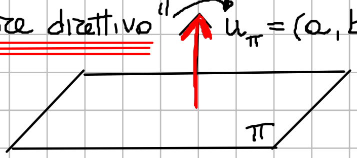
Lezione n° 22 (11 - 1 - 22)

Equazione del piano

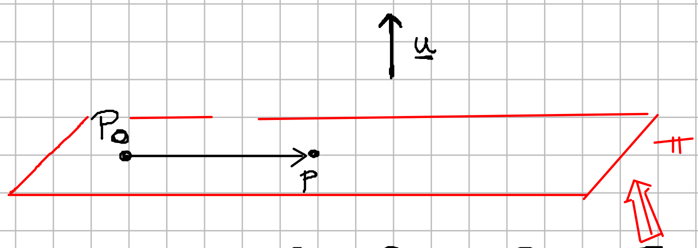
$ax + by + cz + d = 0 \quad (\pi)$ EX: $2x - y + z + 4 = 0 \quad (\pi)$

"vettore direttivo" $u_\pi = (a, b, c) \perp \pi$ $u_\pi = (2, -1, 1) \perp \pi$



DIMOSTRIAMO IL PERCHÉ IL PIANO HA QUESTA EQUAZIONE

Fissiamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore $\underline{u} = (a, b, c)$



ESISTE UNO E UN SOLO PIANO PASSANTE PER P_0 E ORTOGONALE AL VETTORE $\underline{u}$

Consideriamo il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ con P punto generico del piano $P(x, y, z) \in \pi$

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{u}$ quindi ? $\boxed{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0}$ PROD. SCALARE $= 0$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \qquad 1 \cdot 1' + 2 \cdot 2' + 3 \cdot 3' = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{\text{PONGO } = d} = 0 \Rightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

C.V.D.

Slide 49 (mo)

PIANO PASSANTE PER 3 PUNTI :

$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Imponiamo il passaggio per :

$$\begin{cases} P_1 : & ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ P_2 : & ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ P_3 : & ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \quad \text{Si risolve} \quad \begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$$

una incognita libera ma sono proporzionali

3 equaz. 4 incognite

sist. lineare omogeneo

EX $\begin{cases} a = 3d \\ b = 2d \\ c = d \end{cases} \rightarrow 3\cancel{d}x + 2\cancel{d}y + \cancel{d}z + \overset{1}{\cancel{d}} = 0$

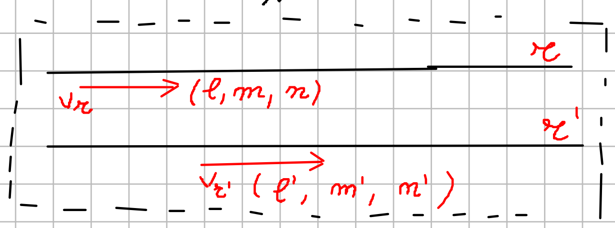
divido per d (oppure $d = 1$)

$$3x + 2y + z + 1 = 0$$

Esercizio "teorico" n°1

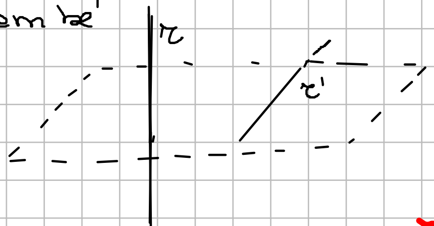
Date 2 rette nello spazio r, r', quando sono parallele? (distinte)

$r \,//\, r'$



- Sono parallele se non si incontrano mai e c'è un piano che le contiene entrambe

- Sono rette SGHEMBE se non si incontrano mai ma non esiste un piano che le contiene entrambe



$v_r \,//\, v_{r'}$ (vettori direttivi)

$(l, m, n) \,//\, (l', m', n')$

QUINDI ?

DIFFERISCONO PER UN FATTORE DI PROPORZIONALITÀ

lamda

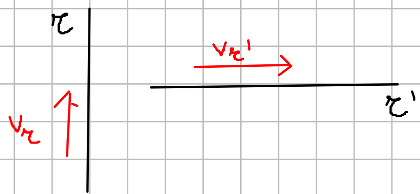
$$(l, m, n) = \lambda (l', m', n') \Rightarrow \begin{cases} l = \lambda l' \\ m = \lambda m' \\ n = \lambda n' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda l' = l \\ \lambda m' = m \\ \lambda n' = n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{l}{l'} \\ \lambda = \frac{m}{m'} \\ \lambda = \frac{n}{n'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}}$$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA 2 RETTE

Esercizio teorico n° 2

Date 2 rette r e r' nello spazio, quando sono ortogonali?



$v_r \perp v_{r'} \rightarrow (l, m, n) \perp (l', m', n')$

$(l, m, n) \cdot (l', m', n') = 0$

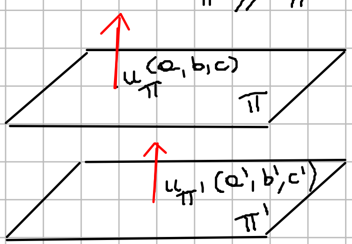
$$\boxed{ll' + mm' + nn' = 0}$$

CONDIZ. DI ORTOGONALITÀ TRA r E r'

Esercizio teorico n° 3

Dati 2 piani π e π' quando sono paralleli?

$\pi \,//\, \pi'$



$u_\pi \,//\, u_{\pi'} \Rightarrow \boxed{\underline{u}_\pi = \lambda \underline{u}_{\pi'}} \Rightarrow$

$$(a, b, c) = \lambda (a', b', c') \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda a' \\ b = \lambda b' \\ c = \lambda c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{a}{a'} \\ \lambda = \frac{b}{b'} \\ \lambda = \frac{c}{c'} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$$

COND. DI PARALLELISMO TRA π E π'

Esercizio teorico n° 4

Dati 2 piani π e π' quando sono ortogonali?

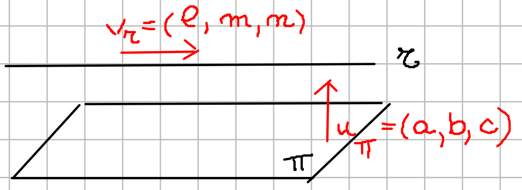
→ quando i vettori direttivi sono ortogonali $u_\pi \perp u_{\pi'}$ →

→ $u_\pi \cdot u_{\pi'} = 0$ → $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0$ → $\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$

COND. DI ORTOGON. TRA π E π'

Esercizio teorico n° 5

Dati una retta r nello spazio e un piano π, quando sono paralleli?



π = PIGRECO

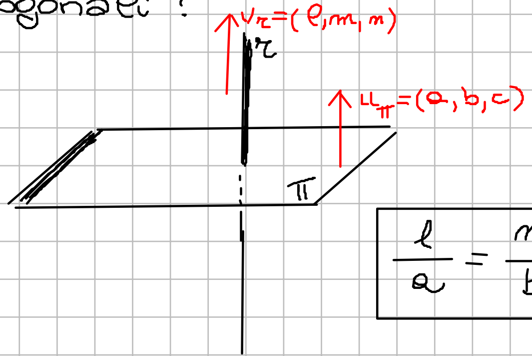
$\boxed{v_r \perp u_\pi}$ NOVITÀ!!

$v_r \cdot u_\pi = 0$ → $(\ell, m, n) \cdot (a, b, c) = 0$

→ $\boxed{a\ell + bm + cn = 0}$ COND. DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO

Esercizio teorico n° 6

Dati una retta r nello spazio e un piano π, quando sono ortogonali?



$\boxed{v_r \parallel u_\pi}$ → $v_r = \lambda u_\pi$

$(\ell, m, n) = \lambda(a, b, c)$

$$\begin{cases} \ell = \lambda a \\ m = \lambda b \\ n = \lambda c \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \ell/a \\ \lambda = m/b \\ \lambda = n/c \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\ell}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}}$$

COND. DI ORTOGONALITÀ TRA r E π

Rette SGHEMBE, come si fa a capire se lo sono?

r, r' sono sghembe se e solo se $\det A \neq 0$ (4×4)

COEFFICIENTI TUTTI AL I MEMBRO

$$r \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$r' \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

⟹

$$\begin{array}{c} r \\ \\ r' \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \neq 0$$

RANGO MAX

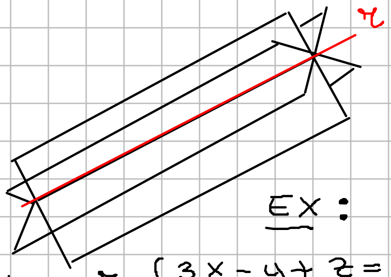
FASCIO DI PIANI (ANALOGO AL FASCIO DI RETTE)

DATI 2 PIANI π_1 E π_2 SI DEFINISCE FASCIO:

$\lambda \pi_1 + \mu \pi_2 = 0 \qquad \forall (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

SUPPONIAMO $\lambda \neq 0$ E DIVIDIAMO PER λ: $\dfrac{\cancel{\lambda} \pi_1}{\cancel{\lambda}} + \underbrace{\dfrac{\mu}{\lambda}}_{K} \pi_2 = 0$

⟹ $\boxed{\pi_1 + K\pi_2 = 0}$ (CON $K = \mu/\lambda$, $\lambda \neq 0$)



FASCIO DI PIANI (INFINITI PIANI CHE HANNO IN COMUNE UNA RETTA) DETTA "ASSE DEL FASCIO"

EX:

Data $r \begin{cases} 3x - y + z = 0 & \leftarrow 1° \text{ piano } \pi_1 \\ x - z = 0 & \leftarrow 2° \text{ piano } \pi_2 \end{cases}$ Scrivere il fascio di piani che ha per asse la retta r

$$\mathcal{F}: \underbrace{(3x - y + z)}_{1° \text{ equ. di } r} + K\underbrace{(x - z)}_{2° \text{ equ. di } r} = 0$$

FASCIO DI PIANI CONTENENTI r

$$3x - y + z + Kx - Kz = 0$$

$$\boxed{(3+K)x - y + (1-K)z = 0} \qquad K \in \mathbb{R}$$

- ESISTONO $\boxed{\text{INFINITI PIANI}}$ CONTENENTI UNA RETTA r
- ESISTE UNO E UN SOLO PIANO CONTENENTE DUE RETTE

PIANO CONTENENTE DUE RETTE:

Date 2 rette $r_1 \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\qquad r_2 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

trovare $\boxed{\text{il piano}}$ che le contiene entrambe

Risoluzione

Scriviamo il fascio di piani che ha per asse la retta r_1:

$$\boxed{2x - y + z + K(x) = 0}$$ FASCIO DI PIANI

PRENDIAMO UN PUNTO $P_0 \in r_2$ (L'IMPORTANTE CHE STIA SOLO SU r_2 $P_0 \neq r_1 \cap r_2$)

$r_2 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ z = 5 \end{cases}$ $\quad (y-5, y, 5)$ DO ALLA y UN VALORE E TROVO UN PUNTO SPECIFICO P_0

AD ESEMPIO DO VALORE $y = 0 \rightarrow \boxed{(\overset{x}{-5}, \overset{y}{0}, \overset{z}{5}) = P_0}$

IMPONGO CHE IL FASCIO DI PIANI PASSA PER P_0

$$2(-5) - 0 + 5 + K(-5) = 0$$

$$-10 + 5 - 5K = 0 \qquad -5 - 5K = 0 \qquad 5K + 5 = 0 \qquad \cancel{5}K = -\frac{5}{5}$$

$\rightarrow \boxed{K = -1}$ SOSTITUISCO NEL FASCIO DI NUOVO

$$2x - y + z - 1(x) = 0$$

R. $\boxed{x - y + z = 0}$ IL PIANO CHE CONTIENE ENTRAMBE LE RETTE