PROGRAMMA *PROVVISORIO* PER LA TEORIA

ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2018/19
INGEGNERIA GESTIONALE (CANALE 1)
VALENTINA CASARINO

(1) Scrivere la definizione di maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
(2) Data $f : A \to B$, con $X \subset A$, scrivere la definizione dell'insieme immagine $f(X)$. Dato $Y \subset B$, scrivere la definizione dell'insieme controimmagine $f^{-1}(Y)$.
(3) Scrivere la caratterizzazione analitica di estremo superiore ed estremo inferiore per un insieme di numeri reali.
(4) Enunciare il Principio di Induzione, e mostrare un esempio di applicazione.
(5) Scrivere la definizione di funzione iniettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa, data una funzione invertibile. Dato il grafico di una funzione invertibile, descrivere come si disegna il grafico della sua inversa.
(6) Dimostrare che la stretta monotonia implica l'invertibilità di una funzione., considerata dal suo dominio al suo insieme immagine.
(7) Scrivere la definizione di successione convergente e di limite finito per una successione. Fornire un esempio.
(8) Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare. Esibire un esempio per tipo.
(9) Discutere le proprietà di convergenza della successione geometrica $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.
(10) Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente, allora essa è anche limitata. Dire se è vero il viceversa (in caso contrario, dare un controesempio).
(11) Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite per le successioni.
(12) Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il Teorema sul limite delle successioni monotone.
(13) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma o del prodotto.
(14) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni, nelle due forme.
(15) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (detto anche dei due Carabinieri) per successioni.
(16) Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ("algebra degli infiniti"). Fare esempi di forme indeterminate.
(17) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.
(18) Scrivere la definizione di successioni asintotiche ed enunciarne le principali proprietà; dimostrare poi almeno una di queste proprietà (a scelta).

(19) Fissato $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, scrivere la definizione successionale di limite di funzione per $x \to c$. Scrivere la definizione topologica di limite di funzione per $x \to c$.
(20) Scrivere la definizione topologica di
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8\,,$$
indicando esplicitamente gli intorni (vedere note sotto).
(21) Scrivere la definizione di limite destro e sinistro per funzioni. (Facoltativo: dare qualche esempio)
(22) Scrivere la definizione di funzione continua in un punto. Classificare le possibili discontinuità.
(23) Enunciare e dimostrare il teorema di cambiamento di variabile nei limiti (detto anche teorema sul limite di funzione composta).
(24) Dimostrare che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,;$$
dimostrare poi almeno un altro limite notevole che ne consegue.
(25) Enunciare e dimostrare il Teorema degli zeri.
(26) Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Mostrare, attraverso controesempi, che le ipotesi sono tutte essenziali.
(27) Enunciare e dimostrare il Teorema dei valori intermedi.
(28) Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Caratterizzare gli asintoti obliqui.
(29) Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.
(30) Enunciare il teorema sui limiti destro e/o sinistro delle funzioni monotone.
(31) Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.
(32) Scrivere la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.
(33) Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra, di punto angoloso, di cuspide, di flesso a tangente verticale.
(34) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di derivazione del prodotto (regola di Leibniz).
(35) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena).
(36) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.
(37) Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
(38) Enunciare e dimostrare uno a scelta fra il Teorema di Rolle e il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio).
(39) Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I (cioè dimostrare che una funzione è costante su I se e solo se la sua derivata è nulla in tutti i punti di I).
(40) Scrivere la definizione di funzione monotona. Enunciare e dimostrare il Test di monotonia.

(41) Definire una funzione concava o convessa in un intervallo. Enunciare il Test di convessità (cioè il Teorema sulle condizioni equivalenti alla convessità/concavità per le f derivabili).
(42) Enunciare il Teorema di De l'Hôpital.
(43) Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto nella forma di Peano e di Lagrange.
(44) Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare (o indeterminata). Presentare un esempio per tipo.
(45) Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza. Esibire un esempio di serie telescopica.
(46) Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge / diverge / è irregolare.
(47) Enunciare e dimostrare la proprietà di regolarità delle serie a termini non negativi.
(48) Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata. Enunciare le proprietà di convergenza.
(49) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Tale condizione è anche sufficiente? Motivare la risposta.
(50) Enunciare il criterio della radice e il criterio del rapporto per serie a termini positivi e dimostrarne uno a scelta.
(51) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie a termini positivi.
(52) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.
(53) Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta.
Dimostrare che la convergenza assoluta implica quella semplice.
(54) Definire le serie a termini a segno alterno. Enunciare il criterio di Leibniz.
(55) Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive definite su un intervallo differiscono al più per una costante.
(56) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.
(57) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.
(58) Definire le somme di Cauchy–Riemann e dare la definizione di integrale definito di una funzione limitata su un intervallo $[a, b]$.
(59) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
(60) Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del Calcolo integrale ("secondo", sul libro di testo, quello per la funzione integrale, non solo per l'integrale definito).
(61) Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del Calcolo integrale ("primo teorema fondamentale del Calcolo integrale" sul libro di testo): "Data G primitiva di f su $[a, b]$, risulta $\int_a^b f(x)dx = \ldots$".
(62) Dare la definizione di integrale generalizzato su intervalli illimitati per funzioni non negative. Scrivere poi anche la definizione di integrale generalizzato su intervalli limitati per funzioni non negative.
(63) Enunciare il criterio del confronto per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati (o limitati, a scelta).

(64) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati.
(65) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli limitati.
(66) Definizione di norma o modulo e definizione di intorno sferico per $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, nei casi $n = 2$, $n = 3$.
(67) Dati $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ o $\ell = \pm\infty$, scrivere la definizione di
$$\lim_{|\underline{x}|\to\infty} f(\underline{x}) = \ell\,.$$
(68) Dati $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ o $\ell = \pm\infty$, scrivere la definizione di
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell\,.$$
(69) Dare la definizione di derivata parziale e di gradiente per una funzione di due variabili. L'esistenza del gradiente implica la continuità? Illustrare la risposta con un esempio.
(70) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili e dire quando le derivate direzionali si riducono a derivate parziali. Enunciare la formula del gradiente.
(71) Dare la definizione di f differenziabile per una funzione di due variabili. Enunciare il legame fra differenziabilità e continuità.
(72) Dare la definizione di piano tangente al grafico di f, funzione di due variabili. Enunciare il Teorema del differenziale totale.

Nota.

Si possono scegliere enunciati e dimostrazioni dati a lezione, o del libro di testo, o di altri libri di testo. L'importante è che siano corretti e rispondano pienamente alla domanda. Se a lezione sono state date dimostrazioni in casi particolari o semplificate, va bene riproporle in quei casi.

Osservazioni.

- La domanda 20 potrà essere chiesta con altri valori al posto di 2 e 8, tra cui anche $+\infty$, $-\infty$.
- Questo è il programma *provvisorio* per la Parte A. Per l'eventuale prova orale ogni studente deve fare riferimento al programma dettagliato del corso relativo al proprio canale.
- Se avete domande sulla correttezza delle risposte che preparate, chiedete prima dell'esame.
- Chi ha superato il primo compitino, per il primo appello risponde a domande dalla 41 in poi. Dal secondo appello in poi si dovrà portare l'intero Syllabus, indipendentemente dal fatto di avere superato il primo compitino.