Ricevimento 23-12-21

Compito 12/7/21

$f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$h \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(u_1) = (1,0,0,0) \\ f(u_2) = (h,0,2,0) \\ f(u_3) = (0,h-1,0,h) \\ f(u_4) = (0,0,0,h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = (1,0,0,0) \\ u_2 = (1,0,1,0) \\ \to u_3 = (0,1,0,0) \\ u_4 = (0,0,0,1) \end{cases}$$

- Studiare l'applicaz. lineare f con le equ. cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$

→ Occorre la matrice (METODO STANDARD)

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (1,0,0,0) & \to f(e_1) = (1,0,0,0) \leftarrow C_1 \\ f(1,0,1,0) = (h,0,2,0) & \to f(e_1)+f(e_3) = (h,0,2,0) \\ f(0,1,0,0) = (0,h-1,0,h) & \to f(e_2) = (0,h-1,0,h) \leftarrow C_2 \\ f(0,0,0,1) = (0,0,0,h) & \to f(e_4) = (0,0,0,h) \leftarrow C_4 \end{cases}$$

C_3

$$\to f(e_3) = (h,0,2,0) - f(e_1) = (h,0,2,0)-(1,0,0,0) = (h-1,0,2,0)$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Da qui possiamo pure ricavare la legge

$$f(x,y,z,t) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \left(x+(h-1)z,\ (h-1)y,\ 2z,\ hy+ht \right)$$

Studio $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$

- Calcolare il rango con il calcolo del det. della 4x4 alla prima colonna

$$\det M(f) = 1 \cdot A_{11} + \cancel{0 A_{21}} + \cancel{0 A_{31}} + \cancel{0 A_{41}} = A_{11} =$$

$\underbrace{\{11\}}_{1+1=2 \text{ (PARI)}}$

$$= \underbrace{(-1)^2}_{+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{togliere (11)} \\ \text{la } 1^\circ \text{ riga} \\ \text{la } 1^\circ \text{ colonna} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 0 & h \end{pmatrix} = 2h(h-1)$$

Pongo $\det M(f) \neq 0$ $\quad 2h(h-1) \neq 0 \to h \neq 0 \quad h \neq 1 \to \rho = 4$

$\to \dim \operatorname{Im} f = 4 \to \dim \operatorname{Ker} f = 0 \to f$ è iniettiva e pure suriettiva $\to f$ è ISOMORF

Equ. cartesiane di

$\operatorname{Im} f \equiv \mathbb{R}^4 \to \forall x, \forall y, \forall z, \forall t$ (non ci sono equ. cartesiane)

Equ. cartesiane di $\operatorname{Ker} f$ sono banali

$\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\} \to x=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad t=0$

$\to x=y=z=t=0$

- Togliamo una condizione $\boxed{h=0}$

$$M(f) = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & \\ \end{array}$$
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho = 3 \quad \dim \operatorname{Im} f = 3$

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$

BASE $\operatorname{Im} f = \{C_1, C_2, C_3\}$

Equazione cart. di $\operatorname{Im} f$

$$\begin{pmatrix} C_1 \to \\ C_2 \to \\ C_3 \to \\ x \; y \; z \; t \end{pmatrix}$$

stavolta si deve trovare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \det = 0$$

LAPLACE ALLA 4° COLONNA

$$\det = t \cdot A_{44} = t\underbrace{(-1)^8}_{+1} \cdot \det\begin{pmatrix} \text{togliere} \\ \text{4° riga} \\ \text{4° colonna} \end{pmatrix}$$

$$= t \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = t(-2) = -2t = 0 \to \boxed{t=0}$$

R. EQU. CARTESIANA DI $\operatorname{Im} f$ È $\boxed{t=0}$

CALCOLIAMO IL $\operatorname{Ker} f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -y = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \forall t \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \forall t \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,t)\}$ BASE $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,1)\}$

EQU. CARTESIANE DI $\operatorname{Ker} f$ SONO: $x=0 \quad y=0 \quad z=0 \quad \forall t$

- TOGLIAMO L'ALTRA CONDIZIONE $\boxed{h=1}$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = 3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\dim Im f = 3 \to \dim Ker f = 1$

BASE $Im f = \{C_1, C_2, C_3\}$

Equaz. cartesiana di $Im f$:
$$\begin{pmatrix} C_1 \to \\ C_2 \to \\ C_3 \to \\ x\ y\ z\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$\to \det = 0 \to$ LAPLACE ALLA 1° RIGA $= 1 \cdot A_{11} = ?$

$$= \underbrace{(-1)^2}_{+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{togliere} \\ 1° \text{ RIGA} \\ 1° \text{ COLONNA} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = -2y = 0 \to 2y = 0$$

$$\to \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{0}{2} \to \boxed{y = 0}$$

CALCOLIAMO IL $Ker f$: $M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ SIST. LIN. OMOGENEO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ t = -y \\ \forall y \end{cases}$$

$Ker f = \{(0, y, 0, -y)\}$; BASE $Ker f = \{(0, 1, 0, -1)\}$

EQU. CARTESIANE SONO: $x = 0 \quad z = 0 \quad t = -y$

- $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \quad i(x, y, z) = (x, y, 0, z)$ LEGGE

BASE CANONICA $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ DI $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} i(\overset{x}{1}, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) \rightsquigarrow C_1 \\ i(0, \overset{y}{1}, 0) = (0, 1, 0, 0) \rightsquigarrow C_2 \\ i(0, 0, \overset{z}{1}) = (0, 0, 0, 1) \rightsquigarrow C_3 \end{cases} \quad M(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g = f \circ i$ "f composto i"

PRODOTTO TRA LE DUE MATRICI : $M(g) = M(f) \cdot M(i)$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Prodotto righe per colonne

(1° riga · 1° colonna 1R · 2°col...

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix}$$ Ho trovato la matrice della composizione

Mi chiede la controimmagine $g^{-1}(1,0,0,1)$

$$\underset{4\times 3}{M(g)} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CRAMER QUI NO!

$h \neq 0,1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cancel{(h-1)}y = \frac{0}{(h-1)} \\ 0 = 0 \\ hy + hz = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{se } h \neq 1} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 0 + hz = 1 \end{cases} \rightarrow h \neq 0 \quad z = \frac{1}{h}$$

$$g^{-1}(1,0,0,1) = \left\{\left(1, 0, \tfrac{1}{h}\right)\right\}$$

· Levo la condizione:

$$h = 1 \quad \begin{cases} x = 1 \\ 0 \cdot y = 0 \\ 0 = 0 \\ 1y + 1z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 - z \quad \forall z \end{cases} \quad g^{-1}(1,0,0,1) = \{(1, 1-z, z)\}$$

· Levo la 2° condizione:

$$h = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 + 0 = 1 \end{cases} \quad 0 = 1 \quad \text{SIST. IMPOSS.} \qquad g^{-1}(1,0,0,1) = \emptyset$$

II° METODO PER TROVARE LA CONTROIMMAGINE È USANDO LA RIDUZIONE DELLA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\text{MATR. COMPLETA} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{h-1} \neq 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h & 1 \end{array}\right)$$

con $\underbrace{}_{M(g)}$ le prime tre colonne e $\underbrace{}_{\text{VETTORE DI CUI VOGLIO LA CONTROIMMAGINE}}$ l'ultima colonna.

***** condizione $h \neq 1$

$R_4 \to R_4 - \frac{h}{h-1}R$

$R_2 \to R_4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & \boxed{h} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \end{array}\right) \circlearrowright \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & \boxed{h} \neq 0 & 1 \\ 0 & \boxed{h-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{h \neq 0}$ *****

$\boxed{h \neq 1}$ ******

Se $h \neq 0, 1$ LA MATRICE COMPLETA È RIDOTTA PER RIGA

$$\begin{cases} x = 1 \\ hy + hz = 1 \\ (\underbrace{h-1}_{\neq 0})y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ hz = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = 1/h \qquad g^{-1}(1,1,0,0) = \{(1, 0, 1/h)\}$$

LEVO LE CONDIZ. NELLA MATRICE $h = 1$

$$\begin{cases} \\ \end{cases} \text{etc...}$$

Semplicità

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \qquad P(T) \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ h+1 & h-T & -1 \\ 0 & -1 & -h-T \end{pmatrix} = 0$$

$P(T) = (-T)(h-T)(-h-T) + T = 0$ metto in evidenza la T

$T \cdot [(-1)(h-T)(-h-T) + 1] = 0 \qquad T[\underbrace{(h-T)(h+T)}_{\text{PROD. NOTEVOLE } h^2 - T^2} + 1] = 0$

$T[h^2 - T^2 + 1] = 0$

$T = 0 \rightarrow T = 0$

$h^2 - T^2 + 1 = 0 \rightarrow -T^2 = -1 - h^2 \rightarrow T^2 = h^2 + 1 \rightarrow T = \pm\sqrt{h^2+1}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3 AUTOVALORI $\quad T = 0 \quad T = \sqrt{h^2+1} \quad T = -\sqrt{h^2+1} \quad$ SONO DISTINTI ?

$1° \neq 2° \quad 2° \neq 3 \quad 3 \neq 1° \rightarrow$ f é semplice (TUTTI molt. alg. 1 → f é semplice)

[Se invece la molt. algebrica di un autovalore é > 1 allora va controllato se f é semplice o non é semplice calcolando l'autospazio e la sua dimensione (n° di incognite libere), ed essa deve risultare uguale alla molteplicità algebrica.]

$0 \neq \sqrt{h^2+1}$ sempre vero $(h^2+1 \neq 0$ sempre$)$

$\sqrt{} \neq -\sqrt{}$ OVVIO SEMPRE

$-\sqrt{h^2+1} \neq 0$ sempre vero

SONO DISTINTI ⇒ TUTTI MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA UGUALE A 1 ⇒ f É SEMPLICE

BASE DI AUTOVETTORI , TROVARE GLI AUTOSPAZI

$T=0 \qquad V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 0 \\ h+1 & h-0 & -1 \\ 0 & -1 & -h-0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} f \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ (h+1)x+hy-z=0 \\ -y-hz=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (h+1)x+h(-hz)-z=0 \\ y=-hz \end{cases} \quad \begin{cases} (h+1)x-h^2z-z=0 \\ y=-hz \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{(h+1)}x = \dfrac{(h^2+1)z}{h+1} \\ y=-hz \end{cases} \quad h\neq -1$

$V_0 = \left\{ \left(\dfrac{(h^2+1)z}{h+1}, -hz, z \right) \right\} \qquad u_1 = \left(\dfrac{h^2+1}{h+1}, -h, 1 \right)$ 1° autovettore

(• Se $h=-1$ $\begin{cases} -z-z=0 \\ y=z \end{cases} \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases} \forall x \qquad V_0 = \{(x,0,0)\} \qquad u_1=(1,0,0)$)

$V_{\sqrt{h^2+1}} = \operatorname{Ker} f_{\sqrt{h^2+1}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{h^2+1} & 0 & 0 \\ h+1 & h-\sqrt{h^2+1} & -1 \\ 0 & -1 & -h-\sqrt{h^2+1} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -\sqrt{h^2+1}\,x=0 \qquad x=0 \\ \cancel{(h+1)x}+(h-\sqrt{h^2+1})y-z=0 \\ -y-[h+\sqrt{h^2+1}]z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=(h-\sqrt{h^2+1})y \\ -y-\underbrace{(h+\sqrt{h^2+1})(h-\sqrt{h^2+1})}_{\text{PROD. NOTEVOLE}}y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ z=(h-\sqrt{h^2+1})y \qquad \forall y \\ -y-(h^2-(h^2+1))y=0 \end{cases} \rightarrow -y-(\cancel{h^2}-\cancel{h^2}-1)y=0 \quad \cancel{-y}+\cancel{y}=0 \quad 0=0$ identità

$y[0]=0 \qquad 0=0 \quad \forall y \qquad$ (non è $y=0$)

$V_{\sqrt{h^2+1}} = \{ (0, y, (h-\sqrt{h^2+1})y) \} \qquad u_2=(0,1,h-\sqrt{h^2+1})$