Lezione n. 14 (18-11-21)

Teorema di Cramer

(SIST. QUADRATO)

Dato un sistema lineare n equ. in n incognite $(m=n)$
il sistema è $\boxed{\text{DETERMINATO}}$ SE E SOLO SE $\iff$ $\boxed{\det A \neq 0}$

Coda del teorema è la regola di Cramer che dice:

LA SOLUZIONE UNICA DEL SISTEMA È DATA DA

$$S = \left\{ \left(\underset{x_1}{\frac{\det B_1}{\det A}}, \underset{x_2}{\frac{\det B_2}{\det A}}, \dots, \underset{x_n}{\frac{\det B_n}{\det A}} \right) \right\}$$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ IP. SIST. DETERMINATO   TS $\det \underset{n \times n}{A} \neq 0$

$\Downarrow$

HA UNA SOLA SOLUZIONE S

$\Downarrow$

PER R.C. n° 2 SI TRADUCE CON $\infty^{\boxed{0}}$ c. v. d.

$\Downarrow$

$n - \rho = 0$

$\Downarrow$

$\underset{\text{RANGO}}{\rho} = n$ RANGO DI A (UNA $n \times n$) $= n$

$\Leftarrow$ IP. $\boxed{\det A \neq 0}$ TS SIST DETERMINATO =
- ESISTE LA SOLUZIONE ED
- UNICA

$\exists A^{-1}$

dimostriamo prima l'unicità di S

Supponiamo di avere 2 soluzioni S_1, S_2

(NOTAZIONE COMPATTA SIST. LINEARE $A\cancel{X} = B$)

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot S_1 = B \\ A \cdot S_2 = B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A\, S_1 = A\, S_2$$

MOLTIPLICO PER A^{-1} AMBO I MEMBRI A SINISTRA DI A

$$\underbrace{A^{-1} A}\, S_1 = \underbrace{A^{-1} A}\, S_2$$

$$\underbrace{I\, S_1} = \underbrace{I\, S_2}$$

$$S_1 = S_2 \qquad \text{CVD}$$

Adesso si dimostra l'ESISTENZA DELLA SOLUZIONE

PARTIAMO DAL SIST. $n \times n$: $AX = B$ RICAVO X

(moltiplicando per A^{-1} a sn) $A^{-1} A X = A^{-1} B$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t A^a \cdot B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & | & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \ldots + A_{n1} b_n \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \ldots + A_{n2} b_n \\ \ldots \\ A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \ldots + A_{nn} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11} b_1 + \ldots + A_{n1} b_n}{\det A} \\ \dfrac{A_{12} b_1 + \ldots + A_{n2} b_n}{\det A} \\ \ldots \\ \dfrac{A_{1n} b_1 + \ldots + A_{nn} b_n}{\det A} \end{pmatrix}$$

CHI È?

È IL DET B_1? SI

B_1 ERA QUELLA MATRICE CHE HA COME PRIMA COLONNA B E LE COLONNE RIMANENTI SONO PRESE DA A

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Per def.)

CALCOLO IL DET B_1 CON LAPLACE ALLA 1° COLONNA

$$\det B_1 = b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \ldots + b_m A_{m1}$$

$$S = X = \begin{pmatrix} \dfrac{\det B_1}{\det A} \\ \vdots \\ \dfrac{\det B_n}{\det A} \end{pmatrix}$$

SI VA AVANTI ALLO STESSO MODO CON B_2

COSÌ ABBIAMO DIMOSTRATO L'ESISTENZA DI S

E LA CODA DEL TEOREMA

$\square$

SIST. LINEARI OMOGENEI

(TUTTE LE INCOGNITE SONO DI GRADO 1)

m equaz.
n incogn

$$\underline{B} = \underline{0}$$

$$A\,X = \underline{0} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Esempio di sist. omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + h\,x_2 - x_3 = 0 \\ h\,x_1 + h\,x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad m = 2 \quad n = 3$$

2 equ. in 3 inc. (2×3)

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & 0 \\ h & \underline{h}^* & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = \rho(A, B)$ SEMPRE

AMMETTE SOLUZIONI SEMPRE (PER R.C. N° 1)

LA SOLUZIONE $S_\Omega = (0, 0, 0)$ C'È SEMPRE NEI SIST. LINEARI OMOGENEI E SI CHIAMA

$$\boxed{\text{SOLUZIONE BANALE}}$$

CALCOLIAMO IL RANGO $\rho(A) \Rightarrow$

$h \neq 0$ ***** CONDIZIONE $\Rightarrow$ RIDUCIAMO $R_2 \to R_2 - R_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{h} & -1 & 0 \\ h-1 & 0 & \boxed{3} & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 2$ (per R.C. N° 2 si HA $\infty^{3-2} = \infty^1$ SOLUZ. $\Rightarrow$ 1 INC. LIBERA $\Rightarrow$ SIST. INDETERM.)

Risolviamo

$$\begin{cases} x_1 + h x_2 - x_3 = 0 \\ (h-1)\,x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + h x_2 - \dfrac{(1-h)}{3}\,x_1 = 0 \\ \cancel{3}x_3 = \dfrac{(1-h)}{3}\,x_1 \end{cases}$$

$3x_1 + 3h x_2 - x_1 + h x_1 = 0$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3h x_2 - (1-h) x_1 = 0 \\ x_3 = \dots \; x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+h) x_1 + 3h x_2 = 0 \\ x_3 = \dots \text{ in funz. di } x_1 \end{cases}$$

$h \neq 0$ CON QUESTA CONDIZ.

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{-(2+h)x_1}{3h} \\ x_3 = \dfrac{(1-h)}{3} x_1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(x_1 , \underbrace{\frac{-(2+h)}{3h}}_{\lambda_2} x_1 , \underbrace{\frac{(1-h)}{3}}_{\lambda_3} x_1 \right) \right\}$$

TUTTE LE INCOGNITE DEI SIST. LIN. OMOGENEI CON $(n-1)$ EQUAZ. IN n-INCOGNITE E (RANGO DI A MAX) SARANNO TUTTE MULTIPLE DELL'INCOGNITA LIBERA

LE EQU. SONO INDIPENDENTI

$x_1 = x_1$

$x_2 = \lambda_2 x_1$

$x_3 = \lambda_3 x_1$

$$(x_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_1, \dots, \lambda_n x_1)$$

LEVO LA CONDIZIONE

$h = 0$

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & -1 & 0 \\ h & \underline{h}^* & 2 & 0 \end{array}\right)$$

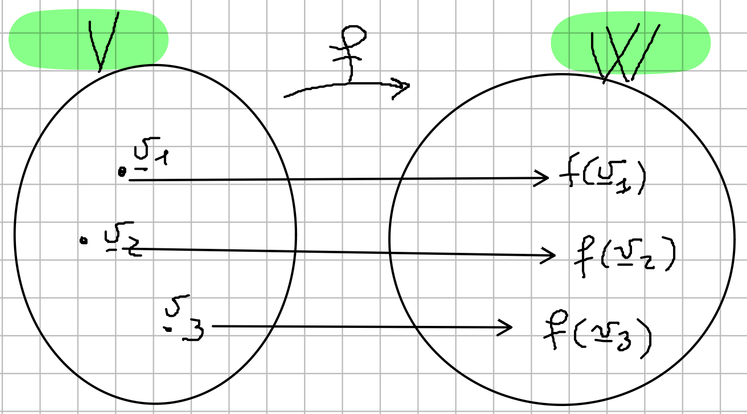
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \rho(A) = 2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \forall x_2$$

$$S = \{(0, x_2, 0)\}$$

APPLICAZIONI LINEARI:

DEFINIZIONE DI APPLICAZIONE LINEARE:



- V, W K-spazi vettoriali

$$f: V \to W$$

- SI DICE CHE f È LINEARE SE VALGONO 2 PROPRIETÀ: $\quad \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

1) $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$

"LINEARITÀ DELLA SOMMA"

«L'IMMAGINE DELLA SOMMA È LA SOMMA DELLE IMMAGINI»

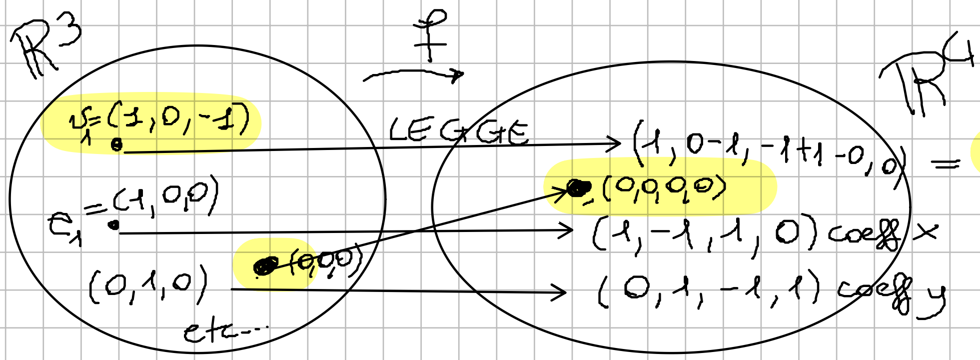
2) $f(\underset{\in K}{a} \cdot \underline{v}) = a \cdot f(\underline{v}) \qquad \forall a \in K, \ \underline{v} \in V$

"LINEARITÀ DEL PROD. ESTERNO"

«L'IMMAGINE DEL PROD. ESTERNO È LO SCALARE PER L'IMMAGINE DEL VETTORE»

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con LEGGE $f(x,y,z) = (x, y-x, z+x-y, y)$



$= (1,-1,0,0) = \underline{w}_1$

Conseguenze delle proprietà della linearità rispetto al prodotto esterno:

$$f(a \cdot \underline{v}) = a \cdot f(\underline{v}) \qquad a \in K$$

NEL CASO PARTICOLARE CHE $\boxed{a = 0} \Rightarrow f(0 \cdot \underline{v}) = 0 \cdot f(\underline{v})$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(\underline{0}) = \underline{0}}$$

SEMPRE IN TUTTE LE f

CONSEGUENZA N° 2 : DATA UNA COMB. LINEARE

$$a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_m \underline{v}_m$$

APPLICO LA f

$$\boxed{f(a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_m \underline{v}_m)} = ?$$

$=$ LINEARITÀ DELLA SOMMA $= f(a_1 v_1) + f(a_2 v_2) + \dots + f(a_m v_m)$ = ADESSO LINEARITÀ N° 2

$$\boxed{= a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_m f(v_m)}$$