Ricevimento 16-11-21

Esercizio libro pg 46 1.35

Risolvere, al variare di $K \in \mathbb{R}$ il seguente sist. lineare:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - Kt = 1 \\ x + 4y + (K+1)z = 1 \\ -2x - 5y - 5z = -2 \end{cases}$$

3 equazioni in 4 incognite

NON E' QUADRATO ⇒

LA REGOLA DI CRAMER NON E' APPLICABILE

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -K \\ 1 & 4 & K+1 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice incompleta

$\neq 0$ ***** CONDIZIONE $K \neq 0$

$$(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & \boxed{-K} & 1 \\ \boxed{1} & 4 & K+1 & 0 & 1 \\ -2^{*} & -5 & -5 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Matrice completa

$$R_3 \to R_3 - \frac{-2}{1} R_2 = R_3 + 2R_2$$

$-5+8$ $\quad -5 + 2(K+1) = 2K-3$

$-2+2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & \boxed{-K} & 1 \\ \boxed{1} & 4 & K+1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 2K-3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$K \neq 0$

$\rho(A) = 3 \quad \rho(A,B) = 3 \Rightarrow$ SIST. POSSIBILE (PER R.C. N° 1)

E AMMETTE $\infty^{n-\rho}$ SOLUZ. $\Rightarrow \infty^{4-3} = \infty^{1}$ SOLUZIONI (SIST. INDETERM) CON 1 INC. LIBERA
(PER R.C. N° 2)

Andiamo a risolverlo

$$\begin{cases} 1^\circ \quad x + 3y + 2z - Kt = 1 \\ 2^\circ \quad x + 4y + (K+1)z = 1 \\ 3y + (2K-3)z = 0 \end{cases} \to y = -\frac{2K-3}{3} z \text{ in funz. della } z$$

$$2^\circ \quad x - \frac{4(2K-3)}{3} z + (K+1)z = 1 \Rightarrow x = \left[\frac{4}{3}(2K-3) - (K+1)\right]z + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{8K - 12 - 3K - 3}{3} z + 1 = \frac{5K-15}{3} z + 1 = \frac{5}{3}(K-3)z + 1 \quad \text{in funz. della } z.$$

$$\begin{cases} 1^\circ \quad \frac{5}{3}(K-3)z + \frac{3}{1} - \cancel{3}\frac{(2K-3)}{\cancel{3}} z + 2z - Kt = 1 \\ x = \frac{5}{3}(K-3)z + 1 \\ y = -\frac{2K-3}{3} z \end{cases}$$

$K \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{5}{3}(K-3)z + \cancel{1} - (2K-3)z + 2z - Kt = \cancel{1} \\ x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

t in funz. delle z

1° $Kt = \left[\frac{5}{3}(K-3) - (2K-3) + 2\right] z \Rightarrow Kt = \frac{5K-15-3(2K-3)+6}{3} z$

$\Rightarrow Kt = \frac{5K-\cancel{15}-6K+\cancel{9}+\cancel{6}}{3} z = \frac{-K}{3} z \Rightarrow Kt = -\frac{K}{3} z$

POSSO DIVIDERE PER K

$\Rightarrow \frac{\cancel{K}t}{\cancel{K}} = \frac{-\cancel{K}}{3\cancel{K}} z$ $\quad K \neq 0$

$t = -\frac{1}{3} z$

R. Se $K \neq 0$ $\quad S = \left\{\left(\frac{5}{3}(K-3)z+1,\ -\frac{2K-3}{3} z,\ z,\ -\frac{1}{3} z\right)\right\}$

∞ soluzioni

Togliamo la condizione

$\boxed{K=0}$

$$(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1^* & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -2^* & -5 & -5 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$R_3 \to R_3 + 2R_1$

$-5+6$

$-5+4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_2 = R_3$$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 2 \rightarrow$ SIST È POSSIBILE (PER R.C. N°1)

E AMMETTE $\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZ. (PER R.C. N°2)

2 INC. LIBERE

Andiamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases} \quad y = z \qquad \begin{cases} x+3z+2z=1 \\ y=z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-5z \\ y=z \end{cases}$$

$\forall t$

$\forall z$

R. $S = \{(1-5z,\ z,\ z,\ t)\}$ con $K=0$

∞ SOLUZIONI

Risolviamo un sist. lineare dato nel compito di Giugno 2021

$$\begin{cases} 2x + (2-h)z = 1 \\ hy = 0 \\ -hz = 1 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 2-h & 1 \\ 0 & \boxed{h}\neq 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 1 \end{array}\right)$$

**** * CONDIZIONE

SE $h \neq 0$ IL RANGO $\rho(A)=3$ $\rho(A,B)=3$ $\Rightarrow$ SIST POSSIBILE (PER R.C. N°1)

E AMMETTE $\infty^{3-3} = \infty^{0} = 1$ SOLA SOLUZIONE $\Rightarrow$ SIST. DETERM. (PER R.C. N°2)

0 INC. LIBERE

APPLICO CRAMER

$$\det A = -2h^2$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & -h \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_1 = -h^2 - (2-h)h = \\ = -\cancel{h^2} - 2h + \cancel{h^2} = -2h$$

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{-\cancel{2h}}{-\cancel{2}h^{\cancel{2}}} = +\frac{1}{h}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \end{pmatrix} \quad \det B_2 = 0$$

$$y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{0}{-2h^2} = 0$$

$$z = \frac{\det B_3}{\det A} = \frac{2h}{-2h^2} = -\frac{1}{h}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2h$$

R. Se $h \neq 0$ $S = \left\{\left(\frac{1}{h}, 0, -\frac{1}{h}\right)\right\}$

TOGLIAMO LA CONDIZIONE

$h=0$ (Regola di Cramer non è applicabile perché $\det A = 0$)

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ 0 \cdot y = 0 \quad (0=0)\ \forall y \\ 0 \cdot z = 1 \quad \boxed{0=1} \rightarrow \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 0=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \neq 0$$

$\rho(A) = 1 \neq \rho(A,B) = 2$

SIST È IMPOSSIBILE (PER R.C. N° 1)

Lo rifacciamo senza Cramer quindi per sostituzione "diretto"

$$\begin{cases} 2x + (2-h)z = 1 \\ hy = 0 \quad \to \text{devo dividere per } h \\ -hz = 1 \end{cases} \qquad h \neq 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} 2x + (2-h)\left(-\frac{1}{h}\right) = 1 \\ y = \frac{0}{h} = 0 \\ z = -\frac{1}{h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{h}(2-h) = 1 \to 2hx - (2-h) = h \to 2hx = \cancel{h} + 2 - \cancel{h} \quad \cancel{2}hx = \cancel{2} \\ \hookrightarrow hx = 1 \to x = \frac{1}{h} \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{h}, 0, -\frac{1}{h}\right)\right\} \quad h \neq 0$$

CASO $h=0$ E' UGUALE A PRIMA

Esercizio sui sist. lineari dato nel compito 15/9/21

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + hz = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + hy = 0 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R} \qquad (A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & h^* & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 + hR_1$

$-1+h$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1+h & 0 & 0 & h \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & h^* & 0 \\ -1+h & 0 & 0 & h \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 - hR_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1-h & 0 & 0 & 0 \\ -1+h^* & 0 & 0 & h \end{array}\right)$$

$** \neq 0$

$-1-h \neq 0 \qquad 1+h \neq 0$

$h \neq -1$

$$R_4 \to R_4 - \frac{-1+h}{-1-h} R_2 = $$

$$= R_4 + \frac{(h-1)}{h+1} R_2$$

$$0 \neq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1-h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{array}\right)$$

$h \neq 0$ $\rho(A,B) = 4 \neq \rho(A) \Rightarrow$ SIST IMPOSSIBILE

$h = 0$ $\rho(A,B) = 3 = \rho(A)$

SE $h \neq -1$ $\rho(A) = 3$; $\rho(A,B) = 3$ se $h=0$ $\Rightarrow$ SIST POSS. CON $\infty^{3-3} = \infty^0$ soluz

1 SOLUZ $\Rightarrow$ SIST DETERM

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 0 \\ \cancel{(-1-h)x = 0} \\ 0 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \\ z = 0 \\ x = 0 \\ \boxed{h = 0} \end{cases}$$

$$S = \{(0, -1, 0)\} \text{ CON } h = 0$$

TOGLIAMO LA CONDIZIONE INIZIALE

$h = -1$ → NELLA MATRICE PRIMA DI RIDURRE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \quad 0=0$$

$\rho(A) = 3 \qquad \rho(A,B) = 3 \qquad$ SIST POSS.

Andiamo a risolverlo

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - y = 1 & -y = 1 - \frac{1}{2} & y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + z = 0 & z = -\frac{1}{2} \\ -2x = -1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$S = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\} \qquad h = -1$

R.

Se $h = 0 \qquad S = \{(0, -1, 0)\}$

Se $h = -1 \qquad S = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$

Se $h \neq 0, -1 \qquad$ SIST. IMPOSSIBILE