Esercizi di ammissione
Olimpiadi della Matematica

Stage:	Senior 2017
Soluzioni di:	**Matteo Palmieri**
Scuola:	Liceo Scientifico Statale "Galileo Ferraris" – Torino
Anno di corso*:	4º
Genere:	M
Tipo di esercizi:	Winter
Data:	21 luglio 2017

Indice delle soluzioni

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A4}}$

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni x e y reali si ha che

$$f(x + y^2) \geqslant (y + 1)f(x) \tag{A4.1}$$

Soluzione:

$f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione, infatti sostituendo si ottiene $0 \geqslant (y + 1) \cdot 0$ ovvero $0 \geqslant 0$. Si vuole ora dimostrare che $f(x) = 0$ è l'unica soluzione.

Step 1: Si vuole dimostrare che $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sostituisco $y = -1$ e $x = z - 1$ e ottengo:

$$f(z - 1 + 1) \geqslant (-1 + 1)f(z - 1) \tag{A4.2}$$

$$f(z) \geqslant 0, \forall z \in \mathbb{R} \tag{A4.3}$$

Step 2: Si vuole dimostrare che $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Step 2.1: dimostro ora per induzione che $f(x + ny^2) \geqslant (y + 1)^n f(x)\ \forall n \geqslant 1 \in \mathbb{N}$

Passo base: $f(x + y^2) \geqslant (y + 1)f(x)$ è vero per ipotesi (caso con $n = 1$)

Passo induttivo: supponiamo che $f(x + (n - 1)y^2) \geqslant (y + 1)^{n-1}f(x)$ sia vero. Si vuole dimostrare che $f(x + ny^2) \geqslant (y + 1)^n f(x)$. Pongo $x = z + y^2$ e sostituisco nell'ipotesi induttiva:

$$f(z + y^2 + (n - 1)y^2) \geqslant (y + 1)^{n-1}f(z + y^2) \tag{A4.4}$$

$$f(z + ny^2) \geqslant (y + 1)^{n-1}f(z + y^2) \tag{A4.5}$$

Ma $f(z + y^2) \geqslant (y + 1)f(z)$ per ipotesi, quindi:

$$f(z + ny^2) \geqslant (y + 1)^{n-1}f(z + y^2) \geqslant (y + 1)^n f(z) \tag{A4.6}$$

$$f(z + ny^2) \geqslant (y + 1)^n f(z) \tag{A4.7}$$

Step 2.2: dimostro che $f(x + \frac{k}{n}) \geqslant (1 + \frac{1}{n})^{kn} f(x)\ \forall k \geqslant 1 \in \mathbb{N}$ per induzione.

Passo base ($k = 1$): nella $(A4.7)$ sostituisco $z = x$ e $y = \frac{1}{n}$ e ottengo:

$$f\left(x + n\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \geqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n f(x) \qquad f\left(x + \frac{1}{n}\right) \geqslant \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n f(x) \tag{A4.8}$$

Passo induttivo: suppongo che $f(x + \frac{k-1}{n}) \geqslant (1 + \frac{1}{n})^{(k-1)n} f(x)$ e dimostro che $f(x + \frac{k}{n}) \geqslant (1 + \frac{1}{n})^{kn} f(x)$. Sostituisco nell'ipotesi induttiva $x = z + \frac{1}{n}$ e ottengo:

$$f\left(z + \frac{1}{n} + \frac{k - 1}{n}\right) \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(k-1)n} f\left(z + \frac{1}{n}\right) \tag{A4.9}$$

Però per il passo base ($A4.9$), $f\left(x+\frac{1}{n}\right) \geqslant \left(\frac{1}{n}+1\right)^n f(x)$, quindi:

$$f\left(z+\frac{1}{n}+\frac{k-1}{n}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(k-1)n} f\left(z+\frac{1}{n}\right) \tag{A4.10}$$

$$\geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(k-1)n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} f\left(z+\frac{1}{n}\right) = \tag{A4.11}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} f\left(z+\frac{1}{n}\right) \tag{A4.12}$$

Quindi:

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} f(x) \tag{A4.13}$$

Per lo Step 2.2 posso sostituire $k = n$ e ottengo:

$$f(x+1) \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} f(x) \tag{A4.14}$$

Ovvero:

$$f(x) \leqslant \frac{f(x+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \tag{A4.15}$$

che vale $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$.

Poiché $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ allora:

$$lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty \tag{A4.16}$$

Quindi:

$$lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 0 \tag{A4.17}$$

Quindi $f(x) \leqslant 0$.

Ma se $f(x) \geqslant 0$ e $f(x) \leqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ allora $f(x) = 0$ è l'unica soluzione.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A5}}$

Siano a, b, c, d numeri reali positivi. Dimostrare che

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leqslant 4+\frac{(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2}{3abcd} \tag{A5.1}$$

Soluzione:

Poiché a, b, c e d sono reali positivi, allora si può moltiplicare entrambi i membri della disequazione per $3abcd$ ottenendo:

$$3abcd(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leqslant 12abcd+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \tag{A5.2}$$

Ovvero moltiplicando $abcd$ con $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ nel termine di sinistra:

$$3(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc) \leqslant 12abcd+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \tag{A5.3}$$

Indico ora con $\sum_{cyc} a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$ la somma ciclica nelle 4 variabili a, b, c, d con esponenti x_1, x_2, x_3, x_4, per cui:

$$\sum_{cyc} a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4} = a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4} + a^{x_2}b^{x_3}c^{x_4}d^{x_1} + a^{x_3}b^{x_4}c^{x_1}d^{x_2} + a^{x_4}b^{x_1}c^{x_2}d^{x_3} \tag{A5.4}$$

Riscrivo quindi la $(A5.3)$ con questa notazione:

$$3\left(\sum_{cyc} a \sum_{cyc} abc\right) \leqslant 12abcd+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \tag{A5.5}$$

Sia LHS il termine di sinistra e RHS il termine di destra, sviluppando ottengo:

$$LHS = 3\sum_{cyc} a^2bc + 3\sum_{cyc} ab^2c + 3\sum_{cyc} abc^2 + 12abcd \tag{A5.6}$$

$$RHS = 12abcd+\sum_{cyc} a^2b^2+\frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2c^2+2\sum_{cyc} a^2bc+2\sum_{cyc} ab^2c+2\sum_{cyc} abc^2+6abcd \tag{A5.7}$$

Riscrivendo la disuguaglianza e semplificando si ottiene:

$$\sum_{cyc} a^2bc + \sum_{cyc} ab^2c + \sum_{cyc} abc^2 \leqslant \sum_{cyc} a^2b^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2c^2 + 6abcd \tag{A5.8}$$

Siano ora X, Y, Z tre variabili reali positive. Per la disuguaglianza di raggruppamento:

$$\sum_{sym} X^2 \geqslant \sum_{sym} XY \tag{A5.9}$$

dove $\sum_{sym}$ indica la somma simmetrica nelle tre variabili X, Y, Z. Dividendo per 2 a entrambi i membri si ottiene:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geqslant XY + XZ + YZ \tag{A5.10}$$

Sostituendo ora $X = ab + cd, Y = ac + bd, Z = ad + bc$ e svolgendo i prodotti si ottiene:

$$(ab + cd)^2 + (ac + bd)^2 + (ad + bc)^2 \geqslant \tag{A5.11}$$
$$(ab + cd)(ac + bd) + (ab + cd)(ad + bc) + (ac + bd)(ad + bc) \tag{A5.12}$$

Ovvero

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd + a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \geqslant \tag{A5.13}$$
$$a^2bc + ab^2d + ac^2d + bcd^2 + a^2bd + ab^2c + acd^2 + bc^2d + a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \tag{A5.14}$$

Riscrivendo utilizzando le somme cicliche:

$$\sum_{cyc} a^2b^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2c^2 + 6abcd \geqslant \sum_{cyc} a^2bc + \sum_{cyc} ab^2c + \sum_{cyc} abc^2 \tag{A5.15}$$

Si ottiene proprio la disuguaglianza $(A5.8)$ che si voleva dimostrare. Da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A6}}$

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni x e y reali e per ogni $n \geqslant 2$ naturale si ha che

$$f(x^n + 2f(y)) = (f(x))^n + y + f(y) \tag{A6.1}$$

Soluzione:

Step 1: Dimostro che $f(x)$ è iniettiva

Siano $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(y_1) = f(y_2) = z$. Sostituendo a y, y_1 e y_2 ottengo:

$$f(x^n + 2z) = (f(x))^n + y_1 + z \tag{A6.2}$$

$$f(x^n + 2z) = (f(x))^n + y_2 + z \tag{A6.3}$$

Sottraendo le due equazioni membro a membro ottengo:

$$0 = y_1 - y_2 \qquad\qquad y_1 = y_2 \tag{A6.4}$$

Da cui $f(x)$ è iniettiva.

Step 2: Dimostro che $f(x)$ è suriettiva

Considero n dispari e prendo x tale che $x^n + 2f(y) = y$ (è possibile perché con n dispari x^n è invertibile). Allora il termine di sinistra $f(x^n + 2f(y))$ è uguale a $f(y)$. Sostituendo ottengo:

$$f(y) = (f(x))^n + y + f(y) \tag{A6.5}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{y} \tag{A6.6}$$

Essendo n dispari, $\sqrt[n]{y}$ esiste ed è suriettiva su tutto il suo dominio. Quindi $f(x)$ è suriettiva.

Step 3: Dato che $f(x)$ è suriettiva allora $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha) = 0$. Sostituisco a y, α e ottengo:

$$f(x^n) = [f(x)]^n + \alpha \qquad\qquad [f(x)]^n = f(x^n) - \alpha \tag{A6.7}$$

Sostituisco $f(x^n) - \alpha$ al posto di $[f(x)]^n$ nel testo e ottengo:

$$f(x^n + 2f(y)) = f(x^n) - \alpha + y + f(y) \tag{A6.8}$$

Dato che $f(x)$ è biettiva e invertibile allora $\exists z$ tale che $z = 2f(y)$. Allora $y = f^{-1}(\frac{z}{2})$. Sostituendo:

$$f(x^n + z) = f(x^n) - \alpha + f^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} \tag{A6.9}$$

Definisco ora $g(x) = f^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} - \alpha$. Inoltre ponendo n dispari $\exists w$ tale che $w = x^n$. Sostituendo:

$$f(w + z) = f(w) + g(z) \tag{A6.10}$$

Step 4: Considero la $(A6.10)$: $f(w+z)$ è simmetrica in w e z. Quindi:

$$f(w) + g(z) = f(w+z) = f(z) + g(w) \tag{A6.11}$$

Quindi:

$$g(z) = f(z) + g(w) - f(w) \tag{A6.12}$$

Fissando il valore di w si ottiene che $g(z) = f(z) + c$ per una certa costante c. Sostituendo nella $(A6.10)$ e sommando c a entrambi i membri, si ottiene:

$$f(w+z) + c = f(w) + c + f(z) + c \tag{A6.13}$$

Da cui si ottiene che $f(x) + c$ rispetta l'equazione di Cauchy.

Step 5: Si vuole ora dimostrare che esiste una parte del piano dove non si trova il grafico di $f(x)$. Ne deriva che esiste una parte del piano in cui non si trova $f(x) + c$. Allora le uniche soluzioni dell'equazioni di Cauchy sono del tipo $f(x) + c = \lambda x$. Sostituisco $n = 2$ e ottengo:

$$f(x^2 + 2f(y)) = [f(x)]^2 + y + f(y) \tag{A6.14}$$

Inoltre dato che $[f(x)]^2 \geqslant 0$ allora:

$$f(x^2 + 2f(y)) \geqslant y + f(y) \tag{A6.15}$$

Fissando y, allora $\exists a, b$ costanti tali che $a = 2f(y)$ e $b = y + f(y)$. Allora:

$$f(x^2 + a) \geqslant b \tag{A6.16}$$

Ne deriva che tutti i punti del tipo (h, k) con $h > a$ e $k < b$ non appartengono al grafico di $f(x)$. Allora le uniche soluzioni sono del tipo $f(x) = \lambda x + \mu$.

Step 6: Trovo ora quali λ e μ soddisfano. Sostituisco $\lambda x + \mu$ a $f(x)$ e ottengo:

$$f(x^n + 2\lambda y + 2\mu) = (\lambda x + \mu)^n + y + \lambda y + \mu \tag{A6.17}$$

$$\lambda x^n + 2\lambda^2 y + 2\mu\lambda + \mu = (\lambda x + \mu)^n + y + \lambda y + \mu \tag{A6.18}$$

$$\lambda x^n - (\lambda x + \mu)^n = y + \lambda y - 2\lambda^2 y - 2\mu\lambda \tag{A6.19}$$

Mantenendo costante y si ottiene che $\lambda x^n - (\lambda x + \mu)^n$ è costante, quindi o $\mu = 0$ o $\lambda = 0$. Però λ non può essere 0 perché sostituendo a $f(x)$ la costante μ si ottiene $\mu = \mu + y + \mu$ $\forall y \in \mathbb{R}$, che è impossibile. Quindi $\mu = 0$. Sostituendo nella $(A6.19)$ ottengo:

$$y(1 + \lambda - 2\lambda^2) = 0 \tag{A6.20}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$. Quindi $\lambda = 1$ o $\lambda = -\frac{1}{2}$ ($f(x) = x$ o $f(x) = -\frac{1}{2}x$). Sostituendo ottengo che $f(x) = x$ è soluzione. Infatti:

$$x^n + 2y = x^n + y + y \tag{A6.21}$$

D'altra parte $f(x) = -\frac{1}{2}x$ non è soluzione, infatti:

$$-\frac{1}{2}x^n - \frac{1}{2}y = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n + y - \frac{1}{2}y \tag{A6.22}$$

Non è vero per ogni terna (x, y, n). Ad esempio con la terna $(1, 1, 1)$ si ottiene $-1 = 0$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A7}}$

Trovare tutti i polinomi monici e a coefficienti interi $p(x)$ con la proprietà che per ogni $n \geqslant 1$ naturale esiste un numero intero x tale che $p(x) = 2^n$.

Soluzione:

Sia x_i il valore tale che $p(x_i) = 2^i$, con $i \geqslant 1 \in \mathbb{N}$. Considero un polinomio $p(x) = x + a$ monico, a coefficienti interi e di primo grado. Questo polinomio soddisfa la tesi, infatti $p(2^n - a) = 2^n - a + a = 2^n$ $\forall n \geqslant 1$ e $\forall a \in \mathbb{Z}$. Si vuole dimostrare che questo è l'unico tipo di polinomio che soddisfa.

Si osserva che, preso il polinomio $p(x)$ traslato orizzontalmente in $p_1(x)$, tale che $p(x+c) = p_1(x)$ con $c \in \mathbb{Z}$, allora $p(x)$ soddisfa la tesi se e solo se anche $p_1(x)$ soddisfa. Infatti sia x_i tale che $p(x_i) = 2^i$. Allora $p(x_i - c + c) = 2^i$. Ma $p(x_i - c + c) = p_1(x_i - c)$. Quindi $p_1(x_i - c) = 2^i$ $\forall i \geqslant 1$. Quindi $p_1(x)$ soddisfa.

Considero ora una traslazione di un vettore $\overrightarrow{v} = (1, 0)$, orizzontale. Allora il traslato di $p(x)$ sarà $p(x-1)$. Sia

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \tag{A7.1}$$

Con $a_k = 1$ ($p(x)$ è monico) e k il grado di $p(x)$. Allora $p(x-1)$ sarà

$$p(x-1) = \sum_{i=0}^{k} a_i (x-1)^i = (x-1)^k + a_{k-1}(x-1)^{k-1} + ... + a_0 \tag{A7.2}$$

Sviluppando le potenze del binomio $x - 1$ ai primi due termini si ottiene

$$p(x-1) = x^k - kx^{k-1} + a_{k-1}x^{k-1} + q_1(x) = x^k + (a_{k-1} - k)x^{k-1} + q_1(x) \tag{A7.3}$$

Per un certo polinomio $q_1(x)$ di grado al più $k - 2$. Analogamente, traslando il polinomio di un vettore $\overrightarrow{v} = (-1, 0)$, si ottiene

$$p(x+1) = x^k + (a_{k-1} + k)x^{k-1} + q_2(x) \tag{A7.4}$$

E' quindi possibile, applicando una traslazione orizzontale di ± 1, aumentare o diminuire di k il coefficiente del termine di grado $k - 1$. Esiste allora un'opportuna traslazione di un vettore $\overrightarrow{v} = (u, 0)$ con $u \in \mathbb{Z}$ tale che il polinomio $p(x + u)$ abbia coefficiente a_{k-1} del termine x^{k-1} tale che $|a_{k-1}| < k$.

Si assume quindi, senza perdita di generalità, che $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ con $a_k = 1, |a_{k-1}| < k$. Siano inoltre $p(x-1)$ e $p(x+1)$ i traslati di $p(x)$ di un vettore orizzontale di lunghezza unitaria. Dato che $|a_{k-1}| < k$ allora

$$p(x-1) = x^k - c_1 x^{k-1} + q_1(x) \tag{A7.5}$$

$$p(x+1) = x^k + c_2 x^{k-1} + q_2(x) \tag{A7.6}$$

con $-c_1 = a_{k-1} - k < 0$ e $c_2 = a_{k-1} + k > 0$. quindi $c_1, c_2 \geqslant 0$.

Si osserva ora che $p(x)$ soddisfa se e solo se anche $p_1(x) = p(-x)$ soddisfa (ogni valore che soddisfa $p_1(x)$, sarà l'opposto del valore che soddisfa $p(x)$). Considero ora il caso in cui k è pari. Allora, considerando il grafico del polinomio sul piano cartesiano, i valori x_i che soddisfano $p(x_i) = 2^i$ possono trovarsi sul "ramo" destro o sinistro del grafico, ma almeno uno dei due rami ha infiniti valori. Si assume senza perdita di generalità che sia il "ramo" destro. Se, infatti, fosse il ramo sinistro, basta considerare $p(-x)$, che avrà infiniti valori sul ramo destro (per k dispari uno dei due rami avrà valori negativi sull'asse y, quindi non conterrà alcun x_i).

Si vuole ora dimostrare che esiste un valore M tale che per $x > M$ si ha $p(x-1) < x^k < p(x+1)$. Considero la prima disuguaglianza:

$$p(x-1) < x^k \tag{A7.7}$$

$$x^k - c_1 x^{k-1} + q_1(x) < x^k \tag{A7.8}$$

$$c_1 x^{k-1} > q_1(x) \tag{A7.9}$$

Supponiamo $x > 1$, allora $x^j > x^i \ \forall j > i$. Sia $q_1(x) = \sum_{i=0}^{k-2} b_i x^i$ e sia inoltre A il massimo di $|b_i|$ con $0 \leqslant i \leqslant k-2$. Si vuole dimostrare che per $x > 1$ e $c_1 x > (k-1)A$ vale la $(A7.5)$. Infatti

$$c_1 x^{k-1} > (k-1)Ax^{k-2} = \tag{A7.10}$$

$$= \underbrace{Ax^{k-2} + ... + Ax^{k-2}}_{k-1} \tag{A7.11}$$

Ma $Ax^{k-2} \geqslant b_i x^{k-2} \geqslant b_i x^i$. Da cui

$$= \underbrace{Ax^{k-2} + ... + Ax^{k-2}}_{k-1} \geqslant \sum_{i=0}^{k-2} b_i x^i = q_1(x) \tag{A7.12}$$

Quindi per $x > (k-1)A/c_1$ si ha $p(x-1) < x^k$. Analogamente per $x > (k-1)B/c_2$ e $x > 1$ si ha $p(x+1) > x^k$, con B il massimo dei d_i con $0 \leqslant i \leqslant k-2$, detto $q_2(x) = \sum_{i=0}^{k-2} d_i x^i$. Quindi per $x > M$ =max$\{1, (k-1)A/c_1, (k-1)B/c_2\}$ si ha

$$p(x-1) < x^k < p(x+1) \tag{A7.13}$$

Sostituendo 2^m al posto di x si ottiene $p(2^m - 1) < 2^{mk} < p(2^m + 1)$. Ma esiste un valori $x_{mk} \in \mathbb{Z}$ tale che $p(x_{mk}) = 2^{mk}$. Ma allora necessariamente $x_{mk} = 2^m$ per infiniti $m \in \mathbb{N}$. Ma allora sia $p(x) = x^k + r(x)$. Valutando $p(x)$ negli infiniti valori del tipo 2^m, si ottiene $p(2^m) = 2^{mk} + r(2^m)$ ovvero $r(2^m) = 0$ per infiniti valori. Ma allora $r(x)$ è il polinomio nullo. Quindi $p(x) = x^k$. Ma allora $p(x)$ è una potenza di 2 se e solo se $x = 2^m$, quindi i valori delle potenze di due che può assumere $p(x)$ sono solo del tipo 2^{mk} (quelli con esponenti multipli di k). Quindi per poter assumere ogni valore del tipo 2^n, si deve avere che $k|n \ \forall n \in N$. Quindi $k = 1$. Ma allora gli unici polinomi che soddisfano la tesi sono $p(x) = x$ e le sue traslazione orizzontali di un vettore $\overrightarrow{v} = (u, 0)$ con $u \in \mathbb{Z}$, che è già stato dimostrato soddisfare le condizioni del problema.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{C4}}$

Alberto e Barbara si fronteggiano su una scacchiera 2017×2017. Prima Alberto sceglie k quadratini e posiziona su ciascuno un sensore al colore rosso. Poi Barbara colora alcuni quadratini di rosso, in modo da formare un quadrato 1500×1500. Alberto viene quindi notificato da ciascuno dei sensori che rileva il colore. Qual è il minimo k tale che, per qualunque scelta di Barbara, è in grado di capire esattamente quali sono i quadratini scelti da lei?

Soluzione:

Si vuole dimostrare che il minimo k è $2 \cdot (2017 - 1500) = 1034$.

Step 1: dimostro che $2 \cdot (2017 - 1500)$ sono abbastanza sensori per soddisfare la tesi. Assegno ad ogni possibile quadrato 1500×1500 una coppia di numeri interi (x, y), che corrisponde alle coordinate del quadratino 1×1 in basso a sinistra del quadrato 1500×1500 considerato. In particolare il quadratino 1×1 in basso a sinistra della scacchiera ha coordinate $(1, 1)$, mentre quello in alto a destra $(2017, 2017)$ (l'ordinata aumenta di 1 salendo verso l'alto, mentre l'ascissa aumenta di 1 andando verso destra).

Si osserva ora che i quadrati 1500×1500 per essere interamente contenuti nella scacchiera devono avere le coordinate (x, y) con $1 \leqslant x \leqslant 518$ e $1 \leqslant y \leqslant 518$.

Dispongo ora due strisce di sensori. La prima con coordinate del tipo $(1500, i)$ con $1 \leqslant i \leqslant 517$, la seconda con coordinate del tipo $(j, 1500)$ con $1 \leqslant j \leqslant 517$ [fig. 1]. Considero ora un generico quadrato 1500×1500 con coordinate (a, b). Una volta posizionato si attiveranno tutti e soli i sensori con coordinate $(1500, i_1)$ con $i_1 \geqslant b$ e $(j_1, 1500)$ con $j_1 \geqslant a$ (i sensori rossi in [fig. 1]). Quindi per ogni quadrato 1500×1500 si attivano gruppi distinti di sensori. Nel caso estremo in cui il quadrato abbia coordinate $(518, 518)$, non si attiva alcun sensore, per cui è comunque possibile individuarlo.

Quindi queste due strisce sono sufficienti per individuare ogni quadrato in modo distinto, per un totale di $517 \cdot 2 = 1034$ sensori.

Step 2: dimostro che devono esserci almeno 1034 sensori. Considero il quadrato (1,1) e lo "muovo" spostandolo con una mossa per volta fino al quadrato (1,518). Una mossa consiste nell'aumentare l'ordinata del quadrato di 1. Ho quindi compiuto 517 mosse. Analogamente "muovo" il quadrato da (1,518) a (518,518) (aumento l'ascissa di 1, 517 volte), quindi da (518,518) a (518,1) (diminuisco l'ordinata di 1) e infine da (518,1) a (1,1) (diminuisco l'ascissa di 1). Il quadrato considerato ha quindi compiuto un giro della scacchiera, utilizzando $517 \cdot 4 = 2068$ mosse. D'altra parte ad ogni mossa almeno un sensore deve cambiare di stato altrimenti avrei due quadrati tra loro irriconoscibili (guardando i sensori). Devo avere quindi almeno 2068 cambi di stato.

Considero ora un singolo sensore che può essere in due stati A e B, dove A era il suo stato iniziale (non importa se acceso o spento). Ad un certo punto è passato dallo stato A allo stato B e poi dallo stato B allo stato A durante il giro del quadrato. Quindi ha cambiato stato esattamente due volte. Ma allora devono esserci almeno 1034 sensori per ottenere almeno 2068 cambi di stato.

D'altra parte esiste una configurazione di 1034 sensori che soddisfa la tesi (per la Parte 1). Quindi 1034 è il minimo.

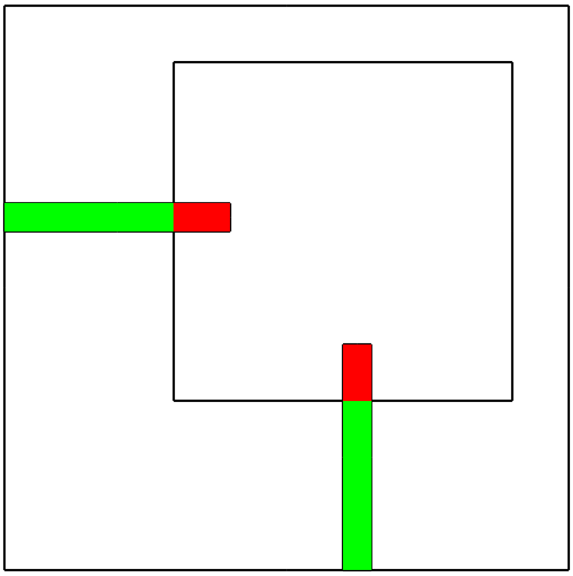


Fig. 1

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{C5}}$

Alberto gioca un solitario su una scacchiera 2017×2017. All'inizio distribuisce n gettoni tra le varie caselle, lasciando, eventualmente, alcune caselle vuote o riponendo anche più gettoni su un solo posto. Ad ogni mossa sceglie una casella che contiene almeno tanti gettoni quante sono quelle adiacenti (con un lato in comune) e sposta un gettone su ognuna di queste. Determinare il massimo n tale che, per qualunque disposizione iniziale, Alberto non può effettuare un qualsiasi numero di mosse.

Soluzione:

Step 0: osservazioni iniziali

Il numero di configurazioni distinte con n monete (fissando n) è un numero finito. Quindi non è possibile effettuare un numero infinito di mosse senza ricreare almeno due volte la stessa configurazione sulla scacchiera. Inoltre se è possibile ritornare, dopo un certo numero di mosse, ad una configurazione precedente, allora esiste una sequenza finita di mosse che riporta Alberto ogni volta alla stessa configurazione. Quindi se Alberto ha abbastanza monete per creare un ciclo che torna alla stessa configurazione, allora può ripetere questo ciclo infinite volte. Voglio ora cercare il minimo n per cui è sempre possibile creare un ciclo di questo tipo. Se n è minore di questo valore, allora Alberto non può effettuare un numero infinito di mosse.

Step 1: dimostrazione che Alberto deve effettuare lo stesso numero di mosse su ogni casella, durante un ciclo

Considero ora una casella su cui Alberto non effettua alcuna mossa durante questo ciclo. Durante il ciclo il numero delle monete su questa casella non può diminuire, poiché non vi si effettua alcuna mossa. Inoltre la somma del numero di monete su tutte le altre caselle deve rimanere costante, altrimenti Alberto non può ricreare una configurazione precedente. Quindi il numero di monete su questa casella non può neanche aumentare. Allora Alberto non può muovere neanche sulle caselle adiacenti a questa. Ma allora, reiterando il ragionamento, non può su alcuna casella della scacchiera, il che è assurdo. Quindi Alberto deve effettuare una mossa, durante un ciclo, su ogni casella. Inoltre poniamo che esista una casella su cui Alberto effettua un numero di mosse m minore durante un ciclo e sia k il numero di bordi della casella. Allora questa casella, alla fine del ciclo, avrà ceduto $k \cdot m$ monete. D'altra parte ognuna delle k caselle adiacenti le avrà ceduto un numero di monete maggiore o uguale a m. Poiché alla fine del ciclo il numero di monete della casella considerata deve essere lo stesso di quello all'inizio del ciclo, allora le caselle adiacenti devono cederle ognuna esattamente m monete. Ma allora, reiterando il ragionamento alle caselle adiacenti a quelle adiacenti alla casella considerata, si ottiene che su tutte le caselle della scacchiera deve essere effettuato lo stesso numero di mosse (m).

Step 2: trovo il massimo n che soddisfa le ipotesi

Considerata una qualsiasi numerazione delle caselle da 1 a 2017^2, sia m_i il numero di monete sulla casella i. Sia inoltre k il numero di mosse su una casella durante un ciclo e C_i^j la mossa effettuata sulla casella i la $j-$esima volta durante un ciclo (con

$1 \leqslant i \leqslant 2017^2$ e $1 \leqslant j \leqslant k$). La sequenza di mosse compiuta da Alberto è quindi una certa permutazione dei C_i^j con $1 \leqslant i \leqslant 2017^2$ e $1 \leqslant j \leqslant k$ tale che per ogni $m < n$ e per ogni i, C_i^m venga prima di C_i^n. Sia inoltre b_i il numero di caselle adiacenti alla casella i e M_i^j il numero di mosse effettuate su caselle adiacenti alla casella i subito dopo esser stata effettuata la mossa C_i^j. Dopo aver effettuato una certa mossa C_i^j, il numero di monete tolte dalla casella i fino a quel momento durante il ciclo è uguale al numero di caselle adiacenti ad essa (b_i) per il numero di mosse effettuate su essa (j). Il numero di monete aggiunte alla casella i fino a quel momento e, invece, M_i^j. Per poter effettuare la mossa C_i^j è quindi necessario e sufficiente che:

$$m_i \geqslant j \cdot b_i - M_i^j \tag{C5.1}$$

Per ogni i, j tali che $1 \leqslant i \leqslant 2017^2$ e $1 \leqslant j \leqslant k$. Sommando membro a membro tutte le disuguaglianze di questo tipo al variare di i e j si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2017^2} m_i \geqslant \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2017^2} (j \cdot b_i - M_i^j) = \sum_{j=1}^{k} j \cdot \sum_{i=1}^{2017^2} b_i - \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2017^2} M_i^j \tag{C5.2}$$

Considero il termine di sinistra: la sommatoria degli m_i al variare di i è esattamente il numero di monete sulla scacchiera, cioè n. Quindi

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2017^2} m_i = \sum_{j=1}^{k} n = k \cdot n \tag{C5.3}$$

Considero invece il termine di destra: la sommatoria dei b_i è esattamente due volte il numero dei bordi interni alla scacchiera, ovvero il numero di bordi in comune tra due caselle. Considerate infatti due caselle A e B il bordo tra esse compreso, nella sommatoria la caselle B compare nel numero b_A e quella A nel numero b_B. Ma il numero dei bordi interni è $2 \cdot 2016 \cdot 2017$. Quindi

$$\sum_{j=1}^{k} j \cdot \sum_{i=1}^{2017^2} b_i = \sum_{j=1}^{k} j \cdot (4 \cdot 2016 \cdot 2017) = k(k+1)(2 \cdot 2016 \cdot 2017) \tag{C5.4}$$

Considero infine la somma degli M_i^j al variare di i e j. Considero una coppia di caselle A e B adiacenti e l'elenco ordinato delle mosse su A e su B. Per ogni coppia di mosse del tipo $C_A^{j_1}$ e $C_B^{j_2}$ con $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant k$, esattamente una delle due mosse viene contata nella somma degli M_i^j. Prese due caselle il numero di coppie di mosse è k^2. Inoltre ogni coppia di caselle adiacenti corrisponde al bordo tra esse ed il numero di bordi interni è nuovamente $2 \cdot 2016 \cdot 2017$. Quindi

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2017^2} M_i^j = (2 \cdot 2016 \cdot 2017)k^2 \tag{C5.5}$$

Matteo Palmieri

Sostituendo le equazioni $(C5.3), (C5.4), (C5.5)$ nella $(C5.2)$, si ottiene

$$kn \geqslant k(k+1)(2 \cdot 2016 \cdot 2017) - (2 \cdot 2016 \cdot 2017)k^2 = k(2 \cdot 2016 \cdot 2017) \qquad \text{(C5.6)}$$

Ovvero

$$n \geqslant 2 \cdot 2016 \cdot 2017 \qquad \text{(C5.7)}$$

Che è la condizione sufficiente e necessaria per cui Alberto può fare infinite mosse. Il massimo n per cui Alberto prima o poi deve fermarsi è quindi $2 \cdot 2016 \cdot 2017 - 1$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{C6}}$

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e M un intero positivo. Si sa che ogni intero $n \geqslant M$ si scrive in modo unico come somma di un numero dispari di elementi di A. Si dimostri che

(a) esiste un intero positivo P tale che ogni $n \geqslant P$ si scrive in modo unico come somma di un numero pari di elementi di A;

(b) $0 \in A$.

Soluzione:

a) Siano a_i gli elementi dell'insieme A numerati in ordine crescente, tale che $a_i < a_j$ $\forall i < j$ con $i, j \in \mathbb{N}$ e $\min a_i = a_1$. Supponiamo per assurdo che A abbia un numero finito k di elementi. Ma allora esiste un massimo numero ottenibile come somma di elementi di A che è $\sum_{i=1}^{k} a_i$. Ma ciò è assurdo poiché per ipotesi ogni numero naturale $n \geqslant M$ è esprimibile come somma di alcuni elementi di A. Quindi A è infinito. Definisco ora *espansione dispari* un modo di scrivere un numero naturale n come somma di un numero dispari di elementi di A e analogamente *espansione pari* un modo di scrivere un numero naturale n come somma di un numero pari di elementi di A.

Step 1: dimostro che presi a_k e a_j tali che $M < a_k < a_j$ allora a_k deve comparire nell'espansione dispari si $a_j - 1$. Supponiamo per assurdo che a_k non compaia nell'espansione dispari di $a_j - 1$ e sia $K = a_k - 1 + a_j + a_{j+1}$. Considero l'espansione dispari di K. Poiché $a_k > M$ allora $a_k - 1 \geqslant M$ quindi ha un'espansione dispari che non contiene a_k, dato che è minore di a_k. Ma allora, sommando l'espansione dispari di $a_k - 1$ a $a_j + a_{j+1}$ si ottiene un'espansione dispari di K che non contiene a_k. D'altra parte $a_j - 1$ abbiamo supposto abbia un'espansione dispari che non contiene a_k. Quindi sommando l'espansione dispari di $a_j - 1$ a $a_k + a_{j+1}$ si ottiene un'espansione dispari di K che contiene a_k. Ma allora K ha due espansioni dispari distinte e ciò è assurdo per ipotesi. Quindi ogni a_k tale che $M < a - k < a_j$ compare nella espansione dispari di $a_j - 1$. Quindi detto H il minimo numero naturale tale che $a_H > M$, poiché nell'espansione dispari di $a_j - 1$ con $j > H$ compaiono tutti gli a_k con $H \leqslant k < j$ allora $a_j - 1 \geqslant \sum_{H \leqslant k < j} a_k$. Quindi $a_j > \sum_{H \leqslant k < j} a_k$. Detto inoltre $\Omega = \sum_{1 \leqslant i < H} a_i$ allora

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_i = \Omega + \sum_{H \leqslant k < j} a_k < \Omega + a_j \tag{C6.1}$$

Inoltre $M \leqslant a_H - 1$ per definizione di H e $a_H - 1 \leqslant \Omega$ poiché $a_H - 1$ ha un'espansione dispari che è al più formata da tutti gli a_i con $i \leqslant H$, la somma dei quali fa Ω. Quindi $M \leqslant \Omega$.

Step 2: Voglio dimostrare che ogni $x \geqslant \Omega$ ha un'espansione pari unica. Sia un a_j tale che $a_j > x$, Allora $a_{j+1} + x > \Omega \leqslant M$, quindi ha un'espansione dispari unica S. Voglio dimostrare che a_{j+1} compare in S, quindi x ha una e una sola espansione pari (se ne due allora, aggiungendo a_{j+1}, avrei due espansioni dispari di $a_{j+1} + x$ che è assurdo). Sia a_k il più grande elemento di A in S. Supponiamo per assurdo che $k < j + 1$. Allora

$$\sum_{a_i \in S} a_i \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j+1} a_i < \Omega + a_{j+1} < x + a_{j+1} \tag{C6.2}$$

Dove la seconda disuguaglianza è stata dimostrata nella $(C6.1)$ e la terza disuguaglianza deriva dalla definizione di x. Quindi $a_k \geqslant a_{j+1}$. Supponiamo ora per assurdo che $a_k > a_{j+1}$. Allora

$$x + a_{j+1} < a_j + a_{j+1} < a_k \tag{C6.3}$$

Dove la prima disuguaglianza deriva dalla definizione di x e la seconda dal fatto che $a_j > \sum_{H \leqslant k < j} a_k$ come dimostrato nello Step 1. Quindi necessariamente a_{j+1} compare in S. Quindi per quando dimostrato, ogni $x \geqslant \Omega$ ha un'espansione pari unica. Da cui la tesi del punto a).

b) Supponiamo per assurdo che $0 \notin A$.

Step 3: voglio dimostrare che preso $a_k > \Omega$, allora $2a_{k+1} < a_{k+2}$. Supponiamo nuovamente per assurdo che $2a_{k+1} \geqslant a_{k+2}$, allora $a_{k+2} - a_{k+1} \leqslant a_{k+1}$. Consideriamo ora $a_{k+2} - a_{k+1}$: è maggiore di $a_k > \Omega$ poiché $a_j > \sum_{H \leqslant k < j} a_k$ come dimostrato nello Step 1. Quindi $a_{k+2} - a_{k+1}$ ha un'espansione pari per il punto a). Sia a_l il massimo elemento di A nell'espansione pari di $a_{k+2} - a_{k+1}$. Allora $a_l < a_{k+2} - a_{k+1} \leqslant a_{k+1}$ poiché nell'espansione pari di $a_{k+2} - a_{k+1}$ ci sono altri elementi diversi da 0 e da a_l per l'ipotesi di assurdo. Quindi $a_l < a_{k+1}$. Considero a_{k+2}: la sua espansione dispari può essere data dall'espansione pari di $a_{k+2} - a_{k+1}$ aggiungendo a_{k+1}. Quindi a_{k+2} ha un'espansione dispari diversa da quella formata dal solo elemento a_{k+2}. Ma ciò è assurdo. Quindi $2a_{k+1} < a_{k+2}$.

Step 4: considero l'espansione pari S' di $2a_{k+1}$. $2a_{k+1}$ è minore di a_{k+2}, quindi a_{k+2} non è in S'. Supponiamo che a_{k+1} non sia in S'. Allora

$$\sum_{a_i \in S'} a_i \leqslant \sum_{a_i < a_{k+1}} a_i < \Omega + a_{k+1} < 2a_{k+1} \tag{C6.4}$$

dove la seconda disuguaglianza deriva sempre dalla $(C6.1)$ e la terza disuguaglianza dal fatto che $a_k > \Omega$. Quindi necessariamente $a_{k+1} \in S'$. Togliendo a_{k+1} da S' si ottiene un'espansione dispari di a_{k+1} diversa dall'espansione dispari formata dal singolo elemento a_{k+1}. Ma ciò è assurdo. Quindi $0 \in A$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{N4}}$

Siano $m \geqslant n$ interi positivi tali che

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4} \tag{N4.1}$$

sia un intero. Dimostrare che k è un quadrato perfetto.

Soluzione:

Sia $x = m + n$ e $y = m - n$. $x > 0$ poiché somma di numeri interi positivi, mentre $y \geqslant 0$ poiché $m \geqslant n$ per ipotesi. Risolvendo il sistema in m e n si ha che $m = (x + y)/2$ e $n = (x - y)/2$. Inoltre $x - y = 2n \equiv 0 \pmod 2$, quindi $x \equiv y \pmod 2$. Sostituendo x e y nell'equazione si ottiene

$$k = \frac{x^2}{2(x+y)y^2+4} \tag{N4.2}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $2(x + y)y^2 + 4$ e portando tutto da una parte si ha

$$x^2 - 2ky^2x - 2ky^3 - 4k = 0 \tag{N4.3}$$

Risolvendo in x si ottiene che

$$x = ky^2 \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}} \tag{N4.4}$$

dove $\Delta/4 = k^2y^4 + 2ky^3 + 4k$. Quindi x è intero se e solo se $\Delta/4$ è un quadrato. Si vuole ora dimostrare che

$$(ky^2 + y - 1)^2 < \frac{\Delta}{4} < (ky^2 + y + 1)^2 \tag{N4.5}$$

Da cui deriva che $\Delta/4 = (ky^2 + y)^2$ che è l'unico quadrato perfetto tra $(ky^2 + y - 1)^2$ e $(ky^2 + y + 1)^2$.

Dimostro prima la disuguaglianza di destra: svolgendo il quadrato si ottiene

$$k^2y^4 + y^2 + 1 + 2ky^3 - 2ky^2 - 2y < \Delta/4 = k^2y^4 + 2ky^3 + 4k \tag{N4.6}$$

Semplificando k^2y^4 e $2ky^3$ da entrambi i lati si ha:

$$4k + 2ky^2 > y^2 - 2y + 1 \tag{N4.7}$$

$$2k > \frac{(y-1)^2}{y^2+2} \tag{N4.8}$$

Però k è un intero positivo quindi $2k > 1$. Voglio dimostrare che $(y-1)^2/(y^2+2) < 1$. Moltiplicando per $y^2 + 2$ e semplificando

$$y^2 - 2y + 1 < y^2 + 2 \tag{N4.9}$$
$$2y > -1 \tag{N4.10}$$

che è sempre vero dato che $y \geqslant 0$. Quindi la disuguaglianza di destra è vera. Considero la disuguaglianza di sinistra nella $(N4.5)$: svolgendo nuovamente il quadrato è semplificando

$$k^2y^4 + 2ky^3 + 4k < k^2y^4 + y^2 + 1 + 2ky^3 + 2ky^2 + 2y \tag{N4.11}$$
$$4k - 2ky^2 < y^2 + 2y + 1 \tag{N4.12}$$
$$2k(2 - y^2) < (y + 1)^2 \tag{N4.13}$$

Ma $2-y^2 < 0$ per ogni $y \geqslant 2$. Quindi si ha un numero negativo minore di un numero positivo, che è sempre vero.

Quindi per $y \geqslant 2$ valgono entrambe le disuguaglianze della $(N4.5)$, quindi necessariamente $\Delta/4 = (ky^2 + y)^2$. Ovvero:

$$k^2y^4 + 2ky^3 + 4k = k^2y^4 + y^2 + 2ky^3 \tag{N4.14}$$
$$4k = y^2 \tag{N4.15}$$

Quindi $4k$ è un quadrato, quindi k è un quadrato. Quindi per $y \geqslant 2$ si ha la tesi. Altrimenti $y = 0$ o $y = 1$. Con $y = 0$, $k = x^2/4$ quindi se k è intero, allora è un quadrato (in quanto rapporto di quadrati perfetti). Se $y = 1$ si ha, sostituendo nell'equazione iniziale:

$$k = \frac{x^2}{2(x + 3)} \tag{N4.16}$$

Se k è intero allora $x + 3|x^2$, ma $x + 3|(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$. Quindi $x + 3|9$. Poiché $x > 0$ allora $x + 3$ è un divisore di 9 maggiore o uguale a 4, ovvero $x + 3 = 9$, cioè $x = 6$. Ma per quando dimostrato in precedenza, $x \equiv y \pmod 2$, però 6 non è congruo a 1 modulo 2. Quindi $y = 1$ non dà soluzioni intere di k.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{N5}}$

Sia P l'insieme di tutti i numeri primi, e sia M un sottoinsieme non vuoto di P con la seguente proprietà:

per ogni sottoinsieme non vuoto $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ di M, tutti i fattori primi di $p_1p_2...p_k + 1$ appartengono a M.

Dimostrare che $M = P$.

Soluzione:

Step 1: dimostrazione che M ha infiniti elementi. Supponiamo per assurdo che M abbia un numero finito n di elementi. Sia allora q un fattore primo di $p_1p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1$ (un fattore primo di questo numero esiste poiché $M \neq \varnothing$ quindi $p_1p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 \geqslant 2$). Per ipotesi $q \in M$, quindi $q | \prod_{i=1}^{n} p_i$. Ma allora

$$q| \left(\prod_{i=1}^{n} p_i + 1 \right) - \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{N5.1}$$

Quindi $q|1$, ma ciò è assurdo. Quindi M ha infiniti elementi.

Step 2: supponiamo per assurdo che $M \neq P$. Allora esiste almeno un numero primo $q \notin M$. Considero ora le classi di resto degli elementi di M modulo q. Sia C l'insieme delle classi di resto a cui appartiene un numero finito di elementi di M e sia D l'insieme delle classi di resto a cui appartiene un numero infinito di elementi di M. Si osserva che C e D non hanno elementi in comune ($C \cap D = \varnothing$) e che la loro unione da l'insieme delle classi di resto modulo q ($C \cup D = \mathbb{Z}_q$). Si osserva inoltre che D ha almeno un elemento per Pigeonhole: infatti M ha un numero infinito di elementi, mentre le classi di resto sono finite, quindi almeno una classe di resto avrà un numero infinito di elementi. Inoltre $0 \in C$ (dato che $q \notin M$, allora nessun primo $p \in M$ è congruo a 0 modulo q, altrimenti sarebbe un suo multiplo e ciò è assurdo). Inoltre $-1 \notin D$. Se infatti -1 fosse in D, allora esisterebbe almeno un primo $p \equiv -1 \pmod{q}$ (con $p \in M$). Ma allora $q|p + 1$, quindi, per ipotesi, $q \in M$, che è assurdo. Quindi non esistono primi $p \equiv -1 \pmod{q}$, quindi $-1 \in C$.

Sia ora S l'insieme dei prodotti degli elementi di D modulo q. Allora è possibile esprimere ogni elemento $s \in S$ tale che $s \equiv d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot d_k^{\alpha_k}$ con $d_1, d_2, ..., d_k \in D$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$. Si osserva che è possibile creare un elemento di S con gli esponenti α_i arbitrariamente grandi (dato che ogni classe di resto in D ha un numero infinito di elementi che le appartengono). In particolare prendendo α_i primi appartenenti ad M $(p_{i,1}, p_{i,2}, ..., p_{i,\alpha_i})$ tali che $p_{i,j} \equiv d_i \pmod{q}$, con $1 \leqslant i \leqslant k$ e $1 \leqslant j \leqslant i$, è possibile scrivere

$$s \equiv \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1}^{\alpha_i} p_{i,j} \right) \pmod{q} \tag{N5.2}$$

Sia Z il prodotto di tutti i primi $p \in M$ tali che $p \bmod q \in C$ (se non esiste alcun primo avente resto in C, allora si definisce $Z = 1$). Considero ora $Zs + 1$ al variare

di $s \in S$. Si osserva che, per definizione di Z ed S, è possibile prendere opportuni $p_i \in M$ tali che
$$Zs \equiv p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h \pmod q \tag{N5.3}$$
Dove tra i p_i vengono presi tutti i primi appartenenti ad M aventi classe di resto in C ed i primi appartenenti ad M aventi classe di resto in D che verificano la $(N5.2)$ per quel determinato valore di s. Sommando 1 ad entrambi i membri si ottiene che
$$Zs + 1 \equiv p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h + 1 \pmod q \tag{N5.4}$$
In particolare considero un primo p tale che $p | p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h + 1$. Allora $p \in M$ per ipotesi, ma $p \notin C$. Se, infatti, $p \in C$, allora $p|Z$, quindi $p | p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h$, quindi $p \nmid p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h + 1$. Quindi se $p | p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_h + 1$ allora $p \in D$, e, quindi $p \in S$ (considerato come prodotto di un singolo elemento).

Step 3: dimostrazione che esiste un elemento $s \in S$ tale che $Zs + 1 \bmod q \notin S$. Siano $s_1, s_2, ..., s_n$ gli elementi di S. Allora $Zs_i + 1 \equiv Zs_j + 1$ se e solo se $s_i \equiv s_j \pmod q$. Infatti $Zs_i + 1 \equiv Zs_j + 1$ se e solo se $Zs_i \equiv Zs_j$ e, moltiplicando per l'inverso di Z mod q, se e solo se $s_i \equiv s_j$ mod q. In particolare Z ammette sempre un inverso mod q poiché $Z \neq 0$ per definizione e se $(Z, q) \neq 1$ allora dato che q è primo, si avrebbe $q|Z$, che è assurdo, poiché q apparterrebbe a M.

Considero ora la funzione $f : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$ tale che $s \mapsto Zs + 1 \pmod q$. Sia inoltre $f^{-1} : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$ la funzione inversa di f che associa $Zs + 1 \mapsto s \pmod q$. Quindi particolare manda $Zs + 1 \mapsto \frac{(Zs+1)-1}{Z} \pmod q$. Detto quindi $x = Zs + 1$, sia ha che $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{Z}$. Per quanto dimostrato in precedenza, $Zs_i + 1 \equiv Zs_j + 1$ se e solo se $s_i \equiv s_j \pmod q$, quindi la funzione f è iniettiva. Supponiamo per assurdo che non esista un elemento $s \in S$ tale che $Zs + 1 \bmod q \notin S$. Allora la funzione f sarebbe anche surgettiva, mandando l'insieme S in S. Considero ora l'elemento 1: presa una classe di resto $d \in D$, si ha che $d^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ (per il Piccolo Teorema di Fermat), quindi $1 \in S$ (come prodotto di $q - 1$ elementi $d \in D$). Quindi, se f mandasse S in S, si avrebbe anche $\forall s \in S$, $f^{-1}(s) \in S$. Ma $f^{-1}(1) = \frac{1-1}{Z} = 0$. Ma $0 \notin S$, altrimenti il prodotto di primi distinti da q sarebbe multiplo di q che è assurdo. Quindi poiché esiste una controimmagine di f^{-1} che non appartiene ad S, allora esiste una controimmagine di f che non appartiene ad S.

Sia quindi $t \in S$ tale che $Zt + 1 \pmod q \notin S$. Per quanto detto nello Step 2, esistono $p_1, p_2, ..., p_m \in M$ tali che
$$p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_m + 1 \equiv Zt + 1 \not\equiv s \pmod q \tag{N5.5}$$
per ogni $s \in S$. Sia $r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot r_j^{\beta_j}$ la fattorizzazione di $p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_m + 1$. Se $Zt + 1 \equiv 0 \pmod q$, allora $q | p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_m + 1$, quindi $q \in M$, che è assurdo. Se $Zt + 1 \not\equiv 0 \pmod q$, allora i primi $r_i \pmod q \in D$. Se infatti $r_i \pmod q \in C$ allora $r_i | Z$, allora $r_i \nmid Zt + 1$, assurdo. Ma se tutti gli $r_i \in D$, allora $r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot r_j^{\beta_j} \in S$, che è assurdo per la $(N5.5)$.

Quindi non esiste un primo $q \notin M$, quindi $M = P$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G4}}$

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e siano I, J gli incentri dei triangoli ABC e ADC rispettivamente. Supponiamo che B, I, J, D siano conclici. La circonferenza di diametro AC incontra il segmento IB in X e il prolungamento di JD oltre D in Y.

a) Mostrare il seguente **Lemma**:

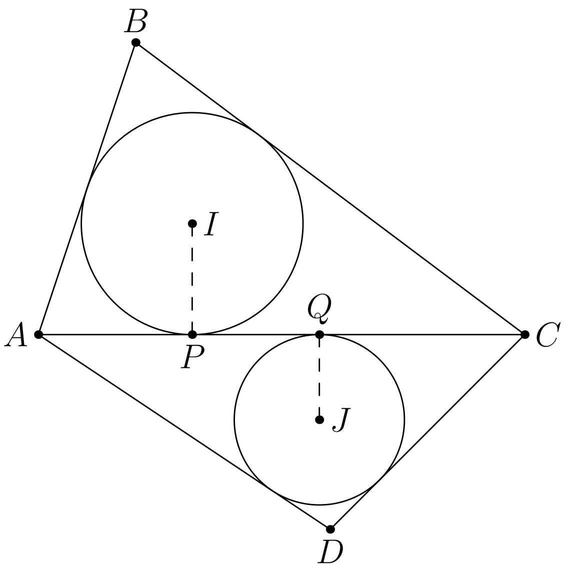
Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano I, J gli incentri dei triangoli ABC e ADC rispettivamente. Mostrare che $ABCD$ ammette una circonferenza inscritta se e solo se IJ è perpendicolare ad AC.

b) Dato un punto P sulla circonferenza di diametro AC, sia P' il suo coniugato isogonale rispetto al triangolo ABC. Qual è il luogo di P' al variare di P?

c) Mostrare che X, Y sono simmetrici rispetto alla retta AC.

Soluzione:

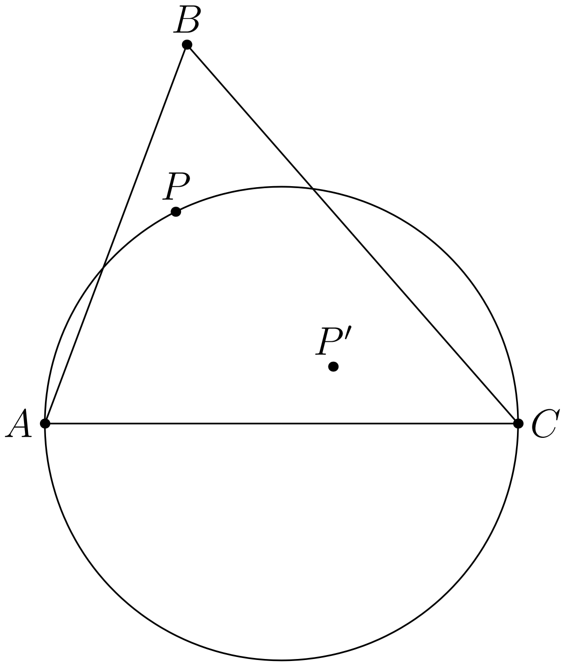
a)



Siano P e Q le proiezioni di I e J su AC, rispettivamente. Allora IJ è perpendicolare ad AC se e solo se P e Q coincidono. Siano inoltre S e T le proiezioni di I su AB e BC rispettivamente. Poiché AB, AC e BC sono tangenti alla circonferenza inscritta, allora $AP = AS, BS = BT, TC = CP$. Quindi $2AP = AP + AS = (AC - PC) + (AB - BS) = AC + AB - (BT + TC) = AC + AB - BC$. Analogamente $2AQ = AC + AD - CD$. Quindi P e Q coincidono se e solo se $AP = AQ$. Sostituendo, coincidono se e solo se $AC + AB - BC = AC + AD - DC$, cioè $AB + CD = BC + AD$, quindi se e solo se $ABCD$ è circoscrivibile. Quindi $IJ \perp AC$ se e solo se $ABCD$ è circoscrivibile.

b)

Matteo Palmieri



Utilizzo ora gli angoli orientati. Si vuole dimostrare che il luogo dei punti P' appartiene ad una circonferenza per A e C tale che $\angle(AP', P'C) = \beta + \pi/2$.

$$\angle(AP', P'C) = -\angle(AC, P'A) - \angle(P'C, AC) = \tag{G4.1}$$
$$\angle(P'A, AC) + \angle(AC, P'C) = \tag{G4.2}$$
$$\angle(P'A, AB) + \angle(AB, AC) + \angle(AC, BC) + \angle(BC, P'C) \tag{G4.3}$$

dove l'ultima uguaglianza è data da $\angle(P'A, AC) = \angle(P'A, AB) + \angle(AB, AC)$ e $\angle(AC, P'C) = \angle(AC, BC) + \angle(BC, P'C)$. Dato che P e P' sono coniugati isogonali allora $\angle(P'A, AB) = \angle(AC, AP)$ e $\angle(BC, P'C) = \angle(PC, AC)$. Quindi

$$\angle(AP', P'C) = \angle(AC, AP) + \angle(AB, AC) + \angle(AC, BC) + \angle(PC, AC) \tag{G4.4}$$

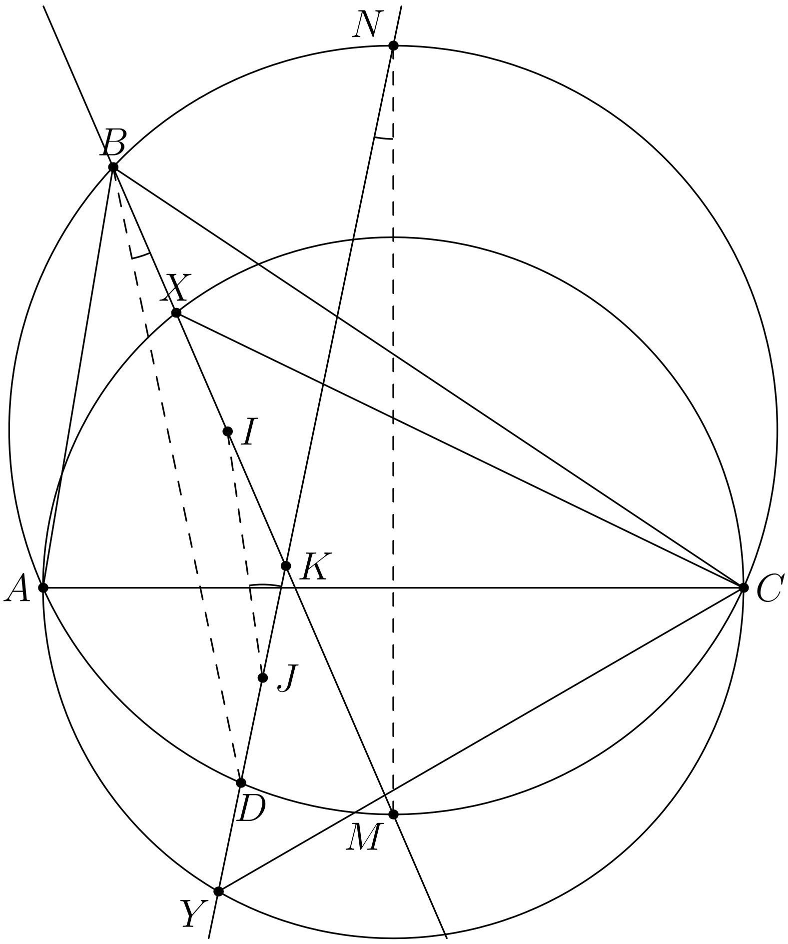
Inoltre $\angle(AB, AC) + \angle(AC, BC) = \angle(AB, BC)$ e $\angle(AC, AP) + \angle(PC, AC) = \angle(PC, AP)$, quindi

$$\angle(AP', P'C) = \angle(AB, BC) + \angle(PC, AP) \tag{G4.5}$$

Ma $\angle(AB, BC) = \beta$ e $\angle(PC, AP) = \pi/2$. Quindi $\angle(P'A, P'C) = \beta + \pi/2$.

c)

Matteo Palmieri



Sia M l'intersezione, diversa da B, tra la retta BI e la circonferenza circoscritta a $ABCD$. Sia inoltre N l'intersezione, diversa da D, tra la retta DJ e la circonferenza circoscritta a $ABCD$. Poiché I è l'incentro di $\triangle ABC$ allora BI è la bisettrice di $\angle ABC$ quindi $\angle ABM = \angle MBC$, quindi $\widehat{AM} = \widehat{MC}$ (poiché ad archi congruenti corrispondono archi congruenti), quindi $AM = MC$ quindi M appartiene all'asse di AC. Analogamente $\angle ADN = \angle NDC$ quindi $\widehat{AN} = \widehat{NC}$ quindi $AN = NC$ quindi anche N è sull'asse di AC, quindi, poiché M e N sono distinti, allora la retta MN è l'asse di AC.

Sia K l'intersezione tra BI e DJ. $\angle DBM = \angle DNM$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{DM}$. Inoltre $\angle DBM = \angle DBI = \pi - \angle DJI$ poiché il quadrilatero $DBIJ$ è ciclico per ipotesi. Quindi $DBI = \pi - \angle DJI = \angle IJN$. Quindi $\angle DNM = \angle DBM = \angle IJN$. Quindi MN è parallela ad IJ perché formano angoli alterni interni congruenti con la retta NJ. Ma MN è perpendicolare a AC poiché asse, quindi IJ è perpendicolare a AC quindi, per il punto **a)**, $ABCD$ è circoscrivibile. Inoltre il suo incentro è K, poiché intersezione delle bisettrici BI è DJ, quindi $\angle DAK = \angle KAB$ e $\angle DCK = \angle KCB$. Quindi, considerando il quadrilatero $AKCD$, poiché la somma dei suoi angoli interni è 2π, allora $\angle AKC = 2\pi - (\angle DAK + \angle DCK + \angle ADC) = 2\pi - (\angle DAB/2 + \angle DCB/2 + \angle ADC)$.

Matteo Palmieri

D'altra parte $ABCD$ è ciclico quindi $\angle DAB + \angle DCB = \pi$ e $\angle ADC = \pi - \angle ABC$. Sostituendo si ottiene $\angle AKC = \pi - (\pi/2 + \pi - \angle ABC) = \pi/2 + \angle ABC$. Sia ora X' il coniugato isogonale di X rispetto a $\triangle ABC$. Per il punto **b)**, $\angle AX'C = \pi/2 + \angle ABC$. Quindi, dato che $\angle AKC = \angle AX'C$, allora A, X', K e C sono conciclici, quindi X' appartiene alla circonferenza circoscritta ad AKC. Inoltre le rette BX e BX' sono simmetriche rispetto alla bisettrice di $\angle ABC$ per definizione di coniugato isogonale. Ma BX è la bisettrice di $\angle ABC$ quindi anche X' appartiene a BX. Ma allora X' è l'intersezione tra BX è la circonferenza circoscritta a AKC, ovvero X' coincide con K. Con considerazioni analoghe, K è anche il coniugato isogonale di Y rispetto a $\triangle ADC$. Poiché K è il coniugato isogonale di X e Y rispetto a $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ allora $\angle ACX = \angle KCB$ e $\angle YCA = \angle DCK$. Ma $\angle DCK = \angle KCB$. (poiché CK bisettrice di $\angle DCB$) quindi $\angle YCA = \angle ACX$. Quindi le rette CX e CY sono simmetriche rispetto a AC. Quindi il simmetrico di X rispetto a AC appartiene alla retta CY ma appartiene anche alla circonferenza per ACX poiché AC è il diametro. Ma l'intersezione diversa da C tra la circoscritta a $\triangle AXC$ e la retta CY è Y. Quindi X e Y sono simmetrici rispetto alla retta AC.

Matteo Palmieri

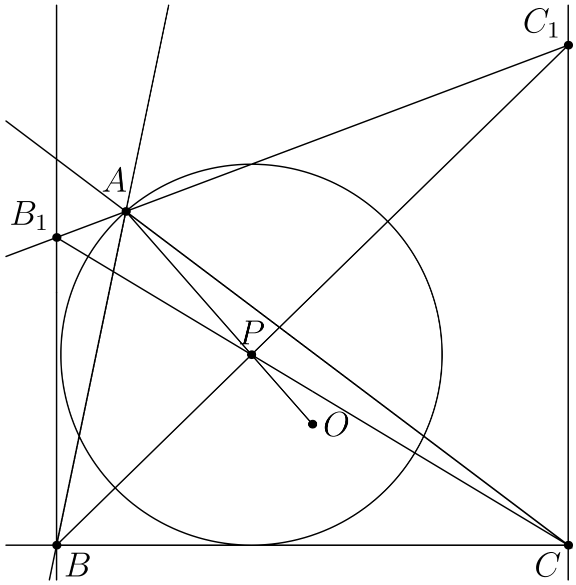
Soluzione problema $\boxed{\text{G7}}$

Sia ABC un triangolo di circocentro O e sia r la bisettrice esterna da A. La retta passante per B e perpendicolare a BC interseca r in B_1. Analogamente la retta passante per C e perpendicolare a BC interseca r in C_1.

a) Dimostrare che AO, BC_1 e CB_1 concorrono.

b) Detto P il punto di concorrenza di tali rette, dimostrare che la circonferenza Γ di centro P passante per A è tangente a BC.

Soluzione:



Utilizzo le coordinate baricentriche omogenee con triangolo di riferimento ABC.

a) I vertici del triangolo hanno coordinate rispettivamente $A = [1 : 0 : 0], B = [0 : 1 : 0], C = [0 : 0 : 1]$. Siano inoltre a, b, c le lunghezze dei lati BC, AC, AB rispettivamente. La bisettrice esterna da A passa anche per l'excentro relativo al vertice C, (I_C) che ha coordinate $[a : b : -c]$. Imponendo il passaggio per A si ottiene che è nella forma $yl + zm = 0$ con $l, m \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per I_C si ha $l = c$ e $m = b$, da cui la retta r è

$$cy + bz = 0 \tag{G7.1}$$

Cerco ora la retta perpendicolare a BC passante per B. Essa sarà anche la parallela ad AH passante per B con H ortocentro di $\triangle ABC$, poiché $AH \perp BC$, ovvero la retta passante per B e per il punto all'infinito della retta AH. Essendo ortocentro, $H = [S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B]$ con $S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2, S_B = (a^2 + c^2 - b^2)/2, S_C = (a^2 + b^2 - c^2)/2$. Poiché la retta AH passa per A allora è della forma $ly + z = 0$ con

$l \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per H si ottiene

$$l \cdot S_A S_C + S_A S_B = 0 \qquad l = -\frac{S_B}{S_C} \tag{G7.2}$$

Quindi l'equazione di AH è

$$-\frac{S_B}{S_C} y + z = 0 \tag{G7.3}$$

Moltiplicando per $-S_C$

$$S_B y - S_C z = 0 \tag{G7.4}$$

Intersecando AH con $s : x + y + z = 0$ per trovare il punto all'infinito (che chiamerò H_i) si ottiene $H_i = [S_C + S_B : -S_C : -S_B]$, infatti sostituendo le sue coordinate in AH e s si ottiene rispettivamente $-S_C S_B + S_C S_B = 0$ e $S_B + S_C - S_C - S_B = 0$ che sono entrambe vere. Inoltre $S_B + S_C = a^2$ quindi $H_i = [a^2 : -S_C : -S_B]$. Cerco ora la retta BH_i. Essa è della forma $lx + z = 0$ con $l \in \mathbb{R}$ poiché passa per B. Imponendo il passaggio per H_i si ottiene

$$la^2 - S_B = 0 \qquad l = \frac{S_B}{a^2} \tag{G7.5}$$

$$BH_i : x\frac{S_B}{a^2} + z = 0 \qquad BH_i : S_B x + a^2 z = 0 \tag{G7.6}$$

Interseco BH_i (cioè la perpendicolare a BC passante per B) con r e ottengo B_1

$$\begin{cases} S_B x + a^2 z = 0 \\ cy + bz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{a^2}{S_B} z \\ y = -\frac{b}{c} z \end{cases} \tag{G7.7}$$

Quindi ponendo $z = \lambda$ si ottiene $B_1 = [-\frac{a^2}{S_B}\lambda : -\frac{b}{c}\lambda : \lambda]$. Moltiplicando per $-cS_B/\lambda$, si ha $B_1 = [a^2 c : bS_B : -cS_B]$.

Analogamente cerco la perpendicolare a BC passante per C ovvero la retta passante per C e H_i. Poiché passa per C, allora è del tipo $lx + y = 0$ con $l \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per H_i si ottiene

$$la^2 - S_C = 0 \qquad l = \frac{S_C}{a^2} \tag{G7.8}$$

$$CH_i : x\frac{S_C}{a^2} + y = 0 \qquad CH_i : S_C x + a^2 y = 0 \tag{G7.9}$$

Intersecando CH_i con r si ottiene

$$\begin{cases} S_C x + a^2 y = 0 \\ cy + bz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{a^2}{S_C} y \\ z = -\frac{c}{b} y \end{cases} \tag{G7.10}$$

Matteo Palmieri

Ponendo $y = \lambda$ si ottiene $C_1 = [-\frac{a^2}{S_C}\lambda : \lambda : -\frac{c}{b}\lambda]$. Moltiplicando per $-bS_C/\lambda$ si ottiene $C_1 = [a^2b : -bS_C : cS_C]$. Cerco ora le equazioni delle rette BC_1 e B_1C e dimostro che la loro intersezione appartiene a AO. La retta BC_1 è del tipo $lx+z=0$ con $l \in \mathbb{R}$ poiché passa per B. Imponendo il passaggio per C_1

$$la^2b + cS_C = 0 \qquad l = -\frac{cS_C}{a^2b} \tag{G7.11}$$

$$BC_1 : -x\frac{cS_C}{a^2b} + z = 0 \qquad BC_1 : cS_Cx - a^2bz = 0 \tag{G7.12}$$

Analogamente la retta B_1C è del tipo $lx + y = 0$ con $l \in \mathbb{R}$ poiché passa per C. Imponendo il passaggio per B_1 si ottiene

$$la^2c + bS_B = 0 \qquad l = -\frac{bS_B}{a^2c} \tag{G7.13}$$

$$B_1C : -x\frac{bS_B}{a^2c} + y = 0 \qquad B_1C : bS_Bx - a^2cy = 0 \tag{G7.14}$$

Cerco ora le coordinate di $P = BC_1 \cap B_1C$

$$\begin{cases} cS_Cx - a^2bz = 0 \\ bS_Bx - a^2cy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{cS_C}{a^2b}x \\ y = \frac{bS_B}{a^2c}x \end{cases} \tag{G7.15}$$

Ponendo $x = \lambda$ si ottiene $P = [\lambda : \frac{bS_B}{a^2c}\lambda : \frac{cS_C}{a^2b}\lambda]$ e moltiplicando per a^2bc/λ si ha $P = [a^2bc : b^2S_B : c^2S_C]$.

Cerco ora la retta AO. $O = [a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C]$. La retta AO, poiché passa per A, è nella forma $ly + z = 0$. Sostituendo le coordinate di O

$$lb^2S_B + c^2S_C = 0 \qquad l = -\frac{c^2S_C}{b^2S_B} \tag{G7.16}$$

$$AO : -y\frac{c^2S_C}{b^2S_B} + z = 0 \qquad AO : c^2S_Cy - b^2S_Bz = 0 \tag{G7.17}$$

Sostituendo P nell'equazione si ha:

$$c^2S_Cb^2S_B - b^2S_Bc^2S_C = 0 \tag{G7.18}$$

Che è sempre vero. Quindi $P \in AO$. Quindi AO, B_1C, C_1B concorrono.

b) Siano Q_B e Q_C le intersezioni di Γ con AC e AB rispettivamente. Dato che Q_BA è una corda di Γ, allora l'asse di Q_BA passa per P, essendo P il centro di Γ. Detto allora P_B il punto medio AQ_B, si ha che $PP_B \perp AQ_B$. Analogamente detto P_C il punto medio di AQ_C, $P_C \perp AQ_C$. Cerco ora le coordinate di P_B intersecando la perpendicolare a AC passante per P, corrispondente alla retta per P e per il punto all'infinito della retta BH (H_j), dato che $BH \perp AC$. La retta BH è del tipo

$mx + z = 0$ con $m \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per $H = [S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B]$ si ha

$$lS_B S_C + S_A S_B = 0 \qquad l = -\frac{S_A}{S_C} \tag{G7.19}$$

$$BH : -x\frac{S_A}{S_C} + z = 0 \qquad BH : S_A x - S_C z = 0 \tag{G7.20}$$

Intersecando con $s : x + y + z = 0$ per trovare il punto all'infinito si ottiene

$$\begin{cases} S_A x - S_C z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{S_C}{S_A} z \\ y + (\frac{S_C}{S_A} + 1)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{S_C}{S_A} z \\ y = -(\frac{S_C}{S_A} + 1)z = -\frac{S_A + S_C}{S_A} z = -\frac{b^2}{S_A} z \end{cases} \tag{G7.21}$$

Ponendo $z = \lambda$ ottengo $H_j = [\frac{S_C}{S_A}\lambda : -\frac{b^2}{S_A}\lambda : \lambda]$ e moltiplicando per S_A/λ si ottiene $H_j = [S_C : -b^2 : S_A]$. Cerco ora la retta per P e H_j. Sia $P_X = [x : y : z]$ un punto generico. Allora $P_X \in PH_j$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti dei tre punti è 0. Ovvero

$$det \begin{bmatrix} a^2bc & S_C & x \\ b^2 S_B & -b^2 & y \\ c^2 S_C & S_A & z \end{bmatrix} = 0 \tag{G7.22}$$

$$b^2 S_B S_A x + c^2 S_C^2 y - a^2 b^3 cz + b^2 c^2 S_C x - a^2 bc S_A y - b^2 S_B S_C z = 0 \tag{G7.23}$$

$$b^2(S_B S_A + c^2 S_C)x + c(cS_C^2 - a^2 b S_A)y + b^2(-a^2bc - S_B S_C)z = 0 \tag{G7.24}$$

Che è l'equazione della perpendicolare ad AC passante per P. Interseco con $AC : y = 0$ per trovare P_B.

$$\begin{cases} b^2(S_B S_A + c^2 S_C)x + c(cS_C^2 - a^2 b S_A)y + b^2(-a^2bc - S_B S_C)z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a^2bc + S_B S_C}{S_B S_A + c^2 S_C} z \end{cases} \tag{G7.25}$$

Ponendo $z = \lambda$ si ha $P_B = [\frac{a^2bc + S_B S_C}{S_B S_A + c^2 S_C}\lambda : 0 : \lambda]$ e moltiplicando per $(S_B S_A + c^2 S_C)/\lambda$ si ha $P_B = [a^2bc + S_B S_C : 0 : S_B S_A + c^2 S_C]$. P_B è il punto medio di AQ_B e $A = [1 : 0 : 0] = [a^2bc + S_B S_C + S_B S_A + c^2 S_C : 0 : 0]$. Quindi, poiché la somma delle coordinate di A e P_B è la stessa allora le coordinate di Q_B sono due volte le coordinate di P_B meno le coordinate di A, ovvero $Q_B = [a^2bc + S_B S_C - S_B S_A - c^2 S_C : 0 : 2(S_B S_A + c^2 S_C)]$. Poiché $c^2 = S_A + S_B$, sostituendo nelle coordinate di Q_B si ottiene

$$Q_B = [a^2bc + S_B S_C - S_B S_A - (S_A + S_B)S_C : 0 : 2(S_B S_A + (S_A + S_B)S_C)] \tag{G7.26}$$

$$Q_B = [a^2bc - (S_B + S_C)S_A : 0 : 2(S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A)] \tag{G7.27}$$

$$Q_B = [a^2(bc - S_A) : 0 : 2\sum_{cyc} S_A S_B] \tag{G7.28}$$

dove nell'ultima equazione si è nuovamente sostituito $S_B + S_C = a^2$ e $\sum_{cyc} S_A S_B = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A$. Il punto Q_C si ottiene analogamente al punto Q_B, invertendo b e c e le coordinate y e z. Quindi $Q_C = [a^2(bc - S_A) : 2\sum_{cyc} S_A S_B : 0]$. Cerco ora l'equazione di Γ imponendo il passaggio per A, Q_B e Q_C. L'equazione di Γ è

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x + y + z)(ux + vy + wz) \tag{G7.29}$$

con $u, v, w \in \mathbb{R}$. Sostituendo $A = [1 : 0 : 0]$ si ha

$$0 = 1 \cdot u \qquad u = 0 \tag{G7.30}$$

Sostituendo Q_C nell'equazione si ottiene

$$c^2 \cdot a^2(bc - S_A) \cdot 2\sum_{cyc} S_A S_B = (a^2(bc - S_A) + 2\sum_{cyc} S_A S_B)(2\sum_{cyc} S_A S_B v) \tag{G7.31}$$

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(a^2(bc - S_A) + 2\sum_{cyc} S_A S_B) \tag{G7.32}$$

Semplificando $2\sum_{cyc} S_A S_B$ tra la $(G7.31)$ e la $(G7.32)$. Considero $2\sum_{cyc} S_A S_B$. Sviluppando si ottiene

$$2\sum_{cyc} S_A S_B = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = \tag{G7.33}$$

$$= S_A(S_B + S_C) + S_B(S_A + S_C) + S_C(S_A + S_B) = \tag{G7.34}$$

$$= a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C \tag{G7.35}$$

Sostituendo nell'ultima equazione $a^2 = S_B + S_C, b^2 = S_A + S_C, c^2 = S_A + S_B$. Sostituendo questa identità nella $(G7.32)$ si ottiene

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(a^2(bc - S_A) + a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C) \tag{G7.36}$$

Voglio ora dimostrare che $a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. Espandendo il secondo termine, utilizzando che $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ si ottiene

$$\frac{1}{2}[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2] = \tag{G7.37}$$

$$\frac{1}{2}[c^2(a + b)^2 - ((a + b)(a - b))^2 - c^4 + c^2(a - b)^2)] = \tag{G7.38}$$

$$\frac{1}{2}(c^2a^2 + c^2b^2 + 2abc^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - c^4 + c^2a^2 + c^2b^2 - 2abc^2) = \tag{G7.39}$$

$$\frac{1}{2}[(a^2c^2 + a^2b^2 - a^4) + (b^2a^2 + b^2c^2 - b^4) + (c^2a^2 + c^2b^2 - c^4)] = \tag{G7.40}$$

$$\frac{1}{2}[a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)] = \tag{G7.41}$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 S_A + 2b^2 S_B + 2c^2 S_C) = a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C \tag{G7.42}$$

Matteo Palmieri

Che era ciò che si voleva dimostrare. Sostituendo questa identità nella ($G7.36$) si ha

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(a^2(bc - S_A) + \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)) \tag{G7.43}$$

D'altra parte

$$\frac{1}{2}(a+b-c)(a-b+c) = \frac{1}{2}(a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc - ac + bc - c^2) = \tag{G7.44}$$

$$\frac{1}{2}[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{2}[2bc - 2S_A] = bc - S_A \tag{G7.45}$$

Sostituendo nella ($G7.43$) si ottiene

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(a^2(bc - S_A) + (bc - S_A)(a+b+c)(-a+b+c)) \tag{G7.46}$$

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(bc - S_A)(a^2 + (-a^2 + ab + ac - ab + b^2 + bc - ac + bc + c^2)) \tag{G7.47}$$

$$c^2a^2(bc - S_A) = v(bc - S_A)(b^2 + 2bc + c^2) \tag{G7.48}$$

Semplificando il fattore $bc - S_A$ e sostituendo $b^2 + 2bc + c^2 = (b+c)^2$ si ha

$$v = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} \tag{G7.49}$$

Con procedimenti analoghi, sostituendo Q_B nell'equazione della circonferenza, e scambiando la b con la c si ottiene:

$$w = \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} \tag{G7.50}$$

Allora Γ è

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x+y+z)\left(\frac{a^2c^2}{(b+c)^2}y + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}z\right) \tag{G7.51}$$

La circonferenza è tangente a $BC : x = 0$ se e solo se le intersezioni tra Γ e BC sono coincidenti. Sostituendo $x = 0$ in Γ si ottiene

$$a^2yz = (y+z)\left(\frac{a^2c^2}{(b+c)^2}y + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}z\right) \tag{G7.52}$$

Semplificando un fattore a^2 e moltiplicando entrambi i membri per $(b+c)^2$ si ottiene

$$b^2yz + c^2zy + 2bczy = (y+z)(c^2y + b^2z) \tag{G7.53}$$

$$b^2yz + c^2zy + 2bczy = c^2y^2 + c^2yz + b^2z^2 + b^2yz \tag{G7.54}$$

$$c^2y^2 + b^2z^2 - 2bcyz = 0 \tag{G7.55}$$

$$(cy - bz)^2 = 0 \tag{G7.56}$$

che ha una sola terna omogenea che soddisfa ($[0 : b : c]$). Quindi Γ è tangente a BC.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G8}}$

Un pentagono $AMNPQ$ è inscritto in un triangolo ABC in modo che $M \in AB$, $Q \in AC$ e $N, P \in BC$. Inoltre i lati del pentagono soddisfano le uguaglianze $AM = AQ = NP$ e $MN = QP$.

Sia S l'intersezione di MN e PQ e sia l la bisettrice dell'angolo $\angle MSQ$.

Detti O e I rispettivamente il circocentro e l'incentro del triangolo ABC, dimostrare che OI è parallelo a l.

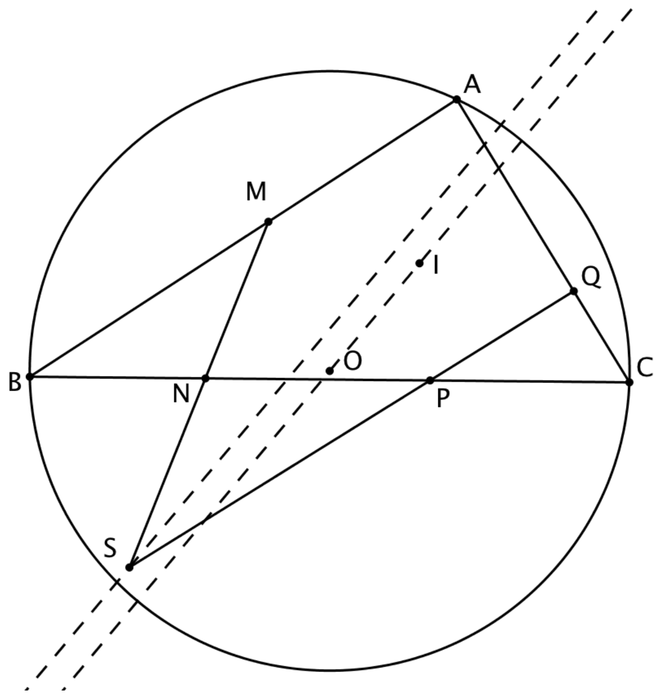
Lemma:

Sia ABC un triangolo nel piano complesso e siano a, b e c i numeri complessi che indicano rispettivamente i vertici A, B e C, tali che $|a| = |b| = |c| = 1$, cioè i vertici di ABC appartengono alla circonferenza unitaria centrata nell'origine. Allora detto m_a il punto medio dell'arco BC che non contiene A e analogamente definiti m_b, m_c, allora $m_a + m_b + m_c = j$ con j l'incentro di ABC.

Dimostrazione: poiché m_a, m_b, m_c appartengono alla circonferenza unitaria, allora il circocentro di $m_a m_b m_c$ coincide con il circocentro di abc, cioè 0. Si vuole dimostrare che j è l'ortocentro di $m_a m_b m_c$. $\angle cbm_b = \angle m_b ba = \angle cba/2$ poiché gli archi cm_b e $m_b a$ sono congruenti e ad archi congruenti corrispondono angoli alla circonferenza congruenti. Inoltre $\angle m_b m_c c = \angle m_b bc$ perché insistono entrambi sull'arco $m_b c$. Quindi $\angle m_b m_c c = \angle m_b bc = \angle abc/2$. Sia x l'intersezione tra $m_b m_c$ e am_a. $\angle xjm_c = \angle ajm_c = \angle m_a ac + \angle acm_c = \angle bac/2 + \angle acb/2$, dove la seconda uguaglianza è data dal fatto che in un triangolo l'angolo esterno è pari alla somma dei due angoli interni non adiacenti, mentre la terza uguaglianza vale poiché m_a e m_c sono i punti medi degli archi bc e ba, quindi, poiché ad archi congruenti corrispondono angoli alla circonferenza congruenti, allora $\angle m_a ac = \angle m_a ab = \angle bac/2$ e $\angle acm_c = \angle m_c cb = \angle acb/2$. Quindi $\angle m_c xj = \pi - (\angle m_b m_c c + \angle ajm_c) = \pi - (\angle abc/2 + \angle bca/2 + \angle cab/2) = \pi - (\pi/2) = \pi/2$.Quindi $am_a \perp m_b m_c$ e analogamente $bm_b \perp m_a m_c$ e $cm_c \perp m_b m_a$. Quindi am_a, bm_b, cm_c sono altezze del triangolo $m_a m_b m_c$ che si incontrano in j che è quindi l'ortocentro di $m_a m_b m_c$.

Soluzione:

Matteo Palmieri



Pongo il triangolo ABC nel piano complesso e siano a, b e c i numeri complessi che indicano rispettivamente i vertici A, B e C, tali che $|a| = |b| = |c| = 1$, cioè i vertici di ABC appartengono alla circonferenza unitaria centrata nell'origine. Quindi il circocentro di ABC coincide con l'origine del sistema di riferimento. Siano inoltre m_a, m_b, m_c i punti medi degli archi bc, ca, ab che non contengono a, b, c e siano o, m, n, p, q, s, j i numeri complessi che rappresentano rispettivamente i punti O, M, N, P, Q, S, I (si osserva che $o = 0$ poiché centro del sistema di riferimento). Sia k la lunghezza dei segmenti AM, AQ, NP che per ipotesi sono congruenti. o e m_c appartengono all'asse di ab, poiché o appartiene all'asse di ogni corda della circonferenza unitaria, in quanto centro, e $am_c = bm_c$ in quanto gli archi am_c e bm_c sono congruenti per definizione di m_c. Quindi $om_c \perp ab$. Allora il vettore $-i(m-a)/k$ corrisponde ad $\overrightarrow{AM}$ ruotato di 90° in senso orario (essendo moltiplicato per $-i$) con norma 1, che è esattamente il vettore $\overrightarrow{OM_C}$. Quindi

$$m_c = -i\frac{m-a}{k} \tag{G8.1}$$

Analogamente $om_b \perp ac$ quindi, ruotando ora in senso antiorario e non orario il vettore $\overrightarrow{AQ}$ e scalandolo a norma 1, si ha

$$m_b = i\frac{q-a}{k} \tag{G8.2}$$

Analogamente $om_a \perp bc$ e ruotando in senso orario $\overrightarrow{NP}$ e scalandolo a norma 1 si ha

$$m_a = -i\frac{p-n}{k} \tag{G8.3}$$

Matteo Palmieri

Considero ora j come ortocentro di $m_a m_b m_c$ (per quanto dimostrato nel Lemma) e la retta di Eulero di $m_a m_b m_c$. Sia inoltre g il baricentro di $m_a m_b m_c$. Il suo ortocentro coincide con l'origine in quanto m_a, m_b, m_c punti della circonferenza unitaria. Poiché j, o e g appartengono alla retta di Eulero di $m_a m_b m_c$ con $|\overrightarrow{jg}| = 2|\overrightarrow{og}|$ allora $j+2o = 3g$. Ma $g = \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c)$ e $o = 0$. Quindi

$$j = m_a + m_b + m_c \tag{G8.4}$$

Sostituendo nella $(G8.4)$ le equazioni $(G8.1), (G8.2), (G8.3)$ si ha

$$j = -i\frac{p-n}{k} + i\frac{q-a}{k} - i\frac{m-a}{k} = \tag{G8.5}$$

$$= \frac{i}{k}(n - p + q - a - m + a) = \tag{G8.6}$$

$$= \frac{i}{k}((q-p) - (m-n)) \tag{G8.7}$$

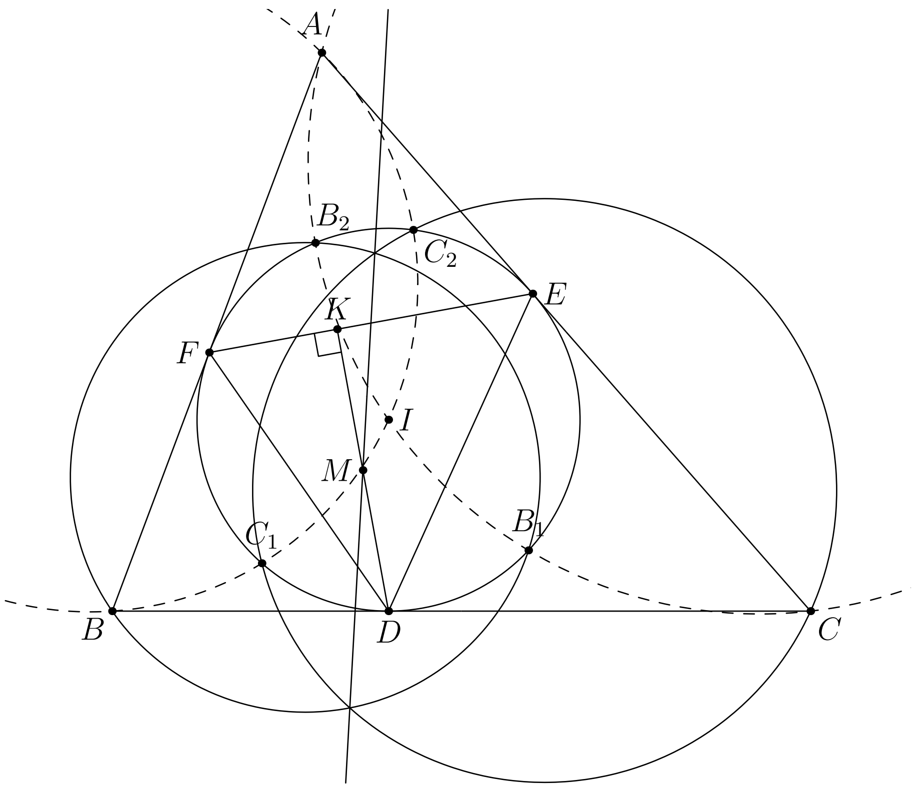
Quindi $j \perp y$ con $y = (q-p) - (m-n)$, in quanto j si ottiene moltiplicando x per i (cioè ruotando di $90°$) e scalando di un fattore $1/k$. Ma j corrisponde al vettore $\overrightarrow{OI}$ in quanto o è il centro del sistema di riferimento. Mi basta quindi dimostrare che $\overrightarrow{Y}$ è perpendicolare alla bisettrice di $\angle MSQ$. Dato che $y = (q-p) - (m-n)$ allora $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{PQ}$. Sia $\overrightarrow{N'M'}$ il traslato di $\overrightarrow{NM}$ di un vettore $\overrightarrow{NS}$. Sia analogamente $\overrightarrow{P'Q'}$ il traslato di $\overrightarrow{PQ}$ di un vettore $\overrightarrow{QS}$. Allora $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{N'M'} - \overrightarrow{P'Q'}$ (i due vettori $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PQ}$ sono stati traslati così che avessero le code coincidenti), infatti $P' \equiv N' \equiv S$. Quindi $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{M'Q'}$. Considero il triangolo $SM'Q'$: $SM' = N'M' = NM$ e $SQ' = P'Q' = PQ$. Ma per ipotesi $MN = PQ$, quindi $SM' = SQ'$ quindi il triangolo $SM'Q'$ è isoscele, quindi la bisettrice di $\angle M'SQ'$ è perpendicolare a $M'Q'$, da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G9}}$

Sia ABC un triangolo di incentro I la cui circonferenza inscritta ω è tangente a BC, CA e AB rispettivamente in D, E e F. Sia K il piede dell'altezza uscente da D nel triangolo DEF. Supponiamo che la circonferenza circoscritta a AIB incontri ω in due punti distinti C_1, C_2, e che la circonferenza circoscritta a AIC incontri ω in due punti distinti B_1, B_2. Dimostrare che l'asse radicale delle circonferenze circoscritte a BB_1B_2 e CC_1C_2 passa per il punto medio di DK.

Soluzione:



Utilizzo le coordinate baricentriche omogenee con triangolo di riferimento DEF, $EF = a, DF = b, DE = c$ e $D = [1 : 0 : 0], E = [0 : 1 : 0], F = [0 : 0 : 1]$. A è l'incontro delle tangenti alla circonferenza circoscritta a DEF in E e F. La tangente per F è una retta del tipo $mx + y = 0$ che intersecata con la circoscritta $a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$ in un solo punto. Sostituendo $y = -mx$ in ω si ottiene

$$-ma^2xz + b^2xz - mc^2x^2 = 0 \tag{G9.1}$$

Perché vi sia solo una soluzione, il delta dell'equazione deve essere uguale a 0, cioè

$$(ma^2 - b^2)^2 = 0 \tag{G9.2}$$

Quindi $m = \frac{b^2}{a^2}$. La tangente a ω in F è quindi $\frac{b^2}{a^2}x + y = 0$. Moltiplicando per a^2 si ottiene $b^2x + a^2y = 0$. Analogamente, cambiando le variabili, si ottiene che la tangente per E è $a^2z + c^2x = 0$. Intersecando le due tangenti si ha

$$\begin{cases} b^2x + a^2y = 0 \\ a^2z + c^2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{b^2}{a^2}x \\ z = -\frac{c^2}{a^2}x \end{cases} \tag{G9.3}$$

Il sistema è quindi soddisfatto dalla terna omogenea $A = [1 : -\frac{b^2}{a^2} : -\frac{c^2}{a^2}]$ e, moltiplicando per $-a^2$, $A = [-a^2 : b^2 : c^2]$. Con un procedimento analogo, ciclando le variabili, si ottiene $B = [a^2 : -b^2 : c^2]$ e $C = [a^2 : b^2 : -c^2]$. Inoltre essendo I il circocentro del triangolo di riferimento, si ha che $I = [a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C]$ con $S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2, S_B = (a^2 + c^2 - b^2)/2, S_C = (a^2 + b^2 - c^2)/2$.

Sia γ la circonferenza passante per A, I e B. La sua equazione è $a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x + y + z)(ux + vy + wz)$ con $u, v, w \in \mathbb{R}$. Sostituendo A nell'equazione di γ si ottiene

$$a^2b^2c^2 - b^2a^2c^2 - c^2a^2b^2 = (-a^2 + b^2 + c^2)(-a^2u + b^2v + c^2w) \tag{G9.4}$$

Ma $-a^2 + b^2 + c^2 = 2S_A$. Quindi sostituendo e semplificando si ottiene

$$-a^2b^2c^2 = 2S_A(-a^2u + b^2v + c^2w) \tag{G9.5}$$

Analogamente sostituendo B nell'equazione si ottiene

$$-a^2b^2c^2 = 2S_B(a^2u - b^2v + c^2w) \tag{G9.6}$$

Sostituendo I nell'equazione si ottiene

$$a^2b^2S_Bc^2S_C + b^2a^2S_Ac^2S_C + c^2b^2S_Ba^2S_A = (a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C)(a^2S_Au + b^2S_Bv + c^2S_Cw) \tag{G9.7}$$

Raccogliendo un fattore $a^2b^2c^2$ nel membro di sinistra e riscrivendo utilizzando le somme cicliche si ottiene

$$a^2b^2c^2 \sum_{cyc} S_AS_B = \sum_{cyc} a^2S_A(a^2S_Au + b^2S_Bv + c^2S_Cw) \tag{G9.8}$$

Dimostro ora che $2\sum_{cyc} S_AS_B = \sum_{cyc} a^2S_A$:

$$2\sum_{cyc} S_AS_B = S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A = \tag{G9.9}$$

$$= S_A(S_B + S_C) + S_B(S_A + S_C) + S_C(S_A + S_B) = \tag{G9.10}$$

$$= a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C \tag{G9.11}$$

Sostituendo nell'ultima equazione $a^2 = S_B + S_C, b^2 = S_A + S_C, c^2 = S_A + S_B$. Quindi sostituendo nella $(G9.8)$ si ha

$$a^2b^2c^2 \sum_{cyc} S_AS_B = 2\sum_{cyc} S_AS_B(a^2S_Au + b^2S_Bv + c^2S_Cw) \tag{G9.12}$$

$$a^2b^2c^2 = 2(a^2S_Au + b^2S_Bv + c^2S_Cw) \tag{G9.13}$$

Sommando membro a membro la $(G9.5)$ e la $(G9.13)$ si ha

$$a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 = 2a^2S_Au + 2b^2S_Bv + 2c^2S_Cw - 2S_Aa^2u + 2S_Ab^2v + 2S_Ac^2w \tag{G9.14}$$

$$0 = 2[vb^2(S_B + S_A) + wc^2(S_C + S_A)] \tag{G9.15}$$

Ma $S_B + S_A = c^2$ e $S_C + S_A = b^2$ quindi, sostituendo

$$b^2c^2v + c^2b^2w = 0 \qquad\qquad v + w = 0 \tag{G9.16}$$

Con procedimenti analoghi, sommando membro a membro la $(G9.6)$ e la $(G9.13)$ si ottiene

$$u + w = 0 \tag{G9.17}$$

L'equazione dell'asse radicale tra la ω e γ è l'equazione omogenea data dalla differenza delle loro equazioni membro a membro (poiché un punto soddisfa entrambe le equazioni se soddisfa la loro differenza), quindi

$$(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - (a^2yz + b^2xz + c^2xy) = (x + y + z)(ux + vy + wz) \tag{G9.18}$$

$$ux + vy + wz = 0 \tag{G9.19}$$

Ma da quando dimostrato si ha che $v = -w$ e $u = -w$, quindi sostituendo

$$-wx - wy + wz = 0 \tag{G9.20}$$

$$x + y - w = 0 \tag{G9.21}$$

Ottenendo l'ultima equazione dividendo per $-w$. Questa retta passa per C_1 e C_2 poiché intersezioni γ e ω per ipotesi. Ma poiché C_1 e C_2 appartengono anche alla circonferenza per C_1, C_2 e C, allora C_1C_2 è anche l'asse radicale tra $\odot CC_1C_2$ e $\odot DEF$. Considero l'equazione della circonferenza $\odot CC_1C_2$: è $a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x + y + z)(ux + vy + wz)$ con $u, v, w \in \mathbb{R}$ e la sua differenza con $\odot DEF$ deve corrispondere all'asse radicale (a meno di un fattore reale, poiché l'equazione dell'asse radicale è omogenea nei coefficienti). La differenza tra le due equazioni è:

$$(x + y + z)(ux + vy + wz) = 0 \tag{G9.22}$$

Matteo Palmieri

Ovvero

$$(ux + vy + wz) = 0 \tag{G9.23}$$

Ma abbiamo detto che questo termine deve essere del tipo $(x + y - z) \cdot \lambda_c$, per un certo λ_c. Quindi l'equazione di $\odot CC_1C_2$ è:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x + y + z)(x + y - z)\lambda_c \tag{G9.24}$$

Imponendo il passaggio per $C = [a^2 : b^2 : -c^2]$ si ottiene

$$-a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + c^2)\lambda_c \tag{G9.25}$$

Sostituendo $a^2 + b^2 - c^2 = 2S_C$ e semplificando si ottiene

$$\lambda_c = -\frac{a^2b^2c^2}{2S_C(a^2 + b^2 + c^2)} \tag{G9.26}$$

In modo analogo, sostituendo la b con la c e la y con la z, la circonferenza per BB_1B_2 è

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x + y + z)(x - y + z)\lambda_b \tag{G9.27}$$

con

$$\lambda_b = -\frac{a^2b^2c^2}{2S_B(a^2 + b^2 + c^2)} \tag{G9.28}$$

Per trovare l'asse radicale, sottraggo le equazioni delle due circonferenze membro a membro e ottengo

$$0 = (x + y + z)(x + y - z)\lambda_c - (x + y + z)(x - y + z)\lambda_b \tag{G9.29}$$
$$(x + y - z)\lambda_c = (x - y + z)\lambda_b \tag{G9.30}$$
$$(x + y - z)\frac{a^2b^2c^2}{2S_C(a^2 + b^2 + c^2)} = (x - y + z)\frac{a^2b^2c^2}{2S_B(a^2 + b^2 + c^2)} \tag{G9.31}$$
$$S_B(x + y - z) = S_C(x - y + z) \tag{G9.32}$$

Voglio ora dimostrare che il punto medio di DK soddisfa questa equazione. Detto H l'ortocentro di $\triangle DEF$, $H = [S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B]$. La retta DH ha equazione $my + z = 0$ con $m \in \mathbb{R}$, poiché passa per $D = [1 : 0 : 0]$. Imponendo il passaggio per H si ottiene

$$mS_AS_C + S_AS_B = 0 \tag{G9.33}$$
$$m = -\frac{S_B}{S_C} \tag{G9.34}$$

L'equazione è quindi $-\frac{S_B}{S_C}y + z = 0$. Moltiplicando per $-S_C$ si ottiene $S_By - S_Cz = 0$. Intersecandola con il lato $EF : x = 0$, si ottiene che la terna omogenea $K = [0 : S_C : S_B]$ soddisfa, infatti $x_K = 0$ e $S_BS_C - S_CS_B = 0$, sostituendo nelle due equazioni. Essendo coordinate omogenee, per ottenere il punto medio di DK, i due punti devono avere la stessa somma delle coordinate. Ma $D = [1 : 0 : 0] = [S_B + S_C : 0 : 0]$ (moltiplicando per un fattore $S_B + S_C$). Allora il punto medio M si ottiene come la media delle coordinate di D, K: $M = [\frac{1}{2}(S_B + S_C) : \frac{1}{2}S_C : \frac{1}{2}S_B]$. Moltiplicando per $\frac{1}{2}$, si ha $M = [S_B + S_C : S_C : S_B]$. Sostituendo infine le coordinate di M nella ($G9.32$) (l'equazione dell'asse radicale), si ha

$$S_B(S_B + S_C + S_C - S_B) = S_C(S_B + S_C - S_C + S_B) \tag{G9.35}$$
$$2S_BS_C = 2S_CS_B \tag{G9.36}$$

che è vero. Quindi M appartiene all'asse radicale di $\odot BB_1B_2$ e $\odot CC_1C_2$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{M2}}$

Sia n un intero positivo. Ci sono n ragazzi e n ragazze disposti su una circonferenza, in qualche ordine. Diremo che una coppia (ragazzo, ragazza) è *buona* se uno dei due archi che li dividono contiene tante ragazze quanti ragazzi (eventualmente nessun ragazzo e nessuna ragazza). Si osserva che Alberto fa parte di esattamente 2017 coppie buone. Dimostrare che esiste una ragazza che fa parte di esattamente 2017 coppie buone.

Soluzione:

Numero i ragazzi e le ragazze sulla circonferenza da 0 a $2n-1$ in modo che Alberto sia il numero 0 e i numeri aumentino in senso orario (il ragazzo o la ragazza dopo Alberto in senso orario avrà numero 1, mentre quello prima di Alberto avrà numero $2n-1$). Definisco ora una funzione $f : \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(0) = 0$ e

$$\begin{cases} f(i) - f(i-1) = 1 & \text{se } i \text{ è una ragazza} \\ f(i) - f(i-1) = -1 & \text{se } i \text{ è un ragazzo} \end{cases} \tag{M2.1}$$

Siano inoltre B_n e G_n con $n \geqslant 1$ rispettivamente il numero di ragazzi e ragazze con un numero minore o uguale a n (escluso lo 0, cioè Alberto). Si osserva quindi che $f(k) = G_k - B_k$ per ogni $k \geqslant 1$, infatti la funzione, applicata ai ragazzi in fila lungo la circonferenza a partire da Alberto, aumenta di 1 per ogni ragazza e diminuisce di 1 per ogni ragazzo (diverso da Alberto). Una ragazza j è *buona* con Alberto se e solo se $B_{j-1} = G_{j-1}$ (cioè il numero di ragazzi tra lei e Alberto è uguale al numero di ragazze) e $f(j) - f(j-1) = 1$ (cioè lei è una ragazza). Dalla prima condizione si ottiene $0 = G_{j-1} - B_{j-1} = f(j-1)$. Sostituendo nella seconda condizione si ha $f(j) = 1$. Quindi la ragazza j è *buona* con Alberto se e solo se

$$\begin{cases} f(j-1) = 0 \\ f(j) = 1 \end{cases} \tag{M2.2}$$

Quindi ogni volta che la funzione passa da 0 a 1 tra due numeri consecutivi, c'è una ragazza *buona* con Alberto. Sia ora k una ragazza *buona* con Alberto. Un generico ragazzo h è *buono* con lei se e solo se $B_{h-1} - B_k = G_{h-1} - G_k$ (il numero di ragazzi tra h e k è uguale al numero di ragazze) e $f(h) - f(h-1) = -1$. Dalla prima condizione otteniamo $f(h-1) = G_{h-1} - B_{h-1} = G_k - B_k = f(k) = 1$. Sostituendo nella seconda condizione si ottiene $f(h) = 0$. Quindi una ragazzo h è *buono* con k se e solo se

$$\begin{cases} f(h-1) = 1 \\ f(h) = 0 \end{cases} \tag{M2.3}$$

Ovvero il numero di ragazzi *buoni* con k è uguale al numero di passaggi della funzione da 1 a 0 tra due numeri consecutivi. Definisco $salto-SU$ un passaggio della funzione da 0 a 1 tra due ragazzi/e consecutivi, ovvero ogni qualvolta esiste un numero i tale che $f(i-1) = 0$ e $f(i) = 1$. Analogamente sia $salto-GIU'$ il numero di passaggi della funzione da 1 a 0. Il numero di $salti - SU$ abbiamo dimostrato essere il numero di ragazze *buone* con Alberto, ovvero 2017. Voglio dimostrare che presa una qualunque ragazza *buona* con Alberto, esistono esattamente 2017 ragazzi *buoni* con lei. Ma il numero di ragazzi buoni con lei è esattamente il numero di $salti - GIU'$ per quanto dimostrato prima. Ma è sempre possibile creare una bigezione tra i $salti - SU$ e i $salti - GIU'$ associando ad ogni $salto - SU$ il successivo $salto - GIU'$, infatti tra due $salti - SU$ consecutivi è sempre presente esattamente una $salto - GIU'$. Quindi il numero di $salti - SU$ è uguale al numero di $salti - GIU'$, quindi ogni ragazza *buona* con Alberto ha esattamente 2017 ragazzi *buoni* con lei, da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{M3}}$

Per ogni quadrilatero convesso, detta A la sua area e dette $x \leqslant y \leqslant z \leqslant w$ le misure dei suoi lati, dimostrare che

$$A \leqslant \frac{3\sqrt{3}z^2}{4} \tag{M3.1}$$

Soluzione:

Step 1: : **Dimostrazione che fissati i lati di un quadrilatero convesso, questo ha area massima se ciclico**.

Considero un generico quadrilatero convesso $ABCD$ con $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$. Sia inoltre $\angle DAB = \alpha$ e $\angle BCD = \gamma$. Ricavo ora l'area del quadrilatero in funzione dei quattro lati e di α e γ.

L'area di $\triangle DAB$ è quindi $\frac{1}{2}ad\sin\alpha$, mentre l'area di $\triangle CBD$ è $\frac{1}{2}bc\sin\gamma$. L'area del quadrilatero è quindi

$$A = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma \tag{M3.2}$$

Considero la diagonale BD. Per il teorema di Carnot su $\triangle DAB$ si ottiene che

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \tag{M3.3}$$

inoltre considerando il $\triangle BCD$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \tag{M3.4}$$

Dalla $(M3.3)$ e $(M3.4)$ si ottiene:

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad\cos\alpha - bc\cos\gamma \tag{M3.5}$$

Elevando entrambi i membri alla seconda si ottiene:

$$\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 = (ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 \tag{M3.6}$$

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2d^2\cos^2\alpha + b^2c^2\cos^2\gamma - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma \tag{M3.7}$$

Considero ora la $(M3.2)$: moltiplicando entrambi i membri per 2 e elevando al quadrato si ottiene:

$$4A^2 = (ad\sin\alpha + bc\sin\gamma)^2 \tag{M3.8}$$

$$4A^2 = a^2d^2\sin^2\alpha + b^2c^2\sin^2\gamma + 2abcd\sin\alpha\sin\gamma \tag{M3.9}$$

Matteo Palmieri

Sommando ora membro a membro le equazioni ($M3.7$) e ($M3.9$) si ottiene:

$$4A^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = \tag{M3.10}$$

$$a^2d^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + b^2c^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) - 2abcd(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) \tag{M3.11}$$

$$16A^2 + (a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2d^2+2c^2b^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2d^2-2c^2d^2) = \tag{M3.12}$$

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha+\gamma) \tag{M3.13}$$

Semplificando (sostituendo $\cos(\alpha+\gamma) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1$) e scomponendo si ottiene:

$$16A^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tag{M3.14}$$

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{M3.15}$$

dove $p = (a+b+c+d)/2$. Si osserva che $\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \geqslant 0$ quindi, fissati i quattro lati a, b, c, d l'area massima si ottiene quando $abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0$, ovvero quando $\gamma = \pi - \alpha$ (cioè il quadrilatero è ciclico). In generale si ha che:

$$A \leqslant \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \tag{M3.16}$$

Step 2: Voglio ora dimostrare che $\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-w)} \leqslant \frac{3\sqrt{3}z^2}{4}$ con $x \leqslant y \leqslant z \leqslant w$ e $2p = x+y+z+w$. Elevando entrambi i membri al quadrato (sono entrambi positivi) e moltiplicando per 16 si ottiene:

$$(2p-2x)(2p-2y)(2p-2z)(2p-2w) \leqslant 27z^4 \tag{M3.17}$$

Sostituisco $x+y+z+w$ a $2p$ e ottengo:

$$(-x+y+z+w)(x-y+z+w)(x+y-z+w)(x+y+z-w) \leqslant 27z^4 \tag{M3.18}$$

Siano ora $X = -x+y+z+w$, $Y = x-y+z+w$, $Z = x+y-z+w$ e $W = x+y+z-w$. Poiché $x \leqslant y \leqslant z \leqslant w$, allora $X \geqslant Y \geqslant Z \geqslant W$. Inoltre:

$$\frac{1}{4}(X+Y+W-Z) = \frac{1}{4}((-x+y+z+w)+(x-y+z+w)+(x+y+z-w)-(x+y-z+w)) = \frac{1}{4}(4z) = z \tag{M3.19}$$

Sostituendo nella ($M3.18$) si ottiene:

$$XYZW \leqslant \frac{27}{4^4}(X+Y-Z+W)^4 \tag{M3.20}$$

Matteo Palmieri

Poiché $Z \leqslant Y \leqslant X$ allora $XYZW \leqslant X^3W$. Inoltre dato che $Y \geqslant Z$ allora $Y - Z \geqslant 0$ quindi $X + W + Y - Z \geqslant X + W$. Quindi se è vero che $X^3W \leqslant \frac{27}{4^4}(X + W)^4$ allora vale $XYZW \leqslant \frac{27}{4^4}(X + Y - Z + W)^4$.

Per AM-GM su $(W, \frac{X}{3}, \frac{X}{3}, \frac{X}{3})$ si ha che:

$$\frac{W + \frac{X}{3} + \frac{X}{3} + \frac{X}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{WX^3}{27}} \tag{M3.21}$$

Elevando alla quarta entrambi i membri e moltiplicando per 27 si ottiene proprio:

$$\frac{27}{4^4}(W + X)^4 \geqslant WX^3 \tag{M3.22}$$

Che è quello che si voleva dimostrare. Ma allora abbiamo dimostrato che ciò implica $XYZW \leqslant \frac{27}{4^4}(X + Y - Z + W)^4$ poiché:

$$XYZW \leqslant WX^3 \leqslant \frac{27}{4^4}(W + X)^4 \leqslant \frac{27}{4^4}(X + Y - Z + W)^4 \tag{M3.23}$$

Ma allora abbiamo dimostrato che vale anche $\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-w)} \leqslant \frac{3\sqrt{3}z^2}{4}$. D'altra parte, per lo **Step1** vale $A \leqslant \sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-w)}$ quindi:

$$A \leqslant \sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-w)} \leqslant \frac{3\sqrt{3}z^2}{4} \tag{M3.24}$$

Da cui la tesi: $A \leqslant \frac{3\sqrt{3}z^2}{4}$

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{M4}}$

Sia M_0 un insieme finito e non vuoto di interi positivi. Alberto costruisce induttivamente una sequenza di insiemi M_n come segue. Per ogni $n = 1, 2, ...$ sceglie (a suo piacere) un elemento $b_n \in M_{n-1}$ e definisce

$$M_n := \{b_n m + 1 | m \in M_{n-1}\} \tag{M4.1}$$

Dimostrare che c'è un indice n per cui l'insieme M_n ha la proprietà che se $a, b \in M_n$ sono distinti allora $a \nmid b$ (ovvero nessun elemento di M_n divide un altro elemento di M_n).

Soluzione:

Step 1: voglio dimostrare per induzione che ogni elemento di M_n si scrive nella forma $B_n m + D_n$ con

$$B_n = b_n b_{n-1} \cdot ... \cdot b_1 = \prod_{i=1}^{n} b_i \tag{M4.2}$$

$$D_n = 1 + b_n + b_n b_{n-1} + ... + b_n b_{n-1} \cdot ... \cdot b_2 = 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{j=i}^{n} b_j \right) \tag{M4.3}$$

Passo base: considero M_1. Sostituendo $n = 1$ si ottiene

$$B_1 = \prod_{i=1}^{1} b_i = b_1 \qquad\qquad D_1 = 1 + \sum_{i=2}^{1} \left(\prod_{j=i}^{1} b_j \right) = 1 \tag{M4.4}$$

ovvero ogni elemento di M_1 si scrive come $b_1 m + 1$ con $m \in M_0$ che è vero per ipotesi.

Passo induttivo: suppongo che la tesi valga per $n-1$ e dimostro che vale per n. Per ipotesi un elemento di M_n si scrive come $b_n a + 1$ con $a \in M_{n-1}$, ma per ipotesi induttiva $a = B_{n-1} m + D_{n-1}$ con $m \in M_0$. Quindi un elemento di M_n si scrive come

$$b_n a + 1 = b_n (B_{n-1} m + D_{n-1}) + 1 = \tag{M4.5}$$

$$= b_n \left(m \prod_{i=1}^{n-1} b_i + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n-1} b_j \right) + 1 \right) + 1 = \tag{M4.6}$$

$$= m \prod_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^{n} b_j \right) + b_n + 1 = \tag{M4.7}$$

$$= m \prod_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{j=i}^{n} b_j \right) + 1 = B_n m + D_n \tag{M4.8}$$

Quindi ogni elemento di M_n si scrive nella forma $B_n m + D_n$ con $m \in M_0$.

Matteo Palmieri

Step 2: siano $a, b \in M_n$ tali che $a \neq b$. Per quanto dimostrato nello Step 1, allora $a = B_n m_a + D_n, b = B_n m_b + D_n$ con $m_a, m_b \in M_0$. Allora $a|b$ se e solo se $a|(b-a)$ ovvero, sostituendo, se e solo se

$$B_n m_a + D_n | B_n m_b + D_n - (B_n m_a + D_n) \tag{M4.9}$$
$$B_n m_a + D_n | B_n(m_b - m_a) \tag{M4.10}$$

Si osserva dalle equazioni $(M4.2), (M4.3)$ che B_n è multiplo di b_n e che $D_n \equiv 1 \pmod{b_n}$ (in quanto somma di 1 e multipli di b_n). Ma allora $B_n m + D_n \equiv 1 \pmod{b_n}$ quindi $(B_n m + D, b_n) = 1$. Dato che B_n è multiplo di b_n allora si può riscrivere la $(M4.10)$ come

$$B_n m_a + D_n | b_n \cdot \frac{B_n}{b_n}(m_b - m_a) \tag{M4.11}$$

con B_n/b_n intero. Dato che $(B_n m + D, b_n) = 1$ allora $B_n m + D$ e b_n non hanno fattori primi in comune, quindi dalla $(M4.11)$ si ha che

$$B_n m_a + D_n | \frac{B_n}{b_n}(m_b - m_a) \tag{M4.12}$$

Quindi

$$B_n m_a + D_n \leqslant \left| \frac{B_n}{b_n}(m_b - m_a) \right| \tag{M4.13}$$

Ma $B_n \leqslant B_n m_a + D_n$ poiché $m_a \geqslant 0, D_n \geqslant 0$. Quindi

$$B_n \leqslant \left| \frac{B_n}{b_n}(m_b - m_a) \right| \tag{M4.14}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{b_n}{B_n}$ (che è positivo in quanto i b_i sono interi positivi) si ottiene

$$b_n \leqslant |m_b - m_a| \tag{M4.15}$$

Poiché $m_a, m_b \in M_0$ ed M_0 ha un numero finito di elementi, allora esiste un valore M massimo di $|m_b - m_a|$. Inoltre per ipotesi $b_{n+1} = b_n m + 1$ per un certo $m \geqslant 1$ e $m \in M_{n-1}$. Quindi $b_{n+1} > b_n$, ovvero gli interi positivi b_i formano una successione strettamente crescente, quindi per ogni $K \in \mathbb{R}$ fissato, esiste un indice k tale che $b_k > K$. In particolare, ponendo $K = M$, si ottiene che esiste un indice n per cui

$$b_n > M = |m_b - m_a| \tag{M4.16}$$

Ma ciò contraddice la $(M4.15)$, ovvero contraddice l'esistenza in M_n di due elementi a, b tali che $a|b$. Da cui la tesi.