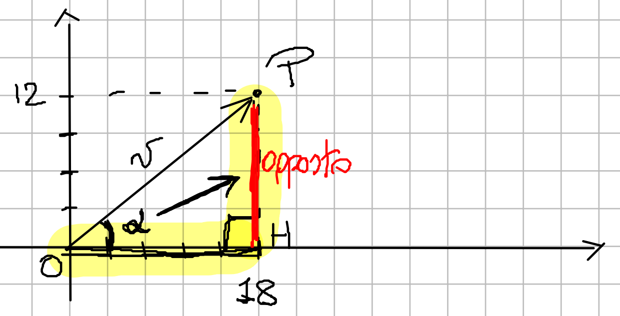
Ricevimento 2-11-21

ESERCIZI ASSEGNATI SUL GRUPPO SLIDE 6

" VETTORI, OPERAZIONI E SPAZI VETTORIALI "

Date le componenti cartesiane di un vettore, determinare il modulo del vettore e l'angolo che esso forma con l'asse $\vec{x}$

1) $\vec{v} = (18, 12)$



3u

MODULO, SI INDICA CON $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= \sqrt{18^2 + 12^2} = \sqrt{324 + 144} = \sqrt{468} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13} = 6\sqrt{13}$$

468	2
234	2
117	3
39	3
13	13

TROVARE L'ANGOLO α :

CATETO È UGUALE ALL'IPOTENUSA PER IL COSENO DELL'ANGOLO ADIACENTE $\overline{OH} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha$
$(\neq 90)$

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{\cancel{18}^{\,3}}{\cancel{6}_{\,1}\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\Rightarrow$ FUNZ. INVERSA DEL COS CHE SI CHIAMA arcocoseno opp. $\cos^{-1}$

$$\alpha = \underset{\cos^{-1}}{\arccos}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right) = \text{calcolatrice si risale all'angolo}$$

$$\alpha = \overset{\cos^{-1}}{\overset{\shortparallel}{\arccos}}\, 0{,}83 \;\cong\; 33^\circ$$

2° MODO PER CALCOLARE α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opposto all'angolo}}{\text{cateto rimanente}} = \frac{\overset{\overline{PH}}{\cancel{12}}\,\cancel{6}\,2}{\cancel{18}\,\cancel{9}\,3} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = tg^{-1}\, 0,\bar{6} \cong 33^\circ$$

5) $v = (2, -3)$ 6) $v = (-1, -3)$ 7) $v = (-3, 4)$

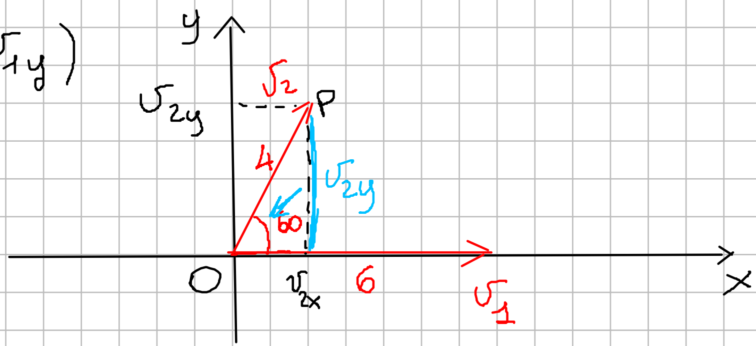
2

Dati due vettori v1, v2 aventi un determinato modulo e che formano fra loro un determinato angolo, determinare il vettore somma v1 + v2 e il vettore differenza v1 – v2 mediante le loro componenti

1) $|v_1| = 6$ $|v_2| = 4$, $\alpha = 60^\circ$

TROVARE, PER FARE LA SOMMA $v_1 + v_2$, LE COMPONENTI SIA DI v_1 CHE DI v_2

(v_{1x}, v_{1y})



$v_{1x} = 6$ $v_{1y} = 0$

$v_1 = (6, 0)$

si vede dalla posiz. di v_1

TROVIAMO LE COMPONENTI DI v_2:

$$v_{2x} = \overset{4}{\overline{OP}} \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$v_{2y} = \overline{OP} \cdot \text{sen}\, 60^\circ = \cancel{4}^{\,2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{\,1}} = 2\sqrt{3}$$

opposto

$$\Rightarrow v_2 = (2, 2\sqrt{3})$$

CALCOLIAMO IL VETTORE SOMMA

$$v_1 + v_2 = (6, 0) + (2, 2\sqrt{3}) = (8, 2\sqrt{3})$$

VETTORE DIFFERENZA:

$$v_1 - v_2 = (4, -2\sqrt{3})$$

$$v_{2y} = \sqrt{\overline{OP}^2 - v_{2x}^2}$$ PURE!

3

Calcolare il modulo del $\underbrace{\text{vettore risultante}}_{\text{VETTORE SOMMA}}$ delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4)$ $\quad v_2 = (0, 2)$ $\quad \Rightarrow v_1 + v_2 = (1, -2)$

4

Calcolare il prodotto scalare delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4)$ $\quad v_2 = (0, 2)$

CALCOLARE

$$v_1 \cdot v_2 = (1, -4) \cdot (0, 2) = 1 \cdot \cancel{0} + (-4) \cdot 2 = -8$$

$$1^\circ \cdot 1^\circ + 2^\circ \cdot 2^\circ$$

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ (1, -4) \cdot & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

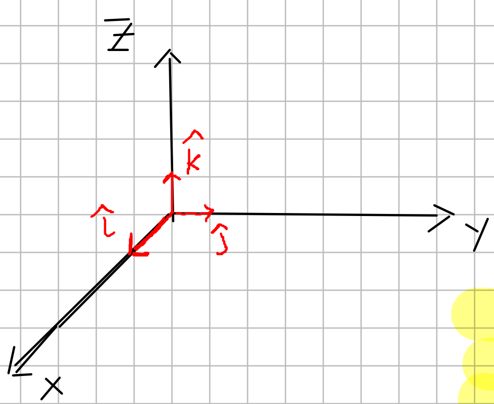
"PRODOTTO DI UNA RIGA PER UNA COLONNA"

5

Calcolare il prodotto vettoriale delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4)$ $\quad v_2 = (0, 2)$

CALCOLARE $\quad v_1 \wedge v_2 = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & \cancel{0} \\ 0 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix} = \boxed{2\hat{k}}$



$\vec{x} \neq \hat{i}$; $\boxed{\hat{x} = \hat{i}}$ VERSORE

$$v = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} = (2, -3, 4)$$

$$v = 2\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}$$

SUPPONIAMO CHE NELL'EQU. CARTESIANA C'É IL TERMINE NOTO

$W \quad x - y + z - 4 = 0 \quad$ IN $\mathbb{R}^3$

IL VETTORE NULLO SODDISFA ? NO

$\underline{0} = (0,0,0) \notin W$

UN INSIEME CHE NON CONTIENE $\underline{0}$ NON POTRÁ MAI ESSERE UNO SPAZIO VETTORIALE PERCHÉ

↓ AVEVA 5 PROPRIETÁ

1) RISP. ALLA + : ~~GRUPPO ABELIANO~~
- ASSOCIATIVA (VALE)
- $\exists \, \underline{0} \in W$ el. neutro della somma ?

NON VALE PIÚ

Dato il sottospazio W trovare il suo elemento generico

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x - 2y - z = 0}\}$

EQUAZIONE CARTESIANA

$\Downarrow$

$x = 2y + z \quad \forall y, \forall z$

$W = \{(2y + z, y, z)\}$ ELEMENTO GENERICO

COMPLETARE A CASA 2) 3) 4) 5) . . .

$$\boxed{R_i \to R_i + \lambda R_j}$$

CALCOLARE IL RANGO DELLA SEGUENTE MATRICE AL VARIARE DEL PARAMETRO $h \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{h \neq 0} & 1 \\ \boxed{h} & 0 & 0 \\ -h & h & h \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$\quad \text{III} \quad \text{II} \quad \text{I}$

É già Ridotta per colonne

CONDIZIONE : SE $\boxed{h \neq 0}$ ******

ho 3 elementi speciali (uno per colonna)

CONCLUSIONE $\quad r(A) = 3$

Tolgo la condizione : $\boxed{h = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad r(A) = 1$

R. Se $h \neq 0$ $\quad r(A) = 3$; Se $h = 0$ $\quad r(A) = 1$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2h+2 & 2h+2 & 4h+12 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

CALCOLARE IL RANGO AL VARIARE DI $h \in \mathbb{R}$

RISOLUZIONE

$A_{3\times3}$ $\Rightarrow$ CALCOLO IL RANGO USANDO IL METODO DEI MINORI $\Rightarrow$ DETERMINANTE (MINORE DI ORDINE MAX) 3×3

$$\det A = 32(2h+2) + 4(2h+2) = 36(2h+2) = 72(h+1)$$

PONGO $\det A \neq 0 \quad \cancel{72}(h+1) \neq 0 \quad \boxed{h \neq -1}$ *****

SE $h \neq -1 \quad r(A) = 3$

TOLGO LA CONDIZIONE: $\boxed{h = -1}$ $\Rightarrow$ SOSTITUISCO

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad r(A) = 2$$

R. Se $h \neq -1$ $r(A)=3$; Se $h=-1$ $r(A)=2$

CALCOLARE IL RANGO

$$A \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{h}^{\neq 0} \\ \boxed{h+1}^{\neq 0} & -1 & h \\ 0 & -h & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array} \end{array}$$

AL VARIARE DI $h \in \mathbb{R}$

SE $h \neq 0$ $h \neq -1$ $\Rightarrow$ $r(A)=3$

POI TOLGO LA CONDIZIONE

$\boxed{h=0}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$

POI TOLGO PURE LA CONDIZIONE

$\boxed{h=-1}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$

R. Se $h \neq 0, -1$ $r(A)=3$

Se $h=0$ $r(A)=2$; Se $h=-1$ $r(A)=2$

CALCOLARE IL RANGO DI $A = \begin{pmatrix} h+1 & h & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix}$

X CASA