Lezione n° 17 (30-11-21)

ENDOMORFISMI

Cosa è un endomorfismo? E' una applicazione lineare in cui DOMINIO E CODOMINIO coincidono

$\boxed{f: V \to V}$ con V K-sp. vettoriale

Ogni endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha la matrice associata $M(f)$ (rispetto alle basi canoniche) QUADRATA $n \times n$

Esempio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avrà $M(f)$ 3×3

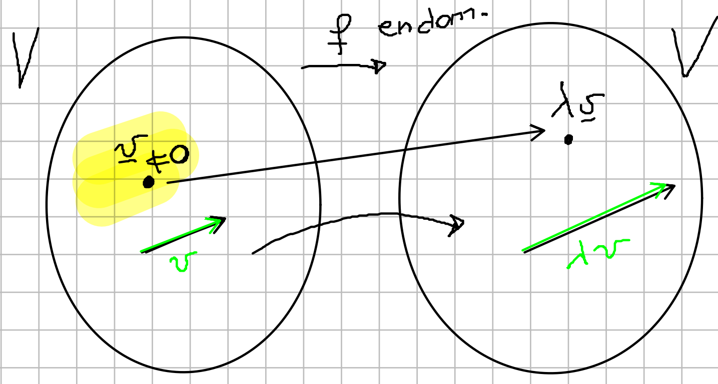
$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ " $M(f)$ 4×4

etc...

Assegnato un endomorfismo $f: V \to V$ V K-sp. vettoriale

Definizione di AUTOVALORE ($\lambda \in K$ campo)

$\boxed{\lambda \text{ SI DICE AUTOVALORE}}$ PER f SE ESISTE UN VETTORE $\underline{v} \in V$ CON $\boxed{\underline{v} \neq 0}$ (VETTORE NON NULLO) TALE CHE $\boxed{f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}}$



SE $\underline{v}$ FINISCE IN $\lambda \underline{v}$

$\underline{v}$ PRENDERÀ IL NOME DI "AUTOVETTORE"

E λ SI CHIAMERÀ "AUTOVALORE"

$\boxed{\underline{v} \text{ SI DICE AUTOVETTORE}}$ PER f SE ESISTE UNO SCALARE $\lambda \in K$

$\underline{v} \neq 0$

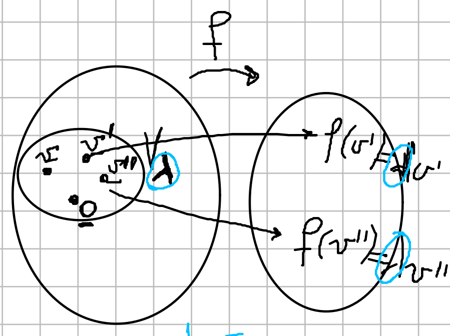
TALE CHE $\boxed{f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}}$

DEFINIAMO L'AUTOSPAZIO E LO INDICHIAMO $\boxed{V_\lambda} \subset V$:

V_λ È L'INSIEME FORMATO DA TUTTI GLI AUTOVETTORI $\underline{v} \neq 0 \,/\, f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

CON IL VETTORE NULLO

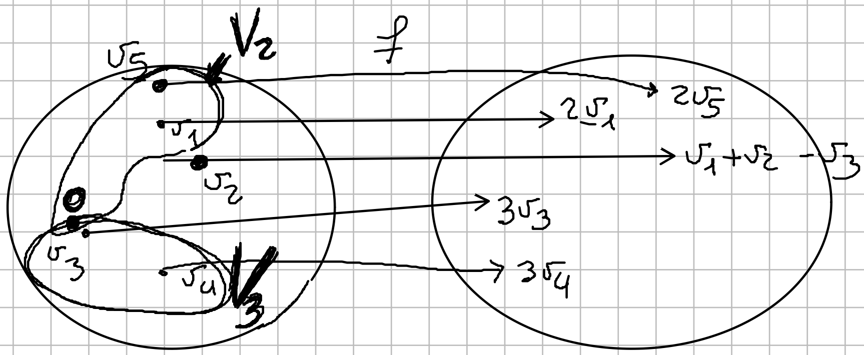
$$V_\lambda = \left\{ \begin{matrix} \text{INSIEME DI AUTOVETTORI } (\neq 0) \\ \text{ASSOCIATI A } \lambda \ (\neq 0) \end{matrix} \right\} \cup \{ \underline{0}_V \} =$$



$$= \{ \underline{v} \in V, v \neq 0 \ / \ f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \} \cup \{ \underline{v} = 0 \} =$$

λ è sempre lo stesso !!!

$$\boxed{V_\lambda = \{ v \in V \ / \ f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \}}$$



2 AUTOSPAZI

$$V_2 = \{ v_1, v_5 \}$$

$$V_3 = \{ v_3, v_4 \}$$

sottospazi

$$V_2 \cap V_3 = \{ \underline{0} \}$$

ENDOMORFISMO PARTICOLARISSIMO E LO INDICHIAMO CON

$$f_\lambda : V \to V \qquad V \ \ K\text{- sp. vettoriale}$$

CON LA LEGGE PARTICOLARISSIMA $\boxed{f_\lambda(\underline{v}) = f(\underline{v}) - \lambda \underline{v}}$

ESEMPIO

SE DICO $f_3 : V \to V$ ALLORA $f_3(\underline{v}) = f(v) - 3\underline{v}$

A COSA SERVE f_λ? SERVE A CALCOLARE NEI NOSTRI ESERCIZI L'AUTOSPAZIO V_λ

DIMOSTRIAMO QUESTO TEOREMA:

"DATO UN ENDOMORFISMO $f : V \to V$ CON V K-sp. VETTORIALE E FISSATO UN AUTOVALORE PER f, $\lambda \in K$, SI HA CHE $V_\lambda = \operatorname{Ker} f_\lambda$ "

DIMOSTRAZIONE

Ipotesi $f: V \to V$

λ autovalore

Tesi $V_\lambda = \operatorname{Ker} f_\lambda$

UGUAGLIANZA INSIEMISTICA

DIMOSTREREMO LE DUE INCLUSIONI:

$\underbrace{V_\lambda \subseteq \operatorname{Ker} f_\lambda}_{1}$ E POI $\underbrace{\operatorname{Ker} f_\lambda \subseteq V_\lambda}_{2}$ $\Rightarrow$ $V_\lambda \equiv \operatorname{Ker} f_\lambda$

PERCHÉ:

PARTIAMO DA UN ELEMENTO DI V_λ

$\underline{v}^* \in V_\lambda$ E FACCIAMO VEDERE CHE $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f_\lambda$

$\underline{v}$ AUTOVETTORE

$\underline{v} \neq 0$ $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ $\Rightarrow$ TUTTO AL I MEMBRO $\Rightarrow$ $\overbrace{f(\underline{v}) - \lambda \underline{v}}^{f_\lambda(v)} = \underline{0}$ $\quad f_\lambda(\underline{v}) = \underline{0}$

$\Rightarrow$ QUINDI $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f_\lambda$ C.V.D.

ABBIAMO DIMOSTRATO LA 1° INCLUSIONE $V_\lambda \subseteq \operatorname{Ker} f_\lambda$

ANDIAMO ALLA 2° INCLUSIONE:

PARTIAMO DA UN ELEMENTO DI $\operatorname{Ker} f_\lambda$

$\underline{v} \in \operatorname{Ker} f_\lambda \Rightarrow f_\lambda(\underline{v}) = \underline{0} \rightarrow f(v) - \lambda v = \underline{0} \rightarrow f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

vuol dire che

$\underline{v}$ è autovettore

$\Rightarrow \underline{v} \in V_\lambda$

ABBIAMO DIMOSTRATO LA 2° INCLUSIONE: $\operatorname{Ker} f_\lambda \subseteq V_\lambda$

CONCLUSIONE: SONO UGUALI!

$V_\lambda = \operatorname{Ker} f_\lambda$ CVD

AVVISO RICEVIMENTO : OGGI 30/11/21 NON VI SARÁ RICEVIMENTO MA É RIMANDATO A GIOVEDÍ 2/12/21 ORE 15:30

- PROX SETTIMANA : 7/12/21 ORE 15.30 RICEVIMENTO
  9/12/21 (GIOVEDÍ) NON CI SARÁ RICEVIMENTO

DATA UNA MATRICE A QUADRATA $m \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}-T & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-T & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm}-T \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE DI POLINOMIO CARATTERISTICO DI A:

SI INDICA CON $P(T)$.

1) SI SOTTRAE T DALLA DIAGONALE PRINCIPALE
2) SI CALCOLA IL DETERMINANTE DI QUELLA MATRICE

$$P(T) = DET(A - T\underbrace{I}_{\text{matrice identica}})$$

$$A - TI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-T & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-T & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-T \end{pmatrix}$$

$DET(A - TI) = P(T)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

SI DIMOSTRA CHE GLI AUTOVALORI PER f SONO LE SOLUZIONI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

" λ AUTOVALORE PER $f \iff P(\lambda) = 0$ "

(Dimostrazione omessa)

FACCIAMO UN ESEMPIO

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = (x-z,\ hy,\ y+z)$$

TROVARE GLI AUTOVALORI E GLI AUTOSPAZI CORRISPONDENTI

Risoluzione

$$A = \begin{pmatrix} 1-T & 0 & -1 \\ 0 & h-T & 0 \\ 0 & 1 & 1-T \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \det(A - TI)$$

DET

$$P(T) = (1-T)(h-T)(1-T) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-T=0 \to T_1 = 1 \\ h-T=0 \to T_2 = h \\ 1-T=0 \to T_3 = 1 \end{cases}$$

SE $h=1 \Rightarrow T \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \\ T_3 = 1 \end{cases}$ 1 È TRIPLA E SI DICE CHE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI 1 È 3

$m_1 = 3$ (3 volte)

Se $h \neq 1 \Rightarrow T \begin{cases} T_1 = T_3 = 1 \text{ (2 VOLTE)} \Rightarrow m_1 = 2 \\ T_2 = h \text{ (1 VOLTA)} \Rightarrow m_h = 1 \end{cases}$

CONCLUSIONE:

GLI AUTOVALORI IN GENERALE SONO TRE (3×3):

- Se $h = 1$ HO UN SOLO AUTOVALORE $T=1$ (3 VOLTE)
- Se $h \neq 1$ HO DUE AUTOVALORI ($T=1$ 2 VOLTE; $T=h$ 1 VOLTA)

DEFINIZIONE DI MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA m_λ DI $\lambda \in K$:

« DICESI m_λ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA QUANTE VOLTE λ È SOLUZIONE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO »

ESEMPI VARI: $P(T) = (T-5)^4 = 0$ $\quad T=5$ AUTOVALORE

$m_\lambda = m_5 = 4$ VOLTE

$P(T) = (T-3)(T+3)^2 = 0 \Rightarrow T=3 \quad m_3 = 1$

$T=-3 \quad m_{-3} = 2$

CALCOLIAMO GLI AUTOSPAZI NEL NOSTRO ESEMPIO PRECEDENTE:

$\boxed{\cdot\ h=1}$ $\quad \boxed{T=1}$ λ $\quad m_\lambda = 3 \Rightarrow$ CALCOLIAMO $V_\lambda = V_1$

AUTOVALORE λ

$$V_\lambda = \operatorname{Ker} f_\lambda \Rightarrow V_1 = \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker}\big(\underbrace{f(v) - 1v}\big)$$

$\operatorname{Ker}(A - 1I)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{pmatrix} \cdot X = \underline{0} \qquad (A - 1I)\,\underline{X} = \underline{0}$$

Ker

INTANTO $h=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \underline{0}$$

Ker

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \forall x \end{cases} \quad V_1 = \{(x,0,0)\}$$

BASE DELL'AUTOSPAZIO V_1 È: BASE $V_1 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{u_1}\}$

u_1 È AUTOVETTORE

LEVO LA CONDIZIONE

$\boxed{h \neq 1}$

$T = 1$ CONTATO 2 VOLTE $\rightarrow V_1$ AUTOSPAZIO N°1

$T = h$ " 1 VOLTA $\rightarrow V_h$ AUTOSPAZIO N°2

CALCOLIAMOLI

AUTOSPAZIO N°1 : $V_1 = \mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -z = 0 \\ \cancel{(h-1)}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$V_1 = \{(x,0,0)\}$ BASE $V_1 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{\underline{u}_1}\}$ 1° AUTOVETTORE

AUTOSPAZIO N°2 : $V_h = \mathrm{Ker}\, f_h = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1-h & 0 & -1 \\ 0 & h-h & 0 \\ 0 & 1 & 1-h \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (1-h)x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y + (1-h)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{z}{1-h} \\ y = -(1-h)z \end{cases} \quad (h \neq 1)$$

$$V_h = \left\{ \left(\frac{z}{1-h}, -(1-h)z, z \right) \right\}$$

$$\text{BASE } V_h = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{1-h}, -(1-h), 1 \right)}_{\underline{u}_2} \right\}$$

2° AUTOVETTORE