Ricevimento 4 - 1 - 22

Compito 15 - 9 - 21

2) E' assegnato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (-2,0,-1) \\ g(0,1,1) = (-1,h,0) \\ g(0,1,0) = (0,-1,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per g.

Matrice con il metodo standard

$$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = (-2,0,-1) - g(e_2) = (-2,0,-1) - (0,-1,0) = (-2,1,-1) \leftarrow C_3 \\ g(e_2) + g(e_3) = (-1, h, 0) \Rightarrow g(e_3) = (-1, h, 0) - (0,-1,0) = (-1, h+1, 0) \\ g(e_2) = (0,-1,0) \leftarrow C_2 \end{cases}$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} -2-T & 0 & -1 \\ 1 & -1-T & h+1 \\ -1 & 0 & 0-T \end{pmatrix} \qquad M(g) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & h+1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(T) = \underbrace{(-2-T)(-1-T)(-T)} - (-1-T) = (-1-T)\left[(-2-T)(-T) - 1\right] = 0$$

$$P(T) = (-1-T)\left[2T + T^2 - 1\right] = 0$$

- $(-1-T) = 0 \to T = -1$
- $T^2 + 2T - 1 = 0 \to T = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2} < \begin{matrix} T = -1-\sqrt{2} \\ T = -1+\sqrt{2} \end{matrix}$

Gli autovalori sono distinti tra di loro, hanno tutti molteplicitá algebrica uguale ad uno → quindi anche la molteplicitá geometrica é pure uno

① $T = -1 \quad m_{-1} = 1 \equiv g_{-1}$

② $T = -1-\sqrt{2} \quad m_{-1-\sqrt{2}} = 1 = g_{-1-\sqrt{2}}$

③ $T = -1+\sqrt{2} \quad m_{-1+\sqrt{2}} = 1 = g_{-1+\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ g é semplice $(\forall h \in \mathbb{R})$

$\lambda \rightarrow V_\lambda$

Cerchiamo una base formata da autovettori

Per prima cosa calcoliamo gli autospazi (3 autospazi)

• $T = -1$ $\quad V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2-(-1) & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1) & k+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1) \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k+1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ x + (k+1)z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z & x = 0 \\ 0 = 0 & \forall y \\ \cancel{2}z = \frac{0}{2} & z = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} g_{-1} = \{(0, y, 0)\}$$

$u_1 = (0, 1, 0)$ 1° autovettore

• $T = -1 - \sqrt{2}$ $\quad V_{-1-\sqrt{2}} = \operatorname{Ker} g_{-1-\sqrt{2}} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \overset{-2+1+\sqrt{2}}{-2-(-1-\sqrt{2})} & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1-\sqrt{2}) & k+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & \cancel{-1}\cancel{+1}+\sqrt{2} & k+1 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (-1+\sqrt{2})x - z = 0 \\ x + \sqrt{2}y + (k+1)z = 0 \\ -x + (1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})z - z = 0 \rightarrow 1 \cdot z - z = 0 & \underset{\text{identità}}{\underline{0 = 0}} \quad \forall z \\ (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2}y + (k+1)z = 0 \\ x = (1+\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \sqrt{2}y = -(1+\sqrt{2})z - (k+1)z \\ x = (1+\sqrt{2})z \quad \forall z \end{cases} \qquad \cancel{\sqrt{2}}y = \frac{(-1-\sqrt{2}-k-1)z}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{(-2-\sqrt{2}-k)}{\sqrt{2}}z$$

$$V_{-1-\sqrt{2}} = \left\{\left((1+\sqrt{2})z, \frac{-2-\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}}z, z\right)\right\}$$

$z = 1$ oppure $\underline{\underline{z = \sqrt{2}}}$

$u_2 = \left((1+\sqrt{2})\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}-k, \sqrt{2}\right)$

$T = -1 + \sqrt{2}$ $\quad V_{-1+\sqrt{2}} = \operatorname{Ker} g_{-1+\sqrt{2}} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2-(-1+\sqrt{2}) & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1+\sqrt{2}) & k+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & \cancel{-1}\cancel{+1}-\sqrt{2} & k+1 \\ -1 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (-1-\sqrt{2})x - z = 0 \\ x - \sqrt{2}y + (k+1)z = 0 \\ -x + (1-\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$(\sqrt{2}\ldots)(\sqrt{2}\ldots) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 - 1 \ldots$

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})z - z = 0 \\ (1-\sqrt{2})z - \sqrt{2}y + (h+1)z = 0 \\ x = (1-\sqrt{2})z \end{cases}$$

$(1^2-\sqrt{2}^2)$

$-(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})z - z = 0 \quad z - z = 0 \quad 0=0 \ \forall z$

$\sqrt{2}y = (1-\sqrt{2})z + (h+1)z$

$$\cancel{\sqrt{2}}\,y = \frac{(2-\sqrt{2}+h)z}{\sqrt{2}}$$

$$V_{-1+\sqrt{2}} = \left\{\left((1-\sqrt{2})z,\ \frac{2-\sqrt{2}+h}{\sqrt{2}}z,\ z\right)\right\}$$

$$\underline{u}_3 = \left((1-\sqrt{2})\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}+h,\ \sqrt{2}\right) \quad 3° \text{ autovettore}$$

BASE DI AUTOVETTORI $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$

25/1/21

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

Risoluzione

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

ERRATA

$e_1 = (1,0,0)$ $\quad$ $f(e_1)$

$x=1 \quad y=0 \quad z=0 \to (0,h+1,0) \leftarrow C_1$

$e_2 = (0,1,0)$ $\quad$ $f(e_2)$

$x=0 \quad y=1 \quad z=0 \to (h,h,-1) \leftarrow C_2$

$e_3 = (0,0,1)$ $\quad$ $f(e_3)$

$x=0 \quad y=0 \quad z=1 \to (0,-1,-h) \leftarrow C_3$

ok!

$$M(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \end{array}$$

Studiare Imf e kerf

CALCOLARE IL RANGO : det $\neq 0 \to \rho = 3$

$$\det M(f) = +h(h)(h+1) = h^2(h+1) \neq 0 \qquad h^2 \neq 0 \to h \neq 0$$

$$h+1 \neq 0 \to h \neq -1$$

Se $h \neq 0$, $h \neq -1$ IL RANGO È MAX $\quad$ dim Imf $= 3$ $\quad$ BASE Imf $= \{C_1, C_2, C_3\}$

Imf $\equiv \mathbb{R}^3$ (f suriettiva) $\quad$ dim Kerf $= 3 - \rho = 3 - 3 = 0$ (f iniettiva)

$\Rightarrow f$ isomorfismo

Equaz. cartesiane di $\mathrm{Im} f$: $\forall x, \forall y, \forall z$ (poiché $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$)
" " di $\mathrm{Ker} f$: $x=0 \quad y=0 \quad z=0$

Togliamo le condizioni

$\boxed{h=0}$ $\rightarrow$ $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho < 3$

det $\neq 0$ $\rightarrow$ $\rho = 2$ $\dim \mathrm{Im} f = 2$

BASE $\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$

Equaz. cartesiane di $\mathrm{Im} f$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow C_1 \\ \leftarrow C_2 \\ \end{matrix}$$

det $=0$ $\quad -x = 0 \quad x = 0 \quad \forall y \quad \forall z$

$\mathrm{Im} f = \{(0, y, z)\}$

$\mathrm{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

$\dim \mathrm{Ker} f = n - \rho = 3 - 2 = 1$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f = \{(x, 0, x)\}$

BASE $\mathrm{Ker} f = \{(1, 0, 1)\}$

Equaz. cartesiane di $\mathrm{Ker} f$ sono : $x = z \quad y = 0$

$\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = y = 0\}$

• $\boxed{h=-1}$ $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho = 2$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$

BASE $\mathrm{Im} f = \{C_2, C_3\}$

Equaz. cartesiana di $\mathrm{Im} f$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$z - x - x + y = 0$

$z - 2x + y = 0$

$\boxed{2x - y - z = 0}$

$2(-1) - (-1) - (-1) = 0$?

$-2 + 1 + 1 = 0 \quad 0 = 0$ ✓

Equaz. cartesiana di $\mathrm{Ker} f$:

$\dim \mathrm{Ker} f = 1$

$$\begin{cases} -y=0 \\ -y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad 0=0 \qquad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ \forall x \end{cases} \qquad \ker f=\{(x,0,0)\}$$

$$\text{BASE } \ker f=\{(1,0,0)\}$$

Equaz. cart. $y=z=0$

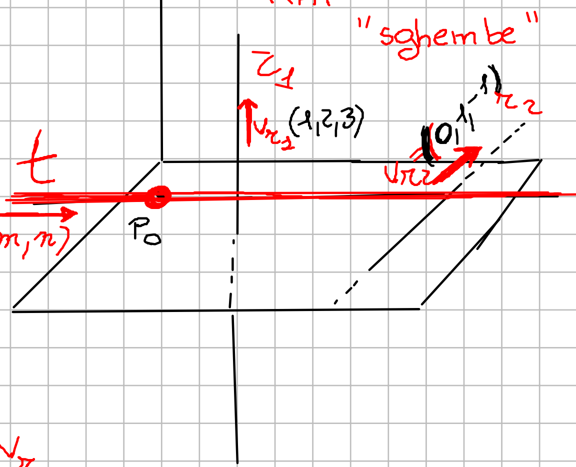
---

8) Date due rette r_1, r_2 e un punto P_0, determinare la retta t che passa per P_0 ed è ortogonale ad entrambe le rette

8a) $r_1 : \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} y+z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}, P_0 = (1,0,-3)$

8b) $r_1 : \begin{cases} x-z &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, P_0 = (0,0,3)$

r_1 ed r_2 non si incontrano MAI "sghembe"



8a) CERCO LA RETTA t

$\underline{v}_t=(l,m,n)$

$\underline{v}_t=(l,m,n)$ vettore direttivo di t

$\underline{v}_t \perp v_{r_1}$

$\underline{v}_t \perp v_{r_2}$

Dati 2 vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ questi sono ortogonali quando il loro prodotto scalare $=0$

$\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2 \iff \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$ CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ

$v_1=(l_1,m_1,n_1)$

$v_2=(l_2,m_2,n_2)$

$1^\circ \cdot 1^\circ + 2^\circ \cdot 2^\circ + 3^\circ \cdot 3^\circ = 0$

$$\boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

CALCOLIAMO IL VETTORE DIRETTIVO DI r_1: $\underline{v}_{r_1}$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y=\cancel{1 \cdot t'} \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2x-z=0 \\ y=2x \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=3x \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \quad P_\infty(x,2x,3x,0)=(1,2,3,0)$$

$\underline{v}_{r_1}=(1,2,3)$

CALCOLIAMO IL VETTORE DIRETTIVO DI r_2: $\underline{v}_{r_2}$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-y \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \forall y \qquad P_\infty=(0,y,-y,0) \to (0,1,-1,0)$$

$v_{r_2}=(0,1,-1)$

$(l, m, n) \perp (1,2,3) \longrightarrow$ PROD. SCAL. $=0 \to \begin{cases} 1l + 2m + 3n = 0 \\ \cancel{0l} + 1m - 1n = 0 \end{cases}$

$(l, m, n) \perp (0,1,-1) \longrightarrow$ PROD. SCAL. $=0 \to$

$$\begin{cases} l + 2m + 3n = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l + 2n + 3n = 0 \\ m = n \end{cases} \quad \begin{cases} l = -5n \\ m = n \end{cases} \quad \forall n$$

$n=1$ o divido per n $(n \neq 0)$

$$\underline{v}_t = (l, m, n) = \left(-5\frac{\cancel{n}}{n}, \frac{\cancel{n}}{n}, \frac{\cancel{n}}{n}\right) = \boxed{(-5,1,1)}$$

Equazione della retta nello spazio passante per punto P_0

$$\frac{x - \overset{=1}{x_0}}{\underset{-5}{l}} = \frac{y - \overset{=0}{y_0}}{\underset{1}{m}} = \frac{z - \overset{=-3}{z_0}}{\underset{1}{n}} \qquad P_0(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{0}, \underset{z_0}{-3})$$

doppia equazione sarebbero i 2 piani

$t \Rightarrow$ intersezione tra 2 piani

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-(-3)}{1} \Rightarrow \frac{x-1}{-5} = y = z+3$$

$$\to t \begin{cases} \frac{x-1}{-5} = y \\ y = z+3 \end{cases} \to \begin{cases} x - 1 = -5y \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 5y - 1 = 0 & \pi_1 \\ y - z - 3 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

$$t : \pi_1 \cap \pi_2$$

8b) completare

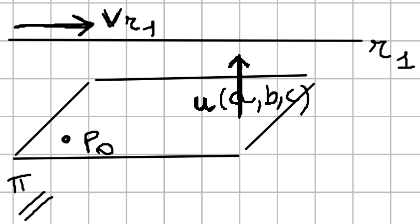
9) Date due rette r_1, r_2 e un punto P_0, determinare il piano $\pi_{\parallel}$ che passa per P_0 ed è parallelo ad entrambe le rette

9a) $r_1 : \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} y + z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}, P_0 = (1, 0, -3)$

9b) $r_1 : \begin{cases} x - z &= 0 \\ x - y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x + z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, P_0 = (0, 0, 3)$

Risoluzione

l'equaz. del piano $ax + by + cz + d = 0$ $\quad a, b, c, d$ da trovare



$\underline{u} = (a,b,c) \perp v_{r_1}$

$\underline{u} = (a,b,c) \perp v_{r_2}$ (per lo stesso motivo)

Poiché r_1, r_2 sono le stesse rette dell'esercizio 8 abbiamo già trovato i vettori direttivi

$$\underline{v}_{r_1} = (1,2,3) \qquad \underline{v}_{r_2} = (0,1,-1)$$

$$\underline{u} = (a,b,c) \perp \underline{v}_{r_1} = (1,2,3) \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v}_{r_1} = 0$$
$$\underline{u} = (a,b,c) \perp \underline{v}_{r_2} = (0,1,-1) \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v}_{r_2} = 0$$

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2c+3c=0 \\ b=c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-5c \\ b=c \end{cases}$$

vettore direttivo di $\pi_{\parallel}$

$$\underline{u} = (a,b,c) = (-5c, c, c) = \underset{a\ \ b\ \ c}{(-5,1,1)}$$

$\pi_{\parallel}: \; -5x+y+z+d=0$

dobbiamo trovare d

Come lo troviamo d? Imponiamo il passaggio per $P(1,0,-3)$

$$-5(1)+0-3+d=0$$
$$-5-3+d=0$$
$$-8+d=0 \rightarrow d=8$$

Quindi $\pi_{\parallel}: \; -5x+y+z+8=0$

$$\boxed{5x-y-z-8=0}$$

9b) completare a casa