M. Quet

Problèmes sur les suites arithmétiques et géométriques

Exercice 4D.1 :

Eric a fait une randonnée de 3 jours. Chaque jour, le nombre de kilomètres à parcourir était égal aux $\frac{3}{4}$ du nombre de kilomètres parcourus la veille. Au total, en 3 jours il a fait 83,25 km.
Combien de kilomètres a-t-il fait le 1er jour ?

Exercice 4D.2 :

Ce nouveau magasin bio fait fureur. Depuis le jour de son ouverture, chaque jour le nombre de clients a augmenté de 5%. Au soir du 10ème jour, le directeur du magasin a annoncé fièrement à ses employés qu'en 10 jours le magasin avait reçu 1258 clients.
Combien de clients le magasin a-t-il reçus le premier jour ?

Exercice 4D.3 :

Deux rescapés creusent un puits dans le désert.
Ils parcourent 10 kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe.
Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres?

Exercice 4D.4 :

On place 300 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 4% par an.
Chaque année les intérêts s'accumulent et on n'effectue ni dépôt ni retrait.
Quel sera le montant sur le livret au bout de 15 ans?

Exercice 4D.5 :

Une usine assure, en 2000, une production de 100 000 articles. Elle s'engage à augmenter sa production de 3% pendant 5 ans.

1) Quelle sera sa production en 2005 ?
2) Combien d'articles auront été fabriqués de 2000 à 2005?

Exercice 4D.6 :

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s’engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.
En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1) Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?
2) Pour tout entier naturel *n*, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l’année 2015+*n*.
   On a donc $r_0 = 50000$.
   a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).
   b) Donner l’expression de r_n en fonction de *n*.
   c) Étudier le sens de variation de la suite (r_n).
3) La direction du groupe industriel souhaite connaître l’année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d’au moins 60 %.
   Recopier et compléter l’algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d’années la quantité de rejets polluants aura diminué d’au moins 60 %.

```
R=50000
N=0
while R …
    R=…
    N=N+1
print(N)
```

À l’aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
En déduire l’année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d’au moins 60 %.

Exercice 4D.7 :

En 2007 la consommation de pétrole était de 31 milliards de barils.
Pour tenir compte des engagements internationaux à réduire la consommation de pétrole, on supposera que celle-ci diminue de 2% par an.
On note C_n la consommation mondiale de pétrole en milliards de barils l'année 2007+*n*.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (C_n).
2) Exprimer (C_n) en fonction de *n*.
3) Estimer la consommation mondiale en 2025.
4) Déterminer la consommation mondiale totale de pétrole de 2007 à 2025.
5) En 2007 on évalue les quantités de pétrole restantes à exploiter à 1238 milliards de barils, pendant combien d'années pourra-t-on exploiter le pétrole ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 4D.1 :

Eric a fait une randonnée de 3 jours. Chaque jour, le nombre de kilomètres à parcourir était égal aux $\frac{3}{4}$ du nombre de kilomètres parcourus la veille. Au total, en 3 jours il a fait 83,25 km.
Combien de kilomètres a-t-il fait le 1er jour ?

Soit x le nombre de kilomètres réalisés le premier jour :

→le deuxième jour, la distance parcourue a été égale à $\frac{3}{4}x$

→le troisième jour, la distance parcourue a été égale à $\frac{3}{4}x\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}x$

D'après l'énoncé :

$$x+\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}x=83,25 \Leftrightarrow \frac{16}{16}x+\frac{12}{16}x+\frac{9}{16}x=83,25 \Leftrightarrow \frac{37}{16}x=83,25 \Leftrightarrow x=83,25\times\frac{16}{37}=36$$

Le premier jour, Eric a parcouru 36 kilomètres.

Exercice 4D.2 :

Ce nouveau magasin bio fait fureur. Depuis le jour de son ouverture, chaque jour le nombre de clients a augmenté de 5%. Au soir du 10ème jour, le directeur du magasin a annoncé fièrement à ses employés qu'en 10 jours le magasin avait reçu 1258 clients. Combien de clients le magasin a-t-il reçus le premier jour ?

Chaque jour, le nombre de clients est multiplié par 1,05.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_1 \\ v_{n+1}=1,05\times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n=v_1\times q^{n-1}=v_1\times 1,05^{n-1}$$

D'après le directeur du magasin :

$$v_1+v_2+...+v_{10}=\sum_{i=1}^{10}v_i=1258$$

$$\Leftrightarrow\ v_1\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}=1258$$

$$\Leftrightarrow\ v_1\times\frac{1-1,05^{10}}{1-1,05}=1258$$

$$\Leftrightarrow\ v_1=1258\times\frac{1-1,05}{1-1,05^{10}}\simeq 100.$$

Le premier jour, le magasin avait reçu 100 clients.

Exercice 4D.3 :

Deux rescapés veulent sortir du désert. Ils parcourent 10 kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe.
Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres ?

Soit v_1 la distance parcourue le premier jour : $v_1=10$.

Ainsi : $v_2=v_1-5\%\times v_1=v_1\times 1-v_1\times 0,05=v_1\times(1-0,05)=v_1\times 0,95$

Chaque jour, le nombre de kilomètres parcourus est multiplié par 0,95.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_1=10 \\ v_{n+1}=0,95\times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 10 \times 0,95^{n-1}.$$

Pour sortir du désert, il faut que :

$$v_1 + v_2 + ... + v_n \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1 \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 \times \frac{1-0,95^n}{1-0,95} \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 \times \frac{1-0,95^n}{0,05} \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \quad 200 \times \left(1-0,95^n\right) \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-0,95^n \geq \frac{150}{200}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0,95^n \geq \frac{150}{200} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -0,95^n \geq \frac{-50}{200}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0,95^n \geq -0,25$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,95^n \leq 0,25$$

Avec la calculatrice, on trouve : $0,95^{27} \simeq 0,2503$ et $0,95^{28} \simeq 0,2378$: à partir du 28ème jour.

Exercice 4D.4 :

On place 300 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 4% par an.
Chaque année les intérêts s'accumulent et on n'effectue ni dépôt ni retrait.
Quel sera le montant sur le livret au bout de 15 ans ?

Soit v_0 la somme déposée : $v_0 = 300$.

Ainsi : $\quad v_1 = v_0 + 4\% \times v_0 = v_0 \times 1 + v_0 \times 0,04 = v_0 \times \left(1+0,04\right) = v_0 \times 1,04$

Chaque année, le montant du livret est multiplié par 1,04.

On peut définir une suite géométrique $\left(v_n\right)$ par : $\begin{cases} v_0 = 300 \\ v_{n+1} = 1,04 \times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 1,04^n.$$

Dans 15 ans, le montant sera égal à :

$$v_{15} = 300 \times 1,04^{15} \simeq 540,25 \text{€}.$$

Exercice 4D.5 :

Une usine assure, en 2000, une production de 100 000 articles. Elle s'engage à augmenter sa production de 3% pendant 5 ans.

1) *Quelle sera sa production en 2005 ?*

   Soit v_0 la somme déposée : $u_0 = 100\,000$.

   Ainsi : $v_1 = v_0 + 3\% \times v_0 = v_0 \times 1 + v_0 \times 0,03 = v_0 \times \left(1+0,03\right) = v_0 \times 1,03$

   Chaque année, la production est multipliée par 1,03.

   On peut définir une suite géométrique $\left(v_n\right)$ par : $\begin{cases} v_0 = 100\,000 \\ v_{n+1} = 1,03 \times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 100\,000 \times 1,03^n .$$

En 2005, la production sera égale à :

$$v_5 = 100\,000 \times 1,03^5 \simeq 115927 \text{ articles.}$$

2) *Combien d'articles auront été fabriqués de 2000 à 2005 ?*

$$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_5 = \sum_{i=0}^{5} v_i = v_0 \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = 100\,000 \times \frac{1-1,03^6}{1-1,03} \simeq 646840,9884$$

Soit 646840 articles (le 646 841ème n'aura pas été terminé).

Exercice 4D.6 :

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.
En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1) *Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?*

Chaque année, la quantité de rejets polluants est multipliée par 0,94.
Ainsi en 2017 :

$50\,000 \times 0,94 \times 0,94 = 44180$ →soit 44 180 tonnes.

2) *Pour tout entier naturel I, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année 2015+n.*
On a donc $r_0 = 50\,000$.

a) *Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).*

Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = r_n \times 0,94$$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$.

b) *Donner l'expression de r_n en fonction de n.*

$$r_n = r_0 \times q^n = 50\,000 \times 0,94^n .$$

c) *Étudier le sens de variation de la suite (r_n).*

$r_0 > 0$ et $0 < 0,94 < 1$ donc la suite (r_n) est décroissante.

3) *La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.*
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

```
R=50000
N=0
while R >20000 :
    R=R*0.94
    N=N+1
print(N)
```

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

Une diminution de 60% mène à un seuil égal à :

$$50\,000 \times 0,4 = 20\,000 \text{ tonnes.}$$

On peut ainsi compléter l'algorithme ci-dessus.
A la calculatrice, on obtient :

$$50\,000 \times 0,94^{14} \simeq 21026,2$$

$$50\,000 \times 0,94^{15} \simeq 19\,764,6$$

Soit au bout de la 15ème année, en 2030.

Exercice 4D.7 :

En 2007 la consommation de pétrole était de 31 milliards de barils. Pour tenir compte des engagements internationaux à réduire la consommation de pétrole, on supposera que celle-ci diminue de 2% par an.
On note C_n la consommation mondiale de pétrole en milliards de barils l'année 2007+n.

1) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (C_n).*

Chaque année, la consommation de pétrole doit être multipliée par 0,98.
Ainsi pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n \times 0,98$$

Donc la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $C_0 = 31$.

2) *Exprimer (C_n) en fonction de n.*

$$C_n = C_0 \times q^n = 31 \times 0,98^n .$$

3) *Estimer la consommation mondiale en 2025.*

Pour 2025, on doit calculer :

$$C_{18} = 31 \times 0,98^{18} \simeq 21,55$$

Soit une consommation mondiale totale d'environ 21,55 milliards de barils.

4) *Déterminer la consommation mondiale totale de pétrole de 2007 à 2025.*

Le pourcentage de baisse de la consommation de pétrole est :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{21,55-31}{31} \simeq -0,305 \simeq -\frac{30,5}{100} \simeq -30,5\%$$

Soit une baisse d'environ 30,5 %.

5) *En 2007 on évalue les quantités de pétrole restantes à exploiter à 1238 milliards de barils, pendant combien d'années pourra-t-on exploiter le pétrole ?*

En considérant que les quantités de pétrole restantes à exploiter soient stables, on peut définir une suite (r_n) déterminant les quantités de pétrole restantes, donc $r_0 = 1238$.

Deux possibilités de compréhension de cette question :

- La consommation reste stable et égale à 31 milliards de barils par an,
- La consommation diminue selon la suite (C_n) étudiée ci-dessus.

Premier cas : en consommation constante :

Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = r_n - 31$$

La suite (r_n) est arithmétique de premier terme $r_0 = 1238$ et de raison $r = -31$.

Son expression générale est :

$$r_n = r_0 + nr = 1238 - 31n$$

On doit trouver à partir de quel rang la suite (r_n) devient négative :

$$r_n < 0 \iff 1238 - 31n < 0 \iff -31n < -1238 \iff n > \frac{-1238}{-31} \iff n > 39,9$$

Il y aura pénurie de pétrole la 40$^{\text{ème}}$ année.

Deuxième cas : avec consommation réduite :

Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = r_n - C_n = r_n - 31 \times 0,98^n$$

La suite (r_n) est quelconque de premier terme $r_0 = 1238$.

Un programme est indispensable :

```
R=1238
N=0
```

```
while R>0 :
    N=N+1
    R=R-31*0.98**N
print(N)
```

On trouve N=84

→il y aura pénurie de pétrole la 84ème année, en 2091.