



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE
MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in: INGEGNERIA ELETTRONICA

ANALISI E SIMULAZIONE DELL'ERRORE DI
FASE PER MODULAZIONI COERENTI IN
CANALI CON FADING

ERROR PHASE ANALYSIS AND SIMULATION
FOR COHERENT MODULATIONS IN FADING
CHANNELS

Relatore:
Prof. Franco Chiaraluce

Tesi di Laurea di:
Matteo Romiti

Correlatore:
Dott. Ing. Marco Baldi

Sommario

1 INTRODUZIONE	1
2 MODULAZIONI COERENTI: ERRORE DI FASE E FADING	1
2.1 IL MODELLO DEL CANALE	1
2.1.1 IL CANALE AWGN	1
2.1.2 FADING CON DISTRIBUZIONE DI RICE	2
3 IL FADING E L'ERRORE DI FASE.....	4
3.1 LA VARIABILE DI RICE	4
3.2 LA VARIABILE DI TIKHONOV	5
4 GENERAZIONE DELLA VARIABILE DI TIKHONOV MEDIANTE IL METODO DI TRASFORMAZIONE	7
4.1 IMPLEMENTAZIONE DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DELLA VARIABILE DI TIKHONOV	8
4.2 APPROSSIMAZIONE CON LA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA.....	10
4.3 GENERAZIONE DI UNA LOOK-UP TABLE PER LA FUNZIONE INVERSA.....	13
5 AFFIDABILITÀ DEL GENERATORE.....	15
6 IL GENERATORE.....	32
6.1 LE FUNZIONI MATLAB.....	32
6.2 UTILIZZO DEL GENERATORE	34
6.2.1 PERDITE IN PRESENZA DI SCINTILLAZIONE: CASO LOW-RATE.....	34
6.2.2 PERDITE AL VARIARE DEL <i>SEP</i>	40
6.2.3 VARIAZIONE DELLA FASE PIU' VELOCE DELLA VARIAZIONE DELL'AMPIEZZA.....	41
6.2.4 VALIDITÀ DEL MODELLO LOW-RATE	44
7 CONCLUSIONI	46
8 BIBLIOGRAFIA	47

1 INTRODUZIONE

L'obiettivo di questo elaborato è quello di esporre il procedimento utilizzato per la messa a punto di un generatore software in grado di produrre campioni della variabile di Tikhonov. Questa variabile viene utilizzata per modellare l'errore di fase in sistemi PSK (Phase Shift Keying) in canali affetti da fading con statistica di Rice. Il programma creato è stato poi integrato in alcune simulazioni che rientrano in un più ampio studio sulle comunicazioni spaziali condotto all'interno del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione. Verranno prima descritte le condizioni per cui si ha un errore di fase con statistica di Tikhonov, per poi presentare la sua densità di probabilità e la relativa funzione di ripartizione che verrà utilizzata per generare i campioni attraverso il metodo di trasformazione. Infine si svolgeranno delle simulazioni in un modello di comunicazione in cui si fornirà un esempio di utilizzo del generatore.

2 MODULAZIONI COERENTI: ERRORE DI FASE E FADING

Tra le modulazioni coerenti, la PSK è uno dei migliori schemi per applicazioni wireless grazie alla sua efficienza spettrale. D'altro canto, però, essa presenta anche una problematica legata alla sincronizzazione della fase del segnale ricevuto. Per questo motivo viene introdotto l'errore di fase che, in un generico canale con fading, si ha quando si utilizza in ricezione un PLL (Phase-Locked Loop) non ideale che non sempre è in grado di stimare correttamente la fase del segnale. È stato mostrato [1 - 2] che la distribuzione di Tikhonov rappresenta la densità di probabilità dell'errore di fase che nasce da questa stima del PLL¹.

2.1 IL MODELLO DEL CANALE

Il contesto preso qui in considerazione è quello di una comunicazione "deep-space", in cui è presente un collegamento radio tra una stazione base sulla Terra e uno spacecraft. In questo scenario, la corona solare è in grado di disturbare i contatti Terra-sonda attraverso la scintillazione solare.

2.1.1 IL CANALE AWGN

Quando il segnale trasmesso si propaga nella corona solare, sia l'ampiezza che la fase vengono modificate. Si può immaginare che tutto il plasma distribuito lungo il collegamento radio sia concentrato in uno schermo sottile vicino al sole. Ora, quando un'onda piana passa attraverso questo strato, i fronti d'onda vengono distorti a causa dei diversi ritardi introdotti dal plasma. In questo passaggio, i fasori non vengono modificati in ampiezza, avviene però una "scintillazione" di fase. A grande distanza dallo strato di plasma ipotizzato, la diffrazione produce interferenza costruttiva e

¹ Nel caso di PLL del primo ordine si ha una corrispondenza esatta, mentre nel caso di secondo ordine si ha una approssimazione.

distruttiva in modo casuale e, lungo il piano del ricevitore, perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, si ottiene un'ampiezza che varia a seconda delle caratteristiche del campo generato dalla corona solare. Poiché quest'ultimo si allontana dal sole ad alte velocità (200-1000 km/s), il ricevitore vedrà sia una variazione di ampiezza che di fase. In Figura 2.1 vengono presentati i fronti d'onda prima e dopo il passaggio nella corona solare e la relativa rappresentazione dei fasori.

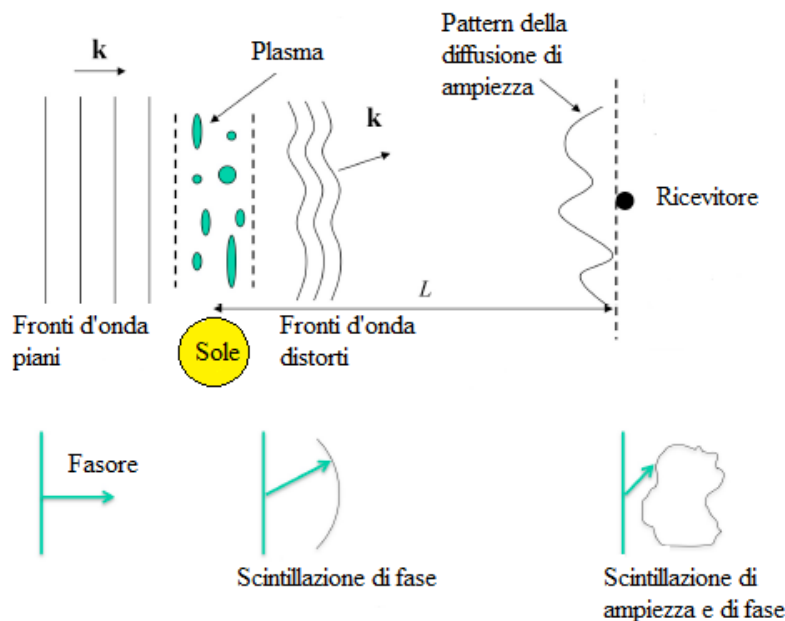


Figura 2.1

Il canale, per questo tipo di comunicazioni, è accuratamente descritto da un modello matematico, quello AWGN (Additive White Gaussian Noise), introdotto da Shannon nel 1948 [3].

2.1.2 FADING CON DISTRIBUZIONE DI RICE

Nel caso di scintillazione solare, le inhomogeneità presenti nella corona possono essere modellate come dei centri di diffusione di onde elettromagnetiche che giungono al ricevitore e si sommano, creando un'interferenza tempo-variante che può generare fading. Le onde diffuse possono essere considerate statisticamente indipendenti tra loro dal ricevitore, nel caso in cui esso si trovi ad una distanza sufficientemente elevata dal sole. Sotto queste ipotesi, è possibile applicare il teorema del limite centrale che permette di rappresentare il segnale ricevuto tramite una parte reale e una parte immaginaria, entrambi con una statistica gaussiana e indipendenti tra loro. Se si assume che parte reale e parte immaginaria abbiano la stessa varianza σ^2 , si può utilizzare il modello di canale con fading con una distribuzione di Rice. Questa distribuzione dipende dall'indice di scintillazione m , che è il rapporto tra la deviazione standard della potenza del segnale ricevuto e la sua media. In [4] vengono fornite due espressioni per l'indice di scintillazione. Nella prima, non essenziale ai

fini di questa trattazione, compaiono: la lunghezza d'onda λ del segnale trasmesso, la distanza L Terra-sonda e una funzione $C_N(x)$ che descrive il disturbo del campo creato dalla corona solare.

$$m^2 = a(p)\lambda^2 \int_0^L C_N^2(x) \left[\frac{(L-x)x}{L} \frac{4\pi}{\lambda} \right]^{-(p-2)/p} dx. \quad (2.1)$$

La seconda, invece, fa riferimento ad un modello basato sull'angolo *SEP* (Sun-Earth-Probe) che viene mostrato in Figura 2.2. A seconda della banda in cui si trasmette, esso è legato all'indice di scintillazione m dal modello riportato in Tabella 2.1. Per considerare anche la variabilità solare, si introducono dei fattori correttivi: una moltiplicazione per 2.4 per la banda Ka, mentre per la banda X si può avere 1.5 o 2.4. Alcuni andamenti di m in funzione del *SEP*, ottenuti con il software Matlab, sono mostrati in Figura 2.3.

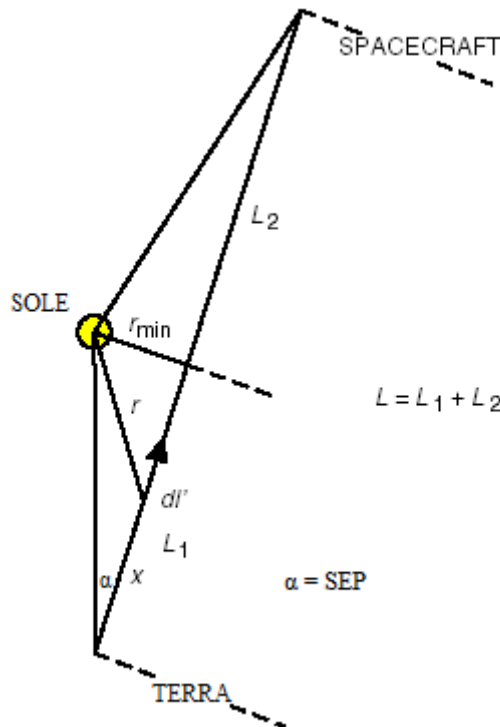


Figura 2.2

Banda	Indice di scintillazione
S	$m = 0.01 \cdot \sin(SEP)^{-1.55}$
X	$m = 0.0016 \cdot \sin(SEP)^{-1.55}$
Ka	$m = 0.00024 \cdot \sin(SEP)^{-1.55}$

Tabella 2.1

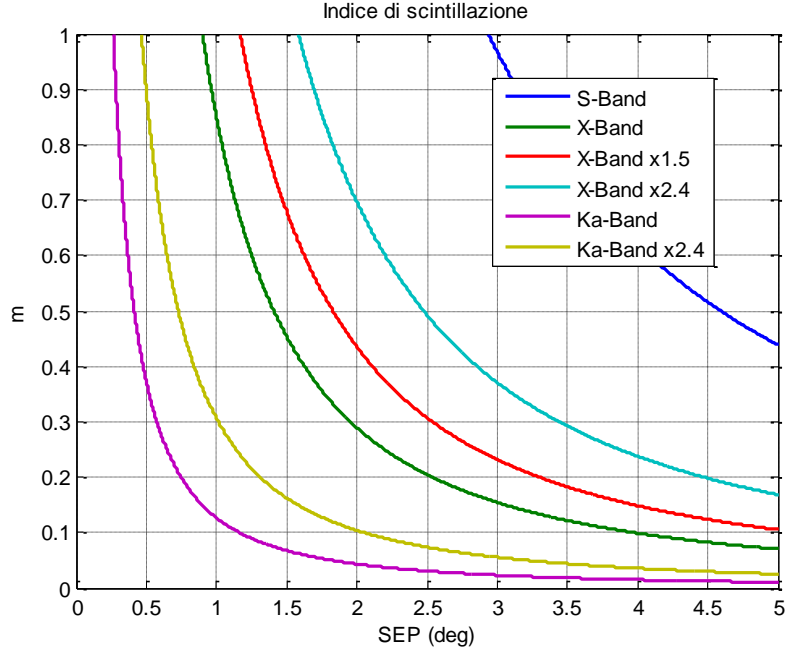


Figura 2.3

3 IL FADING E L'ERRORE DI FASE

3.1 LA VARIABILE DI RICE

La variabile di Rice, nel nostro modello di canale, rappresenta l'ampiezza del segnale affetto da fading. Essa ha la seguente densità di probabilità [4]:

$$f_v(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{v \cdot a}{\sigma^2}\right), \quad (3.1)$$

dove I_0 è la funzione di Bessel modificata Di prima specie di ordine zero, a^2 è il cosiddetto parametro di “non centralità” e σ^2 è la varianza di ognuna delle variabili gaussiane legate alla variabile di Rice. Da ricordare è il legame che c'è tra questi due ultimi valori e l'indice di scintillazione m [4]:

$$a^2 = (1 - m^2)^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{2}. \quad (3.3)$$

Poiché m è un indice con valori compresi nell'intervallo $[0 ; 1]$, risulterà che $a^2 \in [0 ; 1]$ mentre $\sigma^2 \in [0 ; 1/2]$.

In Figura 3.1 viene riportato l'andamento della densità di probabilità di Rice al variare di m .

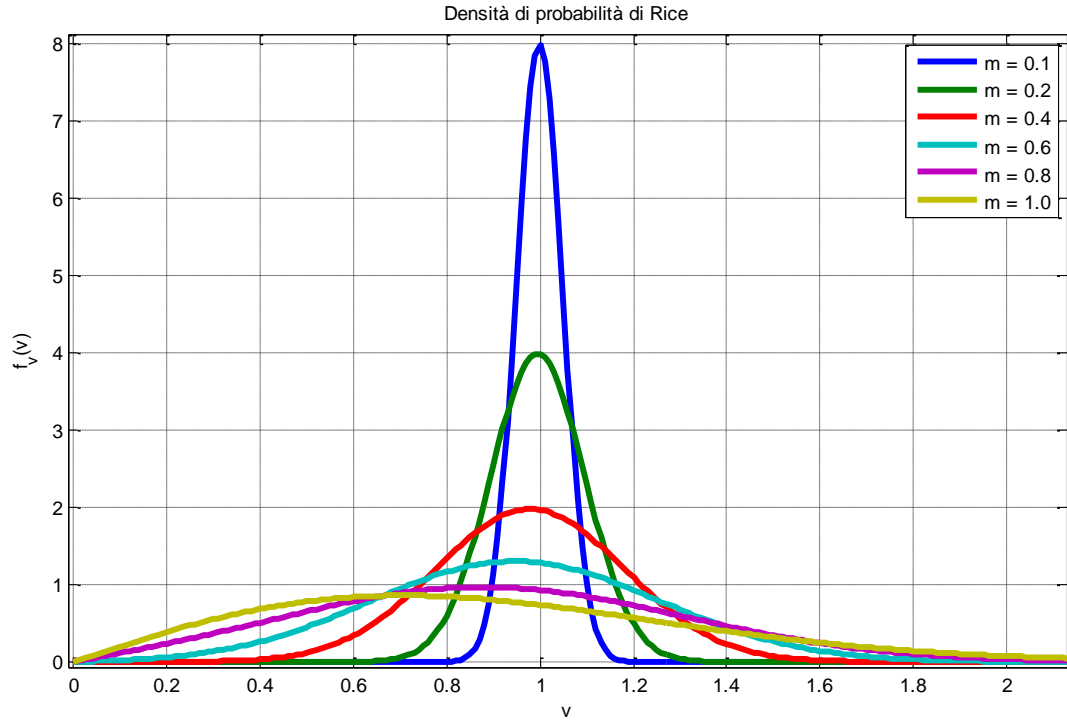


Figura 3.1

3.2 LA VARIABILE DI TIKHONOV

La distribuzione di Tikhonov è una densità di probabilità continua con dominio $[-\pi ; \pi]$ e viene anche indicata come distribuzione di von Mises o distribuzione normale circolare poiché è considerata l'equivalente circolare della distribuzione normale gaussiana. La PDF (Probability Density Function) di Tikhonov si incontra spesso in situazioni aleatorie in cui sono coinvolti angoli o direzioni ed è in grado di descrivere processi stocastici di grande importanza nelle comunicazioni. Come riportato in [5], questa variabile è stata utilizzata in vari ambiti delle comunicazioni: calcolo della capacità, analisi delle prestazioni e progetto di diversi sistemi di comunicazione su canali con fading parzialmente coerenti.

La densità di probabilità in questione è condizionata dalla variabile di Rice ed è rappresentata dalla seguente formula analitica:

$$f_{\phi}(\phi | v) = \frac{1}{2\pi \cdot I_0(\rho \cdot v^2)} e^{\rho \cdot v^2 \cdot \cos(\phi)}, \quad (3.4)$$

in cui ρ rappresenta il rapporto segnale-rumore della portante del PLL.

Per semplicità si può porre:

$$\kappa = \rho \cdot v^2, \quad (3.5)$$

tralasciando momentaneamente la dipendenza da v che, come ρ , può essere vista come un parametro della distribuzione. Così facendo si ottiene l'espressione:

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi \cdot I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\phi)}, \quad (3.6)$$

in cui per semplicità, e coerentemente con la premessa, omettiamo di indicare la dipendenza da κ . Tale espressione è l'elemento centrale dell'analisi sviluppata nel presente lavoro e come tale sarà discussa nel seguito.

L'andamento di $f_\phi(\phi)$ viene mostrato in Figura 3.2 per alcuni valori di κ [6].

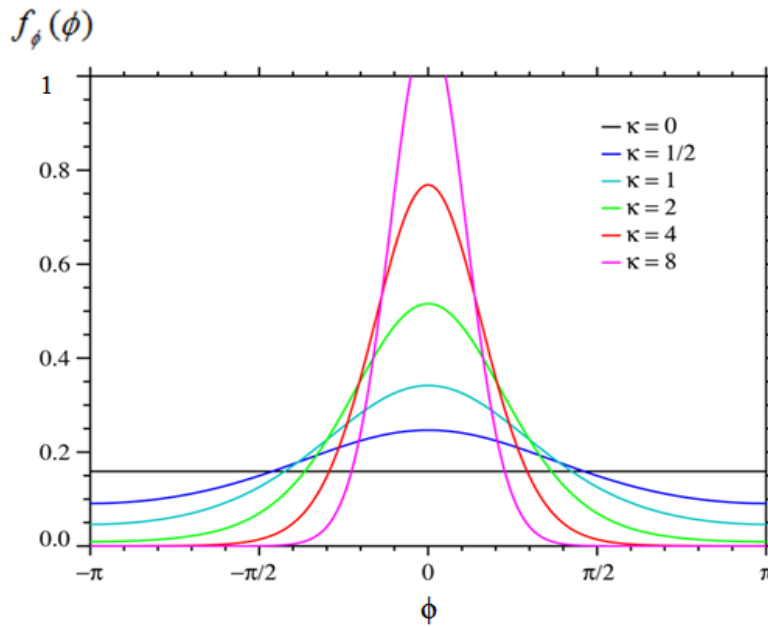


Figura 3.2

Il valore del parametro κ , come visto, dipende dal valore della variabile di Rice e dal rapporto segnale-rumore della portante ρ , dato dalla seguente espressione [4]:

$$\rho = \frac{E_b}{N_0} \cdot R_b \cdot \frac{1}{2 \cdot J_1^2(\theta)} \cdot \frac{1}{B_l}, \quad (3.7)$$

in cui J_i è la funzione di Bessel di prima specie di ordine i , θ è l'indice di modulazione che viene fissato a $\theta = 0.9$ rad [4], R_b è il bit rate della modulazione BPSK, B_l è la banda del PLL e E_b/N_0 è il rapporto tra energia per bit e densità spettrale di potenza unilatera del rumore.

La densità di probabilità di Tikhonov è esprimibile anche attraverso la seguente formula alternativa:

$$f_{\phi}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{2}{I_0(\kappa)} \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\kappa) \cos(j\phi) \right]. \quad (3.8)$$

Da quest'ultima è possibile ricavare l'espressione della funzione di ripartizione di Tikhonov tramite integrazione:

$$\begin{aligned} F_{\phi}(\phi) &= \int_{-\pi}^{\phi} f_{\phi}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\phi} \left[1 + \frac{2}{I_0(\kappa)} \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\kappa) \cos(jx) \right] dx = \\ &= \frac{\phi + \pi}{2\pi} + \frac{1}{\pi \cdot I_0(\kappa)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_j(\kappa)}{j} \sin(j\phi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Di seguito viene graficata tale funzione di ripartizione al variare di κ [6].

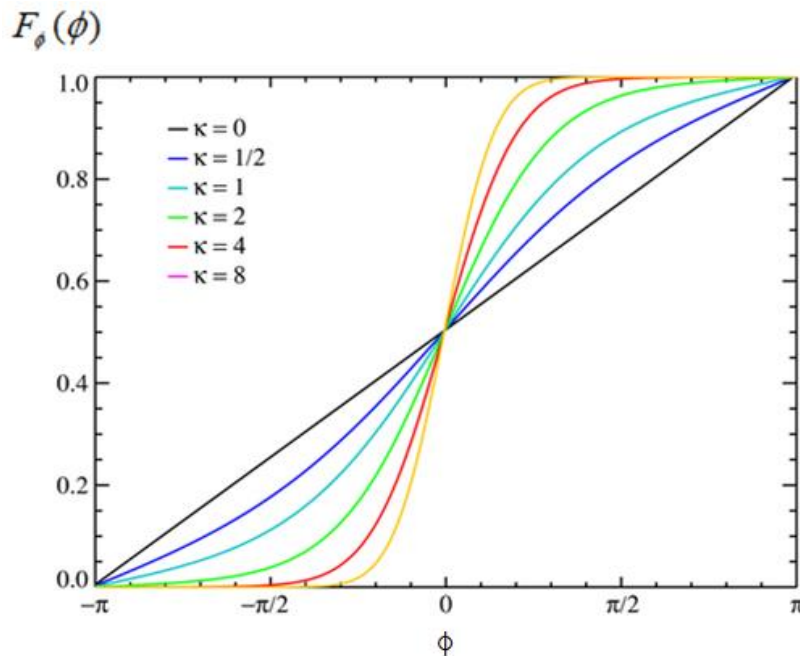


Figura 3.3

4 GENERAZIONE DELLA VARIABILE DI TIKHONOV MEDIANTE IL METODO DI TRASFORMAZIONE

Il metodo di trasformazione permette di ottenere campioni di una variabile con una determinata statistica a partire da una variabile uniforme. In particolare, l'algoritmo prevede come primo passo che la funzione di distribuzione venga invertita. Successivamente, deve essere generato un campione di una variabile uniforme nell'intervallo $[0 ; 1]$ ed infine calcolare il valore della funzione inversa in tale punto, ottenendo così il campione con statistica desiderata. La difficoltà che si incontra con questo metodo è che l'inversa della funzione di ripartizione di Tikhonov non è esprimibile in forma chiusa.

4.1 IMPLEMENTAZIONE DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DELLA VARIABILE DI TIKHONOV

Il punto di partenza è implementare in Matlab la funzione di ripartizione della variabile di Tikhonov, ricavata in precedenza e qui ripetuta per comodità:

$$F_{\phi}(\phi) = \frac{\phi + \pi}{2\pi} + \frac{1}{\pi \cdot I_0(\kappa)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_j(\kappa)}{j} \sin(j\phi). \quad (4.1)$$

Per l'implementazione, questa CDF (Cumulative Distribution Function) viene scomposta in tre funzioni:

$$F_1(\phi) = \frac{\phi + \pi}{2\pi}, \quad (4.2)$$

$$F_2(\phi) = \frac{1}{\pi \cdot I_0(\kappa)}, \quad (4.3)$$

$$F_3(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_j(\kappa)}{j} \sin(j\phi), \quad (4.4)$$

In modo da riottenere la CDF tramite:

$$F_{\phi}(\phi) = F_1(\phi) + F_2(\phi) \cdot F_3(\phi). \quad (4.5)$$

Come si nota, in $F_3(\phi)$ è presente una serie, i cui termini, da un certo valore $j = N_j$ in poi, possono essere trascurati data la presenza del fattore $1/j$ e l'andamento delle funzioni di Bessel modificate (riportato in Figura 4.1). Quest'ultime infatti, fissato un κ qualsiasi, tendono a zero per j che tende ad infinito. In particolare, per κ prossimi allo zero (situazione di maggior interesse per l'applicazione considerata), le funzioni di Bessel vanno rapidamente a zero all'aumentare di j . Da prove numeriche effettuate risulta che, per $\kappa < 10$ la serie non cambia in maniera significativa includendo i termini per j maggiore di circa 100. Di conseguenza, per questi valori di κ , sarà sufficiente assumere un valore di $N_j = 10^2$. Per valori di κ oltre la decina è necessario, invece, considerare un numero maggiore di termini della serie. In quest'ultimo caso, la serie viene troncata a $N_j = 10^4$ che, come si vedrà in seguito, risulta essere un valore adeguato per la maggior parte delle simulazioni.

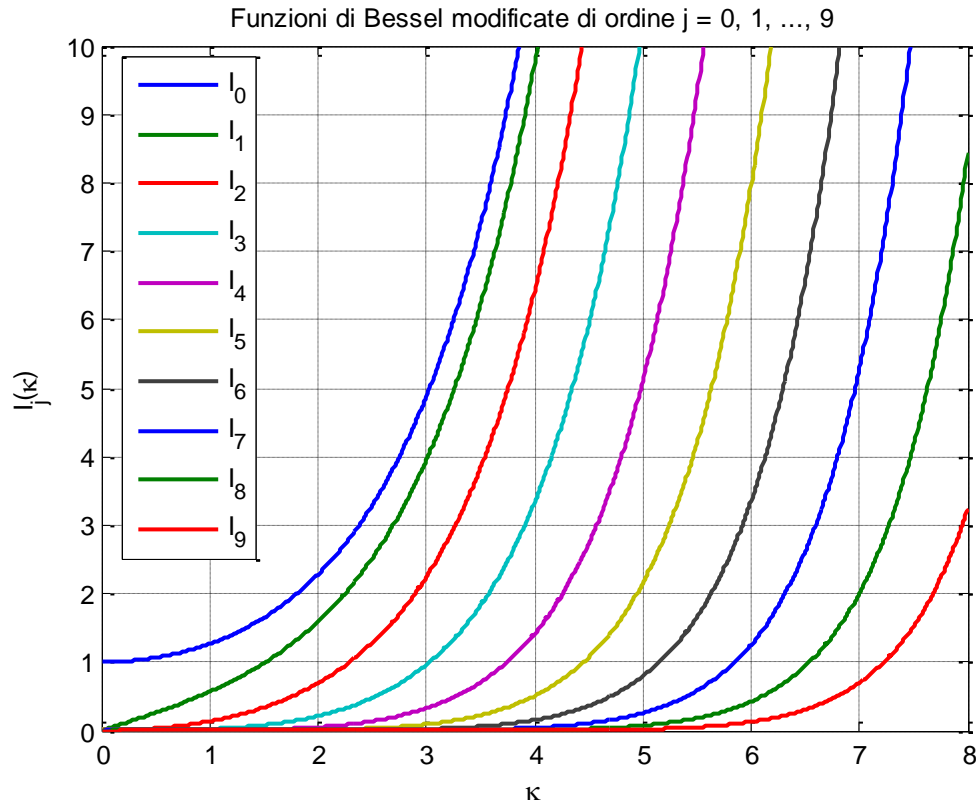


Figura 4.1

Matlab mette a disposizione la funzione di Bessel modificata attraverso il comando *besseli(j,κ)*, con la stessa notazione sin qui usata per l'ordine *j* e l'argomento *κ* della funzione.

Nel seguente listato viene riportato il codice utilizzato per l'implementazione della (4.5), mentre in Figura 4.2 è rappresentato un esempio di funzione di ripartizione ottenuta con tale codice.

Listato 4.1

```
%plotta la funzione di ripartizione della variabile di Tikhonov
%assegnato un valore di k

phistep = pi/100; %passo di discretizzazione di phi
phi = -pi:pi/100:pi; %creazione asse x
k = 8; %argomento delle funzioni di Bessel

%creazione della funzione di ripartizione
F1 = (phi+pi)/(2*pi);
F2 = 1/(pi*besseli(0,k));
F3 = 0;
Nj = 10^4; %ultimo termine della serie

for j = 1:Nj;
    F3 = F3+(besseli(j,k)*sin(j*phi))/j;
end
F = F1+F2*F3;
```

```

plot(phi,F,'LineWidth',1.5)
xlabel('\phi')
ylabel('F_\phi(\phi)')
title(['Funzione di ripartizione di Tikhonov con \kappa = ', num2str(k)])
grid on

```

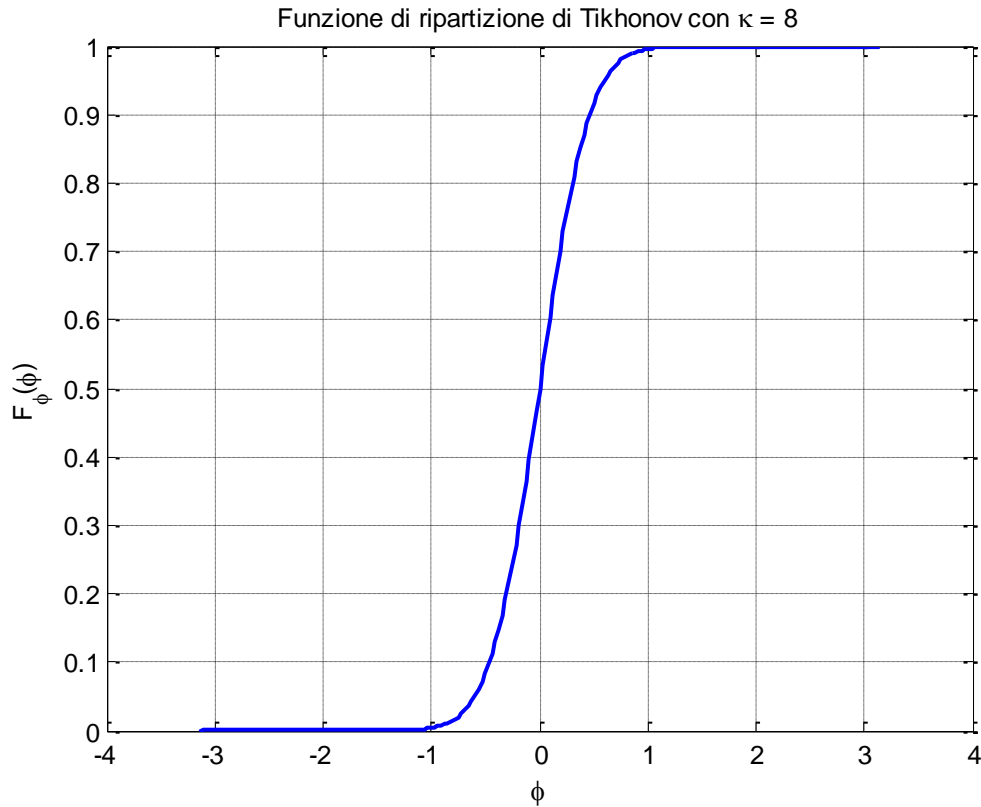


Figura 4.2

Tale simulazione sembra essere in accordo, almeno qualitativamente, con i grafici presentati in letteratura (ad esempio in [6]).

Il valore di κ , reale e positivo, rappresenta una “concentrazione”. E’ allora importante osservare che i casi limite sono quelli con κ nulla e con κ molto elevato: nel primo caso si ottiene una distribuzione uniforme, nel secondo una distribuzione gaussiana con varianza $\sigma^2 = 1/\kappa$ (Limiting behavior in [6]) e che dunque diventa una delta di Dirac nel caso di $\kappa \rightarrow \infty$.

4.2 APPROSSIMAZIONE CON LA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Ovviamente, poter sostituire la distribuzione di Tikhonov con la distribuzione gaussiana semplifica di molto la trattazione. Per capire quando ciò è possibile, vengono confrontati gli andamenti delle due PDF e viene mostrato l’errore percentuale tra le due, al variare di κ . Alcuni esempi sono riportati nelle Figure 4.3-6.

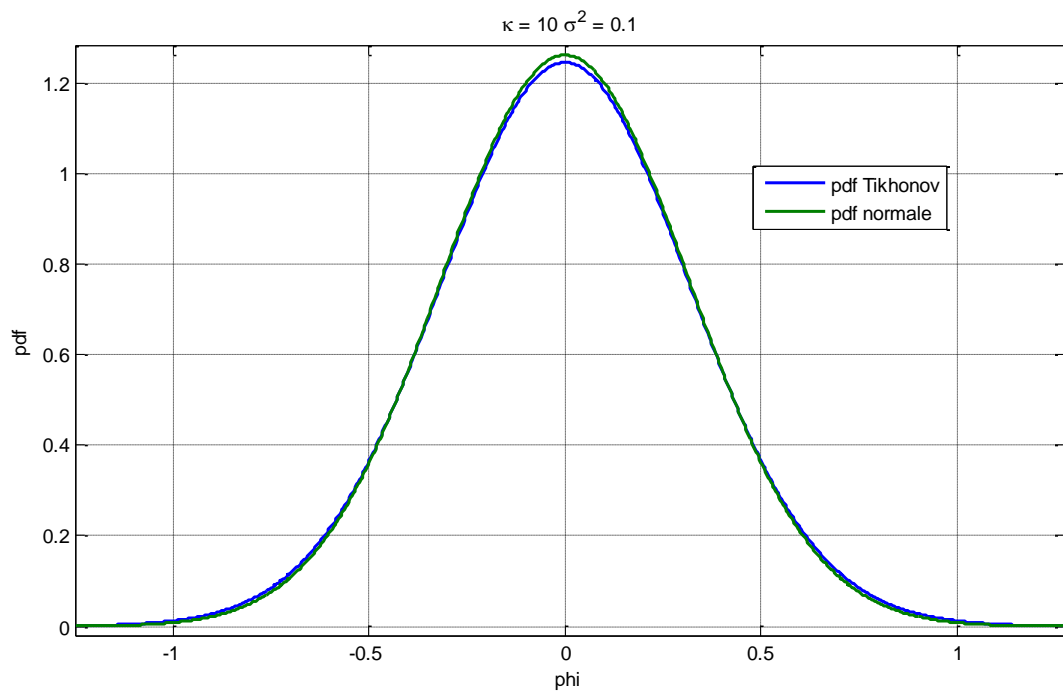


Figura 4.3

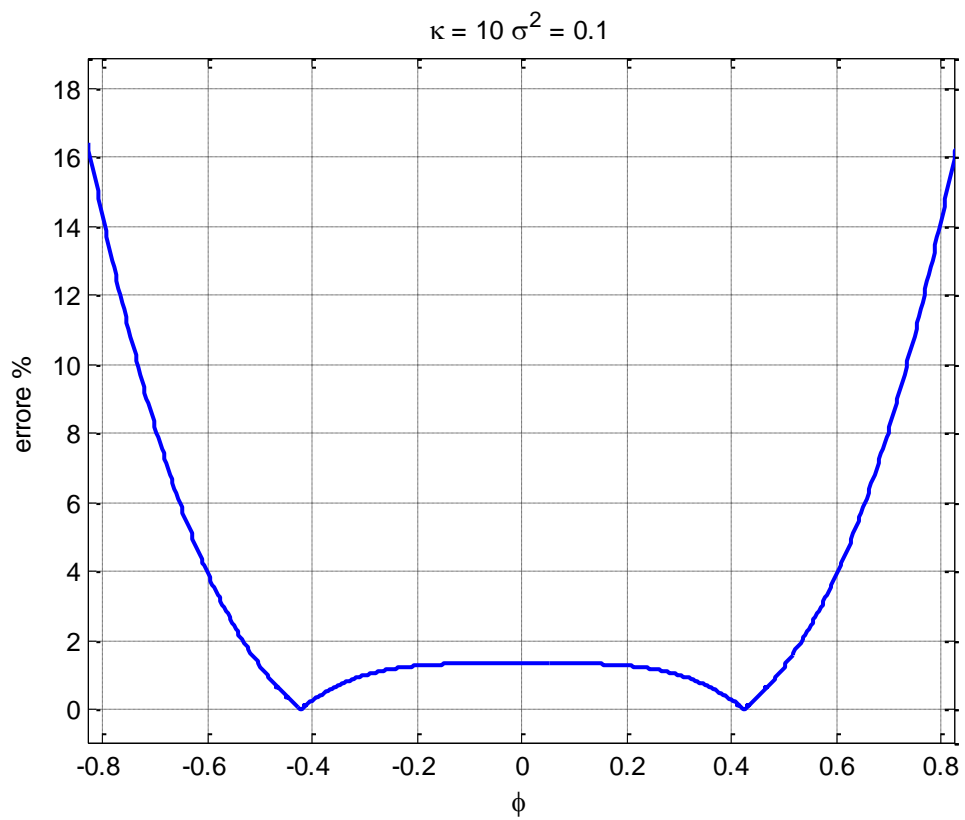


Figura 4.4

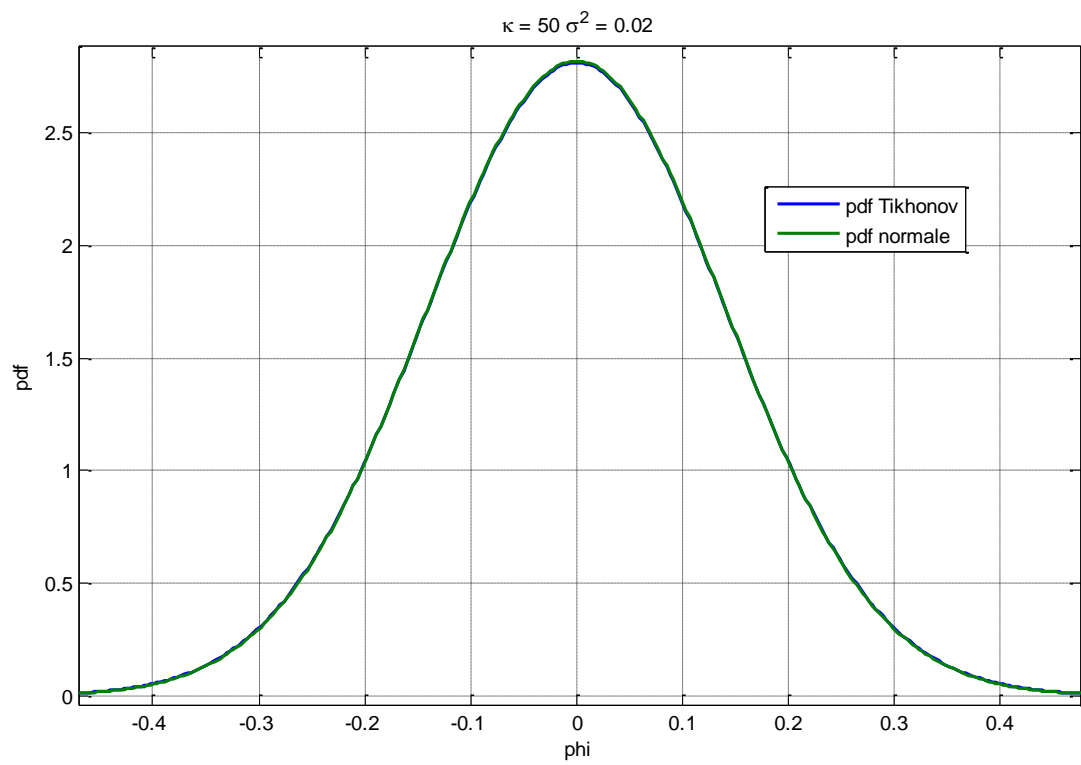


Figura 4.5

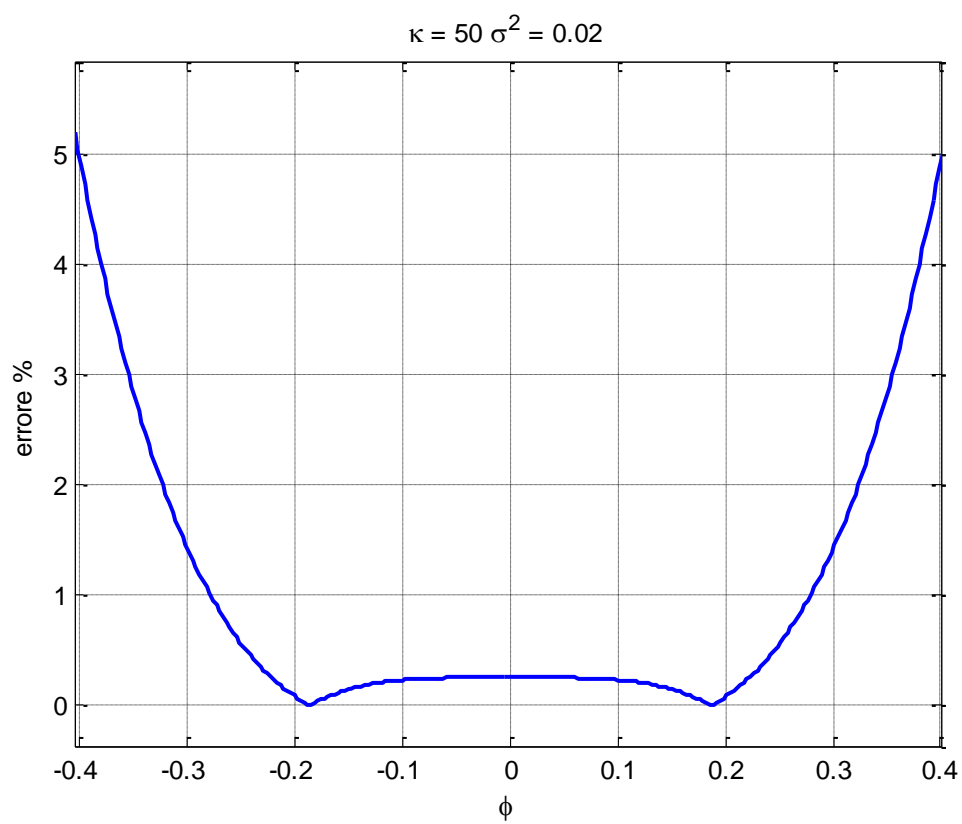


Figura 4.6

Si nota che, già per valori di $\kappa = 10$, approssimando la distribuzione di Tikhonov con quella normale, si commette un errore inferiore al 2% se si considera la zona centrale in cui la densità di probabilità è maggiore, mentre è inferiore all'1% con $\kappa = 50$.

Alla luce di questi risultati, si può pensare di utilizzare la Gaussiana per $\kappa > 50$, mentre per valori di κ via via più piccoli tale approssimazione inizia a non essere più valida e diventa necessaria, quindi, la variabile di Tikhonov.

4.3 GENERAZIONE DI UNA LOOK-UP TABLE PER LA FUNZIONE INVERSA

Per generare la variabile di Tikhonov mediante il metodo di trasformazione è necessaria la funzione di ripartizione inversa che però non è disponibile in forma analitica. In accordo con il più generale metodo di trasformazione, la soluzione che si può adottare è la seguente: si genera, con opportuno passo, il vettore ϕ con valori di fase nell'intervallo $[-\pi ; \pi]$, si calcola la $F_\phi(\phi)$ che avrà come codominio l'intervallo $[0 ; 1]$. Si estrae poi un campione della variabile uniforme U tra $[0 ; 1]$, si cerca il valore di $F_\phi(\phi)$ più vicino al campione estratto e poi si prende il corrispondente valore di fase ϕ che rappresenta il campione della variabile di Tikhonov. Per implementare il metodo, i valori di ϕ e di $F_\phi(\phi)$ possono essere riportati in una Look-Up Table al variare di κ . Si ricorda che $F_\phi^{-1}(U) = \phi$ e $U = F_\phi(\phi)$ sono d'ora in poi valori discreti e rappresentati tramite vettori.

In funzione del livello di discretizzazione adottato (minore è il passo maggiore è l'accuratezza della rappresentazione) le tabelle possono avere dimensioni rilevanti, si che ai fini, ad esempio, della loro memorizzazione, può essere necessario adottare opportune tecniche di compressione. A puro titolo esplicativo, vengono riportati, in Tabella 4.1, 41 valori della variabile aleatoria uniforme ϕ nell'intervallo $[0,1]$ e i relativi valori di $F_\phi(\phi)$; ciò equivale a fissare il passo di discretizzazione di ϕ uguale a $\pi/20$. Tale numerosità non è sufficiente per le applicazioni e verrà quindi aumentata come si mostrerà in seguito, diminuendo il passo per infittire il campionamento.

posizione	$U = F_\phi(\phi)$										$F_\phi^{-1}(U) = \phi$
	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 3$	$\kappa = 4$	$\kappa = 5$	$\kappa = 6$	$\kappa = 7$	$\kappa = 8$	$\kappa = 9$	$\kappa = 10$	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.1416
2	0.0073	0.0015	0.0003	0	0	0	0	0	0	0	-2.9845
3	0.0148	0.0031	0.0005	0.0001	0	0	0	0	0	0	-2.8274
4	0.0226	0.0048	0.0009	0.0001	0	0	0	0	0	0	-2.6704
5	0.031	0.0068	0.0013	0.0002	0	0	0	0	0	0	-2.5133
6	0.0403	0.0092	0.0018	0.0003	0.0001	0	0	0	0	0	-2.3562

7	0.0506	0.0122	0.0025	0.0005	0.0001	0	0	0	0	0	-2.1991
8	0.0623	0.0161	0.0036	0.0008	0.0002	0	0	0	0	0	-2.042
9	0.0758	0.0212	0.0052	0.0013	0.0003	0.0001	0	0	0	0	-1.885
10	0.0915	0.0281	0.0078	0.0021	0.0006	0.0002	0	0	0	0	-1.7279
11	0.1098	0.0375	0.0119	0.0038	0.0012	0.0004	0.0001	0	0	0	-1.5708
12	0.1311	0.0504	0.0184	0.0069	0.0026	0.001	0.0004	0.0002	0.0001	0	-1.4137
13	0.1561	0.068	0.0288	0.0126	0.0056	0.0026	0.0012	0.0006	0.0003	0.0001	-1.2566
14	0.1851	0.0916	0.0451	0.0229	0.012	0.0064	0.0035	0.0019	0.001	0.0006	-1.0996
15	0.2184	0.1228	0.0698	0.041	0.0247	0.0151	0.0094	0.0059	0.0037	0.0023	-0.9425
16	0.2562	0.1631	0.1058	0.0709	0.0486	0.0338	0.0237	0.0168	0.0119	0.0085	-0.7854
17	0.2984	0.2133	0.156	0.1174	0.09	0.0698	0.0546	0.043	0.034	0.027	-0.6283
18	0.3447	0.2736	0.2222	0.1844	0.1553	0.132	0.113	0.0972	0.0839	0.0726	-0.4712
19	0.3944	0.3431	0.3039	0.2734	0.2483	0.227	0.2085	0.1921	0.1776	0.1645	-0.3142
20	0.4465	0.4196	0.3984	0.3812	0.3665	0.3536	0.3419	0.3313	0.3214	0.3122	-0.1571
21	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
22	0.5535	0.5804	0.6016	0.6188	0.6335	0.6464	0.6581	0.6687	0.6786	0.6878	0.1571
23	0.6056	0.6569	0.6961	0.7266	0.7517	0.773	0.7915	0.8079	0.8224	0.8355	0.3142
24	0.6553	0.7264	0.7778	0.8156	0.8447	0.868	0.887	0.9028	0.9161	0.9274	0.4712
25	0.7016	0.7867	0.844	0.8826	0.91	0.9302	0.9454	0.957	0.966	0.973	0.6283
26	0.7438	0.8369	0.8942	0.9291	0.9514	0.9662	0.9763	0.9832	0.9881	0.9915	0.7854
27	0.7816	0.8772	0.9302	0.959	0.9753	0.9849	0.9906	0.9941	0.9963	0.9977	0.9425
28	0.8149	0.9084	0.9549	0.9771	0.988	0.9936	0.9965	0.9981	0.999	0.9994	1.0996
29	0.8439	0.932	0.9712	0.9874	0.9944	0.9974	0.9988	0.9994	0.9997	0.9999	1.2566
30	0.8689	0.9496	0.9816	0.9931	0.9974	0.999	0.9996	0.9998	0.9999	1	1.4137
31	0.8902	0.9625	0.9881	0.9962	0.9988	0.9996	0.9999	1	1	1	1.5708
32	0.9085	0.9719	0.9922	0.9979	0.9994	0.9998	1	1	1	1	1.7279
33	0.9242	0.9788	0.9948	0.9987	0.9997	0.9999	1	1	1	1	1.885
34	0.9377	0.9839	0.9964	0.9992	0.9998	1	1	1	1	1	2.042
35	0.9494	0.9878	0.9975	0.9995	0.9999	1	1	1	1	1	2.1991
36	0.9597	0.9908	0.9982	0.9997	0.9999	1	1	1	1	1	2.3562
37	0.969	0.9932	0.9987	0.9998	1	1	1	1	1	1	2.5133
38	0.9774	0.9952	0.9991	0.9999	1	1	1	1	1	1	2.6704

39	0.9852	0.9969	0.9995	0.9999	1	1	1	1	1	1	2.8274
40	0.9927	0.9985	0.9997	1	1	1	1	1	1	1	2.9845
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3.1416

Tabella 4.1

Sulla colonna di sinistra è riportata la posizione di ogni elemento all'interno del vettore.

Con riferimento alla Tabella 4.1, è possibile fare un esempio pratico dell'algoritmo appena descritto, supponendo che il campione della variabile uniforme sia $U = 0.1248$ e $\kappa = 4$.

All'interno della colonna $\kappa = 4$, evidenziata in giallo, si cerca il valore più prossimo a 0.1248, che in questo caso risulta 0.1174. Fatto ciò, si ottiene il campione di Tikhonov X andando a leggere nella stessa riga il valore di ϕ .

Ricordando la definizione di κ , si osserva ancora che, oltre al parametro ρ , essa dipende dal campione della variabile di Rice. Anch'esso però, si può considerare limitato ad un intervallo di valori. In particolare, si vede dalla Figura 3.1 che nel caso peggiore ($m = 1$) la distribuzione di Rice si estende idealmente fino ad ∞ , ma poiché in questo caso si ha $f_v(v=3) = 7.4 \cdot 10^{-4}$ è plausibile restringere l'intervallo di interesse a $[0 ; 3]$. Ciò potrà tornare utile nel caso in cui il campione di Rice non è noto a priori, ma viene estratto soltanto durante la simulazione. In tal caso è possibile creare una tabella in cui vengono salvati tutti i possibili valori di κ che potranno essere anche molti. Quindi una volta fissato ρ e generato il campione v , sarà possibile ottenere il campione di Tikhonov selezionando la colonna a seconda del κ ottenuto. Alla stregua di ϕ , anche il parametro κ dovrà essere opportunamente discretizzato.

5 AFFIDABILITÀ DEL GENERATORE

Il passo successivo consiste nel controllare che la procedura descritta fornisca effettivamente una densità di probabilità di Tikhonov. Ciò può essere fatto generando un numero elevato N_c di variates della variabile utilizzando il metodo appena presentato e confrontando l'andamento della densità così ottenuta con quella analitica.

E' necessario innanzitutto generare la variabile aleatoria con statistica uniforme U . Ciò può essere ottenuto mediante la funzione *rand* disponibile in Matlab, che appunto fornisce campioni nell'intervallo $[0 ; 1]$ con la statistica uniforme da noi richiesta.

Ad ogni ciclo, viene cercato all'interno del vettore F , contenente i valori di $F_\phi(\phi)$, il valore più "vicino": viene calcolata la distanza di U dall'elemento precedente di F , e

da quello successivo, per poi scegliere quello meno distante². La posizione dell'elemento così ottenuto viene salvata nella variabile n . Tale variabile servirà poi ad incrementare gli elementi del vettore f , che rappresentano quindi il numero di occorrenze di un dato campione.

Il vettore f , che ha le stesse dimensioni del vettore ϕ , rappresenta una densità di probabilità discreta, inizialmente non normalizzata e con numeri interi. Per normalizzare la densità di probabilità, il vettore f viene diviso per il prodotto tra il suo valore medio M_i (valore medio prima della normalizzazione) e 2π . Per verificare la normalizzazione della densità, basta moltiplicare il nuovo valore medio M_f (valore medio dopo la normalizzazione) per 2π e si dovrà ottenere 1. Plottando f si otterrà un andamento tanto meno discretizzato quanto più piccolo sarà il passo di ϕ e la curva diventerà sempre più attendibile con l'aumentare dei campioni generati.

Alla luce di quanto precede, per ottenere un campione X della variabile di Tikhonov generato dalla variata U , basta selezionare l' n -esimo elemento del vettore ϕ in quanto risulta, come detto, $\phi = F_\phi^{-1}(U)$.

Si può ora, dunque, analizzare quanto la densità di probabilità simulata sia corretta, confrontandola, per diversi valori di κ , con quella analitica. Di seguito verranno innanzitutto sovrapposte le due densità, poi verranno presentate la differenza e l'errore percentuale per maggior chiarezza, così definito:

$$errPerc = \frac{pdf - f}{pdf} \cdot 100, \quad (5.1)$$

in cui pdf rappresenta la densità di probabilità analitica e f la densità di probabilità simulata.

Infine, vengono riportati i valori dell'errore quadratico medio (mse), calcolato secondo la seguente formula:

$$mse = E[e]^2, \quad (5.2)$$

in cui $E[\cdot]$ rappresenta la media ed e è la differenza tra densità di probabilità analitica e simulata (numeratore dell'errore relativo sopra riportato).

Questi tre valori: differenza, errore percentuale e errore quadratico medio, possono essere diminuiti progressivamente aumentando N_c , il numero di campioni estratti. Se, per ottenere una maggior precisione, si decidesse di diminuire il passo di ϕ , il valore di N_c dovrà, a sua volta, aumentare, ossia il numero di estrazioni dovrà essere

² Questa è una possibile, ma ovviamente non unica, strategia operativa e che altri metodi, più raffinati, potrebbero essere implementati per migliorare l'accuratezza. Ciò non è stato comunque considerato prioritario nella presente trattazione.

sufficientemente elevato da garantire che ogni valore di ϕ possa essere estratto almeno una volta.

Nelle successive Figure 5.1-9, vengono riportati alcuni esempi per $\kappa = 1$. Si vede che, come atteso, l'approssimazione diventa via via migliore all'aumentare di N_c . La conclusione è esplicitamente confermata in Tabella 3, la quale riporta i valori di mse . L'analisi è poi ripetuta nelle Figure 5.10-18 per il caso $\kappa = 10$ ricavando conclusioni sostanzialmente analoghe. I valori di mse per questo caso sono riassunti in Tabella 4.

$$\kappa = 1 \quad N_c = 10^4$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 10000$, $N_j = 100$, $\kappa = 1$, passo = 0.031416

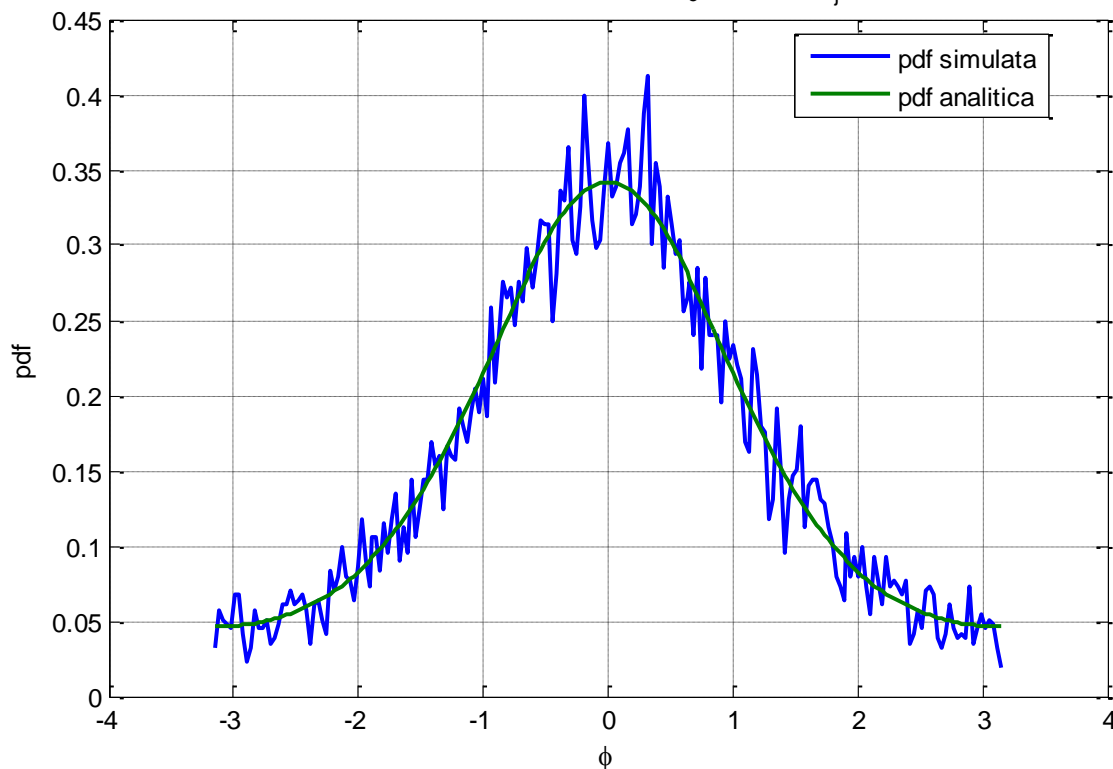


Figura 5.1

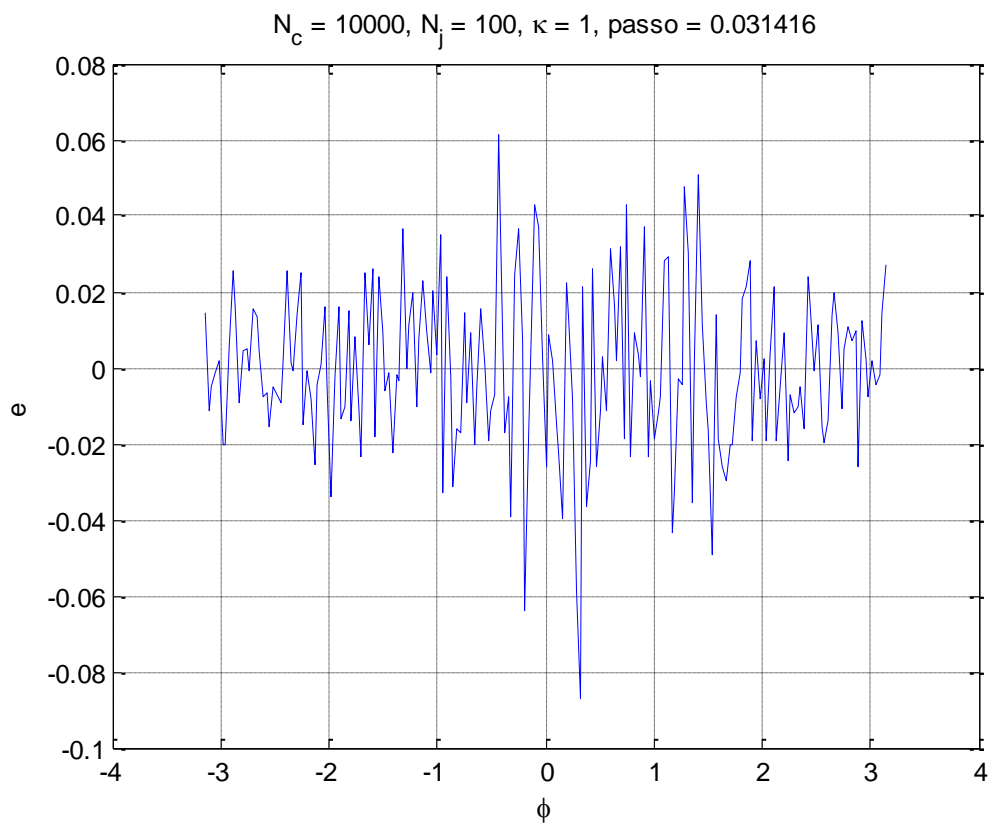


Figura 5.2

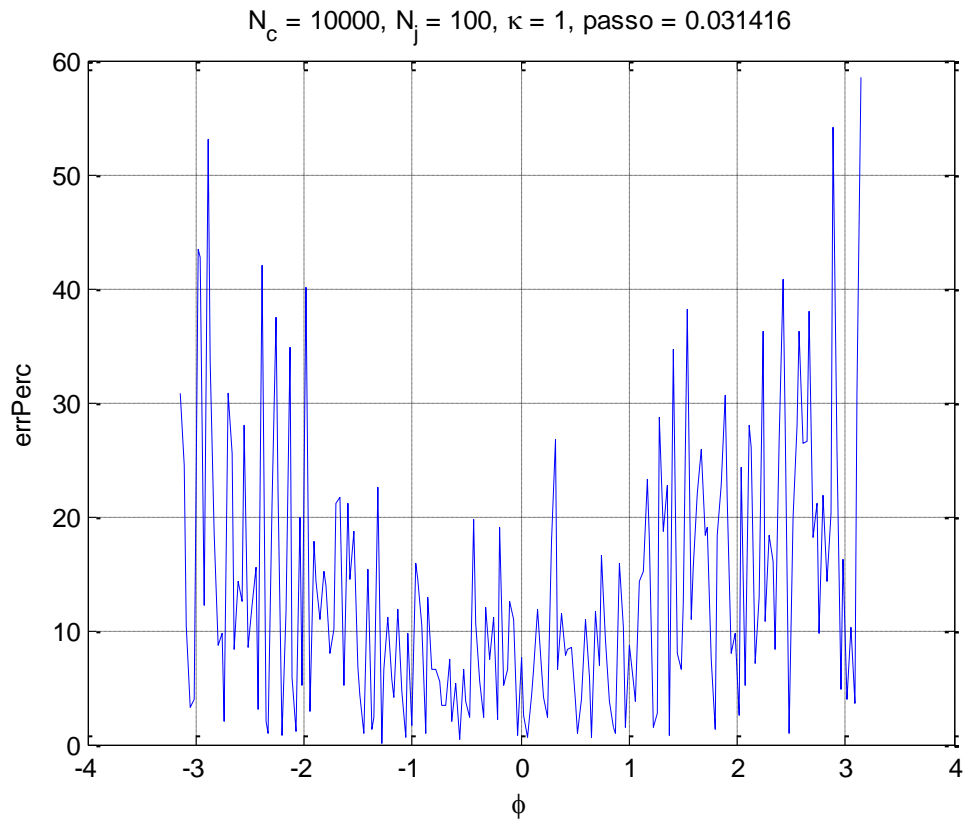


Figura 5.3

$$\kappa = 1 \quad N_c = 10^5$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 100000$, $N_j = 100$, $\kappa = 1$, passo = 0.031416

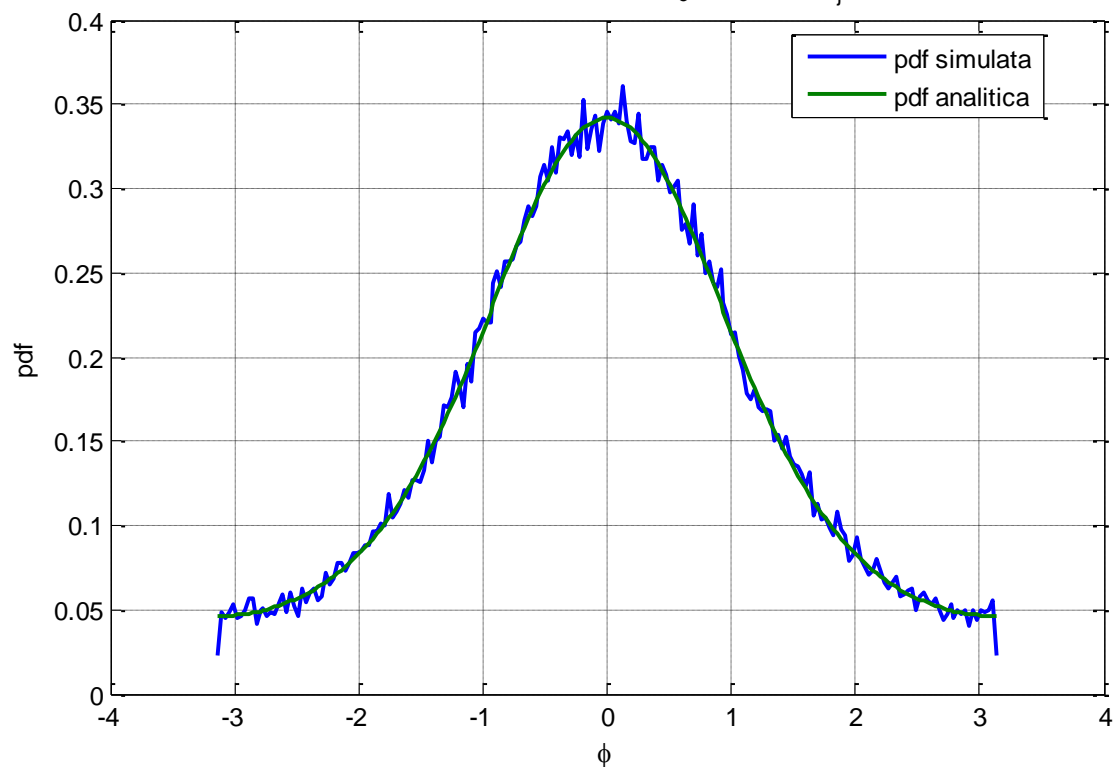


Figura 5.4

$N_c = 100000$, $N_j = 100$, $\kappa = 1$, passo = 0.031416

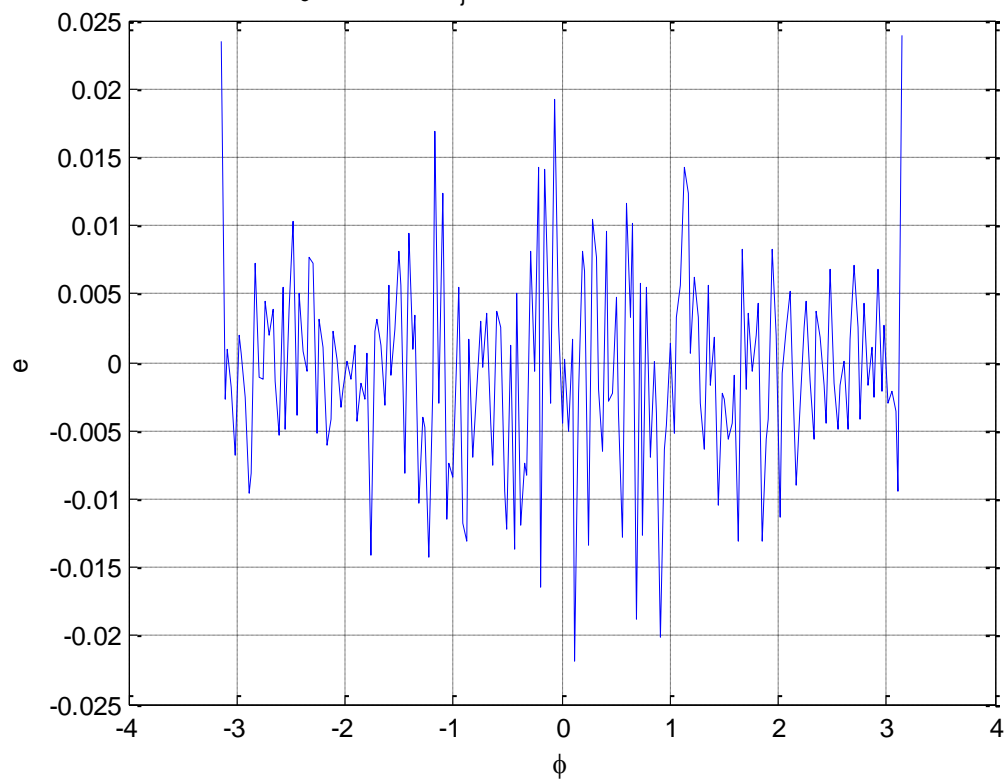


Figura 5.5

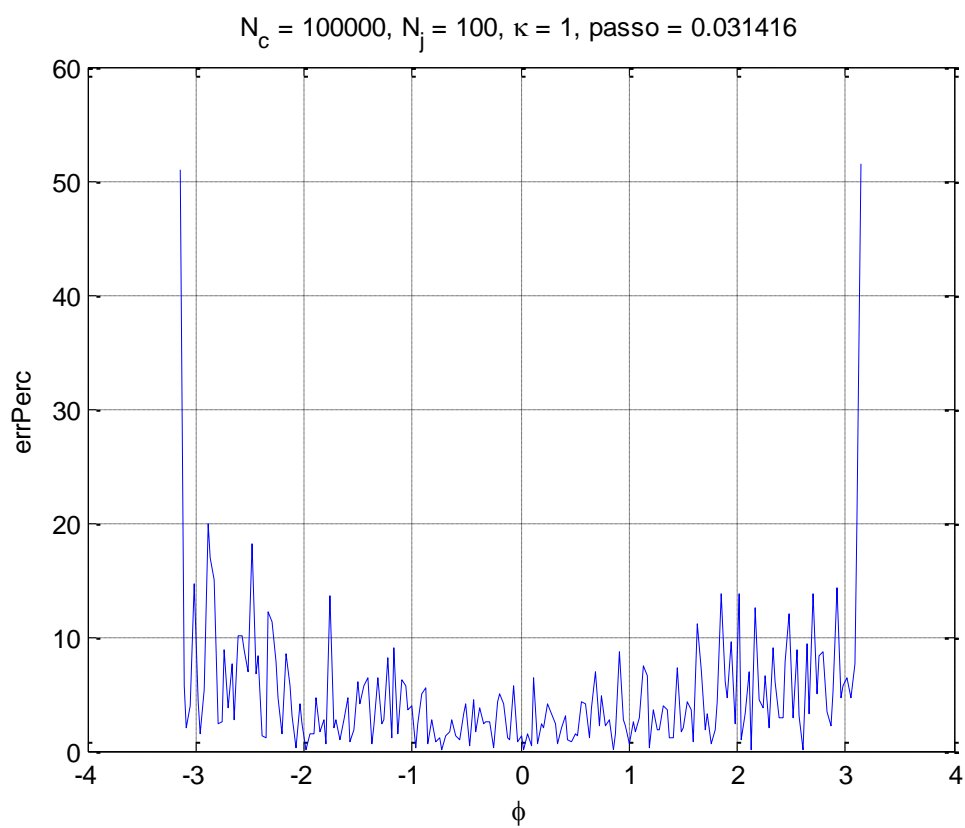


Figura 5.6

$$\kappa = 1 \quad N_c = 10^6$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 1000000, N_j = 100, \kappa = 1, \text{passo} = 0.031416$

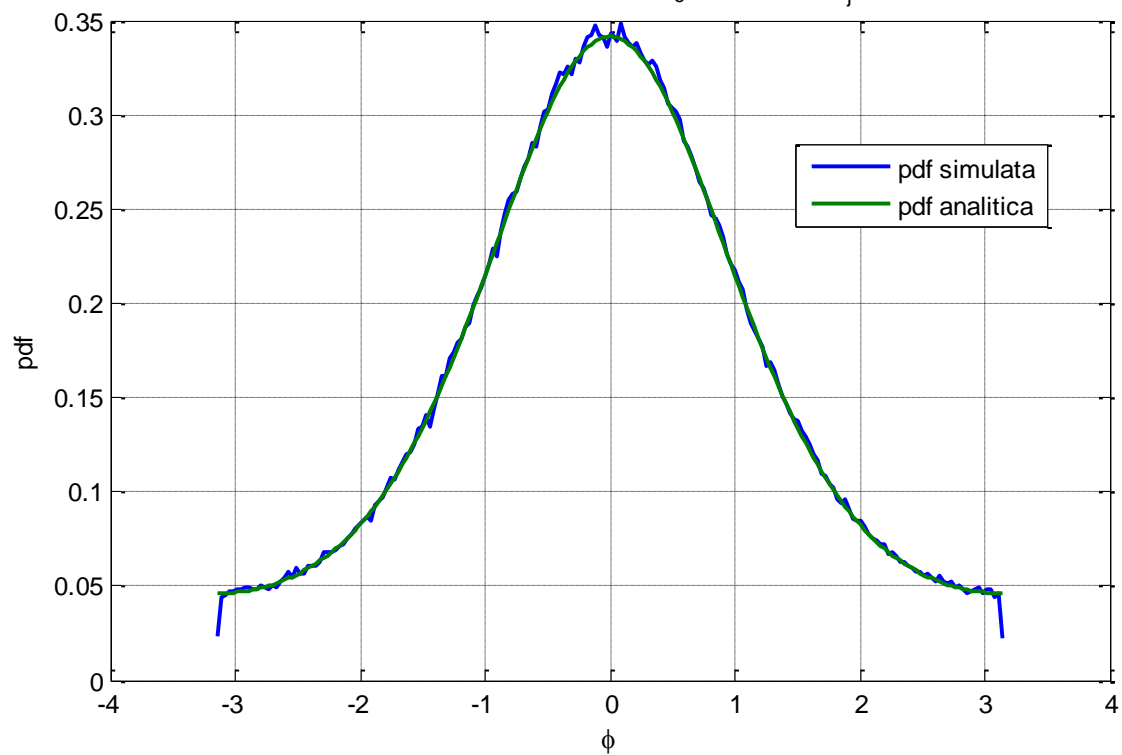


Figura 5.7

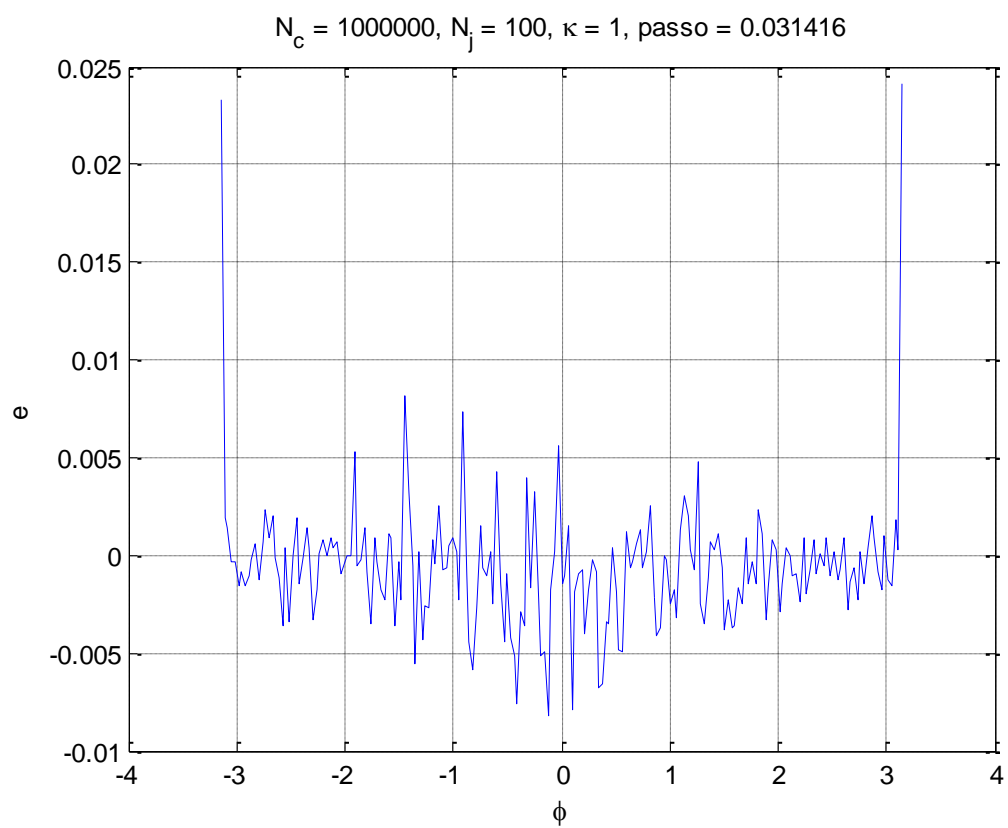


Figura 5.8

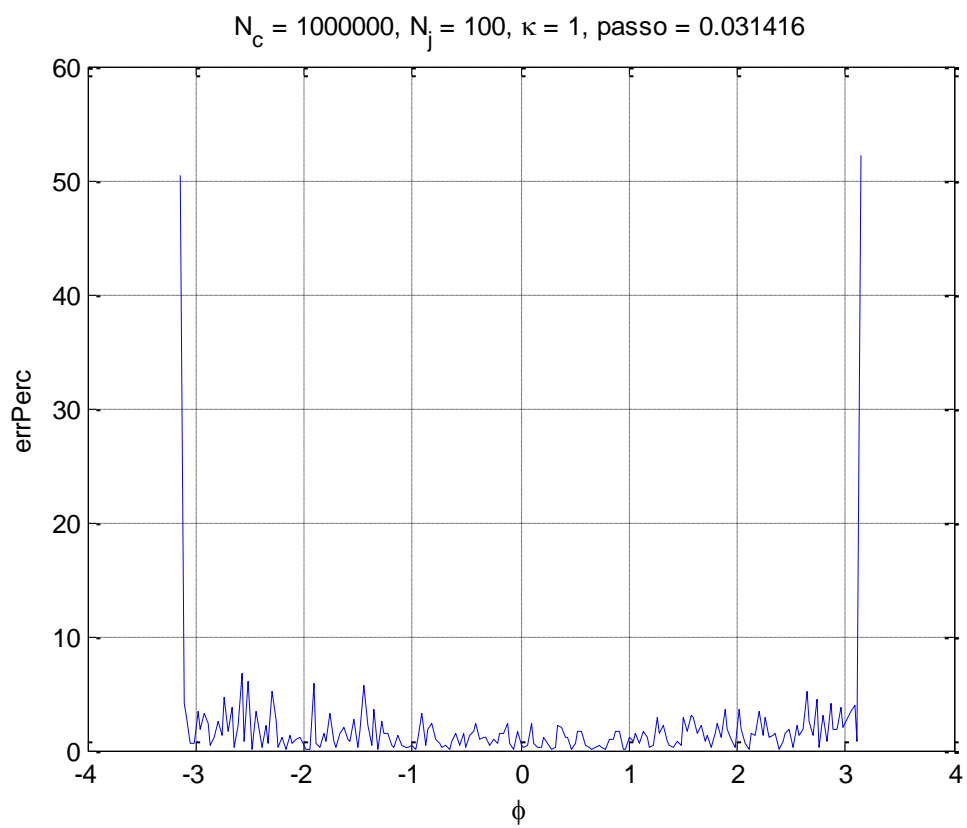


Figura 5.9

$\kappa = 1$	$N_c = 10^4$	$N_c = 10^5$	$N_c = 10^6$
mse	$6.0879 \cdot 10^{-4}$	$5.9248 \cdot 10^{-5}$	$1.1025 \cdot 10^{-5}$

Tabella 5.1

$$\kappa = 10 \quad N_c = 10^4$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 10000$, $N_j = 100$, $\kappa = 10$, passo = 0.031416

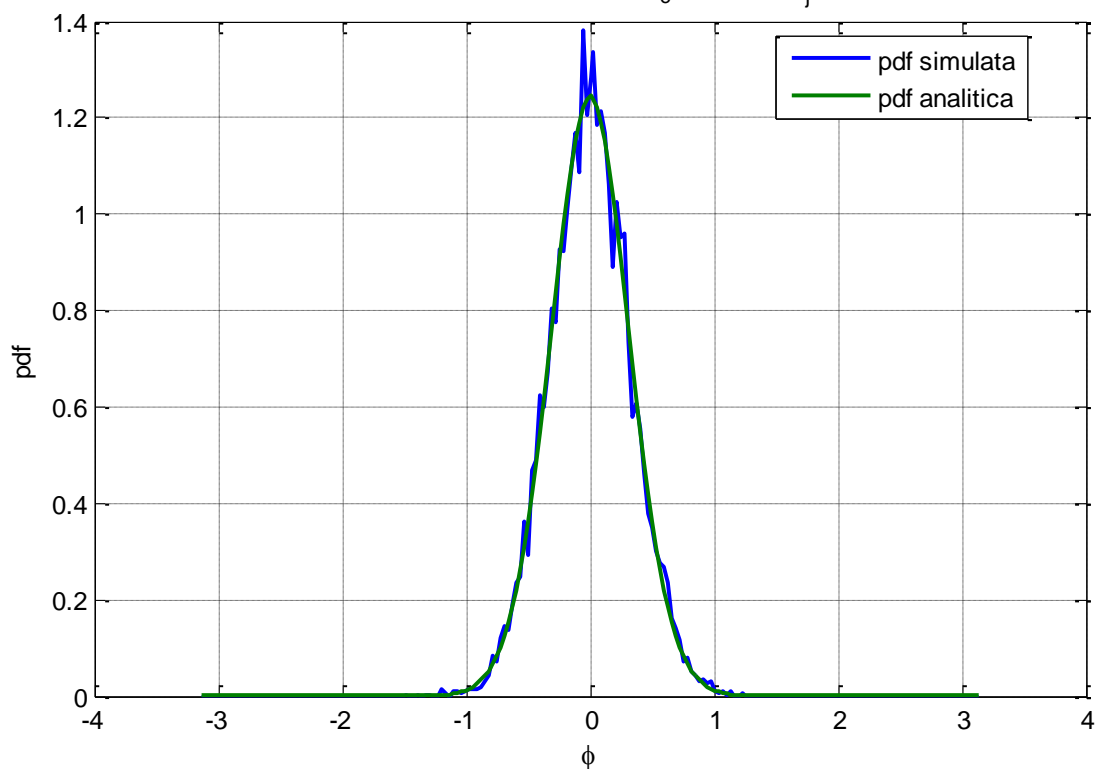


Figura 5.10

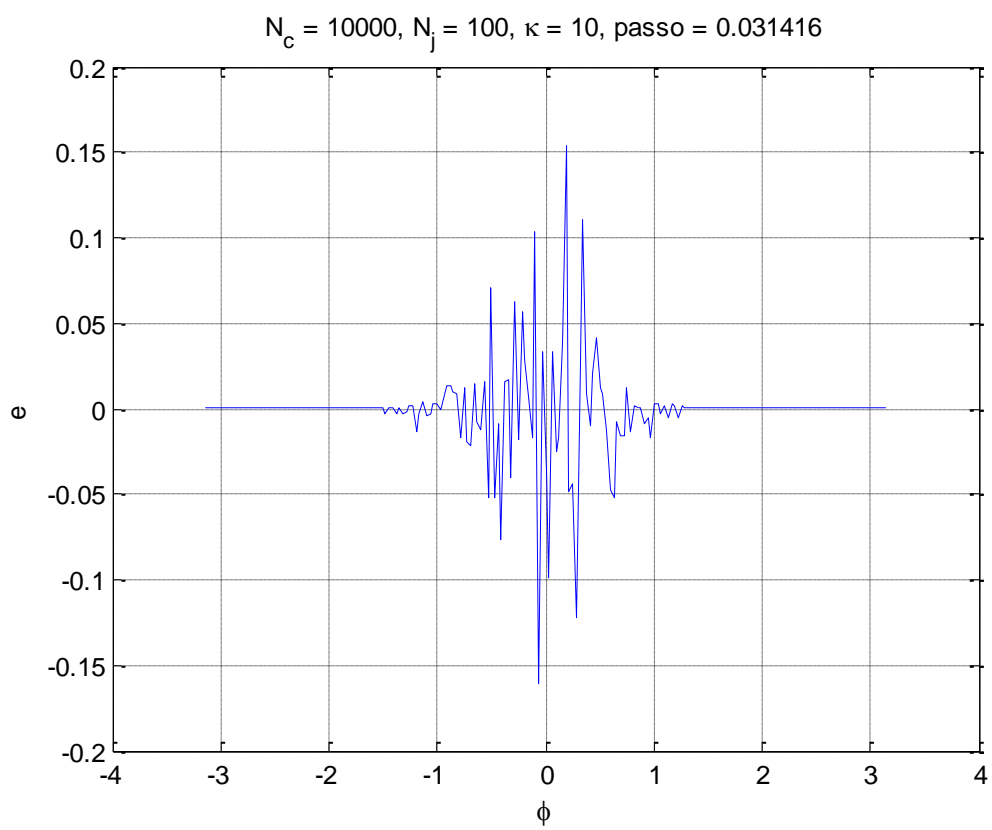


Figura 5.11

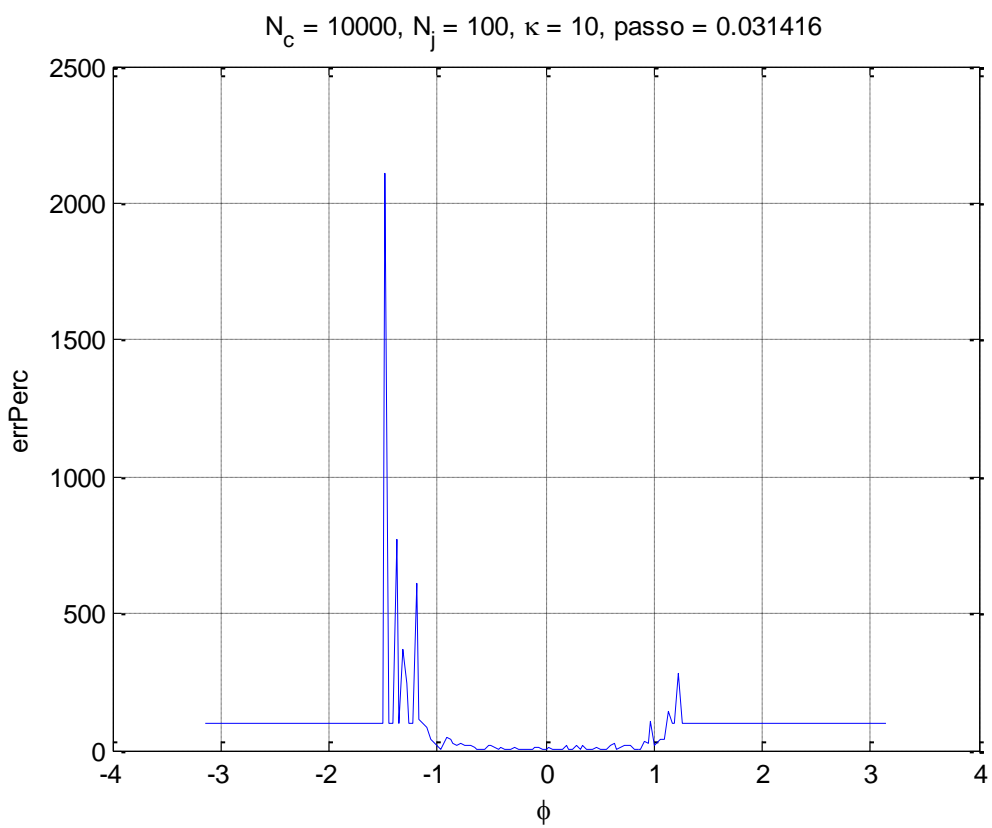


Figura 5.12

$$\kappa = 10 \quad N_c = 10^5$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 100000$, $N_j = 100$, $\kappa = 10$, passo = 0.031416

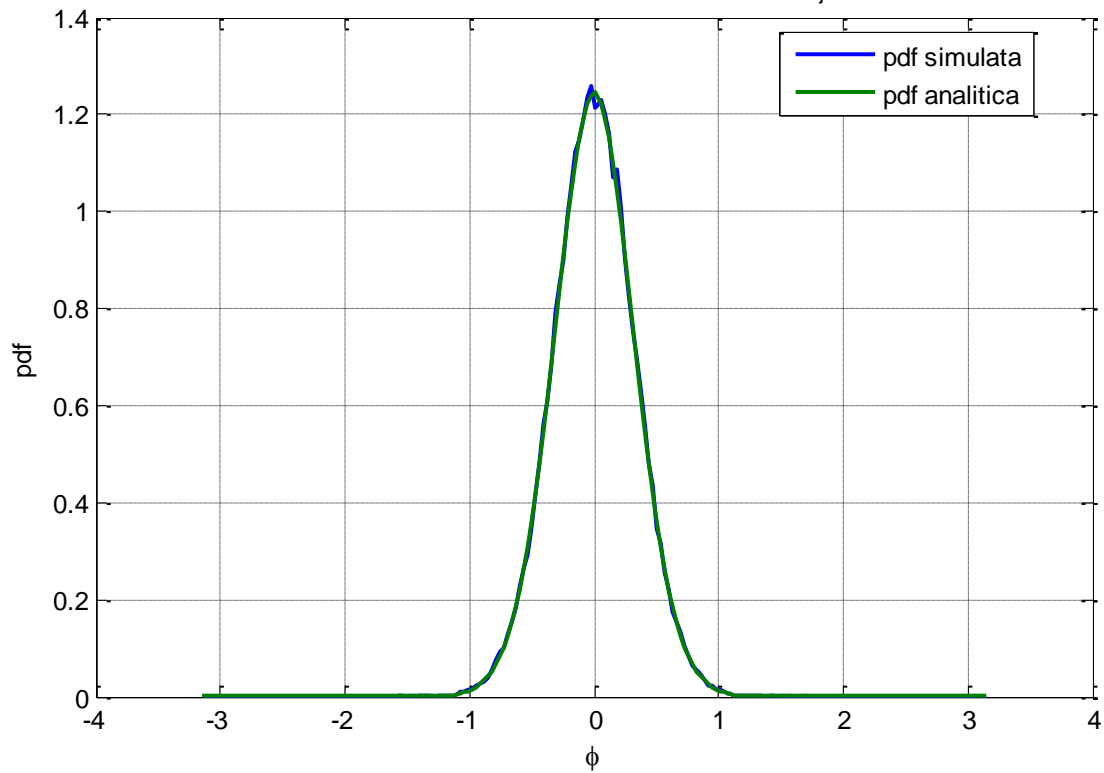


Figura 5.13

$N_c = 100000$, $N_j = 100$, $\kappa = 10$, passo = 0.031416

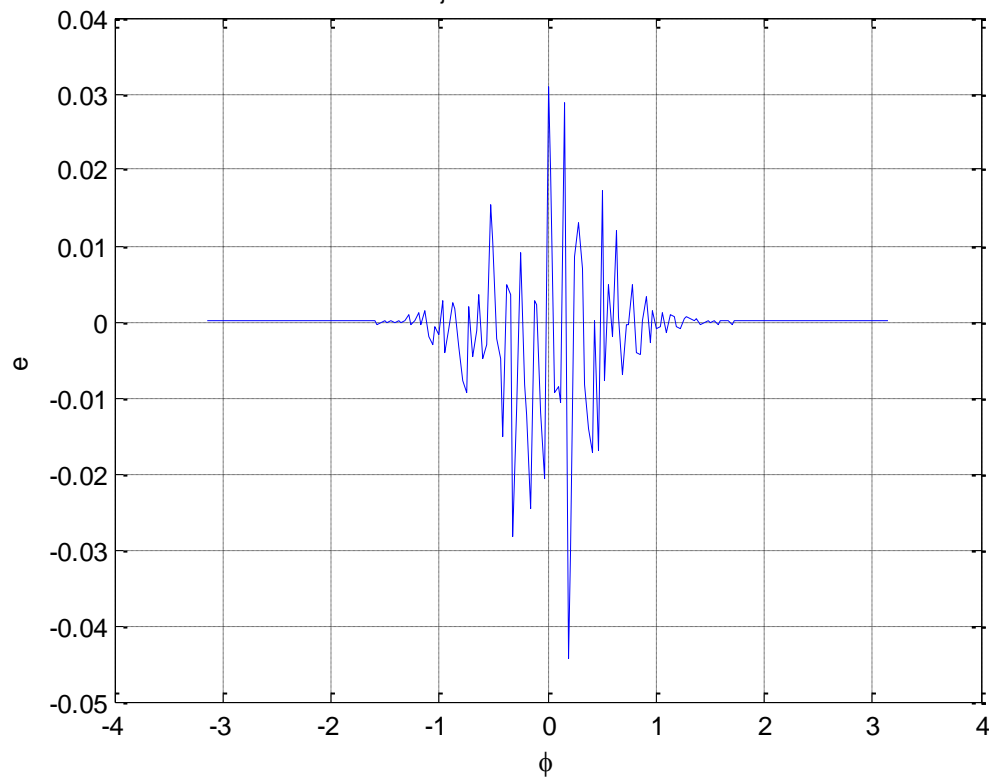


Figura 5.14

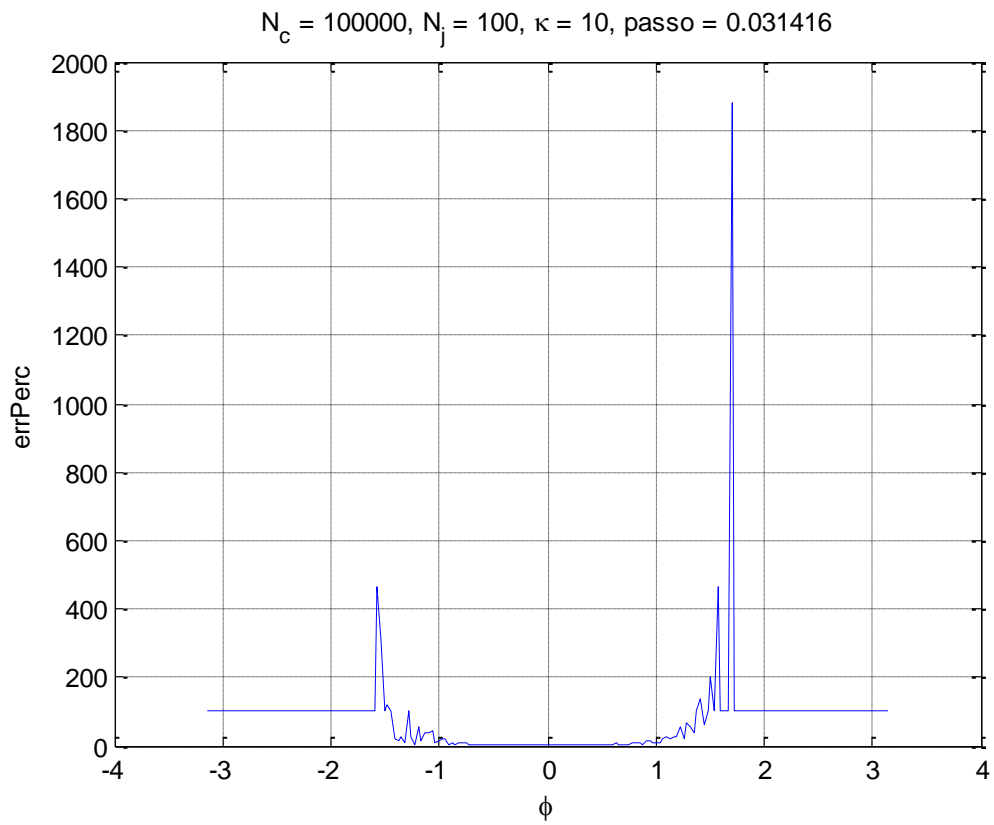


Figura 5.15

$$\kappa = 10 \quad N_c = 10^6$$

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 1000000, N_j = 100, \kappa = 10, \text{passo} = 0.031416$

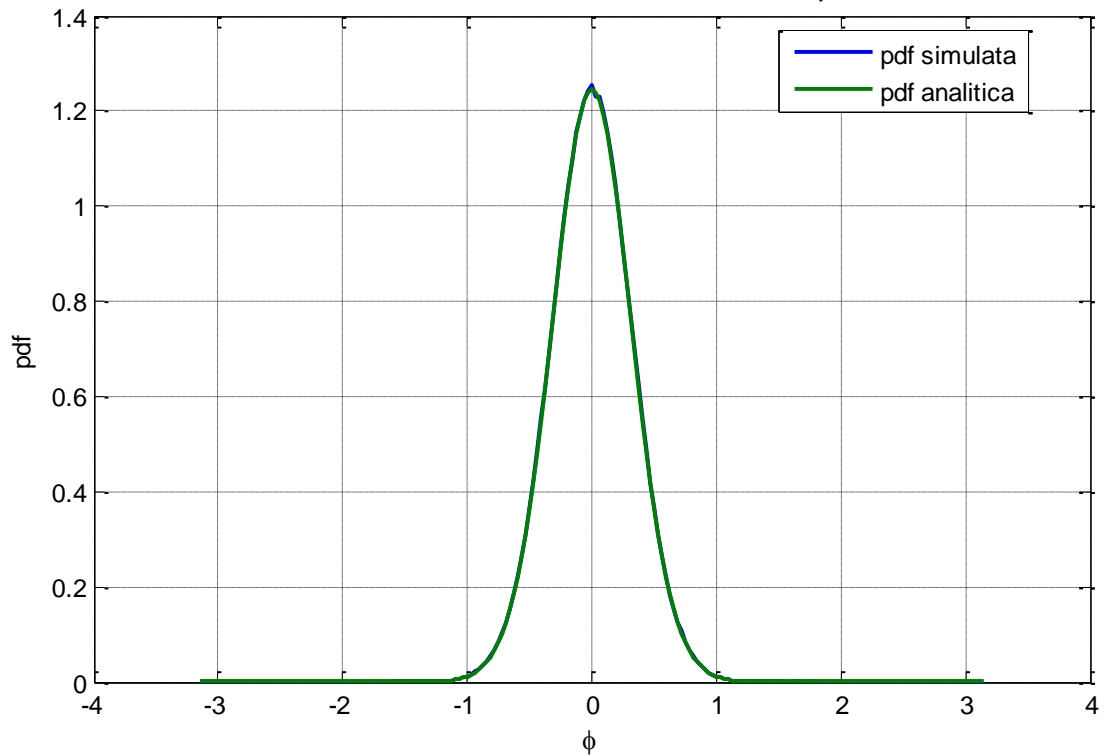


Figura 5.16

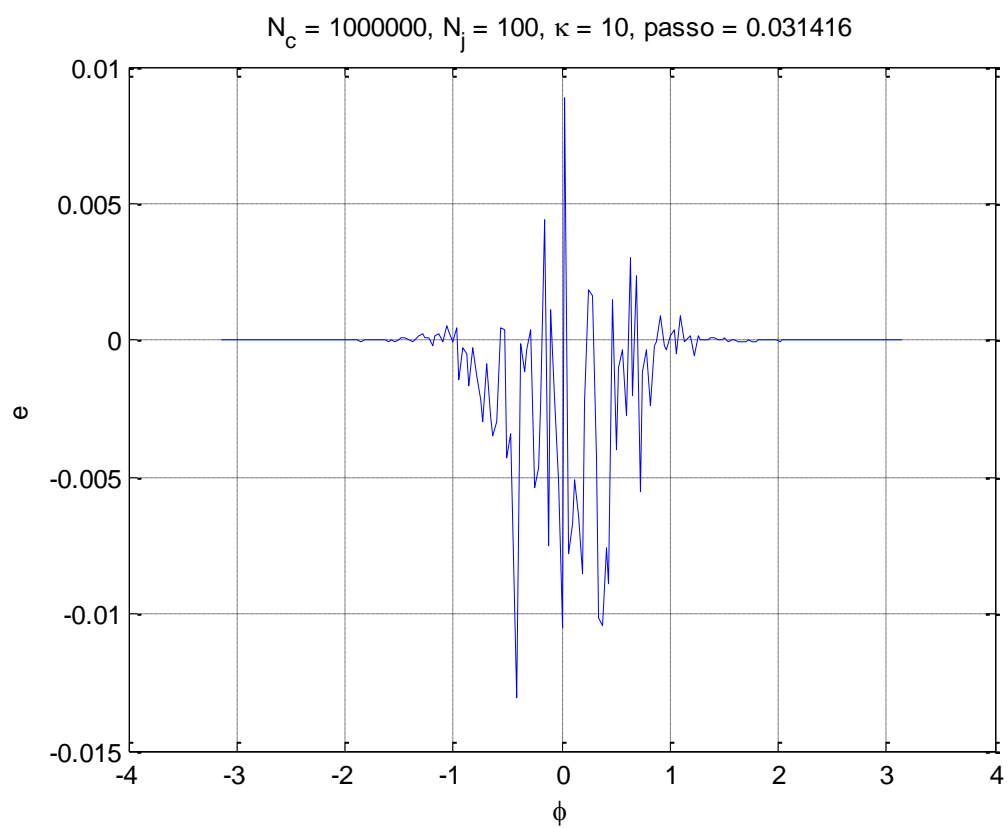


Figura 5.17

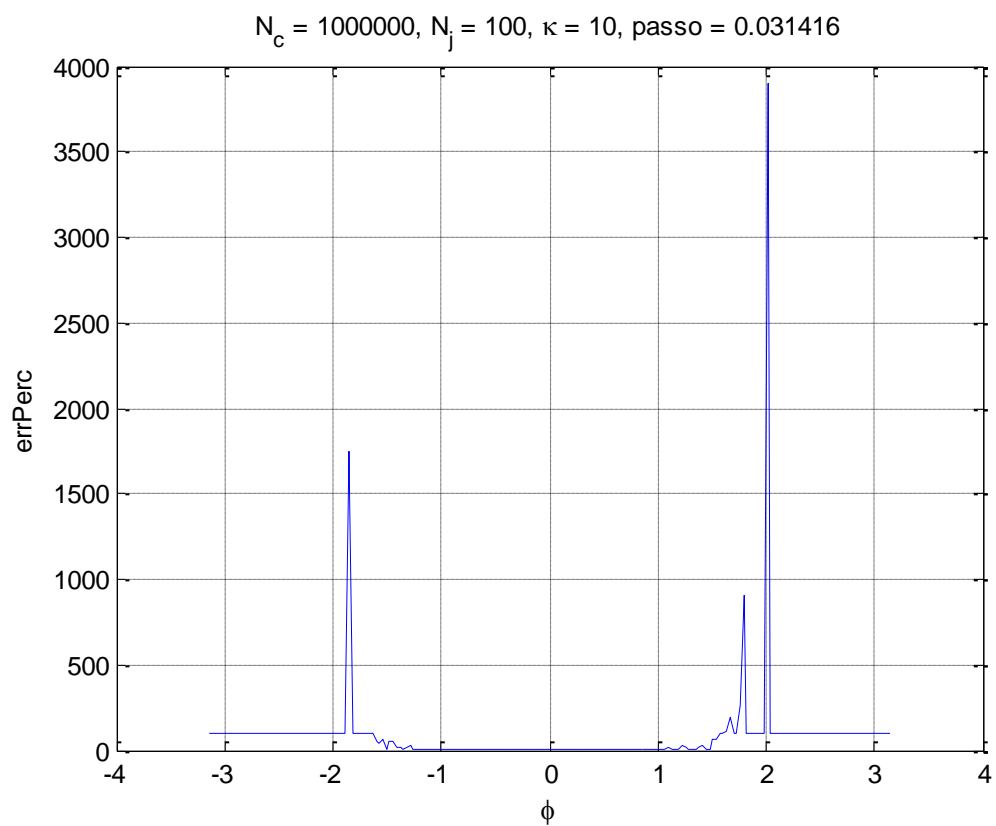


Figura 5.18

$\kappa = 10$	$N_c = 10^4$	$N_c = 10^5$	$N_c = 10^6$
mse	$5.2316 \cdot 10^{-4}$	$5.2695 \cdot 10^{-5}$	$8.9418 \cdot 10^{-6}$

Tabella 5.2

Dai precedenti grafici, in particolare nei casi in cui $N_c = 10^6$, si nota che le due densità di probabilità quasi coincidono; ciò conferma la validità del metodo utilizzato. Tuttavia, ulteriori commenti sui risultati ottenuti sono necessari.

Per $\kappa = 1$, i grafici dell'errore e, conseguentemente, dell'errore percentuale, riportano dei picchi per $\phi = \pm\pi$. La causa di ciò sta nel fatto che ogni valore del vettore densità di probabilità simulata f viene incrementato se viene estratto un campione che cade nell'intervallo di lunghezza $\pi/100$, ossia $\pi/200$ a destra e $\pi/200$ a sinistra. Ciò non è vero per i valori $f(\pm\pi)$, poiché essi hanno soltanto un intervallo di estensione $\pi/200$, rispettivamente a sinistra di $+\pi$ e a destra di $-\pi$.

densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 1000000$, $N_j = 100$, $\kappa = 1$, passo = 0.031416

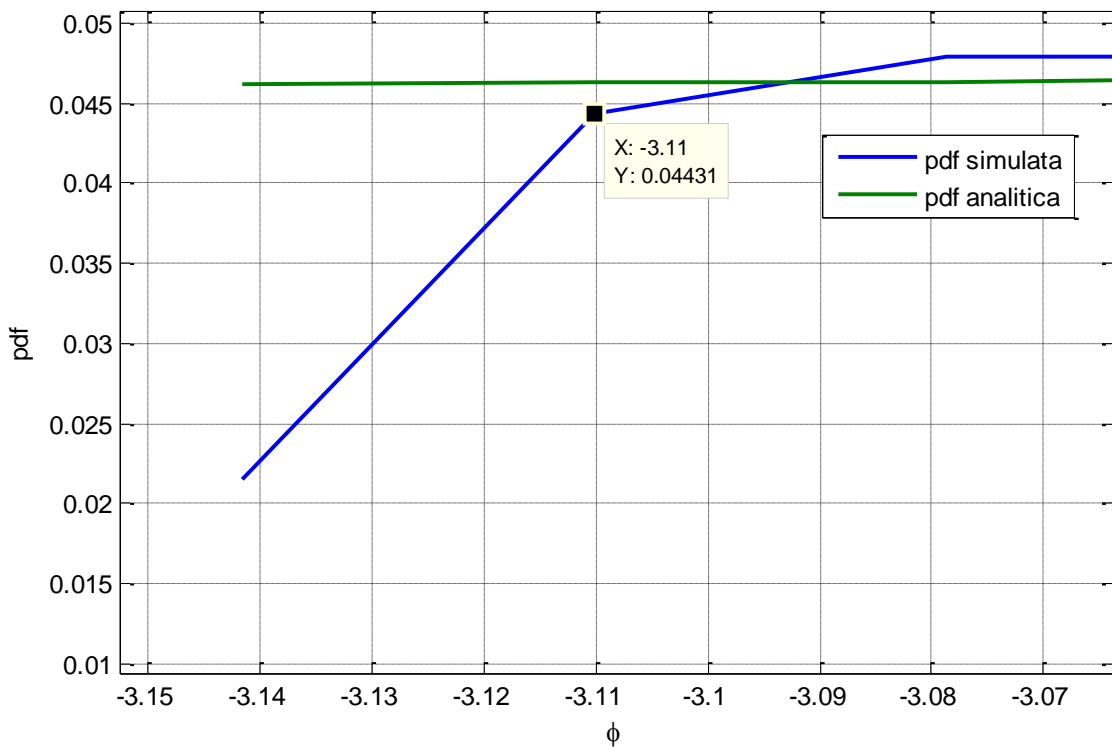


Figura 5.19

Con riferimento alla Figura 5.19, ingrandimento della Figura 5.7, in cui il passo di ϕ è appunto $\pi/100$, il valore della densità simulata $f(-3.11)$ viene incrementato se vengono estratti campioni nell'intervallo $[-3.11-\pi/200; -3.11]$ o nell'intervallo $[-3.11; -3.11+\pi/200]$, mentre il valore $f(-\pi)$ ha soltanto l'intervallo $[-\pi + \pi/200]$ che contribuisce al suo incremento. Da qui nasce il picco che si riscontra nell'errore.

In realtà, tale inconveniente può essere risolto in modo piuttosto logico: dato che $-\pi$ e π sono ovviamente lo stesso valore, è lecito unire i due intervalli estremi, ognuno di estensione $\pi/200$. Ciò garantisce anche una proprietà di “chiusura” che rispecchia la periodicità di 2π della distribuzione di Tikhonov.

Introducendo questo accorgimento si ottengono i grafici nelle Figure 5.20-22.

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 1000000$, $N_j = 100$, $\kappa = 1$, passo = 0.031416

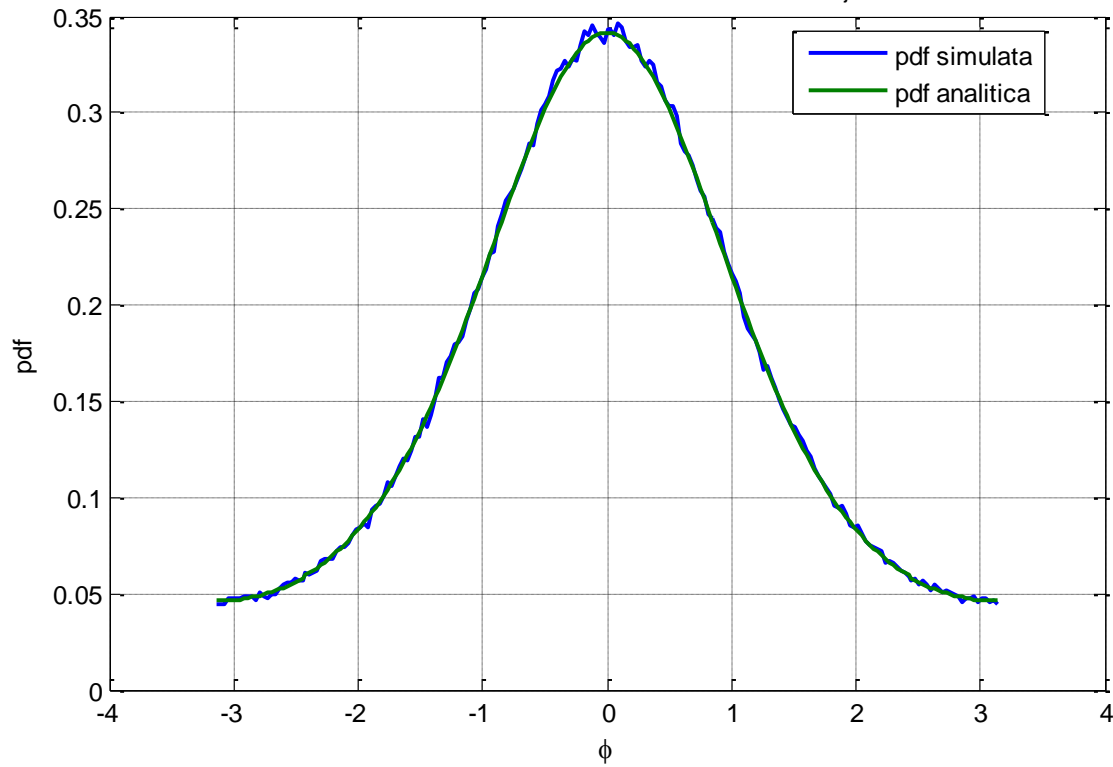


Figura 5.20

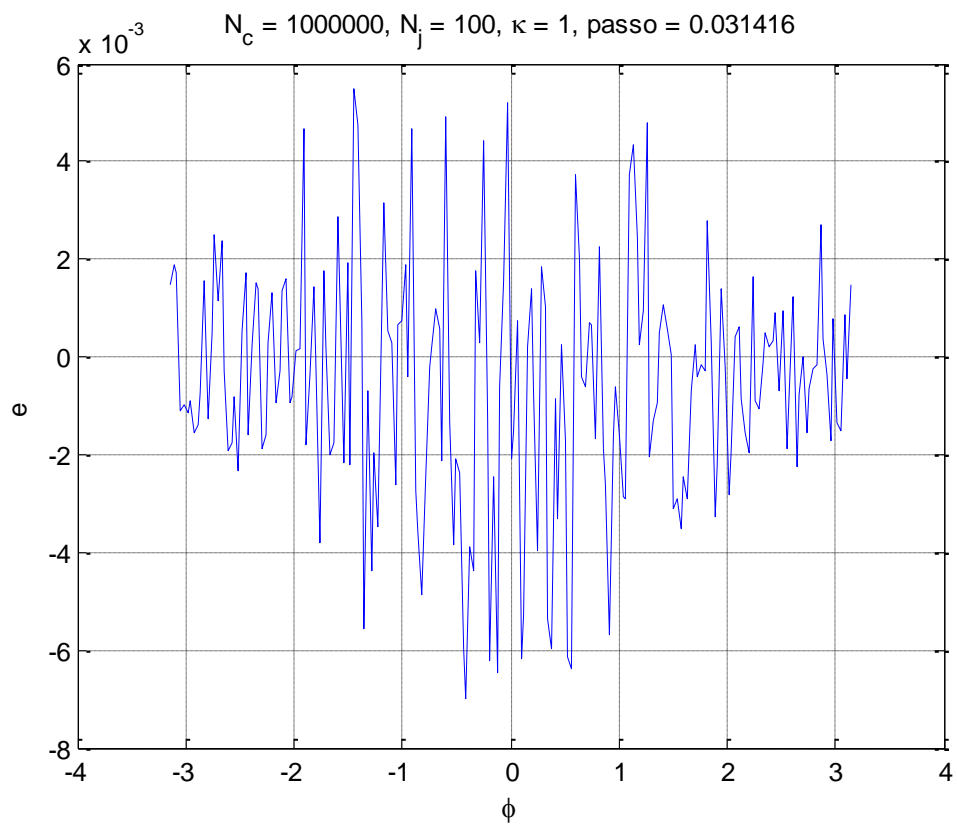


Figura 5.21

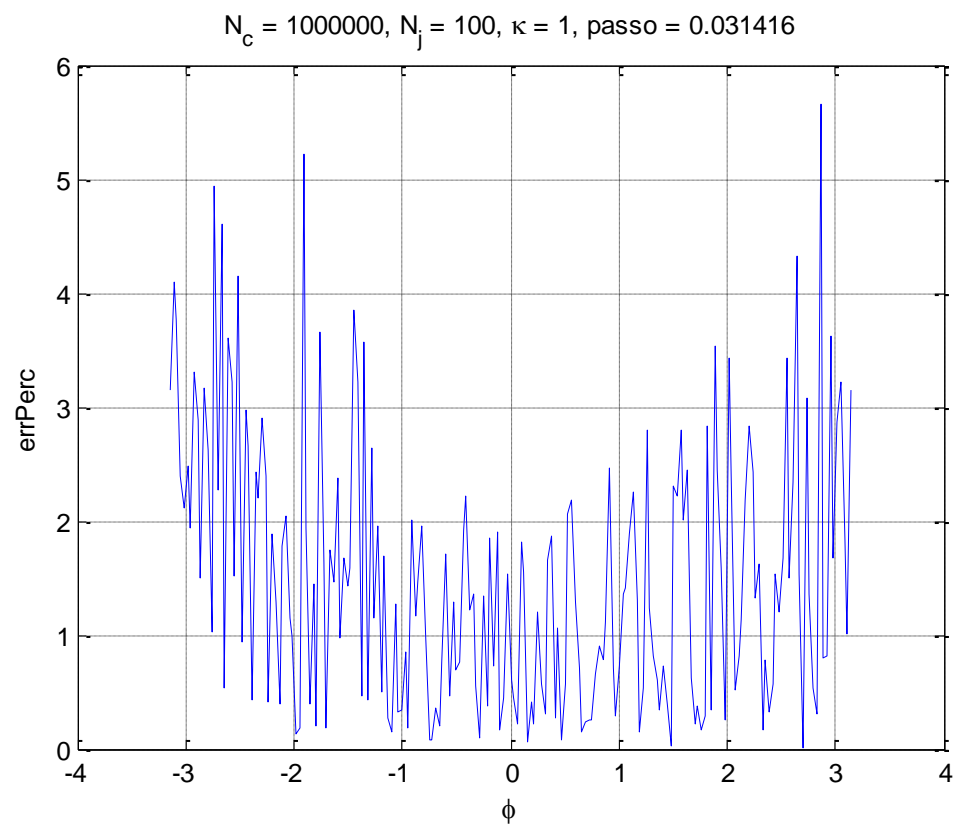


Figura 5.22

Per $\kappa = 10$, poi, si osserva che l'errore percentuale assume valori elevati in alcuni intervalli. Tuttavia, ciò non è molto rilevante, poiché questo avviene dove la densità analitica è prossima allo zero, dove quindi non sono presenti campioni estratti in numero significativo (anche ai fini del loro utilizzo). In particolare, analizzando le Figure 5.23 e 5.24, ingrandimenti delle Figure 5.16 e 5.18, si osserva che, nell'intervallo $[-1 ; +1]$ dell'asse x , dove essenzialmente cadono quasi tutti i campioni, l'errore percentuale è sufficientemente basso.

Densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con $N_c = 1000000$, $N_j = 100$, $\kappa = 10$, passo = 0.031416

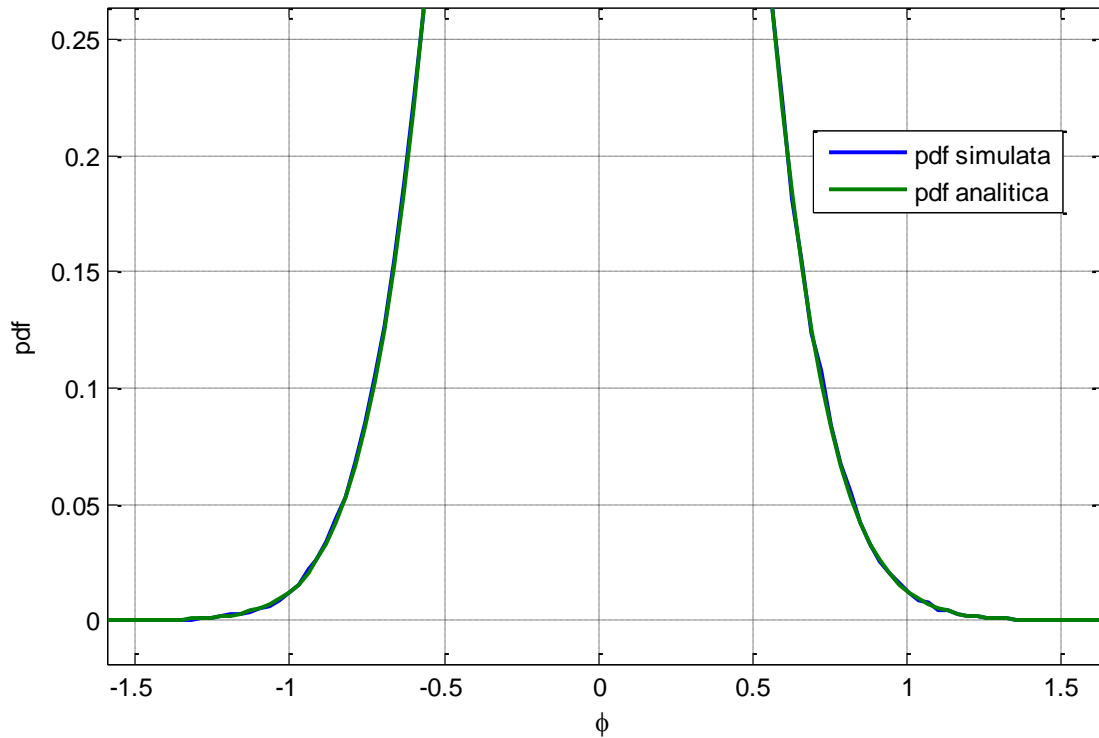


Figura 5.23

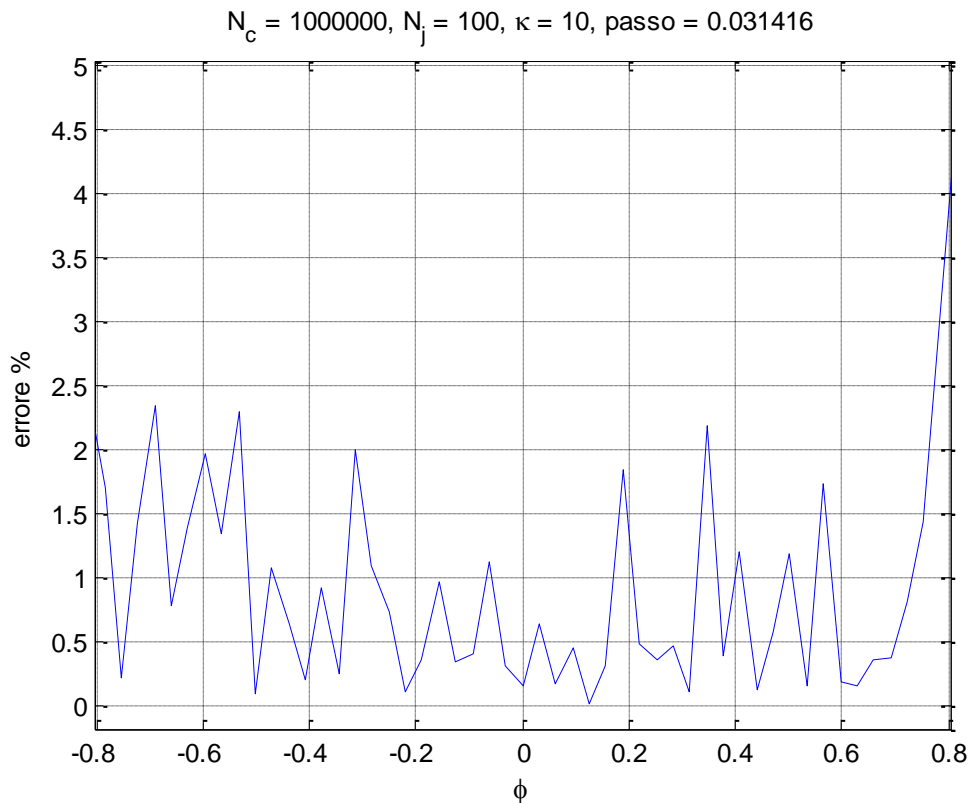


Figura 5.24

Infine, si riporta nel listato 5.1 il codice Matlab utilizzato per ottenere quanto fin qui descritto.

Listato 5.1

```
%densità di probabilità di Tikhonov simulata e analitica

%definizione di parametri e variabili
phistep = pi/100; %step di phi
phi = -pi:phistep:pi;
k = 10; %argomento della funzione di Bessel modificata
Nc = 10^3; %numero di campioni di Tikhonov generati
Nj = 10^2; %ultimo termine della serie della cdf di Tikhonov
f = zeros(size(phi)); %inizializzo la densità di probabilità a 0

%definizione della funzione di ripartizione
F1 = (phi+pi)/(2*pi);
F2 = 1/(pi*besseli(0,k));
F3 = 0;

for j = 1:Nj;
    F3 = F3+(besseli(j,k)*sin(j*phi))/j;
end
F = F1+F2*F3;

%ciclo per ottenere Nc campioni della variabile di Tikhonov
for i = 1:Nc;
    V = rand; %generazione variate con statistica uniforme nell'intervallo [0;1]
    n = find(F>V,1);

    distSX = V-F(n-1); %calcolo la distanza dall'elemento precedente
```

```

distDX = F(n)-V; %calcolo la distanza dall'elemento successivo

if distSX < distDX %se è più vicino al precedente, spostato n
    n = n-1;
end
f(n) = f(n)+1; %creo la densità di probabilità

end

Mi=mean(f); %valore medio della densità di probabilità prima della
normalizzazione
f=f/(Mi*2*pi); %normalizzazione
Mf=mean(f); %valore medio dopo la normalizzazione
%f è normalizzata se Mf*2*pi=1

%definisco analiticamente la densità di probabilità
pdf=exp(k*cos(phi))/(2*pi*besseli(0,k));

figure(1)
plot(phi, f, phi, pdf,'LineWidth', 1.5) %sovrappongo la densità di probabilità
analitica e simulata
xlabel('\phi')
ylabel('pdf')
legend('pdf simulata','pdf analitica','Location','Best')
title(['densità di probabilità di Tikhonov analitica e simulata con N_c = ',
num2str(Nc), ', N_j = ', num2str(Nj), ', \kappa = ', num2str(k), ', passo = ',
num2str(phistep)])
grid on

err = (pdf-f); %differenza tra densità analitica e simulata
errPerc = (abs(err)./pdf)*100; %errore percentuale
mse = mean(err.^2); %mean square error

figure(2)
plot(phi,err)
xlabel('\phi')
ylabel('errore')
title(['N_c = ', num2str(Nc), ', N_j = ', num2str(Nj), ', \kappa = ',
num2str(k), ', passo = ', num2str(phistep)])
grid on

figure(3)
plot(phi,errPerc)
xlabel('\phi')
ylabel('errore %')
title(['N_c = ', num2str(Nc), ', N_j = ', num2str(Nj), ', \kappa = ',
num2str(k), ', passo = ', num2str(phistep)])
grid on

```

6 IL GENERATORE

6.1 LE FUNZIONI MATLAB

Ora che è stata verificata l'affidabilità dell'algoritmo utilizzato e quindi che si ottiene effettivamente un campione della variabile di Tikhonov, è necessario implementare il generatore tramite una funzione Matlab. Ciò viene, in realtà, ottenuto creando 2

funzioni: la prima, denominata *Tikvar_init.m*, che ha come argomento il parametro κ , servirà per inizializzare i vettori ϕ ed F che saranno i suoi valori di ritorno, la seconda, denominata *Tikvar.m*, svolgerà l'effettiva estrazione della variata di Tikhonov. Essa prenderà in ingresso i due vettori ϕ ed F e restituirà un valore di fase X . Di seguito si riportano le due funzioni appena introdotte.

Listato 6.1

Tikvar_init.m

```
%inizializza i vettori phi e F per il calcolo del campione della variabile di
Tikhonov
%k = rho*v^2, dove rho è il SNR della portante del PLL e v è un campione
%della variabile di Rice

function [phi, F] = Tikvar_init(k)
    if k<0
        disp('ERROR! k < 0!');
    end

    phistep = pi/100; %il passo di discretizzazione dei campioni della fase
    phi = -pi:phistep:pi; %i campioni di fase verranno estratti da questo vettore
    Nj = 10^2; %ultimo termine della serie della funzione di ripartizione di
Tikhonov

    %funzione di ripartizione (viene scomposta in 3 parti, di cui l'ultima è
    %la serie
    F1 = (phi+pi)/(2*pi);
    F2 = 1/(pi*besseli(0,k)); %besseli: funzione di Bessel modificata di ordine
0
    F3 = 0;

    for j = 1:Nj;
        F3 = F3+(besseli(j,k)*sin(j*phi))/j;
    end

    F = F1+F2*F3;

end
```

Tikvar.m

```
%phi ed F devono essere inizializzati con Tikvar_init.m
%restituisce un campione della variabile di Tikhonov X

function X = Tikvar(phi, F)

    V = rand; %generazione variata con statistica uniforme nell'intervallo [0;1]
    n = find(F>V,1); %cerco nel vettore F la posizione del primo elemento che ha
valore superiore al campione V estratto
    distSX = V-F(n-1); %calcolo la distanza dall'elemento precedente
    distDX = F(n)-V; %calcolo la distanza dall'elemento successivo

    if distSX < distDX %se è più vicino al precedente, sposto n
        n = n-1;
    end
```

```

X = phi(n); %campione della variabile di Tikhonov, ossia corrispondente
valore della funzione inversa

end

```

6.2 UTILIZZO DEL GENERATORE

Con particolare riferimento alle comunicazioni deep-space, è possibile dividere i collegamenti radio in (almeno) tre classi [4], in funzione della velocità di variazione del canale rispetto alla velocità di trasmissione. Più precisamente, ai fini del miglioramento delle prestazioni del sistema dal punto di vista del tasso di errore, viene comunemente utilizzato un opportuno codice di canale; in uno scenario di questo tipo si è allora soliti distinguere tra:

- modello high-rate: quando il canale non varia durante la trasmissione di una parola di codice
- modello medium-rate: quando il canale non varia durante la trasmissione di un bit
- modello low-rate: quando il canale varia durante la trasmissione di un bit

Una grandezza che in questo caso è utile introdurre è il tempo di coerenza T_c . Esso misura l'intervallo temporale entro il quale si può assumere che il canale non cambia.

Per mostrare un esempio di utilizzo del generatore, viene considerato l'ultimo di questi tre modelli: quello low-rate, per il quale vengono calcolate le perdite al variare dell'indice di scintillazione rispetto al canale AWGN.

6.2.1 PERDITE IN PRESENZA DI SCINTILLAZIONE: CASO LOW-RATE

Formalmente, il modello low-rate si ha quando vale il seguente vincolo:

$$T_c < T_b, \quad (6.1)$$

ossia il tempo di coerenza del canale è inferiore del tempo di bit. Ciò significa che, come detto, il canale varia durante la trasmissione di un bit. Se si suppone che il canale vari n volte all'interno del tempo di bit, dovrà valere allora la relazione:

$$n = \left\lceil \frac{T_b}{T_c} \right\rceil. \quad (6.2)$$

Nel seguito si farà riferimento al caso di trasmissione di telecomandi (TC). Il valore minimo del bit rate per questo tipo di segnali è $R_b = 7.8125$ bps, mentre da misure effettuate su missioni reali per i tempi di coerenza nelle bande Ka (26.5÷40 GHz), X (8÷12 GHz) e S (2÷4 GHz) si possono assumere i seguenti valori [4]:

$$T_{c,Ka} = 3.72 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

$$T_{c,X} = 7.25 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

$$T_{c,S} = 13.9 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Fissato $R_b = 7.8125$, si ha dunque:

$$n_{Ka} = 35,$$

$$n_X = 18,$$

$$n_S = 10.$$

Dunque, con bit rate minimo, che corrisponde a $T_b = 128 \cdot 10^{-3}$, il canale può variare, all'interno del bit, da un massimo di 35 volte ad un minimo di 10. Se viene aumentato R_b , il numero di variazioni del canale all'interno del tempo di bit ovviamente diminuisce. Nel caso $R_b = 7.8125$ bps, comunque, è lecito affermare che si è nel caso low-rate.

Per la scelta della banda del PLL B_l , si può considerare la seguente regola “euristica” [7]:

$$\frac{R_b}{B_l} \approx 1. \quad (6.3)$$

A questo punto è necessario fare un'importante precisazione.

Le prestazioni del sistema vengono solitamente valutate attraverso simulazioni numeriche di tipo Monte Carlo. E' proprio nell'ambito delle simulazioni che il generatore della variabile di Tikhonov messo a punto nell'ambito della tesi trova il suo utilizzo più efficace, consentendo di ottenere campioni dell'errore di fase. Nondimeno, nel caso in cui si possa ipotizzare che il valore medio del $\cos\phi$ all'interno del tempo di bit è con buona approssimazione uguale al valore medio calcolato sull'intero asse dei tempi, in luogo della simulazione è possibile ricorrere ad un modello analitico che fornisce direttamente la perdita (in termini di incremento del rapporto segnale-rumore richiesto) del canale con scintillazione di ampiezza e di fase rispetto al canale AWGN [7].

In accordo con questo modello, la formula per il calcolo delle perdite utilizzata è la seguente:

$$L = E[v \cdot \cos(\phi)]^2, \quad (6.4)$$

in cui v è la variabile di Rice, ϕ la variabile di Tikhonov e $E[\cdot]$ indica la media. Per la precisione, va detto che in [7] la formula è presentata per il solo caso di variabilità della fase, mentre in questo lavoro essa è stata estesa per tener conto della statistica di Rice associata all'ampiezza.

In accordo con la (6.4) il valore della perdita può essere determinato analiticamente e vengono di seguito riportati i passaggi. Sapendo che in generale la funzione di Bessel di primo tipo di ordine n vale:

$$I_n(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\kappa \cos \phi} \cos(n\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{\kappa \cos \phi} \cos(n\phi) d\phi, \quad (6.5)$$

si può scrivere allora,

$$E(\cos \phi) = \int_{-\pi}^\pi \cos \phi \cdot p_\phi(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi \cdot I_0(\kappa)} \int_{-\pi}^\pi \cos \phi \cdot e^{\kappa \cos \phi} d\phi = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}. \quad (6.6)$$

Per quanto riguarda la PDF di Rice, è possibile ottenere un'espressione alternativa se si introduce il cosiddetto fattore di Rice K_m che dipende dall'indice di scintillazione nel modo seguente:

$$K_m = \frac{\sqrt{1-m^2}}{1-\sqrt{1-m^2}} = \frac{z}{1-z}, \quad (6.7)$$

dove è stato posto:

$$\sqrt{1-m^2} = z. \quad (6.8)$$

Riprendendo ora la (3.2) e la (3.3) si può scrivere:

$$a^2 = z, \quad (6.9)$$

$$\sigma^2 = \frac{1-z}{2}. \quad (6.10)$$

Sostituendo ora nella (3.1) si ha:

$$f_V(v) = \frac{2v}{1-z} \exp\left(-\frac{v^2+z}{1-z}\right) I_0\left(\frac{2v \cdot \sqrt{z}}{1-z}\right). \quad (6.11)$$

Se si inverte la (6.7) si ottiene poi:

$$z = \frac{K_m}{K_m + 1}. \quad (6.12)$$

Infine, introducendo K_m nella (6.11) risulta:

$$f_V(v) = \frac{2v}{1 - \frac{K_m}{K_m + 1}} \cdot \exp\left(-\frac{v^2 + \frac{K_m}{K_m + 1}}{1 - \frac{K_m}{K_m + 1}}\right) \cdot I_0\left(\frac{2v \cdot \sqrt{\frac{K_m}{K_m + 1}}}{1 - \frac{K_m}{K_m + 1}}\right) =$$

$$= 2v(K_m + 1) \cdot \exp[-v^2(K_m + 1) - K_m] \cdot I_0(2v\sqrt{K_m(K_m + 1)}). \quad (6.13)$$

Di conseguenza, si avrà:

$$E(v \cos \phi) = \int_0^\infty v \cdot p_V(v) \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} dv =$$

$$= \int_0^\infty 2v^2(K_m + 1) \cdot e^{-v^2(K_m + 1) - K_m} \cdot I_0(2v\sqrt{K_m(K_m + 1)}) \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} dv. \quad (6.14)$$

Nondimeno e, da una parte, per verificare la correttezza di questa formula e, dall'altra, la correttezza del generatore, nel seguito ricaveremo $E(v \cos \phi)$ per via numerica, attraverso un esperimento che coinvolga un numero sufficientemente elevato di campioni estratti della variabile di Tikhonov.

Nella (6.4) non è esplicita la dipendenza di L da m ; quest'ultima è però, come visto, necessaria per la generazione della variabile di Rice. Per ottenere la generica variata di Rice è stata scritta in Matlab la funzione *Ricevar* (riportata nel listato 6.2) che prende in ingresso il parametro m .

La variata di Rice v , a sua volta, viene utilizzata per l'estrazione della variata di Tikhonov (attraverso la funzione *Tikvar*).

Listato 6.2

Ricevar.m

```
%prende in input ScintFact (indice di scintillazione m) e restituisce Gain =
campione di Rice
%deve essere 0 < ScintFact < 1, altrimenti Gain ha parte reale e
%immaginaria

function Gain = Ricevar(ScintFact)
    Campioni = 1; % campioni generati

    RiceFactor = (1/(ScintFact^2)-1)+sqrt((1/(ScintFact^2)-
1)^2+(1/(ScintFact^2)-1)); % rice factor

    mu = sqrt(RiceFactor/(RiceFactor+1));
    sigma = sqrt(1/2/(RiceFactor+1));

    Xvect = mu + sigma*randn(1,Campioni);
    Yvect = sigma*randn(1,Campioni);
```



```
Gain = sqrt((Xvect.^2) + (Yvect.^2));
```

Dunque, dato un valore di m , può essere estratto un numero (N_c) sufficientemente elevato di variates di Rice, ad ognuna delle quali seguirà la generazione di una variata di Tikhonov. Alla fine si avranno così N_c coppie di variates Rice-Tikhonov. Per ogni coppia di variates Rice-Tikhonov, viene calcolato il prodotto $v \cdot \cos(\phi)$.

Le perdite, fissato un valore di m , vengono calcolate mediando su questi N_c prodotti, per poi elevare l'inverso al quadrato.

Per le simulazioni mancano ancora due parametri da fissare: il rapporto segnale-rumore della portante del PLL ρ ed il numero di estrazioni N_c da effettuare. Quest'ultimo valore viene scelto uguale, in prima istanza, a 10^4 , in quanto un numero inferiore darebbe, per ogni esecuzione del programma, risultati notevolmente diversi (indice questo di scarsa affidabilità statistica dei risultati); si può optare anche per un numero superiore, ma i tempi di calcolo aumenterebbero proporzionalmente. Nondimeno, si vedrà nel seguito che ciò potrebbe risultare anche necessario.

Per quanto riguarda ρ , è possibile scegliere un valore di R_b/B_l e far variare il rapporto E_b/N_0 o viceversa. Nel primo grafico, Figura 6.1, viene prima fissato il rapporto $R_b/B_l = 1$, mentre nel secondo, Figura 6.2, viene fissato $E_b/N_0 = 3$ dB.

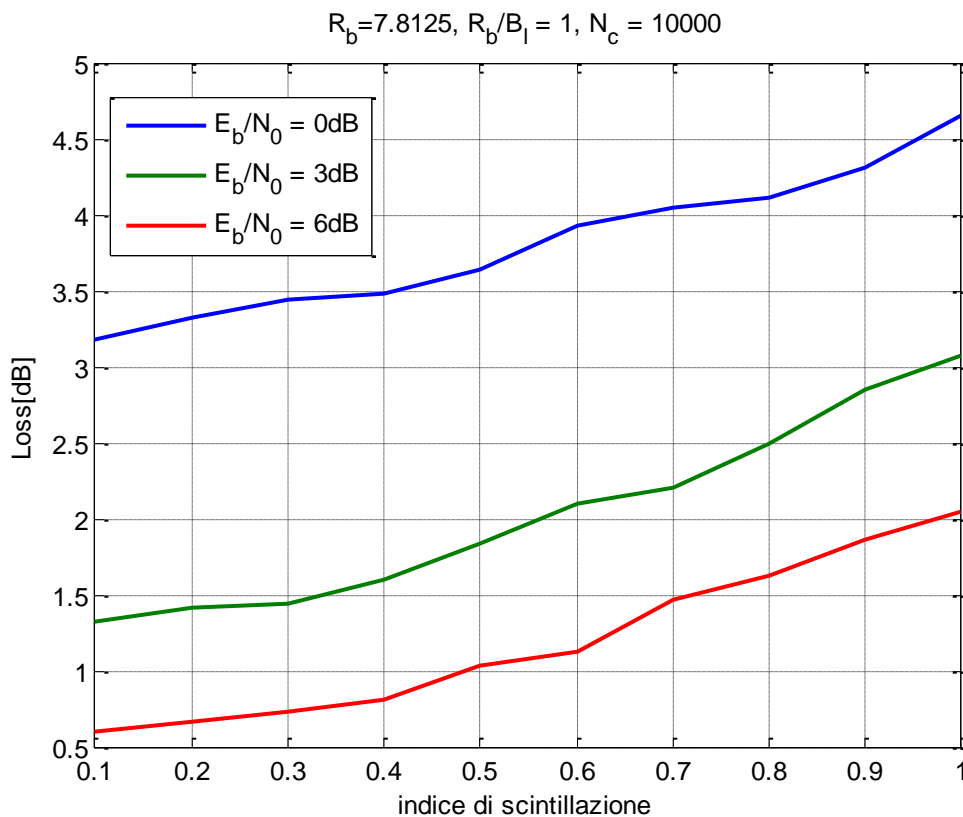


Figura 6.1

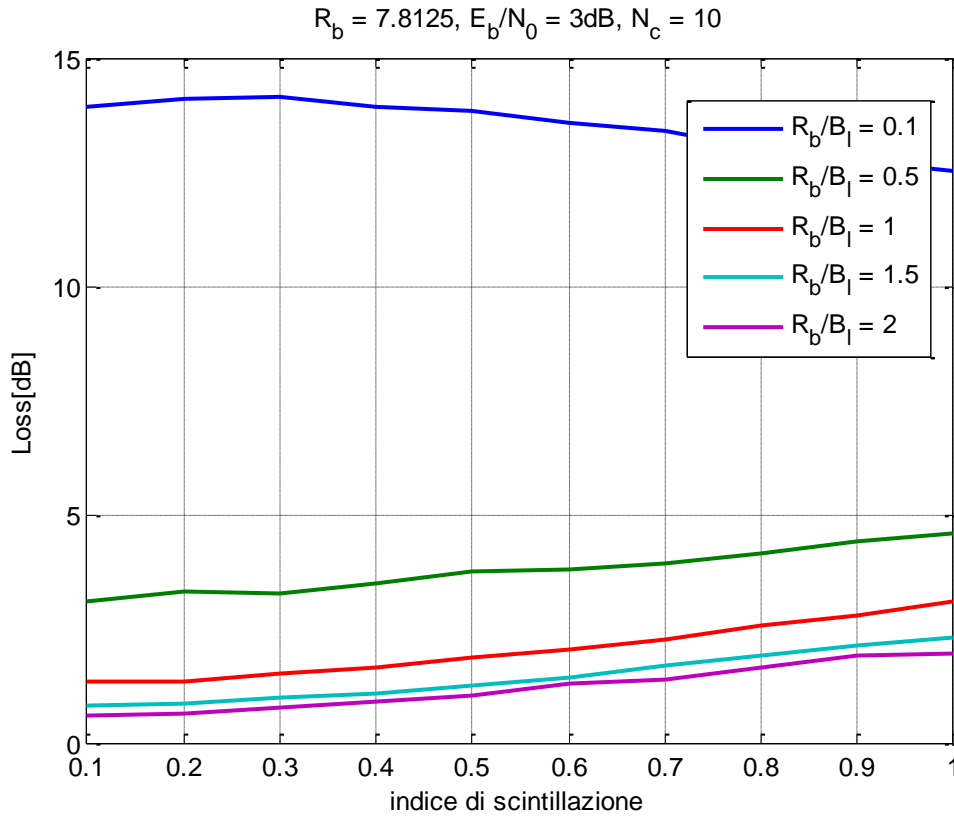


Figura 6.2

Si nota che sia all'aumentare di E_b/N_0 sia di R_b/B_l le perdite diminuiscono. In particolare, dai risultati ottenuti si osserva che $R_b/B_l \approx 1$ è un valore adeguato per avere perdite accettabili, in tal modo confermando la validità delle posizioni in [7]. Un valore maggiore del rapporto diminuisce ulteriormente le perdite ma non in maniera significativa mentre, al contrario, R_b/B_l significativamente minori di 1 (ad esempio $R_b/B_l = 0.1$) inducono perdite molto più elevate. Inoltre, coerentemente con il significato di indice di scintillazione, all'aumentare di m si ottengono perdite maggiori. Questo non sembra però essere il caso della curva per $R_b/B_l = 0.1$. Anche dalla formula analitica si ottiene difatti un andamento analogo. Le due curve in questione vengono sovrapposte in Figura 6.3, in cui è possibile constatare³ che entrambe hanno un andamento decrescente e indicano perdite tra i 14.3 dB e i 12.5 dB.

³ È evidente che per ottenere un andamento più smussato della Loss simulata è necessario aumentare il numero di estrazioni N_c . Così facendo, le due curve si presenterebbero ancora più simili.

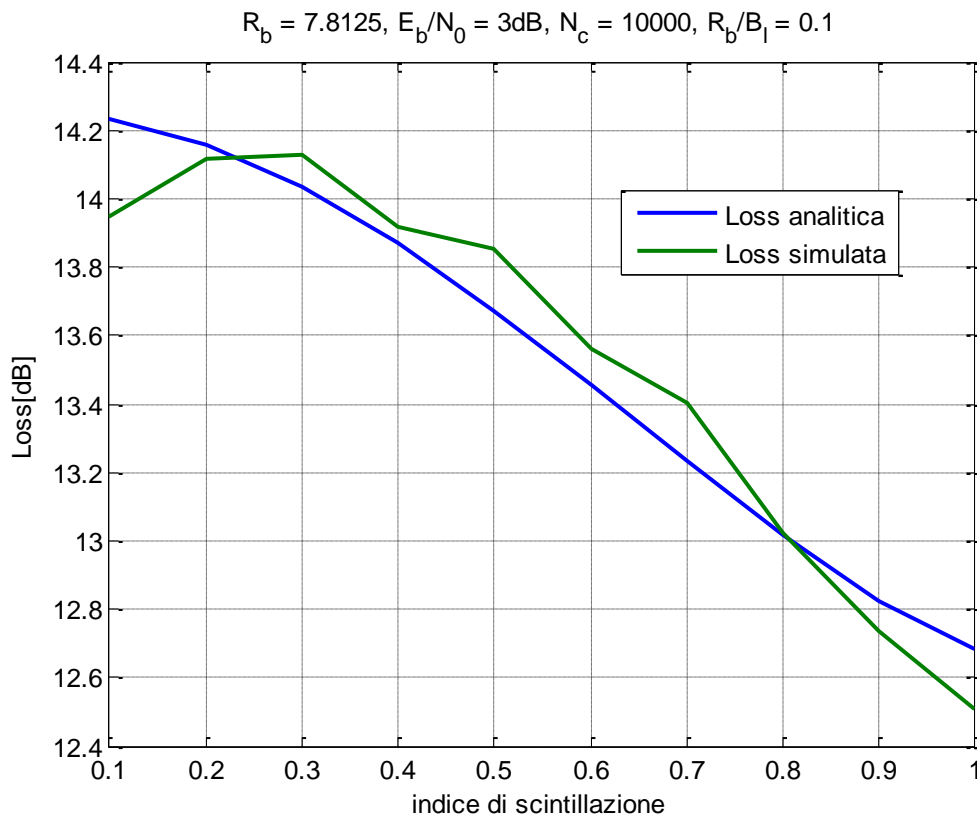


Figura 6.3

6.2.2 PERDITE AL VARIARE DEL *SEP*

E' interessante mettere a confronto le perdite nelle bande d'interesse, al variare dell'angolo *SEP*. Ciò è possibile utilizzando le relazioni riportate nella Tabella 2.1. Il confronto è fatto in Fig. 6.4, limitatamente all'intervallo di maggior interesse $[0^\circ ; 5^\circ]$. Ovviamente, i valori ottenibili dalla Tabella 2.1, anche tenendo conto della correzione (pure riportata in figura) non possono eccedere $m = 1$.

Al di là delle oscillazioni dovute a un numero insufficiente di estrazioni durante la simulazione, si nota che al diminuire del *SEP*, ossia all'avvicinarsi del sole al collegamento Terra-sonda, si ha un conseguente aumento delle perdite. Nel tratto in cui inizia la saturazione dell'indice di scintillazione m , quest'aumento si arresta (nel caso di banda Ka, linea blu, al decrescere del *SEP*, la saturazione inizia per $m \cong 3$).

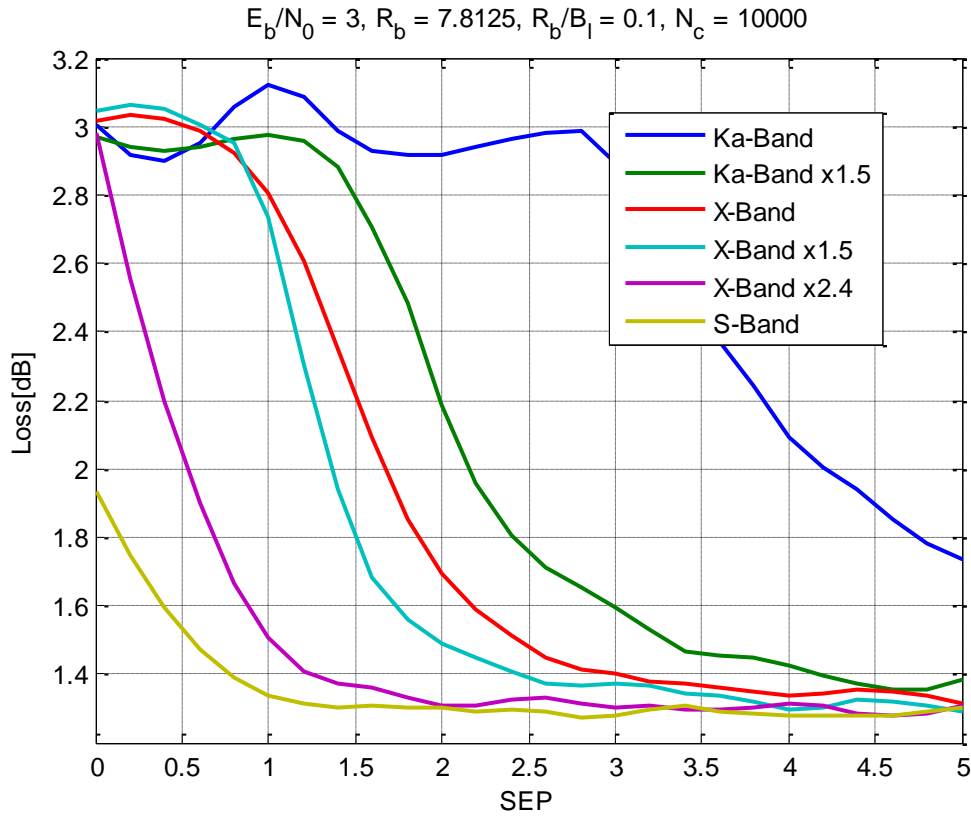


Figura 6.4

6.2.3 VARIAZIONE DELLA FASE PIU' VELOCE DELLA VARIAZIONE DELL'AMPIEZZA

Finora si è considerato il caso in cui le variazioni di ampiezza e di fase avvenivano con la stessa frequenza, ossia a ogni estrazione di v ne corrispondeva una di ϕ . Un diverso scenario, che può essere utile analizzare, è quello in cui si ha una variazione della fase molto più veloce rispetto a quella dell'ampiezza. Dal punto di vista implementativo, ciò si traduce nel fatto che per ogni generazione della variabile di Rice, devono essere effettuate più generazioni della variabile di Tikhonov.

A questo punto, è necessario analizzare due modi diversi di procedere e questa distinzione viene fatta per descrivere i possibili funzionamenti del PLL.

Il primo caso prevede che per ogni estrazione di v , si eseguono N_ϕ estrazioni di ϕ e che, per ognuna di esse, ne venga calcolato il coseno. Successivamente viene fatta la media. Questo procedimento va ripetuto per ogni campione di ampiezza, in totale N_v . Dunque la (6.4) diventa:

$$L = E\{v \cdot E[\cos(\phi)]\}^{-2}. \quad (6.15)$$

Qui si suppone che il PLL abbia una banda sufficientemente larga da permettergli di inseguire la fase del segnale ricevuto a ogni sua variazione, in totale N_ϕ .

Nel secondo caso, invece, i campioni della fase estratti vengono subito mediati e poi ne viene calcolato il coseno:

$$L = E\{v \cdot \cos(E[\phi])\}^{-2}. \quad (6.16)$$

In tal modo si presume che il PLL non sia in grado di inseguire tutte le variazioni di fase, ma restituisca solo una media di queste.

I risultati delle simulazioni vengono riportate in Figura 6.5 (primo caso) e in Figura 6.6 (secondo caso), in cui vengono estratti $N_\phi = 10^2$ campioni di fase e $N_v = 10^4$ campioni di ampiezza. Tali valori permettono di ottenere risultati sufficientemente affidabili.

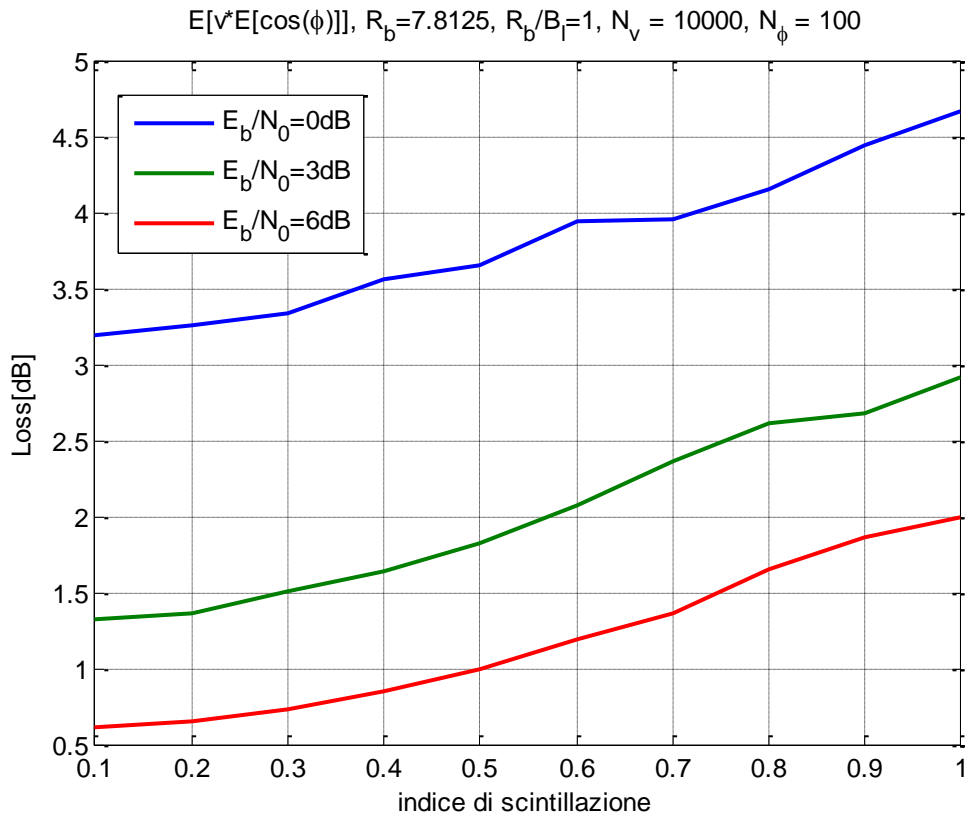


Figura 6.5

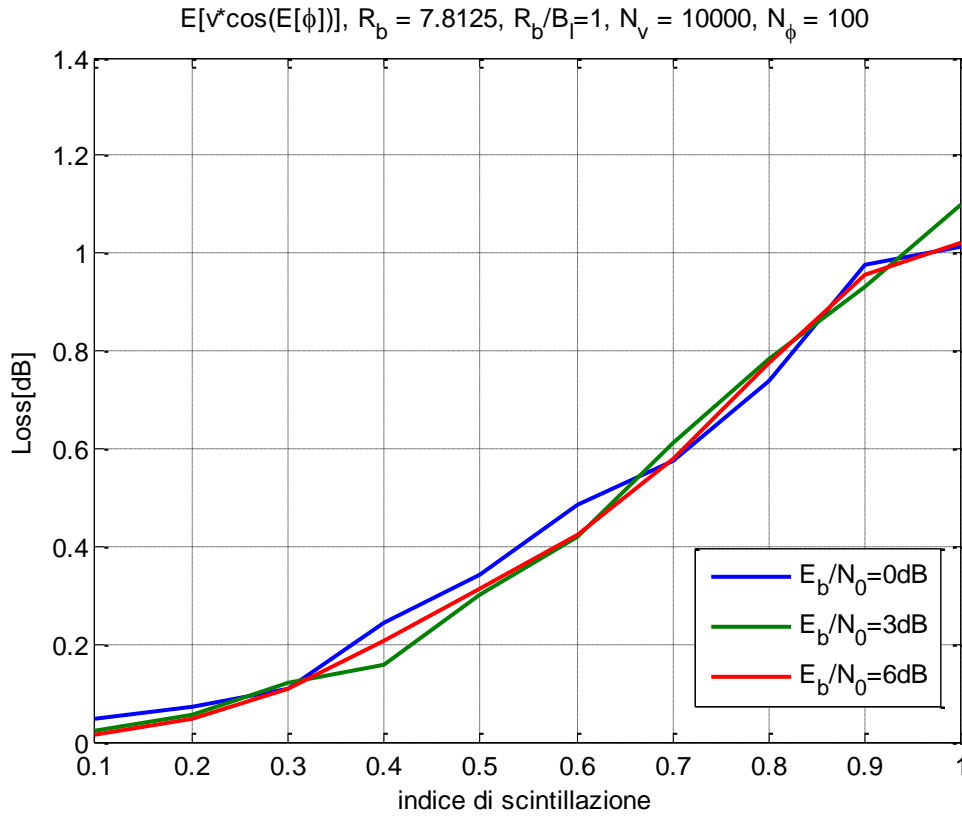


Figura 6.6

Al diminuire di κ la densità di probabilità di Tikhonov ha una varianza maggiore (per $\kappa \rightarrow 0$ tende a essere uniforme) e, dunque, le estrazioni di campioni della fase con valori non prossimi a zero diventano più frequenti. Più questi campioni si discostano dal valore nullo, più il loro coseno sarà minore di 1, ossia daranno un maggior contributo alle perdite. Questo è ciò che accade nel primo caso, in cui viene calcolato $\cos\phi$ e poi viene effettuata la media.

La densità di probabilità di Tikhonov, data la sua simmetria rispetto a $\phi = 0$, garantisce, però, che la media dei campioni generati si avvicini al valore nullo con l'aumentare delle estrazioni. Di conseguenza, calcolando il coseno di questa media, come viene fatto nel secondo caso, si otterrà un valore prossimo a 1 e che quindi riduce significativamente le perdite.

Il fatto che l'errore di fase influisca sulle perdite o meno si può osservare nei grafici delle simulazioni: nel primo caso, in cui esso, come detto, gioca un ruolo importante, si nota la dipendenza da E_b/N_0 , che influisce solo sulla fase e non sull'ampiezza (infatti per l'estrazione di v , non è necessario il valore di E_b/N_0), mentre nel secondo caso, in cui l'errore di fase è praticamente nullo, non c'è dipendenza da E_b/N_0 .

In Figura 6.7 le simulazioni delle perdite nei tre casi sin qui analizzati vengono tra loro confrontate (ovviamente in un caso particolare). Come si vede, non vi è sostanzialmente differenza tra il caso in cui si calcola il $E\{v \cdot E[\cos(\phi)]\}$ e il caso in

cui si calcola il $E\{v \cdot \cos(\phi)\}$. Questa osservazione è importante perché, potendosi ovviamente scrivere $E\{v \cdot E[\cos(\phi)]\} = E\{v\} \cdot E[\cos(\phi)]$, essa certifica che la correlazione tra le variabili v e ϕ è relativamente debole. In lavori futuri, si potrebbe verificare se questa sia una conclusione valida in generale, ossia se la correlazione tra v e ϕ rimane debole anche al variare di ρ . Al contrario, per quanto evidenziato più sopra, la perdita è significativamente più bassa se si calcola il $E\{v \cdot \cos(E[\phi])\}^{-2}$. Va però detto che questo corrisponde a una procedura operativa (calcolo della media dei valori stimati di fase) che non trova attualmente riscontro nell'implementazione del sistema e che dunque richiederebbe una modifica delle architetture attualmente utilizzate nelle missioni spaziali.

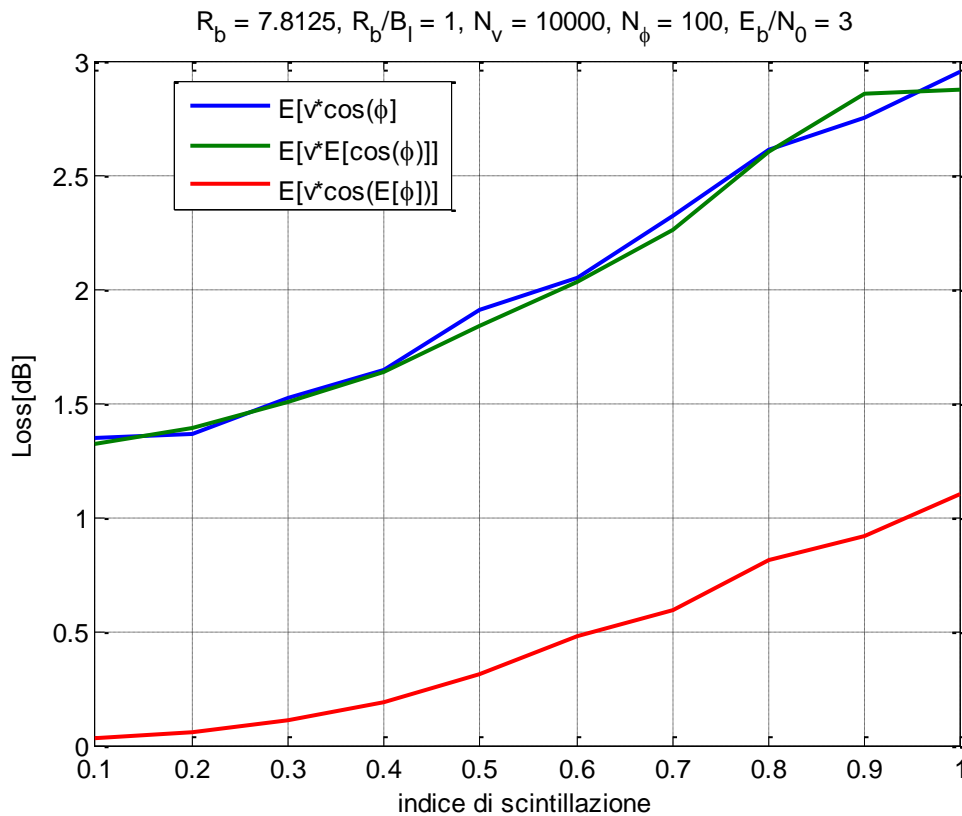


Figura 6.7

6.2.4 VALIDITÀ DEL MODELLO LOW-RATE

L'utilizzo della (6.4) presuppone, come si è detto, l'ergodicità del sistema e cioè che le medie calcolate all'interno di un tempo di bit siano, con buona approssimazione coincidenti con le medie calcolate sull'intero asse dei tempi. E' intuitivo che condizione necessaria allo scopo è che il valore di n definito dalla (6.21), il quale esprime il numero di estrazioni della variabile all'interno del tempo di bit, sia sufficientemente elevato. In questo paragrafo vogliamo fornire un'idea di quanto il valore di n deve essere grande allo scopo.

Un esempio, per $\kappa=10$, è riportato in Figura 6.8. In tale figura si considera il $E[\cos(\phi)]$. L'esperimento è consistito nel calcolare, per ogni valore di n , la media aritmetica dei campioni della variabile estratti. Come ben noto dalla teoria, asintoticamente, cioè per $n \rightarrow \infty$, la media aritmetica restituisce la media statistica. L'esperimento è stato poi ripetuto per 500 realizzazioni diverse.

Come si vede dalla figura, per valori di n bassi la stima della media statistica (vale a dire la media aritmetica) presenta una notevole dispersione intorno al valore medio "vero", che per $\kappa=10$ risulta essere 0.948. Questo valore è stato ottenuto dalla (6.6) il cui andamento viene graficato in Figura 6.9. In essa è possibile vedere che per $\kappa \rightarrow \infty$, ossia quando si tende a una delta di Dirac, la media tende a 1, mentre per valori inferiori, la media decresce fino ad annullarsi.

E' necessario un valore di n dell'ordine di qualche centinaio perché la dispersione diventi relativamente modesta e il valore medio stimato su n campioni restituisca, con accettabile approssimazione, il risultato asintotico. Più in particolare, la Fig. 6.10, in cui il grafico di Fig. 6.8 è stato replicato limitatamente ai valori di n più bassi, conferma che i valori di $n \in [10; 35]$ considerati nella Sezione 6.2.1 non sono sufficienti per ritenere applicabile il modello che conduce alla (6.4). Questo fatto non è sorprendente visto che già in [7] viene detto esplicitamente che l'equazione suddetta è applicabile solo raramente. Il passo successivo, a questo punto, potrebbe comunque consistere nella valutazione dell'errore che si commette utilizzando la (6.4) in luogo del risultato esatto ottenibile tramite simulazione. Questo ulteriore target è lasciato ai lavori successivi.

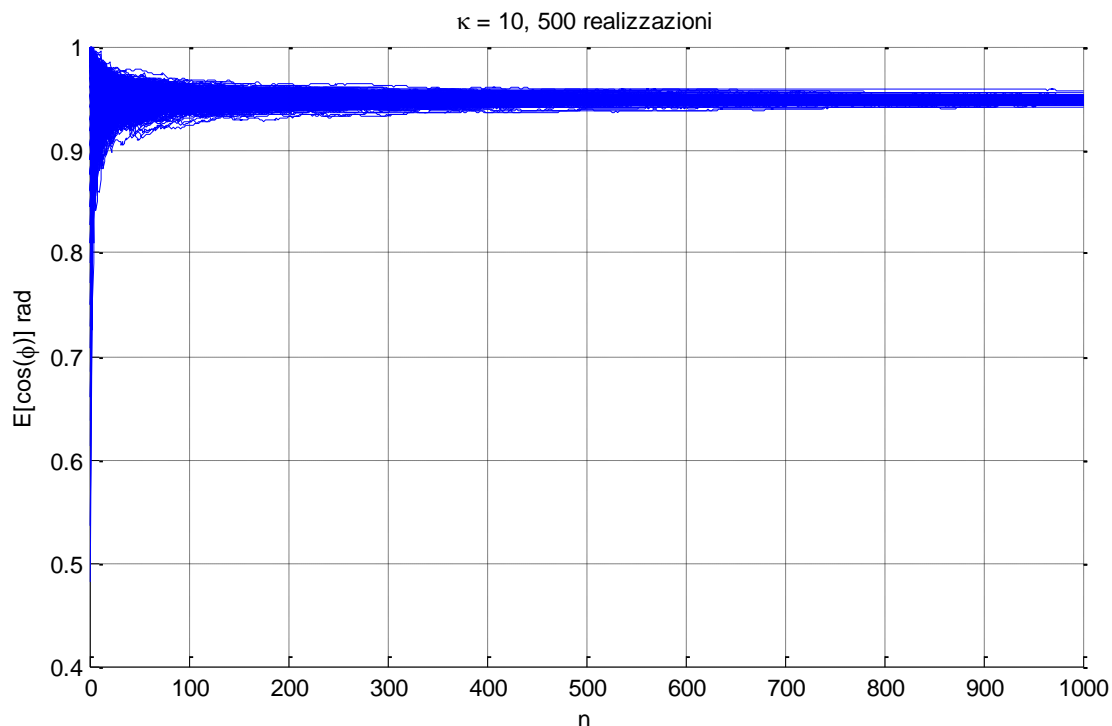


Figura 6.8

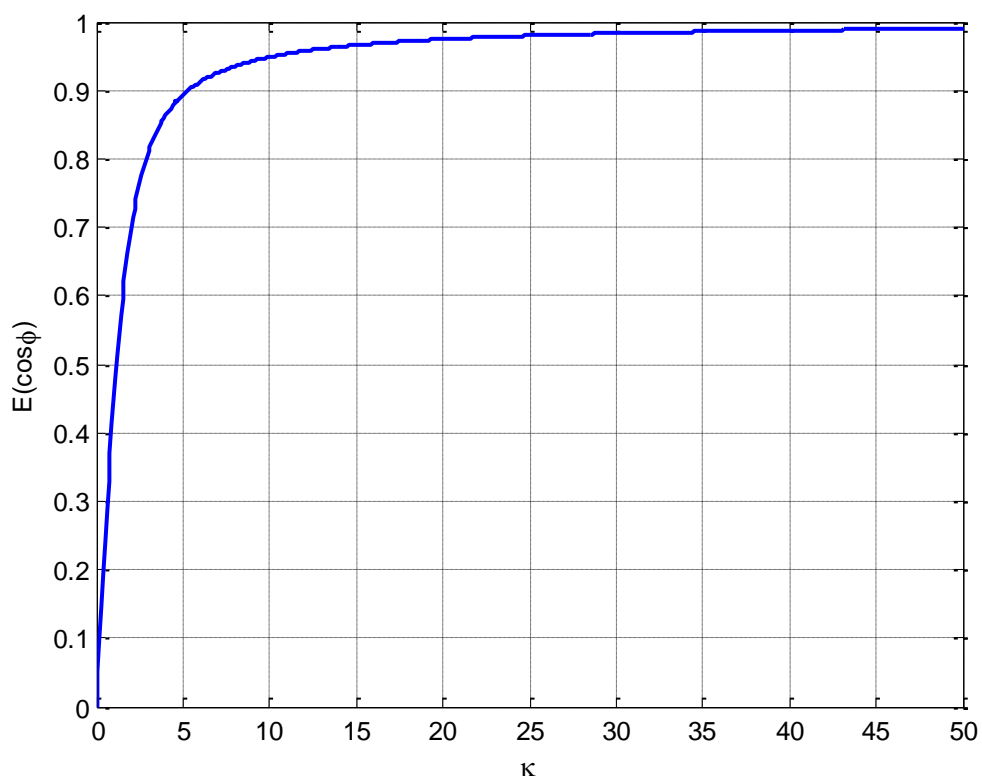


Figura 6.9

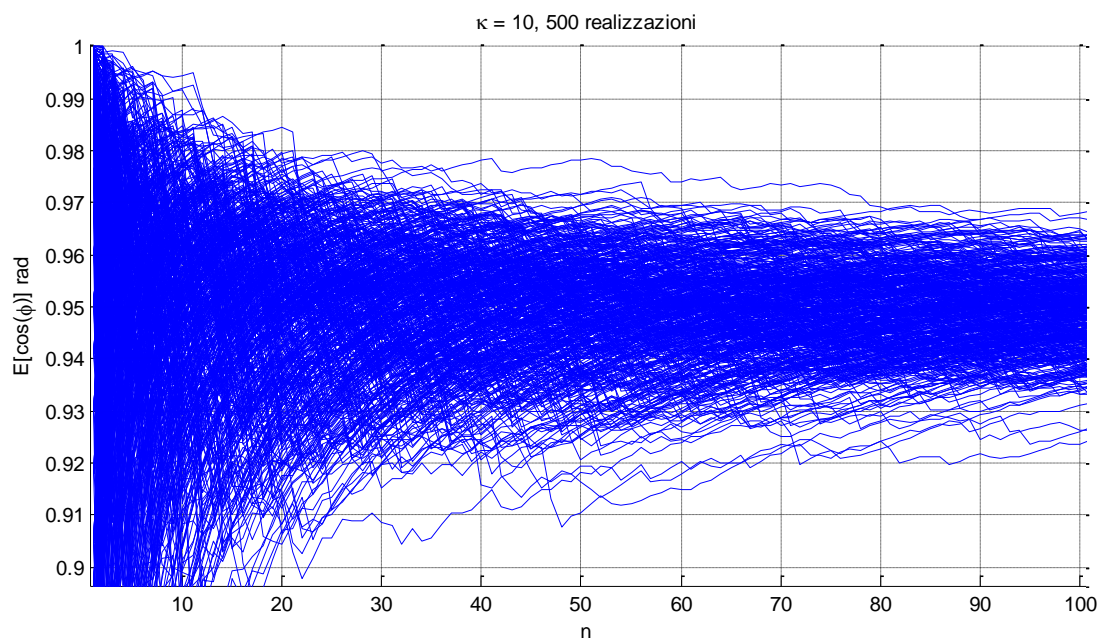


Figura 6.10

7 CONCLUSIONI

La generazione di campioni della variabile di Tikhonov, in modo efficiente e accurato, viene descritto in [5] come un problema non triviale. Ciò è anche

testimoniato dagli ulteriori articoli presenti in letteratura [8 - 12] che trattano appunto la questione in modo approfondito e dettagliato.

Disporre di un software in grado di generare questa variabile diventa fondamentale per poter svolgere simulazioni numeriche in cui l'errore di fase segue tale distribuzione. L'algoritmo qui proposto si basa sul metodo di trasformazione, in cui però la CDF inversa di Tikhonov, non essendo disponibile analiticamente, è stata ottenuta "graficamente" a partire dalla funzione di ripartizione, ossia: estratto un campione di una variabile uniforme tra 0 e 1, si legge, dal grafico della funzione di ripartizione, il valore di ϕ che la determina. Eseguendo poi un confronto tra PDF analitica e simulata, si è verificato che la routine creata fosse corretta e affidabile per valori di κ di interesse. È stato anche fornito un utile paragone tra la distribuzione di Tikhonov e quella normale, attraverso il quale è stato possibile concludere che per $\kappa > 50$ la Gaussiana approssima in modo soddisfacente la ben più complessa variabile di Tikhonov. Il generatore è stato presentato sotto forma di due funzioni Matlab ed è stato successivamente utilizzato per simulazioni del modello di collegamento low-rate. Come si è detto vi sono, tuttavia, ancora margini per migliorare l'analisi di questo modello.

L'utilizzo più interessante del software messo a punto rimane però nel caso medium-rate, in cui non sono disponibili modelli analitici ed è dunque necessario ricorrere a simulazioni numeriche.

Si spera che questo lavoro possa diventare un utile strumento per ulteriori analisi e simulazioni in canali con fading ed errore di fase modellato dalla variabile di Tikhonov, favorendo la ricerca nel settore delle comunicazioni spaziali.

8 BIBLIOGRAFIA

- [1] C.M. Lo, W.H. Lam, Error probability of binary phase shift keying in Nakagami-m fading channel with phase noise, *Electronics Letters* 36 (21), pp. 1773–1774 (2000).
- [2] M.K. Simon, M.S. Alouini, Simplified noisy reference loss evaluation for digital communication in the presence of slow fading and carrier phase error, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 50 (2), pp. 480–486 (2001).
- [3] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, Volume 27 (July and October 1948).
- [4] RESCUe, Reliable TT&C during superior solar conjunctions, Proposal in response to AO/-1-8050/14/F/MOS, Volume 2, Technical Proposal (2014).
- [5] G. T. F. de Abreu, On the generation of Tikhonov variates, *IEEE Transactions on Communications* 56 (7), pp. 1157–1168 (2008).

- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Von Mises distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_distribution)
- [7] P. Kinman, S. Shambayati, L. Tadjpour, and J. Berner, Turbo code performance with imperfect carrier synchronization, Proceedings of the 2004 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT (March 2004).
- [8] J. S. Pannu, Performance Analysis of Tikhonov Distributed Phase Error over Wireless Fading Channels, International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT), Volume 2, no. 5, pp. 292-295 (June 2013).
- [9] D.J. Best, N.I. Fisher, Efficient simulation of the von Mises distribution, Applied Statistics 28 (2), pp. 152–157 (1979).
- [10] L. Barabesi, Random variate generation by using the ratio-of-uniforms method. Technical Report 1-1993, Department of Quantitative Methods, University of Siena, Siena, Italy (1993).
- [11] L. Devroye, Simulating Bessel random variables, Statistics and Probability Letters 57 (3), pp. 249–257 (2002).
- [12] K. V. Mardia, Statistics of directional data, Journal of the Royal Statistical Society: Series B 37, pp. 349–369 (1975).