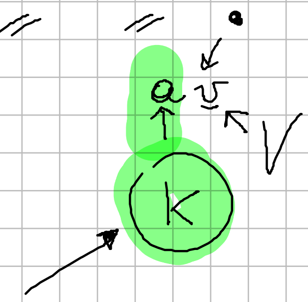
Lezione n°10 (4-11-21)

- Criterio per verificare se un sottoinsieme di V (K-sp. vettoriale) detto W, è un SOTTOSPAZIO

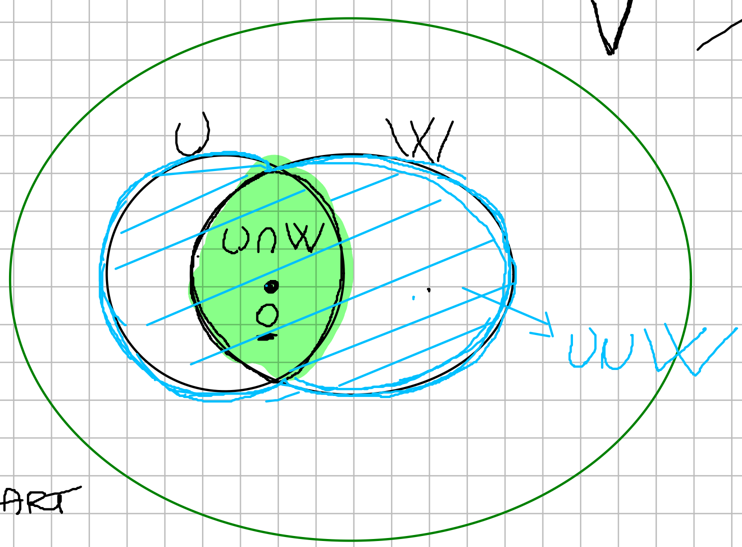
$W \subseteq V$ SOTTOSPAZIO $\Leftrightarrow$ 1) CHIUSO RISP. $+$
2) " " $\cdot$



INTERSEZIONE TRA DUE SOTTOSPAZI

Sia V un K-sp. vettoriale

$U, W \subseteq V$



$$U \cap W \Rightarrow \begin{cases} \text{• LE EQU. CART DI } U \\ \text{• LE EQU. CART DI } W \end{cases}$$

$\underline{0}_V \in U \cap W$

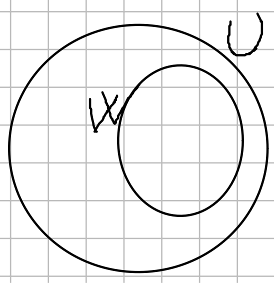
SI DIMOSTRA CHE $U \cap W$ È SOTTOSPAZIO

(la dim. è omessa)

SE INVECE CONSIDERO L'UNIONE TRA DUE SOTTOSPAZI

$\boxed{U \cup W}$ IN GENERALE NON È SOTTOSPAZIO

LO È SOLO NEL CASO BANALE



SE $W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U$ SOTTOSPAZIO

(e viceversa SE $U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W$ ed è SOTTOSPAZIO)

COME SI CALCOLA L'UNIONE :

- SI CONSIDERANO LE DUE BASI RISPETTIVE (UNA PER U E UNA PER W) E SI SCRIVONO COME RIGHE DI UNA MATRICE E DI QUESTA CALCOLARE IL $r(A)$

$$r(A) = \dim(U \cup W)$$

COMBINAZIONE LINEARE

$v_1 + v_2 - v_3$ é una c.l. di $v_1, v_2, v_3 \rightarrow u_1$ VETTORE RISULTATO

$v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5$ c.l. di $v_1, \dots, v_5 \rightarrow u_2$

Generalizziamo

$v_1 + 2v_2$ c.l. di $v_1, v_2 \rightarrow u_3$

$v_1 - 3v_2 + 4v_3 + 5v_5 - v_6$ c.l. etc...

Generalizziamo ancora 1° grado

$$\boxed{a_1 \cdot v_1^1 + a_2 v_2^1 + \dots + a_m v_m^1 \text{ é c.l. di } v_1, \dots, v_m}$$

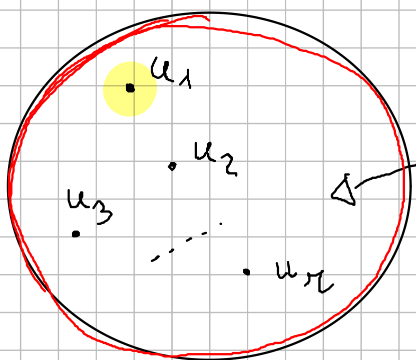
ESEMPIO DATI 3 vettori $v_1 = (2,1,0) = 2\hat{i} + \hat{j}$ $\quad v_2 = (-1,1,1) = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ $\quad v_3 = (0,1,1) = \hat{j} + \hat{k}$

calcolare la c.l. $v_1 + v_2 - v_3$

Risoluzione

$$\underbrace{v_1 + v_2 - v_3}_{\text{"generatori"}} = (2,1,0) + (-1,1,1) - (0,1,1) = (1,1,0) = u_1$$

VETTORE RISULTATO C.L.



dati dalle varie c.l. tra $v_1, \dots, v_m$

QUESTO INSIEME SI INDICA CON $\boxed{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)}$ (É SOTTOSPAZIO)

Se $u \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) \Rightarrow \underline{u} = a_1 v_1^1 + \dots + a_m v_m$

CHI SONO I GENERATORI ?

I generatori sono i vettori che "generano" i vettori risultati $u_1, \dots, u_r, \dots$

Definizione ①

$v_1, v_2, \dots, v_n$ si dicono GENERATORI di V se "generano" altri vettori con le loro c.l.

Definizione ②

$v_1, \dots, v_m$ generatori di V se preso un qualsiasi elemento di V, $u \in V$, esso si può scrivere come risultato di una c.l.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{"risultato"}}}{\underline{u}} = a_1 \underline{v_1} + \dots + a_m \underline{v_m} \qquad a_1, \dots, a_m \in K$$

GENERATORI

ESEMPIO

PRENDIAMO $V = \mathbb{R}^3$ TUTTE LE TERNE

CHI SONO I GENERATORI ?

$\underline{u} \in \mathbb{R}^3 \qquad \underline{u} = (1, -2, 3) = 1 \overset{v_1}{\hat{\imath}} - 2 \overset{v_2}{\hat{\jmath}} + 3 \overset{v_3}{\hat{k}}$ è una c.l. di $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

Prendiamo un'altra terna

$\underline{u}' = (0, 2, 4) = 0\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ è una c.l. di $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

INFINITE TERNE IN $\mathbb{R}^3$ TUTTE CON $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

I GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$ SONO $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ (i 3 versori)

$$\boxed{\hat{\imath} = (1,0,0) \qquad \hat{\jmath} = (0,1,0) \qquad \hat{k} = (0,0,1)}$$

GENERATORI "CANONICI" DI $\mathbb{R}^3$

I GENERATORI DI $\mathbb{R}^2$ SONO SOLO $\hat{i}, \hat{j}$

$\hat{i} = (1,0) \qquad \hat{j} = (0,1)$

I GENERATORI DI $\mathbb{R}^4$ SONO 4

$e_1 = (1,0,0,0) \quad e_2 = (0,1,0,0) \quad e_3 = (0,0,1,0) \quad e_4 = (0,0,0,1)$

I GENERATORI DI $\mathbb{R}^n$ SONO n

$e_1 = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n\text{-upla}}), \; e_2 = (0,1,\dots,0), \; \dots, \; e_n = (0,0,\dots,1)$

COSA É UNA BASE DI V ?

BASE É FORMATA DA UN INSIEME DI GENERATORI E DEVONO ESSERE LINEARM. INDIPENDENTI

BASE : $\{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ GENERATORI} \\ \quad + \\ 2) \text{ LINEARM. INDIPENDENTI} \end{cases}$

Definizione di vettori L. I.

Dati n vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ questi sono linearmente indipendenti se presa una loro combinazione lineare nulla $(a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + \dots + a_n \underline{v_n} = \underline{0})$ deve accadere che

TUTTI i COEFFICIENTI DEVONO ESSERE UGUALI A ZERO

CIOÉ $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{cases}$

(se avessi $v_1 = (1,1) \quad v_2 = (3,3) \Rightarrow \boxed{3\underline{v_1} - \underline{v_2} = \underline{0}}$

3 $\quad$ -1 $\quad \neq 0$

NON SONO L. I.

QUESTI SONO DIPENDENTI)

$0v_1 + 0v_2 = 0$

TROVATO
NELL'ESEMPIO HO VUNA C.L. NULLA $3v_1 - v_2 = 0$
DOVE I COEFF. SONO $\neq 0$
$\Rightarrow$ I VETTORI NON SARANNO L.I.

PER STABILIRE SE I VETTORI SONO L.I.
BASTA METTERLI COME RIGHE DI UNA MATRICE
CALCOLARE IL RANGO, ESSO DARÀ IL NUMERO DI RIGHE LINEARM. INDIPENDENTI

$$r(A) = n^{\circ} \text{ di righe L.I.} = n^{\circ} \text{ di colonne L.I.}$$

ESEMPIO
DATI 4 vettori di $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, 0, -1)$ $\quad v_2 = (0, 1, 2)$ $\quad v_3 = (2, -1, -4)$ $\quad v_4 = (3, 0, -3)$

stabilire se sono L.I. ← NO!

RISOLUZIONE

$$\begin{array}{c} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ v_3 \rightarrow \\ v_4 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO IL RANGO

IL RANGO AL MAX SARÀ 3
$\Rightarrow$ AL MAX AVREMO 3 VETTORI L.I.

Quindi in $\mathbb{R}^3$ i 4 vettori sono certamente linearm. dipend.

SELEZIONIAMO QUELLI L.I. E TOGLIAMO IL RESTO

RIDUCIAMO LA MATRICE

$v_1 \rightarrow v_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & -4 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & -4 \\ \boxed{2} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2} R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - \frac{3}{2} R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v_3 \to \\ v_2 \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-1 - \frac{1}{2}(-2) = -1+1 = 0$$

$$-3 - \frac{3}{2}(-2) = -3+3 = 0$$

$$r(A) = 2$$

I VETTORI L. I. SONO DUE, CHI SONO? $\underline{v}_3$, $\underline{v}_2$

CRITERIO DI INDIPENDENZA LINEARE → OMESSO

DEFINIZIONE N° 1

BASE È FORMATA DA UN INSIEME DI GENERATORI E DEVONO ESSERE LINERM. INDIPENDENTI

BASE : $\{v_1, \dots, v_m\}$ ⇒
1) GENERATORI
+
2) LINERM. INDIPENDENTI

DEFINIZIONE N° 2 (vedi slide 13)

Dato un insieme $\{v_1, \dots, v_m\}$ BASE se preso un qualsiasi vettore di V, $\forall\, \underline{u} \in V$, esso si può scrivere come comb. lineare $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ e la scrittura deve essere UNICA

cioè se dovessimo trovare un'altra comb. lineare di $v_1, \dots, v_m$ che dà u : $u = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$ ne segue

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_m = b_m \end{cases}$$

LEMMA DI STEINITZ → CONFRONTO TRA UN INSIEME DI GENERATORI $\{v_1, \dots, v_m\}$ E UN INSIEME BASE $\{v'_1, \dots, v'_p\}$

SIA V un K-sp. vettoriale

GENERATORI

$G = \{ v_1 \, \dots \, v_n \}$

cardinalità

$|G| = n$

$\geq$

BASE

$B = \{ v'_1 \, \dots \, v'_p \}$

$|B| = p$

HANNO VETTORI DIVERSI

COME NUMERO SONO DIVERSI

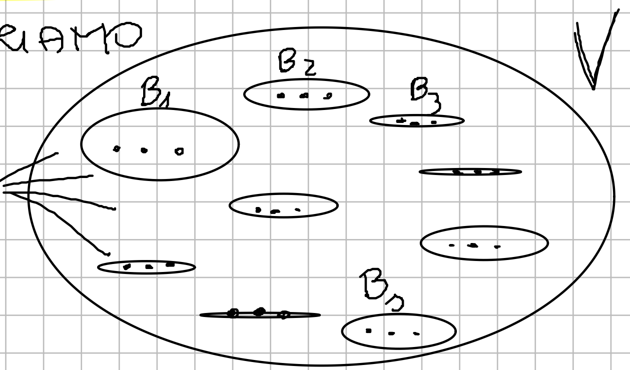
TEOREMA DI STEINITZ : $n \geq p$

TEOREMA CHE USA STEINITZ

" TUTTE LE BASI DI V HANNO LO STESSO NUMERO DI VETTORI "

DIMOSTRIAMO

$\dim V = 3$



IN OGNI SP. VETTORIALE CI SONO INFINITE BASI

NEL DISEGNO TUTTE LE BASI DI V AVRANNO 3 VETTORI

Dimostriamo il teorema prendendo 2 basi

$B_1 = \{ v_1, \dots, v_m \}$, $B_2 = \{ v'_1, \dots, v'_p \}$

BASE — BASE

B_1: • GENERATORI • L. I.

B_2: • GENERATORI • L. I.

PER STEINITZ

$m \geq p$

PER STEINITZ

$m \leq p$

DEVONO VALERE ENTRAMBI

$$\begin{cases} m \geq p \\ m \leq p \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = p}$$

C. V. D.

le due basi hanno la stessa cardinalità

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

$\boxed{\dim V}$ = N° DI VETTORI CHE COMPONGONO UNA BASE $= |B_1| = |B_2| = \dots$