Ricevimento 26-10-21

Matrice $m \times m$ (o colonne)

↳ calcolo il determinante → lo scambio di righe si può fare ma ricordiamo che il det. cambia di segno

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det = -3$ $\qquad\qquad$ $\det = 3$

Matrice $m \times n$ (o colonne)

↳ calcolo il rango → lo scambio di righe si può fare

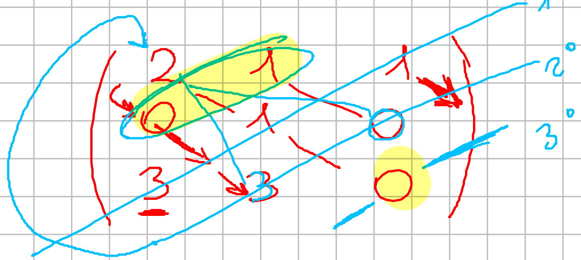
⇒ RANGO NON SI ALTERA

Metodo a stella (senza ricopiare le prime 2 colonne)

3×3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$2(1)(0) + (1)(0)(3) + 1(0)(3)$ ANDATA



$-1(1)(3) - (0)(3)(2) - (0)(0)(1)$

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = [\underbrace{(AB)} \cdot \underbrace{C}]^{-1} = C^{-1} \cdot (AB)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Esercizio "Assegnati" Riduzione e Rango

Ridurre per righe e per colonne la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{h} & 0 & 0 & 0 \\ 2^{*} & \boxed{-h} \neq 0^{****} & 0 & 0 \\ -3^{*} & 1 & h & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

"al contrario"

FISSO ELEM. SPECIALE

$a_{34} = 1 \neq 0$

$h \neq 0$ 3 el. speciali

$r(A) = 3$

Se $h = 0$

sostituiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$

R. Se $h \neq 0$ $r(A) = 3$; se $h = 0$ $r(A) = 2$

2) $$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2h} & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{-1} \\ \boxed{-h} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

3 el. speciali $r(A) = 3$

EL. SPEC.

$-h \neq 0$ $h \neq 0$ ***** CONDIZIONE

Se $h = 0$ sostituiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1 \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R_3 \rightarrow R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ "RIDOTTA"

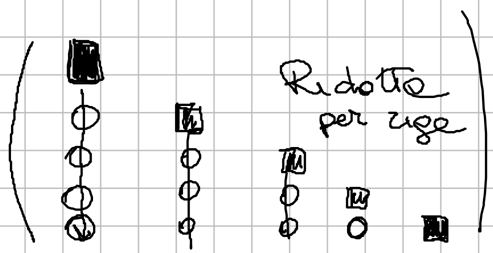
Pag 13 MATRICE B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 \\ 3 & -2^{*} & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

5×3

$R_2 \to \boxed{R_2 - \frac{(-2)}{(-1)} R_1} = \boxed{R_2 - 2R_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1^{*} & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_1$$



$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2^{*} & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - \frac{2}{\boxed{-1}} R_1 \to$$

$R_4 \to R_4 + 2R_1$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \\ -2 & 1^{*} & -5 \end{pmatrix} \quad R_5 \to R_5 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & -3 \\ 2^{*} & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EL. SPEC. DI $R_2 = a_{21} = 1 \neq 0$

$R_3 \to R_3 - \frac{2}{1} R_2 = R_3 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 6^{*} & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_4 \to R_4 - 6R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 27 \\ -1^{*} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_5 \to R_5 + R_2 \to$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 \\ \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{12} \\ 0 & 0 & 27^{*} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

EL. SPECIALE DI R_3

$a_{33} = 12 \neq 0$

$R_4 \to R_4 - \frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{12}_{\,4}} R_3$

$R_4 \to R_4 - \frac{9}{4} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4^{*} \end{pmatrix} \quad R_5 \to R_5 - \frac{-\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,3}} R_3 = R_5 + \frac{1}{3} R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 \\ \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(B) = 3$$

Pag 17 Es. 1.11

Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il rango delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 3 & 1 & -1^{*} \\ h & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{h \neq 0} \quad ****** \text{ CONDIZIONE}$$

$$R_2 \to R_2 - \frac{-1}{h} R_1 = R_2 + \frac{1}{h} R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 3+\frac{1}{h} & 1+\frac{2}{h} & 0 \\ h & 1 & 2^{*} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{2}{h} R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{h} \\ \frac{3h+1}{h} & \frac{h+2}{h} & 0 \\ h-\frac{2}{h} & 1-\frac{2}{h} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ \frac{3h+1}{h} & \frac{h+2}{h} & 0 \\ \frac{h^2-2}{h} & \frac{h-2}{h} & 0 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 0} \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ \frac{h^2-2}{h} & \frac{h-2}{h}^{*} & 0 \\ \frac{3h+1}{h} & \frac{h+2}{h} & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{h-2}{h} R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ \bullet\, h-1 & 0 & 0 \\ \bullet\bullet\, \frac{3h+1}{h} & \frac{h+2}{h}^{*} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet = \frac{h^2-2}{h} - \frac{h-2}{h} \cdot 1 = \frac{h^2 - \cancel{2} - h + \cancel{2}}{h} = \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}$$

$$R_4 \to R_4 - \frac{h+2}{h} R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{h} \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 \neq \boxed{h-1} & 0 & 0 \\ \bullet\bullet \left(\frac{2h-1}{h}\right)^{*} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\bullet = \frac{3h+1}{h} - \frac{h+2}{h} \cdot 1 = \frac{3h+1-h-2}{h} = \frac{2h-1}{h}$$

$$R_4 \to R_4 - \frac{\left(\frac{2h-1}{h}\right)}{h-1} R_3$$

$h-1 \neq 0$ ***** CONDIZIONE (EL. SPECIALE DI R_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 1 & 1 & 0 \\ h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $h \neq 0$, $h \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3$

ABBIAMO LE CONDIZIONI DA TOGLIERE

LEVO LA 1° CONDIZIONE $h = 0$

NON SI DEVE SOSTITUIRE NELLA MATRICE RIDOTTA (PERCHÉ LA RIDOTTA ESISTE SOLO CON LA CONDIZ. $h \neq 0$)

SOSTITUIAMO IL VALORE NELLA MATRICE DI PARTENZA

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare il rango facendo la riduzione oppure provando a vedere se esiste una 3x3 con det ≠ 0

$\det = 2 + 1 - 12 = 3 - 12 = -9 \neq 0$

$\Rightarrow r(A) = 3$

TOGLIAMO LA 2° CONDIZIONE $h = 1$

SI PUÒ SOSTITUIRE NEL PASSAGGIO "VERDE"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ h-1 & 0 & 0 \\ \frac{3h+1}{h} & \frac{h+2}{h} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = 3 - 4 = -1 \neq 0$

$r(A) = 3$

R. $r(A) = 3 \quad \forall h \in \mathbb{R}$