Ricevimento 21-10-21

RANGO cosa è? NUMERO ASSOCIATO AD OGNI MATRICE $m \times n$

CI SONO 2 METODI PER CALCOLARE IL RANGO

1° METODO: ORDINE MAX DI UN MINORE NON NULLO

n — det $\neq 0$

"grandezza" $m \times m$

IN UNA MATRICE A VADO A CERCARE E CALCOLARE I DETERMIN. DELLE SOTTOMATRICI QUADRATE PARTENDO DAGLI ORDINI MAX

SE TROVO UN DET $\neq 0$ DI UNA $m \times m \Rightarrow r(A) = n$

Esempio 1

Data una matrice 2×4 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{matrix} \end{pmatrix}$

calcolare il rango con il 1° metodo

Risoluzione

ordine 2

Considero una sottomatrice 2×2 e calcolo il suo det $= -2 \neq 0$
$\Rightarrow r(A) = 2$ (ordine)

Esempio 2

Data una matrice 4×4 $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

calcolare il $r(B)$ con il I° metodo

Risoluzione

PARTO DALL'UNICA SOTTOMATRICE "BANALE" 4×4 (SÉ STESSA)
e calcolo il determinante applicando Laplace n° 1

$$\det B = 0 \cdot B_{41} + 0\, B_{42} + 0\, B_{43} - 3\, \underbrace{B_{44}}_{8\ \text{PARI} +} =$$

$$= -3 \cdot (+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\left[\underbrace{2 + 2 + 1 - 2}_{3}\right] = -9 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ IL RANGO È MAX ED È UGUALE A 4

R. $r(B) = 4$

SE UNA MATRICE A $m \times n$ HA $\boxed{\text{DET} \neq 0}$ $\Rightarrow$ IL SUO RANGO È MAX ED È n, SI SCRIVE $\boxed{r(A) = n \text{ OPP. } \rho(A) = n}$

RO

SE UNA MATRICE A $m \times m$ HA $\boxed{\text{DET} = 0}$ $\Rightarrow$ IL SUO RANGO NON È MAX E SI DICE $\boxed{r(A) < n \text{ OPP } \rho(A) < n}$

Esempio 3

Data una matrice 4×4

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il suo rango con il I metodo (minori)

det A

Risoluzione

Calcoliamo il suo determinante con Laplace n° 1 applicato la 4° riga

$$\det C = 1 \cdot C_{42} = C_{42} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6+4+8-2+8-12 = 0$$

$4+2=6$ PARI

Laplace alla 1° riga

$$\det C = c_{11} \cdot C_{11} + \cancel{c_{12} \cdot C_{12}} + c_{13} \cdot C_{13} + c_{14} \cdot C_{14} = -C_{11} + 2C_{13} + C_{14}$$

$c_{11} = -1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = 2$, $c_{14} = 1$

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6-8 = -2$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2-6 = -4$$

$$C_{14} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -[2-8] = 6$$

$$= -(-2) + 2(-4) + 6 = 2 - 8 + 6 = 8 - 8 = 0$$

Quindi poiché $\det C = 0 \Rightarrow r(C) < 4$ (NON È IL MAX)

ALLORA ANDIAMO AI 3×3

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

det = 0

← ci accorgiamo che $R_3 = R_1 + R_2$

Iniziamo da una 3×3

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8+8-4+4 = 0$$

Passiamo ad un'altra 3×3

R.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+2-8 = -6 \neq 0 \Rightarrow r(C)=3$$

Data una matrice A $m \times m$

se $R_i = R_p \pm R_q \Rightarrow \det A = 0$ (vale pure per le colonne)

$(C_j = C_p + C_q \Rightarrow \det A = 0)$

2^o METODO PER CALCOLARE IL RANGO

$\Rightarrow$ CONTARE GLI ELEMENTI SPECIALI DI UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGA O PER COLONNA

II^o METODO

Esempi vari

$\neq 0$ el. spec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

IN R_2 MANCA EL. SPEC.

$\neq 0$ $\neq 0$ $\neq 0$

NON É RIDOTTA PER RIGA E NEANCHE PER COLONNA

RIDOTTA $\Downarrow$ $r(B)=2$ é il n° di el. speciali

RIDOTTA $\Downarrow$ $r(C)=2$

RIDOTTA $\Downarrow$ $r(D)=3$

$$F = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 & h \\ 0 & 2 & h+1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad h \in \mathbb{R}$$

$\neq 0$ $\neq 0$

SE $h \neq 0$, $h+1 \neq 0 \Rightarrow 3$ el. speciali $\Rightarrow r(F)=3$

CONDIZ. $\boxed{* h \neq 0, -1 \quad r(F)=3}$ ***   . Adesso togliamo la 1° condizione.

SE $h=0$ andiamo a sostituire mettendo al posto di h lo zero

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

solo un minore 3×3 $r(F) = ?$

Non é ridotta $\rightarrow$ si deve ancora ridurre per calcolare

volendo si puó utilizzare pure il I metodo per calcolare $r(F)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+3-8 = -9 \neq 0 \Rightarrow r(F)=3$$

Se $h = -1$ cosa succede

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

det=0 NON È RIDOTTA

I° METODO → vado alla ricerca della 3x3 con det≠0

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3-8 = -5 \neq 0$$

$r(F) = 3$

$$\boxed{R_{FINALE} : \quad r(F) = 3 \qquad \forall h \in \mathbb{R}}$$