Corso di Algebra Lineare e Geometria
Strutture Algebriche

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Testi consigliati

Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

Concetto di funzione tra due insiemi A e B

Dati due insiemi A e B si dice *funzione* da A in B una legge che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.
La notazione formale:

$$f : A \to B$$

$$x \in A \to f(x) \in B$$

Esempio A= figli, B= madri.
Viceversa

$$f : B \to A$$

non é una funzione (dato che a una madre si possono associare piu figli).

Immagine di f

A si chiama **dominio**
B si chiama **codominio**
Diremo *Immagine* di f, che indicheremo con

$$\operatorname{Im} f$$

il sottoinsieme di B costituito dalle immagini di tutti gli elementi di A

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B |\ \exists\ a \in A\ con\ f(a) = b.\}$$

Operazione binaria interna

Il concetto di operazione elementare
su cui abbiamo imparato a fare i calcoli adesso lo generalizziamo.
Si chiama *Operazione binaria interna* definita su A una funzione

$$\phi : \; AxA \rightarrow A$$

Esempi:
Sia A l'insieme formato da tutti i vettori notiamo che :
1) la Somma tra due vettori é un'operazione binaria interna su A
2) il Prodotto scalare tra due vettori non é operazione binaria interna su A.

Proprietà di cui può godere una operazione

- **Associativa:** $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
- **Commutativa**
- **Elemento neutro** chiamato $e \in G \forall a \in G, a * e = e * a = a$. Se esiste esso é unico.
- Se G ammette l'elemento neutro e, dato un $a \in G$ esso si dice **Invertibile** se $\exists a' \in G$ tale che

$$a * a' = a' * a = e$$

dove a' si dirá **Elemento inverso** di a.

G gruppo

- Un insieme G su cui é definita una operazione $*$, $(G, *)$, é **Gruppo** se valgono su esso le seguenti proprietá rispetto all'operazione assegnata:
  1) Associativa
  2) Esistenza elemento neutro
  3) Ogni elemento di G é invertibile.
- 4) Inoltre, se vale la commutativa il gruppo si dice **Abeliano o commutativo**.

A Anello

- Dato l'insieme A e due operazioni $(A, +, *)$ si dice **Anello** se valgono su esso le seguenti proprietá:
- 1) 2) 3) 4) $(A, +)$ gruppo abeliano
- 5) L' operazione $*$ gode della proprietá associativa
- 6) Proprietá distributive:
  $\forall a, b, c \in A,\ a * (b + c) = a * b + a * c,\ (a + b) * c = a * c + b * c$
- 7) Se $*$ gode della proprietá commutativa l'anello si dice **Commutativo**

Esempi di Anelli

- Esempi di Anelli Commutativi sono: $(\mathbb{Z}, +, *)$, $(\mathbb{Q}, +, *)$, $(\mathbb{R}, +, *)$
  Notiamo che non é necessario che vi sia l'elemento neutro (1) della seconda operazione
  ma se esiste allora l'anello si dice **Unitario.**
  Lo zero di un anello non puó essere mai invertibile.

- Dicesi **Campo** $(\mathbb{K},+,*)$ un anello commutativo che ha ogni elemento diverso da zero *invertibile*.
  Ovviamente si evidenzia il fatto che ogni elemento diverso da zero deve essere invertibile rispetto alla secona operazione.

Esempi

- Esempio di un insieme che **non é campo**:

$$(\mathbb{Z}, +, *)$$

- Esempio invece di un insieme che é campo

$$(\mathbb{Q}, +, *)$$

Campo dei numeri reali $\mathbb{R}$

- $(\mathbb{R}, +, *)$ é un **Campo**.
- Infatti in $\mathbb{R}$ ogni elemento diverso da zero é invertibile rispetto al prodotto.

- $(\mathbb{C}, +, *)$ é un **Campo** contenente il campo $\mathbb{R}$.
- Infatti in $\mathbb{C}$ ogni elemento diverso da zero é invertibile rispetto al prodotto:
  sia $(a + ib) \neq 0$ si molt. $(a + ib)(c + id)$ e deve risultare 1 per la propietá stessa di invertibilitá.
  Bene, si dimostra che il numero complesso

$$\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

  é esattamente l'elemento inverso. (da verificare con un semplice calcolo algebrico)

Operazione esterna

Definiamo **Operazione esterna** di un insieme V su un campo $\mathbb{K}$
$f : \mathbb{K} \times V \to V$
$\alpha \in \mathbb{K}, v \in V \to \alpha * V \in V$
Dato un gruppo $(G, +)$, sia $S \subseteq G$, diremo che $(S, +)$ é **Sottogruppo** se $(S, +)$ é gruppo rispetto alla stessa operazione di G.
In modo analogo di definisce *Sottoanello* e *Sottocampo*.