# DOMANDE DI ANALISI 1

*Matteo Mognato – Ing. Gestionale UNIPD*

**(1) Scrivere la definizione di maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.**
**Saper fornire un esempio di un insieme non limitato superiormente, di un insieme non limitato inferiormente, di un insieme limitato superiormente privo di massimo, di un insieme limitato inferiormente privo di minimo.**

Def Maggiorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante per X se $M \geq x \forall \ x \ \in \mathbb{R}$.
Def Minorante: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante per X se $m \leqslant x \ \ \forall \ x \ \in \mathbb{R}$.
Def massimo: Se $\exists$ un el.$x1 \in \mathbb{R} \ / x\,1 è maggiorante per X, x1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ allora x1 è massimo di X.
Def minimo: Se $\exists$ un el.$x2 \in \mathbb{R} \ / x\,2 è minorante per X, x2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ allora x1 è minimo di X.
Def estremo sup: Si dice estremo sup di X il più piccolo fra i maggioranti di X se $\exists$.
Def estremo inf: Si dice estremo inf di X il più grande fra i minoranti di X se $\exists$.

Esempi
a) A=[0,+∞) limitato inferiormente ma non superiormente.
b) B=(-∞, 10) limitato superiormente ma non inferiormente.
c) C=[0, 10) limitato privo di massimo, minC=0.
d) D=(-3,+∞) limitato inferiormente ma non superiormente, non ha ne massimo ne minimo.

**(2) Scrivere la proprietà caratteristica di estremo superiore ed estremo inferiore per un insieme di numeri reali.**

Proprietà caratteristica di infX=i, $X \subseteq \mathbb{R}$:

a) $i \leqslant x \quad \forall \ x \ \in X$

b) $\forall \ r > i, r \in \mathbb{R}, \exists \ x \ \in \frac{X}{x} < r$

Proprietà caratteristica di supX=s, $X \subseteq \mathbb{R}$:

a) $s \geq x \forall \ x \ \in X$

b) $\forall \ s > r, r \in \mathbb{R}, \exists \ x \ \in \frac{X}{x} > r$

**(3) Definire il fattoriale di un numero naturale e il coefficiente binomiale di due numeri naturali. Scrivere le prime righe del Triangolo di Tartaglia.**

Def Fattoriale: dato $n \in \mathbb{N}$ si def. fattoriale di n il numero n!=n(n-1)(n-2)…3*2*1 (per def. 0!=1).

Def coefficiente binomiale: dati $k, n \in \mathbb{N}, \ k \ \leq n$, si definisce coefficiente binomiale $(n k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Triangolo di Tartaglia:

| | | |
|---|---|---|
| (0 0) | | 1 |
| (1 0) (1 1) | | 1 1 |
| (2 0) (2 1) (2 2) | → | 1 2 1 |
| (3 0) (3 1) (3 2) (3 3) | | 1 3 3 1 |
| | | 1 4 6 4 1 |

**(4) Enunciare il teorema del binomio di Newton.**

Teorema del binomio di Newton:

$$a, b \in \mathbb{R} \ \forall \ n \ \in \mathbb{N} vale : (a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} a^{n-2} b^2 \ldots = \sum_{k=0}^{n} (n k) a^{n-k} b^k$$

**(5) Enunciare il Principio di Induzione ed esibire un esempio di applicazione.**

Il principio di induzione è utilizzato per dimostrare che un predicato P(n) è vero $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
Proposizione P(n) è vero $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se:

a) P(n0) è vero, $n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0$

b) se P(n) vera ⇒P(n+1) vera

allora P(n) vera $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0$

Esempio:

Dimostrare $2^n \geq n+1 \forall\ n \in \mathbb{N}$ :

a) $P(0)=2^0 \geq 1 VERA$

b) $P(n)=2^n \geq n+1$

$P(n+1)=2^{n+1} \geq n+2 \Rightarrow 2^n 2 \geq n+2 \Rightarrow applicoP\ (n\ )2^n 2 \geq 2(n+1) \Rightarrow 2n+2 \geq n+2 \Rightarrow 2n \geq nVERA$

Dato che entrambe le condizioni sono vere allora P(n) è vera.

**(6) Data F : A → B, con X ⊂ A, scrivere la definizione dell'insieme immagine f (A). Dato Y ⊂ B, scrivere la definizione dell'insieme controimmagine f −1 (B).**

Def insieme Immagine f(A): si definisce immagine di f(A) il sottoinsieme di B definito da:

$$f(a)=\left\{b \in B\ ,\ \exists\ a \in \frac{A}{b}=f(a)\right\}=\left\{b \in \frac{B}{b}=f(a) perqualchea \in A\right\}$$

Def insieme Controimmagine f-1(B): Sia Y ⊂ B, si dice controimmagine di Y secondo f il sottoinsieme di A definito da:

$$f'(Y)=\left\{a \in A : \exists\ b \in \frac{Y}{f}(a)=b\right\}$$

**(7) Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva.**

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:
$\forall\ a,\ a' \in A,\ a \neq a'\ si\ \ ha: f(a) \neq f(a')$

Def f. suriettiva: una funzione f: A→B si dice suriettiva se Imf=B.

Def f. biiettiva: una f. si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

**(8) Data una funzione biiettiva, definire la funzione inversa, Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.**

Data una funzione f: A→ B biiettiva risulta definita una funzione g: B→ A.

Dato il Γ(f) è possibile ottenere Γ(g) per simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3° quadrante y=x.

**(8b) Scrivere la definizione di funzione iniettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa, data una funzione invertibile. Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.**

Def f. iniettiva: una f. si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti cioè se:
$\forall\ a,\ a' \in A,\ a \neq a'\ si\ \ ha: f(a) \neq f(a')$.

Sia f: A→ B bigettiva allora è sia suriettiva che iniettiva risulta quindi definita una funzione g su B perché ad ogni elemento $b \in B$ corrisponde un unico elemento $a \in A / f(a)=b$ . Tale funzione g si dice funzione inversa di f e si denota con $f^{-1}$ il suo dominio è B e il codomio è A. Inoltre se una funzione è biiettiva anche la sua inversa è biiettiva. Dato il grafico di una funzione invertibile il grafico della sua inversa si disegna come la simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante y=x.

**(9) Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R monotona e strettamente monotona.**

Sia f: domf $f : domf \subseteq \mathbb{R}$

Def monotona: f si dice monotona se $\forall\, x_1, x_2 \in domf \;, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x2)$ (crescente)

$\forall\, x_1, x_2 \in domf \;, x_1 < x_2 \Rightarrow f\,|x_1| \ge f(x_2)$(decrescente)

Def stret. monotona: f si dice strettamente monotona ...(casi sopra senza '=')…

**(10) Data f : dom f ⊂ R → R, dimostrare che la stretta monotonia implica l'iniettività di una funzione. Vale anche il viceversa?**

Dimostrazione

Tesi: $\forall\, x_1, x_2 \in domf \;, x_1 \ne x_2\, si\, ha\, f(x_1) \ne f(x_2)$

Siano $x_1, x_2 \in domf \;, x_1 \ne x_2$ supponiamo x1<x2

-f strettamente crescente, allora f(x1) < f(x2)

-f strettamente decrescente, allora f(x1) > f(x2)

In entrambi i casi $f(x_1) \ne f(x_2)$c.v.d

ATT!! Non vale il viceversa quindi una funzione iniettiva può non essere monotona.

**(11) Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R limitata. Definire una funzione f : dom f ⊂ R → R pari, dispari, periodica.**

Def f. Limitata: f si dice limitata se $\exists\, m, m' \in \frac{\mathbb{R}}{m} \le f(x) \le m' \,\forall\, x \in domf$ cioè se $Imf \subseteq \mathbb{R}$

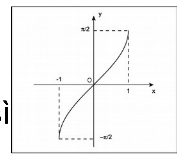
Def f. pari: f si dice pari se $x \in domf \Rightarrow -x \in domf\, e\, f(x) = f(-x)$

Def f. dispari: f si dice dispari se $x \in domf \Rightarrow -x \in domf\, e\, f(x) = -f(-x)$

Def f. periodica: f si dice periodica di periodo T $\forall\, x \in domf\, si\, ha\, x + T \in domf\, e\, f(x) = f(x+T)$ e T è il più piccolo num. Positivo per cui vale f(x)=f(x+T).

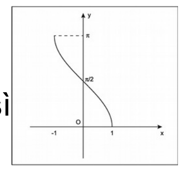
**(12) Definire le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**

Innanzitutto si tratta delle funzioni trigonometriche inverse:



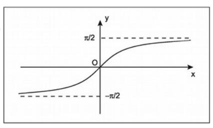
-Arcoseno è la funzione inversa di $sen_{|\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ che risulta quindi essere così definita:

arcsen: $[-1,1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



-Arcocoseno è la funzione inversa di $\cos_{|[0,\pi]}$che risulta quindi essere così definita:

arccos: $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$.

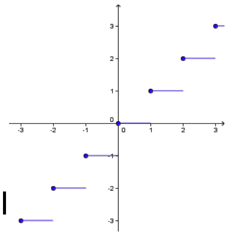


-Arcotangente è la funzione inversa di $tg_{|\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$che risulta quindi essere così definita:

arctg: $\mathbb{R} \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

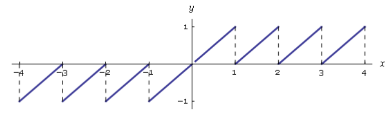
**(13) Definire le funzioni parte intera e mantissa, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**

Si tratta di funzioni definite a tratti.



-funz. parte intera è così definita $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,[x]=\lfloor x \rfloor = max\left\{n \in \frac{\mathbb{Z}}{n} \leq x\right\}$

Quindi la **parte intera** di un numero reale $x$ è il numero intero, indicato con il simbolo $[x]$ che meglio approssima $x$ per difetto.



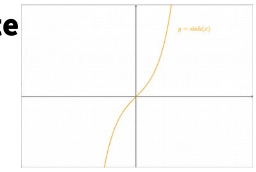
-funzione mantissa è così definita

$M:\mathbb{R} \to \mathbb{R}M(x)=x-[x] \Rightarrow M(x) \in ¿\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ M(n)=0 \forall\ n \in \mathbb{Z}$

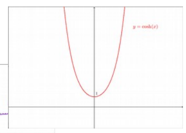
Quindi la **mantissa** di un numero x è:

- x>0 è uguale alla parte decimale
- x<0 è uguale ad 1-parte decimale (presa in valore assoluto)

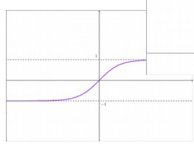
**(14) Definire le funzioni seno iperbolico, coseno iperbolico e arcotangente iperbo-
lica, indicando il dominio, l'immagine e il grafico per ciascuna di esse.**



-Seno Iperbolico(senh) è così definito $senh:\mathbb{R} \to \mathbb{R} senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$



-Coseno Iperbolico(cosh) è così definito $\cosh:\mathbb{R} \to ¿coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$



-Tangente Iperbolica(tgh) è così definito $tgh:\mathbb{R} \to (-1,1) senhx = \frac{senhx}{coshx}, x \in \mathbb{R}$

**(15) Scrivere la definizione di successione convergente e di limite finito per una successione. Fornire almeno un esempio.**

Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente quindi che $a_n = l$se

$\forall\ \epsilon > 0 \exists\ n_\epsilon \in \frac{\mathbb{N}}{n_\epsilon} > n \Rightarrow \vee a_n - l \vee ¿ \epsilon$. Il lim finito per una successione è il valore a cui tende la successione per $n \to +\infty$.

Es. $\{a_n\}=1/n \to 0$ *(pag. 40 quaderno dimostrazione)*

**(16) Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare. Esibire un esempio per tipo.**

Succ. convergente (guarda 15)

Succ. divergente la successione $\{a_n\}$ si dice:

-divergente(positivamente) quindi che $a_n = +\infty$se $\forall\ A > 0 \exists\ n_A \in \frac{\mathbb{N}}{n} > n_A \Rightarrow a_n > A$; es

-divergente(negativamente) quindi che $a_n = -\infty$se $\forall\ A > 0 \exists\ n_A \in \frac{\mathbb{N}}{n} < n_A \Rightarrow a_n < -A$;

Es. $n^2 \to$ +infinito (pag. 42 quaderno dimostrazione)

Una successione $\{a_n\}$ è detta irregolare o indeterminata il suo limite non esiste. Es. $(-1)^n$

vale -1 se n dispari, 1 se n pari.

**(17) Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente, allora essa è anche limitata. Dire se è vero il viceversa (in caso contrario, esibire un controesempio).**

Una succ. $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists\ m\ ,M\in\frac{\mathbb{R}}{m}\le a_n\le M\ \forall\ n$

Dim Convergenza implica la limitatezza:

Per ipotesi della succ. convergente $\forall\ \epsilon\ >0\ \exists\ n\ _\epsilon\in\frac{\mathbb{N}}{n\ _\epsilon}>n\Rightarrow\vee a_n-l\vee ¿\epsilon$

se pongo $\epsilon=1\ allora\vee a_n-l\vee ¿1\Rightarrow l\ \ -1<a_n<l+1$ definitivamente vero quindi è limitata.

Il viceversa non è sempre vero ne è esempio la successione $\{b_n\}=(-1)^n$

**(18) Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite per le successioni.**

Se $\{A_n\}$ converge, il suo limite è unico.

Dim: Per assurdo supponiamo che $\{A_n\}\rightarrow L$ e $\{A_n\}\rightarrow L'$ per n→ +infinito

Allora

$\forall\epsilon>0\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}/n>n_\epsilon\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon$

$\forall\epsilon>0\exists m_\epsilon\in\mathbb{N}/n>m_\epsilon\Rightarrow|a_n-L'|<\epsilon$

Ora

$|L-L'|=|L-a_n+a_n-L'|\le|L-a_n|+|a_n-L'|=|a_n-L|+|a_n-L'|<2\epsilon$ n=max(n, m)

$\Rightarrow\forall\epsilon>0|L-L'|<2*\epsilon\Rightarrow L=L'$

**(19) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma o del prodotto.**

Siano $\{A_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti t.c. $A_n\rightarrow a$ e $B_n\rightarrow b$ per n→ +∞

Allora: $A_n+B_n\rightarrow a+b$; $A_n*B_n\rightarrow a*b$; $A_n-B_n\rightarrow a-b$; $A_n/B_n\rightarrow a/b$ con $B_n$ e b != 0 ; $A_n^{B_n}\rightarrow a^b$

Dimostrazione Prodotto: $A_n*B_n\rightarrow a*b$;

$\forall\epsilon>0\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}/n>n_\epsilon\Rightarrow|a_n-a|<\epsilon$

$\forall\epsilon>0\exists m_\epsilon\in\mathbb{N}/n>m_\epsilon\Rightarrow|b_n-b|<\epsilon$

Quindi

$|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|=|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)|\le|a_n(b_n-b)|+|b(a_n-a)|=|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|$

$A_n$ convergente -> $A_n\le M$ (n. grandissimo)

$\Rightarrow\le M|b_n-b|+|b||a_n-a|<M\epsilon+|b|\epsilon=\epsilon(M+|b|)$

Quindi $|a_nb_n-ab|<\epsilon\Rightarrow a_nb_n=ab$ .

**(20) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni, nelle due forme.**

1) se $A_n\rightarrow a$ e a>0 , allora $A_n>0$ definitivamente (cioè da un certo indice in poi)

2) se $A_n\rightarrow a$ e $A_n>0$ definitivamente, allora $a\ge0$

Dim

1) hp: $A_n\rightarrow a$ e a>0 th: $A_n>0$ definitivamente

$\Rightarrow\forall\epsilon>0\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}/n>n_\epsilon\Rightarrow|a_n-a|<\epsilon\Rightarrow a-\epsilon<a_n<\epsilon+a$

scegliamo ε=a/2, allora $\frac{a}{2}<a_n<\frac{3}{2}a\,\forall\, n>n_\epsilon\, poichè\, a>0(hp)\Rightarrow a_n>0\, definitivamente\,\forall\, n>n_\epsilon$

2) hp: $A_n \to a$ e $A_n > 0$ th: a≥0

PER ASSURDO supponiamo a < 0. Applicando quindi il punto 1) dimostrato precedentemente allora se $A_n \to a$ e a<0 quindi $A_n$ <0 definitivamente ma per ipotesi $A_n$ >0 definitivamente. Ciò conduce ad un assurdo quindi a ≥ 0.

**(21) Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il Teorema sul limite delle successioni monotone.**

Una successione si dirà $\{a_n\}$ si dirà: monotona crescente se $a_n \le a_{n+1}$ ; strettamente crescente $a_n < a_{n+1}$, monotona decrescente $a_n \ge a_{n+1}$ ; strettamente crescente $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$ nel dominio della successione.

Teorema sul limite delle successioni monotone:

1. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona crescente se
   - a1) $\{a_n\}$ sup. limitata, $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$
   - b1) $\{a_n\}$ NON sup. limitata, $a_n \to l$ ove $l=\sup\{a_n : n\in domf\{a_n\}\}$
2. Sia $\{a_n\}$ una succ. monotona decrescente se
   - a2) $\{a_n\}$ NON è inf. limitata, $a_n \to -\infty$ per $n \to +\infty$
   - b2) $\{a_n\}$ inf. limitata, $a_n \to l'$ ove $l'=\inf\{a_n : n\in domf\{a_n\}\}$

Dimostrazione

a1) Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata si dimostra con l'enunciato contenuto nel teorema di monotonia:

th: $a_n \to l$ cioè $\forall \epsilon>0\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}/n>n_\epsilon\Rightarrow|a_n-l|<\epsilon\Rightarrow l-\epsilon<a_n<l+\epsilon\Rightarrow \underbrace{\sup a_n-\epsilon<a_n}_{\text{Da dimostrare}}<\sup a_n+\epsilon$

Da dimostrare

Sempre vera sup $a_n$ maggiorante di $a_n$

Utilizzando la proprietà caratteristica di sup: $\forall\epsilon>0\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}/\sup a_n-\epsilon<a_{n_\epsilon}$

Osservo che la successione è monotona crescente per ipotesi quindi $a_n>a_{n_\epsilon}\forall n>n_\epsilon$

quindi posso dire sup $a_n$-ε < $a_n$

Si è quindi provato che $a_n \to$ sup $a_n$ quindi $a_n \to$ l ove $l=\sup\{a_n : n\in domf\{a_n\}\}$ quindi la successione è superiormente limitata.

b1) Se invece $\{a_n\}$ è sup illimitata, allora $\forall A>0\exists n_A\in\mathbb{N}/a_{n_a}>A$ poiché $\{a_n\}$ è monotona crescente allora $a_n \ge a_{na} \ge A$ quindi $a_n \to +\infty$.

**(22) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per successioni.**

Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ soddisfano $a_n \le b_n \le c_n$ per ogni n>N e $a_n \to$ l e $c_n \to$ l Allora $b_n \to$ l

Dimostrazione

Fissiamo ε>0 su ha l- ε<$a_n$<l+ ε $\forall n>n_\epsilon$ ; l- ε<$c_n$<l+ ε $\forall n>n_\epsilon$

Allora l- ε< $a_n$ ≤ $b_n$ ≤ $c_n$ <l+ ε $\forall n > N = max(n_\epsilon, m_\epsilon)$

Quindi l- ε< $b_n$ <l+ ε => | $b_n$ – l| <ε => $b_n \to l$

**(23) Definire la successione geometrica e discuterne le proprietà di convergenza al variare della ragione.**

Si definisce successone geometrica la successione $a_n = q^n$ , $n \in \mathbb{N}$

- se q>1 la successione è monotona crescente e non limitata sup. => $q^n \to +\infty$
- se q=1, $q^n = 1$
- se q<0 la succ. non è monotona
- se 0≤q<1 la successione è monotona decrescente

$$\lim_{n \to +\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases}$$

**(24) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in R U {±∞} ("algebra degli infiniti"). Fare esempi di forme indeterminate.**

Date 2 successioni $a_n$, $b_n$ delle quali una o entrambe sono divergenti possiamo avere le seguenti regole:

a+∞ = +∞
a-∞= -∞
+∞+∞=+∞
-∞-∞=-∞
(il segno è da determinare a seconda del segno degli infiniti, infinitesimi)
a*∞=∞
a/0=∞
a/∞=0
Sono forme inderterminate ∞-∞; 0*∞; 0/0; ∞/∞;
Esempio F.I. $n^4/n^2$ per $n \to +\infty$ è F.I. ∞/∞

**(25) Denire il numero e di Nepero.**

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1+1/n)^n$$

**(26) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.**

Sia { $a_n$ } una succ. positiva e sia $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1}/a_n = l$ si hanno 3 casi:

1. l<1, $a_n \to 0$
2. l>1, $a_n \to +\infty$
3. l=1 non si può concludere

Dimostrazione

1. th: $a_n \to 0$

Sia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1\ allora\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon < 1$ devo dimostrare che → 0 quindi minore di qualcosa che converge a 0 considero quindi il secondo membro si ha quindi:

$a_{n0+1} < (l+\varepsilon) a_{n0}$

$a_{n0+2} < (l+\varepsilon) a_{n1} = (l+\varepsilon) * [(l+\varepsilon) a_{n0}] = (l+\varepsilon)^2 a_{n0}$

...

$a_{n0+k} < (l+\varepsilon)^k a_{n0}$ poiché l+ε< 1 successione geometrica di ragione < 1 quindi $a_{n0+k} \to 0$ per $k \to +\infty$

Dim 2

th: $a_n \to +\infty$

Sia $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$ $allora\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N} / n > n_1 \Rightarrow |a_{n+1}/a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon$ si ha quindi:

$a_{n1+1} <$ (l-ε)$a_{n1}$

$a_{n1+2} <$ (l-ε)$a_{n2}$ = (l-ε) * [(l-ε)$a_{n1}$ ] = (l-ε)$^2 a_{n1}$

...

$a_{nk+1} <$ (l-ε)$^k a_{n1}$ poiché l-ε> 1 successione geometrica di ragione > 1 quindi (l-ε)$^k \to +\infty$ per k$\to +\infty$

$a_n \to +\infty$ per n$\to +\infty$

**(27) Scrivere la definizione di successioni asintotiche ed enunciarne le principali proprietà; dimostrare poi almeno una di queste proprietà (a scelta).**

Def: 2 successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ si dicono assintotiche se $a_n / b_n \to 1$ per n$\to +\infty$.

Proprietà:

1) Se $a_n \sim b_n$ allora $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ hanno le stesse caratteristiche
   - **a)** se $a_n \to$ l anche $b_n \to$ l
   - **b)** se $a_n$ diverge anche $b_n$ diverge
   - **c)** se $a_n$ non ha limite anche $b_n$ non ha limite

2) Se $a_n \sim b_n$ , $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

3) Se $a_n \sim a'_n$ , $b_n \sim b'_n$ , $c_n \sim c'_n \Rightarrow a_n b_n / c_n = a'_n b'_n / c'_n$

Dimostrazione 1c)

hp: $a_n$ non ha limite th: $b_n$ non ha limite

Per ASSURDO sia $b_n \to$ l (o ∞)

$a_n = \dfrac{a_n}{b_n} * b_n \Rightarrow a_n \to l\ o\ \infty$ ma per ipotesi $a_n$ non ha limite ciò porta ad un assurdo quindi anche $b_n$ non avrà limite.

**(28) Fissato c ϵ R, scrivere la denizione successionale di limite di funzione per x→ c. Scrivere la denizione topologica di limite di funzione per x→ c.**

Def Successionale di limite:

Sia I un intervallo di R, c un p.to di tale intervallo e la funzione f definita in I tranne al più c

Si dice che $\lim_{x \to c} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R}\ o + \infty)\ se\ \forall \{x_n\} \subseteq I, x_n \to c, x_n \neq c\ \forall n\ si\ ha\ f(x_n) \to l$

Def Topologica di limite:

Dato $x_0 \in \mathbb{R}, si\ dice\ che \lim_{x \to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}\ se\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 / x \in I_{\delta(x_0)} \setminus \{ x_0 \} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

**(29) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to 7}$ f(x) = π indicando esplicitamente gli intorni.**

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{ 7 \}$ e $x \in dom f \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$

**(30) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to -\infty}$ f(x) = π indicando esplicitamente gli intorni.**

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0 / x \in (-\infty, -M)\ e\ x \in dom f \Rightarrow |f(x) - \pi| < \varepsilon$

**(31) Scrivere la definizione topologica di $\lim_{x \to 7}$ f(x) = +∞ indicando esplicitamente gli intorni.**

$\forall\, A > 0\ \exists\, \delta > 0 / x \in (7 - \delta, 7 + \delta) \setminus \{ 7 \}$ e $x \in dom f \Rightarrow f(x) > A$

**(32) Scrivere la definizione di limite destro e sinistro per funzioni. (Facoltativo: dare qualche esempio)**

Sia $c \in \mathbb{R}\ e\ l \in \mathbb{R}$ , si dice che il limite destro (sinistro) di f(x) per x→ c è l, e si scrive

$\lim_{x \to c+} f(x) = l \left( \lim_{x \to c-} f(x) = l \right)$ se $\forall \{ x_n \} \subseteq I, x_n \to c, x_n > c (x_n < c)$ *definitivamente si ha* $f(x_n) \to l$

DESTRO SINISTRO

$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$ ; $\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$ mentre $\lim_{x \to 0} 1/x$ NON esiste!

**(33) Scrivere la definizione di funzione continua in un punto. Classificare le possibili discontinuità**

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I$ *intervallo*, $c \in I$ si dice che f è continua in c se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Discontinuità:

1) Si dice che f ha discontinuità eliminabile in x=c se per x→ c f(x) → l ma l ≠ f(c)
2) Si dice che f ha una discontinuità di 1° specie in x=c se esistono finiti i limiti sx e dx per x→ c ma sono diversi tra loro (salto).
3) si dice che f presenta una discontinuità di 2° specie quando almeno uno dei due limiti non esiste o diverge.

**(34) Enunciare il Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni e per funzioni continue in un punto.**

Teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni

1) se f(x) → l per x→ c e l>0 allora ∃ un intorno bucato I di c / f( x) >0 $\forall x \in I$
2) se f(x) >0 in un intorno bucato I di c e f(x) → l allora l≥0 $\forall x \in I$

Teorema della permanenza del segno per funzioni continue in un punto

Se f continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $f(x_0) > 0$ *allora* ∃ un intorno bucato I di $x_0$ / $f(x_0)$ >0 $\forall x \in I$

**(35) Enunciare il Teorema del confronto per limiti di funzione.**

hp: f, g, h definite in un intorno di $x_0$,tranne al più $x_0$

Se

1) f(x)≤g(x)≤h(x) $\forall x \in I$ I intorno bucato in c
2) f(x)→ l e h(x) → l per x→ c

Allora

g(x) → l per x→ c

**(36) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per funzioni. Enunciare il teorema sull'algebra delle funzioni continue.**

Se f e g sono continue in $x_0$, allora

1) f±g è continua in $x_0$
2) f*g è continua in $x_0$
3) f/g è continua in $x_0$, purché $g(x_0)$ ≠ 0

**(37) Enunciare e dimostrare il teorema di cambiamento di variabile nei limiti (detto anche teorema sul limite di funzione composta).**

TEOREMA di CAMBIO di VARIABILE nei Limiti

1° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f. composta $f \circ g$ sia def in un intorno di $x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$).

Se:

① $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$ ($t_0 \in \mathbb{R}$)

② $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$ FINITO O INFINITO

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(t_0)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \operatorname{dom} f \circ g$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$, si ha $f(g(x_n)) \to f(t_0)$

Per hp ①, $g(x_n) \to t_0$

Per hp ②, f continua in $t_0$, cioè $\forall y_n \to t_0$ $f(y_n) \to f(t_0)$

Allora se scelgo $y_n = g(x_n)$

avrò $f(g(x_n)) \to f(t_0)$ ■

2° CASO

Siano f, g due funzioni definite in modo che la f. composta $f \circ g$ sia def in un intorno di $x_0$

Se

① $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$ ($t_0 \in \mathbb{R}$)

② $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

③ $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \to x_0$ cioè in un intorno di $x_0$

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t)$$

Dim

th: $\forall \{x_n\} \subseteq \operatorname{dom} f \circ g$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ si ha $f(g(x_0)) \to \lim_{t \to t_0} f(t) = l$

per hp ①, $g(x_n) \to t_0$

per hp ②, $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l$ cioè che $\forall \{t_n\}$, $t_n \to t_0$, $f(t_n) \to l$ se $t_n \neq t_0$

Allora, scegliendo come $\{t_n\}$ la successione $\{g(x_0)\}$ si ha:

$$g(x_n) \to t_0,\ g(x_n) \neq t_0 \Rightarrow \boxed{f(g(x_n)) \to l} \text{ per } n \to +\infty$$

assieme all'hp ③ $g(x_n) \neq t_0$ avrò quindi la th. ■

**(38) Dimostrare che senx/x = 0 per x→ 0 e i suoi corollari**

1.

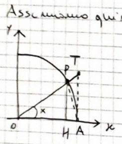
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Dim basta considerare $x > 0$ e x piccolo ($x < \frac{\pi}{2}$)

Se $x < 0$, $x = -y$, $y > 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Assumiamo quindi che $0 < x < \frac{\pi}{2}$




Osservo che

$$\mathcal{A}(O\hat{P}A) \leq \mathcal{A}(\widehat{OPA}) \leq \mathcal{A}(O\hat{T}A)$$

Calcolo:

$$\mathcal{A}(O\hat{P}A) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{(1-\cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

$\mathcal{A}(\widehat{OPA}) \Rightarrow \pi R^2 : 2\pi R = \mathcal{A}(\widehat{OPA}) : x$

$R = 1$ $\quad \pi : 2\pi = \mathcal{A}(\widehat{OPA}) : x$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\widehat{OPA}) = \frac{x\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

$$\mathcal{A}(O\hat{T}A) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Vale quindi $\frac{\operatorname{sen} x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x \leq x}_{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1} \underbrace{\leq \operatorname{tg} x}_{x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ ■$$

Corollario

(43)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dim

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1-\cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1-\cos^2 x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos^2 x} = \left[1 \cdot \frac{1}{1+1}\right] = \frac{1}{2}$$

**(39) Date due funzioni definite in un intorno di c, tranne al piu in c, definire i tre simboli f = O(g), f = o(g) e f ~g per x→ c.**

**Definire la parte principale di una funzione finita o infinitesima per x→c.**

Siano f e g definite in un intorno di c, tranne al più c ($c = x_0$, $x_0^+$, $x_0^-$, $\pm\infty$). Inoltre sia $g(x) \neq 0$ per $x \to c$ t.c $f(x)/g(x) \to l$ (finito o infinito) per $x \to c$. Allora

- se $l < +\infty$, si dice che f è controllata da g per $x \to c$ $\quad f = O(g)$
- se $l = 0$, si dice che f è trascurabile rispetto a g per $x \to c$ $\quad f = o(g)$
- se $l = 1$, si dice che f e g sono asintotiche $\quad f \sim g$

Parte principale

Sia $g(x)$ un infinito (o infinitesimo) di ordine $n$ per $x \to x_0$, rispetto ad un infinito (o infinitesimo) principale $f(x)$. Avendosi di conseguenza[3]:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} = L \neq 0$$

con $L$ finito e non nullo, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = 0$$

Da ció vediamo che la funzione

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L$$

che si trova sotto l'operazione di limite, é infinitesimo per $x \to x_0$. Di conseguenza, in un piccolo intorno di $x_0$, la funzione $h(x)$ assume valori prossimi a zero, e pertanto, possiamo scrivere:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f^n(x)} - L = \alpha(x)$$

ove la funzione $\alpha(x)$ é infinitesimo, per $x \to x_0$ Si ha allora:

$$g(x) = L \cdot f^n(x) + \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

[3]Nel confronto degli infinitesimi o degli infiniti, *se si deve calcolarne la parte principale e complementare*, conviene mettere $g(x)$ a numeratore nel calcolo del limite.

Il termine

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x)$$

é detto *Parte principale dell'infinito (o infinitesimo)* $g(x)$, mentre il termine

$$p_c(x) = \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

é la sua *parte complementare.*

Il significato della parte principale é il seguente: in un piccolo intorno di $x_0$, la funzione $p_p(x)$ approssima, a meno di un piccolo errore, la funzione $g(x)$. L'errore commesso é dato dalla parte complementare, che risulta funzione del punto $x$.

Ad esempio, sia

$$g(x) = 2\sin(x)$$

Questa funzione é infinitesima, per $x \to 0$. Prendiamo come infinitesimo principale l'infinitesimo campione $f(x) = x$. Avendosi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesimo di ordine uno rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi poi $L = 2$, possiamo calcolare la parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f(x) = 2x$$

Ció significa che, nell'intorno del punto $x_0 = 0$, la funzione $2\sin x$ puó essere approssimata dalla sua parte principale (a meno di un errore, dato dalla sua parte complementare, infinitesimo per $x \to x_0 = 0$). Il significato della parte principale e

## (40) Dimostrare limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo

Consideriamo ora

$h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\operatorname{dom} h := \left\{ x \in \operatorname{dom}\left(1+\frac{1}{x}\right) : 1+\frac{1}{x} > 0 \right\} \overset{!}{=} \left\{ x \neq 0 : 1+\frac{1}{x} > 0 \right\} = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$

è quindi possibile considerare il lim $x \to \pm\infty$ di $h$ e vale:

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ deriva dal fatto che $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ $\forall$ succ. $\{a_n\}$ divergente a $\pm\infty$.

Corollario

1. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$ dimostrazione: $x = \frac{1}{t}$
2. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ sostituzione $\frac{x}{a} = t$.

PROPOSIZIONE

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$

Dim $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x \to 0} \log(1+x)^{1/x} = \log\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \log e = 1$

## (41) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri. Discutere se tale teorema si può estendere al caso di una funzione continua su tutto l'asse reale (ed eventualmente formulare

**un enunciato valido in questo caso).**

T. di ESISTENZA degli ZERI

Sia $f: [a,b] \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$

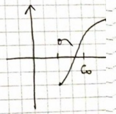
Allora

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

Se in più $f$ è strettamente monotona tale zero è unico.

Dim

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$




Poniamo

$a_0 = a$

$b_0 = b$

e $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ (p.to medio di $[a,b]$)

Considero $f(c_0)$ $\begin{cases} > 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a sinistra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = c_0 \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ < 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a destra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_0 \\ b_1 = b \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ = 0 & \text{FINE } (c_0 \text{ è uno zero}) \end{cases}$

Se non ho trovato lo zero andrò quindi a considerare il nuovo intervallo e così via fino a che non arrivo a trovare $f(c_0) = 0$

Quindi o ci fermiamo dopo un numero finito di passi perché $f(n) = 0$ oppure costruiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

1. $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ $\forall n$
2. $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$
3. $\ell([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali passi è possibile dimostrarli per induzione)

Osservo che

- $\{a_n\}$ è monotona crescente e $a_n \leq b$ $\forall n$
- $\{b_n\}$ è monotona decrescente e $b_n \geq a$ $\forall n$

$\Rightarrow$ Per il T. delle SUCCESSIONI MONOTONE

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0^+$ $\qquad \exists \lim_{n \to +\infty} b_n = x_0^-$

Vale anche

$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_0 - a_0}{2} = 0$

Quindi $x_0^+ = x_0^-$

D'ora in poi indicheremo quindi $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

(*) $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$

(**) e $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} b_n) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$

T. cambiamento variabile nei limiti di una f. continua


Considero $f(c_0)$ $\begin{cases} > 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a sinistra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = c_0 \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ < 0 & \text{cerchiamo lo zero sulla metà a destra} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_0 \\ b_1 = b \\ c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \end{cases} \\ = 0 & \text{FINE } (c_0 \text{ è uno zero}) \end{cases}$

Se non ho trovato lo zero andrò quindi a considerare il nuovo intervallo e così via fino a che non arrivo a trovare $f(c_0) = 0$

Quindi o ci fermiamo dopo un numero finito di passi perché $f(n) = 0$ oppure costruiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

1. $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ $\forall n$
2. $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$
3. $\ell([a_n, b_n]) = \frac{b-a}{2^n}$

(Tali passi è possibile dimostrarli per induzione)

Osservo che

- $\{a_n\}$ è monotona crescente e $a_n \leq b$ $\forall n$
- $\{b_n\}$ è monotona decrescente e $b_n \geq a$ $\forall n$

$\Rightarrow$ Per il T. delle SUCCESSIONI MONOTONE

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0^+$ $\qquad \exists \lim_{n \to +\infty} b_n = x_0^-$

Vale anche

$x_0^+ - x_0^- = \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_0 - a_0}{2} = 0$

Quindi $x_0^+ = x_0^-$

D'ora in poi indicheremo quindi $x_0 = x_0^+ = x_0^-$

Si ha allora

(*) $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$

(**) e $f(x_0) = f(\lim_{n \to +\infty} b_n) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$

T. cambiamento variabile nei limiti di una f. continua


**(42) Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Mostrare, attraverso controesempi, che le ipotesi sono tutte essenziali.**

Una funzione f definita nel $domf \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *è continua se* $\forall x_c \in domf\ \exists \lim_{x \to x_c} f$ *esiste quindi* $\lim sx, dx$

## Teorema d Weierstrass

Se f continua in [a,b] allora f ha minimo e massimo su [a,b]

hp1: f non chiuso f(x)=x, I=(0,1) quindi f(I)=(0,1) non ha ne massimo ne minimo ;

hp2: f non limitato f(x)=arctgx, I=R quindi f(I)=(0,1) non ha ne massimo ne minimo ;

hp3: f non continua

f(x)= { x se (-1,1); ½ se x=±1 }, I=[-1,1] non assume massimo e minimo nell'intervallo.

**(43) Enunciare e dimostrare il Teorema dei valori intermedi.**

T. Valori Intermedi:

Se f è continua e definita in [a,b] Allora f assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b).

Dimostrazione:

th: $\forall f(a) < c < f(b) \exists x_0 \in (a,b) / f(x_0) = c$

Se f(a)=f(b)è banale

Se f(a)≠f(b) supponiamo f(a)<f(b)

Sia $c \in \mathbb{R} : f(a) < c < f(b)$ *definisco* $g(x) = c\ \forall x \in [a,b]$

Osservo che:

- f continua in [a,b] per hp e g continua perché costante
- f(a)<g(a)=c
- f(b)>g(b)=c

Quindi per il corollario del T. di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = g(x_0) = c$ .

**(44) Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Caratterizzare gli asintoti obliqui.**

Def asintoto orizzontale: Si dice che f ha asintoto orizzontale di eq: y=m se f(x) → m per x → +∞
Def asintoto verticale: Si dice che f ha un asintoto verticale di eq: x=a se f(x) → ±∞ per x → a
Def asintoto obliquo: Si dice che f ha asintoto obliquo di eq. g(x)=mx+q per x → ∞ Allora g(x) si dice asintoto obliquo di f.

**(45) Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.**

T. continuità di $f^{-1}$:
Sia f continua e biiettiva sull'intervallo I,
Sia J=f(I), J un intervallo
Allora
  $f^{-1}$ è continua sull'intervallo J.

**(46) Enunciare il teorema sui limiti destro e sinistro delle funzioni monotone.**

T:
Sia f: (a, b) → R monotona
$\forall c \in (a,b) \exists$ il limite destro e sinistro di f(x)
Ai 2 estremi a, b esistono i limiti $x \to a^+$ e $x \to b^-$ di f(x), eventualmente ∞

**(47) Scrivere la denizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il signicato geometrico della derivata.**

Una funzione f si dice derivabile in un p.to $x_0$ se $\exists finito \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in $x_0$ e il valore del limite si dice derivata di f in $x_0$.

$f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel p.to $x_0$.

**(48) Scrivere la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.**

Una funzione si dice continua in un p.to $x_0$ se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Una funzione f si dice derivabile in un p.to $x_0$ se $\exists finito \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, si dice che f è derivabile in $x_0$ e il valore del limite si dice derivata di f in $x_0$.

Sia f definita in un intorno di $x_0$
f derivabile in $x_0$ => f continua in $x_0$ .

Dim
$th: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} * x - x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ => f continua in $x_0$

Attenzione !! Non vale il viceversa es. |x| è continua ma non è derivabile.

**(49) Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra, di punto angoloso, di cuspide, di esso a tangente verticale.**

Sia f definita in $[x_0, x_{0+\delta})$ si dice derivata destra $(D^+f)(x_0)$ di f in $x_0$ il

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} se \exists finito \quad .$$

Sia f definita in $(x_{0+\delta}, x_0]$ si dice derivata sinistra $(D^-f)(x_0)$di f in $x_0$ il

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} se \exists finito \quad .$$

Classificazione dei p.ti di non derivabilità:

1) $x_0$ si dice p.to angoloso se $(D^+f)(x_0)$ e $(D^-f)(x_0)$ esistono ma sono diversi tra loro es. f(x)=|x| in $x_0$=0

2) Se f è continua in $x_0$ e il i limiti dx e sx del rapporto incrementale esistono infiniti:

- se sono infiniti concordi allora $x_0$ si dice p.to a tg verticale
- se sono infiniti discordi allora $x_0$ si dice cuspide

**(50) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di derivazione del prodotto (regola di Leibniz).**

Siano f e g due funzioni derivabili in $x_0$.

Allora

1. f + g è derivabile in $x_0$ e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. f * g è derivabile in $x_0$ e $(f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g'(x_0)$
3. f / g è derivabile in $x_0$ e $(f/g)'(x_0) = [ f'(x_0)g( x_0) - f( x_0)g'( x_0) ] / (g'(x_0))^2$

Dimostrazione regola di Leibniz:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)[f(x_0+h)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$$
$$=\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}*g(x_0+h)+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}*f(x_0)$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

**(51) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena).**

f definita in un intorno di $x_0$ e derivabile in $x_0$

g definita in un intorno di $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$

Allora

g o f è derivabile in $x_0$ e vale $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))*f'(x_0)$

Dim

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$$

pongo $y_0 = f(x_0)$

$y_0 + k = f(x_0) + k = f(x_0 + h)$

($h \to 0 \Rightarrow k=f(x_0+h)-f(x_0) \to 0$ )

Divido e moltiplico per k

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}*\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=g'(y_0)*f'(x_0)=g'(f(x_0))*f'(x_0)$$

**(52) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.**

Sia f continua e derivabile su un intervallo I.
Sia f definita in un intorno di $x_0$ in I derivabile in $x_0$.

- Se $f'(x_0) \neq 0$ Allora $f^{-1}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$
- Se $f'(x_0) \neq 0$ Allora $f^{-1}$ NON è derivabile in $y_0$.

Dalle hp segue per il T. continuità della funzione inversa che $f^{-1}$ è continua in J=f(I) in particolare $f^{-1}$ sarà quindi continua in $y_0$.

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$$

pongo $x= f^{-1}(y) \Rightarrow y=f(x)$

$x_0= f^{-1}(y_0) \Rightarrow y=f(x_0)$

$(y\to y_0 \Rightarrow x\to x_0)$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}}$$

- Se $f'(x) = 0$ allora $f^{-1}$ non è derivabile in $x_0$
- Se $f'(x)\neq 0$, $(f^{-1})(y_0) = 1/f'(x_0)$

**(53) Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.**

$x_0$ si dice p.to di massimo relativo (o locale) per f se esiste un intorno $U_{\delta(x0)}=(x_{0-\delta}, x_{0+\delta})$ t.c. $f(x)\leq f(x_0)$ per ogni x dell' intervallo $U_{\delta(x0)}$.

T. di Fermat:

- f definita in un intorno di $x_0$ nel domf
- f derivabile in $x_0$
- f ha max e min relativo in $x_0$

Allora

$f'(x_0)=0$

Dim

Supponiamo che $x_0$ sia un p.to interno al domf, in cui f è derivabile e che $x_0$ sia p.to di massimo relativo. Allora $\exists \delta>0\, t.c.\, f(x)\leq f(x_0)\,\forall x\in domf\cap(x_{0-\delta},x_{0+\delta})$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\left\{\begin{matrix}<=0\, se\, x>x_0\\ >=0\, se\, x<x_0\end{matrix}\right\}$$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\exists$ quindi esistono anche il suo limite sinistro e il limite destro che per la permanenza del segno sono uno $\leq 0$ e l'altro $\geq 0$. Ma poiché si ha che f è derivabile in $x_0$ i due limiti devono essere uguali quindi devono essere =0 => esiste $f'(x_0)$ ed è =0.

Attenzione non vale il viceversa quindi un punto in cui la derivata è nulla può non essere un p.to di massimo o min relativo es. $f(x)=x^3$ in $x_0=0$.

**(54) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle**

T. di Rolle:

- $f \in C([a,b])$
- f derivabile in (a, b)
- f (a) = f(b)

$\exists x_0 \in (a,b)\, t.c.\, f'(x_0)=0$

Dim

Per il teorema di Weierstrass, f ha max e min in (a, b)

Sia $x_1$ t.c. $f(x_1)=M$ e $x_2$ t.c. $f(x_2)=m$

Sono possibili 2 casi:

1) $\{x_1, x_2\} = \{a, b\}$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow M=m$

Allora la funzione è costante => $\forall x \in (a,b)\, e\, t.c.\, f'(x)=0$

2) Almeno uno fra $x_1$, $x_2$ non coincide con gli estremi quindi è interno ad [a,b]:

Supponiamo $x_2$ interno → $f(x_2)=M$ Quindi:

- $x_2$ interno
- f derivabile in $x_2$
- f ha max in $x_2$

$f'(x_2)=0$ per il T.di Fermat

**(55) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio)**

T. di Lagrange:

- $f \in C([a,b])$
- f derivabile in (a, b)

$\exists x_0 \in (a,b)\, t.c.\, f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dim

Definiamo la funzione ausiliaria $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}*(x-a)$ ottenuta sottraendo ad f la retta passante per gli estremi del grafico. G soddisfa le hp. del T. Rolle:

- g è continua in [a,b] per l'algebra delle f. continue
- g è derivabile in (a, b) per l'algebra delle f. derivabili
- g(a)=g(b)

$\exists x_0 \in (a,b)\, t.c.\, g'(x_0)=0$

$$\Rightarrow g'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

**(56) Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I (cioè dimostrare che una funzione e costante su I se e solo se la sua derivata e nulla in tutti i punti di I).**

-f derivabile in I, intervallo

-f'(x)=0 $\forall x \in I$

Allora

f(x)=c $\forall x \in I$

Dim

Siano $x_1$,$x_2$ in I , $x_1 \neq x_2$ suppongo x1<x2

Allora per la 2° formula dell'incremento finito:

$\exists t \in (x_1, x_2) t.c. f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ poiché f'(t)=0

Attenzione non vale il viceversa es. f(x) = arctg(x)+arctg(1/x)

**(57) Scrivere la definizione di funzione monotona. Enunciare e dimostrare il Test di monotonia.**

f si dice monotona crescente se $\forall x \quad 1, x2 \in domf \quad , x \quad 1 < x2 \Rightarrow f \quad (x \quad 1) \leq f(x2)$

Test di monotonia:

-Sia I un intervallo

-Sia f derivabile su I

Allora

1. f crescente su I <=> f'(x) ≥ 0 $\forall x \in I$
2. f'(x)>0 $\forall x \in I$ => f strettamente crescente in I

Dim1)

"=>"

Sia $x_0$ interno a I

poiché f è crescente su I si ha

f(x)≤f($x_0$) $\forall x \leq x_0$

f(x)≥f($x_0$) $\forall x \geq x_0$

Allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \, \forall x \in I_{(x_0)}$$

Per il T. della permanenza del segno

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$ cioè f'($x_0$)≥0

Sia $x_0$ un estremo di I allora bisognerà limitarsi a considerare il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale.

"<="

Siano $x_1$, $x_2$ in I e $x_1$<$x_2$ per la seconda formula dell'incremento finito:

$\exists t \in (x_1, x_2) t.c. f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$