Asintoti

Valentina Casarino

Vicenza, 28/10/2018

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to +\infty$. Abbiamo visto che se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,,$$

si dice che f e g sono asintotiche per $x \to +\infty$.

Il caso più interessante si presenta quando f è asintotica a una funzione lineare (cioè $g(x) = mx + q$, con $m \neq 0$) per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.

Definizione. La retta $g(x) = mx + q$ si dice asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.

Osservazione. Se f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, f è un infinito di ordine uno.

Metodo per determinare m e q

Supponiamo di voler determinare un eventuale asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.

1) Data f, si calcola

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Se questo limite esiste finito (sia esso m), si procede al passo 2.
2) Si calcola

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)\,.$$

Se anche questo limite esiste finito (sia esso q), la retta $g(x) = mx + q$ è l'asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$.

Se uno di questi due limiti non esiste, si dice che f non ha asintoti obliqui.

Altri tipi di asintoti

Definizione. Si dice che f ha un asintoto orizzontale destro di equazione $y = m$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = m\,.$$

Definizione. Si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = a$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty\,.$$

Infine, tutte le definizioni date possono essere applicate per cercare eventuali asintoti sinistri (cioè per $x \to -\infty$).

Esempi.

1. La funzione $f(x) = x + \sqrt{x}$ non ha asintoto obliquo destro (cioè per $x \to +\infty$) (si trova infatti $m = 1$ e $q = +\infty$).

2. La funzione $f(x) = 5x + \sin x - 3 + \cos x$ non ha asintoto obliquo destro (cioè per $x \to +\infty$); infatti, $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x$ non esiste.

3. La funzione $f(x) = \sqrt{4x^2 - x}$ presenta un asintoto obliquo destro, $y = 2x - \frac{1}{4}$.

4. La funzione $f(x) = \frac{x^2 - (x+1)|x-2|}{2x+3}$ presenta asintoto orizzontale destro ($y = \frac{1}{2}$), un asintoto verticale ($x = -\frac{3}{2}$), un asintoto obliquo sinistro di equazione $y = x - 2$.

Un'osservazione sulle stime asintotiche

Bisogna fare molta attenzione quando si usano le stime asintotiche. Per la relazione di asintoticità NON valgono le usuali regole algebriche. Per esempio, si può scrivere che

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{(vero)}$$

ma non che

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{per } x \to 0 \qquad \text{(falso)}.$$

Se quest'ultima affermazione fosse vera, ciò significherebbe

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2}x^2} = 1\,,$$

che non è falsa, ma ingannevole, perché vale anche, per es.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - x^{100}} = 1\,,$$

mentre non è vero che

$$\cos x \sim 1 - x^{100} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Osservazione. Non tutti i limiti si possono risolvere per mezzo delle stime asintotiche.

Esempio. Ricordiamo che

$$\sin x \sim x \qquad \text{per } x \to 0.$$

Ciò si può anche esprimere in questo modo

$$\sin x = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0,$$

ove $o(x)$ rappresenta un infinitesimo di grado superiore al primo. Allora si ha, per esempio,

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = (\text{con le stime}) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2\,,$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = (\text{con le stime}) = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} = ??\,.$$

   Nell'ultimo caso con le stime non riusciamo a concludere, perché $o(x)$ è una quantità indeterminata, di cui sappiamo solo che $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ (potrebbe essere, per esempio, $o(x) = x^2, x^{5/2}, x^3, x^4, \ldots$).

   - Se fosse $o(x) = x^2$, per esempio, il limite varrebbe ∞.
   - Se fosse $o(x) = x^4$, per esempio, il limite varrebbe 0.
   - Se fosse $o(x) = x^3$, per esempio, il limite varrebbe -1.

   Vedremo più avanti per mezzo di altre tecniche che questo limite vale $-\frac{1}{6}$.