Soluzioni dei problemi noti - TF

author: me

date: tomorrow

Algebra

1

Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi ha grado 2002 e ha le radici (complesse) a due a due distinte. Dimostrare che esistono numeri complessi $a_1, ..., a_{2002}$ tali che, se si definiscono i polinomi $P_n(z)$ mediante la ricorrenza

$$P_1(z) = z - a_1, \qquad P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_{n+1} \tag{1}$$

allora $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

Soluzione: siano $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2002}$ le radici (complesse) di $P(z)$. $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$ se e solo se $P_{2002}(\alpha_i) = 0\ \forall i = 1, ..., 2002$.
Si vuole dimostrare per induzione che é possibile scegliere a_i per $i = 1, ..., n$ tali che $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = ... = P_n(\alpha_n) = -P_n(\alpha_{n+1})$ (sia $A(n)$ questa proposizione).
Per $n = 1$ (Passo base) basta scegliere $a_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Infatti $P_1(\alpha_1) = \alpha_1 - a_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$. Analogamente $P_1(\alpha_2) = \alpha_2 - a_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)/2$. Quindi $P_1(\alpha_1) = -P_1(\alpha_2)$ come voluto.
Passo induttivo. Supponiamo valga $A(n)$. Si vuole dimostrare che é possibile scegliere a_{n+1} in modo che valga $A(n+1)$. Sia $k = P_n(\alpha_1)$. Per ipotesi induttiva si ha anche che $k = P_n(\alpha_2) = ... = P_n(\alpha_n) = -P_n(\alpha_{n+1})$. Per ipotesi si ha che $P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_{n+1}$. Valutando $P_{n+1}(z)$ si ottiene che $P_{n+1}(\alpha_i) = P_n(\alpha_i) = k^2 - a_{n+1}\ \forall i = 1...n+1$. Si vuole ora che $P_{n+1}(\alpha_{n+2}) = -P_{n+1}(\alpha_{n+1})$ ovvero $[P_n(\alpha_{n+2})]^2 - a_{n+1} = a_{n+1} - k^2$. Basta quindi scegliere $a_{n+1} = (k^2 + [P_n(\alpha_{n+2})]^2)/2$.
Per quanto dimostrato é quindi possibile scegliere i polinomi $P_i(z)$ per $i = 1...2001$ in modo che soddisfano $A(i)$. In particolare si ha che $P_{2001}(\alpha_1) = ... = P_{2001}(\alpha_{2001}) = -P_{2001}(\alpha_{2002}) = w$. Quindi scegliendo $a_{2002} = w^2$ si ha che valutando $P_{2002}(z)$ nelle 2002 radici di $P(z)$ si ottiene $P_{2002}(\alpha_i) = [P_{2001}(\alpha_i)]^2 - a_{2002} = [\pm w]^2 - w^2 = 0$ per $i = 1...2002$. Quindi il polinomio $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

2

Siano a, b, c tre numeri reali positivi. Dimostrare che:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2} \tag{2}$$

Determinare quindi le migliori costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2 \tag{3}$$

Soluzione: la disuguaglianza é equivalente a

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+ac} \geq \frac{3}{2} \tag{4}$$

moltiplicando il primo termine per a/a, il secondo per b/b e il terzo per c/c (nel membro di sinistra). Per il lemma di Titu si ha che

$$\sum_{cyc} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(\sum_{cyc} x_i)^2}{\sum_{cyc} y_i} \tag{5}$$

Sostituendo le terne (a, b, c) e $(ab + ac, ba + bc, ca + cb)$ al posto degli x_i e y_i, si ottiene

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+ac} \geq \frac{(\sum_{cyc} a)^2}{\sum_{cyc} ab+ac} \tag{6}$$

Basta quindi dimostrare che

$$\frac{(\sum_{cyc} a)^2}{\sum_{cyc} ab+ac} \geq \frac{3}{2} \tag{7}$$

Sviluppando si ottiene:

$$2\left(\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab\right) \geq 6\sum_{cyc} ab \tag{8}$$

Ovvero

$$2\sum_{cyc} a^2 \geq 2\sum_{cyc} ab \qquad \sum_{sym} a^2 \geq \sum_{sym} ab \tag{9}$$

dove l'ultima disuguaglianza é vera per Bunching.

3

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y \tag{10}$$

per ogni x, y reali.

Soluzione: ponendo $x = 0$ si ottiene

$$f(f(y)) = [f(0)]^2 + y \tag{11}$$

da cui f é iniettiva e suriettiva. Ponendo inoltre $x = C$ tale che $f(C) = 0$ (C esiste perché $f(x)$ é suriettiva), si ha

$$f(f(y)) = y \tag{12}$$

da cui $f(0) = 0$ (confrontando con l'equazione precedente). Poiché f é suriettiva allora $x = f(z)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sostituendo nel testo del problema si ha

$$f(f(z)f(f(z)) + f(y)) = [f(f(z))]^2 + y \tag{13}$$

Ma $f(f(z)) = z$ quindi

$$f(f(z)z + f(y)) = z^2 + y \tag{14}$$

Sostituendo nel testo $x = z$ si ha

$$f(zf(z) + f(y)) = [f(z)]^2 + y \tag{15}$$

Dalle ultime due equazioni si ottiene $[f(z)]^2 = z^2$ da cui per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ha $f(z) = z$ o $f(z) = -z$. La soluzione $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ é valida infatti sostituendo si ha:

$$x^2 + y = x^2 + y \tag{16}$$

che é vera $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Consideriamo la soluzione $f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Essa é valida infatti sostituendo si ottiene:

$$f(-x^2 - y) = x^2 + y \tag{17}$$

$$x^2 + y = x^2 + y \tag{18}$$

Supponiamo ora per assurdo che esistono due reali a, b diversi da 0 tali che $f(a) = -a$ e $f(b) = b$. Ponendo $x = a$ e $y = b$ si ha

$$f(af(a) + f(b)) = [f(a)]^2 + b \tag{19}$$

$$f(-a^2 + b) = a^2 + b \tag{20}$$

Se $f(-a^2 + b) = -a^2 + b$ allora si avrebbe $-a^2 + b = a^2 + b$ da cui $a = 0$ che é assurdo. Se invece $f(-a^2 + b) = a^2 - b$ allora si avrebbe $a^2 - b = a^2 + b$ da cui $b = 0$ che é assurdo. Quindi le uniche soluzioni sono $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Combinatoria

1

Ad un party prendono parte $12k$ persone. Ciascuna di esse stringe la mano ad esattamente $3k + 6$ persone. Si sa che esiste un numero N tale che, per ogni coppia di persone A, B, il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B é esattamente N. Determinare per quali valori interi di k si puó realizzare la situazione.

Soluzione: rappresentiamo la situazione del problema con un grafo di $12k$ vertici (le persone) in cui ogni stretta di mano é rappresentata da un arco tra i vertici rappresentanti le persone che si sono strette la mano. Consideriamo il numero di "V" ovvero ogni gruppo di tre vertici in cui uno é collegato agli altri due da un arco. Chiamar'ø*punta* la persona della "V" che si collega alle altre due e *estremi* le altre due persone. Consideriamo una persona generica X. Essa é collegata per ipotesi a $3k + 6$ persone. Scelte due di queste persone, esse saranno i due estremi di una "V" con punta in X. Il numero di coppie fissata la punta X é quindi $\binom{3k+6}{2}$. Quindi in totale il numero di "V" é

$$12k\binom{3k+6}{2} \tag{21}$$

Consideriamo ora due persone A, B. Queste per ipotesi hanno stretto la mano a N persone in comune. Quindi sono estremi di N "V". Ma il numero di coppie di persone é $\binom{12k}{2}$. Quindi il numero di "V" é

$$N\binom{12k}{2} \tag{22}$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene

$$N = \frac{12k\binom{3k+6}{2}}{\binom{12k}{2}} = \frac{12k(3k+6)(3k+5)}{12k(12k-1)} = \frac{9k^2 + 33k + 30}{12k - 1} \tag{23}$$

condizione necessaria per la tesi é che N sia intero. Svolgendo la divisione euclidea tra $9k^2+33k+30$ e $12k-1$ si ottiene che

$$\frac{9k^2+33k+30}{12k-1} = \frac{(12k-1)(\frac{3}{4}k+\frac{45}{16})+\frac{525}{16}}{12k-1} = \frac{1}{16}\left(12k+45+\frac{525}{12k-1}\right) \tag{24}$$

In particolare condizione necessaria per cui N sia intero é che $12k-1|525$. $525 = 3\cdot 5^2\cdot 7$ e i suoi divisori sono $1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525$. Un divisore d di 525 é esprimibile nella forma $12k-1$ se e solo se $d \equiv 11 \pmod{12}$ e l'unico che soddisfa questa condizione é 35 da cui $k = 3$. Sostituendo $k = 3$ si ha che

$$N = \frac{1}{16}\left(12\cdot 3+45+\frac{525}{12\cdot 3-1}\right) = 6 \tag{25}$$

che é intero. In totale le persone sono quindi $12k = 36$ e ognuna stringe la mano a $3k+6 = 15$ persone. Per dimostrare che tale configurazione esiste, consideriamo una scacchiera 6×6 in cui ogni persona corrisponde ad una casella. Ogni persona allora stringe la mano alle persone sulla stessa riga, colonna o diagonale. Per diagonale intendiamo un diagonale che va da in basso a destra a in alto a sinistra e composta da 5 caselle (vedere figura ***MANCA***).
Vogliamo infine dimostrare che con questa configurazione, due persone casuali stringono la mano a esattamente 6 persone in comune.
Caso 1: le due persone A, B non si stringono la mano. Allora la riga di persone che estringono la mano a B incontra una e una sola volta la colonna di persone che estringono la mano a A e la diagonale di persone che stringono la mano a A, mentre non incontra la riga di persone che stringono la mano a A, per un totale di 2 persone in comune. Discorso analogo considerando la colonna e la diagonale di B.
Caso 2: A e B si stringono la mano. Allora sono sulla stessa riga, colonna o diagonale. Supponiamo senza perdita di generalitá che sono sulla stessa riga (gli altri due casi sono analoghi). Allora stringono la mano entrambi alle 4 persone sulla riga oltre a loro. Inoltre entrambi stringono la mano alla persona sulla colonna di A e la diagonale di B e viceversa, per un totale di 6 persone.

2

Alberto e Barbara tracciano un grafo su un foglio e iniziano a giocare al seguente gioco. A turno, iniziando da Alberto, ciascun giocatore effettua una delle seguenti due mosse:

- cancellare tre segmenti che formano un triangolo;
- dati tre punti di cui due non collegati, ma collegati al terzo, cancellare i due collegamenti presenti e unire i due punti non collegati.

Il giocatore che non puó fare mosse valide perde la partita. Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano Alberto e Barbara, e determinare un criterio per stabilire chi vince in funzione della configurazione iniziale.

Soluzione: il numero di archi diminuisce ad ogni mossa, quindi essendo il numero di archi finito, dopo un numero finito di mosse il gioco avrá termine. Inoltre ad ogni mossa il numero di archi diminuisce di 3 (con la prima mossa) o di 1 (con la seconda mossa). Quindi ad ogni mossa cambia la paritá del numero di archi. Considero ora il grado di un vertice durante una mossa. O rimane costante (se é il primo o il secondo vertice della seconda mossa) o diminuisce di 2 (nella prima mossa o se é il terzo vertice della seconda mossa). Quindi la paritá del grado di un vertice é costante.
Considero la configurazione finale. Ogni vertice alla fine avrá grado al massimo 1 (quindi solo uno o

zero). Se infatti avesse grado almeno 2, esso formerbbe con gli altri due vertici a cui é collegato, una "V" (se questi due non sono tra loro collegati) o un triangolo (se sono collegati tra loro). Quindi sarebbe applicabile ancora una mossa. Ma dato che la paritá dei vertici é costante e i vertici alla fine hanno grado 0 o 1, allora il grado di ogni singolo vertice alla fine é univocamente determinato dalla configurazione iniziale: i vertici di grado dispari avranno alla fine grado 1, mentre quelli di grado pari avranno alla fine grado 0.
Alla fine il numero di archi sará uguale al numero di vertici di grado 1 diviso 2. Ma allora la paritá del numero di archi alla fine é univocamente determinata dalla configurazione iniziale (sará pari se il numero di vertici di grado dispari diviso 2 sará pari e dispari viceversa). Ma allora, dato che la paritá degli archi cambia ad ogni mossa, é univocamente determinata la paritá del numero di mosse, ovvero chi fará l'ultima mossa.

Geometria

1

Sia ABC un triangolo e siano L ed M i punti medi di BC e CA rispettivamente. Sia inoltre CF l'altezza uscente da C. La circonferenza passante per A ed M e tangente ad AL in A, incontra il prolungamento di AB in X.
Trovare il valore minimo di BX/CF, specificando per quale triangolo ABC si ottiene tale minimo.
MANCA LA FIGURA

Soluzione: sia $B\widehat{A}L = \delta$ e $L\widehat{A}C = \epsilon$. Sia inoltre r la retta su cui giace AL e $X\widehat{A}r$ l'angolo acuto tra r e AX. Dato che la circonferenza passante per A ed M é tangente a AL allora $X\widehat{A}r = X\widehat{M}A$ ($X\widehat{A}r$ angolo alla circonferenza limite che insiste su AX). Ma $X\widehat{A}r = B\widehat{A}L$ perché opposti al vertice. Quindi

$$X\widehat{M}A = X\widehat{A}r = B\widehat{A}L = \delta \tag{26}$$

Inoltre $\epsilon = L\widehat{A}C = M\widehat{X}A$ ($L\widehat{A}C$ angolo alla circonferenza limite che insiste su AM). Quindi per il teorema dei seni su AXM si ha

$$\frac{AX}{\sin A\widehat{M}X} = \frac{AM}{\sin A\widehat{X}M} \quad \text{ovvero} \quad AX = \frac{b\sin\delta}{2\sin\epsilon} \tag{27}$$

Considero il triangolo ABC. Per il teorema dei seni su ABL si ha

$$\frac{AB}{\sin A\widehat{L}B} = \frac{BL}{\sin B\widehat{A}L} \quad \text{ovvero} \quad AB\sin\delta = BL\sin A\widehat{L}B \tag{28}$$

Analogamente $AC\sin\epsilon = CL\sin C\widehat{L}A$. Ma $BL = CL$ e $\sin C\widehat{L}A = \sin A\widehat{L}B$ perché supplementari. Quindi

$$AB\sin\delta = AC\sin\epsilon \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sin\delta}{\sin\epsilon} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \tag{29}$$

Ma allora sostituendo si ha che

$$AX = \frac{b^2}{2c} \tag{30}$$

Quindi

$$BX = AX + AB = \frac{b^2}{2c} + c = \frac{b^2+2c^2}{2c} \tag{31}$$

Infine $CF = b\sin\alpha$, quindi il rapporto considerato é

$$\frac{BX}{CF} = \frac{b^2+2c^2}{2bc\sin\alpha} \tag{32}$$

Dato che la funzione $\sin x$ nell'intervallo $[0;\pi]$ é massima quando l'angolo x é retto, allora

$$\frac{BX}{CF} \geq \frac{b^2+2c^2}{2bc} \tag{33}$$

dove l'uguaglianza si ha con $\alpha = 90°$. Inoltre per $AM-GM$ su $(b^2, 2c^2)$ si ha

$$\frac{b^2+2c^2}{2} \geq \sqrt{2b^2c^2} = \sqrt{2}bc \tag{34}$$

Quindi

$$\frac{BX}{CF} \geq \frac{\sqrt{2}bc}{bc} = \sqrt{2} \tag{35}$$

dove l'uguaglianza si ha con $b^2 = 2c^2$ ovvero $b = \sqrt{2}c$. Il minimo si ha quindi con un triangolo rettangolo in cui i due cateti b e c sono tali che $b = \sqrt{2}c$ o viceversa e il minimo é $\sqrt{2}$.

2

Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso. Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC e MP sono vertici di un quadrato.

MANCA LA FIGURA

Soluzione: pongo la figura nel piano complesso di centro B e unitá di misura $\frac{1}{2}AB$. Quindi pongo $b=0$ e $a=-2$. Si ha anche che $n=-2-2i$ e $m=-2i$. Inoltre P é il ruotato di C di $\pi/2$ in senso orario rispetto al centro, quindi $p=-ci$, mentre q é dato dalla somma vettoriale di c e p, essendo $BCQP$ anche un parallelogramma. Quindi $p = c(1-i)$. Sia c_1 il centro di $ABMN$, c_2 il punto medio di AC, c_3 il centro di $BCPQ$ e c_4 il punto medio di MP. Si definisca inoltre $c=2k$. Allora

$$c_1 = \frac{1}{2}n = -1-i \tag{36}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(a+c) = k-1 \tag{37}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}q = k(1-i) \tag{38}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}(m+p) = -i-ki \tag{39}$$

Ora, c_2 é la rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario di c_4 di centro c_1 se e solo se

$$\frac{c_2-c_1}{c_4-c_1} = i \tag{40}$$

sostituendo si ottiene:

$$\frac{c_2-c_1}{c_4-c_1} = \frac{k-1+1+i}{-i-ik+1+i} = \frac{k+i}{1-ik} = \frac{k+i}{-i(k+i)} = i \tag{41}$$

Analogamente c_2 é la rotazione di $\pi/2$ in senso orario di c_4 di centro c_3, infatti

$$\frac{c_2-c_3}{c_4-c_3} = \frac{k-1-k+ki}{-i-ik-k+ik} = \frac{ik-1}{-i-k} = -i \tag{42}$$

Da cui $C_2\widehat{C_1}C_4 = C_2\widehat{C_3}C_4 = \pi/2$, $C_1C_2 = C_1C_4$ e $C_3C_2 = C_3C_4$. Ma quindi i triangoli $C_2C_1C_4$ e $C_2C_3C_4$ sono rettangoli isosceli con la diagonale congruente, quindi sono congruenti. Ma allora $C_1C_2C_3C_4$ é un quadrato.

3

Sia MN una retta parallela al lato BC di un triangolo ABC che interseca i lati AB e AC in M e N. Sia P l'intersezione delle rette BN e CM, e si supponga che le circonferenze circoscritte ai triangoli BMP e CNP abbiano un ulteriore punto di intersezione Q, oltre a P. Mostrare che $B\widehat{A}Q = C\widehat{A}P$.

MANCA LA FIGURA

MANCA LA SOLUZIONE