Corso di Algebra Lineare e Geometria
Sottospazi,Generatori e basi

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme; chiaramente possiamo applicare agli elementi di W le operazioni di V.
Definizione: Sia V un K spazio vettoriale e sia

$$\emptyset \neq W \subseteq V$$

un suo sottoinsieme. Diciamo che W è **sottospazio** di V se W è esso stesso un K spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto esterno definite su V.
La definizione pur essendo naturale è scomoda da applicare. Diamo quindi una caratterizzazione di facile utilizzo.
Osserviamo che $0_V \in W$, come conseguenza un sottospazio non è mai vuoto.
I sottospazi banali sono V stesso e il sottoinsieme $\{0_V\}$

Caratterizzazione dei sottospazi

Criterio:
Sia V un k spazio vettoriale e sia $\emptyset \neq W \subseteq V$ un suo sottoinsieme. W è sottospazio di V se solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1. **Chiuso rispetto alla somma**:
$$\forall w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$$
2. **Chiuso rispetto al prodotto esterno**:
$$\forall a \in K, \forall w \in W \Rightarrow a \cdot w \in W$$

Esempi

- Sia dato l'insieme W delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verificanti la relazione $2x - y = 0$.
  In simboli
  $$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x - y = 0\}$$
  Verificare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.
- Sia dato l'insieme
  $$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x - y = 1\}$$
  Verificare che Z non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Elemento generico

Sia ad esempio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x - y + z = 0\}$: vogliamo fornire una ulteriore descrizione. Consideriamo la sua equazione cartesiana $x - y + z = 0$, vediamo che essa ci consente di ricavare una delle variabili in funzione delle altre due; quindi per ogni vettore di W dobbiamo avere per esempio, $x = y - z$. Quindi possiamo scrivere

$$W = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

cioè possiamo descrivere W assegnando il suo **elemento generico**.

Intersezione e Unione di due sottospazi

Teorema:
Sia V in K-spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due suoi sottospazi. Allora $U \cap W$ **è un sottospazio**.
Teorema:
Sia V in K-spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due suoi sottospazi. Allora $U \cup W$ **è sottospazio** $\iff$ $U \subseteq W$ **oppure** $W \subseteq U$

Combinazione lineare

Sia V un k spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Un vettore del tipo

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

con coefficienti $a_i \in K$ si chiama una *combinazione lineare* (in breve c.l.) dei vettori $v_1, v_2, \cdots, v_n$.
In altre parole si dice che il vettore $v \in V$ è **combinazione lineare** di $v_1, ..., v_n$ se esistono r coefficienti $a_1, ..., a_n \in K$ tali che possiamo scrivere

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

$\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$

Notazione: L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, ..., v_n \in V$ si denota con

$$\mathcal{L}(v_1, ..., v_n).$$

Quindi la scrittura

$$v \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$$

equivale alla frase "esistono $a_1, ..., a_n \in K$ tali che $v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$".
Precisiamo che $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ non dipende dall'ordine in cui si considerano i vettori
Proposizione
$\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ è sottospazio di V.

Insieme di generatori

L'insieme $\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ si chiama insieme di **generatori** di $\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.
Inoltre $v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e $\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$
Definizione
$v_1, v_2, \cdots, v_n$ si dicono **generatori** di V se ogni elemento di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Base

Definizione di base: L'insieme $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ si dice **base** di V se ogni elemento di V è c.l. di $v_1, v_2, \cdots, v_n$ in modo unico.
In questo caso i coefficienti della combinazione lineare si chiamano **componenti** rispetto alla base.

Vettori linearmente indipendenti

Sia V un K spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Diremo che i vettori $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** (l.i. per brevità) o anche che formano in **insieme libero** se data una loro combinazione lineare nulla allora i coefficienti devono essere tutti nulli. Ciè significa che se abbiamo la relazione

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

allora

$$a_1 = 0, \cdots, a_n = 0.$$

Quindi n vettori di dicono **linearmente dipendenti**(l.d. per brevità) se non sono linearmente indipendenti.
Osserviamo che la dipendenza o l'indipendenza lineare non dipende dall'ordine in cui si considerano i vettori.

Criterio di indipendenza lineare

Vediamo adesso un criterio per stabilire se i vettori sono o non sono l.i.
Proposizione: Sia V un k soazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ linearmente indipendenti.
Allora si ha:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n \; sono \; l.i. \; \Leftrightarrow \begin{cases} 1) v_1 \neq 0 \\ 2) v_i \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, ..., v_{i-1}) dove \; i = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Vediamo adesso come il concetto di generatori e di vettori l.i. si uniscano per definire *base*.
Definizione di insieme che forma una base: Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Diciamo che l'insieme di questi vettori forma una **base** di V se preso un qualsiasi vettore v di V esso lo riusciamo a scrivere come combinazione lineare di $(v_1, \cdots, v_n)$

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

e questa scrittura è *unica*; cioè se si ha anche

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

deve risultare si ha $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$

Teorema che caratterizza una base

Sia V un $K-$spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Allora

$$v_1, v_2, ..., v_n \text{ sono una base di } V \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ v_1, v_2, ..., v_n \ sono \ l.i. \\ 2) \ V = \mathcal{L}(v_1, v_2, ..., v_n). \end{cases}$$

Lemma di Steinitz: Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ un sistema di generatori di V; siano $\{u_1, ..., u_m\} \in V$ m vettori linearmente indipendenti. Allora

$$m \leq n$$

La dimostrazione è omessa.

Teorema: Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e siano $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ due basi di V. Allora $m = n$. Cioè tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi

Dimostrazione

Poichè i vettori $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sono un sistema di generatori di V ed i vettori

$$u_1, u_2, \cdots, u_m$$

sono l.i (entrambi i fatti sono veri per le basi), per il lemma di Steinitz avremo $m \leq n$; invertendo i ruoli delle due basi avremo $n \leq m$, quindi

$$m = n.$$

Dimensione di uno spazio vettoriale

Definizione di **dimensione**: Sia V un K -spazio vettoriale. Si dice che V ha **dimensione** n, e scriveremo

$$\dim V = n$$

se V ha una **base costituita da** n **vettori**, e quindi ogni base di V è formata da n vettori.
E' evidente dalla definizione che per calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale V basta trovare una base di V e contarne gli elementi Esempi di dimensioni:
$\dim \mathbb{R}^n = n$
$\dim \mathbb{R}^{m,n} = mn$

Proprietà

Sia V un K spazio vettoriale di dimensione n. Allora:

- 1) se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ sono l.i. essi formano una base;
- 2) se $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ con $m > n$ essi sono l.d.;
- 3) se $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ con $m < n$ essi non sono generatori.

Dimensione di un sottospazio

Teorema:Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $W \subset V$ un suo sottospazio. Allora:

- a) $\dim W \leq n$, in particolare W è f.g,;
- b) $\dim W = n \Leftrightarrow W = V$

Esempi di basi

Esempio n.1: $\mathbb{R}^3$
Base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ dove $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
Esempio n.2: $\mathbb{R}^{2,2}$
Base standard $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dove $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti di un vettore rispetto a una data base

Sia V un k-spazio vettoriale e sia $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ una sua base. Per ogni vettore $v \in V$ chiamiamp **componenti** di v rispetto alla base $\mathcal{A}$ la n-upla $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ di elementi di K tale che

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n$$

e scriveremo

$$v = (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{\mathcal{A}}$$

Proprietà:
1) ogni vettore è univocamente determinato rispetto ad una base assegnando una n-upla di scalari
2)Lo stesso vettore $v \in V$ ha in generale componenti diverse rispetto a due basi diverse $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di V:

$$v = (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{\mathcal{A}} \neq (b_1, b_2, \cdots, b_n)_{\mathcal{B}}$$

(ricordiamo che due basi sono diverse se differiscono per un vettore o per l'ordine dei vettori)

I tre modi per assegnare un sottospazio

- 1) Equazioni cartesiane
- 2) Elemento generico
- 3) Una base o un insieme di generatori.
  Ogni volta che si assegna un modo si possono sempre ricavare gli altri due.

- Illustriamo come partendo da 1) arriviamo alla 2).
  Cioè come dalle equazioni cartesiane otteniamo l'elemento generico.
  Esempio: Dato il sottospazio
  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y = z = 0\}$ trovare il suo elemento generico (Algebra lineare: esercizi svolti- pg 75)
  Esempio: Dato il sottospazio
  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 3y + t = y + z = 0\}$ trovare il suo elemento generico (Algebra lineare: esercizi svolti- pg 76)

- Illustriamo come partendo da 2) otteniamo la 3).
  Cioè come dall'elemento generico otteniamo una base.
  Esempio: Dato il sottospazio $W = \{(x, y, -y, -3y) \in \mathbb{R}^4\}$ trovare una sua base (Algebra lineare: esercizi svolti, pg 76)
  Esempio: Dato il sottospazio $W = \{(x, y, z, x - y - 2z) \in \mathbb{R}^4\}$ trovare una sua base (Algebra lineare: esercizi svolti, pg 77)

- Illustriamo come partendo da 3) arriviamo alla 1).
  Cioè come da una base otteniamo le equazioni cartesiane.
  Esempio: Dato il sottospazio $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, -3))$ trovare le equazioni cartesiane di W. (Algebra lineare: esercizi svolti, pg 78)
  Esempio: Dato il sottospazio $S = \mathcal{L}((1, -1, 3), (1, 0, 1))$ trovare la sua equazione cartesiana di S. (Algebra lineare: esercizi svolti, pg 78)

esempi di base

- Sia V l '$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei vettori dello spaio ordinario applicati nel punto$O$, e siano $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ i versori fondamentali $\Rightarrow$ base di V
- $e_1, ..., e_n \in \mathbb{K}^n \Rightarrow$ base di $\mathbb{K}^n$
- Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 2x - y = 0\} \Rightarrow (1, 2)$ forma base di V.
- Gli elementi $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$
- Sia $\mathbb{K}_r[X]$ ha per base l'insieme ordinato $(1, X, X^2, ..., X^r)$

Base canonica

- Si dimostra che
$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), \ldots, e_n = (0, 0, ..., 1)$ hanno lo stesso ruolo che avevano $\widehat{i}\widehat{j}\widehat{k}$ nell'isieme V. Infatti
- $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$(x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots (0, 0, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$
- I vettori $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), \ldots, e_n = (0, 0, ..., 1)$ costituiranno una base che sarà detta **base canonica** di K^n.

- Sono dati due vettori $v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,1,3) \in \mathbb{R}^3$ e lo spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2) \subseteq \mathbb{R}^3$. Ricavare l'equazione cartesiana di V e dati $v = (0,1,-3)$ e $e_2 = (0,1,0)$, dire quale dei due vettori appartiene a V.
- Sono dati i vettori $v_1 = (1,2,-1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,-1,0) \in \mathbb{R}^3$ e lo spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Trovare le equazioni cartesiane di V e verificare che $V = \mathbb{R}^3$.
- Sono dati i vettori $v_1 = (0,2,1,0), v_2 = (0,1,3,1), v_3 = (-1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ e lo spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4$. Dato $v = (1,4,2,0)$ dire se appartiene o non appartiene a V.

Teorema di Kronecker

- Teorema di Kronecker:
  Sia A una matrice $m \times n$, $\mathcal{L}(R_1, \cdots, R_m)$ lo spazio generato dalle sue righe ed $\mathcal{L}(C_1, \cdots, C_n)$ lo spazio delle sue colonne. Allora Il rango di una matrice è la dimensione dello spazio generato dalle righe di A (o dalle colonne).

$$\rho(A) = \dim \mathcal{L}(R_1, \ldots, R_m) = \dim \mathcal{L}(C_1, \cdots, C_n)$$

- Dimostrazione omessa

Teorema di Kronecker applicato alla matrici quadrate

- Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A invertibile $\Leftrightarrow \rho(A) = n \Leftrightarrow$ le n righe sono l.i. $\Leftrightarrow$ le n colonne sono l.i.
- Esempi

Usando le matrici, come verificare se i vettori sono l.i.

- **Per verificare se r vettori sono l.i.** basterà controllare che la matrice ottenuta mettendo i vettori per riga abbia rango esattamente r (riducendo per righe si deve ottenere quindi una matrice ridotta senza alcuna riga nulla)

Usando le matrici, come selezionare una base partendo dai generatori

- **Da un insieme di generatori si deve creare una base** si consideri la matrice avente per riga i generatori la riduciamo per riga e otterrremo la matrice ridotta dove le sue righe non nulle saranno una base per lo spazio V.

Usando le matrici come trovare le equazioni cartesiane di un sottospazio

- **Ricerca delle equazioni cartesiane** di un sottospazio di K^n:
  Allora se $v_1, \dots, v_r$ formano una base , affinchè $(x_1, \dots, x_n) \in V$ cioè sia c.l. di $v_1, \dots, v_r$ occorre che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} v_{11}^1 & \dots & v_{1n}^n \\ \dots & \ddots & \vdots \\ v_{r1}^r & \ddots & v_{rn}^r \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

  non abbia rango max in modo da imporre che l'ultima riga si possa scrivere come c.l. dei vettori della base (righe precedenti).

Esempio n.1

Esempi su come ricavare le equazioni cartesiane di un sottospazio di K^n:
Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$, sia data una sua base
$\{v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (2, 0, 0, 0), v_3 = (1, -1, 1, 1)\}$. Trovare la sua equazione cartesiana.
Risoluzione
Affinchè un vettore generico $v = (x, y, z, t) \in V$ sia c.l. dei vettori della base $\{v_1, v_2, v_3\}$ occorre che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

non abbia rango max; in questo modo stiamo imponendo che il suo determinante (essendo una matrice quadrata) sia uguale a zero $(z - t = 0)$

Esempio n.2

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^5$, sia data una sua base $\{v_1 = (1,2,3,1,1), v_2 = (0,0,2,0,0), v_3 = (-1,2,-3,0,1)\}$. Trovare la sua equazione cartesiana.

Risoluzione

Affinchè un vettore generico $v = (x, y, z, t, u) \in V$ sia c.l. dei vettori della base $\{v_1, v_2, v_3\}$ occorre che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ x & y & z & t & u \end{pmatrix}$$

non abbia rango max; in questo modo dobbiamo quindi ridurre per riga (o per colonna) e si impone l'ultima riga (o colonna) nulla.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + u - 2t = 0 \\ y - 2u = 0 \end{cases}$$