DOMANDE DI ANALISI 1

Matteo Mognato – Ing. Gestionale UNIPD

(1) Scrivere la definizione di maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
Saper fornire un esempio di un insieme non limitato superiormente, di un insieme non limitato inferiormente, di un insieme limitato superiormente privo di massimo, di un insieme limitato inferiormente privo di minimo.

Def Maggiorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante per X se $M \geq x \forall \ x \ \in \mathbb{R}$.
Def Minorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante per X se $m \leqslant x \ \forall \ x \ \in \mathbb{R}$.
Def massimo: Se ∃ un el. $x1 \in \mathbb{R} / x1 è maggiorante per X, x1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ allora x1 è massimo di X.
Def minimo: Se ∃ un el. $x2 \in \mathbb{R} / x2 è minorante per X, x2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ allora x1 è minimo di X.
Def estremo sup: Si dice estremo sup di X il più piccolo fra i maggioranti di X se ∃ .
Def estremo inf: Si dice estremo inf di X il più grande fra i minoranti di X se ∃ .

Esempi
a) A=[0,+∞) limitato inferiormente ma non superiormente.
b) B=(-∞, 10) limitato superiormente ma non inferiormente.
c) C=[0, 10) limitato privo di massimo, minC=0.
d) D=(-3,+∞) limitato inferiormente ma non superiormente, non ha ne massimo ne minimo.

(2) Scrivere la proprietà caratteristica di estremo superiore ed estremo inferiore per un insieme di numeri reali.

Proprietà caratteristica di infX=i, $X \subseteq \mathbb{R}$:
- a) $i \leqslant x \ \ \forall \ \ x \ \in X$
- b) $\forall \ r \ngtr, r \in \mathbb{R}, \exists \ x \in X / x < r$

Proprietà caratteristica di supX=s, $X \subseteq \mathbb{R}$:
- a) $s \geq x \forall \ \ x \ \ \in X$
- b) $\forall \ \ s > r, r \in \mathbb{R}, \exists \ \ x \in X / x > r$

(3) Definire il fattoriale di un numero naturale e il coefficiente binomiale di due numeri naturali. Scrivere le prime righe del Triangolo di Tartaglia.

Def Fattoriale: dato $n \in \mathbb{N}$ si def. fattoriale di n il numero n!=n(n-1)(n-2)...3*2*1 (per def. 0!=1).
Def coefficiente binomiale: dati $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, si definisce coefficiente binomiale $(n k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Triangolo di Tartaglia:

```
        (0 0)                         1
      (1 0)    (1 1)                 1    1
   (2 0)  (2 1)   (2 2)       →         1    2    1
(3 0) (3 1) (3 2)  (3 3)              1    3    3    1
                                 1    4    6    4    1
```

(4) Enunciare il teorema del binomio di Newton.

Teorema del binomio di Newton:

$$a, b \in \mathbb{R} \ \forall \ \ n \ \ \in \mathbb{N} vale \ : (a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} a^{n-2} b^2 ... = \sum_{k=0}^{n} (n k) a^{n-k} b^k$$

(5) Enunciare il Principio di Induzione ed esibire un esempio di applicazione.

Il principio di induzione è utilizzato per dimostrare che un predicato P(n) è vero $\forall \ n \ \in \mathbb{N}$.

Proposizione P(n) è vero $\forall \ n \ \in \mathbb{N}$ se:

a) P(n0) è vero, $n_0 \in \mathbb{N}, n \ \geq n_0$

b) se P(n) vera ⇒P(n+1) vera

allora P(n) vera $\forall \ n \ \in \mathbb{N}, n \ \geq n_0$

Esempio:

Dimostrare $2^n \geq n+1 \forall \ n \ \in \mathbb{N}$:

a) $P(0)=2^0 \geq 1 VERA$

b) $P(n)=2^n \geq n+1$

$P(n+1)=2^{n+1} \geq n+2 \Rightarrow 2^n 2 \geq n+2 \Rightarrow applico P(n) 2^n 2 \geq 2(n+1) \Rightarrow 2n+2 \geq n+2 \Rightarrow 2n \geq n VERA$

Dato che entrambe le condizioni sono vere allora P(n) è vera.

(6) Data F : A → B, con X ⊂ A, scrivere la definizione dell'insieme immagine f (A). Dato Y ⊂ B, scrivere la definizione dell'insieme controimmagine f −1 (B).

Def insieme Immagine f(A): si definisce immagine di f(A) il sottoinsieme di B definito da:

$f(a)=\{b \in B, \exists \ a \in A \text{ t.c. } b=f(a)\}=\left\{b \in \frac{B}{b}=f(a) \text{ per qualche } a \in A\right\}$

Def insieme Controimmagine f-1(B): Sia Y ⊂ B, si dice controimmagine di Y secondo f il sottoinsieme di A definito da:

$f'(Y)=\{a \in A : \exists \ b \in Y \text{ t.c.} f(a)=b\}$

(7) Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva.

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:

$\forall \ a, \ a' \ \in A, \ a \neq a' \ si \ \ ha: f(a) \neq f(a')$

Def f. suriettiva: una funzione f: A→B si dice suriettiva se Imf=B.

Def f. biiettiva: una f. si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

(8) Data una funzione biiettiva, definire la funzione inversa, Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.

Data una funzione f: A→ B biiettiva risulta definita una funzione g: B→ A.

Dato il Γ(f) è possibile ottenere Γ(g) per simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante y=x.

(8b) Scrivere la definizione di funzione iniettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa, data una funzione invertibile. Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:

$\forall \ a, \ a' \ \in A, \ a \neq a' \ si \ \ ha: f(a) \neq f(a')$.

Sia f: A→ B bigettiva allora è sia suriettiva che iniettiva risulta quindi definita una funzione g su B perché ad ogni elemento $b \in B$ corrisponde un unico elemento $a \in A / f(a)=b$. Tale funzione g si dice funzione inversa di f e si denota con f^{-1} il suo dominio è B e il codomio è A. Inoltre se una funzione è biiettiva anche la sua inversa è biiettiva. Dato il grafico di una funzione invertibile il grafico della sua inversa si disegna come la simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante y=x.

(9) Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R monotona e strettamente monotona.

Sia f: domf $f: domf \subseteq \mathbb{R}$

Def monotona: f si dice monotona se $\forall\ x1, x2 \in domf,\ x1 < x2 \Rightarrow f(x1) \leq f(x2)$ (crescente)

$\forall\ x1, x2 \in domf,\ x1 < x2 \Rightarrow f(x1) \geq f(x2)$ (decrescente)

Def stret. monotona: f si dice strettamente monotona …(casi sopra senza '=')…

(10) Data f : dom f ⊂ R → R, dimostrare che la stretta monotonia implica l'iniettività di una funzione. Vale anche il viceversa?

Dimostrazione

Tesi: $\forall\ x1, x2 \in domf,\ x1 \neq x2\ si\ ha\ f(x1) \neq f(x2)$

Siano $x1, x2 \in domf,\ x1 \neq x2$ supponiamo x1<x2

-f strettamente crescente, allora f(x1) < f(x2)

-f strettamente decrescente, allora f(x1) > f(x2)

In entrambi i casi $f(x1) \neq f(x2)$ c.v.d

ATT!! Non vale il viceversa quindi una funzione iniettiva può non essere monotona.

(11) Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R limitata. Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R pari, dispari, periodica.

Def f. Limitata: f si dice limitata se $\exists\ m, m' \in \mathbb{R} / m \leq f(x) \leq m'\ \forall\ x \in domf$ cioè se $Imf \subseteq \mathbb{R}$

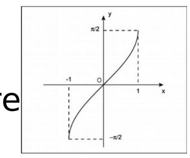
Def f. pari: f si dice pari se $x \in domf \Rightarrow -x \in domf\ e\ f(x) = f(-x)$

Def f. dispari: f si dice dispari se $x \in domf \Rightarrow -x \in domf\ e\ f(x) = -f(-x)$

Def f. periodica: f si dice periodica di periodo T $\forall\ x \in domf\ si\ ha\ x + T \in domf\ e\ f(x) = f(x+T)$ e T è il più piccolo num. Positivo per cui vale f(x)=f(x+T).

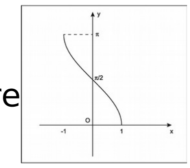
(12) Definire le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente, indicando il dominio,
l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.

Innanzitutto si tratta delle funzioni trigonometriche inverse:



-Arcoseno è la funzione inversa di $sen_{|\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ che risulta quindi essere così definita:

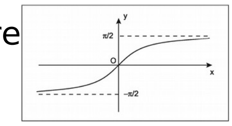
arcsen: $[-1,1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



-Arcocoseno è la funzione inversa di $\cos_{|[0,\pi]}$ che risulta quindi essere così definita:

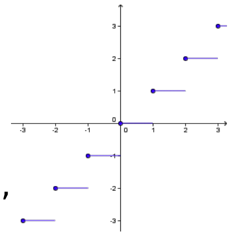
arccos: $[-1,1] \rightarrow [0, \pi]$.

-Arcotangente è la funzione inversa di $tg_{|\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ che risulta quindi essere così definita:



arctg: $\mathbb{R} \to \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

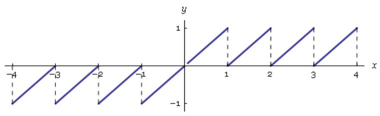
(13) Definire le funzioni parte intera e mantissa, indicando il dominio, l'immagine
e il grafico per ciascuna di esse.
Si tratta di funzioni definite a tratti.



-funz. parte intera è così definita $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,[x]=\lfloor x \rfloor = max\left\{n\in\frac{\mathbb{Z}}{n}\leq x\right\}$

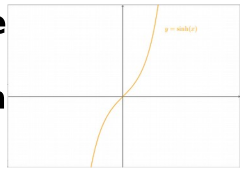
Quindi la **parte intera** di un numero reale *x* è il numero intero, indicato con il simbolo [*x*] che meglio approssima *x* per difetto.

-funzione mantissa è così definita
$M:\mathbb{R} \to \mathbb{R}M(x)=x-[x]\Rightarrow M(x)\in ¿\forall\ x\in\mathbb{R},\ M(n)=0\forall\ n\in\mathbb{Z}$

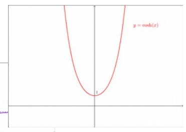


Quindi la **mantissa** di un numero x è:
- x>0 è uguale alla parte decimale
- x<0 è uguale ad 1-parte decimale (presa in valore assoluto)

(14) Definire le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e arcotangente iperbo-
lica, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.



-Seno Iperbolico(senh) è così definito $senh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}senhx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R}$



-Coseno Iperbolico(cosh) è definito $\cosh:\mathbb{R}\to[1,+\infty)coshx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R}$

-Tangente Iperbolica(tgh) è così definito $tgh:\mathbb{R}\to(-1,1)senhx=\frac{senhx}{coshx}, x\in\mathbb{R}$

(15) Scrivere la definizione di successione convergente e di limite finito per una successione. Fornire almeno un esempio.
Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente quindi che $a_n=l$se
$\forall\ \epsilon>0\exists\ n_\epsilon\in\mathbb{N}/\ n_\epsilon>n\Rightarrow\vee a_n-l\vee ¿\,\epsilon$. Il lim finito per una successione è il valore a cui tende la successione per $n\to+\infty$.
Es. $\{a_n\}=1/n \to 0$ *(pag. 40 quaderno dimostrazione)*

(16) Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare.
Esibire un esempio per tipo.
Succ. convergente (guarda 15)
Succ. divergente la successione $\{a_n\}$ si dice:
-divergente(positivamente) quindi che $a_n = +\infty$ se $\forall \ A > 0 \ \exists \ n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n > A$
-divergente(negativamente) quindi che $a_n = -\infty$ se $\forall \ A > 0 \ \exists \ n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n < A$;
Es. $n^2 \rightarrow$ +infinito (pag. 42 quaderno dimostrazione)

Una successione $\{a_n\}$ è detta irregolare o indeterminata il suo limite non esiste. Es. $(-1)^n$ vale -1 se n dispari, 1 se n pari.

(17) Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente, allora essa è anche limitata. Dire se è vero il viceversa (in caso contrario, esibire un controesempio).
Una succ. $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists \ m, M \in \mathbb{R} / m \leq a_n \leq M \forall \ n$
Dim Convergenza implica la limitatezza:
Per ipotesi della succ. convergente $\forall \ \epsilon > 0 \exists \ n_\epsilon \in \mathbb{N} / n_\epsilon > n \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$
se pongo $\epsilon = 1 \ allora |a_n - l| < 1 \Rightarrow l - 1 < a_n < l + 1$ definitivamente vero quindi è limitata.

Il viceversa non è sempre vero ne è esempio la successione $\{b_n\} = (-1)^n$

(18) Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite per le successioni.
Se $\{A_n\}$ converge, il suo limite è unico.
Dim: Per assurdo supponiamo che $\{A_n\} \rightarrow L$ e $\{A_n\} \rightarrow L'$ per n→ +infinito
Allora

$$\forall \ \epsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists \ n_\epsilon \in \mathbb{N} \ / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \\ \exists m_\epsilon \in \mathbb{N} / n > m_\epsilon \Rightarrow |a_n - L'| < \epsilon \end{cases}$$

Ora
$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| = |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\epsilon$ $n = \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 |L - L'| < 2 * \epsilon \Rightarrow L = L'$

(19) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma o del prodotto.
Siano $\{A_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti t.c. $A_n \rightarrow a$ e $B_n \rightarrow b$ per n→ +∞
Allora: $A_n + B_n \rightarrow a+b$; $A_n * B_n \rightarrow a*b$; $A_n - B_n \rightarrow a-b$; $A_n / B_n \rightarrow a/b$ con B_n e b != 0 ; $A_n^{B_n} \rightarrow a^b$
Dimostrazione Prodotto: $A_n * B_n \rightarrow a*b$;

$$\forall \epsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists \ n_\epsilon \in \mathbb{N} \ / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \\ \exists \ m_\epsilon \in \mathbb{N} \ / n > m_\epsilon \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon \end{cases}$$

Quindi
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n (b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n (b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$ A_n convergente -> $A_n <= M$ (n. grandissimo)
$\Rightarrow \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| < M\epsilon + |b|\epsilon = \epsilon(M + |b|)$
Quindi $|a_n b_n - ab| < \epsilon \Rightarrow a_n b_n = ab$.

(20) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni, nelle due forme.

1) se $A_n \to a$ e $a>0$, allora $A_n >0$ definitivamente (cioè da un certo indice in poi)
2) se $A_n \to a$ e $A_n > 0$ definitivamente, allora $a \geq 0$
Dim

1) hp: $A_n \to a$ e $a>0$ th: $A_n >0$ definitivamente

$$\Rightarrow \forall \epsilon>0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n>n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a-\epsilon < a_n < \epsilon + a$$

scegliamo ε=a/2, allora $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2} a \, \forall \, n>n_\epsilon \, poichè \, a>0 (hp) \Rightarrow a_n > 0 \, definitivamente \, \forall \, n>n_\epsilon$

2) hp: $A_n \to a$ e $A_n > 0$ th: $a \geq 0$
PER ASSURDO supponiamo $a < 0$. Applicando quindi il punto 1) dimostrato precedentemente allora se $A_n \to a$ e $a<0$ quindi $A_n <0$ definitivamente ma per ipotesi $A_n >0$ definitivamente. Ciò conduce ad un assurdo quindi $a \geq 0$.

(21) Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il Teorema sul limite delle successioni monotone.

Una successione si dirà $\{a_n\}$ si dirà: monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$; strettamente crescente
$a_n < a_{n+1}$, monotona decrescente $a_n \geq a_{n+1}$; strettamente crescente $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$ nel dominio della successione.
Teorema sul limite delle successioni monotone:

1. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona crescente se
   - a1) $\{a_n\}$ NON sup. limitata, $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$
   - b1) $\{a_n\}$ sup. limitata, $a_n \to l$ ove $l = \sup \{a_n : n \in dom f \{a_n\}\}$
2. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona decrescente se
   - a2) $\{a_n\}$ NON è inf. limitata, $a_n \to -\infty$ per $n \to +\infty$
   - b2) $\{a_n\}$ inf. limitata, $a_n \to l'$ ove $l' = \inf \{a_n : n \in dom f \{a_n\}\}$

Dimostrazione

a1) Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata si dimostra con l'enunciato contenuto nel teorema di monotonia:

th: $a_n \to l$ cioè $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \Rightarrow \sup a_n - \epsilon < a_n < \sup a_n + \epsilon$

Da dimostrare

Sempre vera sup a_n maggiorante di a_n

Per la proprietà caratteristica di sup: $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \sup a_n - \epsilon < a_{n_\epsilon}$
Osservo che la successione è monotona crescente per ipotesi quindi $a_n > a_{n_\epsilon} \forall n > n_\epsilon$
quindi posso dire $\sup a_n - \epsilon < a_n \quad \forall \, n > n_\epsilon$
Si è quindi provato che $a_n \to \sup a_n$ quindi $a_n \to l$ ove $l = \sup \{a_n : n \in dom f \{a_n\}\}$ quindi la successione è superiormente limitata.

b1) Se invece $\{a_n\}$ è sup illimitata, allora $\forall A>0 \exists n_A \in \mathbb{N} / a_{n_a} > A$ poiché $\{a_n\}$ è monotona crescente allora $a_n \geq a_{na} \geq A$ quindi $a_n \to +\infty$.

(22) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per successioni.

Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ soddisfano $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni n>N e $a_n \to l$ e $c_n \to l$ Allora $b_n \to l$

Dimostrazione

Fissiamo ε>0 su ha $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon \quad \forall n>n_\epsilon$; $l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon \quad \forall n>n_\epsilon$

Allora $l-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<l+\varepsilon \quad \forall n>N=max(n_\epsilon, m_\epsilon)$

Quindi $l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$ => $| b_n - l| <\varepsilon$ => $b_n \to l$

(23) Definire la successione geometrica e discuterne le proprietà di convergenza al variare della ragione.

Si definisce successone geometrica la successione $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$

- se q>1 la successione è monotona crescente e non limitata sup. => $q^n \to +\infty$
- se q=1, $q^n = 1$
- se q<0 la succ. non è monotona
- se 0≤q<1 la successione è monotona decrescente

$$\lim_{n\to+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } -1< q < 1 \\ \nexists & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

(24) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in R U {±∞} ("algebra degli infiniti"). Fare esempi di forme indeterminate.

<u>Algebra degli Limiti: </u>vedi 19

<u>Algebra degli Infiniti:</u>

Date 2 successioni a_n, b_n delle quali una o entrambe sono divergenti possiamo avere le seguenti regole:

a+∞ = +∞

a-∞= -∞

+∞+∞=+∞

-∞-∞=-∞

(il segno è da determinare a seconda del segno degli infiniti, infinitesimi)

a*∞=∞

a/0=∞

a/∞=0

Sono forme inderterminate ∞-∞; 0*∞; 0/0; ∞/∞;

Esempio F.I. n^4/n^2 per $n \to +\infty$ è F.I. ∞/∞

(25) Definire il numero e di Nepero.

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1+1/n)^n$$

(26) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.

Sia $\{ a_n \}$ una succ. positiva e sia $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1}/a_n = l$ si hanno 3 casi:

1. $l<1$, $a_n \to 0$
2. $l>1$, $a_n \to +\infty$
3. $l=1$ non si può concludere

<u>Dim1</u>

1. th: $a_n \to 0$

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l<1$ $allora \, \forall \varepsilon>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n>n_0 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l+\varepsilon<1$ devo dimostrare che $\to 0$ quindi minore di qualcosa che converge a 0 considero quindi il secondo membro si ha quindi, (poiché $l < 1$ scelgo ε piccolo in modo che $l+\varepsilon<1$) :

$a_{n0+1} < (l+\varepsilon)a_{n0}$

$a_{n0+2} < (l+\varepsilon)a_{n1} = (l+\varepsilon) * [(l+\varepsilon)a_{n0}] = (l+\varepsilon)^2 a_{n0}$

...

$a_{n0+k} < (l+\varepsilon)^k a_{n0}$ poiché $l+\varepsilon< 1$ successione geometrica di ragione < 1 quindi $a_{n0+k} \to 0$ per $k \to +\infty$

<u>Dim 2</u>

th: $a_n \to +\infty$

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l>1$ $allora \, \forall \varepsilon>0 \, \exists n_1 \in \mathbb{N} / n>n_1 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l+\varepsilon$ si ha quindi:

$a_{n1+1} < (l-\varepsilon)a_{n1}$

$a_{n1+2} < (l-\varepsilon)a_{n2} = (l-\varepsilon) * [(l-\varepsilon)a_{n1}] = (l-\varepsilon)^2 a_{n1}$

...

$a_{nk+1} < (l-\varepsilon)^k a_{n1}$ poiché $l-\varepsilon> 1$ successione geometrica di ragione > 1 quindi $(l-\varepsilon)^k \to +\infty$ per $k \to +\infty$

$a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$

(27) Scrivere la definizione di successioni asintotiche ed enunciarne le principali proprietà; dimostrare poi almeno una di queste proprietà (a scelta).

Def: 2 successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ si dicono asintotiche se $a_n/ b_n \to 1$ per $n \to +\infty$.

Proprietà:

1) Se $a_n \sim b_n$ allora $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ hanno le stesse caratteristiche

   a) se $a_n \to l$ anche $b_n \to l$

   b) se a_n diverge anche b_n diverge

   c) se a_n non ha limite anche b_n non ha limite

2) Se $a_n \sim b_n$, $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

3) Se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$, $c_n \sim c'_n \Rightarrow a_n b_n / c_n = a'_n b'_n / c'_n$

Dimostrazione 1c)

hp: a_n non ha limite th: b_n non ha limite

Per ASSURDO sia $b_n \to l$ (o ∞)

$a_n = \frac{a_n}{b_n} * b_n \Rightarrow a_n \to l \, o \, \infty$ ma per ipotesi a_n non ha limite ciò porta ad un assurdo quindi anche b_n non avrà limite.

L'asintotico è una relazione d'equivalenza poiché valgono la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(28) Fissato c ϵ R, scrivere la definizione successionale di limite di funzione per x→ c. Scrivere la definizione topologica di limite di funzione per x→ c.

Def Successionale di limite:

Sia I un intervallo di R, c un p.to di tale intervallo e la funzione f definita in I tranne al più c

Si dice che $\lim_{x \to c} f(x) = l \, (l \in \mathbb{R} \, o + \infty) \, se \, \forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \to c, x_n \neq c \, \forall n \, si \, ha \, f(x_n) \to l$

Def Topologica di limite:

Dato $x_0 \in \mathbb{R}, si \, dice \, che \lim_{x \to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \, se \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / x \in I_{\delta(x_0)} \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

(29) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to 7}$ f(x) = π indicando esplicitamente gli intorni.

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\}$ e $x \in dom f \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$

(30) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to -\infty}$ f(x) = π indicando esplicitamente gli intorni.

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists M > 0 / x \in (-\infty, -M) \, e \, x \in dom f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$

(31) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to 7}$ f(x) = +∞ indicando esplicitamente gli intorni.

$\forall A > 0 \, \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\}$ e $x \in dom f \Rightarrow f(x) > A$

(32) Scrivere la definizione di limite destro e sinistro per funzioni. (Facoltativo: dare qualche esempio)

Sia $c \in \mathbb{R} \, e \, l \in \mathbb{R}$, si dice che il limite destro (sinistro) di f(x) per x→ c è l, e si scrive

$\lim_{x \to c+} f(x) = l \, (\lim_{x \to c-} f(x) = l)$ se $\forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \to c, x_n > c \, (x_n < c) \, definitivamente \, si \, ha \, f(x_n) \to l$

DESTRO SINISTRO

$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$ mentre $\lim_{x \to 0} 1/x$ NON esiste!

(33) Scrivere la definizione di funzione continua in un punto. Classificare le possibili discontinuità

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I \, intervallo, c \in I$ si dice che f è continua in c se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Discontinuità:

1) Si dice che f ha discontinuità eliminabile in x=c se per x→ c f(x) → l ma l ≠ f(c). Si potrà allora andare a definire una nuova funzione in modo da eliminare la discontinuità nel p.to, effettuando quindi un prolungamento per continuità nel punto.

2) Si dice che f ha una discontinuità di 1° specie in x=c se esistono finiti i limiti sx e dx per x→ c ma sono diversi tra loro (salto).

3) si dice che f presenta una discontinuità di 2° specie quando almeno uno dei due limiti non esiste o diverge.

(34) Enunciare il Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni e per funzioni continue in un punto.

Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni

1) se f(x) → l per x→ c e l>0 allora $\exists$ un intorno bucato I di c / f(x) >0 $\forall x \in I$

2) se f(x) >0 in un intorno bucato I di c e f(x) → l allora l⩾0 $\forall x \in I$

Teorema della permanenza del segno per funzioni continue in un punto

Se f continua in $x_0 \in \mathbb{R} \, e \, f(x_0) > 0 \, allora \, \exists$ un intorno bucato I di x_0 / $f(x_0)$ >0 $\forall x \in I$

(35) Enunciare il Teorema del confronto per limiti di funzione.
hp: f, g, h definite in un intorno di x_0,tranne al più x_0
Se

1) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \forall x \in I$ I intorno bucato in c
2) $f(x) \rightarrow l$ e $h(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$

Allora

$g(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$

(36) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per funzioni. Enunciare il teorema sull'algebra delle funzioni continue.
Se f e g sono continue in x_0, allora

1) $f \pm g$ è continua in x_0
2) f^*g è continua in x_0

3) f/g è continua in x_0, purché $g(x_0) \neq 0$

(37) Enunciare e dimostrare il teorema di cambiamento di variabile nei limiti (detto anche teorema sul limite di funzione composta).

TEOREMA di CAMBIO di VARIABILE nei LIMITI

1° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f. composta $f \circ g$ sia def in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$).

Se:

① $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R})$

② $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$ FINITO o INFINITO

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(t_0)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \mathrm{dom}\, f \circ g$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$, si ha $f(g(x_n)) \to f(t_0)$

Per hp ①, $g(x_n) \to t_0$

Per hp ②, f continua in t_0, cioè $\forall y_n \to t_0$ $f(y_n) \to f(t_0)$

Allora se scelgo $y_n = g(x_n)$

avrò $f(g(x_n)) \to f(t_0)$ ■

2° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f. composta $f \circ g$ sia def in un intorno di x_0

Se

① $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R})$

② $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

③ $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \to x_0$ cioè in un intorno di x_0

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \mathrm{dom}\, f \circ g$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ si ha $f(g(x_0)) \to \lim_{t \to t_0} f(t) = l$

per hp ①, $g(x_n) \to t_0$

per hp ②, $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l$ cioè che $\forall \{t_n\}$, $t_n \to t_0$, $f(t_n) \to l$ se $t_n \neq t_0$

Allora, scegliendo come $\{t_n\}$ la successione $\{g(x_0)\}$ si ha:

$g(x_n) \to t_0$, $g(x_n) \neq t_0 \Rightarrow \boxed{f(g(x_n)) \to l}$ per $n \to +\infty$

assieme all'hp ③ $g(x_n) \neq t_0$ avrò quindi la th. ■

(38) Dimostrare che senx/x = 0 per x→ 0 e i suoi corollari

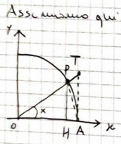
1.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Dim basta considerare $x > 0$ e x piccolo ($x < \frac{\pi}{2}$)

Se $x < 0$, $x = -y$, $y > 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Assumiamo quindi che $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Osservo che

$$\mathcal{A}(O\hat{P}A) \leqslant \mathcal{A}(\widehat{OPA}) \leqslant \mathcal{A}(O\hat{T}A)$$

Calcolo:

$$\mathcal{A}(O\hat{P}A) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{(1-\cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{\cancel{\operatorname{sen} x \cos x} + \operatorname{sen} x - \cancel{\operatorname{sen} x \cos x}}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

$\mathcal{A}(\widehat{OPA}) \Rightarrow \pi R^2 : 2\pi R = \mathcal{A}(\widehat{OPA}) : x$

$R = 1$ $\quad \pi : 2\pi = \mathcal{A}(\widehat{OPA}) : x$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{OPA}) = \frac{x\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \frac{x}{2}$$

$$\mathcal{A}(O\hat{T}A) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Vale quindi

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x \leqslant x}_{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1} \underbrace{\leqslant \operatorname{tg} x}_{x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$\Rightarrow \cos x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad ■$$

Corollario (13)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dim

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1-\cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1-\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos^2 x} = \left[1 \cdot \frac{1}{1+1}\right] = \frac{1}{2}$$

(39) Date due funzioni definite in un intorno di c, tranne al piu in c, definire i tre simboli
f = O(g), f = o(g) e f ~g per x→ c.
Definire la parte principale di una funzione finita o infinitesima per x→c.

Siano f e g definite in un intorno di c, tranne al più c ($c=x_0$, x_0^+, x_0^-, $\pm\infty$).
Inoltre sia $g(x)\neq 0$ per x→ c t.c f(x)/g(x) → l (finito o infinito) per x→ c. Allora

- se $l<+\infty$, si dice che f è controllata da g per x→ c f=O(g)
- se l=0, si dice che f è trascurabile rispetto a g per x→ c f=o(g)
- se l=1, si dice che f e g sono asintotiche f~g

Parte principale

INFINITO

Sia $g(x)$ un infinito (o infinitesimo) di ordine n per $x \to x_0$, rispetto ad un infinito (o infinitesimo) principale $f(x)$. Avendosi di conseguenza[3]:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} = L \neq 0$$

con L finito e non nullo, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = 0$$

Da ció vediamo che la funzione

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L$$

che si trova sotto l'operazione di limite, é infinitesimo per $x \to x_0$. Di conseguenza, in un piccolo intorno di x_0, la funzione $h(x)$ assume valori prossimi a zero, e pertanto, possiamo scrivere:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = \alpha(x)$$

ove la funzione $\alpha(x)$ é infinitesimo, per $x \to x_0$ Si ha allora:

$$g(x) = L \cdot f^n(x) + \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

[3]Nel confronto degli infinitesimi o degli infiniti, *se si deve calcolarne la parte principale e complementare*, conviene mettere $g(x)$ a numeratore nel calcolo del limite.

Il termine

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x)$$

é detto *Parte principale dell'infinito (o infinitesimo)* $g(x)$, mentre il termine

$$p_c(x) = \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

é la sua *parte complementare.*

Il significato della parte principale é il seguente: in un piccolo intorno di x_0, la funzione $p_p(x)$ approssima, a meno di un piccolo errore, la funzione $g(x)$. L'errore commesso é dato dalla parte complementare, che risulta funzione del punto x.

Ad esempio, sia

$$g(x) = 2\sin(x)$$

Questa funzione é infinitesima, per $x \to 0$. Prendiamo come infinitesimo principale l'infinitesimo campione $f(x) = x$. Avendosi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesimo di ordine uno rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi poi $L = 2$, possiamo calcolare la parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f(x) = 2x$$

Ció significa che, nell'intorno del punto $x_0 = 0$, la funzione $2\sin x$ puó essere approssimata dalla sua parte principale (a meno di un errore, dato dalla sua parte complementare, infinitesimo per $x \to x_0 = 0$). Il significato della parte principale e

(40) Dimostrare limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo

Consideriamo ora

$h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\mathrm{dom}\, h := \left\{ x \in \mathrm{dom}\left(1+\frac{1}{x}\right) : 1+\frac{1}{x} > 0 \right\} \overset{!}{=} \left\{ x \neq 0 : 1+\frac{1}{x} > 0 \right\} = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$

è quindi possibile considerare il lim $x \to \pm\infty$ di h e vale:

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ deriva dal fatto che $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ $\forall$ succ. $\{a_n\}$ divergente a $\pm\infty$.

Corollario

① $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ dimostrazione: $x = \frac{1}{t}$

② $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ sostituzione $\frac{x}{a} = t$.

PROPOSIZIONE

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$

Dim $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{1/x} = \log\left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \log e = 1$

(41) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri. Discutere se tale teorema si può estendere al caso di una funzione continua su tutto l'asse reale (ed eventualmente formulare un enunciato valido in questo caso).

T. di ESISTENZA degli ZERI

Sia $f: [a,b] \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$, t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$

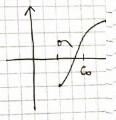
Allora

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

Se in più f è strettamente monotona tale zero è unico.

Dim

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$



Poniamo

$a_0 = a$

$b_0 = b$

e $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ (p.to medio di $[a,b]$)

Considero $f(c_0)$ $\begin{cases} > 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a sinistra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = c_0 \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ < 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a destra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_0 \\ b_1 = b \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ = 0 & \text{FINE } (c_0 \text{ è uno ZERO}) \end{cases}$

Se non ho trovato lo zero andrò quindi a considerare il nuovo intervallo e così via fino a che non arrivo a trovare $f(c_0) = 0$

Quindi o ci fermiamo dopo un numero finito di passi perché $f(c_n) = 0$ oppure costruiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

① $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ $\forall n$

② $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \dots \le b_1 \le b_0$

③ $\ell([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali passi è possibile dimostrarli per induzione)

Osservo che

- $\{a_n\}$ è monotona crescente e $a_n \le b$ $\forall n$
- $\{b_n\}$ è monotona decrescente e $b_n \ge a$ $\forall n$

$\Rightarrow$ Per il T. delle SUCCESSIONI MONOTONE

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0^+$ $\qquad \exists \lim_{n \to +\infty} b_n = x_0^-$

Vale anche

$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_0 - a_0}{2} = 0$

Quindi $x_0^+ = x_0^-$

D'ora in poi indicheremo quindi $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

(*) $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$

(**) e $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} b_n) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$

T. cambiamento variabile nei limiti di una f. continua

Per il T. di permanenza del segno

$f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \le 0$

$f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \ge 0$

Ma da (*) e (**) sappiamo che questi 2 limiti sono uguali

$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} f(a_n)}_{\le 0} = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f(b_n)}_{\ge 0}$

$\Rightarrow 0 \le f(a_n) = f(b_n) = f(x_0) \le 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$

Se in più f è strett. monotona in $[a,b]$ f è iniettiva, quindi tale zero è unico (se non lo fosse, esisterebbero $x_0, x_1 \in [a,b]$, $x_0 \ne x_1$, t.c. $f(x_0) = 0$ e $f(x_1) = 0$ $\Rightarrow$ f non sarebbe iniettiva) ■

Corollario 1

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ esistono eventualmente ∞, e sono discordi

Allora $\exists$ almeno uno zero di f

Corollario 2

Sia P un polinomio di grado dispari allora P ammette almeno una radice reale.

Es. $P(x) = x^3 + x^2 + 4x = x(x^2 + x + 4)$ 1 RADICE REALE

$Q(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$ 3 RADICI REALI

(42) Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Mostrare, attraverso controesempi, che le ipotesi sono tutte essenziali.

Una funzione f definita nel

$dom f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua se* $\forall x_c \in dom f\ \exists \lim_{x \to x_c} f$ *esiste quindi* $\lim sx, dx$

Teorema d Weierstrass

Se f continua in [a,b] allora f ha minimo e massimo su [a,b]

hp1: f non chiuso f(x)=x, I=(0,1) quindi f(I)=(0,1) non ha ne massimo ne minimo ;

hp2: f non limitato f(x)=arctgx, I=R quindi f(I)=(0,1) non ha ne massimo ne minimo ;

hp3: f non continua

f(x)= { x se (-1,1); ½ se x=±1 }, I=[-1,1] non assume massimo e minimo nell'intervallo.

(43) Enunciare e dimostrare il Teorema dei valori intermedi.

T. Valori Intermedi:

Se f è continua e definita in [a,b] Allora f assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b).

Dimostrazione:

th: $\forall f(a)<c<f(b) \exists x_0 \in (a,b) / f(x_0)=c$

Se f(a)=f(b)è banale

Se f(a)≠f(b) supponiamo f(a)<f(b)

Sia $c \in \mathbb{R} : f(a)<c<f(b)\, definisco\, g(x)=c \,\forall x \in [a,b]$

Osservo che:

- f continua in [a,b] per hp e g continua perché costante
- f(a)<g(a)=c
- f(b)>g(b)=c

Quindi per il corollario del T. di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0)=g(x_0)=c$.

(44) Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Caratterizzare gli asintoti obliqui.

Def asintoto orizzontale: Si dice che f ha asintoto orizzontale di eq: y=m se f(x)→m per x→+∞

Def asintoto verticale: Si dice che f ha un asintoto verticale di eq: x=a se f(x)→±∞ per x→ a

Def asintoto obliquo: Si dice che f ha asintoto obliquo di eq. g(x)=mx+q per x→∞ Allora g(x) si dice asintoto obliquo di f. Perchè una funzione ammetta asintoto obliquo il f(x)→∞ con ordine 1 per x→∞ e devono esistere finiti lim f(x)/x per x→∞ = m e lim f(x)-mx = q; l'asintoto avrà quindi equazione y=mx+q

(45) Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.

T. continuità di f^{-1} :

Sia f continua e biiettiva sull'intervallo I,

Sia J=f(I), J un intervallo

Allora

f^{-1} è continua sull'intervallo J.

(46) Enunciare il teorema sui limiti destro e sinistro delle funzioni monotone.

T:

Sia f: (a, b) → R monotona

$\forall c \in (a,b) \exists$ il limite destro e sinistro di f(x)

Ai 2 estremi a, b esistono i limiti x→ a^+ e x→ b^- di f(x), eventualmente ∞

(47) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.

Una funzione f si dice derivabile in un p.to x_0 se $\exists finito \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in x_0 e il valore del limite si dice derivata di f in x_0.

$f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel p.to x_0.

(48) Scrivere la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.

Una funzione si dice continua in un p.to x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Una funzione f si dice derivabile in un p.to x_0 se $\exists finito \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in x_0 e il valore del limite si dice derivata di f in x_0.

Sia f definita in un intorno di x_0
f derivabile in x_0 => f continua in x_0 .

Dim
$th: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ parto dall' espressione lim x→ x_0 f(x)-f(x_0) divido e moltiplico per (x-x_0)
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} * x - x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ => f continua in x_0

Attenzione !! Non vale il viceversa es. |x| è continua ma non è derivabile.

(49) Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra, di punto angoloso, di
cuspide, di esso a tangente verticale.

Sia f definita in [x_0, $x_{0+\delta}$) si dice derivata destra $(D^+f)(x_0)$ di f in x_0 il
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} se \exists finito$.
Sia f definita in ($x_{0+\delta}$, x_0] si dice derivata sinistra $(D^-f)(x_0)$di f in x_0 il
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} se \exists finito$.
Classificazione dei p.ti di non derivabilità:
1) x_0 si dice p.to angoloso se $(D^+f)(x_0)$ e $(D^-f)(x_0)$ esistono ma sono diversi tra loro
es. f(x)=|x| in x_0=0
2) Se f è continua in x_0 e il i limiti dx e sx del rapporto incrementale esistono infiniti:
- se sono infiniti concordi allora x_0 si dice p.to a tg verticale
- se sono infiniti discordi allora x_0 si dice cuspide

(50) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di
derivazione del prodotto (regola di Leibniz).

Siano f e g due funzioni derivabili in x_0.
Allora
1. f + g è derivabile in x_0 e (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)
2. f * g è derivabile in x_0 e (f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g'(x_0)
3. f / g è derivabile in x_0 e (f/g)'(x_0) = [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)] / $(g'(x_0))^2$

Dimostrazione regola di Leibniz:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$ sommo e sottraggo $f(x_0)g(x_0+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)[f(x_0+h)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}*g(x_0+h)+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}*f(x_0)$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

(51) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta
(regola della catena).

f definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0
g definita in un intorno di $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$
Allora

g o f è derivabile in x_0 e vale (g o f)'(x) = $g'(f(x_0))*f'(x_0)$

Dim

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$$

pongo $y_0 = f(x_0)$

$y_0 + k = f(x_0) + k = f(x_0 + h)$

$(h\to 0 \Rightarrow k=f(x_0+h)-f(x_0) \to 0)$

Divido e moltiplico per k

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}*\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=g'(y_0)*f'(x_0)=g'(f(x_0))*f'(x_0)$$

(52) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.

Sia f continua e derivabile su un intervallo I.
Sia f definita in un intorno di x_0 in I derivabile in x_0.

- Se $f'(x_0) \neq 0$ Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$
- Se $f'(x_0) \neq 0$ Allora f^{-1} NON è derivabile in y_0.

Dalle hp segue per il T. continuità della funzione inversa che f^{-1} è continua in J=f(I) in particolare f^{-1} sarà quindi continua in y_0.

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$$

pongo $x= f'^{-1}(y) \Rightarrow y=f(x)$;

$x_0= f'^{-1}(y_0) \Rightarrow y=f(x_0)$

$(y\to y_0 \Rightarrow x\to x_0)$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}}$$

- Se $f'(x) = 0$ allora f^{-1} non è derivabile in x_0
- Se $f'(x)\neq 0$, $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$

(53) Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

x_0 si dice p.to di massimo relativo (o locale) per f se esiste un intorno $U_{\delta(x0)}=(x_{0-\delta}, x_{0+\delta})$ t.c. $f(x)\leqslant f(x_0)$ per ogni x dell' intervallo $U_{\delta(x0)}$.
x_0 si definisce p.to critico o stazionario di f se f è derivabile in x0 e la sua derivata 1° è =0
T. di Fermat:

- f definita in un intorno di x_0 nel domf
- f derivabile in x_0
- f ha max e min relativo in x_0

$f'(x_0)=0$

Dim
Supponiamo che x_0 sia un p.to interno al domf, in cui f è derivabile e che x_0 sia p.to di massimo relativo. Allora $\exists \delta>0 \; t.c. \; f(x)\leq f(x_0) \forall x \in domf \cap (x_{0-\delta}, x_{0+\delta})$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} <=0 \; se \; x>x_0 \\ >=0 \; se \; x<x_0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \exists$ quindi esistono anche il suo limite sinistro e il limite destro che per la permanenza del segno sono uno $\leqslant 0$ e l'altro $\geqslant 0$. Ma poiché si ha che f è derivabile in x_0 i due limiti devono essere uguali quindi devono essere =0 => esiste $f'(x_0)$ ed è =0.
Attenzione non vale il viceversa quindi un punto in cui la derivata è nulla può non essere un p.to di massimo o min relativo es. $f(x)=x^3$ in $x_0=0$.

(54) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle

T. di Rolle:

- $f \in C([a,b])$
- f derivabile in (a, b)
- f (a) = f(b)

$\exists x_0 \in (a,b) \; t.c. \; f'(x_0)=0$

Dim
Per il teorema di Weierstrass, f ha max e min in (a, b)
Sia x_1 t.c. $f(x_1)=M$ e x_2 t.c. $f(x_2)=m$
Sono possibili 2 casi:

1) $\{x_1, x_2\} = \{a, b\}$
   $f(x_1)=f(x_2)$ => M=m
   Allora la funzione è costante => $\forall x \in (a,b) \, e \; t.c. \; f'(x)=0$

2) Almeno uno fra x_1, x_2 non coincide con gli estremi quindi è interno ad [a,b]:
Supponiamo x_2 interno → $f(x_2)=M$ Quindi:

- x_2 interno
- f derivabile in x_2
- f ha max in x_2

$f'(x_2)=0$ per il T.di Fermat

(55) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio)

T. di Lagrange:

- $f \in C([a,b])$
- f derivabile in (a, b)

$$\exists x_0 \in (a,b)\ t.c.\ f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dim

Definiamo la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x-a)$ ottenuta sottraendo ad f la retta passante per gli estremi del grafico. G soddisfa le hp. del T. Rolle:

- g è continua in [a,b] per l'algebra delle f. continue
- se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su [a,b].
- g(a)=g(b)

$$\exists x_0 \in (a,b)\ t.c.\ g'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(56) Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I (cioè dimostrare che una funzione e costante su I se e solo se la sua derivata e nulla in tutti i punti di I).

-f derivabile in I, intervallo
-f'(x)=0 $\forall x \in I$
Allora
f(x)=c $\forall x \in I$

Dim

Siano x_1,x_2 in I , $x_1 \neq x_2$ suppongo x1<x2
Allora per la 2° formula dell'incremento finito:
$\exists t \in (x_1, x_2)\ t.c.\ f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ poiché f'(t)=0

Attenzione non vale il viceversa es. f(x) = arctg(x)+arctg(1/x)

(57) Scrivere la definizione di funzione monotona. Enunciare e dimostrare il Test di monotonia.

f si dice monotona crescente se $\forall\ x_1, x_2 \in domf\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Test di monotonia:

-Sia I un intervallo

-Sia f derivabile su I

Allora

1. f crescente su I <=> f'(x) $\geqslant$ 0 $\forall x \in I$
2. f'(x)>0 $\forall x \in I$ => f strettamente crescente in I

Dim1)

"=>"

Sia x_0 interno a I

poiché f è crescente su I si ha

$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \leq x_0$

$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \geq x_0$

Allora

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0\ \forall x \in I_{(x_0)}$$

Per il T. della permanenza del segno

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$ cioè $f'(x_0) \geqslant 0$

Sia x_0 un estremo di I allora bisognerà limitarsi a considerare il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale.

"<="

Siano x_1, x_2 in I e $x_1 < x_2$ per la seconda formula dell'incremento finito:

$$\exists t \in (x_1, x_2)\ t.c.\ f(x_1)-f(x_2) = f'(t)(x_1-x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

(58) Definire una funzione concava o convessa in un intervallo. Enunciare il Test di convessità (cioè il Teorema sulle condizioni equivalenti alla convessità/concavità per le f derivabili).

Una funzione è detta convessa(concava) in un intervallo se è convessa(concava) in tutti i punti di tal intervallo ovvero se per ogni p.to x_0

$f(x) \leqslant (\geqslant) f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ per ogni x in un certo intorno di x_0

<u>Test di convessità:</u>

Sia f derivabile 2 volte in I, allora:

1. f''(x)$\geqslant$0 $\forall x \in I$ <=> f convessa in I
2. f''(x)>0 $\forall x \in I$ => f strettamente convessa in I

Osservazione la seconda in generale non si può invertire es. f(x)=x^4 strett. Convessa in 0 ma f''(x)= 12 x^2 => f''(0)=0.

(59) Enunciare il Teorema di de l'Hopital

T. de L'Hopital:

Sia $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ della forma 0/0 o ∞/∞

con:

- f e g definite in un intorno di c, tranne al più in c
- f e g derivabili in un intorno di c, tranne al più in c

Se

$$\exists \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \text{ finito o infinito}$$

Allora

$$\exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

(60) Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto nella forma di Peano e nella forma di Lagrange.

Formula di Taylor se f è derivabile n volte in x_0 si ha:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+1/2\ f''(x_0)(x-x_0)^2+1/3!\ f'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots+1/n!\ f^n(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

Resto nella forma di lagrange:

$$r_{n,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}c}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(61) Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare (o indeterminata). Presentare un esempio per tipo.

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice :

-convergente se $\{s_n\}$ la somma delle parziali è convergente e se sn→ l si dice che la somma della serie è l e si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$ es. Serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

-divergente se {sn} la somma delle parziali è divergente serie geometrica con base > 1

-indeterminata se {sn} la somma delle parziali è indeterminata

(62) Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza. Esibire un esempio di serie telescopica.

Si dice serie telescopica una serie del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k = b_k - b_{k+1}$

=> s_n=a1+a2+…+an=(b1-~~b2~~)+(~~b2-b3~~)+(~~b3-b4~~)+…+(~~bn~~-bn+1) = $b_1 - b_{n+1}$

=> $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} b_1 - b_{n+1} = b1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$

=> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge <=> esiste finito $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1}=l$ e la somma della serie è b1-l

esempio di serie telescopica è la serie di Mengoli.

(63) Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge, diverge o e indeterminata.

Sia $a \in \mathbb{R}$, si dice serie geometrica di ragione a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ consideriamo la succ. delle ridotte sn= $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ =1+a+a^2+a^3+...+a^n = $(1-a^{n+1}) / (1-a)$ se a≠0

quindi $\lim_{n \to +\infty} s_n$ è:

$$\begin{cases} 1/(1-a) & \text{se } |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

(64) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
Stabilire se tale condizione e anche sufficiente.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge Allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dimostrazione

Sia $\{s_n\}$ la successione delle ridotte della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$

Per n>0 vale $s_n = s_{n-1} + a_n$
Per hp la serie converge quindi $\lim_{n \to +\infty} s_n \exists$ finito (sia l)

Allora
$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} s_n - s_{n-1} = [l - l] = 0$

Osservazione
Questa condizione non è sufficiente per la convergenza di una serie es. si consideri
$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ il suo limite per n→ +∞ è 0 tuttavia
$s_n = \log 2 + \log(1+1/2) + \log(1+1/3) + \ldots + \log(1+1/n)$
=~~log2~~ + ~~log3~~ – ~~log2~~ + ~~log4~~ – ~~log3~~ + … + log(n+1) – ~~log(n)~~ = log(n+1)
=> $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \log(n+1) = +\infty$ quindi la serie data è divergente ciò prova che la condizione necessaria non è sufficiente per la convergenza.

(65) Enunciare e dimostrare la proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi.
T.
Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, con $a_k > 0 \, \forall k$ Allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ o converge o diverge.

Più precisamente se $\{s_n\}$ è sup. limitata allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a ($\sup_n s_n$) se invece s_n non è sup. limitata allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Dimostrazione:

s_n è una successione monotona crescente cioè se $s_{n+1} \geq s_n \; \forall n$

$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_k + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \Rightarrow s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \Rightarrow s_{n+1} \geq s_n \Rightarrow s_n$ è monotona crescente

Allora $\{s_n\}$ o converge o diverge:

-se $\sup_n s_n < +\infty$ (è sup limitata) => { s_n } convege a $\sup_n s_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a $\sup_n s_n$

-se $\sup_n s_n = +\infty$ (è sup illimitata) $s_n \to +\infty \Rightarrow \sup_n$ diverge

(66) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie a termini positivi.

Criterio del confronto:

Siano $a_k \geq 0, b_k \geq 0 \; \forall k \geq 0$
$a_k \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N}$

Allora

1)Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, converge anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e vale $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

2)Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Dimostrazione 1:

Siano rispettivamente $s_n e \sigma_n$ le ridotte ennesime di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

poiché $a_k \leq b_k$ per hp si ha: $s_n \leq \sigma_n$ -> $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k$

per hp b_k converge => $\lim_{n \to +\infty} a_k \; \exists$ finito (sia esso l)

Allora $s_n \leq l \; \forall n$, quindi s_n è sup limitata $\Rightarrow s_n\, converge \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Dimostrazione 2(per assurdo):

se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ non diverge allora essa converge => $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge ma ciò conduce ad un assurdo perché per hp $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge. Quindi anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ deve divergere.

(67) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

Confronto asintotico:

Siano $a_k \, e \, b_k \geq 0$ t.c. $a_k \sim b_k \; per \; k \to +\infty$

Allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione:

Per hp $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\Rightarrow\forall\epsilon>0\exists k_\epsilon\in\mathbb{N}\text{ t.c. }|\frac{a_k}{b_k}-1|<\epsilon\ \forall k>k_\epsilon\Rightarrow 1-\epsilon<\frac{a_k}{b_k}<1+\epsilon$

scegliamo ε=1/2 allora

½ < a_k/b_k < 3/2 basta applicare 2 volte il criterio del confronto:

½ $b_k \leq a_k$ e $a_k \geq 3/2 b_k$

(68) Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata. Enunciare le proprietà di convergenza, dimostrando, in particolare, la convergenza della serie 1/n²

E' detta serie armonica la serie: $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ che confrontandola con log(1+x) si può vedere che diverge. La serie armonica generalizzata è nella forma $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ se α > 1 converge, se α <= 1 diverge.

Dimostrazione convergenza della serie $1/n^2$

decido di confrontarla con la serie di mengoli * 2

$\frac{1}{k^2}\leq\frac{2}{k(k+1)}\Rightarrow k^2+k\leq 2k^2\Rightarrow k\leq k^2\Rightarrow 1\leq k$ vero (poiché k parte da 1) quindi la serie data è minore di una serie convergente => per il criterio del confronto anche $1/n^2$ converge.

(69) Enunciare il criterio della radice e il criterio del rapporto per serie a termini
positivi e dimostrare il primo.

Criterio della radice

Siano $a_n\geq 0\ e\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\in\mathbb{R}$

1) se l<1 la serie convergente
2) se l>1 la serie diverge
3) se l=1 NON si può concludere con questo criterio

Criterio del rapporto

Sia data $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$, con $a_k>0$ supponiamo che $\exists$ finito $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$

1) se l<1 la serie convergente
2) se l>1 la serie diverge
3) se l=1 NON si può concludere con questo criterio

Dimostrazione 1)

poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,\forall\epsilon>0\exists N_\epsilon\ t.c\ n>N_\epsilon$ si ha $l-\epsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\epsilon$

considero il secondo membro Sia l<1 per hp scelgo ε piccolo in modo che λ=l+ε<1

Allora

$a_{n\varepsilon+1}<\lambda\, a_{n\varepsilon}$

.....

$a_{n\varepsilon+k}<\lambda^k a_{n\varepsilon}$

Quindi

$\sum_{k=0}^{\infty}a_{n_\epsilon+k}<\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k a_{n_\epsilon}=a_{n_\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k$ → serie geometrica con λ<1 quindi converge e quindi per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty}a_{n_\epsilon+k}$.

(70) Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta. Dimostrare che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente (o in senso assoluto) se convege la serie dei moduli cioè $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$.

T. criterio della convergenza assoluta

Se una serie converge assolutamente allora essa converge. Vale inoltre

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_n| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$$

<u>Dimostrazione:</u>

Scriviamo il termine ennesimo come:

$$a_n = \underbrace{\frac{a_n + |a_n|}{2}}_{b_n} - \underbrace{\frac{a_n - |a_n|}{2}}_{c_n}$$

Osserviamo che:

- b_n e c_n sono a termini positivi
- $0 \le b_n \le |a_n|$
- $0 \le c_n \le |a_n|$

Quindi

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ se } a_n \ge 0 \\ 0 \text{ se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 \text{ se } a_n \ge 0 \\ -a_n = |a_n| \text{ se } a_n < 0 \end{cases}$$

Quindi bn e cn sono positivi => applichiamo il criterio del confronto alla serie di b_n e c_n che convergono => per l'algebra delle serie converge anche a_n

(71) Definire le serie a termini a segno alterno. Enunciare il criterio di Leibniz.

Se dice serie a termini alterni una serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * b_n \text{ oppure } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} * b_n \text{ con } b_n > 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Per tali serie si utilizza il criterio di Leibniz:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n, b_n > 0$, una serie data

se:

1) $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$

2) b_n è monotona decrescente

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge (semplicemente)

Inoltre $\underbrace{|s-s_n|}_{\text{resto}} \le b_{n+1}$

(72) Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive di una stessa funzione f definite su un intervallo I differiscono al più per una costante.
Sia f una funzione definita su un intervallo I, si dice primitiva di f su I ogni funzione F derivabile su I e t.c. F'(x)=f(x)
Proposizione
Siano F e G due primitive si f su I
Allora $\exists C \in \mathbb{R}$ t.c F(x) = G(x)+C
Dimostrazione
definisco H(x)=F(x)-G(x)
Allora
1) H derivabile su I per l'algebra delle funzioni derivabili
2) H'(x)= F'(x) – G'(x) = f(x) – f(x) =0
Ricordiamo che su intervallo I una funzione g derivabile è costante <=> g'(x)=0 Dai punti 1) e 2) deduciamo quindi che H è costante su tutto I cioè F(x)-G(x)=C

(73) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.
Integrazione per parti
f e g due funzioni derivabili su un intervallo I.
Se la funzione f'g è integrabile su I
Allora anche fg' lo è e vale
$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$
Dimostrazione
Applichiamo la regola di Leibniz al prodotto f*g:
$D[f(x)g(x)]dx=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ passo all'integrale=>
$\int D[f(x)g(x)]dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$ semplifico
$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$

(74) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.
Integrazione per sostituzione:
Sia f una funzione integrabile su I e sia F una sua primitiva su I. Sia poi φ : J→I una funzione derivabile su un intervallo J a valori in I.
Allora:

$$f(\varphi(x))*\varphi'(x)$$

è integrabile in J e vale

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(y)dy=F(y)$$

Dimostrazione:
f(φ (x)) è derivabile in I e vale
integro
$\frac{d}{dx}f(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ integro
$\int f(\varphi(x))\frac{d}{dx}=\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)$
$\int f(y)dy=\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

(75) Definire le somme di Cauchy–Riemann e dare la definizione di integrale definito di una funzione limitata su un intervallo [a, b].

- Se f limitata in [a,b]
- f definita in tutti i punti di [a,b]

Per comodità supponiamo f>=0 definiamo somme di C-R come:

- si divide [a,b] in n sotto intervalli I_1, I_2, …, I_n
- $\forall\ j \in \{ 1,2,\ldots,n \}$ si sceglie un punto $t_j \in I_j$
- consideriamo la somma $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) * l(I_j)$ detta somma di C-R

Def: se $\lim_{n \to +\infty} s_n \exists \text{finito}$ e non dipende dalla scelta dei punti t_j allora f si dice integrabile secondo Cauchy-Riemann e si pone :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

ove l'integrale al primo membro si dice integrale definito di f su [a,b].

(76) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Se f è integrabile secondo C-R allora:

1) $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \le m(f; a,b) \le \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

2) se f continua in [a,b]=> la media integrale di f è un valore assunto da f cioè

$$\exists \bar{x} \in [a,b]\, t.c\, f(\bar{x}) = m(f; a,b)$$

<u>Dimostrazione 1</u>

$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \le f(x) \le \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ passo quindi all'integrale e divido per b-a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \inf_{x \in [a,b]} f(x)\, dx \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \le \frac{1}{b-a} \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} f(x)\, dx$$

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \le m(f; a,b) \le \sup_{x \in [a,b]} f(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b dx$$

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \le m(f; a,b) \le \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

<u>Dimostrazione 2</u>

f continua in [a,b]

inf f(x)=min f(x)

sup f(x)=max f(x)

Per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori compresi tra min e max quindi per dim1 assume anche il valore m(f; a,b)

(77) Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del Calcolo integrale ("secondo", sul libro di testo, quello per la funzione integrale, non solo per l'integrale definito).

Def: si dice funzione integrale di f su I la funzione

$$F_{x_0}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,, x_0\in I \text{ fissato}$$

T. fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua e localmente integrabile su I la funzione integrale di f su $F_{x_0}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,, x_0\in I \text{ fissato}$ è derivabile e vale

$$F_{x_0}'(x)=f(x)\,\forall x\in I$$

<u>Dimostrazione</u>

fissiamo $x\in I\; e\; h\in R\; t.c.\; x+h\in I$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt+\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt-\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt$$

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt=\lim_{h\to 0} m(f\,;x,x+h)$ quindi per il teorema della media integrale esiste un valore di $\bar{x}$ dell'intervallo [x, x+h] t.c. m(f; x, x+h) = f($\bar{x}$)

$$=\lim_{h\to 0} f(\bar{x}_h)=f(\lim_{h\to 0}\bar{x}_h)=f(x)$$

1° uguaglianza perché continua 2° uguaglianza per il T. dei 2 carabinieri

(78) Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del Calcolo integrale (”primo teorema fondamentale del Calcolo integrale” sul libro di testo): ”Data G primitiva di f su [a, b], risulta a f (x)dx = . . .”.

- Se f continua in [a,b]
- [a,b] $\subseteq$ I
- sia G una qualsiasi primitiva di f su I

Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazone

definiamo la funzione integrale di f su [a,b]: $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$

F_a è una primitiva di f su [a,b]
poiché G è un altra primitiva di f su [a,b] per hp:
Allora
$\exists C \in R$ t.c $F_a(x) - G(x) = C \, \forall x \in [a,b]$

- se x=a si ha:
  $F_a(x)$ – G(a) = C => C= -G(a) poiché $F_a(x)$ = 0
  => $F_a(x)$=G(x)-G(a) $\forall x \in [a,b]$
- se x=b si ha:
  $F_a(b)$=G(b)-G(a)
  => $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$

(79) Dare la definizione di integrale generalizzato su intervalli illimitati per funzioni non negative. Scrivere poi anche la definizione di integrale generalizzato su intervalli limitati per funzioni non negative.

Intervalli illimitati

Sia f continua in (a, b] e infinita per x→a+. Poniamo in questo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to a+} \int_r^b f(x)dx$$

se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su [a,b].

intervalli limitati

Sia f definita e continua sulla semiretta [a, +∞). Poniamo in questo caso

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_a^r f(x)dx$$

se il limite esiste finito si dice che f ha integrale generalizzato o improprio convergente su [a,+∞).

(80) Enunciare il criterio del confronto per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati (o limitati, a scelta).

Se vale la disuguaglianza $|f(x)| \leq g(x)$ su tutto l’intervallo di integrazione e l’integrale $\int_{\circ}^{*} g(x)dx$ converge allora converge anche $\int_{\circ}^{*} f(x)dx$

(81) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati.

Se f, g $\geq$ 0, infinite per $x\to+\infty(x\to-\infty)$ e $f \sim g$ per $x\to+\infty(x\to-\infty)$

Allora $\left(\int_{-\infty}^{a}\right)\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge <=> $\left(\int_{-\infty}^{a}\right)\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge

(82) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli limitati.

Se f, g $\geq$ 0, infinitesime per $x\to a^{+}(x\to b^{-})$ e $f \sim g$ per $x\to a^{+}$ $(x\to b^{-})$

Allora $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ converge <=> $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ converge