Esercizi di ammissione
Olimpiadi della Matematica

Stage:	Winter 2018
Soluzioni di:	**Matteo Palmieri**
Scuola:	Liceo Scientifico Statale "Galileo Ferraris" – Torino
Anno di corso*:	4°
Genere:	M
Tipo di esercizi:	
Data:	22 dicembre 2017

Indice delle soluzioni

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A1}}$

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) \leqslant f(xy) \quad \text{e} \quad f(x) + f(y) \leqslant f(x+y) \tag{A1.1}$$

per ogni coppia di reali x, y.

Soluzione

Sia $P(x; y)$ la prima disequazione ($f(x)f(y) \leqslant f(xy)$) e $R(x; y)$ la seconda ($f(x)+f(y) \leqslant f(x+y)$).

Si osserva che se $f(x) = k$ $\forall x \in \setminus$ con $k \in \mathbb{R}$ allora si ha che sostituendo nelle due equazioni del testo:

$$k^2 \leqslant k \quad \text{e} \quad 2k \leqslant k \tag{A1.2}$$

Dalla prima si ottiene che $0 \leqslant k \leqslant 1$, mentre dalla seconda si ottiene $k \leqslant 0$, quindi necessariamente $k = 0$. Una soluzione é quindi $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sostituendo nel testo del problema si ottiene $0 \leqslant 0$ e $0 \leqslant 0$ che sono entrambe ovviamente vere.

Step 1: dimostrazione che $f(0) = 0$ e che f é debolmente crescente

Da $P(0; 0)$ si ha che

$$[f(0)]^2 \leqslant f(0) \quad \text{ovvero} \quad [f(0)]^2 - f(0) \leqslant 0 \tag{A1.3}$$

quindi $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$. Inoltre da $R(0; 0)$ si ha che

$$2f(0) \leqslant f(0) \quad \text{ovvero} \quad f(0) \leqslant 0 \tag{A1.4}$$

Ma allora dato che per $f(0)$ vale contemporaneamente $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$ e $f(0) \leqslant 0$ allora $f(0) = 0$.

Da $P(x; x)$ si ha

$$[f(x)]^2 \leqslant f(x^2) \tag{A1.5}$$

Per ogni $k \geqslant 0$ esiste x tale che $x^2 = k$ quindi si ha che

$$f(k) = f(x^2) \geqslant [f(x)]^2 \geqslant 0 \tag{A1.6}$$

Quindi se $k \geqslant 0$ si ha anche che $f(k) \geqslant 0$.

Da $R(x; -x)$ con $x \geqslant 0$ si ha che

$$f(x) + f(-x) \leqslant f(0) = 0 \tag{A1.7}$$
$$-f(-x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \tag{A1.8}$$
$$f(-x) \leqslant 0 \tag{A1.9}$$

quindi dato che $x \geqslant 0$ allora $-x \leqslant 0$ quindi per ogni $k \leqslant 0$, $f(k) \leqslant 0$.

Considero ora $\epsilon \geqslant 0$. Da $R(x; \epsilon)$ si ha che

$$f(x) + f(\epsilon) \leqslant f(x + \epsilon) \tag{A1.10}$$

detto ora $y = x + \epsilon$, essendo $\epsilon \geqslant 0$ allora $y \geqslant x$. Inoltre dalla ($A1.9$) si ha che essendo $f(\epsilon) \geqslant 0$:

$$f(x) \leqslant f(x) + f(\epsilon) \leqslant f(x+\epsilon) = f(y) \tag{A1.11}$$

quindi per ogni $y \geqslant x$ si ha che $f(y) \geqslant f(x)$ quindi f é debolmente crescente.

Step 2: dimostrazione che f é dispari

Da $P(x; -x)$ si ha che

$$f(x)f(-x) \leqslant f(-x^2) \tag{A1.12}$$

Da $P(x; x)$ si ha che

$$[f(x)]^2 \leqslant f(x^2) \tag{A1.13}$$

Sommando membro a membro la ($A1.12$) e la ($A1.13$) si ottiene

$$[f(x)]^2 + f(x)f(-x) \leqslant f(x^2) + f(-x^2) \tag{A1.14}$$

Ma $f(x^2) + f(-x^2) \leqslant 0$ per la ($A1.7$) quindi

$$[f(x)]^2 + f(x)f(-x) \leqslant f(x^2) + f(x^2) \leqslant 0 \tag{A1.15}$$

$$f(x)[f(x) + f(-x)] \leqslant 0 \tag{A1.16}$$

Considero ora la ($A1.16$) per tutti gli x negativi. Sempre dalla ($A1.7$) si ha che $f(x) + f(-x) \leqslant 0$. Distinguo ora due casi:

<u>*Caso 1:*</u> $f(x) + f(-x) = 0$ per qualche x. Allora $f(x) = -f(-x)$ quindi f dispari per questi valori di x.

<u>*Caso 2:*</u> $f(x) + f(-x) < 0$. Ma allora dalla ($A1.15$) si ha che $f(x) \geqslant 0$. D'altra parte $f(x) \leqslant 0$ poiché x é negativo. Quindi $f(x) = 0$. Ma allora da $f(x) + f(-x) < 0$ si ha che $f(-x) < 0$ ma ció é assurdo poiché $-x \geqslant 0$.

Quindi essendo il Caso 2 assurdo si ha, per il Caso 1, che f é dispari.

Step 3: dimostrazione che $f(nx) = nf(x)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$

Si osserva che dato che f é dispari per lo Step 2, allora basta dimostrare che $f(nx) = nf(x)$ per $n \in \mathbb{N}$. Si procede ora per induzione.

<u>*Passo base:*</u> per $n = 1$ é banalmente vero che $f(x) = 1 \cdot f(x)$

<u>*Passo induttivo:*</u> supponiamo si vero che $f((n-1)x) = (n-1)f(x)$. Si vuole dimostrare che $f(nx) = nf(x)$. Da $R(x; (n-1)x)$ si ha che:

$$f(nx) \geqslant f(x) + f((n-1)x) = f(x) + (n-1)f(x) = nf(x) \tag{A1.17}$$

Da $R(-x; nx)$ si ha che

$$f(-x) + f(nx) \leqslant f((n-1)x) \tag{A1.18}$$

$$f(nx) \leqslant f((n-1)x) - f(-x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x) \tag{A1.19}$$

Quindi $f(nx) \leqslant nf(x)$ e $f(nx) \geqslant nf(x)$ quindi $f(nx) = nf(x)$.

Step 4: dimostrazione che $f(rx) = rf(x)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$

Se $r = 0$ é giá stato dimostrato che $f(0) = 0$. Essendo $r \neq 0$ razionale alla esistono $n, m \in \mathbb{Z}/\{0\}$ tali che $r = n/m$. Per lo Step 3 vale:

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{e} \quad f(mx) = mf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{A1.20}$$

Dalla prima equazione si ha che

$$f(nx) = nf(x) = \frac{n}{m} mf(x) \tag{A1.21}$$

ma $mf(x) = f(mx)$ per la seconda equazione di $(A1.20)$ quindi

$$f(nx) = \frac{n}{m} f(mx) \tag{A1.22}$$

Sia ora $y = mx$ allora $x = y/m$. Quindi sostituendo vale che $\forall y \in \mathbb{Q}$

$$f(y\frac{n}{m}) = f(y) \cdot \frac{n}{m} \tag{A1.23}$$

ma $n/m = r$ quindi $f(ry) = rf(y)$.

Step 5: dimostrazione che $f(x) = xf(1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

É giá stato dimostrato che $f(x) = xf(1)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ (ponendo nella $(A1.23)$, $y = 1$ e $x = n/m$). Supponiamo per assurdo che esista un $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tale che $f(x) \neq xf(1)$ e sia $z = f(x)/f(1)$. Sia ora r un razionale compreso tra x e z. Distinguo ora due casi:

<u>*Caso 1:*</u> $x < r < z$.

Dato che f é debolmente crescente, si ha che

$$f(x) \leqslant f(r) \tag{A1.24}$$

ma $f(x) = zf(1)$ e $f(r) = rf(1)$ poiché $r \in \mathbb{Q}$. Quindi

$$zf(1) \leqslant rf(1) \tag{A1.25}$$

Se $f(1) = 0$ allora $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ poiché $f(x) = xf(1)$. Ma allora preso un $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ esistono due razionali r_1, r_2 tali che $r_1 < x < r_2$. Ma allora dato che f é debolmente crescente, si ha che $f(r_1) \leqslant f(x) \leqslant f(r_2)$ quindi dato che $f(r_1) = f(r_2) = 0$ allora anche $f(x) = 0$. Quindi si ottiene la soluzione $f(x)$ costantemente 0 che é stata giá discussa.

Altrimenti $f(1) > 0$ quindi dalla $(A1.25)$ si ha che $z \leqslant r$, ma $x < r < z$ e ció é assurdo.

<u>*Caso 1:*</u> $z < r < x$.

Dato che f é debolmente crescente, si ha che

$$f(x) \geqslant f(r) \tag{A1.26}$$

ma $f(x) = zf(1)$ e $f(r) = rf(1)$ poiché $r \in \mathbb{Q}$. Quindi

$$zf(1) \geqslant rf(1) \tag{A1.27}$$

Il caso $f(1) = 0$ é giá stato discusso. Se $f(1) > 0$ allora $z \geqslant r$ e ció é assurdo poiché $z < r < x$.

Quindi $f(x) = cx\ \forall x \in \mathbb{R}$, con $c = f(1) > 0$ (il caso $f(1) = 0$ é giá stato discusso). Sostituendo il $P(x; y)$ si ha che

$$cx + cy \leqslant c(x + y) \tag{A1.28}$$

che é sempre vera per $x, y \in \mathbb{R}$. Sostituendo in $R(x; y)$ si ha che

$$cx \cdot cy \leqslant cxy \tag{A1.29}$$

dato che $c > 0$ si puó dividere per c da entrambe le parti quindi

$$cxy \leqslant xy \tag{A1.30}$$

$$xy(1 - c) \geqslant 0 \tag{A1.31}$$

Se $c = 1$ la $(A1.31)$ é vera. Se $0 < c < 1$ la $(A1.31)$ non vale per ogni x, y: prendendo $x = 1$ e $y = -1$ si ha

$$-(1 - c) \geqslant 0 \tag{A1.32}$$

che non é vero perché $1-c > 0$. Se $c > 1$ la $(A1.31)$ non vale per ogni x, y: prendendo $x = 1$ e $y = 1$ si ha

$$(1 - c) \geqslant 0 \tag{A1.33}$$

che non é vero essendo $c > 1$. Quindi $c = 1$ e $f(x) = x$ che rispetta entrambe le disequazioni del testo. Sostituendo infatti si ottiene $xy \leqslant xy$ e $x + y \leqslant x + y$ che sono entrambe vere.

Allora le soluzioni della disequazione sono $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{A2}}$

Determinare tutte le coppie di interi a, b per cui esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che

$$(x^2 + ax + b)p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \tag{A2.1}$$

con $|c_i| = 1$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Soluzione

Sia k il termine noto di $p(x)$. Allora $b \cdot k = c_0$ quindi $|bk| = 1$, ma, essendo sia b che k interi, allora $b = \pm 1$ (e anche $k = \pm 1$).

Sia $q(x)$ il polinomio $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ e sia α_1 una delle due radici di $x^2 + ax + b$. Allora valutando la $(A2.1)$ in α_1 si ottiene:

$$(\alpha_1^2 + a\alpha_1 + b)p(\alpha_1) = q(\alpha_1) \tag{A2.2}$$

$$0 = q(\alpha_1) \tag{A2.3}$$

Quindi le α_1 é anche radice di $q(x)$. Analogamente detta α_2 la seconda radice di $x^2 + ax + b$, α_2 é radice di $q(x)$.

Si vuole ora dimostrare che, se α é una radice reale di $q(x)$, allora $|\alpha| < 2$. Dato che α é radice di $q(x)$ allora

$$\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0 \tag{A2.4}$$

$$\alpha^n = -(c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0) \tag{A2.5}$$

Ma dato che $c_i = \pm 1$ allora affinché valga la $(A2.5)$ deve valere

$$|\alpha^n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha^i| \quad \text{ovvero} \quad |\alpha|^n \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha|^i \tag{A2.6}$$

Si vuole dimostrare che ció é impossibile se $|\alpha| \geqslant 2$. Se $|\alpha| = 2$ si ha

$$2^n \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \tag{A2.7}$$

e ció é assurdo. Vogliamo ora dimostrare che per ogni $\beta > 2$ vale

$$\beta^n > \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i \tag{A2.8}$$

Infatti

$$\beta^n = 2^n \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^n > \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \tag{A2.9}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\beta^n}{2^n} 2^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\beta^i \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-i}\right) > \tag{A2.10}$$

$$> \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i \tag{A2.11}$$

dove l'ultima disuguaglianza é data dal fatto che dato che $\beta > 2$ allora $\beta/2 > 1$ quindi $\beta^i < \beta^i \cdot (\beta/2)^{n-i}$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ma allora se $|\alpha| = \beta > 2$ allora α non puó rispettare la $(A2.6)$ quindi α non puó essere radice di $q(x)$ e quindi neanche di $x^2 + ax + b$.

Distinguiamo ora due casi:

<u>*Caso 1:*</u> $b = 1$. Allora le radici di $x^2 + ax + 1$ sono

$$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \tag{A2.12}$$

per quanto detto deve valere, se sono reali:

$$\begin{cases} |\alpha_1| < 2 \\ |\alpha_2| < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right| < 2 \\ \left|\dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right| < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |-a + \sqrt{a^2 - 4}| < 4 \quad (1) \\ |-a - \sqrt{a^2 - 4}| < 4 \quad (2) \end{cases} \tag{A2.13}$$

La (1) equivale a

$$\begin{cases} -a + \sqrt{a^2 - 4} < 4 \quad (1.1) \\ -a - \sqrt{a^2 - 4} > -4 \quad (1.2) \end{cases} \tag{A2.14}$$

La (1.1) equivale a $\sqrt{a^2 - 4} < 4 + a$ che é vera se $a^2 - 4 \geqslant 0$ (come condizioni di esistenza della radice), $4 + a \geqslant 0$ (altrimenti la radice di $a^2 - 4$, che é positiva, sarebbe minore di un numero negativo) e, elevando al quadrato entrambi i membri, $a^2 - 4 < (4 + a)^2$. La (1.1) equivale quindi a

$$\begin{cases} a^2 - 4 \geqslant 0 \\ a + 4 \geqslant 0 \\ a^2 - 4 < (a + 4)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant -2 \quad \text{o} \quad a \geqslant 2 \\ a \geqslant -4 \\ a > -5/2 \end{cases} \tag{A2.15}$$

ovvero $-5/2 < a \leqslant -2$ o $a \geqslant 2$. Risolvendo analogamente la (1.2) si ottiene $a \leqslant -2$ o $a \geqslant 2$. Mettendo a sistema le due soluzioni si ottiene:

$$\begin{cases} -5/2 < a \leqslant -2 \quad \text{o} \quad a \geqslant 2 \\ a \leqslant -2 \quad \text{o} \quad a \geqslant 2 \end{cases} \tag{A2.16}$$

ovvero $-5/2 < a \leqslant -2$ o $a \geqslant 2$. Risolvendo analogamente la (2) si ottiene $a \leqslant 2$ o $2 \leqslant a \leqslant 5/2$. Mettendo a sistema le soluzioni della (1) e della (2) si ha:

$$\begin{cases} -5/2 < a \leqslant -2 \quad \text{o} \quad a \geqslant 2 \\ a \leqslant -2 \quad \text{o} \quad 2 \leqslant a \geqslant 5/2 \end{cases} \tag{A2.17}$$

ovvero $-5/2 < a \leqslant -2$ o $2 \leqslant a \geqslant 5/2$. Gli unici valori interi di a possibili sono 2 e -2. Si osserva che per questi valori é possibile trovare un $p(x)$ che soddisfi, infatti

$$(x^2 + 2x + 1)(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1 \tag{A2.18}$$

$$(x^2 - 2x + 1)(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1 \tag{A2.19}$$

Si osserva che non é stato considerato il caso in cui $\alpha_{1,2}$ siano complesse coniugate ovvero se $a^2 - 4 < 0$ quindi $-2 < a < 2$. Gli unici valori interi di a in questo intervallo sono $-1, 0, 1$ e per tutti e tre questi valori esiste un polinomio $p(x)$ che soddisfa, infatti

$$(x^2 - x + 1) \cdot 1 = x^2 - x + 1 \tag{A2.20}$$
$$(x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1 \tag{A2.21}$$
$$(x^2 + x + 1) \cdot 1 = x^2 + x + 1 \tag{A2.22}$$

Quindi le coppie (a, b), $(-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)$ soddisfano la tesi.

<u>*Caso 2*</u>: $b = -1$. Il Caso 2 é analogo al Caso 1. Le radici di $x^2 + ax - 1$ sono

$$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \tag{A2.23}$$

A differenza del Caso 1, ora entrambe le radici sono sicuramente reali poiché $a^2 + 4 \geqslant 0$ $\forall a \in \mathbb{Z}$. Nuovamente risolvendo il sistema, in cui si pone che il modulo di ogni radice deve essere minore di 2, si ottiene:

$$\begin{cases} |\alpha_1| < 2 \\ |\alpha_2| < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right| < 2 & (1) \\ \left|\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right| < 2 & (2) \end{cases} \tag{A2.24}$$

La (1), risolvendo analogamente a prima, ha come soluzione $a > -3/2$, mentre la (2) ha come soluzione $a < 3/2$. Quindi, mettendo a sistema le soluzioni di (1) e (2) si ha $-3/2 < a < 3/2$. Gli unici valori interi in questo intervallo sono $-1, 0, 1$ e per tutti e tre esiste un polinomio $p(x)$ che soddisfa, infatti

$$(x^2 - x - 1) \cdot 1 = x^2 - x - 1 \tag{A2.25}$$
$$(x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 \tag{A2.26}$$
$$(x^2 + x - 1) \cdot 1 = x^2 + x - 1 \tag{A2.27}$$

Quindi anche le coppie (a, b), $(-1, -1), (0, -1), (1, -1)$ soddisfano.

In conclusione, per quanto dimostrato, le coppie (a, b) che soddisfano sono solo $(-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)$.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{C1}}$

Il dipartimento di matematica consta di diecimila stanze quadrate, grandi uguali, disposte a formare un quadrato, i cui lati, lunghi quanto cento stanze, sono allineati coi punti cardinali. Alcuni dei muri fra le stanze hanno una porta che si puó attraversare, ma dal dipartimento non c'é uscita. Per ogni coppia di stanze esiste un percorso che le congiunge. Alcuni stagisti si sono persi nel dipartimento; mediante un walkie-talkie, L puó dire loro di spostarsi nella stanza accanto in una delle quattro direzioni cardinali. Ad ogni istruzione di L, ciascuno stagista si muove nella direzione indicata se vi é una porta che lo permetta, altrimenti rimane fermo. L conosce la mappa del dipartimento, ma non puó in nessun momento conoscere la posizione degli stagisti, a meno che essi non siano tutti insieme. Dimostrare che egli puó portare tutti gli stagisti in una stessa stanza (e cosí poi andare a recuperarli).

Soluzione

Si osserva che se due stagisti si trovano nella stessa stanza da un certo punto in poi, allora da quel momento si muoveranno sempre insieme, come uno stagista singolo. Quindi all'inizio ci possono essere al massimo 10000 gruppi di stagisti distinti, uno per stanza e ad ogni mossa il numero di gruppi di stagisti distinti é debolmente decrescente (due gruppi possono unirsi in uno solo, ma uno non puó mai separarsi).

Step 1 Supponiamo che L conosca la posizione di due gruppi di stagisti (A e B). Si vuole dimostrare che allora puó farli incontrare. Sia s_1 la stanza dove si trova il gruppo A e s_2 quella dove si trova il gruppo B. Conoscendo la mappa, L ordina le mosse necessarie a far andare il gruppo A da s_1 a s_2. Nel frattempo il gruppo B, o é rimasto nella stanza s_2 (e quindi si incontrano) o si é spostato in una stanza s_3. L sa esattamente quale sia questa stanza s_3 e che percorso abbia fatto il gruppo B, poiché si é comportato seguendo le istruzioni di L mentre il gruppo A andava da s_1 a s_2. Sia ora d la distanza tra il gruppo A e il gruppo B misurata come il numero di mosse necessarie a L per far arrivare il gruppo A da s_2 a s_3 seguendo il percorso fatto da B, ma senza dover rimanere fermi alcuni turni a causa di muri (se una mossa compiuta in precedenza dal gruppo B comportava il rimanere fermi per un muro, non viene calcolata).

Ora L ordina le mosse necessarie al gruppo A per fare lo stesso percorso del gruppo B, ma sempre non dicendo le mosse che per le quali il gruppo A rimarrebbe fermo a causa di un muro. Si osserva che la distanza d é debolmente decrescente con il passare del tempo, ed é un numero naturale, quindi sará costante da un certo punto in poi. Si osserva inoltre che d diminuisce di 1 esattamente quando il gruppo B rimane fermo per un muro. Quindi quando la distanza diventa costante (d_f), da allora il gruppo B non incontrerá piú muri. Si vuole dimostrare che ció é assurdo, a meno che $d_f = 0$. Sia s_i una stanza dove si trova il gruppo A, con d_f costante, e s_{i+1} quella dove si trova B. Mentre A compie un certo percorso da s_i a s_{i+1}, B compie lo stesso percorso da s_{i+1} a s_{i+2}. In particolare il percorso compiuto da B é lo stesso percorso compiuto da A, ma traslato di un vettore $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$. Quindi anche la stanza s_{i+2} sará la traslata di s_{i+1} di un vettore $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$. Analogamente, se quando il gruppo A arriva nella stanza s_{i+2}, il gruppo B sará in una stanza s_{i+3} che é la traslata di di s_{i+2} di un vettore $\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$, ovvero la traslata di s_{i+1} di un vettore $2\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$. Considero la sequenza di stanze che s_{i+h} con $h \geqslant 0$. Essendo il numero di stanze del dipartimento finite, allora esisteranno due indici $j < k$ tali che s_{i+j} e s_{i+k} sono la stessa stanza. Ma s_{i+k} é la traslata di s_{i+j} di un vettore $(k-j)\overrightarrow{s_i s_{i+1}}$, quindi necessariamente $\overrightarrow{s_i s_{i+1}} = 0$, quindi $s_i \equiv s_{i+1}$ e $d_f = 0$.

Quindi L riesce a far incontrare i gruppi A e B.

Step 2 Consideriamo il dipartimento all'inizio e dividiamo gli stagisti in 10000 gruppi (alcuni eventualmente vuoti), uno per stanza e numeriamo i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_{10000}$. Per quanto detto L é in grado di far incontrare i gruppi G_1 e G_2 con una sequenza S_1 di mosse. Eseguita S_1, ad ogni gruppo posso associare la stanza nella quale si trova ora (che L conosce). I gruppi G_i per $3 \leqslant i \leqslant 10000$ occupano un numero di stanza minore o uguale a 9998, mentre G_1 e G_2 ora occupano la stessa stanza. Quindi dopo S_1, le stanze occupate sono al piú 9999, con 9999 gruppi distinti. Analogamente dopo S_2 ci saranno al piú 9998 gruppi distinti, poiché L ne ha uniti altri 2 a sua scelta. Dopo S_{9999} ci sará quindi solo un gruppo, che potrá essere recuperato.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{C3}}$

Alberto e Barbara giocano al seguente gioco. A turno, cominciando da Alberto, colorano una casella di una scacchiera 2017×2017. Una casella non puó essere colorata se ce ne sono giá due colorate sulla sua riga o colonna (e non si puó in ogni caso colorare una casella due volte). Perde chi non puó piú muovere. Determinare quale dei due giocatori ha una strategia vincente.

Soluzione

Si vuole dimostrare che Barbara ha una strategia vincente.

Definisco una riga/colonna *vuota*, *semipiena* o *piena* se ha rispettivamente $0, 1$ o 2 caselle colorate. Si osserva che per ipotesi su una riga/colonna *piena* non si puó piú colorare alcuna casella su essa. Siano inoltre le caselle della scacchiera numerate con coppie di interi da 0 a 2016 (con la casella in alto a sinistra di coordinate $(0, 0)$ e quella in basso a destra $(2016, 2016)$).

La strategia di Barbara é la seguente: alla prima mossa colora una casella qualsiasi nella stessa colonna di quella colorata da Alberto. Dopo la prima mossa ci sono esattamente due righe *semipiene* e una colonna *piena*.

Dimostro ora per induzione che Barbara é in grado di lasciare, dopo il suo n-esimo turno, esattamente n colonne *piene*, $2017 - n$ colonne *vuote*, $n - 1$ righe *piene*, 2 righe *semipiene* e $2016 - n$ righe *vuote* (per $1 \leqslant n \leqslant 2016$).

Passo base: dopo la prima mossa descritta si ha il passo base rispettato.

Passo induttivo: supponiamo che la tesi valga per $n - 1$ e dimostriamo che vale per n. Siano r_1, r_2 le righe *semipiene* dopo l'$n - 1$-esimo turno. Dato che non ci sono colonne *semipiene*, Alberto deve necessariamente mettere la sua casella in una colonna *vuota*, che diventa *semipiena*. Siano (r_3, c_i) le coordinate della casella da lui colorata. Distinguiamo ora tre casi:

- $r_3 = r_1$. Allora la riga r_1 diventa *piena*. Barbara colora quindi la casella (r_4, c_i) dove r_4 é una qualsiasi riga vuota (che esiste perché il numero di righe vuote a $n - 1$ é, per ipotesi induttiva, $2017 - n > 0$ $\forall n$ tale che $1 \leqslant n \leqslant 2016$). Cosí la colonna c_i diventa *piena*, le righe r_2, r_4 sono *semipiene*, i numeri di colonne *piene* e righe *piene* sono aumentati di 1, mentre i numeri di righe *vuote* e colonne *vuote* sono diminuiti di uno, quindi la tesi é rispettata.

- $r_3 = r_2$. Allora la riga r_2 diventa *piena*. Barbara colora quindi la casella (r_4, c_i) dove r_4 é una qualsiasi riga vuota (che esiste perché il numero di righe vuote a $n - 1$ é, per ipotesi induttiva, $2017 - n > 0$ $\forall n$ tale che $1 \leqslant n \leqslant 2016$). Cosí la colonna c_i diventa *piena*, le righe r_1, r_4 sono *semipiene*, i numeri di colonne *piene* e righe *piene* sono aumentati di 1, mentre i numeri di righe *vuote* e colonne *vuote* sono diminuiti di uno, quindi la tesi é rispettata.

- $r_3 \neq r_2$ e $r_3 \neq r_1$. Allora la riga r_3 diventa *semipiena*. Barbara colora quindi la casella (r_1, c_i). Cosí la colonna c_i diventa *piena*, come anche la riga r_1. Le righe

r_2, r_3 sono *semipiene*, i numeri di colonne *piene* e righe *piene* sono aumentati di 1, mentre i numeri di righe *vuote* e colonne *vuote* sono diminuiti di uno, quindi la tesi é rispettata.

Quindi Barbara é in grado di rispondere alle mosse di Alberto in modo che dopo la 2016−esima mossa ci sia una colonna vuota e due righe semipiene. Siano (a, c) e (b, c) le due caselle in cui le righe *semipiene* incontrano la colonna *vuote*. Alberto dovrá necessariamente colorare una di queste due caselle, rendendo la colonna *semipiena*. Quindi Barbara puó colorare l'altra (la colonna diventa piena). Ma ora tutte e 2017 le colonne sono piene e Alberto non puó piú effettuare alcuna mossa, quindi vince Barbara.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G1}}$

Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno e sia Γ la sua circonferenza circoscritta e sia N il centro della sua circonferenza di Feuerbach.
Dimostrare che le rette tangenti a Γ in B e in C concorrono con AN se e solo se $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione

Sia T il punto di intersezione tra le tangenti a Γ in B e C. Per il lemma della simmediana la retta AT é anche simmediana del triangolo ABC rispetto al lato BC. Detto K il punto di Lemoine del triangolo ABC allora $K \in AT$ (perché il punto di Lemoine é intersezione delle simmediane di un triangolo).

Considero ora un sistema di coordinate baricentriche con triangolo di riferimento ABC. Quindi $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$ e $C = [0 : 0 : 1]$. Inoltre $G = [1 : 1 : 1]$ dove G é il baricentro e il punto di Lemoine é $K = [a^2 : b^2 : c^2]$ perché coniugato isogonale del baricentro. Calcolo ora le coordinate del centro della Feuerbach (N). N é il punto medio del segmento congiungente ortocentro H e circocentro O, che hanno coordinate

$$H = [2S_BS_C : 2S_AS_C : 2S_AS_B] \tag{G1.1}$$

$$O = [S_AS_B + S_AS_C : S_AS_B + S_BS_C : S_AS_C + S_BS_C] \tag{G1.2}$$

dove $S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ e cicliche (utilizzando la notazione di Conway). La somma delle coordinate di H é

$$2S_BS_C + 2S_AS_C + 2S_AS_B = 2(S_BS_C + S_AS_C + S_AS_B) \tag{G1.3}$$

mentre la somma delle coordinate di O é

$$S_AS_B + S_AS_C + S_AS_B + S_BS_C + S_AS_C + S_BS_C = 2(S_BS_C + S_AS_C + S_AS_B) \tag{G1.4}$$

Essendo la somma delle coordinate di O e H la stessa allora il punto medio N ha come coordinate la somma delle coordinate dei due estremi. Quindi

$$N = [S_AS_B + S_AS_C + 2S_BS_C : S_AS_B + S_BS_C + 2S_AS_C : S_AS_C + S_BS_C + 2S_AS_B] \tag{G1.5}$$

Calcolo ora la prima coordinata di N in funzione di a, b, c (le lunghezze dei lati del triangolo): le altre due coordinate sono cicliche poiché il centro della circonferenza di Feuerbach é simmetrico rispetto ai tre punti A, B, C:

$$S_AS_B + S_AS_C + 2S_BS_C = \tag{G1.6}$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \tag{G1.7}$$

$$= \frac{1}{4}[(c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2) + (b^4 - a^4 - c^4 + 2a^2c^2) + 2(a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2)] = \tag{G1.8}$$

$$= \frac{1}{2}(2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - c^4) \tag{G1.9}$$

Matteo Palmieri

Quindi moltiplicando tutte le coordinate per 2 (sono omogenee), ottengo:

$$N = [2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2-b^4-c^4 : 2a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-a^4-c^4 : 2a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-a^4-b^4] \tag{G1.10}$$

Dato che A, K, T sono allineati per quanto giá detto, allora A, N, T sono allineati se e solo se A, K, N sono allineti, ovvero se e solo se $det(A|K|N) = 0$. Sostituendo le coordinate dei tre punti si ha:

$$det(A|K|N) = det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - c^4 \\ 0 & b^2 & 2a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - a^4 - c^4 \\ 0 & c^2 & 2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^4 - b^4 \end{pmatrix} = 0 \tag{G1.11}$$

Sviluppando il determinante si ha

$$b^2(2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^4 - b^4) = c^2(2a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - a^4 - c^4) \tag{G1.12}$$

$$2a^2b^4 + a^2b^2c^2 + b^4c^2 - a^4b^2 - b^6 = 2a^2c^4 + a^2b^2c^2 + b^2c^4 - a^4c^2 - c^6 \tag{G1.13}$$

$$(2a^2b^4 - 2a^2c^4) + (b^4c^2 - b^2c^4) - (a^4b^2 - a^4c^2) - (b^6 - c^6) = 0 \tag{G1.14}$$

$$2a^2(b^2 + c^2)(b^2 - c^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) - a^4(b^2 - c^2) - (b^4 + b^2c^2 + c^4)(b^2 - c^2) = 0 \tag{G1.15}$$

$$(b^2 - c^2)(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - b^2c^2) = 0 \tag{G1.16}$$

$$(b^2 - c^2)(2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) = 0 \tag{G1.17}$$

Ma dato che ABC é scaleno allora $b \neq c$ quindi $b^2 - c^2 \neq 0$. Allora A, N, T sono allineati se e solo se $2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0$.

Si vuole ora dimostrare che questo é vero se e solo se $\angle BAC = \pi/4$. Infatti per il teorema di Carnot su ABC si ha che, se $\angle BAC = \pi/4$, allora

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc \tag{G1.18}$$

$$\sqrt{2}bc = b^2 + c^2 - a^2 \tag{G1.19}$$

Elevando entrambi membri alla seconda si ha che

$$2b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \tag{G1.20}$$

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0 \tag{G1.21}$$

che é stato dimostrato essere condizione equivalente al fatto che A, T, N siano allineati. Si osserva che la condizione ottenuta nell'equazione $(G1.21)$, dopo aver elevanto al quadrato, é vera anche per $\cos(\angle BAC) = -\sqrt{2}/2$, ovvero per $\angle BAC = 3/4\pi$. D'altra parte per ipotesi il triangolo ABC é acutangolo, quindi l'unico angolo $\angle BAC$ per cui vale la $(G1.21)$ é $pi/4$. Da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G2}}$

Due circonferenze ω_1 e ω_2 di centri O_1 e O_2 sono tangenti esternamente in un punto D e entrambe sono tangenti internamente in due punti E e F ad una terza circonferenza ω. Sia t la tangente comune a ω_1 e ω_2 in D e AB il diametro di ω perpendicolare a t, in modo che A, E e O_1 giacciano dalla stessa parte rispetto a t. Mostrare che le rette AO_1, BO_2, EF e t concorrono.

Soluzione

Si osserva che O_1, D, O_2 sono allineati, infatti $O_1D \perp t$ e $O_2D \perp t$ il che implica $O_1D \parallel O_2D$ quindi O_1, O_2 e D sono sulla stessa retta. Analogamente E, O_1, O sono allineati e F, O_2, O sono allineati.

Considero ora un'omotetia Ω_E di centro E che manda ω_1 in ω. Allora Ω_E manda O_1 in O e manda D in un punto $D' \in \omega$ tale che $O_1D \parallel OD'$ e OD' orientato nello stesso verso di O_1D. Quindi necessariamente $D' \equiv B$. Ma allora E, D, B sono allineati, essendo E il centro di omotetia e B il trasformato di D. Analogamente, con un'omotetia di centro F che manda ω_2 in ω si ottiene che F, D, A sono allineati.

Considero ora un sistema di assi cartesiani di centro O, asse y perpendicolare ad AB passante per O (con verso positivo nella direzione del semipiano contenente D) e asse x sulla retta AB con verso positivo nella direzione di B. Sia presa l'unitá di misura in modo che $AB = 2u$. Ma allora $B = (1, 0)$, $O = (0, 0)$,$A = (-1, 0)$ e ω ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Sia inoltre $D = (a, b)$. La retta t ha quindi equazione $x = a$, mentre la retta O_1O_2 ha equazione $y = b$.

Step 1: calcolo coordinate di F

Dato che A, D, F sono allineati allora F é il punto di intersezione della retta AD con ω. Il coefficiente angolare della retta AD é

$$m_{AD} = \frac{b}{a+1} \tag{G2.1}$$

quindi l'equazione di AD é $y = \frac{b}{a+1}x + q$, per un certo q. Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene

$$q = y_A - m_{AD}x_A = 0 - \frac{b}{a+1}(-1) = \frac{b}{a+1} \tag{G2.2}$$

quindi l'equazione di AD é $y = \frac{b}{a+1}x + \frac{b}{a+1}$. Mettendo a sistema con ω per trovare F, si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{b}{a+1}x + \frac{b}{a+1} \end{cases} \tag{G2.3}$$

Da cui risolvendo

$$x^2 + \left(\frac{b}{a+1}x + \frac{b}{a+1}\right)^2 = 1 \tag{G2.4}$$

$$x^2 + \frac{b^2}{(a+1)^2}x^2 + \frac{b^2}{(a+1)^2} + 2\frac{b^2}{(a+1)^2}x = 1 \tag{G2.5}$$

$$[b^2 + (a+1)^2]x^2 + 2b^2x + [b^2 - (a+1)^2] = 0 \tag{G2.6}$$

$$x = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4 - [b^2 + (a+1)^2][b^2 - (a+1)^2]}}{[b^2 + (a+1)^2]} = \frac{-b^2 \pm (a+1)^2}{[b^2 + (a+1)^2]} \tag{G2.7}$$

quindi $x = -1$ (l'ascissa di A) o $x = \frac{-b^2+(a+1)^2}{[b^2+(a+1)^2]}$ (l'ascissa di F). Quindi l'ordinata di F é

$$y_F = \frac{b}{a+1}(x_F + 1) = \frac{b}{a+1}\left(\frac{-b^2 + (a+1)^2}{[b^2 + (a+1)^2]} + 1\right) = \frac{2b(a+1)}{b^2 + (a+1)^2} \tag{G2.8}$$

Step 2: calcolo coordinate di E

Analogamente allo Step 1, E é il punto di intersezione della retta BD con ω. Calcolo ora l'equazione della retta BD:

$$m_{BD} = \frac{b}{a-1} \tag{G2.9}$$

quindi l'equazione é $y = \frac{b}{a-1}x + q$. Imponendo il passaggio per B si ottiene

$$q = y_B - m_{BD}x_B = 0 - \frac{b}{a-1} \cdot 1 = -\frac{b}{a-1} \tag{G2.10}$$

quindi l'equazione di BD é $y = \frac{b}{a-1}x - \frac{b}{a-1}$. Mettendo a sistema con ω per trovare E, si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{b}{a-1}x - \frac{b}{a+1} \end{cases} \tag{G2.11}$$

Da cui risolvendo

$$x^2 + \left(\frac{b}{a-1}x - \frac{b}{a-1}\right)^2 = 1 \tag{G2.12}$$

$$x^2 + \frac{b^2}{(a-1)^2}x^2 + \frac{b^2}{(a-1)^2} - 2\frac{b^2}{(a-1)^2}x = 1 \tag{G2.13}$$

$$[b^2 + (a-1)^2]x^2 - 2b^2x + [b^2 - (a-1)^2] = 0 \tag{G2.14}$$

$$x = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - [b^2 + (a-1)^2][b^2 - (a-1)^2]}}{[b^2 + (a-1)^2]} = \frac{b^2 \pm (a-1)^2}{[b^2 + (a-1)^2]} \tag{G2.15}$$

quindi $x = 1$ (l'ascissa di B) o $x = \frac{b^2-(a-1)^2}{[b^2+(a-1)^2]}$ (l'ascissa di E). Quindi l'ordinata di E é

$$y_E = \frac{b}{a-1}(x_E - 1) = \frac{b}{a-1}\left(\frac{b^2-(a-1)^2}{[b^2+(a-1)^2]} - 1\right) = -\frac{2b(a-1)}{b^2+(a-1)^2} \tag{G2.16}$$

Step 3: calcolo coordinate di O_1 e O_2.

O_1 é il punto di intersezione tra la retta O_1O_2 e la retta EO dato che E, O, O_1 sono, per quanto detto, allineati. La retta EO ha equazione, dato che passa per l'origine, $y = m_{EO}x$, con

$$m_{EO} = \frac{y_E}{x_E} = \frac{-\frac{2b(a-1)}{b^2+(a-1)^2}}{\frac{b^2-(a-1)^2}{[b^2+(a-1)^2]}} = \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-2a+1} \tag{G2.17}$$

intersecando le rette EO e O_1O_2 si ottiene

$$\begin{cases} y = \dfrac{2b(a-1)}{a^2-b^2-2a+1}x \\ y = b \end{cases} \tag{G2.18}$$

Da cui il punto O_1 ha coordinate $(\frac{a^2-b^2-2a+1}{2(a-1)}, b)$.

Analogamente O_2 é il punto di intersezione tra la retta O_1O_2 e la retta FO dato che F, O, O_2 sono, per quanto detto, allineati. La retta FO ha equazione, dato che passa per l'origine, $y = m_{FO}x$, con

$$m_{FO} = \frac{y_F}{x_F} = \frac{\frac{2b(a+1)}{b^2+(a+1)^2}}{\frac{-b^2+(a+1)^2}{[b^2+(a+1)^2]}} = \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2+2a+1} \tag{G2.19}$$

intersecando le rette FO e O_1O_2 si ottiene

$$\begin{cases} y = \dfrac{2b(a+1)}{a^2-b^2+2a+1}x \\ y = b \end{cases} \tag{G2.20}$$

Da cui il punto O_2 ha coordinate $(\frac{a^2-b^2+2a+1}{2(a+1)}, b)$.

Step 4: calcolo ora l'equazione AO_1

$$m_{AO_1} = \frac{b}{\frac{a^2-b^2-2a+1}{2(a-1)} + 1} = \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-1} \tag{G2.21}$$

impongo quindi il passaggio per A:

$$q = y_A - m_{AO_1}x_A = m_{AO_1} \tag{G2.22}$$

quindi l'equazione di AO_1 é

$$AO_1 : y = \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-1}x + \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-1} \tag{G2.23}$$

Intersecando la retta AO_1 con t si ottiene

$$\begin{cases} y = \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-1}x + \frac{2b(a-1)}{a^2-b^2-1} \\ x = a \end{cases} \tag{G2.24}$$

il punto di intersezione (T) ha coordinate

$$T = \left(a, \frac{2b(a-1)(a+1)}{a^2-b^2-1}\right) \tag{G2.25}$$

Step 5: calcolo analogamente allo Step 4 l'equazione di BO_2

$$m_{BO_2} = \frac{b}{\frac{a^2-b^2+2a+1}{2(a+1)} - 1} = \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2-1} \tag{G2.26}$$

impongo quindi il passaggio per B:

$$q = y_B - m_{BO_2}x_B = -m_{AO_1} \tag{G2.27}$$

quindi l'equazione di BO_2 é

$$BO_2 : y = \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2-1}x - \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2-1} \tag{G2.28}$$

Intersecando la retta BO_2 con t si ottiene

$$\begin{cases} yy = \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2-1}x - \frac{2b(a+1)}{a^2-b^2-1} \\ x = a \end{cases} \tag{G2.29}$$

il punto di intersezione ha coordinate

$$\left(a, \frac{2b(a-1)(a+1)}{a^2-b^2-1}\right) \tag{G2.30}$$

che corrispondono alle coordinate di T trovate nello Step 4. Quindi le rette AO_1, BO_2, t concorrono in T.

Step 6: calcolo equazione della retta EF.

$$m_{EF} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{-\frac{2b(a-1)}{b^2+(a-1)^2} - \frac{2b(a+1)}{b^2+(a+1)^2}}{\frac{b^2-(a-1)^2}{b^2+(a-1)^2} - \frac{-b^2+(a+1)^2}{b^2+(a+1)^2}} = \tag{G2.31}$$

Matteo Palmieri

$$= \frac{2b(a-1)[b^2+(a+1)^2]+2b(a+1)[b^2+(a-1)^2]}{-(b^2-(a-1)^2)(b^2+(a+1)^2)+(-b^2+(a+1)^2)(b^2+(a-1)^2)} = \tag{G2.32}$$

$$= \frac{4a^3b+4ab^3-4ab}{-2b^4+2(a^2-1)^2} = \tag{G2.33}$$

$$= \frac{4ab(a^2+b^2-1)}{2(a^2-1-b^2)(a^2-1+b^2)} = \qquad = \frac{2ab}{a^2-1-b^2} \tag{G2.34}$$

impongo il passaggio per E:

$$q = y_E - m_{EF}x_E = -\frac{2b(a-1)}{b^2+(a-1)^2} - \frac{2ab}{a^2-1-b^2}\cdot\frac{b^2-(a-1)^2}{b^2+(a-1)^2} = \tag{G2.35}$$

$$= -\frac{2b(a-1)(a^2-b^2-1)+2ab(b^2+(a-1)^2)}{(b^2+(a-1)^2)(a^2-b^2-1)} = \tag{G2.36}$$

$$= -\frac{2a^2b+2b^3-4ab+2b}{(b^2+(a-1)^2)(a^2-b^2-1)} = \tag{G2.37}$$

$$-\frac{2b(a^2+b^2-2a+1)}{(b^2+(a-1)^2)(a^2-b^2-1)} = \qquad -\frac{2b}{a^2-b^2-1} \tag{G2.38}$$

Quindi l'equazione di EF é:

$$EF : y = \frac{2ab}{a^2-1-b^2}x - \frac{2b}{a^2-b^2-1} \tag{G2.39}$$

Intersecando EF con la retta $t : x = a$ si ottiene il punto di ordinata

$$\frac{2ab}{a^2-1-b^2}a - \frac{2b}{a^2-b^2-1} = \frac{2b(a^2-1)}{a^2-b^2-1} \tag{G2.40}$$

che corrisponde esattamente al punto T. Quindi le rette EF, AO_1, BO_2, t concorrono. Da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{G3}}$

Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $\angle BAD + 2\angle BCD = 180°$. Sia E l'intersezione di BD con la bisettrice interna di $\angle BAD$. L'asse di AE interseca CB e CD in X e Y rispettivamente.
Mostrare che $AXCY$ é ciclico.

Soluzione

Sia $\angle BAD = \alpha$ e $\angle BCD = \gamma$. Per ipotesi $\alpha + 2\gamma = 180°$. $AXCY$ é ciclico se e solo se $\angle XCY + \angle XAY = 180°$ ovvero se e solo se

$$\angle XCY + \angle YAD + \angle BAD + \angle BAX = 180° \tag{G3.1}$$

ma $\angle BAD = \alpha$ e $\angle XCY = \angle BCD = \gamma$, inoltre $\alpha + \gamma = 180° - \gamma$. Quindi, sostituendo, la $(G3.1)$ é vera se e solo se

$$\angle YAD + \angle BAX = \gamma \tag{G3.2}$$

Sia ora MN la parallele a XY passante per A, incontra CB e CD rispettivamente in M e N. Dato che $XY \perp AE$ allora anche $MN \perp AE$, quindi $\angle BAM = 90° - \angle EAB = 90° - \alpha/2$. Per ipotesi, peró si ha che $\alpha + 2\gamma = 180°$, ovvero $90° - \alpha/2 = \gamma$, quindi $\angle BAM = \gamma$. Ma allora

$$\angle DAM + \angle MCD = \angle DAB + \angle BAM + \angle MCD = \alpha + \gamma + \gamma = 180° \tag{G3.3}$$

quindi $DAMC$ é ciclico. Ma allora $\angle AMX = \angle AMC = 180° - \angle ADC = \angle ADY$. Si vuole ora dimostrare che i triangoli AMX e ADY sono ordinatamente simili. Se fossero simili si avrebbe che $\angle DAY = \angle MAX$ quindi

$$\angle DAY + \angle BAX = \angle MAX + \angle BAX = \angle MAB = \gamma \tag{G3.4}$$

che é equivalente alla $(G3.2)$, che é equivalente alla tesi, per quanto dimostrato.

Considero ora i triangoli AMX e ADY. Si é giá dimostrato che $\angle AMX = \angle ADY$, quindi basta dimostrare che

$$\frac{DY}{MX} = \frac{AD}{AM} \tag{G3.5}$$

Si osserva che i triangoli AMB e ADN sono simili. Infatti $\angle AMB = \angle ADN$ per quanto giá detto. Inoltre dato che $MN \perp AE$ allora

$$\angle MAB = 90° - \angle BAE = 90° - \alpha/2 = \gamma \tag{G3.6}$$
$$\angle NAD = 90° - \angle DAE = 90° - \alpha/2 = \gamma \tag{G3.7}$$

quindi $\angle MAB = \angle NAD$ quindi i due triangoli AMB e ADN sono simili (hanno due coppie di angoli congruenti).

Matteo Palmieri

Siano ora Y', D', B', X' le proiezioni di Y, D, B, X su MN rispettivamente. Sia k il coefficiente di proporzionalitá tra i lati del triangolo AMB e quelli del triangolo ADN. Siano inoltre $AM = x$, $MB = y$, $AB = z$. Allora $AD = kx$, $DN = ky$, $AN = kz$. Considero ora i punti D, E, B, allineati. Dato che il coefficiente angolare della retta su cui giacciono é costante allora (considerando un sistema di riferimento di centro A e assi MN e EA), si ha che

$$\frac{DD' - EA}{D'A} = \frac{EA - BB'}{AB'} \tag{G3.8}$$

Da cui

$$EA = \frac{DD' \cdot AB' + BB' \cdot AD'}{AD' + AB'} \tag{G3.9}$$

Ma $DD' = AD \sin \angle D'AD = kx \sin \gamma$, $D'A = kx \cos \gamma$, $BB' = z \sin \gamma$ e $B'A = z \cos \gamma$, quindi

$$EA = \frac{kxz \sin \gamma \cos \gamma + kxz \sin \gamma \cos \gamma}{(kx + z) \cos \gamma} = \frac{2kxz \sin \gamma}{kx + z} \tag{G3.10}$$

Detto F il punto medio di EA, allora

$$AF = \frac{kxz \sin \gamma}{kx + z} \tag{G3.11}$$

Dato che $YY' \parallel DD'$ (entrambi sono perpendicolari a MN), allora

$$\frac{NY}{YY'} = \frac{ND}{DD'} \tag{G3.12}$$

Ma $YY' = AF$ (il quadrilatero $Y'AFY$ é un rettangolo avendo i lati a due a due paralleli e $AF \perp MN$). Quindi

$$NY = \frac{ND \cdot AF}{DD'} = \frac{ky \cdot \frac{kxz \sin \gamma}{kx+z}}{kx \sin \gamma} = \frac{kyz}{kx + z} \tag{G3.13}$$

Quindi

$$DY = DN - NY = ky - \frac{kyz}{kx + z} = \frac{k^2 xy}{kx + z} \tag{G3.14}$$

Analogamente, dato che $XX' \parallel BB'$ allora

$$\frac{XM}{XX'} = \frac{BM}{BB'} \tag{G3.15}$$

Ma anche $XX' = AF$ quindi

$$XM = \frac{BM \cdot AF}{BB'} = \frac{y \cdot \frac{kxz \sin \gamma}{kx+z}}{z \sin \gamma} = \frac{kxy}{kx + z} \tag{G3.16}$$

Ma allora

$$\frac{DY}{XM} = \frac{\frac{k^2 xy}{kx+z}}{\frac{kxy}{kx+z}} = k = \frac{AD}{AM} \tag{G3.17}$$

Quindi vale la $(G3.5)$ che é equivalente alla tesi, per quanto dimostrato.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{N2}}$

Sia n un intero positivo. Sia A_n l'insieme dei primi p per i quali esistono interi positivi a, b tali che entrambe le seguenti condizioni siano verificate:

(a) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono interi;

(b) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono coprimi con p.

Se A_n é un insieme finito, denotiamo $f(n)$ il numero di elementi i A_n.
Dimostrare che:

(a) A_n é un insieme finito se e solo se $n \neq 2$.

(b) Se m, k sono interi positivi dispari, con massimo comune divisore d, allora

$$f(d) \leqslant f(k) + f(m) - f(km) \leqslant 2f(d) \qquad \text{(N2.1)}$$

Soluzione

Parte (a): Per $n = 2$, per ogni primo $p \geqslant 3$ é sufficiente prendere $a = b = p$, cosí:

$$\frac{a+b}{p} = \frac{2p}{p} = 2 \qquad \text{(N2.2)}$$

e 2 é intero e coprimo con p per ogni $p \geqslant 3$.

$$\frac{a^2+b^2}{p^2} = \frac{2p^2}{p^2} = 2 \qquad \text{(N2.3)}$$

e 2 é intero e coprimo con p per ogni $p \geqslant 3$. Quindi tutti i primi $p \geqslant 3$ appartengono a A_2, quindi A_2 ha infiniti elementi.

Sia $v_p(x)$ il numero di fattori p in x. Dato che $\frac{a+b}{p}$ é intero e coprimo con p allora $v_p(a+b) = 1$. Ma allora se $n = 1$, $v_p(a^n + b^n) = v_p(a+b) = 1$, quindi $p^2 \nmid a^1 + b^1$ quindi $\frac{a^1+b^1}{p^2}$ non é intero, quindi non é rispettata la condizione (a). Quindi A_1 é l'insieme vuoto.

Considero ora $n > 2$. Allora esistono k, h interi non negativi tali che $n = 2^k h$, con h dispari. Distinguo ora due casi:

Caso 1: $k = 0$. Allora $n = h$ dispari. Allora per LTE:

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a+b) + v_p(n) = 1 + v_p(n) \qquad \text{(N2.4)}$$

ma affinché valgano sia la condizione (a) che la condizione (b), deve valere $v_p(a^n+b^n) = 2$. Quindi dalla $(N2.4)$ sia che

$$v_p(n) = 1 \qquad \text{(N2.5)}$$

che implica $p|n$ quindi $p \leqslant n$ che é vero per un numero finito di p. Quindi A_n é finito per n dispari.

<u>*Caso 2:*</u> $k > 0$. Analogamente al Caso 1, affinché valgano le condizioni (a) e (b) deve valere $v_p(a^n + b^n) = 2$. Inoltre

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a^{2^k h} + b^{2^k h}) = v_p((a^{2^k})^h + (b^{2^k})^h) \tag{N2.6}$$

Detto quindi $A = a^{2^k}$ e $B = b^{2^k}$, per LTE, dato che h é dispari, vale

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(A^h + B^h) = v_p(A + B) + v_p(h) \tag{N2.7}$$

Supponiamo per assurdo che per un $n > 2$ pari si abbia A_n con infiniti elementi. Allora esiste un primo $p > n$ che appartiene a A_n. Ma se $p > n$ allora $p > h$ quindi $p \nmid h$, quindi $v_p(h) = 0$. Ma allora si deve avere, per la $(N2.7)$, $v_p(A + B) = 2$, quindi $p|A + B = a^{2^k} + b^{2^k}$. D'altra parte $p|a + b$ quindi $a \equiv -b \pmod p$. Ma allora

$$a^{2^k} + b^{2^k} \equiv a^{2^k} + (-a)^{2^k} \equiv 2a^{2^k} \tag{N2.8}$$

quindi $p|a^{2^k} + b^{2^k}$ se e solo se $p|2a^{2^k}$, ma $p > 2$ quindi $p|2a^{2^k}$ se e solo se $p|a$. Quindi $a \equiv b \equiv 0 \pmod p$, quindi $a = a'p$ e $b = b'p$ per due interi a', b'. Quindi

$$v_p(a^{2^k} + b^{2^k}) = v_p((a'p)^{2^k} + (b'p)^{2^k}) = v_p((a'^{2^k} + b'^{2^k})p^{2^k}) > 2^k > 2 \tag{N2.9}$$

quindi $v_p(a^{2^k} + b^{2^k}) > 2$, ma ció é assurdo poiché $v_p(a^{2^k} + b^{2^k}) = 2$. Ma allora non esiste alcun primo $p > n$ appartenente a A_n con $n > 2$ dispari. Ma allora A_n 'finito.

Parte (b): é stato dimostrato nella Parte (a) che per n dispari, i primi p in A_n sono tutti e soli quelli per cui $v_p(n) = 1$, ovvero per cui p compare con esponente 1 nella fattorizzazione di n. Considero la scomposizione in fattori primi di m e k. É quindi possibile scrivere

$$m = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \cdots d_a^{\alpha_a} \cdot p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_b^{\beta_b} \tag{N2.10}$$

$$k = d_1^{\delta_1} d_2^{\delta_2} \cdots d_a^{\delta_a} \cdot q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_c^{\gamma_c} \tag{N2.11}$$

dove i fattori d_i,p_i e q_i sono primi per ogni i e tutti gli esponenti che compaiono nelle fattorizzazioni sono interi maggiori o uguali a 1. Inoltre i fattori primi d_i sono tutti e soli i fattori primi in comune tra m e k. Quindi si puó scrivere:

$$d = d_1^{\epsilon_1} d_2^{\epsilon_2} \cdots d_a^{\epsilon_a} \tag{N2.12}$$

con $\epsilon_i = \min \alpha_i, \delta_i$ per $1 \leqslant i \leqslant a$. Siano ora A, B, C, D ed E rispettivamente il numero di $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$ che sono uguali a 1. Quindi si ottiene che $f(m) = A + B$ (tutti i primi nella scomposizione di m che compaiono con esponente 1). Analogamente $f(k) = D + C$ e $f(d) = E$. Si osserva che se $\alpha_i = 1$ per un certo i allora essendo $\delta_i \geqslant 1$ allora $\epsilon_i = 1$. Quindi ne deriva che $E \geqslant A$. Analogamente $E \geqslant D$. D'altra parte se $\epsilon_i = 1$ per un certo i allora $\alpha_i = 1$ o $\delta_i = 1$ o entrambi quindi $E \leqslant A + D$. Osservo infine che $f(mk) = B + C$: infatti i fattori d_i compaiono con esponente

$\alpha_i + \delta_i \geqslant 1 + 1 = 2$, mentre i fattori p_i e q_i mantengono rispettivamente gli esponenti β_i e γ_i per ogni i. Sostituisco quindi i valori trovati nella $(N2.1)$ e ottengo

$$f(d) \leqslant f(k) + f(m) - f(km) \leqslant 2f(d) \tag{N2.13}$$

$$E \leqslant (D + C) + (A + B) - (B + C) \leqslant 2E \tag{N2.14}$$

$$E \leqslant A + D \leqslant 2E \tag{N2.15}$$

la prima disuguaglianza segue da quanto detto detto sopra, mentre la seconda dal fatto che $E \geqslant A$ e $E \geqslant D$, precedentemente dimostrato. Da cui la tesi.

Matteo Palmieri

Soluzione problema $\boxed{\text{N3}}$

Sia a un intero positivo tale che, per ogni intero positivo n, il numero n^2a-1 ha un divisore maggiore di 1 e congruo a 1 modulo n.
Dimostrare che a é un quadrato perfetto.

Soluzione

Sia d il divisore di n^2a-1 congruo a 1 modulo n. Allora $d = kn+1$ con k intero. Inoltre dato che $d > 1$ allora $k \geqslant 1$. Dato che $d|n^2a-1$ allora

$$hd = n^2a - 1 \quad h \in \mathbb{Z}^+ \tag{N3.1}$$
$$h(kn+1) = n^2a - 1 \tag{N3.2}$$

Consideriamo ora l'equazione $(N3.2)$ modulo n, ottenendo:

$$h \equiv -1 \pmod{n} \tag{N3.3}$$

Quindi $h = jn - 1$ con $j \in \mathbb{Z}^+$, ovvero $(jn-1)(kn+1) = n^2a-1$. Sviluppando si ottiene:

$$(jn-1)(kn+1) = n^2a - 1 \tag{N3.4}$$
$$jkn^2 + (j-k)n - 1 = n^2a - 1 \tag{N3.5}$$
$$jkn + (j-k) = na \tag{N3.6}$$

Dove nell'ultimo passaggio é stato aggiunto 1 a entrambi i membri e diviso per n. Dall'ultima equazione si puó osservare che i termini jkn e na siano multipli di n, quindi l anche $j-k$ deve essere multiplo di n. Ma allora $j-k = nb$ per un certo b intero.

Si vuole ora dimostrare che $b = 0$. In questo caso $j - k = 0$ quindi $j = k$. Sostituendo nella $(N3.4)$ si ottiene

$$(kn-1)(kn+1) = n^2a - 1 \tag{N3.7}$$
$$k^2n^2 - 1 = n^2a - 1 \tag{N3.8}$$
$$k^2n^2 = n^2a \tag{N3.9}$$
$$k^2 = a \tag{N3.10}$$

Da cui segue che a é un quadrato perfetto.

Supponiamo ora per assurdo che $b \neq 0$. Dato che $j - k = nb$ allora $j = nb + k$. Sostituendo nella $(N3.6)$ si ottiene

$$(nb+k)kn + nb = na \tag{N3.11}$$
$$nbk + k^2 + b = a \tag{N3.12}$$

Ovvero per ogni n devono esistere k, b tali che valga la $(N3.12)$. Supponiamo per assurdo che b sia sempre positivo e consideriamo tutti gli $n > a$: allora si ha che, essendo $k > 0$,

$$nbk + k^2 + b > nbk > n > a \tag{N3.13}$$

mació é assurdo per la $(N3.13)$. Quindi per $n > a$ si deve avere $b < 0$ (il caso $b = 0$ é giá stato discusso). Sia allora $c = -b$. Quindi per $n > a$, $c > 0$. Sostituendo si ottiene:

$$-nck + k^2 - c = a \tag{N3.14}$$

$$n = \frac{k^2 - (a + c)}{kc} \tag{N3.15}$$

Ma essendo n intero, dato che il denominatore é kc, é condizione necessaria che $k|k^2 - (a + c)$, ma allora $a + c$ deve essere multiplo di k, quindi $a + c = mk$, ovvero $c = mk - a$. Sostituendo si ha:

$$n = \frac{k^2 - mk}{k(mk - a)} \tag{N3.16}$$

$$n = \frac{k - m}{mk - a} \tag{N3.17}$$

$$\tag{N3.18}$$

Sono allora condizioni necessarie affinché n sia intero che

$$k - m \geqslant n \quad k > n \tag{N3.19}$$

e che

$$km - a < k - m \quad a > km + m - k \tag{N3.20}$$

Consideriamo ora due casi: $m > 1$ e $m = 1$.

Se $m > 1$ allora $m \geqslant 2$ perché intero. Quindi dalla seconda condizione si ha

$$a > km + m - k > 2k + 2 - k = k + 2 > k \tag{N3.21}$$

ma dalla prima condizione si ha che $k > n$ quindi $a > k > n$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ma ció é assurdo dato che a ha un valore fissato.

Se $m = 1$ allora dato che $mk = a + c$ si ha che $a + c = k$ e $c = k - a$. Sostituendo nella $(N3.15)$ si ha

$$n = \frac{k^2 - (a + c)}{kc} \tag{N3.22}$$

$$n = \frac{k^2 - k}{k(k - a)} \tag{N3.23}$$

$$n = \frac{k - 1}{k - a} = \frac{k - 1 - a + a}{k - a} = 1 + \frac{a - 1}{k - a} \tag{N3.24}$$

Ma $\frac{a-1}{k-a}$ ha, al variare di k in $\mathbb{Z}^+$, un limite superiore essendo $a \geqslant 1$ fissato. quindi il termine di destra della $(N3.24)$ è limitato superiormente, mentre il termine di sinistra, cioé n, non lo é e ció é assurdo.

L'unica possibilitá é quindi che $b = 0$, da cui é stato dimostrato che a é un quadrato perfetto.