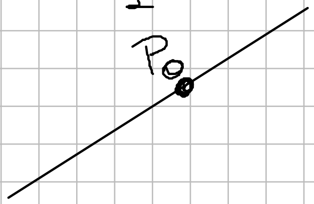
Ricevimento 30-12-21

Geometria

Retta nello spazio ha equazione

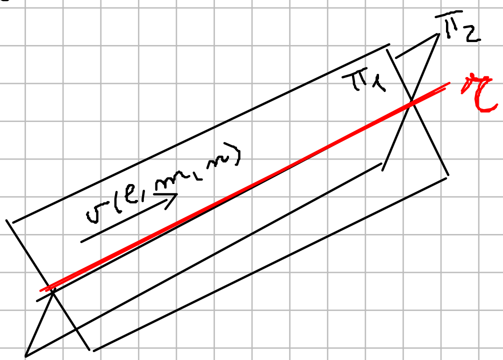
$$r: \underbrace{\frac{x-x_0}{l}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\frac{y-y_0}{m}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\frac{z-z_0}{n}}_{\mathrm{III}}$$

dove $(x_0, y_0, z_0) = P_0 \in r$
ed $(l, m, n) = $ p. direttori della retta



doppia equazione significa intersez. tra due piani $r: \pi_1 \cap \pi_2$

$$r: \begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{II} & (\pi_1) \\ \mathrm{II} = \mathrm{III} & (\pi_2) \end{cases} \quad \text{opp.} \quad r: \begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{II} & (\pi_1) \\ \mathrm{I} = \mathrm{III} & (\pi_2) \end{cases}$$



$\underline{v} = (l, m, n) \parallel r$

« vettore direttivo »

Esercizio per casa

Data una retta nello spazio, det. i p.d. e scriverla come intersezione tra 2 piani

a) $$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}$$ NUMER. $= 0 \to \pi_1$

I p. direttori (vista la forma della retta) sono i 3 denominatori $\Rightarrow \underline{v} = (l, m, n) = (2, 0, 1)$

Scriverla come intersezione tra 2 piani significa metterla nella forma $\begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{II} \\ \mathrm{II} = \mathrm{III} \end{cases}$ opp $\begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{II} \\ \mathrm{I} = \mathrm{III} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{0} \\ \dfrac{x-2}{2} = z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0(\cancel{x-2}) = 2(y+1) \\ \end{cases} \qquad \frac{0}{2} = \frac{2}{2}(y+1) \qquad 0 = y+1$$

$$\to \begin{cases} y+1 = 0 \\ x-2 = 2(z-2) \end{cases} \quad \begin{cases} y+1 = 0 \\ x-2 = 2z-4 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1 = 0 \\ x-2z-2+4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{y+1}=0 & (\pi_1) \\ x-2z+2=0 & (\pi_2) \end{cases} \qquad r : \pi_1 \cap \pi_2$$

b) $$\frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z \Rightarrow \underline{v} = (2,2,1) \text{ PAR. DIRETTORI}$$

$$\begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{II} \\ \mathrm{II} = \mathrm{III} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x-\cancel{1}}{\cancel{2}} = \frac{y-\cancel{1}}{\cancel{2}} \\ \frac{y-1}{2} = z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=0 \\ y-1=2z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=0 & (\pi_1) \\ y-2z-1=0 & (\pi_2) \end{cases}$$

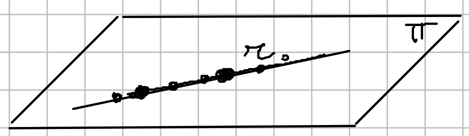
$$r : \pi_1 \cap \pi_2$$

c) completare

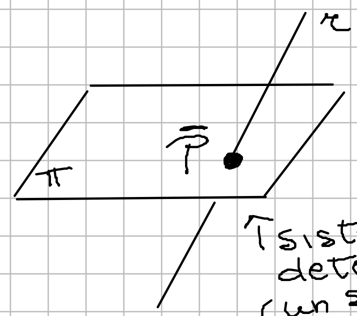
d) //

---

2) Data una retta e un piano, stabilire se la retta é contenuta nel piano π



$r \subseteq \pi$



$r \not\subseteq \pi$

sistema determinato (un solo punto) $\begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \to \bar{P}$

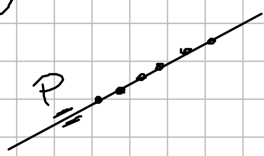
TUTTI I PUNTI DELLA RETTA DEVONO APPARTENERE AL PIANO π

$$r \begin{cases} 2y-z=-1 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

→ Risolviamo e troviamo il punto generico (una incognita libera) y

$$\begin{cases} +z=+1+2y \\ x=-3+y \end{cases}$$

$$P_{generico} \{(\underbrace{-3+y}_{1°}, \underbrace{y}_{2°}, \underbrace{1+2y}_{3°})\}$$

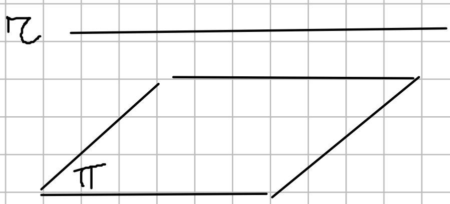


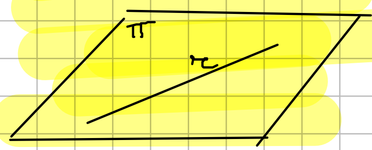
al variare di y

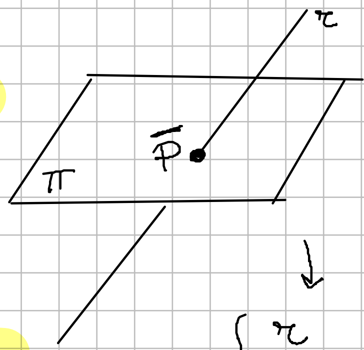
$$\pi : x+y-z-2=0$$
$$1°+2°-3°-2=0$$

Sostituiamo le coord. di $P_{generico}$ nell'equaz. del piano π

$$(-3+y)+y-(1+2y)-2=0 \ ? \qquad \text{viene } 0=0 \ ?$$
$$-3+y+y-1-2y-2=0 \ ?$$
$$-3+\cancel{2y}-1-\cancel{2y}-2=0 \ ?$$
$$-6=0 \text{ ASSURDO} \Rightarrow r \not\subseteq \pi$$







$$\downarrow$$

$$\begin{matrix} r \\ \pi \end{matrix}\begin{cases} \text{equazioni di } r \text{ (2 equaz.)} \\ \text{equazione di } \pi \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \text{3 equazioni} \\ \text{in 3 incognite} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$\emptyset$ SIST. IMPOSS.

$r \not\subseteq \pi$

$$\begin{cases} r \\ \pi \end{cases}$$

$\downarrow$ ∞ SOLUZ.

INCOGNITA LIBERA

$\downarrow$

SIST. INDETERMINATO

$r \subseteq \pi$

$$\begin{cases} r \\ \pi \end{cases}$$

$\downarrow$

NESSUNA INC. LIBERA

$\downarrow$

UN SOLO PUNTO

$\downarrow$

SIST. DETERMINATO

$r \not\subseteq \pi$

II° METODO: mettiamo a sistema $\begin{cases} r \\ \pi \end{cases}$

$$\begin{cases} 2y - z = -1 \\ x - y = -3 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

sist. lineare 3 equ. in 3 incognite $\rightarrow$ vediamo che tipo di sistema è

$$\begin{cases} z = 2y + 1 \\ x = y - 3 \\ \cancel{y} - 3 + \cancel{y} - \cancel{2y} - 1 - 2 = 0 \quad -6 = 0 \end{cases}$$

$\emptyset \Rightarrow r \not\subseteq \pi$

b) completare

3) Dato un punto $P_0 = (1, 1, -1)$ determinare la retta passante per P_0 e avente parametri direttori $(5, 0, 5)$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{5}$$

$$r\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 1 = z + 1 \end{cases} \qquad r\begin{cases} y - 1 = 0 & (\pi_1) \\ x - z - 2 = 0 & (\pi_2) \end{cases} \qquad r : \pi_1 \cap \pi_2$$

4) Date le seguenti rette e i seguenti piani, trovare i parametri direttori

$$r_1 : \begin{cases} x' + y' = 2t' \\ x' + y' + z' = 2 \cdot t' \end{cases}$$

Trovare il vettore direttivo $\underline{v} = (\ell, m, n)$?

↓

"OMOGENIZZIAMO LE EQUAZIONI"
(tutti i termini devo essere composti da un incognita di 1° grado)

$$\begin{cases} x' + y' = \cancel{2t'} \\ x' + y' + z' = \cancel{2t'} \\ t' = 0 \end{cases} \to P_\infty \qquad \begin{cases} x' = -y' \\ -y' + y' + z' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y' \\ z' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$P_\infty^{(r_1)} = \{ (\underbrace{-y', y', 0}_{\ell \quad m \quad n}, 0) \} \overset{y'=1}{=} \{ (\underbrace{\boxed{-1, 1, 0}}_{\underline{v}}, 0) \}$$

$$\underline{v}_{r_1} = (\underset{\ell}{-1}, \underset{m}{1}, \underset{n}{0}) \quad \text{vettore direttivo}$$

$$r_2 : \begin{cases} 2x - 3z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases}$$

da completare
(trovare $\underline{v}_{r_2}$, $\underline{v}_{r_3}$)

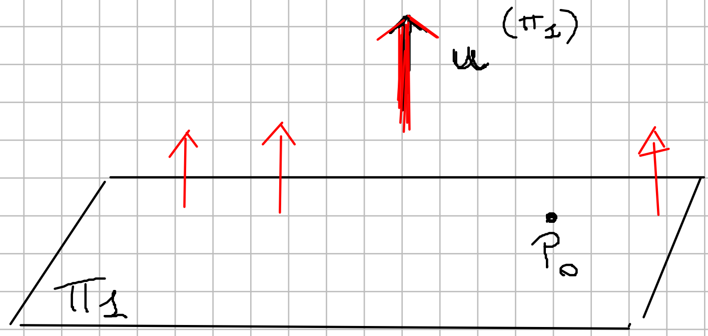
$$\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0 \qquad (\pi : ax + by + cz + d = 0)$$

I parametri direttori del piano π_1 sono i COEFFICIENTI DELLE 3 INCOGNITE (si esclude il termine noto)

⇓

$$\underline{u}^{(\pi_1)} = (a, b, c) = (2, 1, -3)$$

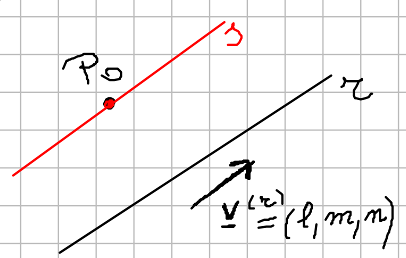
« vettore direttivo del piano » $\underline{u}^{(\pi_1)} \perp \pi_1$



$\pi_2 : x - z = 0 \Rightarrow \underline{u}^{(\pi_2)} = (1, 0, -1)$

$\pi_3 : x + y + 4 = 0 \Rightarrow \underline{u}^{(\pi_3)} = (1, 1, 0)$

5) Dato P_0 e una retta r



$s \,//\, r$ PASSANTE PER P_0

Scriviamo le rette passanti per P_0 e poi imponiamo che s ha gli stessi parametri direttori della retta r $(s \,//\, r)$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\underbrace{l}} = \frac{y - y_0}{\underbrace{m}} = \frac{z - z_0}{\underbrace{n}}}$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Troviamo i parametri direttori della retta r:

$$r \begin{cases} x + y = \cancel{2t'} \\ x - z = \cancel{3t'} \\ t' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = 0 \end{cases}$$

$$P_\infty = \{(x, -x, x, 0)\} \overset{x=1}{=} \boxed{(1, -1, 1, 0)}$$

$\Rightarrow \underline{v}^{(r)} = (1, -1, 1)$ ← LI USO PURE PER LA RETTA $s \,//\, r$

$$P_0 = (\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{-2}, \overset{z_0}{0})$$

LA RETTA s HA EQUAZIONI

$$\boxed{\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 0}{1}}$$

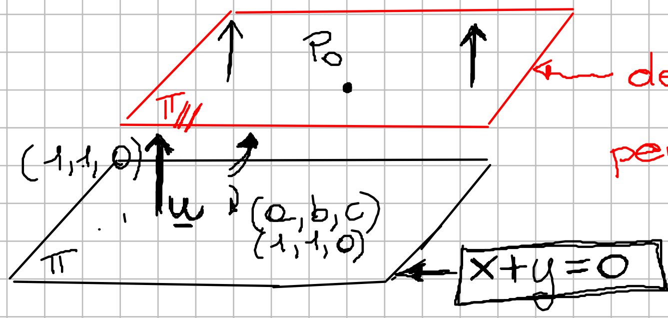
$$\Rightarrow \underbrace{x - \cancel{2} = -y - \cancel{2}} \underbrace{= z}$$

$$(s) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 & (\pi_1) \\ y + 2 + z = 0 & (\pi_2) \end{cases} \qquad s : \pi_1 \cap \pi_2$$

5) b) $P_0 = (1, 0, -3)$, $r: \begin{cases} 2x + y = -3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

completare

6) Dato P_0 e un piano π



determinare $\pi_{//}$ passante per P_0 e parallelo al piano π

$\underline{u}^{(\pi)} = (1, 1, 0)$

Ricordiamo che il piano ha equazione

$$\pi_{//} \quad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

(solo questa dobbiamo usare)

TROVARE $\underbrace{a, b, c}$, d

i parametri direttori di $\pi_{//}$ sono gli stessi di π

a	b	c
1	1	0

MANCA SOLO d

$$\pi_{//} : \quad 1x + 1y + \cancel{0z} + d = 0$$

$$x + y + d = 0 \qquad d = ?$$

Imponiamo il passaggio di $\pi_{//}$ per $P_0 = (\underset{x}{0}, \underset{y}{2}, \underset{z}{0})$, sostituiamo:

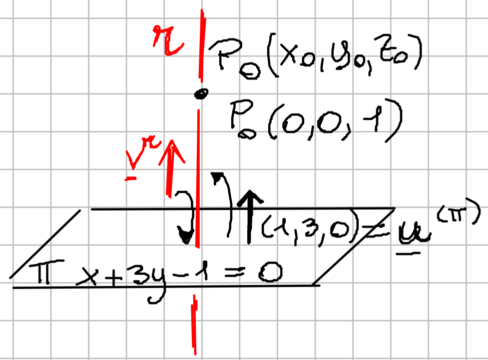
$$0 + 2 + d = 0 \qquad \boxed{d = -2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\pi_{//} : \quad x + y - 2 = 0}$$

b) $P_0 = (1, 1, -3)$ $\quad \pi : \ 2x + 2y + 2z = 0$

completare, trovare $\pi_{//}$ passante per P_0

7)



determinare r passante per P_0 e ortogonale al piano

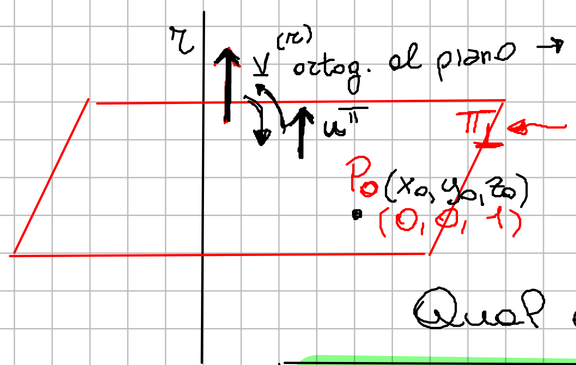
$\underline{v}^r = \underline{u}^\pi$ (sono paralleli)

Quali sono le equ. della retta da utilizzare?

$$\frac{x - \overset{0}{x_0}}{\underset{1}{l}} = \frac{y - \overset{0}{y_0}}{\underset{3}{m}} = \frac{z - \overset{1}{z_0}}{\underset{0}{n}} \qquad P_0 = (0,0,1)$$

doppia equazione !!!

$$\underbrace{\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{3}} = \frac{\boxed{z-1}}{0} \Rightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \quad (\pi_1) \\ 3x - y = 0 \quad (\pi_2) \end{cases} \qquad r : \pi_1 \cap \pi_2$$



← determinare il piano passante per P_0 e ortogonale alla retta r

Qual è l'equaz. del piano da utilizzare?

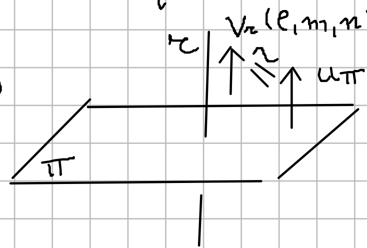
$$\boxed{\pi_\perp \quad ax + by + cz + d = 0}$$ (solo questa è)

servono $\underbrace{a, b, c}_{\text{p. direttori}}, d$

da dove li prendo?

Poiché $\underline{u}^{(\pi)} = (a,b,c)$ è equivalente perché parallelo a quello della retta $\underline{v}^{(r)} \Rightarrow (a,b,c)_{\pi_\perp} = (l,m,n)_r$

Se $r \perp \pi$ →



saranno sempre paralleli quindi equivalenti

$V_r \cong u_\pi \qquad (l,m,n) = (a,b,c)$

$$r \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z - 2\cancel{t}^{\,1} = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

→ Troviamo $\underline{v}_r$ (vettore direttivo) con l'omogenizzazione, $t' = 0$

$$\begin{cases} x = y - z \\ y - \cancel{z} + y + \cancel{z} = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y - z \\ 2y = 0 \rightarrow y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad x = -z \quad P_\infty = \{(-z, 0, z, 0)\} = \{(\underline{-1, 0, 1}, 0)\}$$

$$\underline{v}^{r} = (-1, 0, 1) \cong \underline{u}^{\pi} = (\underset{a}{-1}, \underset{b}{0}, \underset{c}{1})$$ TROVATI

MANCA SOLO LA d

$$\pi_\perp : -1x + \cancel{0y} + 1z + d = 0 \rightarrow -x + z + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per $P_0(\underset{x}{0}, \underset{y}{0}, \underset{z}{1})$:

sostituiamo

$$-0 + 1 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = -1}$$

R. $\pi_\perp : -x + z - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x - z + 1 = 0}$