Lezione n° 19 (14-12-21)

GEOMETRIA LINEARE

EQUAZIONE LINEARE A DUE INCOGNITE NEL PIANO CARTESIANO Oxy $\mathbb{R}^2$ (2-Dimensioni)

"UNIVERSITÀ" $\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1}$ RETTA r

"A scuola" $\boxed{ax + by + c = 0}$ RAPPRESENTA UNA RETTA

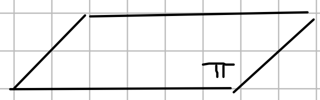
$\mathbb{R}^2$

EQUAZIONE LINEARE A TRE INCOGNITE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$ (3-Dimensioni)

$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b}$ PIANO π

$\Downarrow$

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$



$\mathbb{R}^3$

RETTA

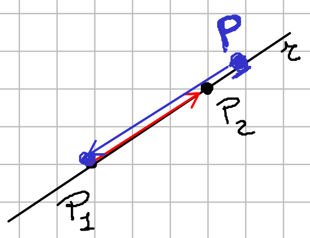
1) Per due passa una e una sola retta

FORMULA (VISTA A SCUOLA) $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Dimostrazione (usiamo il calcolo vettoriale)

Fissiamo $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ • Cerchiamo l'equ. di r



Consideriamo il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$

Consideriamo un altro vettore : $\overrightarrow{PP_1}$

$P(x,y)$ GENERICO DELLA RETTA r

CONFRONTO $\overrightarrow{P_1P_2}$ con $\overrightarrow{PP_1}$: SONO PARALLELI

"DUE VETTORI $\underline{v}$ e $\underline{w}$ SONO PARALLELI $\underline{v} \parallel \underline{w}$ SE DIFFERISCONO PER UN FATTORE DI PROPORZIONALITÀ :

$\exists\, \lambda \in K \;/\; \underline{v} = \lambda\, \underline{w}$ "

Quindi

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda\, \overrightarrow{P_1P_2}$$

$\Downarrow$

$$(x - x_1,\, y - y_1) = \lambda \cdot (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$$

COMPONENTI DEL VETTORE :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{differenza ascisse }(x)},\ \underbrace{y_2 - y_1}_{\text{differenza ordinate }(y)})$$

$$(x-x_1,\ y-y_1) = (\lambda(x_2-x_1),\ \lambda(y_2-y_1))$$

COMPONENTI DEL VETTORE: $\vec{P_1P} = (x-x_1,\ y-y_1)$

$$\begin{cases} x-x_1 = \lambda(x_2-x_1) \\ y-y_1 = \lambda(y_2-y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(x_2-x_1) = x-x_1 \\ \lambda(y_2-y_1) = y-y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ \lambda = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \end{cases} \text{ UGUAGLIO}$$

Equaz. Retta per 2 PUNTI

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

C.V.D.

- Esempio

Dati i punti $A=(\overset{x_1}{-1},\ \overset{y_1}{4})$ $B=(\overset{x_2}{0},\ \overset{y_2}{3})$ Determinare la retta passante per i due punti

FORMULA $\dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{y-(4)}{3-(4)} \Rightarrow x+1 = \dfrac{y-4}{-1} \Rightarrow x+1=-y+4$

$\Rightarrow x+y+1-4=0 \Rightarrow \boxed{x+y-3=0}$ r

- Esempio

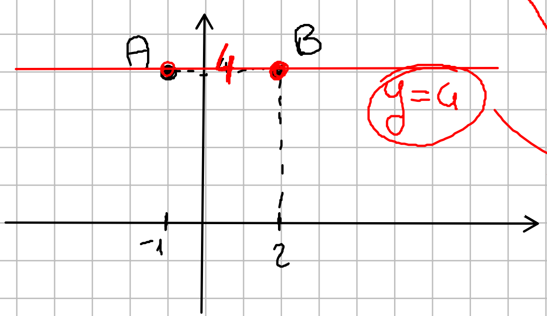
Dati i punti $A=(\overset{x_1}{-1},\ \overset{y_1}{4})$ $B=(\overset{x_2}{2},\ \overset{y_2}{4})$. Determ. la retta r_{AB}:

$$\frac{x-(-1)}{\underbrace{2-(-1)}_{3}} = \frac{y-4}{0}$$

$\cancel{0(x+1)} = 3(y-4)$

$0 = 3(y-4)$

$\cancel{3}(y-4) = 0$



$\boxed{y-4=0} \Rightarrow y=4$

- Esempio

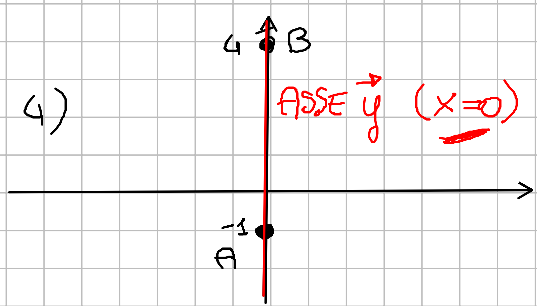
Dati i punti $A=(-3,\ 4)$ $B=(-3,\ 8)$

$x=-3$ EQUAZ. RETTA r_{AB} (NON OCCORRE APPLICARE FORMULA)

- Esempio

Dati i punti $A=(0,\ -1)$ $B=(0,\ 4)$

$x=0$ ASSE $\vec{y}$

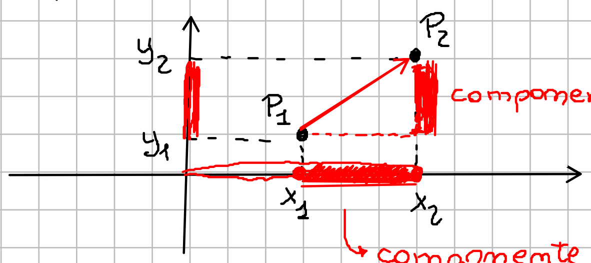


- ESEMPIO

Dati i punti $A=(2,\ 0)$ $B(-2,\ 0)$

$\Rightarrow r_{AB}$: $y=0$ ASSE $\vec{x}$

Componenti del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$, perché sono $(\underbrace{x_2-x_1}, \underbrace{y_2-y_1})$?



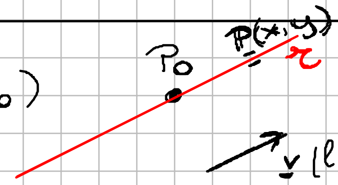
componente lungo asse $\vec{y}$: y_2-y_1

componente lungo asse $\vec{x}$: x_2-x_1

$x_2 - x_1$

---

2) Dato un punto $P_0(x_0, y_0)$



dato nel testo (direzione)

$r // \underline{v}$

ESISTE UNA E UNA SOLA RETTA (r) CHE PASSA PER P_0 ED È PARALLELA AL VETTORE $\underline{v}$

Costruiamo l'equazione di r :

Scelto $P_0(x_0, y_0)$, preso il punto generico $P(x,y)$

e considerato il vettore $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0) \; // \; \vec{v} = (\ell, m)$

Allora li posso scrivere (per la condiz. di parallelismo)

$\overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{v} \rightarrow (x-x_0, y-y_0) = \lambda \cdot (\ell, m) \rightarrow (x-x_0, y-y_0) = (\lambda \ell, \lambda m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-x_0 = \lambda \cdot \ell \\ y-y_0 = \lambda \cdot m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda \ell = x-x_0 \\ \lambda m = y-y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x-x_0}{\ell} \\ \lambda = \dfrac{y-y_0}{m} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m}}$$

IMPORTANTE

ESEMPIO

Dato il punto $A = (\overset{x_0}{-2}, \overset{y_0}{3})$ e il vettore $\underline{v} = (\overset{\ell}{1}, \overset{m}{-3})$

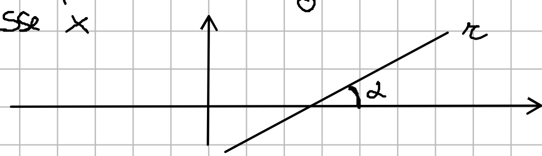
determ. l'equ. della retta passante per A e parallela a $\vec{v}$

FORMULA : $\dfrac{x-(-2)}{1} = \dfrac{y-3}{-3} \Rightarrow x+2 = \dfrac{-y+3}{3} \Rightarrow 3x+6 = -y+3$

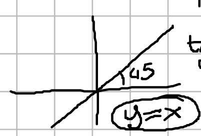
$\Rightarrow 3x+y+6-3=0 \Rightarrow \boxed{3x+y+3=0}$ $\quad r // \underline{v}$

Nel passato parlavamo di coefficiente angolare $\left(m = -\dfrac{a}{b} \right)$ $\quad ax+by+c=0$

e "dava la direzione" perché era legato all'inclinazione della retta rispetto all'asse x



$m = tg\,\alpha$



$m=1$

$tg 45° = 1$

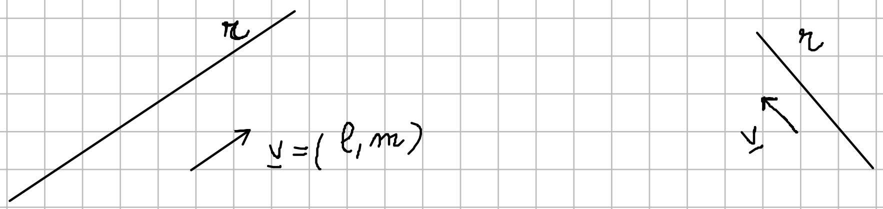
BISETRICE I-III QUADR.

VIENE SOSTITUITO

DA UN VETTORE $\underline{v}$ PARALLELO ALLA RETTA $\quad \underline{v} = (\ell, m)$

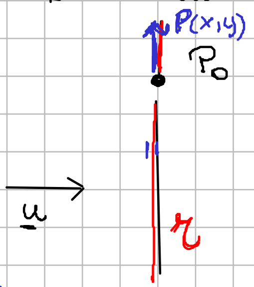
m NON È COEFF. ANGOL.

DETTO « VETTORE DIRETTIVO »



Quindi
se l'esercizio dà il vettore direttivo dove (l, m) si indicano con "PARAMETRI DIRETTORI" abbiamo la DIREZIONE!

3) Fissato un punto $P_0(x_0, y_0)$ e un vettore $\vec{u} = (a, b)$
cerchiamo la retta passante per P_0 e ortogonale a $\vec{u}$



NEL "PIANO" ESISTE UNA E UNA SOLA RETTA PASSANTE PER P_0 E ORTOGONALE AD $\vec{u}$ r

$r \perp \vec{u}$

VETTORE: $P = (x, y)$ GENERICO SU r

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ com'è rispetto ad $\vec{u}$? PERPENDICOLARE

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{u}$

Ricordiamo che due vettori sono perpendicolari quando il prodotto scalare è ZERO: $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \qquad 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$(x - x_0) \cdot a + (y - y_0) \cdot b = 0 \qquad \text{PROD. SCALARE (vd Algebra)}$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$

$$ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0} = 0 \qquad \text{CHIAMO } c = -ax_0 - by_0$$

$$\boxed{ax + by + c = 0 \quad \text{CVD}}$$

ECCO PERCHÉ A SCUOLA LA RETTA È QUESTA!