Ricevimento 2-12-21

Compito d'esame 30/9/21

E' dato l'endom. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (0,\ y+hz,\ hx+hy+z)$$

con $h \in \mathbb{R}$

1) Studiare Imf e Kerf, det. le equ. cartesiane
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinare ove possibile una base di autovettori per f

Risoluzione

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & h \\ \boxed{h} & h & 1 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

NASCE LA CONDIZIONE

$h \neq 0$ ***** la matrice é ridotta (dal basso vs l'alto) allora il rango $\boxed{\rho = 2}$

NOTA

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & \boxed{2} \\ \boxed{h+3} & h & 1 \end{pmatrix}$$

$h+3 \neq 0$

NASCE LA CONDIZ.

- $h \neq -3$
- $h = -3$ SE LEVO LA CONDIZ.

$\rho < 3$ 2 elementi speciali (devono essere $\neq 0$)

$\Rightarrow \dim Imf = 2 \Rightarrow$ BASE $Imf = \{C_1, C_2\} = \{(0,0,h), (0,1,h)\}$

Kerf: $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$ $AX = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y + hz = 0 \\ hx + hy + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx + h(-hz) + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -hz \\ hx - h^2 z + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ \cancel{h}x = \dfrac{(h^2-1)z}{h} \end{cases} \Rightarrow Kerf = \left\{\left(\frac{(h^2-1)}{h} z, -hz, z\right)\right\}$$

una inc. libera

BASE $Kerf = \left\{\left(\frac{h^2-1}{h}, -h, 1\right)\right\}$ estraggo la base dando $z = 1$

LEVIAMO LA CONDIZIONE $\boxed{h=0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho = 2 \qquad \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$C_2 \quad C_3 \neq 0$

$$\text{BASE } \operatorname{Im} f = \{ \underset{C_2}{(0,1,0)}, \underset{C_3}{(0,0,1)} \}$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \rho = 3 - 2 = 1$$

$\operatorname{Ker} f$: $\quad A\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, 0, 0) \} \; ; \; \text{BASE } \operatorname{Ker} f = \{ (1, 0, 0) \}$$

una inc. libera

Equazioni cartesiane :

$\boxed{h \neq 0}$ Equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$

BASE $\operatorname{Im} f$

BASE 2 vett. l. i.

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = hx - h^2 z + z = 0 \}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ x & y & z \end{bmatrix} \qquad \boxed{\det = 0}$$

vettore dipendente per definiz. di BASE

CALCOLO IL DET. E LO PONGO UGUALE A ZERO

$$-hx = 0 \Rightarrow \cancel{h}x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$$

$\operatorname{Ker} f$: $\begin{cases} y = -hz \\ hx - h^2 z + z = 0 \end{cases}$ già fatte

$h \neq 0$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = hx - h^2 z + z = 0 \}$$

$\boxed{h=0}$ Equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0 \qquad \boxed{x = 0}$$

$$\mathrm{Im} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$$

$\mathrm{Ker} f$:
$$\begin{cases} 0 = 0 & \forall x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{Ker} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0 \}$$

---

2) Studiare la semplicità

(calcolare il P. caratteristico $P(T) = \det(A - TI) = 0$

calcolare le soluzioni (gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ etc...)

e stabiliamo le m_{λ_i} (molt. algebriche) = n° di volte che λ_i è soluz. del pol. caratteristico.

Ogni autovalore λ_i ha il suo autospazio V_{λ_i}

$$V_{\lambda_i} = \text{NUCLEO} = \mathrm{Ker}\, f_{(\lambda_i)} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_i} = \{ (\underline{\qquad\qquad}) \}$$

↳ il n° di incognite libere mi dà la $\dim V_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

SE ACCADE PER OGNI AUTOVALORE λ_i CHE

$$\underline{m_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}} \qquad \forall \lambda_i$$

$\Rightarrow f$ È SEMPLICE

POLINOMIO CARATTERISTICO $P(T) = \det(A - TI)$

$$P(T) = \det\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{pmatrix}$$

$$P(T) = -T(1-T)(1-T) + h^2T = 0$$

$$-T(1-T)^2 + h^2T = 0 \rightarrow T(1-T)^2 - h^2T = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow T\left[\underbrace{(1-T)^2 - h^2}_{\text{diff. di quadrati}}\right] = 0 \rightarrow T\left[\underbrace{(1-T)-h}\right]\left[\underbrace{(1-T)+h}\right] = 0$$

- $\boxed{T=0}$
- $1-T-h=0 \rightarrow -T = h-1 \rightarrow \boxed{T=1-h}$
- $1-T+h=0 \rightarrow -T = -1-h \rightarrow \boxed{T=1+h}$

$\Rightarrow$ $T=0$

$T=1-h$

$T=1+h$

Sono distinti tra loro?

$1° \neq 2°$: $0 \neq 1-h \Rightarrow \boxed{h \neq 1}$

$2° \neq 3°$: $\cancel{1}-h \neq \cancel{1}+h \rightarrow -2h \neq 0 \rightarrow \boxed{h \neq 0}$

$3 \neq 1°$: $1+h \neq 0 \rightarrow \boxed{h \neq -1}$

NASCE LA CONDIZIONE

SE $\boxed{h \neq 0, 1, -1}$ AVRÒ 3 AUTOVALORI DISTINTI, SIGNIFICA

$T=0$: $m_0 = 1 \rightarrow$ direttamente $g_0 = 1$

$T=1-h$: $m_{1-h} = 1 \rightarrow$ // $g_{1-h} = 1$

$T=1+h$: $m_{1+h} = 1 \rightarrow$ // $g_{1+h} = 1$

$\Rightarrow f$ è SEMPLICE

quindi A è DIAGONALIZZABILE DOVE LA MATRICE DIAGONALE

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 1+h \end{pmatrix} \qquad h \neq 0, 1, -1$$

• STUDIAMO $h=0$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P(T)=T(1-T-\underset{0}{h})(1-T+\underset{0}{h})=0$$

$$P(T)=T\underbrace{(1-T)(1-T)}_{\text{doppio}}=0$$

$T=0$ $m_0=1\to$ direttamente $g_0=1$ ok! ✓

$T=1$ $m_1=2\to g_1=?$ DA CALCOLARE $g_1=\dim V_1=\operatorname{Ker} f_1=$

$$=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0-1&0&0\\0&1-1&0\\0&0&1-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x=0\\0=0&\forall y\\0=0&\forall z\end{cases}\quad V_1=\{(0,y,z)\}$$

2 inc. libere

$\dim V_1=2$ ✓

f è semplice anche in questo caso

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&h\\h&h&1\end{pmatrix}$$

• STUDIAMO $h=-1$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$P(T)=T(1-T-\underset{-1}{h})(1-T+\underset{-1}{h})=0$$

$$P(T)=T(1-T+1)(\cancel{1}-T-\cancel{1})=0$$

$$-T^2(2-T)=0$$

$T=0$ $m_0=2\to g_0=?$ da controllare

$T=2$ $m_2=1$ direttamente $g_2=1$ ok!

CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO

$V_0=\operatorname{Ker} f_0=\operatorname{Ker} f=$ sottrarre zero dalla diagonale

$$\begin{pmatrix}0-0&0&0\\0&1-0&-1\\-1&-1&1-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}0=0\\y-z=0\\-x\underbrace{-y+z}=0\end{cases}\to\begin{cases}y=z\\x=0\end{cases}$$

$$V_0=\{(0,z,z)\}$$

una inc. libera

$\dim V_0=1=g_0$

$\rightarrow f$ NON E' SEMPLICE

$\rightarrow A$ NON E' DIAGONALIZZABILE

STUDIAMO $h = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(T) = T(1-T-\underset{1}{h})(1-T+\underset{1}{h}) = 0$$

$$T(\cancel{1}-T-\cancel{1})(1-T+1) = 0$$

$$T^2(2-T) = 0$$

$T^2 = 0 \rightarrow T = 0 \quad m_0 = 2 \rightarrow g_0 = ?$ da controllare

$2 - T = 0 \rightarrow T = 2 \quad m_2 = 1 \rightarrow g_2 = 1$ ok!

$$V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \{(0, -z, z)\}$$

$$\dim V_0 = 1$$

f NON E' SEMPLICE

PER TROVARE LA MATRICE P (MATRICE DIAGONALIZZANTE) OCCORRE SAPERE LA BASE DEGLI AUTOVETTORI CHE ESISTE SOLO QUANDO f E' SEMPLICE

$h \neq 0, 1, -1 \quad f$ E' SEMPLICE

CALCOLIAMO I SINGOLI AUTOSPAZI

Ricordiamo che gli autovalori erano

$T = 0 \rightarrow V_0$

$T = 1 - h \rightarrow V_{1-h}$

$T = 1 + h \rightarrow V_{1+h}$

3 AUTOSPAZI

$$V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y + hz = 0 \\ hx + hy + z = 0 \end{cases} \qquad V_0 = \operatorname{Ker} f = \left\{ \left(\frac{(h^2-1)z}{h}, -hz, z \right) \right\}$$

$$\underline{u}_1 = \left(\frac{h^2-1}{h}, -h, 1\right)$$

- $$V_{1-h} = \operatorname{Ker} f_{1-h} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0-(1-h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1-h) & h \\ h & h & 1-(1-h) \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cancel{(h-1)}x = 0 & \to x = 0 \\ \cancel{h}y + \cancel{h}z = 0 & y = -z \\ hx + \cancel{hy} + \cancel{hz} = 0 & 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{1-h} = \{(0, -z, z)\} \to \underline{u}_2 = (0, -1, 1)$$

- $$V_{1+h} = \operatorname{Ker} f_{1+h} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0-(1+h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1+h) & h \\ h & h & 1-(1+h) \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1-h & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ h & h & -h \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cancel{(-1-h)}x = 0 & \to x = 0 \\ -\cancel{h}y + \cancel{h}z = 0 & y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{1+h} = \{(0, y, y)\} \to \underline{u}_3 = (0, 1, 1)$$

BASE DEGLI AUTOVETTORI $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{h^2-1}{h} & 0 & 0 \\ -h & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALIZZANTE

- $\boxed{h=0}$ f ERA SEMPLICE TROVATE VOI P