



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE
MARCHE

SISTEMI EMBEDDED

Implementazione dell'algoritmo di
One-Sided Jacobi Rotation per la
decomposizione SVD, tramite
librerie NVIDIA CUDA C (codice
C) su piattaforma embedded
Jetson TK1 (GPU).

Matteo Orlandini

Jacopo Pagliuca

supervisionato da

Dott. Laura FALASCHETTI e Prof. Claudio TURCHETTI

23 marzo 2020

Indice

1	Introduzione	1
1.1	SVD	1
1.2	One Sided Jacobi SVD	2
1.2.1	Jacobi rotation	3
1.3	CUDA	4
1.3.1	Parallel Computing	4
1.3.2	Sequential and Parallel Programming	5
1.3.3	CUDA Programming Structure	6
1.3.4	Managing Memory	7
1.3.5	Organizing Threads	9
1.3.6	CUDA Memory Model	11
2	Sequential implementation	17
3	Parallel implementation	18
3.1	Global Memory	19
3.2	Semi Shared Memory	19
3.3	Shared Memory	19
4	Performance	20
5	Conclusioni	21

1 Introduzione

Introduzione: descrizione del progetto

1.1 SVD

In algebra lineare, la decomposizione ai valori singolari (SVD), è una fattorizzazione di una matrice in tre diverse matrici basata sull'uso di autovalori e autovettori.

La decomposizione di una matrice \mathbf{A} si basa sul *teorema fondamentale dell'algebra lineare*:

Data una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ di rango ρ , la decomposizione in valori singolari di \mathbf{A} è rappresentata dal prodotto di due matrici unitarie $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e una matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, come mostrato in (1).

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (1)$$

Le colonne di \mathbf{U} sono chiamate *vettori singolari sinistri* di \mathbf{A} mentre le colonne di \mathbf{V} sono i *vettori singolari destri* di \mathbf{A} . Inoltre, Σ è una matrice reale non negativa del tipo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli elementi diagonali di Σ sono i *valori singolari* di \mathbf{A} e sono solitamente in ordine decrescente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\rho > 0, \sigma_{\rho+1} = \dots = 0$.

Nel caso in cui $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ l'equazione (1) diventa:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (2)$$

dove $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono matrici ortonormali.

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}^{m \times m} \quad (3)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}^{n \times n} \quad (4)$$

Unendo queste due proprietà all'equazione (2) si possono ricavare l'espressione di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)^T = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\mathbf{V}\Sigma\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\Sigma^2\mathbf{U}^T$$

Allo stesso modo, per $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\Sigma^2\mathbf{V}^T$$

La SVD ha numerose applicazioni nel campo dell'algebra lineare. Innanzitutto fornisce delle informazioni importanti sulla matrice \mathbf{A} , come il suo rango, qual è il suo nucleo e qual è la sua immagine. Viene usata per definire la pseudo-inversa di una matrice rettangolare utile per la risoluzione del problema dei minimi quadrati. Trova utilizzo anche nella risoluzione di sistema di equazioni lineari omogeneo.

Un'altra importante applicazione riguarda l'approssimazione della matrice \mathbf{A} , con una di rango inferiore (SVD troncata), utilizzata nell'elaborazione di immagini e nell'elaborazione dei segnali.

La SVD ha anche note applicazioni nel campo dell'analisi delle componenti principali.

1.2 One Sided Jacobi SVD

Per effettuare la SVD di una matrice, sono stati sviluppati numerosi algoritmi con lo scopo di ottimizzare il numero di operazioni svolte dalla macchina.

Uno di quelli più usati è l'algoritmo di Jacobi con la sua variante One Sided Jacobi. L'approccio utilizzato è quello di applicare successive rotazione alla matrice originale, in modo da azzerare le componenti che si trovino al di fuori della diagonale. Tramite diverse iterazioni, si ottiene come risultato finale una matrice diagonale contenente i valori singolari richiesti.

1.2.1 Jacobi rotation

La rotazione di Jacobi è una operazione che consente di azzerare selettivamente elementi specifici di una matrice. Tramite una rotazione in due dimensioni p e q vengono azzerati gli elementi (p,q) e (q,p) della matrice.

L'operazione si basa sull'utilizzo della matrice di Jacobi $J(p, q, \theta)$ del tipo:

$$J(p, q, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & \cdots & -s & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & s & \cdots & c & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

dove $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$, vengono applicati solo nelle dimensioni p e q .

Premoltiplicare un vettore per $J(p, q, \theta)^T$ equivale a ruotarlo in senso antiorario di un angolo θ nel piano (p, q) . Questa rotazione produce un vettore risultante nel quale la componente q è stata azzerata. Infatti se $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$y = J(p, q, \theta)^T x \quad (5)$$

allora

$$y_p = cx_p - sx_q \quad (6)$$

$$y_q = sx_p + cx_q \quad (7)$$

$$y_i = x_i, i \neq p, q \quad (8)$$

Da 7 si nota che y_q può essere azzerata ponendo:

$$c = \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + x_q^2}}, s = \frac{-x_q}{\sqrt{x_p^2 + x_q^2}} \quad (9)$$

Per una matrice A simmetrica, è possibile azzerare le componenti (p,q) e (q,p) applicando la 10.

$$B = J(p, q, \theta)^T A J(p, q, \theta) \quad (10)$$

1.3 CUDA

1.3.1 Parallel Computing

Negli ultimi decenni, c'è stato un crescente interesse per il calcolo parallelo. L'obiettivo primario del calcolo parallelo è migliorare la velocità di calcolo.

Il calcolo parallelo può essere definito come una forma di calcolo in cui molte operazioni vengono eseguite simultaneamente, in base al principio che spesso i problemi di grandi dimensioni possono essere suddivisi in problemi più piccoli, che vengono poi risolti contemporaneamente.

Dal punto di vista del programmatore, una domanda naturale è come mappare i calcoli simultanei sui computer. Supponendo di avere più risorse informatiche, il calcolo parallelo può quindi essere definito come l'uso simultaneo di più risorse di calcolo (core o computer) per eseguire i calcoli simultanei. Un grosso problema viene suddiviso in problemi più piccoli, ciascuno dei quali viene quindi risolto contemporaneamente su diverse risorse di elaborazione. Gli aspetti software e hardware del calcolo parallelo sono strettamente intrecciati insieme. In effetti, il calcolo parallelo di solito coinvolge due aree distinte delle tecnologie informatiche:

- Computer architecture (aspetto hardware)
- Parallel programming (aspetto software)

La computer architecture si concentra sul supporto del parallelismo a livello architettonico, mentre il parallel programming si concentra sulla risoluzione di un problema simultaneamente sfruttando appieno il potere computazionale dell'architettura del computer. Per ottenere l'esecuzione parallela nel software, l'hardware deve fornire una piattaforma che supporti l'esecuzione simultanea di più processi o thread multipli.

I processori più moderni implementano l'*architettura Harvard*, come mostrato in Figura 1, che comprende tre componenti principali:

- Memoria (instruction memory e data memory)
- Central processing unit (control unit e arithmetic logic unit)
- Interfacce di Input/Output

La componente chiave nell'elaborazione è la CPU, generalmente chiamata core. Al giorno d'oggi, la tendenza nella progettazione dei chip è quella di integrare più core in un singolo processore, generalmente definito multicore, per supportare il parallelismo a livello di architettura. Pertanto, la programmazione può essere vista come il processo di mappatura del calcolo di un problema ai core disponibili in modo tale da ottenere l'esecuzione parallela.

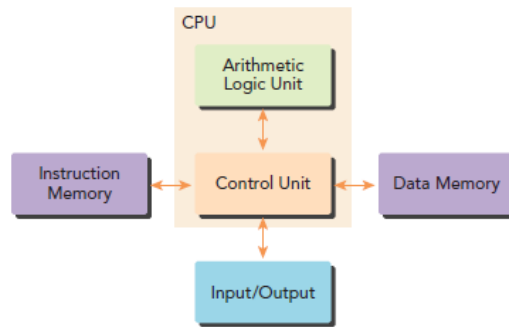


Figura 1: Architettura Harvard [3]

Quando si implementa un algoritmo sequenziale, potrebbe non essere necessario comprendere i dettagli dell'architettura del computer per scrivere un programma corretto. Tuttavia, quando si implementano algoritmi per macchine multicore, è molto più importante che i programmatori siano consapevoli delle caratteristiche dell'architettura del computer sottostante. La scrittura di programmi paralleli sia corretti che efficienti richiede una conoscenza fondamentale delle architetture multicore.

1.3.2 Sequential and Parallel Programming

Quando si scrive un programma, è naturale dividere il problema in una serie discreta di calcoli; ogni calcolo esegue un'attività specifica, come mostrato in Figura 2. Questo tipo di programma è chiamato *sequenziale*. Esistono due

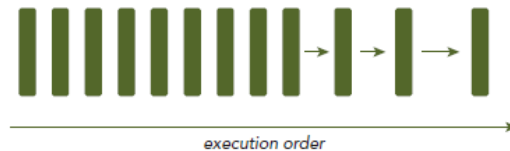


Figura 2: Ordine di esecuzione sequenziale [3]

modi per classificare la relazione tra due pezzi di codice: alcuni sono correlati da un vincolo di precedenza e pertanto devono essere calcolati in sequenza; altri non hanno tali restrizioni e possono essere calcolati contemporaneamente. Qualsiasi programma contenente attività eseguite contemporaneamente è chiamato *parallelo*. Come mostrato in Figura 3, un programma parallelo può avere alcune parti sequenziali.

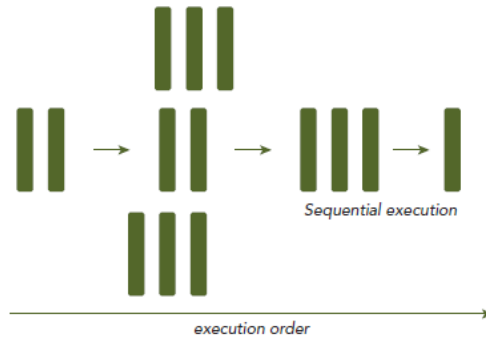


Figura 3: Ordine di esecuzione parallelo [3]

1.3.3 CUDA Programming Structure

Il modello di programmazione CUDA consente di eseguire applicazioni su sistemi di elaborazione eterogenei semplicemente annotando il codice con una piccola serie di estensioni al linguaggio di programmazione C. Un ambiente eterogeneo è costituito da CPU integrate da GPU, ognuna con la propria memoria separata da un bus PCI-Express. Pertanto, è necessario notare la seguente distinzione:

- **Host:** la CPU e la sua memoria (host memory)
- **Device:** la GPU e la sua memoria (device memory)

Un componente chiave del modello di programmazione CUDA è il kernel, cioè il codice che viene eseguito sul device GPU. CUDA gestisce i kernel scritti dai programmatori su thread GPU. Dall'host, si definisce il modo in cui l'algoritmo viene mappato sul device in base ai dati dell'applicazione e alla capacità del device GPU.

L'host può funzionare indipendentemente dal dispositivo per la maggior parte delle operazioni. Quando si chiama un kernel, il controllo viene immediatamente restituito all'host, liberando la CPU per eseguire task aggiuntivi. Un tipico programma CUDA è costituito da un codice seriale integrato da un codice parallelo. Come mostrato in Figura 4, il codice seriale (così come quello parallelo) viene eseguito sull'host, mentre il codice parallelo viene eseguito sul device. Il codice del device è scritto usando CUDA C. È possibile inserire tutto il codice in un singolo file sorgente oppure utilizzare più file sorgente per creare l'applicazione o le librerie. Il compilatore NVIDIA C (nvcc) genera il codice eseguibile sia per l'host che per il device.

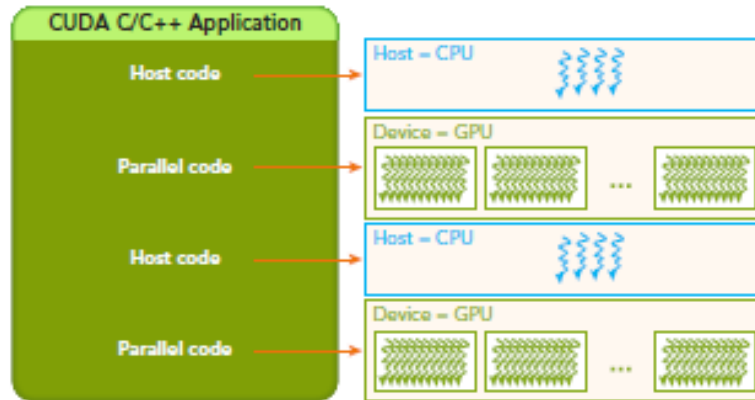


Figura 4: Struttura di programmazione Cuda [3]

Un flusso di elaborazione tipico di un programma CUDA segue questo modello:

1. Copia i dati dalla memoria della CPU alla memoria della GPU.
2. Chiama i kernel per operare sui dati memorizzati nella memoria della GPU.
3. Copia i dati dalla memoria della GPU alla memoria della CPU.

1.3.4 Managing Memory

Il modello di programmazione CUDA presuppone un sistema composto da un host e un device, ognuno con una propria memoria separata. I kernel funzionano con la memoria del device. Per consentire il pieno controllo e ottenere le migliori prestazioni, CUDA fornisce funzioni per allocare la memoria del dispositivo, liberare la memoria del dispositivo e trasferire i dati tra la memoria host e quella device. La Tabella 1 elenca le funzioni C standard e le corrispondenti funzioni CUDA C per le operazioni sulla memoria. La fun-

FUNZIONI C STANDARD	FUNZIONI CUDA C
malloc	cudaMalloc
memcpy	cudaMemcpy
memset	cudaMemset
free	cudaFree

Tabella 1: Funzioni sulla memoria host e device

zione utilizzata per eseguire l'allocazione della memoria GPU è `cudaMalloc` e la sua struttura è:


```
cudaError_t cudaMalloc ( void** devPtr, size_t size )
```

Questa funzione alloca un intervallo lineare di memoria del dispositivo con la *size* specificata in byte. La memoria allocata viene restituita tramite *devPtr*. La somiglianza tra *cudaMalloc* e la libreria runtime standard *malloc* è intenzionale e ha lo scopo di mantenere l'interfaccia il più vicino possibile alle librerie di runtime C standard.

La funzione utilizzata per trasferire i dati tra l'host e il device è: *cudaMemcpy* e la sua struttura è:

```
cudaError_t cudaMemcpy ( void* dst, const void* src, size_t count, cudaMemcpyKind kind )
```

Questa funzione copia i byte specificati dall'area di memoria di origine, indicata da *src*, nell'area di memoria di destinazione, indicata da *dst*, con la direzione specificata dal tipo, dove *kind* assume uno dei seguenti tipi:

- *cudaMemcpyHostToHost*
- *cudaMemcpyHostToDevice*
- *cudaMemcpyDeviceToHost*
- *cudaMemcpyDeviceToDevice*

Questa funzione mostra un comportamento sincrono perché l'applicazione host si blocca fino a quando *cudaMemcpy* ritorna e il trasferimento è completo. Ogni chiamata CUDA, ad eccezione del lancio del kernel, restituisce un codice di errore di tipo enumerato *cudaError_t*. Ad esempio, se la memoria GPU è allocata correttamente, restituisce:

```
cudaSuccess
```

Altrimenti, ritorna:

cudaErrorMemoryAllocation È possibile convertire un codice di errore in un messaggio di errore human-readable con la seguente funzione di runtime CUDA:

```
char* cudaGetErrorString(cudaError_t error)
```

La funzione *cudaGetErrorString* è analoga alla funzione standard C *strerror*. Il modello di programmazione CUDA espone un'astrazione della gerarchia di memoria dall'architettura GPU. La Figura 5 illustra una struttura di memoria GPU semplificata, contenente due ingredienti principali: global memory e shared memory. Un approfondimento sulla gerarchia di memoria della GPU è presente nel capitolo 1.3.6.

MEMORY HIERARCHY Una delle caratteristiche più notevoli del modello di programmazione CUDA è la gerarchia di memoria esposta. Ogni

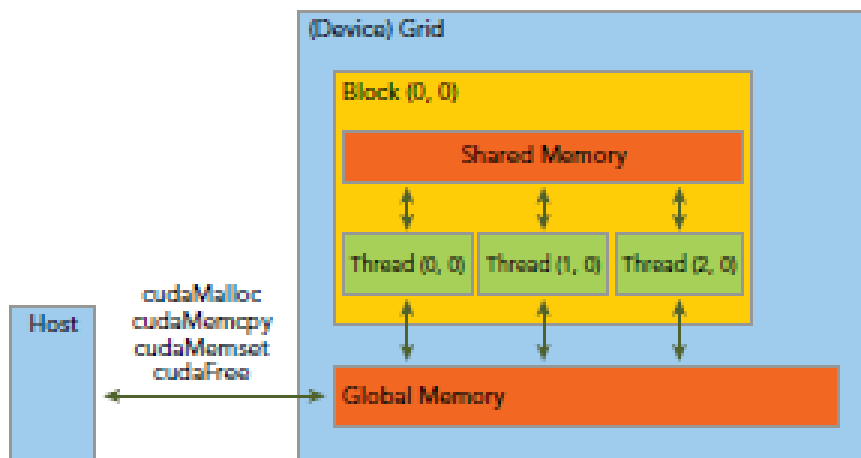


FIGURE 2-3

Figura 5: Struttura della memoria GPU [3]

dispositivo GPU ha un set di diversi tipi di memoria utilizzati per scopi diversi. Un approfondimento su questa gerarchia è presente nel capitolo 1.3.6. La global memory è analoga alla memoria di sistema della CPU, mentre la shared memory è simile alla cache della CPU. Tuttavia, la shared memory può essere controllata direttamente da un kernel CUDA C.

1.3.5 Organizing Threads

Quando un kernel viene avviata dal lato host, l'esecuzione viene spostata sul device in cui viene generato un numero elevato di thread e ogni thread esegue le istruzioni specificate dalla funzione kernel. Saper organizzare i thread è una parte fondamentale della programmazione CUDA che espone un'astrazione della gerarchia di thread per consentire di organizzare i thread. Questa è una gerarchia di thread a due livelli composta in blocchi di thread e griglie di blocchi, come mostrato in Figura 6. Tutti i thread generati da un singolo lancio del kernel sono collettivamente chiamati griglia. Tutti i thread in una griglia condividono lo stesso spazio di global memory. Una griglia è composta da molti blocchi di thread. Un blocco thread è un gruppo di thread che possono cooperare tra loro usando:

- sincronizzazione dei blocchi locali
- shared memory dei blocchi locali

Threads da blocchi diversi non possono cooperare. I threads si basano sulle seguenti due coordinate univoche per distinguersi l'una dall'altra:

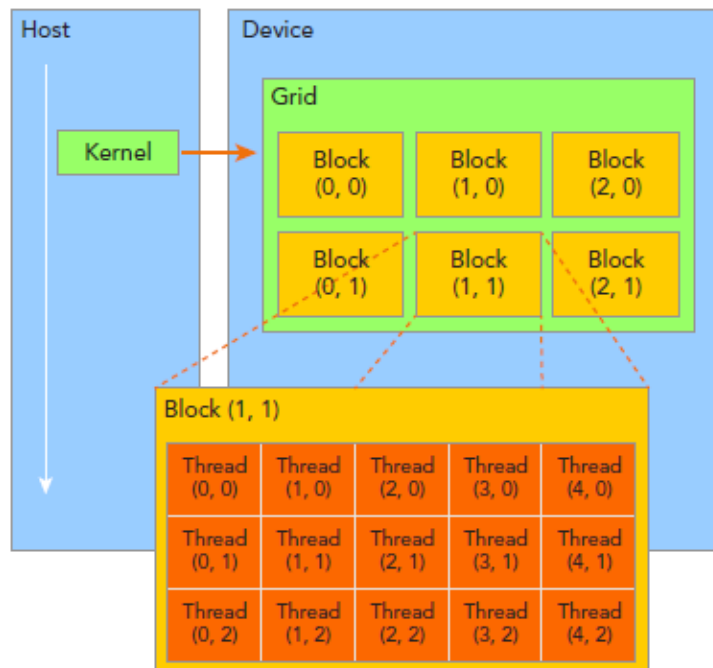


Figura 6: Thread hierarchy [3]

- blockIdx (indice del blocco all'interno di una griglia)
- threadIdx (indice del thread all'interno di un blocco)

Queste variabili appaiono come variabili predefinite pre-inizializzate a cui è possibile accedere nei kernel. Quando viene eseguita un kernel, le variabili di coordinate blockIdx e threadIdx vengono assegnate a ciascun thread dal CUDA runtime. Sulla base delle coordinate, è possibile assegnare porzioni di dati a thread diversi.

La variabile di coordinate è di tipo uint3. È una struttura contenente tre numeri interi senza segno e la prima, seconda e terza componente è accessibile attraverso i campi x, y e z.

```
blockIdx.x
blockIdx.y
blockIdx.z
threadIdx.x
threadIdx.y
threadIdx.z
```

CUDA organizza griglie e blocchi in tre dimensioni. La Figura 6 mostra un esempio di una struttura gerarchica di thread con una griglia 2D conte-

nente blocchi 2D. Le dimensioni di una griglia e di un blocco sono specificate dalle seguenti due variabili integrate:

- `blockDim` (dimensione del blocco, misurata in threads)
- `gridDim` (dimensione della griglia, misurata in blocchi)

Queste variabili sono di tipo `dim3`, un tipo di vettore intero basato su `uint3` utilizzato per specificare le dimensioni. Quando si definisce una variabile di tipo `dim3`, qualsiasi componente lasciato non specificato viene inizializzato su 1. Ogni componente in una variabile di tipo `dim3` è accessibile attraverso i suoi campi `x`, `y` e `z`, rispettivamente, come mostrato dai campi mostrati di seguito:

```
blockDim.x  
blockDim.y  
blockDim.z
```

1.3.6 CUDA Memory Model

Per i programmatori, ci sono generalmente due classificazioni di memoria:

- Programmabile: si controlla esplicitamente quali dati vengono inseriti nella memoria programmabile.
- Non programmabile: non si ha alcun controllo sul posizionamento dei dati e si fa affidamento su tecniche automatiche per ottenere buone prestazioni.

Nella gerarchia di memoria della CPU, la cache L1 e la cache L2 sono esempi di memoria non programmabile. CUDA espone molti tipi di memoria programmabile:

- Registers
- Shared memory
- Local memory
- Constant memory
- Texture memory
- Global memory

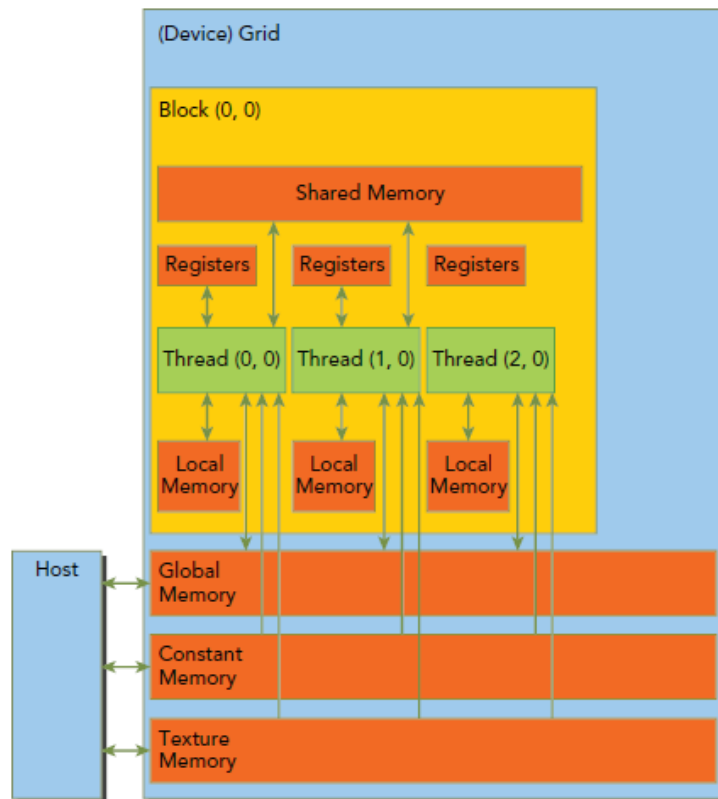


Figura 7: Gerarchia della memoria della GPU [3]

La Figura 7 illustra la gerarchia di questi spazi di memoria. Ognuno ha un diverso ambito, durata e comportamento di memorizzazione nella cache. Un thread in un kernel ha la sua local memory privata. Un blocco di thread ha una propria memoria shared, visibile a tutti i thread nello stesso blocco thread e il cui contenuto persiste per la durata del blocco thread. Tutti i thread possono accedere alla memoria globale. Esistono anche due spazi di memoria di sola lettura accessibili da tutti i thread: la memoria costante e texture. Gli spazi di memoria globale, costante e texture sono ottimizzati per usi diversi. La Texture memory offre diverse modalità di indirizzo. I contenuti della memoria globale, costante e textyre hanno la stessa durata di un'applicazione.

Registers I registri sono lo spazio di memoria più veloce su una GPU. Una variabile dichiarata in un kernel senza altri qualificatori di tipo viene generalmente memorizzata in un registro. Le matrici dichiarate in un kernel possono anche essere memorizzate in registri, ma solo se gli indici utilizzati

per fare riferimento alla matrice sono costanti e possono essere determinati al momento della compilazione.

Le variabili nei registri sono private per ogni thread. Un kernel in genere usa i registri per contenere variabili thread private a cui si accede frequentemente. Le variabili nei registri condividono la loro durata con il kernel. Una volta che un kernel ha completato l'esecuzione, non è possibile accedere nuovamente a una variabile nel registro.

I registri sono risorse scarse che vengono suddivise tra gli warp attivi nella Shared Memory (SM).

Local Memory Le variabili in un kernel idonee per i registri ma che non possono rientrare nello spazio di registro allocato per quel kernel si riverseranno nella memoria locale. Le variabili che è probabile che il compilatore inserisca nella memoria locale sono:

- Array locali referenziate con indici i cui valori non possono essere determinati in fase di compilazione.
- Grandi strutture locali o array che consumerebbero troppo spazio sui registri.
- Qualsiasi variabile che non rientra nel limite del registro del kernel.

Il nome "memoria locale" è fuorviante: i valori riversati nella memoria locale risiedono nella stessa posizione fisica della memoria globale, quindi gli accessi alla memoria locale sono caratterizzati da elevata latenza e bassa larghezza di banda e sono soggetti ai requisiti per un accesso efficiente alla memoria.

Shared Memory Le variabili con il seguente attributo in un kernel sono immagazzinate nella memoria condivisa:

```
__shared__
```

Poiché la shared memory è su chip, ha una larghezza di banda molto più elevata e una latenza molto inferiore rispetto alla memoria locale o globale. È usato in modo simile alla cache L1 della CPU, ma è anche programmabile.

Ogni SM ha una quantità limitata di memoria condivisa che è partizionata tra i blocchi di thread. Pertanto, è necessario fare attenzione a non utilizzare eccessivamente la memoria condivisa o si limiterà inavvertitamente il numero di orditi attivi.

La memoria condivisa è dichiarata nell'ambito di una funzione del kernel ma condivide la sua durata con un blocco di thread. Quando viene eseguito

il blocco, la sua allocazione di memoria condivisa verrà rilasciata e assegnata ad altri blocchi thread.

La shared memory serve come mezzo di base per la comunicazione tra thread. I thread all'interno di un blocco possono cooperare condividendo i dati memorizzati nella memoria condivisa. L'accesso alla shared memory deve essere sincronizzato utilizzando la seguente chiamata:

```
void __syncthreads();
```

Questa funzione crea una barriera che tutti i thread nello stesso blocco di thread devono raggiungere prima di poter procedere con qualsiasi altro thread. Creando una barriera per tutti i thread all'interno di un blocco, è possibile prevenire un potenziale rischio di dati. Si verificano quando esiste un ordinamento indefinito di accessi multipli nella stessa posizione di memoria da thread diversi, in cui almeno uno di questi accessi è una scrittura. `__syncthreads` può anche influire sulle prestazioni costringendo la SM a rimanere inattiva frequentemente.

Constant Memory La memoria costante risiede nella memoria del device ed è memorizzata nella cache costante dedicata per la SM. Una variabile costante ha il seguente attributo:

```
__constant__
```

Le variabili costanti devono essere dichiarate globalmente, al di fuori di qualsiasi kernel. È possibile dichiarare una quantità limitata di memoria costante: 64 KB. La memoria costante viene dichiarata staticamente ed è visibile a tutti i kernel.

I kernel possono solo leggere dalla memoria costante che deve quindi essere inizializzata dall'host utilizzando:

```
cudaError_t cudaMemcpyToSymbol(const void* symbol, const void* src,
size_t count);
```

Questa funzione copia i byte di conteggio dalla memoria a cui punta *src* alla memoria a cui punta il simbolo, che è una variabile che risiede sul dispositivo nella memoria globale o costante. Questa funzione è sincrona nella maggior parte dei casi.

La memoria costante funziona meglio quando tutti i thread in un warp leggono dallo stesso indirizzo di memoria. Ad esempio, è opportuno scrivere un coefficiente per una formula matematica nella memoria costante perché tutti i thread useranno lo stesso numero per condurre lo stesso calcolo su dati diversi. Se ogni thread in un warp legge da un indirizzo diverso e legge

solo una volta, la memoria costante non è la scelta migliore perché una sola lettura dalla memoria costante si trasmette a tutti i thread in un warp.

Texture Memory La memoria texture si trova nella memoria del device ed è memorizzata in una cache di sola lettura per SM. È un tipo di memoria globale a cui si accede tramite una cache di sola lettura dedicata che include il supporto per il filtro hardware, che può eseguire l'interpolazione in virgola mobile. La memoria texture è ottimizzata per spazi 2D, quindi i thread in un warp che la utilizzano per accedere ai dati 2D otterranno le migliori prestazioni. Per alcune applicazioni, questo è l'ideale e offre un vantaggio in termini di prestazioni grazie alla cache e all'hardware di filtro. Tuttavia, per altre applicazioni l'utilizzo della memoria texture può essere più lento della memoria globale.

Global Memory La memoria globale è la memoria più grande, a più alta latenza e più comunemente usata su una GPU. Il nome *global* si riferisce alla sua portata e durata. È possibile accedere al suo stato sul device per tutta la durata dell'applicazione.

Una variabile nella memoria globale può essere dichiarata staticamente o dinamicamente. Si può dichiarare staticamente una variabile globale nel codice del dispositivo usando il seguente qualificatore: `__device__`

Nel Capitolo 1.3.4, si è definito come allocare dinamicamente la memoria globale dall'host utilizzando `cudaMalloc` e liberata utilizzando `cudaFree`. I puntatori alla memoria globale vengono quindi passati alle funzioni del kernel come parametri. Le allocazioni di memoria globale esistono per la durata di un'applicazione e sono accessibili a tutti i thread di tutti i kernel. È necessario prestare attenzione quando si accede alla memoria globale da più thread. Poiché non è possibile sincronizzare l'esecuzione di thread tra blocchi di thread, esiste il potenziale rischio che più thread in blocchi diversi modifichino contemporaneamente la stessa posizione nella memoria globale, il che porterà a un comportamento del programma indefinito.

La memoria globale risiede nella memoria del dispositivo ed è accessibile tramite transazioni di memoria a 32, 64 o 128 byte. Queste transazioni devono essere allineate, cioè il primo indirizzo deve essere un multiplo di 32 byte, 64 byte o 128 byte. L'ottimizzazione delle transazioni di memoria è fondamentale per ottenere prestazioni ottimali. Quando un warp esegue una operazione load/store, il numero di transazioni richieste per soddisfare quella richiesta dipende in genere dai seguenti due fattori:

- Distribuzione degli indirizzi di memoria tra i thread del warp.

- Allineamento degli indirizzi di memoria per transazione.

In generale, maggiore è il numero di transazioni necessarie per soddisfare una richiesta di memoria, maggiore è il potenziale di trasferimento di byte non utilizzati, con conseguente riduzione dell'efficienza del throughput.

2 Sequential implementation

La rotazione di Jacobi è una rotazione di un sottospazio bidimensionale in uno spazio n -dimensionale, denotato da \mathbf{J} . Dopo l'applicazione di questa trasformazione, una coppia di elementi di una matrice simmetrica $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono azzerati, come indicato in $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{J}^T \mathbf{B} \mathbf{J} = \mathbf{B}'$ dove $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ e θ è l'angolo di rotazione nel piano (i, j) . Solo le righe i -esima e j -esima di \mathbf{B} sono interessate. In modo simile, solo le colonne j -esima e i -esima sono interessate. Gli elementi b'_{ij} , b'_{ji} , b'_{ii} e b'_{jj} in \mathbf{B} vengono utilizzati per calcolare gli angoli nelle matrici di rotazione che eliminano gli elementi b'_{ij} e b'_{ji} come mostrato in Eq. 11.

$$\mathbf{J}(i, j, \theta) = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ j & \begin{bmatrix} 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \quad (11)$$

L'algoritmo Jacobi esegue una sequenza di aggiornamenti della matrice \mathbf{B} che viene ortogonalizzata, ogni nuova matrice \mathbf{B} è più diagonale rispetto alla precedente. Quando gli elementi fuori della diagonale sono abbastanza piccoli, possono essere considerati nulli. In particolare, ogni rotazione Jacobi comporta una pre-moltiplicazione e una post-moltiplicazione di \mathbf{B} per matrici ortogonali. In generale, vengono eseguite $(n^2 - n)/2$ rotazioni (nel caso di una matrice simmetrica) cercando di rendere zero tutti gli elementi fuori diagonale. Queste $(n^2 - n)/2$ trasformazioni costituiscono una scansione (sweep). Comunemente, le rotazioni di Jacobi vengono applicate utilizzando uno dei seguenti approcci: esecuzione di rotazioni cicliche per riga o per colonna. In questi approcci, la coppia (i, j) è selezionata riga per riga o colonna per colonna, rispettivamente. Ad esempio, se $n = 4$, la sequenza di rotazione è: $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$. [1]

3 Parallel implementation

Parallelizzare la One-Sided Jacobi implica il partizionamento di $n(n-1)/2$ coppie di colonne che devono essere ortogonali a ciascuna scansione (sweep) in gruppi di coppie di colonne indipendenti. Ogni sweep viene quindi elaborato un set alla volta, ortogonalizzando in parallelo le coppie di colonne all'interno del set corrente.

Le coppie di colonne per ciascun set vengono generate utilizzando un algoritmo di pianificazione round-robin. Concettualmente, ogni round rappresenta un set e gli abbinamenti all'interno di un round corrispondono agli abbinamenti di colonne all'interno di quel set. Ad esempio, di seguito sono riportati tutti i possibili set contenenti le rispettive coppie di colonne per $n = 6$:

$$\begin{aligned}\text{Set 1} &= \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\} \\ \text{Set 2} &= \{(1, 4), (2, 6), (3, 5)\} \\ \text{Set 3} &= \{(1, 6), (2, 3), (4, 5)\} \\ \text{Set 4} &= \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\} \\ \text{Set 5} &= \{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\}\end{aligned}$$

In generale, ogni set contiene $\hat{n}/2$ coppie di colonne ortogonalizzate in parallelo, dove \hat{n} è il prossimo numero intero pari maggiore o uguale a n . Se n è dispari, quindi ogni set avrà una colonna accoppiata con una colonna "fantasma"; le coppie che contengono la colonna fantasma non sono ortogonali. In base a questo schema, sono necessari $\hat{n}/2 - 1$ set per completare una sweep completa.

La coppia di colonne (p', q') ortogonalizzata dalla i -esima rotazione in un set viene calcolata direttamente dalla coppia di colonne (p, q) corrispondente ortogonalizzata dalla i -esima rotazione nel set precedente. In pratica, questo schema è più adatto per l'esecuzione su una GPU in cui la larghezza di banda di calcolo supera notevolmente la larghezza di banda di memoria. [5]

Nelle tradizionali implementazioni sequenziali dell'algoritmo Jacobi, il parallelismo non viene sfruttato, principalmente a causa della dipendenza dei dati di una rotazione con la sua precedente. L'algoritmo Jacobi parallelo sfrutta il massimo parallelismo per la decomposizione di una matrice simmetrica. Questo algoritmo richiede un numero di step pari a $n - 1$, in cui in ogni step si compiono $n/2$ rotazioni. Tutte le rotazioni all'interno di uno step possono essere eseguite in parallelo. [1]

Si è usato CUDA per implementare una SVD parallela basata sul metodo One-Sided Jacobi descritto in 1.2. La matrice di input A ($m \times n$) è una matrice reale in cui $m \geq n$. Se $m < n$, la SVD di A può essere calcolata

dalla SVD di $A^T = V\Sigma U^T$. Le matrici di input sono salvate in column-major order e single-precision floating point. [5]

3.1 Global Memory

Descrizione algoritmo Global Memory

3.2 Semi Shared Memory

Descrizione algoritmo Semi Shared Memory

3.3 Shared Memory

Descrizione algoritmo Shared Memory

4 Performance

Inserire grafici per i confronti

5 Conclusioni

Scrivere conclusioni

Riferimenti bibliografici

- [1] R. I. Acosta-Quiñonez, D. Torres-Roman, R. Rodríguez-Avila e D. Robles-Valdez. *A parallel implementation of One-Sided Jacobi SVD for non-symmetric squared matrices on a high-performance GPU*. Jalisco: Instituto Politécnico Nacional, 2016.
- [2] Wajih Halim Boukaram, George Turkiyyah, Hatem Ltaief e David E. Keyes. *Batched QR and SVD algorithms on GPUs with application in hierarchical matrix compression*. Thuwal: King Abdullah University of Science e Technology (KAUST), 2017.
- [3] John Cheng, Max Grossman e Ty McKercher. *Professional Cuda C Programming*. A cura di Inc. John Wiley & Sons. Indianapolis, 2014.
- [4] Sheetal Lahabar e P.J. Narayanan. *Singular Value Decomposition on GPU using CUDA*. Hyderabad: Center for Visual Information Technology International Institute of Information Technology, 2009.
- [5] Michael V. Romer. *Computing the singular value decomposition in parallel on graphics processing units using a one-sided Jacobi method*. Austin: University of Texas, 2013.
- [6] Jason Sanders e Kandrot Edward. *CUDA by example : an introduction to general-purpose GPU programming*. A cura di Addison-Wesley. Boston, 2010.
- [7] Claudio Turchetti, Laura Falaschetti e Lorenzo Manoni. *Singular Value Decomposition Algorithms for Embedded Systems: A Comprehensive Treatment*. Università Politecnica delle Marche,