Ricevimento 7-12-21

COMPITO D'ESAME (PARTE DI ALGEBRA) 7/12/21

1. É assegnato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (-1,\ 2h-1,\ -1) \\ f(1,0,1) = (-2,\ h,\ 0) \\ f(0,1,1) = (0,\ h-1,\ -1) \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

Studiare la SEMPLICITÁ di f nei casi $h=0$ e $h=1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f

Risoluzione

Calcoliamo la matrice A con il metodo STANDARD

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (-1,\ 2h-1,\ -1) \\ f(e_1)+f(e_3) = (-2,\ h,\ 0) \\ f(e_2)+f(e_3) = (0,\ h-1,\ -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2,h,0) + f(e_2) = (-1,\ 2h-1,\ -1) \Rightarrow f(e_2) = (-1,\ 2h-1,\ -1) - (-2,\ h,\ 0) \\ \sim \\ \sim \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(e_2) = (1,\ h-1,\ -1) \quad \text{2° colonna} \\ f(e_3) = (0,\ h-1,\ -1) - f(e_2) = (0,\ h-1,\ -1) - (1,\ h-1,\ -1) = (-1,0,0) \quad \text{3° colonna} \\ f(e_1)+f(e_3) = (-2,h,0) \rightarrow f(e_1) = (-2,h,0) - f(e_3) = (-2,h,0) - (-1,0,0) = \\ \qquad = (-1,\ h,\ 0) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

STUDIARE SEMPLICITÁ NEL CASO $\boxed{h=0}$

sostituiamo in A, $h=0$ $\rightarrow$ $A_{(h=0)} = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix}$ determ. (metodo a stella)

$P(T) = (-1-T)^2(-T) = 0$ le soluzioni sono gli autovalori, con le m. algebriche

$(-1-T)^2 = 0 \rightarrow -1-T=0 \rightarrow T=-1 \quad m_{-1} = 2 \rightarrow$ da verificare chi é $g_{-1} = ?$

$T = 0 \quad m_0 = 1 \rightarrow$ già verificato che coincide con la molteg. geometrica $g_0 = 1$ ✓

m. geometrica: $g_{-1} = \dim V_{-1} = \dim(\operatorname{Ker} f_{-1}) \Rightarrow \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1-(-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 0 & -1 & 0-(-1) \end{pmatrix}$

sottraggo (-1)

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ \forall x \end{cases} \quad V_{-1} = \{(x, z, z)\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dimensione $= 2$

$g_{-1} = 2 \equiv m_{-1}$ COINCIDE

$\Rightarrow f$ É SEMPLICE

Quando l'endomorfismo é semplice esiste una base di autovettori $\mathcal{U}$ $\{h = 0\}$

AUTOSPAZIO N° 1 $\quad V_{-1} = \{(x, z, z)\} \rightarrow u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$

AUTOSPAZIO N° 2 $\quad V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x + \cancel{y} - z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad x = -z$

sottraggo "zero"

$V_0 = \{(-z, 0, 0)\} \rightarrow u_3 = (-1, 0, 0) \Rightarrow$ BASE DI AUTOVETTORI $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$

STUDIARE LA SEMPLICITÁ NEL CASO $\boxed{h = 1}$

sostituiamo in A $\quad h = 1$

$$A_{(h=1)} = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & 0-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix}$$

determ (metodo a stella)

$P(T) = (-1-T)(-T)^2 + \underline{1 + T} = -(1+T)T^2 + (1+T) = (1+T)[-T^2+1] = 0$

- $T = -1$
- $1 - T^2 = 0 \rightarrow T^2 = 1 \rightarrow T = \pm 1 \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T = -1 & m_{-1} = 2 \text{ controllare} \\ T = 1 & m_1 = 1 \ ✓ \end{cases}$

CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sottraggo (-1) $T = -1$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = y \\ x = -y \\ \forall y \end{cases} \qquad V_{-1} = \{(-y, y, y)\}$$

dimensione = 1 (una incognita libera)

$$\dim V_{-1} = 1 = g_{-1}$$

$$\neq$$

2 molteplicità algebrica

$\Longrightarrow$ f NON È SEMPLICE

2. Dato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = (-1x + 1y + 0, \ hx + hy + 1z, \ 2x + 0 + hz)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare $g^{-1}(0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

"LA CONTROIMMAGINE DI $(0,1,0)$"

Risoluzione

$$M(g) = \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}(0,1,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (0,1,0)\}$$

DEFINIZIONE DI CONTROIMMAGINE

$$\boxed{M(g) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{cases} -x + y = 0 \\ hx + hy + z = 1 \\ 2x + hz = 0 \end{cases}$$

DA RISOLVERE $h \in \mathbb{R}$

SISTEMA LINEARE 3×3

$\Downarrow$

FORMULA CRAMER

IL TEOREMA DI CRAMER DICEVA CHE

SISTEMA DETERMINATO $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

E POI SE $\det A \neq 0$ SI HA LA FORMULA

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det B_1}{\det A} \\[2ex] y = \dfrac{\det B_2}{\det A} \\[2ex] z = \dfrac{\det B_3}{\det A} \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL DET A — MATRICE DELLA $g = M(g) = A$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix} = -h^2+2-h^2 = -2h^2+2 = \boxed{2(-h^2+1) \neq 0}$$

det A

$$\to -h^2+1 \neq 0 \to h^2 \neq 1 \to h \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$ SIST. DETERMINATO

FORMULA DI CRAMER

$$\begin{cases} x = \dfrac{B_1 \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix}}{\det A \; [2(-h^2+1)]} = \dfrac{\boxed{-h}}{2(1-h^2)} = \dfrac{h}{2(h^2-1)} \\[2ex] y = \dfrac{B_2 \to \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix}}{2(-h^2+1)} = \dfrac{\boxed{-h}}{2(1-h^2)} = \dfrac{h}{2(h^2-1)} \\[2ex] z = \dfrac{B_3 \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2(-h^2+1)} = \dfrac{\boxed{\cancel{2}}}{\cancel{2}(-h^2+1)} = \dfrac{1}{1-h^2} \end{cases}$$

det B_1, det B_2, det B_3

Risultato

$$g^{-1}(0,1,0) = \left\{ \left(\frac{h}{2(h^2-1)}, \frac{h}{2(h^2-1)}, \frac{1}{1-h^2} \right) \right\}$$

CON LA CONDIZIONE $h \neq \pm 1$

LEVO LA CONDIZIONE

RIMANGONO DA STUDIARE I CASI $h=1$, $h=-1$

NON SI SOSTITUISCE MAI NELLA FORMULA (DIVENTA ASSURDA)

- $h=1$ SOSTITUIAMO NEL SISTEMA DI PARTENZA E SI RICOMINCIA:

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ hx+hy+z=1 \\ 2x+hz=0 \end{cases}$$ DA RISOLVERE $\xrightarrow{h=1}$ $$\begin{cases} -x=-y \\ x+y+z=1 \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

RISOLVO PER SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} y=x \\ \cancel{x}+\cancel{x}\cancel{-2x}=1 \\ z=-2x \end{cases} \quad 0=1 \qquad \emptyset$$

$$g^{-1}(0,1,0) = \emptyset$$

SISTEMA IMPOSSIBILE

- $h=-1$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ hx+hy+z=1 \\ 2x+hz=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x=-y \\ -x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x \\ -x-x+2x=1 \\ z=2x \end{cases} \quad 0=1 \qquad \emptyset$$

SIST. IMPOSSIBILE

$$g^{-1}(0,1,0) = \emptyset$$