# 1 Obiettivo

Dimostrare che trasformazioni del tipo:

$$\left[ P_{gt-1} \equiv x \rightarrow P_{gt} \equiv x - k \, , \quad 1 - P_{gt-1} \equiv 1 - x \rightarrow 1 - P_{gt} \equiv 1 - x + k \right]$$

per $x > 0,5$, sono convenienti rispetto a trasformazioni del tipo:

$$\left[ x \rightarrow x + k \, ; \quad 1 - x \rightarrow 1 - x - k \right].$$ con $x \in [0,5; 1] \wedge k [0; 0,5]$

Ovvero che introducono un contributo minore alla funzione di loss (considerando costante la parte relativa al crossentropy Loss)

$$\mathcal{L} = - \left( P_{gt-1} \log(P_{gt}) + (1 - P_{gt-1}) \log(1 - P_{gt}) \right)$$

~~spazio~~

1) $P_{gt-1} : x \longrightarrow P_{gt} : x - k$

$1 - P_{gt-1} : 1 - x \longrightarrow 1 - P_{gt} : 1 - x + k$

2) $P_{gt-1} : x \longrightarrow P_{gt} : x + k$

$1 - P_{gt-1} : 1 - x \longrightarrow 1 - P_{gt} : 1 - x - k$

$$\Delta \mathcal{L}_1 = - \left( x \log(x - k) + (1 - x) \log(1 - x + k) \right) +$$ 2) Loss dopo la trasformazione 1

$$+ \left( x \log(x) + (1 - x) \log(1 - x) \right)$$ 1) Loss nel caso in cui la probabilità non cambiasse

Analogamente:

$$\Delta \mathcal{L}_2 = - \left( x \log(x + k) + (1 - x) \log(1 - x - k) \right) +$$

$$+ \left( x \log(x) + (1 - x) \log(1 - x) \right)$$

Studio quando: $\Delta L_1 < \Delta L_2$

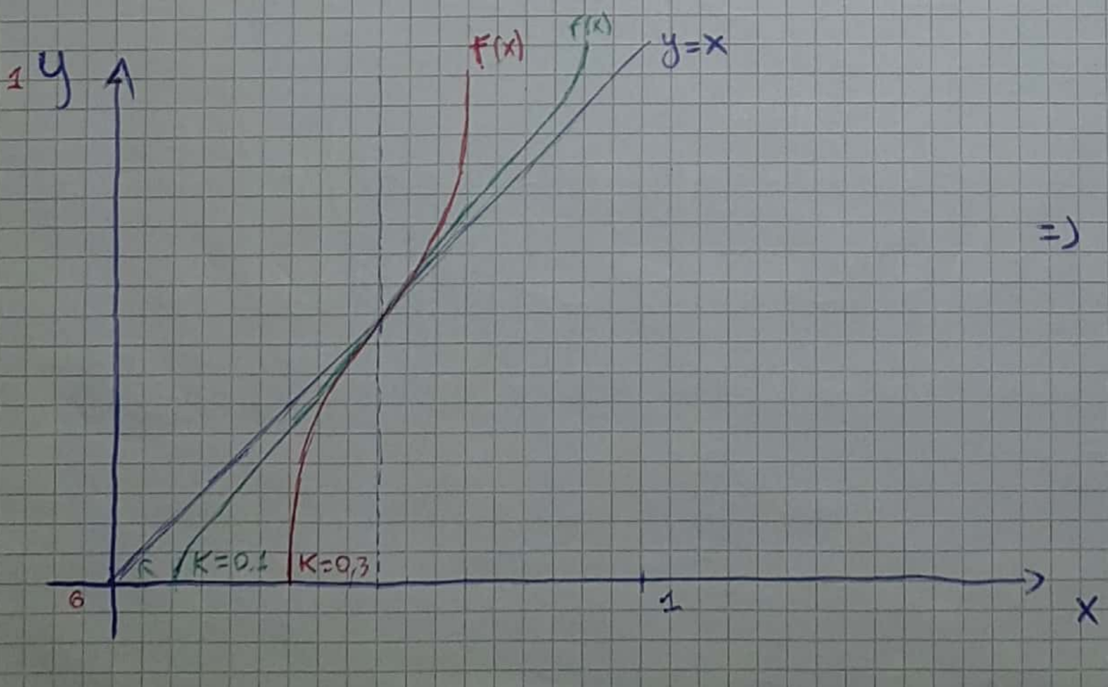
$$-\left(x \log(x-k) + (1-x)\log(1-x+k)\right) >$$
$$-\left(x\log(x+k) + (1-x)\log(1-x-k)\right)$$

L'ALTRO TERMINE SI SEMPLIFICA

$$\Rightarrow \left(x\log(x+k) + (1-x)\log(1-x-k)\right) >$$
$$\left(x\log(x-k) + (1-x)\log(1-x+k)\right)$$

$$\Rightarrow x\left[\log(x+k) - \log(1-x-k) - \log(x-k) + \log(1-x+k)\right]$$
$$> \log(1-x+k) - \log(1-x-k)$$

$$\Rightarrow \quad x > \underbrace{\left[\frac{\log(1-x+k) - \log(1-x-k)}{\log(x+k) - \log(1-x-k) - \log(x-k) + \log(1-x+k)}\right]}_{f(x)}$$




$x > f(x)$

$\Rightarrow$ Quando

$x < 0.5$

Per $x > 0.5$ conviene la trasformaz. 1:

$x \rightarrow x - k$ ✓

~~$x \rightarrow x + k$~~ ✗

2 Consideriamo altre 2 trasformazioni

1) $x \rightarrow x - k$

$1 - x \rightarrow 1 - x + k$

Stessa di prima

2) $x + k \rightarrow x$

$1 - x - k \rightarrow 1 - x$

Per capire se, nel caso di $x > 0.5$ conviene una trasform. che modifichi le probabilità più vicine a 0.5 o le più grandi,

$\Delta L_1$ = Identico a prima

$$\Delta L_2 = -\left((x+k)\log(x) + (1-x-k)\log(1-x)\right) + \left((x+k)\log(x+k) + (1-x-k)\log(1-x-k)\right)$$

$\Rightarrow$ Studio quando $\Delta L_1 > \Delta L_2$ $\Rightarrow$

2 ALTRO FOGLIO

Quando $x < 0.5$

$\Rightarrow \Delta L_1 > \Delta L_2$ se $x < 0.5$, altrimenti $\Delta L_1 < \Delta L_2$

$\Rightarrow$ Conviene, per $x > 0.5$ $x \rightarrow x - k$ piuttosto che $x + k \rightarrow x$.

Mentre, per $x < 0.5$, conviene $x + k \rightarrow x$ piuttosto che $x \rightarrow x - k$.

Ciò dimostra che a parità di contributo dato dalla CROSS ENTROPY LOSS, modificare prima le probabilità più vicine a 0.5, è più conveniente