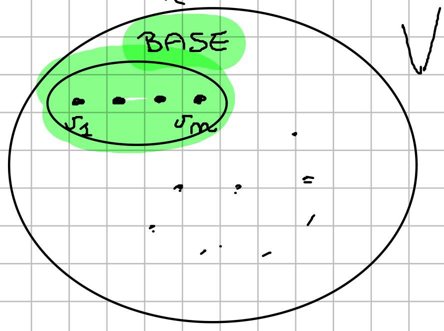
Ricevimento 11-11-21

Spiegazione sulla dim. del teor. di R. C. n° 1

$\Rightarrow$ Ip. Sistema ammette soluzioni $\qquad$ Ts $\rho(A) = \rho(A, B)$

Dimostrazione



$V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ ← GENERATORI

BASE DI $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ < GEN + L. I.

$\dim V = n$ (n° di vettori che formano una base)

= (n° di vettori che sono gener. e L. I.)

CONCETTO DI SPAZIO VETTORIALE

HO 2 SPAZI VETTORIALI, UNO LEGATO ALLA MATRICE COMPLETA

$$\underset{\text{MATRICE COMPLETA}}{(A, B)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}$$

$C_1 \quad C_n \quad B$

$\Rightarrow (C_1 \; C_2 \; \dots \; C_n \mid B) \Rightarrow$

$\Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_n, b)$

$n+1$ vettori

MATR. COMPLETA $(A, B) \rightsquigarrow V = \mathcal{L}(\underset{C_1}{v_1}, \underset{C_2}{v_2}, \dots, \underset{C_n}{v_n}, \underset{B}{b})$

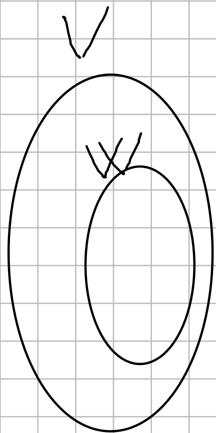
GENERATORI DI V

✱ MA NON SO SE SONO L. I. (DA CONTROLLARE)

IDEM RAGIONIAMO CON LA MATR. INCOMPLETA $A \rightsquigarrow W = \mathcal{L}(\underset{C_1}{v_1}, \underset{C_2}{v_2}, \dots, \underset{C_n}{v_n})$

GENERATORI DI W

MA NON SO SE SONO L. I.



OBIETTIVO È DIMOSTRARE CHE $\rho(A) = \rho(A, B)$

PARTIAMO DALL'IPOTESI CHE IL SIST. AMMETTE SOLUZIONI:

$\exists$ S (soluz.) $\qquad S = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow$

$$C_1 \overset{x_1}{\alpha_1} + C_2 \overset{x_2}{\alpha_2} + \dots + \dots + C_n \overset{x_n}{\alpha_n} = B$$

$\hookrightarrow \underline{v}_1 \cdot \alpha_1 + \underline{v}_2 \alpha_2 + \dots + \underline{v}_m \alpha_m = \underline{b}$ ordiniamo

$$\boxed{\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_m \underline{v}_m = \underline{b}}$$

È UNA COMB. LINEARE CHE MI DÀ IL VETTORE $\underline{b}$

$\underline{b}$ È UN VETTORE CHE DIPENDE DA $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$

V BASE $\{ \underbrace{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m}_{\text{LA POTENZIALE BASE DI } V}, \cancel{\underline{b}} \}$ SONO L.I.? NO

NON È INDIPENDENTE

E COINCIDE CON LA POTENZIALE BASE DI W $\underbrace{\{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \}}$

$$\dim V \overset{\Downarrow}{=} \dim W \leq m$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(A,B) = \rho(A) \qquad \text{C.V.D.}$$

ESEMPIO USANDO IL PARAMETRO

PAG. 43 1.33

Risolvere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x + 2ky - z = 3 \\ kx - ky + z = k+1 \end{cases}$$

Soluzione

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 2k & \boxed{-1} & 3 \\ k & -k & 1^* & k+1 \end{array} \right)$$ RIDUZIONE $R_2 \to R_2 + R_1$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 2k & \boxed{-1} & 3 \\ k+4 & \boxed{+k} & 0 & k+4 \end{array} \right)$$

$\neq 0$

***** condizione

Se $k \neq 0 \Rightarrow \rho(A,B) = 2$; $\rho(A) = 2 \Rightarrow$ SIST. AMMETTE SOLUZIONI (PER R.C. n°1)

VADO A RISOLVERE ... CON IL SIST. RIDOTTO

$$\begin{cases} 4x + 2ky - z = 3 \\ (k+4)x + ky = k+4 \end{cases} \to \begin{cases} \dots \\ y = \dfrac{-(k+4)x + (k+4)}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2 \cdot \cancel{k} \dfrac{[-(k+4)x + (k+4)]}{\cancel{k}} - z = 3 \Rightarrow 4x - 2(k+4)x + 2(k+4) - z = 3 \\ y = \dots \end{cases}$$

$2k+8$

$$\begin{cases} (4-2K-8)x - z = 3-2K-8 \\ y = --- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4-2K)x - z = -5-2K \\ y = \dfrac{-(K+4)x+(K+4)}{K} \end{cases}$$

(IN FUNZ. DELLA X)

$$\begin{cases} (4+2K)x + z = 5+2K \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -(4+2K)x + (5+2K) \\ y = \dfrac{-(K+4)x+(K+4)}{K} \end{cases} \quad \forall x$$

FUNZ. DELLA X
||
FUNZ. DELLA X

(STESSA INC. LIBERA)

$$S = \left\{ \left(x, \frac{-(K+4)x+(K+4)}{K}, -(4+2K)x+(5+2K) \right) \right\}$$

∞ soluzioni, x è libera!

$K \neq 0$

Adesso togliamo la condizione $K=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2K & \boxed{-1} & \vdots & 3 \\ K+4 & \boxed{+K} & 0 & \vdots & K+4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 4 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2 \quad ; \quad \rho(A,B) = 2$

Posso risolvere il sist. ridotto

$$\begin{cases} 4x - z = 3 \\ 4x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 - z = 3 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -z = 3-4 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \forall y$$

$$S = \{(1, y, 1)\} \quad \text{SE } K=0$$

∞ soluzioni, y inc. libera!

R.

IL SISTEMA AMMETTE SEMPRE INFINITE SOLUZIONI ($\forall K \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \text{SE } K \neq 0 & S = \{(\text{------})\} \\ \text{SE } K = 0 & S = \{(\text{----})\} \end{cases}$$

Un sistema lineare dato nel compito di GENNAIO 21

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases}$$

da studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$

Soluzione

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & \vdots & 1 \\ h+1 & h & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -h & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

RIDUZIONE

$R_1 \to R_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{h+1}\neq 0 & h & -1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -h & 3 \end{array}\right)$$

$h+1 \neq 0 \Rightarrow h \neq -1$ ****

$R_2 \to R_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & h & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -h \neq 0 & 3 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$h \neq 0$

RIDOTTA

$-h \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$ **

$\rho(A) = 3$ $\quad \rho(A,B) = 3 \Rightarrow$ R. C. posso risolvere

$$\boxed{h \neq -1, 0}$$

SIST RIDOTTO

$$\begin{cases} --- \\ -y - hz = 3 \\ hy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} --- \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \\ y = \frac{1}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (h+1)x + hy - 1 = 0 \\ \frac{1}{h} + hz = -3 \quad hz = -3 - \frac{1}{h} \\ y = \frac{1}{h} \end{cases}$$

$\longrightarrow (h+1)x + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 \to \cancel{(h+1)}x = 0 \to \underline{x=0}$

$z = -\frac{3}{h} - \frac{1}{h^2} = \frac{-3h-1}{h^2}$

$$S = \left\{ \left(0, \frac{1}{h}, \frac{-3h-1}{h^2} \right) \right\} \qquad h \neq 0, -1$$

UNA SOLA SOLUZ. - TERNA
(NON HO INC. LIBERE)

TOLGO LE CONDIZIONI

- $h = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & h & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -h \neq 0 & 3 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$
$h \neq 0$

$\rho(A) = 2 \neq \rho(A,B) = 3$ $\quad \varnothing$

Se $h=0$ SIST. IMPOSSIBILE (R.C. N° 1)

- $h = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 1 \neq 0$$

$\neq$ $\quad \rho(A,B) = 3$ $\quad \varnothing$

R.

- Se $k \neq 0, -1$ SIST. AMMETTE UNA SOLA SOLUZIONE (SIST. DETERMINATO)

$$S = \left\{ \left(0, \frac{1}{k}, \frac{-3k-1}{k^2} \right) \right\}$$

- Se $k = 0, -1$ SIST. IMPOSSIBILE