x)}{2}$$

$$\angle(\widehat{OPA}) \Rightarrow TR^2 \cdot 2TR = \angle(\widehat{OPA}) \cdot x$$

$$R = 1 \quad T \cdot 2\pi = \angle(\widehat{OPA}) \cdot x$$

$$\Rightarrow \angle(\widehat{OPA}) = \frac{x \pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

Vale quindi $\frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\text{tg } x}{x}$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1 \quad x \leq \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\text{sen } x}{x}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

(38) Dimostrare che $\sin x / x = 1$ per $x \rightarrow 0$ e i suoi corollari

Corollario (+)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dim

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left[1 \cdot \frac{1}{1+1} \right] = \frac{1}{2}$$

suoi corollari

(39) Date due funzioni definite in un

intorno di c, tranne al più in c, definire i tre simboli

$f = O(g)$, $f = o(g)$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow c$.

Definire la parte principale di una funzione finita o infinitesima per $x \rightarrow c$.

Siano f e g definite in un intorno di c , tranne al più c ($c = x_0, x_0^+, x_0^-, \pm\infty$).

Inoltre sia $g(x) \neq 0$ per $x \rightarrow c$ t.c. $f(x)/g(x) \rightarrow l$ (finito o infinito) per $x \rightarrow c$. Allora

- se $l < +\infty$, si dice che f è controllata da g per $x \rightarrow c$ $f = O(g)$
- se $l = 0$, si dice che f è trascurabile rispetto a g per $x \rightarrow c$ $f = o(g)$
- se $l = 1$, si dice che f e g sono asintotiche $f \sim g$

Parte principale

INFINITO

Sia $g(x)$ un infinito (o infinitesimo) di ordine n per $x \rightarrow x_0$, rispetto ad un infinito (o infinitesimo) principale $f(x)$. Avendosi di conseguenza³:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} = L \neq 0$$

con L finito e non nullo, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = 0$$

Da ciò vediamo che la funzione

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L$$

che si trova sotto l'operazione di limite, è infinitesimo per $x \rightarrow x_0$. Di conseguenza, in un piccolo intorno di x_0 , la funzione $h(x)$ assume valori prossimi a zero, e pertanto, possiamo scrivere:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = \alpha(x)$$

ove la funzione $\alpha(x)$ è infinitesimo, per $x \rightarrow x_0$. Si ha allora:

$$g(x) = L \cdot f^n(x) + \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

³Nel confronto degli infinitesimi o degli infiniti, se si deve calcolarne la parte principale e complementare, conviene mettere $g(x)$ a numeratore nel calcolo del limite.

Il termine

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x)$$

è detto *Parte principale dell'infinito (o infinitesimo) $g(x)$* , mentre il termine

$$p_c(x) = \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

è la sua *parte complementare*.

Il significato della parte principale è il seguente: in un piccolo intorno di x_0 , la funzione $p_p(x)$ approssima, a meno di un piccolo errore, la funzione $g(x)$. L'errore commesso è dato dalla parte complementare, che risulta funzione del punto x .

Ad esempio, sia

$$g(x) = 2 \sin(x)$$

Questa funzione è infinitesima, per $x \rightarrow 0$. Prendiamo come infinitesimo principale l'infinitesimo campione $f(x) = x$. Avendosi:

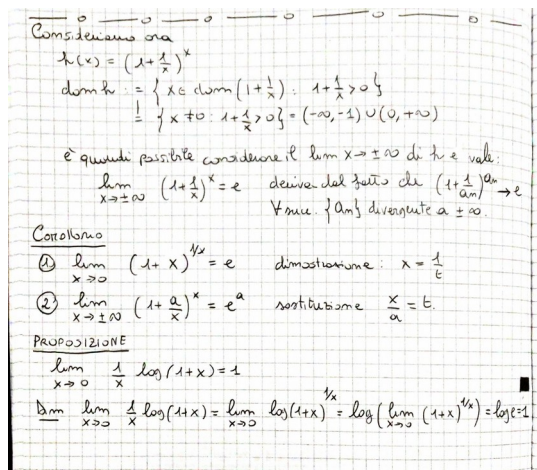
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

possiamo dire che $g(x)$ è infinitesimo di ordine uno rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi poi $L = 2$, possiamo calcolare la parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f(x) = 2x$$

Ciò significa che, nell'intorno del punto $x_0 = 0$, la funzione $2 \sin x$ può essere approssimata dalla sua parte principale (a meno di un errore, dato dalla sua parte complementare, infinitesimo per $x \rightarrow x_0 = 0$). Il significato della parte principale è

(40) Dimostrare limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo



(41) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

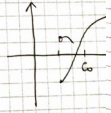
Discutere se tale teorema si può estendere al caso di una funzione continua su tutto l'asse reale (ed eventualmente formulare un enunciato valido in questo caso).

T. di ESISTENZA degli ZERI
 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$, e.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
 Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ e.c. $f(x_0) = 0$.

Se in più f è strettamente monotona tale zero è unico.

Dim
 Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$.

Possiamo
 $a_0 = a$
 $b_0 = b$
 e $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ (p.to medio di $[a, b]$)



Considerando $f(c_0)$

$$\begin{cases} > 0 & \text{aggiungo lo zero sulla} \\ & \text{mezz' a sinistra} \\ < 0 & \text{aggiungo lo zero sulla} \\ & \text{mezz' a destra} \\ = 0 & \text{FINE (} c_0 \text{ è uno zero)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_0 \\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \\ a_1 = c_0 \\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \end{cases}$$

Se non ho trovato lo zero aggiungo quindi e considero il nuovo intervallo e così via fino a che non ottengo a trovare $f(c_0) = 0$.

Quindi si genera una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ e.c.

- $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0 \quad \forall n$
- $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$
- $l([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali punti e processi dimostrabili per induzione)

Osservo che

- $\{a_n\}$ è monotona crescente e $a_n \leq b \quad \forall n$
- $\{b_n\}$ è monotona decrescente e $b_n \geq a \quad \forall n$

\Rightarrow Per il T. delle successioni MONOTONE

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0^+ \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0^-$$

Vali anche

$$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

Quindi $x_0^+ = x_0^-$

Ora im poi indichiamo quindi $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

- $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ (T. continuità in x_0)
- $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ (T. continuità in x_0)

Ma da (1) e (2) sappiamo che questi 2 limiti sono uguali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$$

$\Rightarrow 0 \leq f(a_n) = f(b_n) = f(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$

Se in più f è strett. monotona in $[a, b]$ f è invertibile e quindi tale zero è unico (se non lo fosse esisterebbero $x_0, x_1 \in [a, b], x_0 \neq x_1$ e.c. $f(x_0) = 0 = f(x_1) = 0 \Rightarrow f$ non sarebbe invertibile)

Corollario 1
 $f \in C(\mathbb{R})$ e.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ esistono eventualmente ∞ , e non divergono.

Allora \exists almeno uno zero di f .

Corollario 2
 Sia P un polinomio di grado dispari allora P ammette almeno una radice reale.

E.g. $P(x) = x^3 + x^2 + 4x = x(x^2 + x + 4) \nmid \mathbb{R}$ o.c. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $Q(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) \nmid \mathbb{R}$ o.c. $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$

(42) Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Mostrare, attraverso controesempi, che le ipotesi sono tutte essenziali.

Una funzione f definita nel

$\text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **continua** se $\forall x_c \in \text{dom} f \exists \lim_{x \rightarrow x_c} f$ esiste quindi $\lim_{x \rightarrow x_c} f(x)$

Teorema di Weierstrass

Se f continua in $[a, b]$ allora f ha minimo e massimo su $[a, b]$

hp1: f non chiuso $f(x) = x, I = (0, 1)$ quindi $f(I) = (0, 1)$ non ha ne massimo ne minimo ;

hp2: f non limitato $f(x) = \arctg x, I = \mathbb{R}$ quindi $f(I) = (0, 1)$ non ha ne massimo ne minimo ;

hp3: f non continua

$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } (-1, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}, I = [-1, 1]$ non assume massimo e minimo nell'intervallo.

(43) Enunciare e dimostrare il Teorema dei valori intermedi.

T. Valori Intermedi:

Se f è continua e definita in $[a,b]$ Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione:

th: $\forall f(a) < c < f(b) \exists x_0 \in (a,b) / f(x_0) = c$

Se $f(a)=f(b)$ è banale

Se $f(a) \neq f(b)$ supponiamo $f(a) < f(b)$

Sia $c \in \mathbb{R} : f(a) < c < f(b)$ definisco $g(x) = c \forall x \in [a,b]$

Osservo che:

- f continua in $[a,b]$ per hp e g continua perché costante
- $f(a) < g(a) = c$
- $f(b) > g(b) = c$

Quindi per il corollario del T. di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = g(x_0) = c$.

(44) Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Caratterizzare gli asintoti obliqui.

Def asintoto orizzontale: Si dice che f ha asintoto orizzontale di eq: $y=m$ se $f(x) \rightarrow m$ per $x \rightarrow +\infty$

Def asintoto verticale: Si dice che f ha un asintoto verticale di eq: $x=a$ se $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow a$

Def asintoto obliquo: Si dice che f ha asintoto obliquo di eq. $g(x)=mx+q$ per $x \rightarrow \infty$ Allora $g(x)$ si dice asintoto obliquo di f . Perché una funzione ammetta asintoto obliquo il $f(x) \rightarrow \infty$ con ordine 1 per $x \rightarrow \infty$ e devono esistere finiti $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = m$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = q$; l'asintoto avrà quindi equazione $y=mx+q$

(45) Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.

T. continuità di f^{-1} :

Sia f continua e biiettiva sull'intervallo I ,

Sia $J=f(I)$, J un intervallo

Allora

f^{-1} è continua sull'intervallo J .

(46) Enunciare il teorema sui limiti destro e sinistro delle funzioni monotone.

T:

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotona

$\forall c \in (a,b) \exists$ il limite destro e sinistro di $f(x)$

Ai 2 estremi a, b esistono i limiti $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$ di $f(x)$, eventualmente ∞

(47) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.

Una funzione f si dice derivabile in un p.to x_0 se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in x_0 e il valore del limite si dice derivata di f in x_0 .

$f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel p.to x_0 .

(48) Scrivere la definizione di funzione continua e di funzione

derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.

Una **funzione si dice continua in un p.to** x_0 se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Una funzione **f si dice derivabile in un p.to** x_0 se $\exists \text{finito} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in x_0 e il valore del limite si dice derivata di f in x_0 .

Sia f definita in un intorno di x_0
f derivabile in $x_0 \Rightarrow$ f continua in x_0 .

Dim

th: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ parto dall'espressione $\lim_{x \rightarrow x_0} x - x_0 = 0$ divido e multiplico per $(x - x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} * x - x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Attenzione !! Non vale il viceversa es. $|x|$ è continua ma non è derivabile.

(49) Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra, di punto angoloso, di cuspidi, di esso a tangente verticale.

Sia f definita in $[x_0, x_0 + \delta)$ si dice **derivata destra** $(D^+f)(x_0)$ di f in x_0 il

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ se } \exists \text{finito}.$$

Sia f definita in $(x_0 - \delta, x_0]$ si dice **derivata sinistra** $(D^-f)(x_0)$ di f in x_0 il

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ se } \exists \text{finito}.$$

Classificazione dei p.ti di non derivabilità:

1) x_0 si dice p.to **angoloso** se $(D^+f)(x_0)$ e $(D^-f)(x_0)$ esistono ma sono diversi tra loro

es. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$

2) Se f è continua in x_0 e i limiti dx e sx del rapporto incrementale esistono infiniti:

- se sono infiniti concordi allora x_0 si dice p.to a **tg verticale**
- se sono infiniti discordi allora x_0 si dice **cuspidi**

(50) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di derivazione del prodotto (regola di Leibniz).

Siano f e g due funzioni derivabili in x_0 .

Allora

1. $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $f * g$ è derivabile in x_0 e $(f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g'(x_0)$
3. f / g è derivabile in x_0 e $(f/g)'(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)] / (g'(x_0))^2$

Dimostrazione **regola di Leibniz:**

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \quad \text{sommo e sottraggo } f(x_0)g(x_0+h) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h)[f(x_0+h) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} * g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} * f(x_0) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)
\end{aligned}$$

(51) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena).

f definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0

g definita in un intorno di $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$

Allora

g o f è derivabile in x_0 e vale $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

Dim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

pongo $y_0 = f(x_0)$

$$y_0 + k = f(x_0) + k = f(x_0 + h)$$

$$(h \rightarrow 0 \Rightarrow k = f(x_0+h) - f(x_0) \rightarrow 0)$$

Divido e moltiplico per k

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g'(y_0) * f'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$$

(52) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.

Sia f continua e derivabile su un intervallo I.

Sia f definita in un intorno di x_0 in I derivabile in x_0 .

- Se $f'(x_0) \neq 0$ Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$
- Se $f'(x_0) = 0$ Allora f^{-1} NON è derivabile in y_0 .

Dalle hp segue per il T. continuità della funzione inversa che f^{-1} è continua in $J=f(I)$ in particolare f^{-1} sarà quindi continua in y_0 .

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

pongo $x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x)$;

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow y = f(x_0)$$

$$(y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow x_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

- Se $f'(x) = 0$ allora f^{-1} non è derivabile in x_0
- Se $f'(x) \neq 0$, $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$

(53) Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la

definizione di punto critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

x_0 si dice p.to di **massimo relativo (o locale)** per f se esiste un intorno $U_{\delta(x_0)} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni x dell' intervallo $U_{\delta(x_0)}$.

x_0 si definisce p.to critico o stazionario di f se f è derivabile in x_0 e la sua derivata 1° è $=0$

T. di Fermat:

- f definita in un intorno di x_0 nel domf
 - f derivabile in x_0
 - f ha max e min relativo in x_0
- $$f'(x_0) = 0$$

Dim

Supponiamo che x_0 sia un p.to interno al domf, in cui f è derivabile e che x_0 sia p.to di massimo relativo. Allora $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in \text{domf} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \exists \quad \text{quindi esistono anche il suo limite sinistro e il limite destro}$$

che per la permanenza del segno sono uno ≤ 0 e l'altro ≥ 0 . Ma poiché si ha che f è derivabile in x_0 i due limiti devono essere uguali quindi devono essere $=0 \Rightarrow$ esiste $f'(x_0)$ ed è $=0$.

Attenzione non vale il viceversa quindi un punto in cui la derivata è nulla può non essere un p.to di massimo o min relativo es. $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$.

(54) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle

T. di Rolle:

- $f \in C([a, b])$
 - f derivabile in (a, b)
 - $f(a) = f(b)$
- $$\exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f'(x_0) = 0$$

Dim

Per il teorema di Weierstrass, f ha max e min in (a, b)

Sia x_1 t.c. $f(x_1) = M$ e x_2 t.c. $f(x_2) = m$

Sono possibili 2 casi:

1) $\{x_1, x_2\} = \{a, b\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow M = m$$

Allora la funzione è costante $\Rightarrow \forall x \in (a, b) \text{ et.c. } f'(x) = 0$

2) Almeno uno fra x_1, x_2 non coincide con gli estremi quindi è interno ad $[a, b]$:

Supponiamo x_2 interno $\rightarrow f(x_2) = M$ Quindi:

- x_2 interno
 - f derivabile in x_2
 - f ha max in x_2
- $$f'(x_2) = 0 \text{ per il T.di Fermat}$$

(55) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del Valor

Medio)

T. di Lagrange:

- $f \in C([a, b])$
- f derivabile in (a, b)



$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dim

Definiamo la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ ottenuta sottraendo ad f la retta passante per gli estremi del grafico. g soddisfa le hp. del T. Rolle:

- g è continua in $[a, b]$ per l'algebra delle f . continue
- se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su $[a, b]$.
- $g(a) = g(b)$



$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } g'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(56) Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I (cioè dimostrare che una funzione è costante su I se e solo se la sua derivata è nulla in tutti i punti di I).

- f derivabile in I , intervallo

$$- f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Allora

$$f(x) = c \quad \forall x \in I$$

Dim

Siano x_1, x_2 in I , $x_1 \neq x_2$ suppongo $x_1 < x_2$

Allora per la 2° formula dell'incremento finito:

$$\exists t \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ poiché } f'(t) = 0$$

Attenzione non vale il viceversa es. $f(x) = \arctg(x) + \arctg(1/x)$

(57) Scrivere la definizione di funzione monotona. Enunciare e dimostrare il Test di monotonia.

f si dice **monotona crescente** se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Test di monotonia:

- Sia I un intervallo
- Sia f derivabile su I

Allora

1. f crescente su I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
2. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f strettamente crescente in I

Dim1)

" \Rightarrow "

Sia x_0 interno a I

poiché f è crescente su I si ha

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \leq x_0$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \geq x_0$$

Allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in I_{(x_0)}$$

Per il T. della permanenza del segno

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{cioè } f'(x_0) \geq 0$$

Sia x_0 un estremo di I allora bisognerà limitarsi a considerare il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale.

" \Leftarrow "

Siano x_1, x_2 in I e $x_1 < x_2$ per la seconda formula dell'incremento finito:

$$\exists t \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

(58) Definire una funzione concava o convessa in un intervallo. Enunciare il Test di convessità (cioè il Teorema sulle condizioni equivalenti alla convessità/concavità per le f derivabili).

Una funzione è detta **convessa**(concava) in un intervallo se è convessa(concava) in tutti i punti di tal intervallo ovvero se per ogni p.to x_0 $f(x) \geq (\leq) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni x in un certo intorno di x_0

Test di convessità:

Sia f derivabile 2 volte in I, allora:

1. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow$ f convessa in I
2. $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ f strettamente convessa in I

Osservazione la seconda in generale non si può invertire es. $f(x) = x^4$ strett. Convessa in 0 ma $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$.

(59) Enunciare il Teorema di de l'Hopital

T. de L'Hopital:

Sia $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ della forma $0/0$ o ∞/∞

con:

- f e g definite in un intorno di c, tranne al più in c
- f e g derivabili in un intorno di c, tranne al più in c

Se

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ finito o infinito}$$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(60) Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto nella forma di Peano e nella forma di Lagrange.

Formula di Taylor se f è derivabile n volte in x_0 si ha:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Resto nella forma di lagrange:

$$r_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

(61) Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare (o indeterminata). Presentare un esempio per tipo.

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice :

-convergente se $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali è convergente e se $s_n \rightarrow l$ si dice che la somma della serie è l e si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$ es. Serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

-divergente se $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali è divergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n$$

-indeterminata se $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali è indeterminata

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

(62) Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza. Esibire un esempio di serie telescopica.

Si dice **serie telescopica** una serie del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k = b_k - b_{k+1}$

$$\Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_1 - b_{n+1} = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \Leftrightarrow \text{esiste finito } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = l \text{ e la somma della serie è } b_1 - l$$

esempio di serie telescopica è la serie di **Mengoli**.

(63) Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge, diverge o è indeterminata.

Sia $q \in \mathbb{R}$, si dice serie geometrica di ragione q la serie $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ consideriamo la

succ. delle ridotte $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

se $q \neq 0$ $s_n = (1 - q^{n+1}) / (1 - q)$

se $q = 0$ $s_n = n + 1$

quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ è: $\begin{cases} 1/(1-a) & \text{se } |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{la serie} \begin{cases} \text{conv. a } 1/(1-q) & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } q > 1 \\ \text{indet.} & \text{se } q < -1 \end{cases}$

(64) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Stabilire se tale condizione è anche sufficiente.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Dimostrazione

Sia $\{s_n\}$ la successione delle ridotte della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$

Per $n > 0$ vale $s_n = s_{n-1} + a_n$

Per hp la serie converge quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \exists$ finito (sia l)

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - s_{n-1} = [l - l] = 0$$

Osservazione

Questa condizione non è sufficiente per la convergenza di una serie es. si consideri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad a_n \rightarrow 0 \text{ tuttavia}$$

$$s_n = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \dots + \log(n+1) - \log(n) = \log(n+1)$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1) = +\infty$ quindi la serie data è divergente ciò prova che la

condizione necessaria non è sufficiente per la convergenza.

(65) Enunciare e dimostrare la proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi.

T.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, con $a_k \geq 0 \forall k$ Allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ o converge o diverge.

Più precisamente se $\{s_n\}$ è sup. limitata allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a $(\sup_n s_n)$ se invece s_n non è sup. limitata allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Dimostrazione:

s_n è una successione monotona crescente cioè se $s_{n+1} \geq s_n \forall n$

$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \Rightarrow s_{n+1} \geq s_n \Rightarrow s_n$ è monotona crescente

Allora $\{s_n\}$ o converge o diverge:

-se $\sup_n s_n < +\infty$ (è sup limitata) $\Rightarrow \{s_n\}$ converge a $\sup_n s_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a $\sup_n s_n$

-se $\sup_n s_n = +\infty$ (è sup illimitata) $s_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge

(66) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie a termini positivi.

Criterio del confronto:

Siano $a_k \geq 0, b_k \geq 0 \forall k \geq 0$

$$a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, converge anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e vale $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Dimostrazione 1:

Siano rispettivamente s_n e σ_n le ridotte ennesime di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

poiché $a_k \leq b_k$ per hp si ha: $s_n \leq \sigma_n \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k$

per hp b_k converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k \exists$ finito (sia esso l)

Allora $s_n \leq l \forall n$, quindi s_n è sup limitata $\Rightarrow s_n$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Dimostrazione 2(per assurdo):

se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ non diverge allora essa converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge ma ciò

conduce ad un assurdo perché per hp $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge. Quindi anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ deve divergere.

(67) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

Confronto asintotico:

Siano a_k e $b_k \geq 0$ t.c. $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$

Allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione:

Per hp $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $k > k_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{a_k}{b_k} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow 1 - \epsilon < \frac{a_k}{b_k} < 1 + \epsilon$

scegliamo $\epsilon = 1/2$ allora

$1/2 < a_k/b_k < 3/2$ basta applicare 2 volte il criterio del confronto:

$1/2 b_k \leq a_k$ e $a_k \leq 3/2 b_k$

(68) Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata. Enunciare le proprietà di convergenza.

E' detta serie armonica la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ che confrontandola con $\log(1+x)$ si può

vedere che diverge. La serie armonica generalizzata è nella forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ se $\alpha > 1$ converge, se $\alpha \leq 1$ diverge.

(69) Enunciare il criterio della radice e il criterio del rapporto per serie a termini positivi e dimostrare il primo.

Criterio della radice

Siano $a_n \geq 0$ e \exists finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

e $l > 1$ la serie diverge, $l < 1$ la serie converge, $l = 1$ nulla si può concludere.

Criterio del rapporto

Sia data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$ se \exists finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

e $l > 1$ la serie diverge, $l < 1$ la serie converge, $l = 1$ nulla si può concludere.

Dimostrazione poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon$ t. c. $n > N_\epsilon$ si ha $l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon$

(2° membro) sia $l < 1$ (hp) scelgo ϵ piccolo $\Rightarrow \lambda = l + \epsilon < 1$

Allora

$$a_{n_\epsilon+1} < \lambda a_{n_\epsilon} \dots a_{n_\epsilon+k} < \lambda^k a_{n_\epsilon}$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_\epsilon+k} < \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k a_{n_\epsilon} = a_{n_\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \rightarrow \text{serie geometrica con } \lambda < 1 \text{ quindi serie conv.}$$

(1° membro) Sia $l > 1$ scelgo ϵ piccolo $\Rightarrow \lambda' = l - \epsilon > 1$

Allora

$$a_{n_\epsilon+1} > \lambda' a_{n_\epsilon} \dots a_{n_\epsilon+k} > \lambda'^k a_{n_\epsilon}$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_\epsilon+k} > \sum_{k=0}^{\infty} \lambda'^k a_{n_\epsilon} = a_{n_\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda'^k \rightarrow \text{serie geometrica con } \lambda' > 1 \text{ quindi serie div.}$$

(70) Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta. Dimostrare che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge assolutamente** (o in senso assoluto) se converge la serie dei moduli cioè $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

T. criterio della convergenza assoluta

Se una serie converge assolutamente allora essa converge. Vale inoltre

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Dimostrazione:

Scriviamo il termine ennesimo come:

$$a_n = \underbrace{\frac{a_n + |a_n|}{2}}_{b_n} - \underbrace{\frac{a_n - |a_n|}{2}}_{c_n}$$

Osserviamo che:

- b_n e c_n sono a termini positivi
- $0 \leq b_n \leq |a_n|$
- $0 \leq c_n \leq |a_n|$

Quindi

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$
$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n = |a_n| & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Quindi b_n e c_n sono positivi \Rightarrow applichiamo il criterio del confronto alla serie di b_n e c_n che convergono \Rightarrow per l'algebra delle serie converge anche a_n

(71) Definire le serie a termini a segno alternato. Enunciare il criterio di Leibniz.

Si dice serie a termini alterni una serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * b_n \text{ oppure } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} * b_n \text{ con } b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

Per tali serie si utilizza il **criterio di Leibniz**:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n, b_n > 0$, una serie data

se:

1) $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

2) b_n è monotona decrescente

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge (semplicemente)

Inoltre $|s - s_n| \leq b_{n+1}$
resto

(72) Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive di una stessa funzione f definite su un intervallo I differiscono al più per una costante.

Sia f una funzione definita su un intervallo I , si dice **primitiva** di f su I ogni funzione F derivabile su I e t.c. $F'(x)=f(x)$.

Proposizione

Siano F e G due primitive di f su I

Allora $\exists C \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + C$

Dimostrazione

definisco $H(x)=F(x)-G(x)$

Allora

1) H derivabile su I per l'algebra delle funzioni derivabili

2) $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Ricordiamo che su intervallo I una funzione g derivabile è costante \Leftrightarrow

$g'(x)=0$ Dai punti 1) e 2) deduciamo quindi che H è costante su tutto I cioè

$F(x)-G(x)=C$

(73) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.

Integrazione per parti

f e g due funzioni derivabili su un intervallo I .

Se la funzione $f'g$ è integrabile su I

Allora anche fg' lo è e vale

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dimostrazione

Applichiamo la regola di Leibniz al prodotto $f \cdot g$:

$$D[f(x)g(x)]dx = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{passo all'integrale} \Rightarrow$$

$$\int D[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \quad \text{semplifico}$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

(74) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.

Integrazione per sostituzione:

Sia f una funzione integrabile su I e sia F una sua primitiva su I . Sia poi $\varphi : J \rightarrow I$ una funzione derivabile su un intervallo J a valori in I .

Allora:

$$f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

è integrabile in J e vale

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy$$

Dimostrazione:

Sia F una primitiva di f su I . Cioè $F'(x) = f(x)$

calcoliamo poi

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

integro

$$\int \frac{d}{dx}F(\varphi(x))dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

da cui

$$\int f(y)dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

(75) Definire le somme di Cauchy-Riemann e dare la definizione di integrale definito di una funzione limitata su un intervallo [a, b].

Sia f definita in tutti i punti di $[a,b]$ e ivi limitata e positiva(per comodità).

Definiamo somme di C-R in questo modo:

- si divide $[a,b]$ in n sotto intervalli I_1, I_2, \dots, I_n di egual lunghezza $l=(b-a)/n$
- $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si sceglie un punto $t_j \in I_j$

- consideriamo la somma $S_n = \sum_{j=1}^n f(t_j) * l(I_j)$ detta **somma di C-R**

Def: sia f definita in tutti i punti di $[a,b]$ e ivi limitata e positiva se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \exists$ finito e non dipende dalla scelta dei punti t_j allora f si dice integrabile secondo Cauchy-Riemann e si pone :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

ove l'integrale al primo membro si dice **integrale definito** di f su $[a,b]$.

(76) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Se f è integrabile secondo C-R allora:

1) $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq m(f; a, b) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

2) se f continua in $[a,b] \Rightarrow$ la media integrale di f è un valore assunto da f cioè

$$\exists \bar{x} \in [a, b] \text{ t.c. } f(\bar{x}) = m(f; a, b)$$

Dimostrazione 1

$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ passo quindi all'integrale e divido per $b-a$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \inf_{x \in [a,b]} f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} f(x) dx$$

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \leq m(f; a, b) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b dx$$

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq m(f; a, b) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Dimostrazione 2

f continua in $[a,b]$

$$\inf f(x) = \min f(x)$$

$$\sup f(x) = \max f(x)$$

Per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi tra \min e \max quindi per dim1 assume anche il valore $m(f; a, b)$

(77) Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del Calcolo integrale ("secondo", sul libro di testo, quello per la funzione integrale, non solo per l'integrale definito).

Def: si dice **funzione integrale** di f su I la funzione

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, x_0 \in I \text{ fissato}$$

T. fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua su I , la funzione integrale $F_{x_0}(x)$ di f è derivabile in ogni punto x di I e vale

$$F_{x_0}'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Dimostrazione

dim. Che esiste finito il limite del rapporto incrementale di f in un punto x

fissiamo $x \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ t.c. $x+h \in I$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x_0} f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} m(f; x, x+h) \quad \text{quindi per il teorema della media integrale}$$

esiste un valore di \bar{x} dell'intervallo $[x, x+h]$ t.c. $m(f; x, x+h) = f(\bar{x})$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x}_h) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0} \bar{x}_h\right) = f(x)$$

1° uguaglianza perché continua 2° uguaglianza per il T. dei 2 carabinieri
quindi poiché il limite esiste finito allora

$$F_{x_0}'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

(78) Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del Calcolo integrale ("primo teorema fondamentale del Calcolo integrale" sul libro di testo): "Data G primitiva di f su [a, b], risulta $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ ".

Sia f continua in [a,b] e G una qualsiasi primitiva di f su I, allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

definiamo la funzione integrale di f su [a,b]: $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$

F_a è una primitiva di f su [a,b]

poiché G è un'altra primitiva di f su [a,b] per hp:

Allora

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ t.c. } F_a(x) - G(x) = C \quad \forall x \in [a, b]$$

- se $x=a$ si ha:

$$F_a(a) - G(a) = C \Rightarrow C = -G(a) \text{ poiché } F_a(a) = 0$$

$$\Rightarrow F_a(x) = G(x) - G(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

- se $x=b$ si ha:

$$F_a(b) = G(b) + C$$

$$\text{poiché so che } C = -G(a)$$

$$\Rightarrow F_a(b) = G(b) - G(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

(79) Dare la definizione di integrale generalizzato su intervalli illimitati per funzioni non negative. Scrivere poi anche la definizione di integrale generalizzato su intervalli limitati per funzioni non negative.

Intervalli illimitati

Sia f continua in (a, b] e infinita per $x \rightarrow a^+$. Poniamo in questo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x)dx$$

se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su [a,b].

intervalli limitati

Sia f definita e continua sulla semiretta $[a, +\infty)$. Poniamo in questo caso

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(x)dx$$

se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su $[a, +\infty)$.

(80) Enunciare il criterio del confronto per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati (o limitati, a scelta).

Se vale la disuguaglianza $|f(x)| \leq g(x)$ su tutto l'intervallo di integrazione e

l'integrale $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge allora converge anche $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

(81) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati.

Se $f, g \geq 0$, infinite per $x \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty)$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty)$

Allora $\left(\int_{-\infty}^a \right) \int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \left(\int_{-\infty}^a \right) \int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge

(82) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli limitati.

Se $f, g \geq 0$, infinitesime per $x \rightarrow a^+ (x \rightarrow b^-)$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow a^+ (x \rightarrow b^-)$

Allora $\int_a^b f(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx$ converge

(83) Definizione di norma o modulo e definizione di intorno sferico per $x \in \mathbb{R}^n$, nei casi $n = 2, n = 3$.

Si dice **norma** di $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ la sua distanza dall'origine del piano $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
in \mathbb{R}^3 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
in \mathbb{R}^n $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Dato un punto di $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, definiamo **intorno** di \underline{x}_0 di raggio r l'insieme

$$B_r(\underline{x}_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - \underline{x}_0\| < r \}$$

nel caso di $n=2$ rappresenta un cerchio senza bordo centrato in \underline{x}_0 di raggio r
nel caso di $n=3$ rappresenta una palla senza bordo centrato in \underline{x}_0 di raggio r

(84) Dati $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$ scrivere la definizione di: $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = l$

Si dice che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = l$$

se $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ t.c. $x \in \text{dom} f$ e $\|x\| > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

(85) Dati $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$ scrivere la definizione di: $\lim_{x \rightarrow \underline{x}_0} f(x) = l$

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow \underline{x}_0} f(x) = L$$

se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $x \in \text{dom} f$ e $0 < \|x - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow \underline{x}_0} f(x) = +\infty (-\infty)$$

se $\forall A > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $x \in \text{dom} f$ e $0 < \|x - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow f(x) > A (< -A)$

(86) Dare la definizione di derivata parziale e di gradiente per una funzione di due variabili. L'esistenza del gradiente implica la continuità? Illustrare la risposta con un esempio.

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è **derivabile parzialmente rispetto ad x** se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \text{ esiste finito}$$

In tal caso si dice che il limite è la derivata parziale di f rispetto ad x in (x_0, y_0)

e lo si denota come $(\frac{\partial f}{\partial x})(x_0, y_0)$

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è **derivabile parzialmente rispetto ad y** se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} \text{ esiste finito}$$

In tal caso si dice che il limite è la derivata parziale di f rispetto ad y in (x_0, y_0)

e lo si denota come $(\frac{\partial f}{\partial y})(x_0, y_0)$

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se esistono sia la derivata parziale di f rispetto ad x sia la derivata parziale di f rispetto ad y allora si dice che f è derivabile in \underline{x}_0 . Si scrive

$$\nabla f(\underline{x}_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0)) \text{ detto } \mathbf{gradiente} \text{ di } f \text{ in } \underline{x}_0$$

L'esistenza del gradiente NON implica la continuità.

$$\text{Es. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ha derivate parziali = 0 \Rightarrow la funzione è derivabile in $(0, 0)$ ma non continua infatti se provo a calcolare il limite lungo una generica retta $y=mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{m^2+1}$$

ciò dice che il valore del limite dipende dalla pendenza della retta \Rightarrow poiché il lim se esiste deve essere unico il lim non esiste e quindi la funzione non è continua.

(87) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili e dire quando le derivate direzionali si riducono a derivate parziali. Enunciare la formula del gradiente.

Sia \underline{v} un versore in \mathbb{R}^2 sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sia A un insieme aperto di \mathbb{R}^2 , $A \subseteq \text{dom} f$, $\underline{x}_0 \in A$. Si dice **derivata direzionale** nella direzione \underline{v} in $\underline{x}_0 \in A$ il limite se esiste finito

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

le derivate direzionali si riducono a derivate parziali scegliendo $\underline{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ scegliendo $\alpha=0$ e $\alpha=\pi/2$.

(88) Dare la definizione di f differenziabile per una funzione di due variabili. Enunciare il legame fra differenziabilità e continuità.

Sia $f: \text{dom}f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sia A un insieme aperto di \mathbb{R}^2 , $A \subseteq \text{dom}f$, $(x_0, y_0) = \underline{x}_0 \in A$

Si dice che f è **differenziabile** nel punto $\underline{x}_0 \in A$ se vale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle}{h} = 0$$

T. Se $\text{dom}f \subseteq \mathbb{R}^2$ (o \mathbb{R}^3) è differenziabile in un punto \underline{x}_0 Allora f è continua in quel punto.

(89) Dare la definizione di piano tangente al grafico di f , funzione di due variabili. Enunciare il Teorema del differenziale totale.

Se $f: \text{dom}f \subseteq \mathbb{R}^2$ (o \mathbb{R}^3) $\rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in un punto $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ allora esiste il **piano tangente** al grafico di f nel punto $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0)) \in \mathbb{R}^3$. Esso ha equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

T. del differenziale totale

Sia $f: \text{dom}f \subseteq \mathbb{R}^2$ (o \mathbb{R}^3) $\rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \text{dom}f$, A aperto, $\underline{x}_0 \in A$

Se esistono tutte le derivate parziali di f in un intorno di \underline{x}_0 e sono continue in \underline{x}_0 , allora f è differenziabile in \underline{x}_0 .