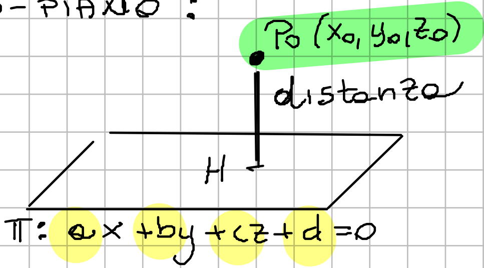
Lezione n. 23 (13-1-22)

- 18 Gennaio Recupero lezione, su TEAMS ore 15–17

DISTANZA PUNTO-PIANO:

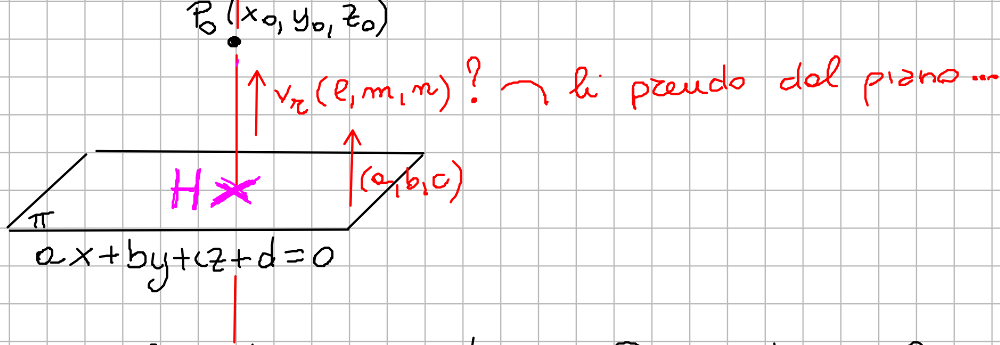
FORMULA



distanza $= \overline{P_0H} = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ← valore assoluto

(slide 67)

1) Proiezione ortogonale H di un punto P_0 su un piano π



- Scriviamo la retta passante per P_0 e ortogonale al piano π:

$$\frac{x-x_0}{\cancel{l}\ a} = \frac{y-y_0}{\cancel{m}\ b} = \frac{z-z_0}{\cancel{n}\ c} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \end{cases} \quad r \perp \pi$$

- Sistema ($\cap$) tra retta r e piano π: $H = r \cap \pi$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} & (r) \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} & \\ ax+by+cz+d=0 & (\pi) \end{cases}$$

Risolvo ... 3 equaz. 3 incognite x, y, z

$$\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \quad \boxed{H = (\_, \_, \_)}$$

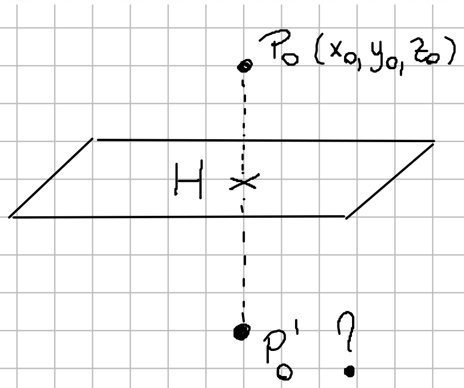
R.

17)

17) Dati il piano π e il punto P_0 trovare il simmetrico P_0' di P_0 rispetto ad π:

$P_0' = ?$

17a) $P_0 = (2, 5, -1), \pi : x+y+z-1 = 0$
17b) $P_0 = (0, 5, 0), \pi : 2x-y-z = 0$



1) TROVO H, proiez. ortogonale di P_0 su π

$H(x_H, y_H, z_H)$

H diventa punto medio tra P_0 e il punto "sconosciuto" P_0'

Ex 17a) $P_0 = (\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{5}, \overset{z_0}{-1})$ $\quad \pi: 1x + 1y + 1z - 1 = 0$ $\quad u_\pi = (a,b,c) = (1,1,1)$

• Scriviamo la retta passante per P_0 e ortogonale a π:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a=1} = \dfrac{y-y_0}{b=1} \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c=1} \end{cases} \quad r \perp \pi \qquad \begin{cases} x-2 = y-5 \\ y-5 = z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y-3 \\ z = y-6 \end{cases} \ \forall y \quad r$$

$H = r \cap \pi$

$$\begin{cases} x = y-3 \\ z = y-6 \\ x+y+z-1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} = \\ = \\ y-3+y+y-6-1=0 \end{cases} \quad 3y = 10 \qquad \begin{cases} x = \frac{10}{3} - 3 = 1/3 \\ z = \frac{10}{3} - 6 = -8/3 \\ y = 10/3 \end{cases}$$

$H = (1/3, 10/3, -8/3)$ ← NON SI PUÒ LEVARE IL DENOM. PERCHÉ È PUNTO

H DIVENTA PUNTO MEDIO TRA P_0 E P_0'

$$\frac{x_{P_0} + x_{P_0'}}{2} = x_H \rightarrow x_{P_0} + x_{P_0'} = 2x_H \rightarrow x_{P_0'} = 2\overset{1/3}{x_H} - \overset{2}{x_{P_0}} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{y_{P_0} + y_{P_0'}}{2} = y_H \rightarrow \text{-----} \rightarrow y_{P_0'} = 2\overset{10/3}{y_H} - \overset{5}{y_{P_0}} = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3}$$

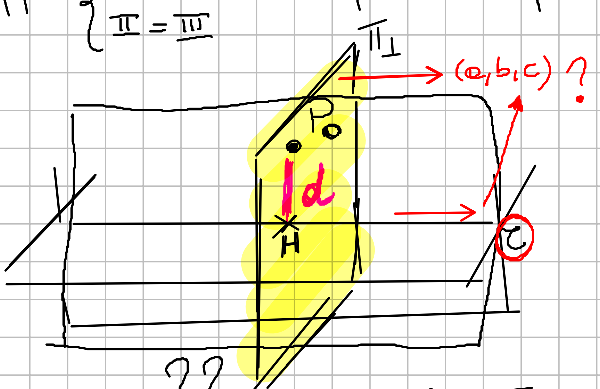
$$\frac{z_{P_0} + z_{P_0'}}{2} = z_H \rightarrow \text{----} \rightarrow z_{P_0'} = 2z_H - z_{P_0} = -\frac{16}{3} - (-1) = -\frac{13}{3}$$

R. $P_0' = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{13}{3}\right)$

DISTANZA PUNTO - RETTA NELLO SPAZIO (slide 70)

Data una retta nello spazio $\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$ $\quad r$

opp $\begin{cases} I = II \\ II = III \end{cases}$ e poi un punto $P_0 \notin r$



?? NON VA BENE

CALCOLARE d = PUNTO-RETTA r

QUI NON ABBIAMO UNA FORMULA DIRETTA

CONOSCIAMO SOLO LA FORMULA DATA PRECEDENTEMENTE COME DISTANZA $P_0 - \pi$

NON PRENDO I PIANI CHE CONTENGONO LA RETTA (SONO ∞)

MA PRENDO IL PIANO $\pi_\perp$ PASSANTE PER P_0 E ORTOGONALE A r

$\underset{l}{a}x + \underset{m}{b}y + \underset{n}{c}z + d = 0$ $\quad$ chi sono a, b, c, d ?

d si trova imponendo il passaggio per P_0

TROVO $\Pi_\perp$ $\rightarrow$ $H = \Pi_\perp \cap r$ (sistema)

DISTANZA $\overline{P_0H} = \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 + (z_H - z_0)^2}$ distanza $d(P_0, r)$ P_0

18) Dati due vettori v_1, v_2,calcolare il prodotto scalare $v_1 \cdot v_2$, i moduli

3

di v_1e di v_2,e l'angolo individuato dai due vettori. Inoltre individuare un vettore parallelo a v_1e uno ortogonale a v_2

18a) $v_1 = (2,5,-1), v_2 = i+j-k$ $(1, 1, -1)$
18b) $v_1 = (1,3,5), v_2 = (0,0,1)$

$v_1 = (2, 5, -1)$ $\qquad$ $\underline{v}_2 = (1, 1, -1)$

$v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 1^\circ + 2 \cdot 2^\circ + 3 \cdot 3^\circ = 2 + 5 + 1 = 8$

- vettore parallelo a v_1 (sono ∞): me basta uno $\lambda v_1 = (2\lambda, 5\lambda, -\lambda)$ $\forall \lambda$
- vettore ortogonale a v_2 (sono ∞): basta imporre prod. scalare $= 0$

$(1,1,-1) \cdot (l, m, n) = 0$ $\qquad$ $l + m - n = 0$ $\qquad$ $l = n - m$

vettore ortogonale a v_2 sarà nella forma $(n-m, m, n)$ $\forall m$ $\forall n$

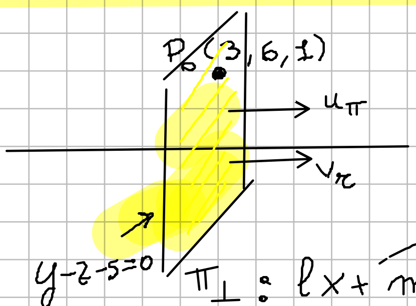
∞ infiniti vettori

19) NON SI DEVE FARE

20) SOSTITUITO DA QUESTO:

$P_0 = (3, 6, 1)$ $\qquad$ $r \begin{cases} x = 2 & (\pi_1) \\ y + z - 1 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$ $\qquad$ $r = \pi_1 \cap \pi_2$ (nello spazio)

TROVARE LA DISTANZA PUNTO - RETTA nello spazio



$r \begin{cases} = \\ = \end{cases}$ $\qquad$ $(l, m, n) = v_r \,//\, u_\pi$

v_r: $\begin{cases} x = 2\cancel{t} \;\; 0 \\ y + z - \cancel{t} = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{cases}$

$(0, -z, z, 0)$

$\boxed{(0, -1, 1}, 0)$

v_r

$\Pi_\perp: \; lx + my + nz + d = 0$

$l = 0, \quad m = -1, \quad n = 1$

$\Pi_\perp$ $\qquad$ $-y + z + d = 0$ $\qquad$ imponiamo il passaggio per $P_0(3,6,1)$ ($x\ y\ z$)

$-6 + 1 + d = 0 \rightarrow -5 + d = 0 \rightarrow d = 5$

$\boxed{\Pi_\perp}: \; -y + z + 5 = 0 \rightarrow \boxed{y - z - 5 = 0}$

$H: \pi_{\perp} \cap r$ $\begin{cases} x = 2 \\ y + z - 1 = 0 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - z \\ 1 - z - z - 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 \\ +2z + 4 = 0 \quad z = -2 \end{cases}$

$H = (2, 3, -2)$ $\quad d(\overset{(3,6,1)}{P_0}, r) = \overline{P_0 H} = \sqrt{(3-2)^2 + (6-3)^2 + (1-(-2))^2} =$

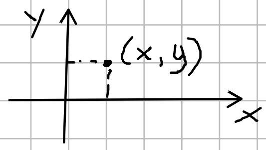
$= \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$ R.

20 b) $P_0 = (1, 0, 4)$ $\quad r \begin{cases} x + y = 0 & (\pi_1) \\ x - y + 6z = 0 & (\pi_2) \end{cases}$ $\quad r: \pi_1 \cap \pi_2$

CALCOLARE LA DISTANZA PUNTO RETTA $d(P_0, r)$ NELLO SPAZIO

FINE DELLA GEOMETRIA LINEARE

CONICHE

Siamo tornati sul piano Oxy  $(z=0)$

Definizione di conica: Una conica è il luogo dei punti del piano che con le loro coordinate $(x, y, \cancel{z})$ soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea nelle variabili x, y del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

coeff

$0x^2 + 0y^2 + \text{noto} +$
$+0xy + 0x + 0y$
$=0$

Ogni equazione della conica si traduce in matrice 3×3 B

Il coeff. di x^2 l'ho chiamato a_{11} → 1° riga 1° colonna

" " di y^2 " " a_{22} → 2° riga 2° colonna

Il termine noto " " a_{33} → 3° riga 3° colonna

MATRICE SIMMETRICA

sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^{(x^2)} & \frac{2a_{12}}{2}\left(xy/2\right) & \frac{2a_{13}}{2}\left(\frac{x}{2}\right) \\ a_{12} & a_{22}^{(y^2)} & \frac{2a_{23}}{2}\left(\frac{y}{2}\right) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}^{(t.n.)} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(x^2)} & \frac{2a_{12}}{2}\left(xy/2\right) \\ a_{12} & a_{22}^{(y^2)} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{33} = |A|$$

TAGLIARE 3° riga 3° colonna di B

1° RIGA = 1° COLONNA

Ex: Conica $4x^2 - y^2 + 5 + 6xy + 2x - y = 0$ equaz. completa

SCRIVIAMO i restanti sono tutti diviso 2

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{2\times2}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1° riga = 1° colonna

$|A| = B_{33}$

TRACCIA DI A
$4 + (-1)$

A cosa servono queste 2 matrici?

$\det B$, $\rho(B)$, $\det A$, $Tr\, A = a_{11} + a_{22}$

$\det B = -20 - 3 + 1 - 1 - 45 = -68$, $\rho(B) = 3$, $\det A = -4 - 9 = -13$, $Tr\, A = 4 - 1 = 3$

Per studiare una conica si considerino le seguenti entità:
1. Il **determinante di B**, $\det B$;
2. Il **rango di B**, $\rho(B)$;
3. Il **determinante di A**, $\det A$ ottenuto tagliando la terza riga e la terza colonna della matrice B (cioè il complemento algebrico B_{33})
4. La **traccia di A**, $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$

Queste quattro grandezze si dicono invarianti ortogonali poichè cambiando sistema di riferimento e quindi cambiando i coefficienti della conica il $\det B, \rho(B), \det A, P.C.(A)$ non variano

Se una conica non è riducibile si dice **irriducibile**.

Figura: ellisse

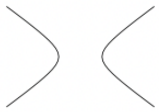
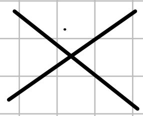


Figura: iperbole

Figura: parabola

Coniche riducibili sono le coniche spezzate in 2 rette



2 rette distinte reali

$x^2 - 9y^2 = 0$

$(x-3y)(x+3y) = 0$

r_1 r_2

$r_1 = r_2$

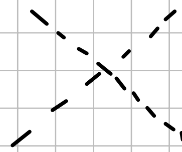
r^2

rette reali coincidenti

$x^2 + 9y^2 - 6xy = 0$

$(x-3y)^2 = 0$

2 rette $r_1 \equiv r_2$



2 rette immaginarie e coniugate

$x^2 + 9y^2 = 0$

$(x+9iy)(x-9iy) = 0$

r_1 r_2 complesse

TABELLA PER LA CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta det $B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta det $B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se det $A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se det $A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se det $A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

Ex: $\det B = -68 \neq 0$ siamo nella 2° colonna della tabelle

$\det A = -13 < 0$ lettera c) IPERBOLE

$Tr A = 3 \neq 0$ iperbole non è equilatera.

FARE GLI ESERCIZI DELLA SLIDE 12.