Trattazione Teorica della Dinamica dei Fluidi e Aerodinamica Applicata per Missili Supersonici

Documentazione Tecnica di Simulazione

26 gennaio 2026

Indice

1 Introduzione

Il presente documento illustra lo sviluppo e l'analisi fisico-matematica di un ambiente di simulazione a 3 Gradi di Libertà (3-DOF) per un missile intercettore a corto raggio.

Mentre i modelli cinematici tradizionali si limitano a descrivere il moto geometrico assumendo prestazioni ideali, questo lavoro si propone di colmare il divario con la realtà fisica attraverso un approccio **semi-empirico non lineare**. La simulazione non considera il missile come un punto materiale a massa costante, ma come un sistema dinamico complesso soggetto a vincoli termodinamici, aerodinamici e propulsivi variabili nel tempo.

In particolare, il modello integra tre domini fisici fondamentali:

1. **Aerodinamica Comprimibile:** Abbandonando l'ipotesi di coefficienti costanti, si analizza l'interazione tra il corpo del missile e il fluido circostante tenendo conto delle variazioni termodinamiche dell'atmosfera (modello ISA), degli effetti di compressibilità nei regimi transonico e supersonico, e della degradazione delle prestazioni dovuta alla saturazione della portanza (stallo) e alla resistenza indotta (polare aerodinamica).

2. **Propulsione a Massa Variabile:** Si implementa l'equazione del razzo estesa, considerando la variazione del centro di massa e l'efficienza del propulsore (I_{sp}) in funzione della contropressione atmosferica locale.

3. **Guida e Controllo:** Il sistema è governato da una legge di Navigazione Proporzionale (PN) realistica, soggetta a saturazione strutturale (G-Limiter) e ritardi di attuazione.

L'obiettivo finale è calcolare, istante per istante, il bilancio vettoriale delle forze (Spinta, Gravità, Portanza e Resistenza) per determinare con elevata fedeltà l'inviluppo di volo operativo e la probabilità di intercettazione (P_k) in scenari tattici realistici.

2 Cinematica Relativa e Geometria di Ingaggio

Per intercettare un bersaglio, è fondamentale definire le quantità vettoriali nel riferimento inerziale. Questo approccio permette di disaccoppiare il movimento del missile da quello del bersaglio fino al calcolo dell'errore di puntamento.

Siano $\vec{P}_M$ e $\vec{P}_T$ i vettori posizione rispettivamente del missile e del target nello spazio cartesiano 3D.

2.1 Vettore Linea di Vista (LOS)

Il vettore **Linea di Vista** (Line of Sight, LOS), indicato con $\vec{r}$, rappresenta la distanza relativa vettoriale istantanea tra i due oggetti:

$$\vec{r} = \vec{P}_T - \vec{P}_M = \begin{bmatrix} x_T - x_M \\ y_T - y_M \\ z_T - z_M \end{bmatrix} \tag{1}$$

Questo vettore è fondamentale perché definisce la "corda" ideale che collega l'intercettore alla minaccia.

2.2 Distanza Scalare (Range)

La distanza scalare R (Slant Range), ovvero la norma euclidea del vettore differenza, rappresenta la distanza fisica che il missile deve colmare:

$$R = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2 + (z_T - z_M)^2} \tag{2}$$

2.3 Versore di Puntamentto ($\hat{u}_{\text{LOS}}$)

Per determinare la direzione pura verso il bersaglio, indipendentemente dalla distanza, normalizziamo il vettore $\vec{r}$. Si ottiene così il versore unitario di puntamento $\hat{u}_{\text{LOS}}$, essenziale per calcolare gli angoli di aspetto e l'errore di guida:

$$\hat{u}_{\text{LOS}} = \frac{\vec{r}}{R} \tag{3}$$

L'algoritmo di guida utilizzerà successivamente la derivata temporale di questo versore ($\dot{\hat{u}}_{\text{LOS}}$) per determinare la velocità di rotazione della linea di vista, parametro chiave per la Navigazione Proporzionale.

3 Dinamica a Massa Variabile e Propulsione Adattiva

A differenza dei modelli a cinematica semplice, la simulazione gestisce la variazione di massa e inerzia del missile in modo dinamico. Il modello di propulsione non segue un profilo di combustione predeterminato a tempo fisso, ma integra un consumo di propellente variabile dipendente dalle condizioni operative (in particolare dalla limitazione termica).

Definiamo m_{dry} come la massa a vuoto del missile e $m_{\text{fuel}}(t)$ come la massa istantanea del propellente residuo.

3.1 Rateo di Combustione Modulato

Il consumo di propellente non è costante. Esso dipende dal rateo di flusso massico nominale del motore ($\dot{m}_{\text{max}}$) e dal fattore di parzializzazione della spinta $\eta(t)$ (Throttle), calcolato dal sistema di protezione termica (vedi Sez. 2.2).

L'equazione differenziale che descrive la variazione di massa del carburante è:

$$\frac{dm_{\text{fuel}}}{dt} = -\dot{m}_{\text{max}} \cdot \eta(t) \quad [\text{kg/s}] \tag{4}$$

Dove:

- $\dot{m}_{\text{max}}$ è il consumo specifico del motore alla massima potenza (Throttle 100%).
- $\eta(t) \in [0, 1]$ è il fattore di modulazione della spinta.

3.2 Massa Istantanea e Integrazione

La massa totale del missile al tempo t non è calcolabile analiticamente con una funzione lineare, ma è il risultato dell'integrazione numerica del consumo durante la storia del volo:

$$m(t) = m_{\text{dry}} + m_{\text{fuel},0} - \int_0^t \dot{m}_{\text{max}}, \eta(\tau), d\tau \tag{5}$$

Questa formulazione implica che la durata della fase propulsiva (t_{burn}) non è fissa. Se il missile è costretto a ridurre la spinta per limitare il riscaldamento aerodinamico ($\eta < 1$), il consumo di carburante diminuisce, estendendo la durata operativa del motore e aumentando la gittata efficace.

3.3 Fase Balistica (Coast)

La condizione di spegnimento del motore (Burn-out) si verifica quando la massa del propellente si annulla:

$$m_{\text{fuel}}(t) \leq 0 \implies F_{\text{thrust}} = 0 \tag{6}$$

Da questo istante in poi, la massa del sistema rimane costante e pari alla sola massa strutturale ($m(t) = m_{\text{dry}}$), e il missile prosegue il volo in fase puramente balistica dissipando energia cinetica contro la resistenza aerodinamica.

4 Legge di Guida: Navigazione Proporzionale (PN)

Il sistema di guida e controllo (G&C) del missile è governato dall'algoritmo di **Navigazione Proporzionale (Pro-Nav)**. Questo è lo standard industriale per i missili intercettori a corto raggio (come la serie AIM-9 Sidewinder).

Il principio fisico fondamentale è quello della *Rotta di Collisione a Rilevamento Costante* (Constant Bearing Course):

> *"Se due oggetti si muovono nello spazio e la linea che li congiunge non ruota mentre la distanza tra loro diminuisce, la collisione è geometricamente inevitabile."*

L'obiettivo dell'algoritmo è annullare la velocità di rotazione della Linea di Vista (LOS Rate), trasformando la traiettoria del missile in una rotta di intercettazione ottimale.

4.1 Analisi della Velocità di Chiusura (V_c)

Definiamo il vettore velocità relativa $\vec{V}_{\text{rel}}$ come la differenza tra la velocità del bersaglio e quella del missile:

$$\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_T - \vec{V}_M \tag{7}$$

La **Velocità di Chiusura** (V_c, Closing Speed) rappresenta la rapidità con cui il missile si avvicina al bersaglio lungo la linea di vista. Matematicamente, è la proiezione cambiata di segno della velocità relativa sul versore di puntamento $\hat{u}_{\text{LOS}}$:

$$V_c = -(\vec{V}_{\text{rel}} \cdot \hat{u}_{\text{LOS}}) = -\frac{dR}{dt} \tag{8}$$

- Se $V_c > 0$: La distanza sta diminuendo (avvicinamento).
- Se $V_c < 0$: Il bersaglio si sta allontanando.

Nella formula di guida, V_c agisce come un fattore di scala dinamico: più l'avvicinamento è veloce, più aggressiva deve essere la manovra per correggere piccoli errori angolari.

4.2 Rateo di Rotazione della LOS ($\vec{\Omega}$)

Il parametro critico per la guida è la velocità angolare del vettore distanza $\vec{r}$. In cinematica vettoriale, la rotazione di un vettore posizionale è data dalla componente della velocità relativa perpendicolare al raggio, divisa per il raggio stesso.

Il vettore velocità angolare $\vec{\Omega}$ (LOS Rate) si calcola tramite il prodotto vettoriale:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{V}_{\text{rel}}}{\|\vec{r}\|^2} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{9}$$

Fisicamente, $\vec{\Omega}$ è un vettore assiale perpendicolare al piano di ingaggio (il piano formato da missile, target e velocità relativa). Il suo modulo indica quanto velocemente il bersaglio sta "sfuggendo" alla mira del missile.

4.3 Equazione del Comando di Accelerazione

La legge di Navigazione Proporzionale comanda un'accelerazione laterale $\vec{a}_{\text{cmd}}$ che tende ad annullare $\vec{\Omega}$. L'accelerazione deve essere applicata perpendicolarmente alla Linea di Vista per modificare la traiettoria nel modo più efficiente possibile.

L'equazione vettoriale implementata è:

$$\vec{a}_{\text{cmd}} = N \cdot V_c \cdot (\vec{\Omega} \times \hat{u}_{\text{LOS}}) \tag{10}$$

Dove:

- $\vec{\Omega} \times \hat{u}_{\text{LOS}}$: Genera un vettore direzione perpendicolare alla LOS, che giace nel piano di ingaggio, opponendosi al movimento del target.

- N: **Costante di Navigazione** (Guadagno effettivo). È un parametro adimensionale, tipicamente impostato tra 3.0 e 5.0.
  - $N < 3$: La guida è "pigra", il missile insegue il bersaglio da dietro (Pure Pursuit) e rischia di non raggiungerlo.
  - $N > 5$: La guida è troppo reattiva, amplificando il rumore dei sensori e rischiando instabilità.

5 Modello Atmosferico e Termodinamico

Il missile opera in un dominio variabile che si estende dal livello del mare fino alla stratosfera ($0\,\text{m} < h < 15\,000\,\text{m}$). In questo intervallo, le proprietà del fluido non sono costanti, ma variano drasticamente influenzando la resistenza, la spinta e la stabilità. La simulazione adotta il modello *International Standard Atmosphere* (ISA) per determinare le variabili di stato puntuali.

5.1 Formula Barometrica e Profilo di Densità

La densità dell'aria ρ è il fattore di scala principale per tutte le forze aerodinamiche. Assumendo l'aria come un gas ideale in equilibrio idrostatico ($\frac{dP}{dh} = -\rho g$), il modello implementa la legge di decadimento esponenziale basata sull'altezza di scala (H_s):

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_s}} \tag{11}$$

Dove:

- $\rho_0 = 1.225\,\text{kg/m}^3$ (Densità al livello del mare).
- $H_s = \frac{R_{\text{spec}} T_{\text{med}}}{g} \approx 8500\,\text{m}$ (Scale Height).

Implicazione Fisica: L'altezza di scala H_s rappresenta la quota alla quale la pressione scende di un fattore $1/e$. A $10\,000\,\text{m}$ di quota, la densità è circa un terzo di quella al suolo: ciò implica che, per generare la stessa forza di virata (Lift) disponibile al decollo, il missile deve viaggiare molto più velocemente o aumentare drasticamente l'angolo di attacco.

5.2 Gradiente Termico Verticale

La temperatura è la variabile indipendente primaria nel modello atmosferico standard, da cui derivano tutte le altre proprietà termodinamiche (pressione e densità). Nella troposfera, l'aria non è un mezzo isotermo; la temperatura statica $T(h)$ decresce linearmente con l'aumentare della quota secondo il *Lapse Rate* adiabatico standard:

$$T(h) = T_0 - \lambda \cdot h \tag{12}$$

Dove:

- $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$ (Temperatura standard a livello del mare, $15\,^{\circ}\mathrm{C}$).
- $\lambda = 0.0065\,\mathrm{K/m}$ (Gradiente termico verticale).
- h è l'altitudine attuale in metri.

Questa diminuzione di temperatura è fondamentale per la simulazione perché influenza direttamente la velocità locale del suono (a) e, di conseguenza, il numero di Mach a parità di velocità inerziale del missile.

5.3 Celerità del Suono e Numero di Mach

La velocità di propagazione delle onde di pressione (suono) dipende dall'agitazione termica molecolare. In un gas biatomico perfetto come l'aria ($\gamma = 1.4$), la velocità del suono locale $a(h)$ è:

$$a(h) = \sqrt{\gamma \cdot R_{\text{spec}} \cdot T(h)} \approx 20.05\sqrt{T(h)} \tag{13}$$

Il regime di volo aerodinamico è definito dal parametro adimensionale di similitudine, il **Numero di Mach** (M):

$$M = \frac{V_{\text{missile}}}{a(h)} \tag{14}$$

Poiché $T(h)$ diminuisce con la quota, anche $a(h)$ diminuisce. *Esempio:* Una velocità di $300\,\mathrm{m/s}$ corrisponde a $M = 0.88$ (Transonico) al livello del mare ($a \approx 340\,\mathrm{m/s}$), ma diventa $M = 1.01$ (Supersonico) a $11\,000\,\mathrm{m}$ ($a \approx 295\,\mathrm{m/s}$). Il simulatore cattura questo fenomeno, attivando le correzioni di *Wave Drag* anche a velocità inerziali costanti.

5.4 Pressione locale Dinamica (q)

La sintesi di densità e velocità confluisce nella **Pressione Dinamica** (q), che rappresenta l'energia cinetica per unità di volume del flusso incidente:

$$q = \frac{1}{2}\rho(h)V^2 \tag{15}$$

Questa grandezza agisce come "moltiplicatore di forza" per l'intero sistema.

- **Resistenza:** $D = q \cdot S \cdot C_D$
- **Portanza:** $L = q \cdot S \cdot C_L$

Se q scende sotto una soglia critica (es. volo lento in alta stratosfera), le superfici di controllo perdono autorità e il missile non è più in grado di manovrare, indipendentemente dalla volontà del sistema di guida.

5.5 Temperatura di Ristagno e Riscaldamento Aerodinamico

Mentre la temperatura statica $T(h)$ diminuisce con la quota, la temperatura termodinamica percepita dalla superficie del missile aumenta drasticamente all'aumentare della velocità. Quando il flusso d'aria supersonico impatta contro il punto di ristagno (il *nose cone* o i bordi d'attacco delle alette), la sua energia cinetica viene quasi interamente convertita in energia interna (entalpia), generando un forte riscaldamento.

La massima temperatura teorica raggiungibile dal fluido arrestato è definita **Temperatura di Ristagno** (T_t), calcolabile per un gas ideale in flusso adiabatico come:

$$T_t = T(h) \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \tag{16}$$

Dove:

- $T(h)$ è la temperatura statica alla quota di volo (definita nell'Eq. 1).
- M è il numero di Mach di volo (v/a).
- $\gamma = 1.4$ è l'indice adiabatico (rapporto tra calori specifici c_p/c_v per l'aria).

5.5.1 Controllo Proattivo della Temperatura (Soft Limiter)

È evidente come la dipendenza da M^2 renda il riscaldamento il fattore limitante principale per voli ad alta velocità supersonica. Questa relazione impone un vincolo operativo critico: per evitare il cedimento strutturale, il sistema di controllo deve limitare la spinta affinché la temperatura di parete non superi la temperatura critica del materiale (T_{max}):

$$T_{aw} \leq T_{max} \tag{17}$$

Nella simulazione, se T_{aw} supera T_{max}, viene attivata una logica di *Soft Limiter* che riduce la spinta del motore per diminuire il numero di Mach e, conseguentemente, il carico termico. A causa dell'inerzia dinamica del missile, il taglio istantaneo della spinta non arresta immediatamente l'aumento di temperatura, portando a fenomeni di *overshoot* termico che compromettono la struttura.

Per risolvere il problema, è stato implementato un algoritmo di controllo proporzionale che agisce preventivamente. Viene definito un margine di sicurezza ΔT_{margin} (nel codice impostato a 50 K) che crea una zona di transizione prima del limite critico.

Il coefficiente di modulazione della spinta η (compreso tra 0 e 1) è calcolato secondo la seguente funzione a tratti:

$$\eta(T_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } T_t < (T_{max} - \Delta T_{margin}) \\ 1 - \frac{T_t - (T_{max} - \Delta T_{margin})}{\Delta T_{margin}} & \text{se } (T_{max} - \Delta T_{margin}) \leq T_t \leq T_{max} \\ 0 & \text{se } T_t > T_{max} \end{cases} \tag{18}$$

In questo modo, la spinta effettiva F_{thrust} viene ridotta linearmente man mano che la temperatura di ristagno entra nella "zona gialla", annullandosi dolcemente al raggiungimento esatto di T_{max}. Questo approccio garantisce che la velocità si stabilizzi asintoticamente al valore massimo sostenibile, eliminando i picchi di temperatura.

6 Propulsione Razzo

Il sistema propulsivo di un missile non è un attuatore a forza costante. La fisica della gasdinamica negli ugelli supersonici detta che le prestazioni del motore migliorino sensibilmente al diminuire della pressione atmosferica esterna. La simulazione implementa questo fenomeno, noto come variazione dell'Impulso Specifico (I_{sp}) con la quota.

6.1 Calcolo della Pressione Locale (P_{atm})

Per determinare l'interazione tra i gas di scarico e l'ambiente, è necessario conoscere la pressione statica locale $P_{atm}(h)$. Utilizzando l'Equazione di Stato dei Gas Perfetti e le variabili termodinamiche derivate dal modello atmosferico (Densità ρ e Temperatura T):

$$P_{atm}(h) = \rho(h) \cdot R_{\text{spec}} \cdot T(h) \tag{19}$$

Dove $R_{\text{spec}} \approx 287.05\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$ è la costante specifica dell'aria secca. Questa pressione agisce come una forza frenante sulla sezione di uscita dell'ugello.

6.2 Teoria della Spinta Endoreattore

La spinta totale F generata da un motore a razzo è la somma di due componenti distinti: la spinta dinamica (derivante dall'espulsione di massa) e la spinta statica (derivante dalla differenza di pressione). L'equazione fondamentale è:

$$F = \underbrace{\dot{m} v_e}_{\text{Spinta di Impulso}} + \underbrace{(P_e - P_{atm}) A_e}_{\text{Spinta di Pressione}} \tag{20}$$

Dove:

- $\dot{m}$: Portata massica del propellente (kg/s).
- v_e: Velocità di egresso dei gas rispetto all'ugello.
- P_e: Pressione dei gas all'uscita dell'ugello.
- A_e: Area della sezione di uscita dell'ugello (`AREA_UGELLO`).

6.3 3.3 Il "Bonus" di Spinta nel Vuoto

Il termine di pressione $(P_e - P_{atm})A_e$ rivela il comportamento fisico del motore al variare della quota:

- **Al livello del mare ($P_{atm} = P_{sl}$):** L'atmosfera esercita una forte contropressione sull'ugello, riducendo la spinta netta.
- **Nel vuoto ($P_{atm} \to 0$):** Il termine negativo svanisce. Il motore opera alla massima efficienza possibile (Vacuum Thrust).

Nel codice, assumiamo che il valore nominale di spinta fornito (F_{sl}) sia calibrato al livello del mare. La spinta reale alla quota h viene calcolata aggiungendo un termine correttivo ("Bonus") pari alla differenza di pressione che *non* sta più frenando il motore rispetto alla condizione al mare:

$$F_{\text{totale}}(h) = F_{sl} + \underbrace{(P_{sl} - P_{atm}(h)) \cdot A_e}_{\text{Spinta Bonus}} \tag{21}$$

Interpretazione Fisica: Man mano che il missile ascende, è come se un "tappo invisibile" (l'atmosfera) venisse gradualmente rimosso dall'ugello di scarico. A quote elevate ($\sim 10\,000\,\text{m}$), dove $P_{atm} \approx 0.26 P_{sl}$, il guadagno di spinta è significativo:

$$\Delta F \approx (101\,325\,\text{Pa} - 26\,500\,\text{Pa}) \cdot A_e = 74\,825\,\text{Pa} \cdot A_e \tag{22}$$

Per un ugello tipico da missile ($A_e \approx 0.0045\,\text{m}^2$), ciò si traduce in circa 330 N di spinta extra "gratuita", che contribuisce a mantenere un'alta energia cinetica nella fase terminale dell'intercettazione.

7 Effetti di Compressibilità e Modellazione del Drag Aerodinamico

Nel volo ad alta velocità, il comportamento aerodinamico del missile è fortemente influenzato dagli effetti di compressibilità del fluido circostante. In particolare, l'avvicinamento alla barriera del suono segna una transizione critica, in cui le ipotesi di flusso incomprimibile cessano di essere valide e il campo di moto subisce profonde modificazioni. In questo regime, anche variazioni relativamente contenute del numero di Mach possono produrre incrementi significativi delle forze resistenti, con conseguenze dirette sulla dinamica del vettore e sulla sua capacità di manovra.

Per garantire una rappresentazione fisicamente consistente dell'inviluppo di volo, è pertanto necessario introdurre un modello che catturi, seppur in forma semplificata, la divergenza del drag associata agli effetti transonici e supersonici. A tal fine, si adotta una parametrizzazione dipendente dal numero di Mach, volta a modellare l'insorgenza del wave drag e il conseguente deterioramento delle prestazioni aerodinamiche del missile.

7.1 Effetti di Compressibilità e Divergenza del Drag

L'avvicinamento al regime transonico comporta una drastica alterazione del campo di moto attorno al missile. La formazione di onde d'urto locali e l'aumento dell'entropia causano un incremento non lineare della resistenza aerodinamica, noto come *Wave Drag*.

Tale fenomeno è modellato introducendo un fattore correttivo di Mach $\beta(M)$, che amplifica il coefficiente di resistenza parassita in prossimità della barriera del suono:

$$\beta(M) = \begin{cases} 1.0 & M < 0.8 \quad \text{(Regime Subsonico)} \\ 1.0 + k_{\text{wave}}(M - 0.8) & 0.8 \leq M < 1.2 \quad \text{(Regime Transonico)} \\ \beta_{\max} & M \geq 1.2 \quad \text{(Regime Supersonico)} \end{cases} \tag{23}$$

Questa parametrizzazione lineare a tratti approssima la singolarità di Prandtl-Glauert, simulando l'energia dissipata per vincere gli effetti di compressibilità critica.

7.2 Resistenza Parassita e d'Onda (C_{D_0})

Anche in volo rettilineo ($Lift = 0$), il missile subisce una forza resistente dovuta all'attrito viscoso e, in regime transonico/supersonico, alla formazione di onde d'urto (Wave Drag). Il coefficiente di base C_{D_0} è funzione esclusiva del numero di Mach:

$$C_{D_0}(M) = C_{\text{friction}} + C_{\text{wave}}(M) \tag{24}$$

Questo termine rappresenta il "costo di esistenza" del missile nell'aria.

8 Flight Envelope Protection

La manovrabilità del missile è subordinata alla capacità delle superfici di controllo (alette) di generare portanza senza incorrere nel distacco della vena fluida (*Stallo*). Il massimo coefficiente di portanza sostenibile $C_{L_{\max}}$ non è costante, ma degrada alle alte velocità supersoniche a causa dello spostamento del centro di pressione e della diminuzione dell'efficienza delle alette:

$$C_{L_{\max}}(M) = C_{L0} \cdot e^{-k_M (M-1)^2} \tag{25}$$

Dove C_{L0} rappresenta il coefficiente massimo in condizioni ideali e k_M è il fattore di decadimento supersonico. Di conseguenza, la massima forza aerodinamica laterale $F_{\text{aero,max}}$ generabile in un dato istante è funzione diretta della pressione dinamica locale q:

$$F_{\text{aero,max}} = q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_{L_{\max}}(M) \tag{26}$$

Applicando la Seconda Legge di Newton, determiniamo il limite superiore di accelerazione imposto dal fluido:

$$a_{\text{fluid}} = \frac{F_{\text{aero,max}}}{m(t)} = \frac{q\, S_{\text{ref}}\, C_{L_{\max}}(M)}{m(t)} \tag{27}$$

Nota Fisica: A quote elevate o basse velocità, dove q tende a zero, a_{fluid} diviene trascurabile. In tali condizioni, il missile perde autorità di controllo, indipendentemente dalla volontà del sistema di guida.

8.1 Vincoli di Integrità Strutturale

Indipendentemente dalle condizioni aerodinamiche, il vettore è soggetto a limiti meccanici invalicabili. Il telaio e i giunti delle alette sono dimensionati per sopportare un fattore di carico massimo n_{lim} prima di subire deformazioni plastiche o cedimenti catastrofici:

$$a_{\text{struct}} = n_{\text{lim}} \cdot g_0 \tag{28}$$

Per missili tattici a corto raggio, n_{lim} si attesta tipicamente tra 30 e 40 G.

8.2 Limiti di Accelerazione e Inviluppo di Volo del Missile

L'accelerazione massima effettivamente disponibile a_{lim} in ogni istante di simulazione è definita dall'intersezione dei vincoli sopra esposti. Il missile opera sempre sotto il più restrittivo dei due limiti (minimo logico):

$$a_{\text{lim}} = \min \left(a_{\text{fluid}},\ a_{\text{struct}} \right) \tag{29}$$

Questa equazione definisce matematicamente il **Diagramma V-n** (Velocità-Carico) istantaneo:

- Al di sotto della *Corner Velocity*, il missile è limitato aerodinamicamente (Stallo).
- Al di sopra della *Corner Velocity*, il missile è limitato strutturalmente (G-Limit).

8.2.1 Algoritmo di Saturazione Vettoriale

Il sistema di guida genera un vettore di accelerazione comandata ideale $\vec{a}_{\text{cmd}}$. Tuttavia, la capacità del missile di seguire tale richiesta è limitata dall'inviluppo di volo istantaneo. Qualora il modulo dell'accelerazione comandata ecceda il limite disponibile a_{lim}, è necessario applicare una saturazione che preservi la direzione del comando, riducendone esclusivamente l'intensità.

L'accelerazione effettivamente applicata al vettore $\vec{a}_{\text{real}}$ è quindi definita mediante una saturazione vettoriale isotropa:

$$\vec{a}_{\text{real}} = \vec{a}_{\text{cmd}} \cdot \min \left(1,\ \frac{a_{\text{lim}}}{\|\vec{a}_{\text{cmd}}\|} \right) \tag{30}$$

In forma esplicita, nel caso di saturazione ($\|\vec{a}_{\text{cmd}}\| > a_{\text{lim}}$), l'espressione si riduce a:

$$\vec{a}_{\text{real}} = a_{\text{lim}} \cdot \frac{\vec{a}_{\text{cmd}}}{\|\vec{a}_{\text{cmd}}\|} = a_{\text{lim}} \cdot \hat{u}_{\text{cmd}} \tag{31}$$

dove $\hat{u}_{\text{cmd}}$ rappresenta il versore associato alla direzione del comando di guida. Tale formulazione garantisce la conservazione della direzione di manovra richiesta dalla legge di guida, evitando al contempo violazioni dei vincoli aerodinamici e strutturali.

L'approccio adottato assicura stabilità numerica dell'integratore e coerenza fisica della simulazione, impedendo l'esecuzione di manovre energeticamente o strutturalmente non realizzabili.

9 Bilancio Resistivo e Dissipazione Energetica

La generazione di una forza portante (Lift) per modificare la traiettoria non è un processo termodinamicamente gratuito. Ogni manovra impone una penalità energetica sotto forma di resistenza aerodinamica aggiuntiva. Questa sezione analizza la catena causale che trasforma una richiesta di accelerazione in una perdita di velocità.

9.1 Determinazione del Coefficiente di Portanza (C_L)

Il sistema di guida comanda un vettore accelerazione $\vec{a}_{\text{cmd}}$. Per convertire questa grandezza cinematica in una grandezza fluidodinamica, applichiamo la Seconda Legge della Dinamica.

La forza di Portanza L necessaria per eseguire la virata è proporzionale alla massa istantanea del missile:

$$L_{\text{req}} = m(t) \cdot \|\vec{a}_{\text{cmd}}\| \tag{32}$$

Dalla definizione aerodinamica, la portanza è generata dalla pressione dinamica q che agisce sulla superficie di riferimento S_{ref}, modulata dal coefficiente C_L:

$$L_{\text{req}} = q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_L \tag{33}$$

Uguagliando le due espressioni e risolvendo per C_L, otteniamo il coefficiente operativo necessario per sostenere la manovra:

$$C_L = \frac{m(t) \cdot \|\vec{a}_{\text{cmd}}\|}{q \cdot S_{\text{ref}}} \tag{34}$$

Implicazione Fisica: Questa equazione mostra che il coefficiente C_L (e quindi l'angolo di attacco delle alette) deve aumentare drasticamente se:

- Il missile è pesante (pieno di carburante).
- Il missile vola lento o molto alto (q basso).

9.2 6.3 Resistenza Indotta e Vorticità (C_{D_i})

Un alto valore di C_L implica una forte differenza di pressione tra il dorso e il ventre delle alette. Alle estremità delle superfici, il fluido tende a compensare questo gradiente generando **vortici di estremità** (wingtip vortices).

L'energia cinetica rotazionale dissipata in questi vortici è modellata come **Resistenza Indotta**:

$$C_{D_i} = k \cdot C_L^2 \tag{35}$$

Dove $k \approx 0.05$ è il fattore di efficienza aerodinamica.

Il Fenomeno del "Bleeding Energy": La dipendenza quadratica da C_L (e quindi dal quadrato dell'accelerazione richiesta) è l'aspetto tattico più critico. Raddoppiare i G di virata quadruplica la resistenza indotta. Manovre aggressive ad alti angoli di attacco agiscono come un freno aerodinamico, causando un decadimento rapido della velocità.

9.3 Coefficiente di Resistenza Totale

Il coefficiente di resistenza complessivo $C_{D_{\text{tot}}}$ è la somma della componente parassita e di quella indotta (Polare Parabolica):

$$C_{D_{\text{tot}}} = \underbrace{C_{D_0}(M)}_{\text{Regime Mach}} + \underbrace{k \cdot C_L^2}_{\text{Costo Manovra}} \tag{36}$$

9.4 Calcolo della Forza Resistiva Finale

La forza di resistenza vettoriale $\vec{D}$ è sempre diretta in senso opposto al versore velocità $\hat{u}_v$:

$$\vec{D} = -\left(q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_{D_{\text{tot}}}\right) \hat{u}_v \tag{37}$$

Questa è la forza dissipativa che viene integrata nelle equazioni del moto e che determina la gittata massima effettiva (Dynamic Launch Zone) del missile contro un bersaglio manovrante.

10 Dinamica del Corpo Rigido e Bilancio delle Forze

L'integrazione dello stato del missile nel tempo richiede la risoluzione della Seconda Legge della Dinamica nel riferimento inerziale tridimensionale. In questa fase, tutte le grandezze scalari derivate nei capitoli precedenti (Spinta corretta, Drag, Accelerazione comandata) vengono proiettate nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ per determinare l'accelerazione istantanea totale.

10.1 Definizione dei Versori di Riferimento

Per proiettare correttamente le forze aerodinamiche e propulsive, definiamo il **Versore Velocità** $\hat{u}_v$, che indica la direzione istantanea del moto:

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{V}_M}{\|\vec{V}_M\|} = \begin{bmatrix} v_x/V \\ v_y/V \\ v_z/V \end{bmatrix} \tag{38}$$

Assumendo un'incidenza limitata (ipotesi di piccolo angolo di attacco, valida per missili 3-DOF ad alta velocità), il vettore spinta e il vettore resistenza sono allineati a questo versore.

10.2 Scomposizione delle Forze Agenti

Sul baricentro del missile agiscono quattro forze fondamentali, che classifichiamo in "Balistiche" (longitudinali/gravitazionali) e "di Manovra" (trasversali).

10.2.1 A. Forza Propulsiva ($\vec{F}_T$)

La spinta, calcolata tenendo conto dell'espansione nell'ugello (I_{sp} variabile), agisce lungo l'asse longitudinale del missile, spingendolo nella direzione del moto:

$$\vec{F}_T = T_{\text{totale}}(h) \cdot \hat{u}_v \tag{39}$$

10.2.2 B. Forza Resistiva ($\vec{F}_D$)

La resistenza aerodinamica (Drag) è una forza dissipativa che si oppone sempre al vettore velocità. Include sia la componente parassita che quella indotta dalla manovra:

$$\vec{F}_D = -D_{\text{mag}} \cdot \hat{u}_v = -\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_{\text{tot}}}\right)\hat{u}_v \tag{40}$$

Il segno negativo indica l'opposizione al moto.

10.2.3 C. Forza Gravitazionale ($\vec{F}_g$)

La gravità agisce uniformemente lungo l'asse verticale negativo del sistema di riferimento inerziale (ENU - East North Up):

$$\vec{F}_g = m(t) \cdot \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m(t) \cdot g_0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

10.2.4 D. Forza di Portanza/Guida ($\vec{F}_L$)

Il sistema di guida, attraverso la legge Pro-Nav saturata, richiede una accelerazione laterale $\vec{a}_{\text{guida}}$. Questa corrisponde fisicamente alla forza di Portanza (Lift) generata dalle alette:

$$\vec{F}_L = m(t) \cdot \vec{a}_{\text{guida}} \tag{42}$$

Questa forza è per definizione perpendicolare al vettore velocità ($\vec{F}_L \perp \hat{u}_v$).

10.3 Equazione Vettoriale del Moto

Applicando il principio di sovrapposizione, l'accelerazione totale $\vec{a}_{\text{tot}}$ è data dalla somma vettoriale di tutte le forze esterne, normalizzata per la massa istantanea $m(t)$ che decresce durante la combustione.

L'equazione implementata nel solver numerico è:

$$\vec{a}_{\text{tot}}(t) = \frac{\sum \vec{F}_{\text{ext}}}{m(t)} = \frac{\vec{F}_T + \vec{F}_D + \vec{F}_g + \vec{F}_L}{m(t)} \tag{43}$$

Espandendo i termini, otteniamo la formulazione finale utilizzata nel ciclo di integrazione:

$$\vec{a}_{\text{tot}} = \underbrace{\left(\frac{T_{\text{totale}} - D_{\text{mag}}}{m(t)}\right)\hat{u}_v}_{\text{Accelerazione Longitudinale}} + \underbrace{\vec{g}}_{\text{Accelerazione Gravitazionale}} + \underbrace{\vec{a}_{\text{guida}}}_{\text{Accelerazione Trasversale}} \tag{44}$$

Analisi dei Componenti:

- Il primo termine gestisce il bilancio energetico (accelerazione o frenata).
- Il secondo termine incurva la traiettoria verso il basso (caduta balistica).
- Il terzo termine (Guida) modifica la direzione del vettore velocità per intercettare il bersaglio.

Questa equazione differenziale vettoriale viene risolta iterativamente (via Runge-Kutta o Eulero) per aggiornare la velocità e la posizione del missile ad ogni passo temporale Δt.

11 Modellazione della Massa Dinamica

Il modello computazionale aggiorna lo stato fisico del sistema considerando la natura non conservativa della massa durante la fase propulsiva. La massa totale istantanea $m_{tot}(t)$ è definita dalla somma della massa strutturale inerziale (m_{dry}) e della massa del propellente residuo (m_{fuel}), monitorata in tempo reale tramite un integratore di flusso:

$$m_{tot}(t) = m_{dry} + m_{fuel}(t) \tag{45}$$

11.1 Cut-off

Per garantire il realismo fisico e prevenire instabilità numeriche, è stata implementata una logica di *cut-off* (spegnimento) che agisce sulla spinta nominale F_{nom}. Se la massa del propellente scende al di sotto di una soglia di tolleranza infinitesima ϵ (fissata a 10^{-6} kg), il motore viene considerato esausto.

La spinta effettivamente disponibile F_{avail} viene quindi modulata secondo la seguente condizione logica:

$$F_{avail} = \begin{cases} F_{nom} & \text{se } m_{fuel} > \epsilon \\ 0 & \text{se } m_{fuel} \leq \epsilon \end{cases} \tag{46}$$

Questa implementazione assicura che, una volta esaurita la frazione di massa reattiva, il missile transiti istantaneamente dalla fase di volo propulso alla fase balistica (o di *coasting*), mantenendo da quel momento in poi una massa costante pari a m_{dry}. Tale transizione è fondamentale per la corretta valutazione della conservazione dell'energia cinetica residua nelle fasi finali dell'ingaggio.

12 L'Algoritmo RK4

Le equazioni differenziali del moto derivate nelle sezioni precedenti sono altamente non lineari e accoppiate. La dipendenza della resistenza dal Mach, la variazione della spinta con la quota e le discontinuità introdotte dalla saturazione della guida rendono impossibile una soluzione analitica (esatta).

È necessario discretizzare il tempo in piccoli intervalli Δt e calcolare l'evoluzione dello stato del sistema passo dopo passo. Per garantire la stabilità numerica e minimizzare l'errore di troncamento, la simulazione abbandona il semplice metodo di Eulero (1° ordine) in favore del metodo **Runge-Kutta del 4° ordine (RK4)**.

L'algoritmo RK4 stima il nuovo stato $\mathbf{Y}_{n+1}$ al tempo $t + \Delta t$ calcolando quattro pendenze (o derivate) intermedie (k_1, k_2, k_3, k_4) e combinandole con una media pesata.

Nel codice, queste pendenze sono separate in componenti di velocità (`k_vel`) e di accelerazione (`k_acc`).

12.0.1 Pendenza Iniziale (k_1)

Si calcola la fisica allo stato attuale. Questa è la pendenza all'inizio dell'intervallo (Equivalente a Eulero).

$$\vec{k}_{1,\text{vel}} = \vec{V}_n \tag{47}$$

$$\vec{k}_{1,\text{acc}} = \vec{a}_{\text{tot}}(\vec{P}_n, \vec{V}_n) \tag{48}$$

Nota: In questo step viene anche estratta la telemetria per il data logging.

12.0.2 Step 2: Pendenza Media A (k_2)

Si stima uno stato a metà passo ($\Delta t/2$) utilizzando la pendenza k_1, e si ricalcola la fisica in quel punto provvisorio.

$$\vec{P}_{\text{temp}} = \vec{P}_n + \vec{k}_{1,\text{vel}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{49}$$

$$\vec{V}_{\text{temp}} = \vec{V}_n + \vec{k}_{1,\text{acc}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{50}$$

$$\vec{k}_{2,\text{acc}} = \vec{a}_{\text{tot}}(\vec{P}_{\text{temp}}, \vec{V}_{\text{temp}}) \tag{51}$$

12.0.3 Pendenza Media B (k_3)

Si stima nuovamente lo stato a metà passo, ma questa volta utilizzando la pendenza aggiornata k_2. Questo corregge la stima precedente.

$$\vec{P}_{\text{temp}} = \vec{P}_n + \vec{k}_{2,\text{vel}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{52}$$

$$\vec{V}_{\text{temp}} = \vec{V}_n + \vec{k}_{2,\text{acc}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{53}$$

$$\vec{k}_{3,\text{acc}} = \vec{a}_{\text{tot}}(\vec{P}_{\text{temp}}, \vec{V}_{\text{temp}}) \tag{54}$$

12.0.4 Pendenza Finale (k_4)

Si proietta lo stato alla fine dell'intervallo (Δt) utilizzando la pendenza k_3.

$$\vec{P}_{\text{temp}} = \vec{P}_n + \vec{k}_{3,\text{vel}} \cdot \Delta t \tag{55}$$

$$\vec{V}_{\text{temp}} = \vec{V}_n + \vec{k}_{3,\text{acc}} \cdot \Delta t \tag{56}$$

$$\vec{k}_{4,\text{acc}} = \vec{a}_{\text{tot}}(\vec{P}_{\text{temp}}, \vec{V}_{\text{temp}}) \tag{57}$$

12.1 Aggiornamento dello Stato

Il nuovo stato al tempo $t + \Delta t$ è calcolato come media pesata delle quattro pendenze. I termini centrali (k_2, k_3) hanno peso doppio perché rappresentano la stima più affidabile al centro dell'intervallo.

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{\Delta t}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right) \tag{58}$$

Esplicitando per Posizione e Velocità:

$$\vec{P}_{n+1} = \vec{P}_n + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_{1,\text{vel}} + 2\vec{k}_{2,\text{vel}} + 2\vec{k}_{3,\text{vel}} + \vec{k}_{4,\text{vel}}) \tag{59}$$

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_{1,\text{acc}} + 2\vec{k}_{2,\text{acc}} + 2\vec{k}_{3,\text{acc}} + \vec{k}_{4,\text{acc}}) \tag{60}$$

12.2 Vantaggi Computazionali

L'errore globale del metodo RK4 scala con $\mathcal{O}(\Delta t^4)$. Questo significa che dimezzare il passo di calcolo riduce l'errore di un fattore 16. Tale precisione è indispensabile per simulare correttamente l'intercettazione terminale, dove le distanze si riducono rapidamente e le accelerazioni (dovute alla guida e al drag) variano bruscamente.

13 Conclusioni: La Matematica dell'Inevitabile

Il modello presentato in questo documento non costituisce un mero esercizio di traduzione di formule in codice C, bensì rappresenta la creazione di un *Digital Twin* di un sistema fisico complesso. Attraverso l'integrazione di termodinamica atmosferica, aerodinamica transonica e controllo a retroazione, abbiamo simulato la silenziosa e brutale battaglia tra l'energia e l'entropia che avviene nella stratosfera.

13.1 Dall'Astrazione alla Realtà Cinematica

L'implementazione dell'integratore **Runge-Kutta del 4° Ordine** ha permesso di trasformare il tempo continuo in una sequenza discreta di precisione chirurgica. Laddove un integratore semplice avrebbe fallito nelle curve ad alto carico, il modello RK4 ha agito come un microscopio temporale, sondando il futuro del missile quattro volte per ogni istante, garantendo che nessuna sfumatura della fisica — dalla densità dell'aria a 10 000 m fino al picco di resistenza a Mach 1 — venisse ignorata.

Abbiamo dimostrato che l'intercettazione non è garantita dalla semplice volontà del sistema di guida, ma è subordinata al rispetto dei limiti imposti dalla natura:

- Il **Limite Strutturale** ci ricorda che la materia ha un punto di rottura.
- Il **Limite Aerodinamico** ci insegna che non si può comandare il fluido se non si possiede l'energia per dominarlo.
- La **Divergenza del Drag** punisce ogni tentativo di manovra con una perdita inesorabile di velocità.

13.2 Sintesi Finale

Il codice sviluppato non è semplicemente una sequenza di istruzioni: è, in ultima analisi, **un motore di verità fisica**. . In esso, il vettore $\vec{P}_M$ cessa di essere una fredda variabile allocata in memoria e diventa la **traccia matematica di un corpo reale**, che combatte contro la gravità, l'attrito e i limiti imposti dall'atmosfera per adempiere al proprio scopo.

La convergenza della distanza a zero ($R \to 0$) con $V_c > 0$ non è solo il risultato di un ciclo `while`, è la **prova formale dell'efficacia della Navigazione Proporzionale**, un algoritmo capace di trasformare la geometria pura delle linee di vista in un **destino cinetico inevitabile**. Qui, ogni derivata angolare diventa una decisione, ogni accelerazione laterale una sentenza irrevocabile.

In conclusione, questa simulazione dimostra che nel dominio del **volo supersonico** non esiste margine per l'approssimazione ingenua. Solo attraverso il **rigore dell'analisi termodinamica**, la **fedeltà dei modelli fisici** e la **robustezza dell'integrazione numerica** è possibile anticipare l'esito di quell'istante finale —

quell'istante in cui **la matematica smette di essere astratta e diventa realtà**.

"La fisica è l'unica legge che il missile non può infrangere.
Tutto il resto è solo una questione di tempo e di energia."