Modello Fisico-Matematico di un Missile Intercettore a Guida Proporzionale

Matte

22 gennaio 2026

1 Introduzione

Il seguente documento analizza la fisica e la matematica implementata in una simulazione a 3 gradi di libertà (3-DOF) di un missile intercettore. Il modello combina la dinamica del corpo rigido a massa variabile con leggi di controllo a retroazione (Guida Proporzionale).

2 1. Cinematica Relativa e Geometria di Ingaggio

Per intercettare un bersaglio, è fondamentale definire le quantità vettoriali nel riferimento inerziale. Siano $\vec{P}_M$ e $\vec{P}_T$ le posizioni rispettivamente del missile e del target.

Il vettore **Linea di Vista** (Line of Sight, LOS), indicato con $\vec{r}$, rappresenta la distanza relativa vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{P}_T - \vec{P}_M = \begin{bmatrix} x_T - x_M \\ y_T - y_M \\ z_T - z_M \end{bmatrix} \tag{1}$$

La distanza scalare R (norma del vettore) è data dal teorema di Pitagora nello spazio euclideo:

$$R = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2 + (z_T - z_M)^2} \tag{2}$$

Per determinare la direzione pura verso il bersaglio, normalizziamo il vettore $\vec{r}$ ottenendo il versore unitario $\hat{u}_{\text{LOS}}$:

$$\hat{u}_{\text{LOS}} = \frac{\vec{r}}{R} \tag{3}$$

3 2. Dinamica a Massa Variabile (Equazione del Razzo)

A differenza dei corpi rigidi classici, un missile cambia significativamente la sua massa durante la fase di spinta. Questo richiede l'applicazione della *Seconda Legge di Newton estesa* o l'uso di un modello a massa variabile nel tempo.

Definiamo t_{burn} come la durata della combustione e m_{fuel} come la massa totale del propellente.

3.1 Fase di Spinta ($t < t_{\mathbf{burn}}$)

Il motore è attivo. Assumendo un consumo di carburante costante, il rateo di variazione della massa $\dot{m}$ è:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{m_{\text{fuel}}}{t_{\text{burn}}} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \tag{4}$$

La massa istantanea $m(t)$ decresce linearmente:

$$m(t) = m_{\text{launch}} - \dot{m} \cdot t \tag{5}$$

La spinta T è costante e pari a T_{max}.

3.2 Fase Balistica / Coast ($t \geq t_{\mathbf{burn}}$)

Esaurito il propellente, il motore si spegne e la massa diventa costante (massa a vuoto):

$$T = 0, \quad m(t) = m_{\text{launch}} - m_{\text{fuel}} \tag{6}$$

4 3. Legge di Guida: Navigazione Proporzionale (PN)

Il cervello del missile utilizza la Navigazione Proporzionale. Il principio fisico è: *Se il rateo di rotazione della linea di vista è nullo mentre la distanza diminuisce, la collisione è certa.*

4.1 Velocità di Chiusura (V_c)

Definiamo la velocità relativa $\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_T - \vec{V}_M$. La velocità di chiusura (Closing Speed) è la proiezione della velocità relativa sulla linea di vista (cambiata di segno, poiché l'avvicinamento implica $dR/dt < 0$):

$$V_c = -(\vec{V}_{\text{rel}} \cdot \hat{u}_{\text{LOS}}) \tag{7}$$

Se $V_c > 0$, il missile si sta avvicinando al bersaglio.

4.2 Rateo di Rotazione della LOS ($\vec{\Omega}$)

La rotazione angolare del vettore $\vec{r}$ è data dal momento angolare specifico cinematico diviso per la distanza al quadrato. In notazione vettoriale:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{V}_{\text{rel}}}{R^2} \tag{8}$$

Questo vettore $\vec{\Omega}$ indica quanto velocemente e in che direzione il bersaglio si sta spostando lateralmente rispetto alla visuale del missile.

4.3 Comando di Accelerazione ($\vec{a}_{\mathbf{cmd}}$)

La legge PN comanda un'accelerazione laterale perpendicolare alla linea di vista per annullare $\vec{\Omega}$.

$$\vec{a}_{\text{cmd}} = N \cdot V_c \cdot (\vec{\Omega} \times \hat{u}_{\text{LOS}}) \tag{9}$$

Dove N è la costante di navigazione (guadagno adimensionale, tipicamente $3 \leq N \leq 5$).

4.4 Saturazione Strutturale (G-Limiter)

Poiché le alette di controllo hanno limiti fisici di portanza e la struttura ha limiti di carico, l'accelerazione comandata non deve superare un valore $a_{\max}$. Se $\|\vec{a}_{\text{cmd}}\| > a_{\max}$, il vettore viene scalato mantenendo la direzione:

$$\vec{a}_{\text{cmd}} \leftarrow a_{\max} \cdot \frac{\vec{a}_{\text{cmd}}}{\|\vec{a}_{\text{cmd}}\|} \tag{10}$$

5 4. Forze Fisiche e Aerodinamica

Oltre alla forza di guida, sul missile agiscono forze ambientali.

5.1 Sistema di Riferimento Velocità

Per calcolare Drag e Spinta, definiamo il versore velocità $\hat{u}_v$:

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{V}_M}{\|\vec{V}_M\|} \tag{11}$$

(Se $\|\vec{V}_M\| \approx 0$ al lancio, si assume $\hat{u}_v = \hat{u}_{\text{LOS}}$).

5.2 Resistenza Aerodinamica (Drag)

La densità dell'aria ρ varia con l'altitudine h secondo il modello barometrico esponenziale:

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-h/H} \tag{12}$$

La forza di resistenza F_D è opposta alla velocità:

$$\vec{F}_D = -\left(\frac{1}{2}\rho\|\vec{V}_M\|^2 C_d A\right) \cdot \hat{u}_v \tag{13}$$

5.3 Equazione del Moto Totale

Applicando la Seconda Legge di Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$), l'accelerazione totale $\vec{a}_{\text{tot}}$ risulta dalla somma della spinta, del drag, della gravità e della portanza generata per la guida ($\vec{a}_{\text{cmd}}$):

$$\vec{a}_{\text{tot}} = \frac{T \cdot \hat{u}_v + \vec{F}_D + m\vec{g}}{m(t)} + \vec{a}_{\text{cmd}} \tag{14}$$

Nota: $\vec{g} = [0, 0, -9.81]$.

6 5. Integrazione Numerica (Metodo di Eulero)

Poiché le equazioni differenziali sopra descritte non sono lineari e variano nel tempo, la soluzione analitica è impossibile. Si utilizza l'integrazione numerica discreta con passo temporale Δt.

Per ogni istante k, lo stato al passo $k+1$ è:

$$\vec{V}_{M,k+1} = \vec{V}_{M,k} + \vec{a}_{\text{tot},k} \cdot \Delta t \tag{15}$$

$$\vec{P}_{M,k+1} = \vec{P}_{M,k} + \vec{V}_{M,k} \cdot \Delta t \tag{16}$$

Lo stesso procedimento si applica al target (spesso assunto a velocità costante o con moto semplice nella simulazione di base).