

## DOMANDE DI ANALISI 1

Matteo Mognato – Ing. Gestionale UNIPD

**(1) Scrivere la definizione di maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.**

Saper fornire un esempio di un insieme non limitato superiormente, di un insieme non limitato inferiormente, di un insieme limitato superiormente privo di massimo, di un insieme limitato inferiormente privo di minimo.

**Def Maggiorante:** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ , un numero  $M \in \mathbb{R}$  si dice maggiorante per  $X$  se  $M \geq x \forall x \in X$ .

**Def Minorante:** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ , un numero  $m \in \mathbb{R}$  si dice minorante per  $X$  se  $m \leq x \forall x \in X$ .

**Def massimo:** Se  $\exists$  un el.  $x_1 \in X$  /  $x_1$  è maggiorante per  $X$ ,  $x_1 \in X \Rightarrow$  allora  $x_1$  è massimo di  $X$ .

**Def minimo:** Se  $\exists$  un el.  $x_2 \in X$  /  $x_2$  è minorante per  $X$ ,  $x_2 \in X \Rightarrow$  allora  $x_2$  è minimo di  $X$ .

**Def estremo sup:** Si dice estremo sup di  $X$  il più piccolo fra i maggioranti di  $X$  se  $\exists$ .

**Def estremo inf:** Si dice estremo inf di  $X$  il più grande fra i minoranti di  $X$  se  $\exists$ .

**Esempi**

a)  $A=[0,+\infty)$  limitato inferiormente ma non superiormente.

b)  $B=(-\infty, 10)$  limitato superiormente ma non inferiormente.

c)  $C=[0, 10)$  limitato privo di massimo,  $\max C=0$ .

d)  $D=(-3,+\infty)$  limitato inferiormente ma non superiormente, non ha ne massimo ne minimo.

**(2) Scrivere la proprietà caratteristica di estremo superiore ed estremo inferiore per un insieme di numeri reali.**

**Proprietà caratteristica di  $\inf X=i$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$ :**

a)  $i \leq x \forall x \in X$

b)  $\forall r > i, r \in \mathbb{R}, \exists x \in X$  s.t.  $x < r$

**Proprietà caratteristica di  $\sup X=s$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$ :**

a)  $s \geq x \forall x \in X$

b)  $\forall s > r, r \in \mathbb{R}, \exists x \in X$  s.t.  $x > r$

**(3) Definire il fattoriale di un numero naturale e il coefficiente binomiale di due numeri naturali. Scrivere le prime righe del Triangolo di Tartaglia.**

**Def Fattoriale:** dato  $n \in \mathbb{N}$  si def. fattoriale di  $n$  il numero  $n!=n(n-1)(n-2)\dots 3*2*1$  (per def.  $0!=1$ ).

**Def coefficiente binomiale:** dati  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ , si definisce coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Triangolo di Tartaglia:**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & (0\ 0) \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

**(4) Enunciare il teorema del binomio di Newton.**

**Teorema del binomio di Newton:**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**(5) Enunciare il Principio di Induzione ed esibire un esempio di applicazione.**

Il **principio di induzione** è utilizzato per dimostrare che un predicato  $P(n)$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Proposizione  $P(n)$  è vero  $\forall n \in \mathbb{N}$  se:

a)  $P(n_0)$  è vero,  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$

b) se  $P(n)$  vera  $\Rightarrow P(n+1)$  vera

allora  $P(n)$  vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$

Esempio:

Dimostrare  $2^n \geq n+1 \forall n \in \mathbb{N}$ :

a)  $P(0) = 2^0 \geq 1$  VERA

b)  $P(n) = 2^n \geq n+1$

$P(n+1) = 2^{n+1} \geq n+2 \Rightarrow 2^n 2 \geq n+2 \Rightarrow \text{applico } P(n) \Rightarrow 2^n 2 \geq 2(n+1) \Rightarrow 2n+2 \geq n+2 \Rightarrow 2n \geq n$  VERA

Dato che entrambe le condizioni sono vere allora  $P(n)$  è vera.

**(6) Data  $f : A \rightarrow B$ , con  $X \subset A$ , scrivere la definizione dell'insieme immagine  $f(X)$ . Dato  $Y \subset B$ , scrivere la definizione dell'insieme controimmagine  $f^{-1}(Y)$ .**

**Def insieme Immagine  $f(X)$ :** si definisce immagine di  $f(X)$  il sottoinsieme di  $B$  definito da:

$$f(X) = \left\{ b \in B, \exists a \in X : b = f(a) \right\} = \left\{ b \in B : b = f(a) \text{ per qualche } a \in X \right\}$$

**Def insieme Controimmagine  $f^{-1}(Y)$ :** Sia  $Y \subset B$ , si dice controimmagine di  $Y$  secondo  $f$  il sottoinsieme di  $A$  definito da:

$$f^{-1}(Y) = \left\{ a \in A : \exists b \in Y : f(a) = b \right\}$$

**(7) Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva.**

**Def f. iniettiva:** una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:

$$\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

**Def f. suriettiva:** una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice suriettiva se  $\text{Im} f = B$ .

**Def f. biiettiva:** una f. si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

**(8) Data una funzione biiettiva, definire la funzione inversa, Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.**

Data una funzione  $f : A \rightarrow B$  biiettiva risulta definita una funzione  $g : B \rightarrow A$ .

Dato il  $\Gamma(f)$  è possibile ottenere  $\Gamma(g)$  per simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante  $y=x$ .

**(9) Definire una funzione  $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotona e strettamente monotona.**

Sia  $f : \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$

**Def monotona:**  $f$  si dice monotona se  $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$  (crescente)

$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

(decrecente)

**Def stret. monotona:**  $f$  si dice strettamente monotona ... (casi sopra senza '=' )...

**(10) Data  $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dimostrare che la stretta monotonia implica l'iniettività di una funzione. Vale anche il viceversa?**

Dimostrazione

Tesi:  $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Siano  $x_1, x_2 \in \text{dom } f, x_1 \neq x_2$  supponiamo  $x_1 < x_2$

-f strettamente crescente, allora  $f(x_1) < f(x_2)$

-f strettamente decrescente, allora  $f(x_1) > f(x_2)$

In entrambi i casi  $f(x_1) \neq f(x_2)$  c.v.d

**ATT!!** Non vale il viceversa quindi una funzione iniettiva può non essere monotona.

**(11) Definire una funzione  $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Definire una funzione  $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pari, dispari, periodica.**

**Def f. Limitata:** f si dice limitata se  $\exists m, m' \in \frac{\mathbb{R}}{m} \leq f(x) \leq m' \forall x \in \text{dom} f$  cioè se  $\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}$

**Def f. pari:** f si dice pari se  $x \in \text{dom} f \Rightarrow -x \in \text{dom} f$  e  $f(x) = f(-x)$

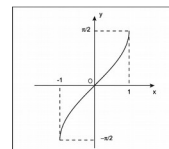
**Def f. dispari:** f si dice dispari se  $x \in \text{dom} f \Rightarrow -x \in \text{dom} f$  e  $f(x) = -f(-x)$

**Def f. periodica:** f si dice periodica di periodo T  $\forall x \in \text{dom} f$  si ha  $x+T \in \text{dom} f$  e  $f(x) = f(x+T)$  e T è il più piccolo num. Positivo per cui vale  $f(x) = f(x+T)$ .

**(12) Definire le funzioni arcseno, arcocoseno, arcotangente, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**

Innanzitutto si tratta delle funzioni trigonometriche inverse:

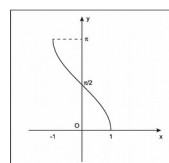
**-Arcoseno** è la funzione inversa di  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  che risulta quindi essere così definita:



$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

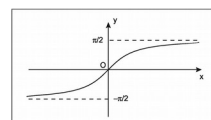
**-Arcocoseno** è la funzione inversa di  $\cos|_{[0, \pi]}$  che risulta quindi essere così definita:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$



**-Arcotangente** è la funzione inversa di  $\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$  che risulta quindi essere così definita:

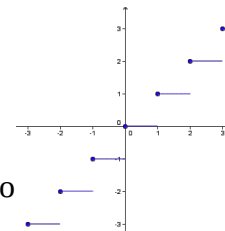
$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



**(13) Definire le funzioni parte intera e mantissa, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**

Si tratta di funzioni definite a tratti.

**-funz. parte intera** è così definita  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} [x] = \lfloor x \rfloor = \max \left\{ n \in \frac{\mathbb{Z}}{n} \leq x \right\}$



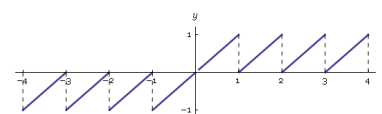
Quindi la **parte intera** di un numero reale x è il numero intero, indicato con il simbolo [x] che meglio approssima x per difetto.

**-funzione mantissa** è così definita

$$M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} M(x) = x - [x] \Rightarrow M(x) \in [0, 1) \forall x \in \mathbb{R}, M(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$$

Quindi la **mantissa** di un numero x è:

- $x > 0$  è uguale alla parte decimale
- $x < 0$  è uguale ad 1-parte decimale (presa in valore assoluto)

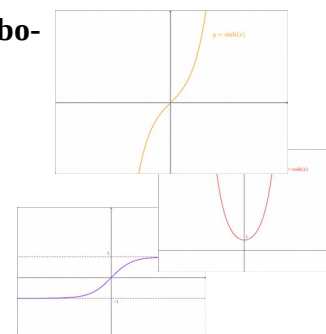


**(14) Definire le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e arcotangente iperbolica, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**

**-Seno Iperbolico(senh)** è così definito  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

**-Coseno Iperbolico(cosh)** è così definito  $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

**-Tangente Iperbolica(tgh)** è così definito  $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, x \in \mathbb{R}$



**(15) Scrivere la definizione di successione convergente e di limite finito per una successione. Fornire almeno un esempio.**

Una successione  $\{a_n\}$  si dice **convergente** quindi che  $a_n \rightarrow l$  se

$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow \forall a_n - l < \epsilon$ . Il **lim finito** per una successione è il valore a cui tende la successione per  $n \rightarrow +\infty$ .

Es.  $\{a_n\} = 1/n \rightarrow 0$  (pag. 40 quaderno dimostrazione)

**(16) Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare.**

**Esibire un esempio per tipo.**

**Succ. convergente** (guarda 15)

**Succ. divergente** la successione  $\{a_n\}$  si dice:

**-divergente(positivamente)** quindi che  $a_n = +\infty$  se  $\forall A > 0 \exists n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n > A$ ; es

**-divergente(negativamente)** quindi che  $a_n = -\infty$  se  $\forall A > 0 \exists n_A \in \mathbb{N} / n > n_A \Rightarrow a_n < -A$ ;

Es.  $n^2 \rightarrow +\infty$  (pag. 42 quaderno dimostrazione)

Una **successione**  $\{a_n\}$  è detta **irregolare** o **indeterminata** il suo limite non esiste. Es.  $(-1)^n$  vale -1 se n dispari, 1 se n pari.

**(17) Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente, allora essa è anche limitata. Dire se è vero il viceversa (in caso contrario, esibire un controesempio).**

Una succ.  $\{a_n\}$  si dice **limitata** se  $\exists m, M \in \mathbb{R} / m \leq a_n \leq M \forall n$

**Dim** Convergenza implica la limitatezza:

Per ipotesi della succ. convergente  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow \forall a_n - l < \epsilon$

se pongo  $\epsilon = 1$  allora  $\forall a_n - l < 1 \Rightarrow l - 1 < a_n < l + 1$  definitivamente vero quindi è limitata.

Il viceversa non è sempre vero ne è esempio la successione  $\{b_n\} = (-1)^n$

**(18) Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite per le successioni.**

Se  $\{A_n\}$  converge, il suo **limite è unico**.

Dim: Per assurdo supponiamo che  $\{A_n\} \rightarrow L$  e  $\{A_n\} \rightarrow L'$  per  $n \rightarrow +\infty$

Allora

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists m_\epsilon \in \mathbb{N} / n > m_\epsilon \Rightarrow |a_n - L'| < \epsilon$$

Ora

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| = |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\epsilon \quad n = \max(n, m) \\ \Rightarrow \forall \epsilon > 0 |L - L'| < 2\epsilon \Rightarrow L = L'$$

**(19) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma o del prodotto.**

Siano  $\{A_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni convergenti t.c.  $A_n \rightarrow a$  e  $B_n \rightarrow b$  per  $n \rightarrow +\infty$

Allora:  $A_n + B_n \rightarrow a + b$ ;  $A_n \cdot B_n \rightarrow a \cdot b$ ;  $A_n - B_n \rightarrow a - b$ ;  $A_n / B_n \rightarrow a / b$  con  $B_n$  e  $b \neq 0$ ;  $A_n^{B_n} \rightarrow a^b$

Dimostrazione Prodotto:  $A_n \cdot B_n \rightarrow a \cdot b$ ;

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists m_\epsilon \in \mathbb{N} / n > m_\epsilon \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon$$

Quindi

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ A_n \text{ convergente } \rightarrow A_n \leq M \text{ (n. grandissimo)} \Rightarrow \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M\epsilon + |b|\epsilon = \epsilon(M + |b|)$$

Quindi  $|a_n b_n - ab| < \epsilon \Rightarrow a_n b_n = ab$ .

**(20) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni, nelle due forme.**

1) se  $A_n \rightarrow a$  e  $a > 0$ , allora  $A_n > 0$  definitivamente (cioè da un certo indice in poi)

2) se  $A_n \rightarrow a$  e  $A_n > 0$  definitivamente, allora  $a \geq 0$

Dim

1) hp:  $A_n \rightarrow a$  e  $a > 0$  th:  $A_n > 0$  definitivamente

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

scegliamo  $\epsilon = a/2$ , allora  $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \forall n > n_\epsilon$  poichè  $a > 0$  (hp)  $\Rightarrow a_n > 0$  definitivamente  $\forall n > n_\epsilon$

2) hp:  $A_n \rightarrow a$  e  $A_n > 0$  th:  $a \geq 0$

PER ASSURDO supponiamo  $a < 0$ . Applicando quindi il punto 1) dimostrato precedentemente allora se  $A_n \rightarrow a$  e  $a < 0$  quindi  $A_n < 0$  definitivamente ma per ipotesi  $A_n > 0$  definitivamente. Ciò conduce ad un assurdo quindi  $a \geq 0$ .

**(21) Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il Teorema sul limite delle successioni monotone.**

Una successione si dirà  $\{a_n\}$  si dirà: monotona crescente se  $a_n \leq a_{n+1}$ ; strettamente crescente

$a_n < a_{n+1}$ , monotona decrescente  $a_n \geq a_{n+1}$ ; strettamente decrescente  $a_n > a_{n+1}$ ,  $\forall n$  nel dominio della successione.

Teorema sul limite delle successioni monotone:

1. Sia  $\{a_n\}$  una succ. monotona crescente se

a1)  $\{a_n\}$  sup. limitata,  $a_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$

b1)  $\{a_n\}$  NON sup. limitata,  $a_n \rightarrow l$  ove  $l = \sup \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$

2. Sia  $\{a_n\}$  una succ. monotona decrescente se

a2)  $\{a_n\}$  NON è inf. limitata,  $a_n \rightarrow -\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$

b2)  $\{a_n\}$  inf. limitata,  $a_n \rightarrow l'$  ove  $l' = \inf \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$

Dimostrazione

a1) Se  $\{a_n\}$  è superiormente limitata si dimostra con l'enunciato contenuto nel teorema di monotonia:

$$\text{th: } a_n \rightarrow l \text{ cioè } \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \Rightarrow \sup a_n - \epsilon < a_n < \sup a_n + \epsilon$$

Da dimostrare  $\sup a_n - \epsilon < a_n$   
Sempre vera  $\sup a_n$  maggiorante di  $a_n$

Utilizzando la proprietà caratteristica di sup:  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / \sup a_n - \epsilon < a_{n_\epsilon}$

Osservo che la successione è monotona crescente per ipotesi quindi  $a_n > a_{n_\epsilon} \forall n > n_\epsilon$

quindi posso dire  $\sup a_n - \epsilon < a_n$

Si è quindi provato che  $a_n \rightarrow \sup a_n$  quindi  $a_n \rightarrow l$  ove  $l = \sup \{a_n : n \in \text{domf} \{a_n\}\}$  quindi la successione è superiormente limitata.

b1) Se invece  $\{a_n\}$  è sup illimitata, allora  $\forall A > 0 \exists n_A \in \mathbb{N} / a_{n_A} > A$  poichè  $\{a_n\}$  è monotona crescente allora  $a_n \geq a_{n_A} \geq A$  quindi  $a_n \rightarrow +\infty$ .

**(22) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per successioni.**

Se  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  soddisfano  $a_n \leq b_n \leq c_n$  per ogni  $n > N$  e  $a_n \rightarrow l$  e  $c_n \rightarrow l$  Allora  $b_n \rightarrow l$

Dimostrazione

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  su ha  $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$  ;  $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$

Allora  $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon \quad \forall n > N = \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$

Quindi  $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \Rightarrow |b_n - l| < \varepsilon \Rightarrow b_n \rightarrow l$

**(23) Definire la successione geometrica e discuterne le proprietà di convergenza al variare della ragione.**

Si definisce successione geometrica la successione  $a_n = q^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

- se  $q > 1$  la successione è monotona crescente e non limitata sup.  $\Rightarrow q^n \rightarrow +\infty$
- se  $q = 1$ ,  $q^n = 1$
- se  $q < 0$  la succ. non è monotona
- se  $0 \leq q < 1$  la successione è monotona decrescente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

**(24) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ("algebra degli infiniti"). Fare esempi di forme indeterminate.**

Date 2 successioni  $a_n, b_n$  delle quali una o entrambe sono divergenti possiamo avere le seguenti regole:

$$a + \infty = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

(il segno è da determinare a seconda del segno degli infiniti, infinitesimi)

$$a \cdot \infty = \infty$$

$$a/0 = \infty$$

$$a/\infty = 0$$

Sono forme indeterminate  $\infty - \infty$ ;  $0 \cdot \infty$ ;  $0/0$ ;  $\infty/\infty$ ;

Esempio F.I.  $n^4/n^2$  per  $n \rightarrow +\infty$  è F.I.  $\infty/\infty$

**(25) Definire il numero e di Nepero.**

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n$$

**(26) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.**

Sia  $\{a_n\}$  una succ. positiva e sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n = l$  si hanno 3 casi:

1.  $l < 1$ ,  $a_n \rightarrow 0$
2.  $l > 1$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$
3.  $l = 1$  non si può concludere

Dimostrazione

1. th:  $a_n \rightarrow 0$

Sia  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1$  allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon < 1$  devo dimostrare

che  $\rightarrow 0$  quindi minore di qualcosa che converge a 0 considero quindi il secondo membro si ha quindi:

$$a_{n0+1} < (1+\varepsilon)a_{n0}$$

$$a_{n0+2} < (1+\varepsilon)a_{n1} = (1+\varepsilon) * [(1+\varepsilon)a_{n0}] = (1+\varepsilon)^2 a_{n0}$$

...

$$a_{n0+k} < (1+\varepsilon)^k a_{n0} \quad \text{poiché } 1+\varepsilon < 1 \text{ successione geometrica di ragione } < 1 \text{ quindi } a_{n0+k} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

Dim 2

th:  $a_n \rightarrow +\infty$

Sia  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$  allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} / n > n_1 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon$  si ha quindi:

$$a_{n1+1} < (1-\varepsilon)a_{n1}$$

$$a_{n1+2} < (1-\varepsilon)a_{n2} = (1-\varepsilon) * [(1-\varepsilon)a_{n1}] = (1-\varepsilon)^2 a_{n1}$$

...

$$a_{nk+1} < (1-\varepsilon)^k a_{n1} \quad \text{poiché } 1-\varepsilon > 1 \text{ successione geometrica di ragione } > 1 \text{ quindi } (1-\varepsilon)^k \rightarrow +\infty \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

$$a_n \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

**(27) Scrivere la definizione di successioni asintotiche ed enunciarne le principali proprietà; dimostrare poi almeno una di queste proprietà (a scelta).**

Def: 2 successioni  $\{a_n\}, \{b_n\}$  si dicono assintotiche se  $a_n/b_n \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Proprietà:

1) Se  $a_n \sim b_n$  allora  $\{a_n\}, \{b_n\}$  hanno le stesse caratteristiche

a) se  $a_n \rightarrow l$  anche  $b_n \rightarrow l$

b) se  $a_n$  diverge anche  $b_n$  diverge

c) se  $a_n$  non ha limite anche  $b_n$  non ha limite

2) Se  $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

3) Se  $a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n \Rightarrow a_n b_n / c_n = a'_n b'_n / c'_n$

Dimostrazione 1c)

hp:  $a_n$  non ha limite th:  $b_n$  non ha limite

Per ASSURDO sia  $b_n \rightarrow l \text{ (o } \infty)$

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} * b_n \Rightarrow a_n \rightarrow l \text{ o } \infty \quad \text{ma per ipotesi } a_n \text{ non ha limite ciò porta ad un assurdo quindi anche } b_n$$

non avrà limite.

**(28) Fissato  $c \in \mathbb{R}$ , scrivere la definizione successionale di limite di funzione per  $x \rightarrow c$ . Scrivere la definizione topologica di limite di funzione per  $x \rightarrow c$ .**

Def Successionale di limite:

Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $c$  un p.to di tale intervallo e la funzione  $f$  definita in  $I$  tranne al più  $c$

Si dice che  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \text{ (} l \in \mathbb{R} \text{ o } +\infty \text{)} \text{ se } \forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \rightarrow c, x_n \neq c \forall n \text{ si ha } f(x_n) \rightarrow l$

Def Topologica di limite:

Dato  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in I_{\delta(x_0)} \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

(29) Scrivere la definizione topologica di  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \pi$  indicando esplicitamente gli intornoi.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\} \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

(30) Scrivere la definizione topologica di  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$  indicando esplicitamente gli intornoi.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 / x \in (-\infty, -M) \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$$

(31) Scrivere la definizione topologica di  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = +\infty$  indicando esplicitamente gli intornoi.

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{7\} \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) > A$$

(32) Scrivere la definizione di limite destro e sinistro per funzioni. (Facoltativo: dare qualche esempio)

Sia  $c \in \mathbb{R}$  e  $l \in \mathbb{R}$ , si dice che il limite destro (sinistro) di  $f(x)$  per  $x \rightarrow c$  è  $l$ , e si scrive  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$  ( $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ ) se  $\forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \rightarrow c, x_n > c$  ( $x_n < c$ ) definitivamente si ha  $f(x_n) \rightarrow l$

DESTRO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$$

SINISTRO

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty \text{ mentre } \lim_{x \rightarrow 0} 1/x \text{ NON esiste!}$$

(33) Scrivere la definizione di funzione continua in un punto. Classificare le possibili discontinuità

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I$  intervallo,  $c \in I$  si dice che  $f$  è continua in  $c$  se  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Discontinuità:

- 1) Si dice che  $f$  ha discontinuità eliminabile in  $x=c$  se per  $x \rightarrow c$   $f(x) \rightarrow l$  ma  $l \neq f(c)$
- 2) Si dice che  $f$  ha una discontinuità di 1° specie in  $x=c$  se esistono finiti i limiti  $s_x$  e  $d_x$  per  $x \rightarrow c$  ma sono diversi tra loro (salto).
- 3) si dice che  $f$  presenta una discontinuità di 2° specie quando almeno uno dei due limiti non esiste o diverge.

(34) Enunciare il Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni e per funzioni continue in un punto.

**Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni**

1) se  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow c$  e  $l > 0$  allora  $\exists$  un intorno bucato  $I$  di  $c$  /  $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$

2) se  $f(x) > 0$  in un intorno bucato  $I$  di  $c$  e  $f(x) \rightarrow l$  allora  $l \geq 0 \quad \forall x \in I$

**Teorema della permanenza del segno per funzioni continue in un punto**

Se  $f$  continua in  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f(x_0) > 0$  allora  $\exists$  un intorno bucato  $I$  di  $x_0$  /  $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$

(35) Enunciare il Teorema del confronto per limiti di funzione.

hp:  $f, g, h$  definite in un intorno di  $x_0$ , tranne al più  $x_0$

Se

$$1) f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I \text{ I intorno bucato in } c$$

$$2) f(x) \rightarrow l \text{ e } h(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow c$$

Allora

$$g(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow c$$

(36) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per funzioni. Enunciare il teorema sull'algebra delle funzioni continue.

Se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$ , allora

$$1) f \pm g \text{ è continua in } x_0$$

$$2) f \cdot g \text{ è continua in } x_0$$

$$3) f/g \text{ è continua in } x_0, \text{ purché } g(x_0) \neq 0$$



**(37) Enunciare e dimostrare il teorema di cambiamento di variabile nei limiti (detto anche teorema sul limite di funzione composta).**

**TEOREMA DI CAMBIO DI VARIABILE nei Limiti**

**1° CASO**

Siano  $f, g$  due funzioni definite in modo che la  $f$  composta  $f \circ g$  sia def in un intorno di  $x_0$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq \pm \infty$ ).

Se:

- ①  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ )
- ②  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  (FINITO o INFINITO)

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(t_0)$$

**Dim**

th:  $\forall \{x_n\} \subseteq \text{dom } f \circ g$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0 \forall n$ , si ha  $f(g(x_n)) \rightarrow l$

Per hp ①,  $g(x_n) \rightarrow t_0$

Per hp ②,  $f$  continua in  $t_0$ , cioè  $\forall y_n \rightarrow t_0$ ,  $f(y_n) \rightarrow f(t_0)$

Allora si sceglie  $y_n = g(x_n)$

avremo  $f(g(x_n)) \rightarrow f(t_0)$  ■

**2° CASO**

Siano  $f, g$  due funzioni definite in modo che la  $f$  composta  $f \circ g$  sia def in un intorno di  $x_0$ .

Se:

- ①  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ )
- ②  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  ( $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ )
- ③  $g(x) \neq t_0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$  cioè in un intorno di  $x_0$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

**Dim**

th:  $\forall \{x_n\} \subseteq \text{dom } f \circ g$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$  si ha  $f(g(x_n)) \rightarrow l$

per hp ①,  $g(x_n) \rightarrow t_0$

per hp ②,  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  cioè che  $\forall \{t_n\}$ ,  $t_n \rightarrow t_0$ ,  $f(t_n) \rightarrow l$  e  $t_n \neq t_0$

Allora, scegliendo come  $\{t_n\}$  la successione  $\{g(x_n)\}$  si ha:

$$g(x_n) \rightarrow t_0, g(x_n) \neq t_0 \Rightarrow f(g(x_n)) \rightarrow l \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

ossia all'hp ③  $g(x_n) \neq t_0$  avio quindi la th. ■

**(38) Dimostrare che  $\sin x/x = 1$  per  $x \rightarrow 0$  e i suoi corollari**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Dim** basta considerare  $x > 0$  e  $x$  piccolo ( $x < \frac{\pi}{2}$ )

Se  $x < 0$ ,  $x = -y$ ,  $y > 0$  a R.A.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

Assumiamo quindi che  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Osservo che  $\mathcal{A}(\widehat{OPA}) \leq \mathcal{A}(\widehat{OPA}) \leq \mathcal{A}(\widehat{O^*PA})$

Calcolo:

$$\mathcal{A}(\widehat{OPA}) = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{(1 - \cos x)(\sin x)}{2}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \sin x - \sin x \cos x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

$\mathcal{A}(\widehat{O^*PA}) \Rightarrow \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \pi R = \mathcal{A}(\widehat{O^*PA}) \cdot x$

$R = 1$

$$\pi \cdot \frac{1}{2} \pi = \mathcal{A}(\widehat{O^*PA}) \cdot x$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{O^*PA}) = \frac{\pi^2}{2x} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x}$$

$\mathcal{A}(\widehat{O^*PA}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x}$

Valle quindi  $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x}$

$$\Rightarrow \sin x \leq x \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
 ■

**Corollario**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Dim**

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left[ 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} \right] = \frac{1}{2}$$

**(39) Date due funzioni definite in un intorno di  $c$ , tranne al più in  $c$ , definire i tre simboli**

**$f = O(g)$ ,  $f = o(g)$  e  $f \sim g$  per  $x \rightarrow c$ .**

**Definire la parte principale di una funzione finita o infinitesima per  $x \rightarrow c$ .**

Siano  $f$  e  $g$  definite in un intorno di  $c$ , tranne al più  $c$  ( $c = x_0, x_0^+, x_0^-, \pm \infty$ ). Inoltre sia  $g(x) \neq 0$  per  $x \rightarrow c$  t.c.  $f(x)/g(x) \rightarrow l$  (finito o infinito) per  $x \rightarrow c$ . Allora

- se  $l < +\infty$ , si dice che  $f$  è controllata da  $g$  per  $x \rightarrow c$   $f = O(g)$
- se  $l = 0$ , si dice che  $f$  è trascurabile rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow c$   $f = o(g)$
- se  $l = 1$ , si dice che  $f$  e  $g$  sono asintotiche  $f \sim g$



## Parte principale

### INFINITO

Sia  $g(x)$  un infinito (o infinitesimo) di ordine  $n$  per  $x \rightarrow x_0$ , rispetto ad un infinito (o infinitesimo) principale  $f(x)$ . Avendosi di conseguenza<sup>3</sup>:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} = L \neq 0$$

con  $L$  finito e non nullo, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = 0$$

Da ciò vediamo che la funzione

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L$$

che si trova sotto l'operazione di limite, è infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$ . Di conseguenza, in un piccolo intorno di  $x_0$ , la funzione  $h(x)$  assume valori prossimi a zero, e pertanto, possiamo scrivere:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = \alpha(x)$$

ove la funzione  $\alpha(x)$  è infinitesimo, per  $x \rightarrow x_0$ . Si ha allora:

$$g(x) = L \cdot f^n(x) + \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

<sup>3</sup>Nel confronto degli infinitesimi o degli infiniti, se si deve calcolare la parte principale e complementare, conviene mettere  $g(x)$  a numeratore nel calcolo del limite.

### Il termine

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x)$$

è detto *Parte principale dell'infinito (o infinitesimo)  $g(x)$* , mentre il termine

$$p_c(x) = \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

è la sua *parte complementare*.

Il significato della parte principale è il seguente: in un piccolo intorno di  $x_0$ , la funzione  $p_p(x)$  approssima, a meno di un piccolo errore, la funzione  $g(x)$ . L'errore commesso è dato dalla parte complementare, che risulta funzione del punto  $x$ .

Ad esempio, sia

$$g(x) = 2 \sin(x)$$

Questa funzione è infinitesima, per  $x \rightarrow 0$ . Prendiamo come infinitesimo principale l'infinitesimo campione  $f(x) = x$ . Avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

possiamo dire che  $g(x)$  è infinitesimo di ordine uno rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi poi  $L = 2$ , possiamo calcolare la parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f(x) = 2x$$

Ciò significa che, nell'intorno del punto  $x_0 = 0$ , la funzione  $2 \sin x$  può essere approssimata dalla sua parte principale (a meno di un errore, dato dalla sua parte complementare, infinitesimo per  $x \rightarrow x_0 = 0$ ). Il significato della parte principale è

## (40) Dimostrare limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo

Consideriamo ora  
 $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$   
 dom  $h = \{x \in \text{dom}(1 + \frac{1}{x}) : 1 + \frac{1}{x} > 0\}$   
 $= \{x \neq 0 : 1 + \frac{1}{x} > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$   
 è quindi possibile considerare il  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x)$  che è vale:  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  deriva dal fatto che  $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \rightarrow e$   
 $\forall$  succ.  $\{a_n\}$  divergente a  $\pm\infty$

**Corollario**  
 1)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  dimostrazione:  $x = \frac{1}{t}$   
 2)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$  sostituzione  $\frac{x}{a} = t$

**PROPOSIZIONE**  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log e = 1$

## (41) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri. Discutere se tale teorema si può estendere al caso di una funzione continua su tutto l'asse reale (ed eventualmente formulare un enunciato valido in questo caso).

### T. di ESISTENZA degli ZERI

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C([a, b])$ , t.c.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Allora

$\exists x_0 \in (a, b)$  t.c.  $f(x_0) = 0$

Se non può  $f$  è strettamente monotona tale zero è unico.

Dim

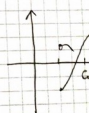
Supponiamo  $f(a) < 0 < f(b)$

Possiamo

$a_0 = a$

$b_0 = b$

e  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  (p.to medio di  $[a, b]$ )



Considero  $f(c_0)$   $\begin{cases} > 0 & \text{allungo lo zero sulla} \\ & \text{mezza a sinistra} \\ < 0 & \text{allungo lo zero sulla} \\ & \text{mezza a destra} \\ = 0 & \text{FINE (c_0 è uno zero)} \end{cases}$

Se non ho trovato lo zero esatto quindi e considero il nuovo intervallo e così via fino a che non ottengo a trovare  $f(c_0) = 0$

Quando si ferma dopo un numero finito di passi perché  $f(a_n) = 0$  oppure costruiamo una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$  t.c.

- 1)  $f(a_n) < 0$  e  $f(b_n) > 0 \quad \forall n$
- 2)  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$
- 3)  $l([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali punti e processi dimostrabili per induzione)

Osservo che

$\bullet f(a_n)$  è monotona crescente e  $a_n \leq b \quad \forall n$

$\bullet f(b_n)$  è monotona decrescente e  $b_n \geq a \quad \forall n$

$\Rightarrow$  Per le T. delle successioni MONOTONE

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0^+ \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0^-$

Vale anche

$$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

Quindi  $x_0^+ = x_0^-$

Ora in più indichiamo quindi  $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

$$(*) \quad f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \quad \text{T. continuità (valori nel limiti di succ. f.)}$$

$$(**) \quad f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \quad \text{cont.}$$

Considero  $f(c_0)$   $\begin{cases} > 0 & \text{allungo lo zero sulla} \\ & \text{mezza a sinistra} \\ < 0 & \text{allungo lo zero sulla} \\ & \text{mezza a destra} \\ = 0 & \text{FINE (c_0 è uno zero)} \end{cases}$

Se non ho trovato lo zero esatto quindi e considero il nuovo intervallo e così via fino a che non ottengo a trovare  $f(c_0) = 0$

Quando si ferma dopo un numero finito di passi perché  $f(a_n) = 0$  oppure costruiamo una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$  t.c.

- 1)  $f(a_n) < 0$  e  $f(b_n) > 0 \quad \forall n$
- 2)  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$
- 3)  $l([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali punti e processi dimostrabili per induzione)

Osservo che

$\bullet f(a_n)$  è monotona crescente e  $a_n \leq b \quad \forall n$

$\bullet f(b_n)$  è monotona decrescente e  $b_n \geq a \quad \forall n$

$\Rightarrow$  Per le T. delle successioni MONOTONE

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0^+ \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0^-$

Vale anche

$$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

Quindi  $x_0^+ = x_0^-$

Ora in più indichiamo quindi  $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

$$(*) \quad f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \quad \text{T. continuità (valori nel limiti di succ. f.)}$$

$$(**) \quad f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \quad \text{cont.}$$