Lezione n° 15 (23-11-21)

APPLICAZIONI LINEARI

Dati 2 spazi vettoriali sul campo K, V e W

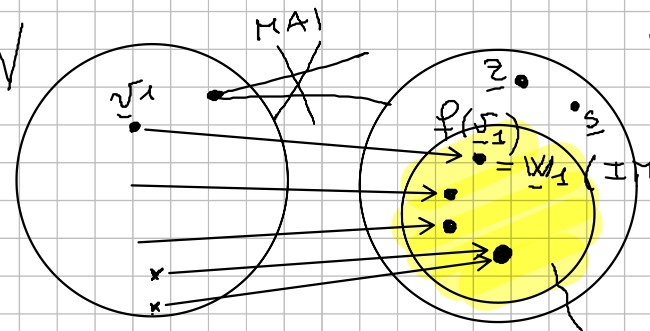
$$f: V \to W$$

si dice applicazione lineare se valgono 2 proprietà:

1) $\forall\, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$

2) $\forall\, a \in K, \forall\, \underline{v} \in V \quad f(a \cdot \underline{v}) = a \cdot f(\underline{v})$

IMMAGINE DI f : $\mathrm{Im} f$



(IMMAGINE DEL VETTORE $\underline{v}_1$)

$z, s \notin \mathrm{Im} f$

(elementi VUOTI, NON PROVENGONO DA NESSUNO)

INSIEME IMMAGINE DI f

(sono tutti i vettori di W che provengono da almeno un vettore di V)

$$\mathrm{Im} f \subseteq W$$

Se $\boxed{\mathrm{Im} f = W}$ (tutti gli elem. di W provengono da V)

allora la f si dice $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$

Si dimostra che "$\mathrm{Im} f$ è SOTTOSPAZIO DI W"

Dimostrazione

1) Chiuso rispetto alla somma

$$\underbrace{\forall\, w_1, w_2 \in \mathrm{Im} f}_{\Downarrow} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im} f \ ?$$

entrambi "provengono" da V $\Downarrow$

$\exists\, v_1, v_2 \in V$ / Tale che?

$f(v_1) = w_1 \ ; \ f(v_2) = w_2$

$\hookrightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \underset{\uparrow}{=} f(v_1 + v_2)$

LINEARITÁ 1) SOMMA

$\underbrace{w_1 + w_2}_{\hookrightarrow \in \operatorname{Im} f} = f(v_1 + v_2) \Rightarrow$ proviene da $v_1 + v_2$

✓

2) Chiuso risp. al prod. esterno

$\forall a \in K \quad \underbrace{\forall w \in \operatorname{Im} f}_{\text{proviene da } V} \Rightarrow a \cdot w \in \operatorname{Im} f$?

$\exists v \in V \mid f(v) = w$

Calcolo $\quad a \cdot \underline{w} = a \cdot f(\underline{v}) = f(a\underline{v})$

LINEARITÁ 2)

$\underbrace{a\underline{w}}_{\text{proviene da } a\underline{v}} = f(av)$

$\Rightarrow a\underline{w} \in \operatorname{Im} f$ ✓

CONCLUDO CHE $\operatorname{Im} f$ É SOTTOSPAZIO DI W

Dato che $\operatorname{Im} f$ é sottospazio avrá una base, quindi una dimensione (n° di vettori che formano una base)

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = \rho(A)}$$

A = MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZ. LINEARE

$$\boxed{\text{BASE } \operatorname{Im} f = \{ \underbrace{C_1, \dots C_i, \dots C_j, \dots}_{} \} \quad \text{colonne della matrice } A \text{ (di partenza) linearm. indipendenti}}$$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(C_1, C_2, \dots, C_n)$

LA MATRICE RIDOTTA PER RIGA NON PUO' FORNIRE LA BASE DI $\operatorname{Im} f$

22/2/21

$$M(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} h+1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{matrix}} & \begin{matrix} h \\ h+1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} h+1 & 1 \end{matrix} & h \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Studiamo $\operatorname{Im} f$

Calcoliamo il rango di $M(f)$ $\qquad 3\times 3$

$$\det M(f) = \cancel{h(h+1)^2} + \cancel{(h+1)^2} - \cancel{h(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2} = 0 \quad \forall h$$

$\rho < 3$

UN MINORE DI ORDINE 2 $\begin{vmatrix} h+1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{vmatrix} = (h+1)^2 \neq 0$

$h+1 \neq 0$

***** $h+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \rho = 2$

$h \neq -1$

sono dettate dal minore

Se $h \neq -1$ $\dim \operatorname{Im} f = 2$ $\quad$ BASE $\operatorname{Im} f = \{ C_1, C_2 \}$

BASE $\operatorname{Im} f = \{ (h+1, 0, h+1), (1, h+1, 1) \}$ $\quad h \neq -1$

LEVIAMO LA CONDIZIONE :

$\boxed{h = -1}$ sostituiamo nella matrice $M(f) = A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad R_1 = R_3$$

$\rho = 1$

$\dim \operatorname{Im} f = 1$; BASE $\operatorname{Im} f = \{ C_2 \} = \{ (1, 0, 1) \}$

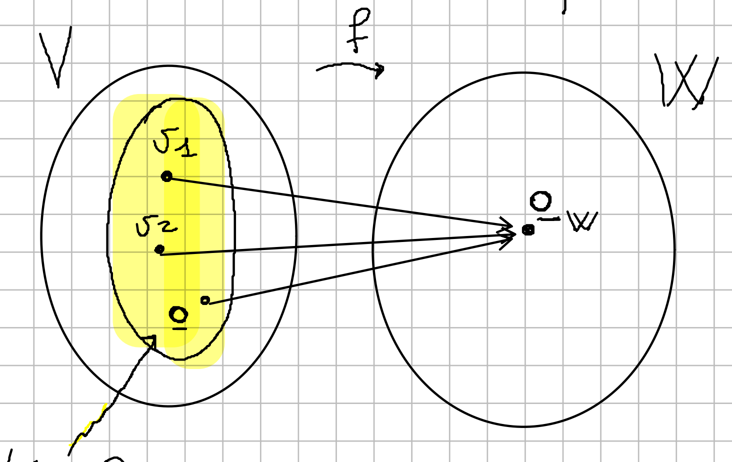
R.
$$\begin{cases} \text{Se } h \neq -1 & \dim \operatorname{Im} f = 2 & \text{Base } \operatorname{Im} f = \{ (h+1, 0, h+1), (1, h+1, 1) \} \\ \text{Se } h = -1 & \dim \operatorname{Im} f = 1 & \text{Base } \operatorname{Im} f = \{ (1, 0, 1) \} \end{cases}$$

FARE ESERCIZI LIBRO PAG 151 - 188

CONSIDERANDO SOLO LE MATRICI $\boxed{M^{\mathcal{E}}(f), \; M(f)}$

(OMETTERE $M^{\mathcal{E}\mathcal{A}}(f)$, $M^{\mathcal{A}}(f)$, $M^{\mathcal{A}\mathcal{E}}(f)$, ...)

NUCLEO DI f : $\mathrm{Ker}\, f$



$f(v_1)=\underline{0}$
$f(v_2)=\underline{0}$
$f(\underline{0})=\underline{0}$

Ker f (FORMATO DAI QUEI VETTORI DEL DOMINIO CHE HANNO PER IMMAGINE $\underline{0}_W$)

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W \} \subseteq V$$

SI DIMOSTRA CHE Ker f É SOTTOSPAZIO DI V

DIMOSTRAZIONE

1) CHIUSO RISP. ALLA SOMMA: $\underbrace{\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f}_{\text{«finiscono» nel vettore nullo di } W} \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$?

$f(\underline{v}_1) = \underline{0}_W \qquad f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$

sommiamo membro a membro

$$\underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{LINEARITÁ 1)}} = \underbrace{0_W + 0_W}$$

$$\underbrace{f(v_1 + v_2)} = 0_W$$

$v_1 + v_2$ finisce in $\underline{0}_W$

✓

2) CHIUSO RISP. AL PROD. ESTERNO: $\underbrace{\forall a \in K, \forall v \in \mathrm{Ker}\, f} \Rightarrow a v \in \mathrm{Ker}\, f$?

$f(v) = 0$

moltiplico 1° e 2° membro per a

$$a \cdot f(v) = \underbrace{a \cdot 0}$$

$$f(av) = 0$$

av finisce in zero

✓

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\rho} = \underbrace{\dim V}_{\text{NOTA } n}}$$

NOTA BENE (Dim. omesso)

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = n - \rho}$$

BASE $\operatorname{Ker} f$: SIST. LINEARE OMOGENEO

$$A \cdot \underline{X} = \underline{0} \qquad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA (di solito è usata la sostituzione)

22/2/21

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \qquad f: \underset{\substack{V \\ n=3}}{\mathbb{R}^{\overset{n}{3}}} \to \underset{W}{\mathbb{R}^3}$$

Studiamo $\operatorname{Ker} f$

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \rho$$

Se $h \neq -1$ $\rho = 2$ $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

BASE $\operatorname{Ker} f$: $AX = 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{h+1} & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1^{*} & 1 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

RIDUCO

$$R_3 \to R_3 - R_1 \qquad \begin{pmatrix} \boxed{h+1}^{\neq 0} & 1 & h \\ 0 & \boxed{h+1}^{\neq 0} & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ RIDOTTA} \qquad \begin{cases} (h+1)x_1 + x_2 + h x_3 = 0 \\ \cancel{(h+1)}^{\neq 0} x_2 + \cancel{(h+1)}^{\neq 0} x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (h+1)x_1 - x_3 + h x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 \quad \forall x_3 \end{cases} \qquad (h+1)x_1 = x_3 - h x_3 \qquad \cancel{(h+1)}x_1 = \frac{(1-h)x_3}{h+1}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \left(\frac{(1-h)x_3}{h+1}, -x_3, x_3 \right) \right\} \text{ 1 INCOGN. LIBERA}$$

BASE $\ker f = \{ (\frac{1-h}{h+1}, -1, 1) \}_{x_3=1}$ UN SOLO VETTORE BASE DI $\ker f$ SE $h \neq -1$

LEVIAMO LA CONDIZIONE $h=-1$ $\rho = 1$ $\dim \ker f = 3-1 = 2$

$AX = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ \cancel{0=0} \\ \cancel{x_2 - x_3 = 0} \end{cases}$$

$x_2 = x_3$
$\forall x_1$

$\ker f = \{ (x_1, x_3, x_3) \}$ 2 INCOGN. LIBERE

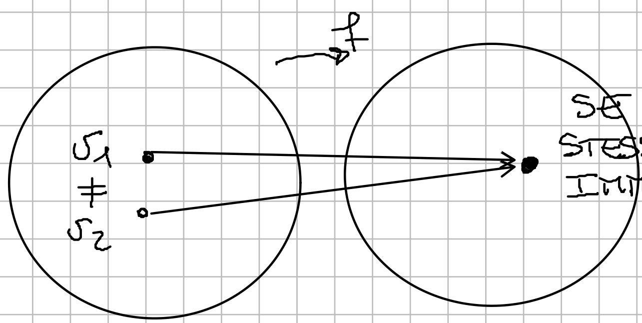
PER BASE
$x_1 = 1 \quad x_3 = 0$ 1° vett
$x_1 = 0 \quad x_3 = 1$ 2° vett.

BASE $\ker f = \{ (1,0,0), (0,1,1) \}$

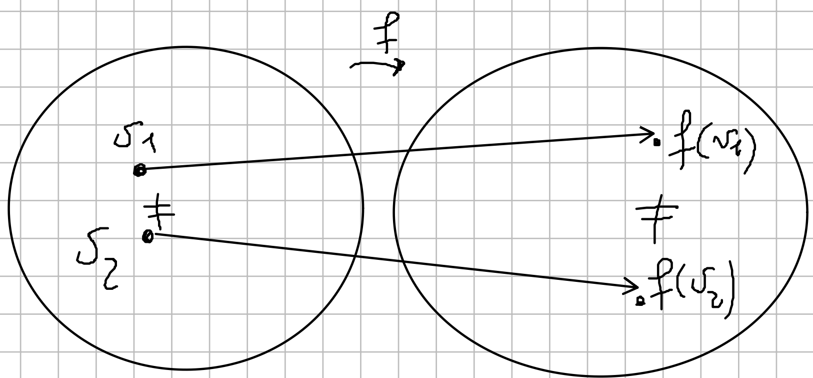
APPLICAZIONE INIETTIVA

"AD ELEMENTI DISTINTI DEL DOMINIO CORRISPONDONO ELEMENTI DISTINTI DEL CODOMINIO"

$\forall \, v_1, v_2 \in V \quad v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$



SE HANNO LA STESSA IMMAGINE NON È INIETTIVA!!!



È INIETTIVA

SI PUÒ DIRE ANCHE IN UN ALTRO MODO:

"Se $f(v_1) = f(v_2)$ allora affinché f è iniettiva deve accadere che $v_1 = v_2$"

TEOREMA

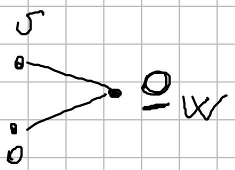
f È INIETTIVA $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}_V\}$

DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$:

Ipotesi f iniettiva   Tesi $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}_V\}$

Considero $\forall\ \underbrace{\underline{v} \in \operatorname{Ker} f}_{\Downarrow}$ E DIMOSTRO CHE $\underline{v} = \underline{0}_V$

- $f(\underline{v}) = \underline{0}_W$
- $f(0) = \underline{0}_W$



Per Ipotesi f È INIETTIVA
é possibile solo se
sono uguali
$\Rightarrow v = 0$

$\Leftarrow$ VICEVERSA

Ipotesi $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}_V\}$ Tesi f iniettiva

VOGLIO DIMOSTRARE CHE f È INIETTIVA QUINDI PRENDO $\boxed{f(v_1) = f(v_2)}$ E DIMOSTRARE $v_1 = v_2$

$\Downarrow$

TUTTO AL I MEMBRO

$$f(v_1) - f(v_2) = 0$$

LINEARITÀ

$$f(v_1 - v_2) = 0$$

$v_1 - v_2$ finisce in zero

$\Downarrow$

$$v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f$$

PER IPOTESI IL NUCLEO
È FORMATO SOLO DALLO ZERO

$\Downarrow$

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

f È INIETTIVA

c.v.d. $\checkmark$

$\square$