Calcolo per l'astronomia
Relazione primo esercizio

Studente: Matteo Gavioli
mail: matteo.gavioli2@studio.unibo.it

Matricola: 0000976888

Scopo generale

Lo scopo generale di questo esercizio è ricavare una serie di dati partendo da un set di osservazioni per 70 supernovae. Solamente dalle supernovae che non presentano una curva di luce monotona decrescente dobbiamo ricavare, tramite interpolazione, il giorno giuliano corrispondente al massimo, la magnitudine apparente in banda B al massimo e la magnitudine in banda B 15 giorni dopo il massimo.
Con questi dati dobbiamo poi calcolare la differenza tra la magnitudine osservata dopo 15 giorni e la magnitudine al massimo Δm_{15}, la magnitudine assoluta in banda B, correggere la magnitudine osservata per l'estinzione, calcolare il modulo di distanza μ, calcolare la distanza di luminosità d_L e da questi ricavare la costante di Hubble H_0 per i vari modelli cosmologici.

Presentazione del problema

Le supernovae sono il risultato di un istantaneo rilascio di una grande quantità di energia che accade al termine della vita di alcune stelle. Tale esplosione torna poi gradualmente a diminuire la propria luminosità fino a scomparire nell'oscurità nel giro di poco tempo.
Le supernovae sono classificate in diversi tipi, ma per quanto riguarda questo esercizio consideriamo le supernovae di tipo Ia. Tali eventi accadono quando, una volta superata la massa di Chandrasekhar di 1.4 $M_\odot$, la pressione di degenerazione degli elettroni non è più in grado di controbilanciare la forza gravitazionale. Tale massa può essere superata se:

- In un sistema binario, una nana bianca sta assorbendo materia dalla stella compagna;
- Due nane bianche collidono, fondendosi.

A questo punto avviene la combustione del carbonio, la nana bianca diventa instabile fino a collassare per produrre un'esplosione di un'energia pari a 10^{51} erg.
Data la natura di questi eventi possiamo considerare le supernovae di tipo Ia come candele standard per determinare le distanze nell'universo, il quale sappiamo espandersi seguendo la legge di Hubble-Lemaitre:

$$v = H_0 d \tag{1}$$

Dove v è la velocità di espansione dell'universo, d è la distanza del punto che stiamo osservando e, dato il fattore di scala $a(t)$ che varia nel tempo, H_0 è la costante di Hubble definita come:

$$H_0 = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{2}$$

Quest'ultimo non è costante nel tempo ma, fissato un istante di tempo t, H_0 è costante in qualsiasi punto dell'universo. Dall'equazione (1) abbiamo che le galassie si stanno allontanando le une dalle altre con una velocità proporzionale alla distanza, senza esserci un centro dell'espansione.

Per calcolare la costante di Hubble è necessario conoscere accuratamente le distanze, cosa che possiamo fare grazie alle curve di luce delle supernovae prese in esame. Infatti, da queste siamo in grado di trovare il tempo in cui avviene il massimo, la magnitudine in banda B in corrispondenza del massimo $b_{\max}$ e la magnitudine in banda B 15 giorni dopo il massimo b_{15}. Grazie a queste possiamo poi calcolare la variazione di magnitudine Δm_{15}:

$$\Delta m_{15} = b_{15} - b_{\max} \tag{3}$$

Dobbiamo poi calcolare la magnitudine assoluta tramite la formula:

$$B_{\max} = -19.258 + 0.784(\Delta m_{15} - 1.1) \tag{4}$$

Correggiamo inoltre le magnitudini per l'estinzione, conoscendo l'eccesso di colore $E(B-V)$ e la pendenza di arrossamento R_V:

$$b_{\max,\mathrm{corr}} = b_{\max} - (R_V - 1)E(B-V) \tag{5}$$

Da questo siamo in grado di calcolare il modulo di distanza μ, il quale è legato dalla distanza d in parsec dalla relazione:

$$\mu = b_{\max,\mathrm{corr}} - B_{\max} = -5 + \log(d/\mathrm{pc}) \tag{6}$$

Poiché in cosmologia le distanze dipendono sia dal modello cosmologico assunto e dalla sua geometria, sia dal metodo usato per misurarle, dato che in questo caso abbiamo a che fare con delle magnitudini bisogna utilizzare quella che viene chiamata distanza di luminosità d_L. La relazione di questa distanza dal redshift z è data da:

$$d_L(z) = c(1+z)\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \tag{7}$$

Dove c è la velocità della luce e $H(z)$ è definita come:

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_M(1+z^3) + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_M-\Omega_\Lambda)(1+z)^2} \tag{8}$$

Dove Ω_M e Ω_Λ sono dei parametri che esprimono la dipendenza dalla cosmologia.
Dunque, poiché dal modulo di distanza conosciamo la distanza d_L e siamo a conoscenza del redshift z_{CMB}, siamo in grado di stimare la costante di Hubble H_0 per ogni singola supernova utilizzando la formula inversa di (7):

$$H_0 = \frac{c(1+z_{CMB})}{d_L}\int_0^{z_{CMB}} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z^3) + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_M-\Omega_\Lambda)(1+z)^2}} \tag{9}$$

Per ottenere la stima finale di H_0 è necessario calcolare la media pesata delle costanti delle singole supernovae. Dunque date N diverse stime della costante di Hubble $H_{0,i}$, ognuna con il proprio errore σ_i, la media pesata è data da:

$$H_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{H_{0,i}}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{10}$$

Con l'errore associato alla media pesata che risulta essere:

$$\sigma_{H_0} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}}} \tag{11}$$

Per il calcolo degli errori dobbiamo fare N realizzazioni Monte Carlo per ogni singola curva di luce, in modo da ottenere N valori della costante di Hubble. Dalla distribuzione ottenuta ricaviamo i valori che racchiudono il 68% centrale della distribuzione, facendo la differenza tra l'84-esimo ed il 16-esimo percentile, e li usiamo come stima dell'errore di H_0. I valori ottenuti per i risultati intermedi possono essere usati come errori delle quantità come le magnitudini, il Δm_{15}, il modulo di distanza e la distanza di luminosità.

Dati disponibili

Per questo esercizio abbiamo a disposizione 71 files:

- Il file `newtable2.txt` contiene i dati provenienti da *Burns et al. (2019)*, Tabella 2 nel paper. Al suo interno, le prime 31 righe spiegano il contenuto del file ed il corrispondente formato di lettura. Ogni riga successiva riporta il nome della supernova e le sue proprietà distribuite nelle diverse colonne. In particolare, ai fini dell'esercizio troviamo il redshift z_{CMB}, l'eccesso di colore $E(B-V)$ e la pendenza dell'arrossamento R_V;
- Un set di 70 files, chiamati `SNxxxxxx.dat`, contenenti i dati provenienti da un articolo di *Stritzinger et al. (2011): seconda release the Canergie Supernova Project.* Al loro interno, le prime 5 righe riportano i dati della specifica supernova e spiegano il contenuto delle varie colonne. Ogni riga successiva si riferisce ad una osservazione e riporta, nelle diverse colonne, la data e le magnitudini misurate in 9 bande con i relativi errori. In particolare, per l'esercizio dobbiamo estrarre i dati riguardanti la data delle osservazioni, espressa in giorni giuliani, e le magnitudini misurate in banda B con il relativo errore.

Descrizione degli algoritmi numerici utilizzati

Eliminazione di Gauss

Per risolvere un sistema di `N` equazioni è necessario procedere con l'eliminazione di Gauss. Tale processo è composto da due fasi che sono l'eliminazione in avanti e la sostituzione all'indietro. La prima parte consiste in due cicli, il primo (`DO i=1,N-1`) sceglie la variabile da eliminare mentre il secondo (`DO j=i+1,N`) sceglie la riga su cui eliminare. Per effettuare l'eliminazione, ad una data riga bisogna sostituire se stessa meno la i-esima riga moltiplicata per il fattore `fakt=a(j,i)/a(i,i)`, dove `a` è la matrice costruita per risolvere il sistema. Lo stesso deve essere fatto per il termine noto `c(j)`. Passando alla seconda fase, partiamo dall'ultima equazione per trovare l'ultima soluzione (`x(n)=c(n)/a(n,n)`). Dopo di che bisogna ripetere la stessa cosa all'indietro, dunque con un ciclo `DO=N-1,1,-1`, in modo da avere:

$$x_i = \frac{c_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Interpolazione tramite spline cubica

Per trovare il massimo nelle curve di luce non monotone decrescenti utilizziamo il metodo di interpolazione tramite spline cubica. Dopo aver rimosso i dati mancanti, ovvero quei valori le cui magnitudini corrispondono al valore 99.900, l'implementazione della spline richiede innanzitutto di verificare che le `n+1` date delle osservazioni siano ordinate in ordine crescente. Dopo di che bisogna costruire la matrice tri-diagonale di dimensione `(n+1,n+1)` come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & r_1 & g_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & e_2 & r_2 & g_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & e_{n-2} & r_{n-2} & g_{n-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_{n-1} & r_{n-1} & g_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dove, detta x_i la data di osservazione i-esima, i valori all'interno della matrice sono:

$$e_i = x_i - x_{i-1} \qquad r_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad g_i = x_{i+1} - x_i$$

La matrice (12) deve essere poi inserita nel seguente sistema, avente come incognite le derivate seconde f_i'':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & r_1 & g_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & e_2 & r_2 & g_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & e_{n-2} & r_{n-2} & g_{n-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_{n-1} & r_{n-1} & g_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0'' \\ f_1'' \\ f_2'' \\ \cdot \\ f_{n-2}'' \\ f_{n-1}'' \\ f_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Dove, detta $f(x_i)$ la magnitudine osservata in corrispondenza della data i-esima, il vettore dei termini noti è composto da elementi definiti come segue:

$$c_i = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Una volta risolto il sistema con Gauss e trovato il massimo della magnitudine tra i valori osservati, che ricordiamo corrispondere con il valore più piccolo tra quelli disponibili, per trovare il massimo tramite interpolazione dobbiamo prima dividere l'intervallo tra la data precedente e successiva al massimo osservato in `npoints`, che di default è impostato a `npoints=1000`, sottointervalli, ciascuno rappresentato da un polinomio di terzo grado. Per ogni sottointervallo troviamo l'intervallo di appartenenza tra le date delle osservazioni e applichiamo la seguente formula per ottenere il valore interpolato della magnitudine:

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \\ & + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{14}$$

Per trovare la magnitudine al massimo aggiorniamo il valore appena calcolato solamente se è più piccolo di quello precedentemente registrato come massimo e la corrispettiva data espressa in giorni giuliani. Per trovare invece la magnitudine 15 giorni dopo il massimo si aumenta di 15 il valore della data che è stata salvata, si cerca nuovamente l'intervallo di appartenenza e si applica la formula (14).

Per eseguire il grafico della curva interpolante per alcune supernove è necessario apportare alcune modifiche. Infatti in questo caso viene assunto come intervallo quello tra la prima data di osservazione e la penultima, il quale viene diviso in `npoints` sottointervalli che, in questo caso, sono impostati di default a `npoints=2000`. Dopo di che si applica lo stesso algoritmo usato precedentemente ma ogni valore interpolato e la corrispettiva data vengono salvati per poter poi eseguire il grafico.

Regola di Simpson 1/3

Per trovare la costante di Hubble di ogni supernova dobbiamo prima risolvere l'integrale contenuto nella formula (9). Per farlo utilizziamo la regola di Simpson 1/3, un metodo numerico che ci permette di approssimare il valore dell'integrale come segue:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

Dove f_2 corrisponde ad un polinomio di secondo grado:

$$f_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Quindi, per prima cosa, dobbiamo suddividere l'intervallo d'integrazione in `n` sottointervalli, che di default sono impostati ad `n=1000`. Ogni sottointervallo avrà una lunghezza $h = (b - a)/n$, dove $a = 0$ e $b = z_{CMB}$ sono gli estremi d'integrazione. Così facendo possiamo approssimare il valore dell'integrale con la seguente formula:

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(a+ih) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(a+ih) + f(b) \right] \tag{15}$$

Dove f è la funzione integranda contenuta nell'integrale della funzione (9). Utilizzando questo metodo otteniamo un errore di troncamento:

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f}^{(4)} \tag{16}$$

Metodo di Box-Muller

Per il calcolo degli errori sono state fatte `nran=1000` realizzazioni di Monte Carlo delle curve di luce tramite il metodo di Box Muller. Quest'ultimo permette la generazione di numeri casuali con distribuzione gaussiana di media nulla e varianza unitaria.
Per applicare Box-Muller sono innanzitutto necessari due numeri, x_1 e x_2, distribuiti uniformemente nell'intervallo $[0, 1[$. Generiamo dunque x_1 e x_2 tramite i generatori congruenziali lineari prendendo `jran` un numero intero, chiamato seme, e otteniamo un nuovo `jran=MOD(aran*jran+cran,mran)`, dove `mran=259200`, `cran=54773` e `aran=7141` sono i parametri del generatore. Per ottenere x_1 dividiamo il `jran` appena trovato per `mran`. Per x_2 ripetiamo l'operazione con un seme diverso.
Ottenuti x_1 e x_2, possiamo produrre due distribuzioni gaussiane da cui possiamo calcolare i valori y_1 e y_2 che seguono una distribuzione gaussiana di media nulla e varianza unitaria utilizzando le formule:

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2) \qquad y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2) \tag{17}$$

Per utilizzare i valori ottenuti come errori delle magnitudini delle curve di luce applichiamo la formula:

$$y = \sigma y + \mu \tag{18}$$

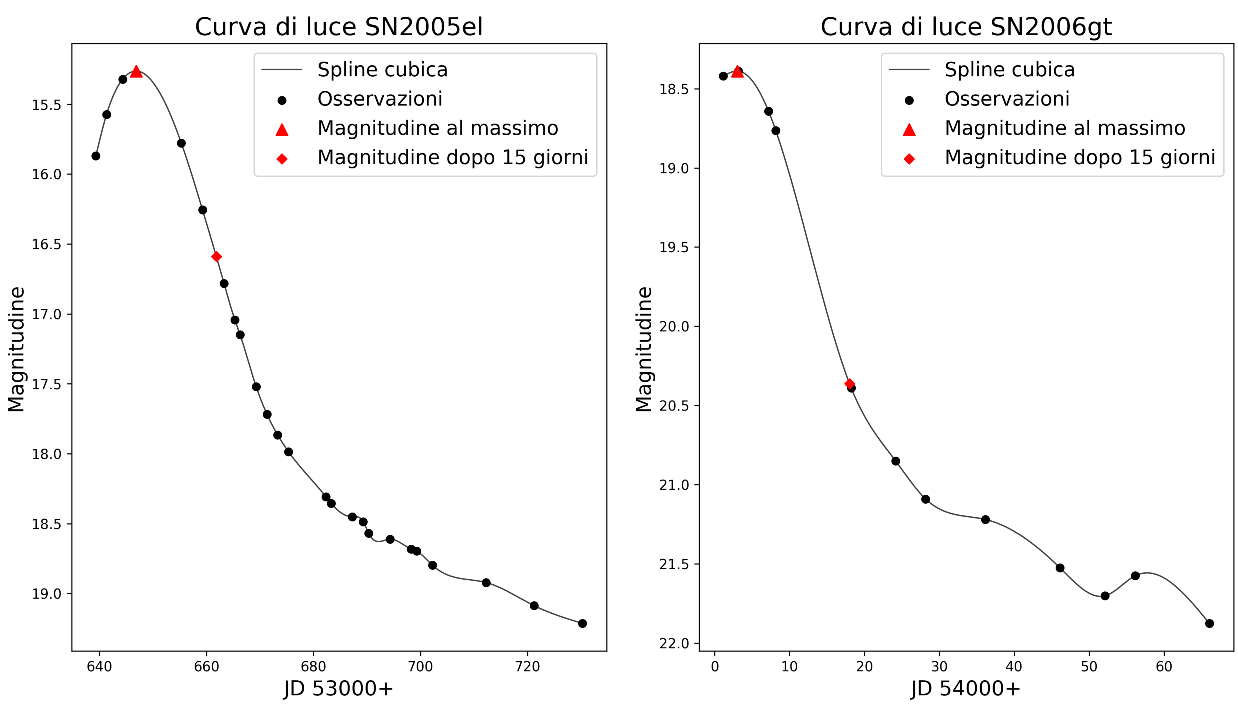
Dove μ è la magnitudine a cui dobbiamo associare l'errore e σ è l'errore associato alla magnitudine osservata. Ripetendo, con i dati generati, le stesse operazioni fatte con i dati reali otteniamo gli errori da associare alle altre quantità.

Risultati ottenuti

Abbiamo scelto l'eliminazione di Gauss per risolvere il sistema della spline poiché è la più conveniente in questo caso. Infatti l'eliminazione di Gauss-Jordan, rispetto a quella usata, richiede di normalizzare le righe all'unità prima di agire su di esse e l'eliminazione della variabile deve essere fatta su tutte le righe, sia sopra che sotto la diagonale principale. Questo si traduce in un maggior tempo di calcolo dovuto al numero di operazioni necessarie per risolvere l'algoritmo. Invece il metodo di Gauss-Seidel è un metodo iterativo approssimato che permette di risolvere sistemi con un gran numero di equazioni ma non è sempre garantita la convergenza sul risultato corretto.

Per trovare il giorno del massimo, la corrispondente magnitudine al massimo e la differenza di magnitudini 15 giorni dopo il massimo abbiamo utilizzato l'interpolazione con spline cubica poiché, rispetto al polinomio di Lagrange, fornisce un andamento più smussato tra i dati.

Riportiamo in Figura 1 alcune curve di luce ottenute tramite interpolazione con la spline.



(a) Curva di luce della supernova SN2005el

(b) Curva di luce della supernova SN2006gt

Figura 1: Curve di luce di alcune supernovae con la magnitudine al massimo e 15 giorni dopo

Riportiamo inoltre le proprietà ed i valori calcolati per le supernovae aventi curve di luce non monotone decrescenti con i relativi errori nella Tabella 1.

Supernovae	z_{CMB}	$JD_{\max}$	$b_{\max}$	b_{15}	Δm_{15}	$B_{\max}$	μ	d_L
SN2004ef	0.02977	53263.8 ± 0.5	17.056 ± 0.010	18.45 ± 0.08	1.39 ± 0.08	-19.03 ± 0.06	35.63 ± 0.06	134 ± 4
SN2004eo	0.01473	53278.5 ± 1.6	15.49 ± 0.03	16.9 ± 0.2	1.4 ± 0.2	-19.00 ± 0.18	34.22 ± 0.17	70 ± 6
SN2004ey	0.01463	53303.5 ± 0.8	15.239 ± 0.011	16.16 ± 0.09	0.92 ± 0.09	-19.40 ± 0.07	34.58 ± 0.07	82 ± 3
SN2004gs	0.0275	53355.7 ± 0.3	17.260 ± 0.018	18.86 ± 0.12	1.60 ± 0.11	-18.87 ± 0.09	35.58 ± 0.09	130 ± 5
SN2005A	0.01834	53379.3 ± 1.6	18.33 ± 0.04	19.5 ± 0.2	1.1 ± 0.2	-19.23 ± 0.16	34.42 ± 0.15	76 ± 5
SN2005M	0.02297	53405.7 ± 0.7	16.009 ± 0.019	16.94 ± 0.09	0.93 ± 0.10	-19.39 ± 0.08	35.24 ± 0.09	111 ± 4
SN2005W	0.00795	53410.98 ± 0.20	14.419 ± 0.012	15.48 ± 0.08	1.06 ± 0.08	-19.29 ± 0.06	33.03 ± 0.06	40.4 ± 1.2
SN2005ag	0.08002	53413.20 ± 0.17	18.54 ± 0.03	19.41 ± 0.08	0.88 ± 0.10	-19.43 ± 0.07	37.89 ± 0.09	379 ± 15
SN2005al	0.01329	53430.1 ± 0.4	15.072 ± 0.010	16.28 ± 0.06	1.21 ± 0.06	-19.17 ± 0.04	34.22 ± 0.05	69.9 ± 1.5
SN2005am	0.00897	53436.4 ± 0.2	13.849 ± 0.006	15.36 ± 0.05	1.51 ± 0.05	-18.94 ± 0.04	32.62 ± 0.04	33.4 ± 0.6
SN2005bo	0.01501	53479.0 ± 0.3	15.840 ± 0.019	17.16 ± 0.12	1.32 ± 0.12	-19.09 ± 0.10	33.86 ± 0.10	59 ± 3
SN2005el	0.01489	53646.85 ± 0.17	15.263 ± 0.019	16.59 ± 0.03	1.33 ± 0.04	-19.08 ± 0.03	34.33 ± 0.05	73.3 ± 1.6
SN2005eq	0.02835	53653.9 ± 0.6	16.57 ± 0.02	17.33 ± 0.07	0.76 ± 0.06	-19.52 ± 0.05	35.72 ± 0.06	139 ± 4
SN2005hc	0.04498	53666.5 ± 0.8	17.391 ± 0.015	18.31 ± 0.14	0.92 ± 0.14	-19.40 ± 0.11	36.67 ± 0.11	215 ± 11
SN2005hj	0.05695	53673.1 ± 0.3	17.849 ± 0.020	18.46 ± 0.10	0.61 ± 0.10	-19.64 ± 0.08	37.43 ± 0.08	306 ± 11
SN2005iq	0.03293	53687.4 ± 1.1	16.837 ± 0.019	18.09 ± 0.16	1.26 ± 0.16	-19.14 ± 0.12	35.88 ± 0.13	150 ± 9
SN2005ir	0.07525	53683.3 ± 1.9	18.51 ± 0.03	19.28 ± 0.19	0.8 ± 0.2	-19.51 ± 0.16	37.79 ± 0.18	361 ± 28
SN2005kc	0.01389	53697.3 ± 0.9	16.035 ± 0.019	17.22 ± 0.11	1.18 ± 0.11	-19.19 ± 0.08	34.22 ± 0.09	70 ± 3
SN2005ki	0.02037	53704.7 ± 0.5	15.69 ± 0.02	16.91 ± 0.08	1.22 ± 0.08	-19.16 ± 0.06	34.81 ± 0.07	92 ± 3
SN2005na	0.02681	53739.6 ± 0.6	16.250 ± 0.018	17.21 ± 0.06	0.96 ± 0.06	-19.36 ± 0.05	35.37 ± 0.05	118 ± 3
SN2006D	0.00964	53757.3 ± 0.4	14.32 ± 0.02	15.73 ± 0.05	1.41 ± 0.06	-19.01 ± 0.05	32.98 ± 0.07	39.4 ± 1.2
SN2006ax	0.01796	53826.1 ± 0.3	15.159 ± 0.017	16.09 ± 0.04	0.93 ± 0.04	-19.39 ± 0.03	34.50 ± 0.03	79.3 ± 1.0
SN2006bh	0.01049	53833.3 ± 0.3	14.441 ± 0.009	15.88 ± 0.05	1.44 ± 0.05	-18.99 ± 0.04	33.34 ± 0.05	46.5 ± 1.0
SN2006et	0.02118	53993.0 ± 0.5	16.025 ± 0.011	16.89 ± 0.05	0.86 ± 0.05	-19.44 ± 0.04	34.68 ± 0.05	86.3 ± 1.8
SN2006gj	0.02775	54000.2 ± 0.3	17.97 ± 0.03	19.69 ± 0.16	1.73 ± 0.16	-18.77 ± 0.13	35.78 ± 0.14	143 ± 9
SN2006gt	0.04364	54003.0 ± 0.5	18.39 ± 0.03	20.4 ± 0.2	2.0 ± 0.2	-18.57 ± 0.16	36.72 ± 0.17	221 ± 17
SN2006hx	0.0444	54025 ± 3	17.77 ± 0.11	19.0 ± 0.4	1.3 ± 0.3	-19.1 ± 0.2	36.15 ± 0.13	170 ± 10
SN2006ob	0.05825	54063.5 ± 0.6	18.36 ± 0.03	19.96 ± 0.12	1.60 ± 0.12	-18.87 ± 0.09	37.04 ± 0.10	256 ± 12
SN2007A	0.01646	54113.3 ± 0.4	15.95 ± 0.02	16.94 ± 0.06	0.99 ± 0.07	-19.35 ± 0.06	34.37 ± 0.08	75 ± 3
SN2007S	0.01502	54143.3 ± 0.7	15.895 ± 0.018	16.69 ± 0.06	0.79 ± 0.07	-19.50 ± 0.05	33.83 ± 0.07	58.3 ± 1.8
SN2007af	0.00629	54173.8 ± 0.8	13.277 ± 0.014	14.43 ± 0.10	1.15 ± 0.10	-19.22 ± 0.08	32.00 ± 0.07	25.1 ± 0.8
SN2007ba	0.03905	54196.8 ± 0.3	17.91 ± 0.03	19.76 ± 0.09	1.85 ± 0.10	-18.67 ± 0.07	36.18 ± 0.09	172 ± 7
SN2007bc	0.02185	54201.2 ± 0.4	16.04 ± 0.03	17.7 ± 0.4	1.6 ± 0.4	-18.8 ± 0.3	34.6 ± 0.3	82 ± 11
SN2007bd	0.03194	54206 ± 2	16.65 ± 0.04	17.7 ± 0.3	1.1 ± 0.2	-19.28 ± 0.18	35.80 ± 0.15	145 ± 10
SN2007ca	0.01507	54226.7 ± 0.7	16.161 ± 0.015	17.03 ± 0.08	0.87 ± 0.08	-19.44 ± 0.06	34.20 ± 0.06	69 ± 2
SN2007jg	0.03658	54366.1 ± 1.1	17.65 ± 0.02	18.87 ± 0.14	1.22 ± 0.15	-19.16 ± 0.12	36.44 ± 0.13	194 ± 12
SN2007jh	0.04026	54365.6 ± 0.7	18.73 ± 0.05	20.8 ± 0.7	2.0 ± 0.7	-18.5 ± 0.5	36.6 ± 0.5	209 ± 51
SN2007le	0.00552	54398.6 ± 1.0	14.009 ± 0.015	14.98 ± 0.11	0.97 ± 0.10	-19.36 ± 0.08	32.26 ± 0.08	28.4 ± 1.0
SN2008R	0.01289	54494.39 ± 0.19	15.529 ± 0.016	17.37 ± 0.03	1.84 ± 0.04	-18.68 ± 0.03	34.13 ± 0.05	67.1 ± 1.4
SN2008fp	0.00629	54729.6 ± 0.3	14.61 ± 0.03	15.45 ± 0.03	0.85 ± 0.03	-19.46 ± 0.02	32.41 ± 0.04	30.3 ± 0.5
SN2008gp	0.03282	54778.4 ± 0.8	16.925 ± 0.019	17.89 ± 0.10	0.97 ± 0.11	-19.36 ± 0.09	36.22 ± 0.10	175 ± 8
SN2008hv	0.01358	54816.4 ± 0.2	14.900 ± 0.017	16.11 ± 0.03	1.21 ± 0.03	-19.17 ± 0.03	34.04 ± 0.03	64.2 ± 1.0

Tabella 1: Tabella contenente il redshift, il giorno del massimo, la magnitudine al massimo, la magnitudine 15 giorni dopo il massimo, la differenza tra le due magnitudini, la magnitudine assoluta al massimo, il modulo di distanza e la distanza di luminosità delle singole supernovae

Possiamo inoltre osservare una forte correlazione tra il modulo di distanza μ ed il logaritmo del redshift z_{CMB} per i dati a nostra disposizione, come riportato in Figura 2.

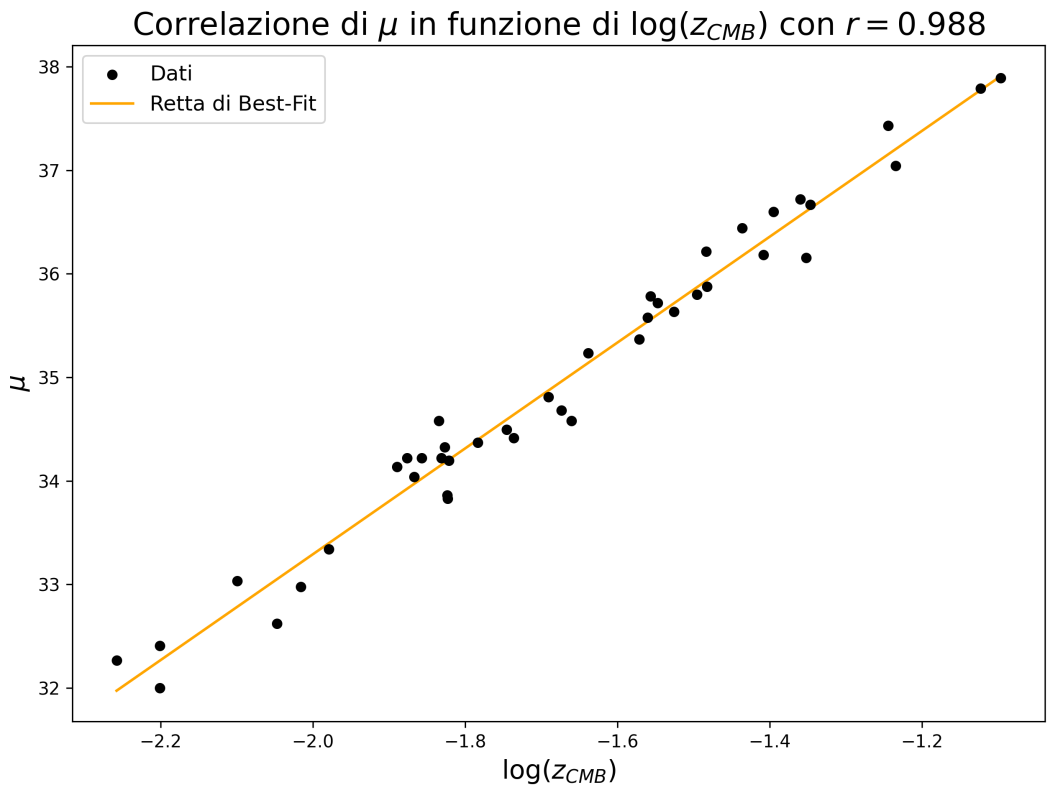


Figura 2: Correlazione tra μ e $\log(z_{CMB})$
con un coefficiente di Pearson $r = 0.988$

Per il calcolo della costante di Hubble abbiamo risolto l'integrale nell'equazione (9) con la regola di Simpson 1/3 perché è un metodo che restituisce comunque risultati esatti per polinomi di terzo grado ed è solo leggermente meno accurato di Simpson 3/8, ma con il vantaggio di un minore numero di operazioni da eseguire. Inoltre è comunque un metodo più accurato di quello del trapezoide che, in confronto con (16), ha come errore di troncamento:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f}^{(2)}$$

Poiché i dati in esame sono a basso redshift, possiamo osservare che la dipendenza cosmologica è molto piccola. Infatti, inserendo nell'integrale le costanti cosmologiche dei relativi modelli che sono:

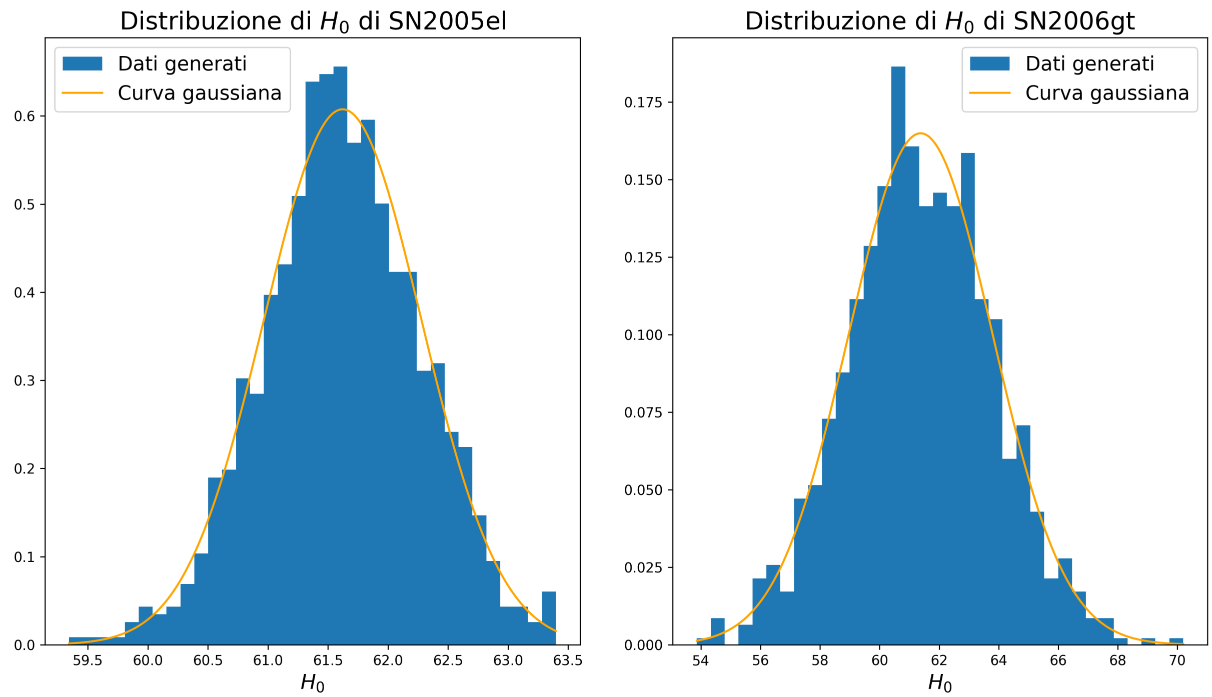
- Modello di riferimento: $\Omega_M = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$
- Modello aperto: $\Omega_M = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0$
- Modello piatto: $\Omega_M = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$
- Modello chiuso: $\Omega_M = 2$ e $\Omega_\Lambda = 0$

osserviamo nella Tabella 2 che i valori calcolati di H_0 per le singole supernovae tra i vari modelli sono molto simili.

Supernovae	H_0	$H_{0,\mathrm{ma}}$	$H_{0,\mathrm{mp}}$	$H_{0,\mathrm{mc}}$
SN2004ef	68 ± 2	68 ± 2	67 ± 2	66.7 ± 2.0
SN2004eo	64 ± 5	64 ± 5	64 ± 5	63 ± 5
SN2004ey	53.8 ± 1.7	53.6 ± 1.7	53.4 ± 1.7	53.2 ± 1.7
SN2004gs	65 ± 3	64 ± 3	64 ± 3	63 ± 3
SN2005A	73 ± 5	73 ± 5	72 ± 5	72 ± 5
SN2005M	63 ± 2	62 ± 2	62 ± 2	62 ± 2
SN2005W	59.3 ± 1.8	59.2 ± 1.8	59.1 ± 1.8	59.0 ± 1.8
SN2005ag	67 ± 3	65 ± 3	65 ± 3	63 ± 3
SN2005al	57.6 ± 1.2	57.3 ± 1.2	57.2 ± 1.2	57.0 ± 1.2
SN2005am	81.0 ± 1.5	80.7 ± 1.5	80.6 ± 1.5	80.4 ± 1.5
SN2005bo	77 ± 4	76 ± 4	76 ± 4	76 ± 4
SN2005el	61.6 ± 1.3	61.3 ± 1.3	61.1 ± 1.3	60.9 ± 1.3
SN2005eq	62.4 ± 1.6	61.8 ± 1.6	61.5 ± 1.6	61.1 ± 1.6
SN2005hc	65 ± 3	64 ± 3	63 ± 3	63 ± 3
SN2005hj	58 ± 2	57 ± 2	57 ± 2	56 ± 2
SN2005iq	68 ± 4	67 ± 4	66 ± 4	66 ± 4
SN2005ir	66 ± 6	64 ± 5	64 ± 5	63 ± 5
SN2005kc	60 ± 2	60 ± 2	60 ± 2	60 ± 2
SN2005ki	68 ± 2	67 ± 2	67 ± 2	67 ± 2
SN2005na	69.3 ± 1.8	68.7 ± 1.7	68.4 ± 1.7	67.9 ± 1.7
SN2006D	74 ± 2	74 ± 2	74 ± 2	73 ± 2
SN2006ax	68.8 ± 0.9	68.4 ± 0.9	68.2 ± 0.9	67.9 ± 0.9
SN2006bh	68.1 ± 1.5	67.9 ± 1.5	67.8 ± 1.5	67.6 ± 1.5
SN2006et	74.7 ± 1.6	74.2 ± 1.6	73.9 ± 1.6	73.5 ± 1.6
SN2006gj	59 ± 4	59 ± 4	58 ± 4	58 ± 4
SN2006gt	61 ± 5	60 ± 5	60 ± 5	59 ± 5
SN2006hx	81 ± 5	80 ± 5	79 ± 5	78 ± 5
SN2006ob	71 ± 3	70 ± 3	69 ± 3	68 ± 3
SN2007A	67 ± 2	66 ± 2	66 ± 2	66 ± 2
SN2007S	78 ± 2	78 ± 2	78 ± 2	77 ± 2
SN2007af	75 ± 3	75 ± 3	75 ± 3	75 ± 3
SN2007ba	70 ± 3	69 ± 3	69 ± 3	68 ± 3
SN2007bc	81 ± 11	80 ± 11	80 ± 11	80 ± 11
SN2007bd	68 ± 5	67 ± 5	67 ± 5	66 ± 5
SN2007ca	66.2 ± 2.0	65.8 ± 2.0	65.7 ± 2.0	65.4 ± 2.0
SN2007jg	58 ± 4	57 ± 3	57 ± 3	56 ± 3
SN2007jh	60 ± 15	59 ± 14	58 ± 14	58 ± 14
SN2007le	59 ± 2	58 ± 2	58 ± 2	58 ± 2
SN2008R	58.2 ± 1.2	57.9 ± 1.2	57.8 ± 1.2	57.6 ± 1.2
SN2008fp	62.5 ± 1.0	62.4 ± 1.0	62.3 ± 1.0	62.2 ± 1.0
SN2008gp	58 ± 3	57 ± 3	57 ± 3	56 ± 3
SN2008hv	64.1 ± 1.0	63.8 ± 1.0	63.6 ± 1.0	63.4 ± 1.0

Tabella 2: Tabella contenente i valori ed i relativi errori della costante di Hubble per il modello di riferimento, per il modello aperto, per il modello piatto e per il modello chiuso delle singole supernovae

Per il calcolo degli errori delle costanti di Hubble, ma anche di tutti gli altri valori, è stato usato il metodo di Box-Muller anziché il metodo della rejection poiché, mentre quest'ultimo è in grado di generare numeri seguendo una distribuzione arbitraria, Box-Muller è un metodo pensato proprio per la generazioni di numeri che seguono una distribuzione gaussiana. In particolare, in Figura 3 è mostrata la distribuzione degli H_0 generati che segue proprio la forma a campana tipica della gaussiana.



(a) Distribuzione di H_0 della supernova SN2005el (b) Distribuzione di H_0 della supernova SN2006gt

Figura 3: Distribuzione dei dati generati con distribuzione gaussiana aventi media H_0 delle singole supernovae

Per la stima della costante di Hubble è stata usata la media pesata in modo che i valori discrepanti non influiscano negativamente, dunque per i vari modelli abbiamo ottenuto i seguenti valori:

- Modello di riferimento: $H_0 = 65.2 \pm 0.3$
- Modello aperto: $H_0 = 64.8 \pm 0.3$
- Modello piatto: $H_0 = 64.6 \pm 0.3$
- Modello chiuso: $H_0 = 64.3 \pm 0.3$

che si avvicinano alla stima di $H_{0,CMB} = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.