Corso di Algebra Lineare e Geometria
Applicazioni lineari

Dott.ssa L.Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Applicazioni lineari

Siano V e W due spazi vettoriali sul campo K e sia $f : V \to W$ una applicazione. Si dice che f è **lineare** se valgono due proprietà:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \ \forall v_1, v_2 \in V$
- $f(a \cdot v) = a \cdot f(v), \forall a \in K, v \in V.$

Esempi di applicazioni lineari:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $g(x, y, z) = (x + y, x - z, 2x + y + z, y)$

3) $h : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ con $h \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y & x - z \\ y + z & t \end{pmatrix}$

4)$q : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^3$ con $q \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (3x + y, z - t, x + t + t)$

5)$t : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^4$ con $t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a, b, c, d)$

Esempi di applicazioni non lineari

Esempi di applicazioni non lineari:
1) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$con $f(x,y) = (x+y, 2x, y+1)$.
Non è lineare: infatti se ad esempio consideriamo i vettori $v_1 = (2,1), v_2 = (3,2), v_1 + v_2 = (5,3)$ e calcoliamo le loro immagini: $f(v_1) = (3,4,2), f(v_2) = (5,6,3)$, e la somma delle immagini è $f(v_1) + f(v_2) = (3,4,2) + (5,6,3) = (8,10,5)$ e poi calcoliamo l'immagine della somma. Calcoliamo prima la somma $v_1 + v_2 = (5,3)$,quindi $f(5,3) = (8,10,4)$ osserviamo che

$$f(v_1 + v_2) \neq f(v_1) + f(v_2)$$

2) Data $g' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$con $g'(x,y,z) = (xy, z^2)$.
Non è lineare: infatti se ad esempio consideriamo i vettori $v_1 = (1,2,3), v_2 = (-1,0,1), v_1 + v_2 = (0,2,4)$. Osserviamo che
$f(v_1) = (2,9), f(v_2) = (0,1)$,
$f(v_1 + v_2) = (0,16) \neq f(v_1) + f(v_2) = (2,10)$

Conseguenze

- Conseguenza **n.1** della definizione di applicazione lineare.
  Per le applicazioni lineari tra due K spazi vettoriali accade che $f : V \to W$ si ha che
  $$f(0_V) = 0_W$$
  infatti
  $f(0_V) = f(0_K \cdot v) = 0_k \cdot f(v) = 0_W$.
- Conseguenza **n.2** della definizione di applicazione lineare.
  $$f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \cdots + a_n f(v_n)$$

Immagine e nucleo di f

Sia $f: \ V \to W$ una applicazione lineare tra due K spazi vettoriali.
Chiamiamo **immagine** di f, e lo indichiamo con $\mathrm{Im}\, f$,

$$\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{w \in W | \ \exists v \in V \text{per cui } w = f(v)\}$$

cioè l'insieme dei vettori di W che *provengono* da V mediante f. Si noti che $\mathrm{Im}\, f \neq \emptyset$ in quanto $0_W \in \mathrm{Im}\, f$.
Chiamiamo **nucleo** di f, e lo indichiamo con $\ker f$,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V | \ f(v) = 0_W\}$$

cioè l'insieme degli elementi di V che hanno per immagine 0_W.
Anche $\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$ in quanto $0_V \in \mathrm{Ker}\, f$.
Nota: osserviamo che negli esempi precedenti $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *e* $\mathrm{Ker}\, g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Applicazioni lineari suriettive

Sia

$$f : V \to W$$

una applicazione lineare tra due K spazi vettoriali.
Essa è detta **suriettiva** se tutti gli elementi di W provengono da almeno un elemento di V. Quindi possiamo affermare che f è suriettiva quando

$$\mathrm{Im}\, f = W$$

Applicazioni lineari iniettive

Sia

$$f: \ V \to W$$

una applicazione lineare tra due K spazi vettoriali.
Essa è detta **iniettiva** se ad elementi distinti di V corrispondono elementi distinti di W. Quindi in notazione matematica possiamo dire in due modi:

- Modo n.1: se $\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \to f(v_1) \neq f(v_2)$, o equivalentemente
- Modo n. 2: se $v_1, v_2 \in V$ con $f(v_1) = f(v_2) \to v_1 = v_2$.

$\mathrm{Im}\, f$ e $\mathrm{Ker}\, f$ sono sottospazi

Siano V, W due K spazi vettoriali e sia $f: \ V \to W$ una applicazione lineare. Allora:
1) $\mathrm{Im}\, f \subseteq W$ e $\mathrm{Ker}\, f \subseteq V$ sono due sottospazi;
(basta verificare che sono chiusi rispetto la somma ed il prodotto esterno)
2) Se $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ allora $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2), \cdots .f(v_n))$

Teorema sul nucleo e iniettività

Per verificare se un'applicazione lineare è o no iniettiva basta vedere come è fatto il nucleo. Ciò è precisato dal seguente teorema
Teorema sul nucleo e iniettività: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due K spazi vettoriali. Allora

$$\text{f è iniettiva } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$$

Dimostrazione: $\Rightarrow$ Dato $v \in \mathrm{Ker}\, f \to f(v) = 0_W$. Ma anche $f(0_V) = 0_W$ ed f per ipotesi è iniettiva quind $v = 0_V$
$\Leftarrow$ Siano $v_1, v_2 \in V$ tali che
$f(v_1) = f(v_2) \to f(v_1 - v_2) = \overrightarrow{0} \to v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\, f \to v_1 = v_2$

Applicazione composta tra due applicazioni lineari

Ricordiamo che dati tre insiemi A, B, C e due applicazioni
$f : A \to B,\ g : B \to C$
dicesi **applicazione composta di f e di g** l'applicazione :

$$g \circ f :\ A \to C \text{ definita: } g \circ f(x) = g(f(x))$$

Nel caso in cui abbiamo tre K spazi vettoriali V, W, Z e due applicazioni lineari
$f : V \to W \ g : W \to Z$
allora **applicazione composta di f e di g** è ancora lineare :

$$g \circ f :\ V \to Z \text{ definita: } g \circ f(v) = g(f(v)).$$

$\nexists f \circ g$

Applicazione identica

Su ogni spazio vettoriale V si può sempre considerare l'applicazione $i_V : V \to V$ detta **applicazione identica** che ad ogni elemento di V fa corrispondere se stesso cioè

$$i_V(v) = v$$

per ogni $v \in V$ e risulta $f \circ i_V = i_V \circ f = f$.
Questa applicazione è ovviamente lineare, iniettiva, suriettiva,cioè isomorfismo.

Isomorfismo tra spazi vettoriali

Siano V e W due K spazi vettoriali.
Un **isomorfismo** di V con W è una applicazione lineare $f : V \to W$ iniettiva e suriettiva.
Nel caso in cui $f : V \to W$ e $g : W \to V$ si ha che $g \circ f : V \to V$ ed esiste anche $f \circ g : W \to W$.
Se accade che $g \circ f = i_V$ e $f \circ g = i_W$ allora si dice che f è **invertibile**, g è la sua inversa e si indica con f^{-1}.
Sappiamo che f^{-1} esiste se f è un isomorfismo.

Teorema del confronto delle dimensioni

Teorema del **confronto delle dimensioni**:
Siano V e W due K spazi vettoriali con V e W finitamente generati. Sia $f : V \to W$. Allora

$$\dim V = \dim \mathit{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\, f$$

Osservazione

Se due applicazioni lineari coincidono sugli elementi di una base sono la stessa applicazione lineare.
La proposizione precedente ci consente di assegnare una applicazione lineare assegnando le immagini di una base del dominio.

Esempio di una applicazione lineare in cui data la legge si ricavano le immagini di una base qualunque

Esempio: Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x, y, z) = (-2x + z, 2y - 2x).$$

E' banale osservare che fissata ad esempio una base $\mathcal{A} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ tramite la legge ricaviamo le immagini di questi vettori: $\begin{cases} f(1,1,1) = (-1, 0) \\ f(0,1,1) = (1, 2) \\ f(0,0,1) = (1, 0) \end{cases}$

Ovviamente possiamo ricavare anche le immagini della cosiddetta base canonica $\mathcal{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$:

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (-2,-2) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0,2) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0) \end{cases}$$

Definizione di matrice associata

Data una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto alle due basi canoniche, $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ dove $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^m} = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ con $\dim \mathbb{R}^m = m$ è possibile associare ad f una ed una sola matrice $A \in K^{m,n}$ (cioè avente $m = \dim \mathbb{R}^m$ righe ed $n = \dim \mathbb{R}^n$) che chiameremo **matrice associata** ad f rispetto alle due basi canoniche e indicheremo con

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M(f)$$

avente come colonne le immagini dei vettori della base canonica $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}$ scritte in componenti riferite alla base del codominio $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^m}$.

$$\begin{cases} f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) \Leftarrow C_1(prima\ colonna) \\ f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) \Leftarrow C_2(seconda\ colonna) \\ \dots \\ f(e_n) = (a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{mn}) \Leftarrow C_n(n - esima\ colonna) \end{cases}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nell'esempio precedente dove avevamo ricavato le immagini della base canonica, la matrice è data scrivendo in colonna le immagini della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (-2,-2) \\ f(0,1,0) = (0,2) \\ f(0,0,1) = (1,0) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Date le immagini di una base come ricavare la matrice: metodo standard

Cosa si intende con le parole "Metodo standard".
Iniziamo con un esempio. Data $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che sono assegnate le seguenti immagini di una base
$\mathcal{A} = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (-1,0) \\ f(0,1,1) = (1,2) \\ f(0,0,1) = (1,0) \end{cases} \qquad \text{determinare la matrice } M(f).$$

Usiamo il metodo "standard" per trovare la matrice. Esso consiste nel risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (-1,0) \\ f(0,1,1) = f(e_2) + f(e_3) = (1,2) \\ f(0,0,1) = f(e_3) = (1,0) \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=(-1,0) \\ f(e_2)=(1,2)-f(e_3) \\ f(e_3)=(1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1)=(-2,-2) \Leftarrow C_1 \\ f(e_2)=(0,2) \Leftarrow C_2 \\ f(e_3)=(1,0) \Leftarrow C_3 \end{cases}$$

In base alla definizione di matrice associata, essa è costituita dalle colonne ricavate dal sistema:

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio n.1:
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con la legge $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 3y - z)$.
Passo n.1: scelta della base canonicsa
$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Passo n.2: Calcolare le immagini tramite la legge data $\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 1) \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 3) \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, -1) \end{cases}$
Il passo n.3 : mettere le immagini in colonna

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Viceversa: Data una matrice come trovare la legge

Definiamo applicazione lineare tra due K spazi vettoriali, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, **associata** ad una matrice rispetto alle due basi canoniche

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

l'applicazione lineare $f_A : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da

$$\begin{cases} f(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, e_m) \\ f(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) \\ \cdots \\ f(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}) \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dal risultato che otteniamo, ricaveremo la legge della $f(x_1, x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$ Si vede facilmente che f è ben definita ed è lineare.

Esempio:
Data la matrice trovare la legge

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \Rightarrow 2 \times 3$$

quindi il dominio è $\mathbb{R}^3$ con $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e il codominio è $\mathbb{R}^2$, con $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Supponiamo che $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ la legge è:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - 2z, x - 3y + 6z)$$

Osserviamo che in qualunque modo sia stata assegnata una applicazione lineare essa è perfettamente determinata quando abbiamo le immagini di una base del dominio.
Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una data applicazione lineare.
Allora $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$.
Poichè i generatori di $\mathrm{Im}\, f$ danno le colonne della matrice $M(f)$, allora il rango della matrice è uguale alla dimensione di $\mathrm{Im}\, f$:

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \rho(M(f)).$$

Notiamo che questa uguaglianza non dipende dalle basi scelte per il dominio e per il codominio.

Studio applicazione lineare: $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$

Calcoliamo la $\dim \operatorname{Im} f$:

$$\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f))$$

Poichè $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(C) \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{L}(C) = \rho(M^(f))$.
Quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è formata dalle colonne l.i. della matrice $M^(f))$.
Calcoliamo la $\dim \operatorname{Ker} f$:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim Imf = n - \rho$$

ciò è noto dal teorema sulle dimensioni.
Per trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare

$$M(f) \cdot X = \underline{0}$$

troviamo l'elemento generico, quindi una base.

Esempio di una applicazione lineare in cui sono date le immagini e si ricava la legge

Esempio: Sia data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\begin{cases} f(1,1,1) = (-1,0) \\ f(0,1,1) = (1,2) \\ f(0,0,1) = (1,0) \end{cases}$ Siamo in grado di trovare la legge trovando inizialmente la matrice $M(f)$ e successivamente la legge applicando la seguente formula:

$$f(x,y,z) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(completare a casa)

Assegnazione di una applicazione lineare, modo n.1

Una applicazione lineare tra due spazi vettoriali può essere assegnata in tre modi.
Modo n.1:
Siano $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ due spazi vettoriali, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$
Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dove sono

assegnate le immagini dei vettori della base data : $\begin{cases} f(v_1) = w_1 \\ f(v_2) = w_2 \\ \dots \\ f(v_n) = w_n \end{cases}$ dove

$w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{R}^m$.

Assegnazione di un'applicazione lineare, modo n.2

Modo n.2:
Siano dati due spazi vettoriali $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Per assegnare una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ possiamo *assegnare la legge* nel modo seguente:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

Diremo che con questo procedimento abbiamo assegnato f mediante le sue equazioni, o legge rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.

Assegnazione di un'applicazione lineare, modo n.3

Modo n.3:
Siano dati due spazi vettoriali $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione lineare definiamo **matrice associata** ad f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio la matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diremo che con questo procedimento abbiamo assegnato f *mediante la sua matrice* $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ scelta per il dominio e alla base $\mathcal{E}$ scelta per il codominio.

Dove le colonne della matrice $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ sono le immagini dei vettori della base $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ e sono scritte con le componenti rispetto alla base $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^m$.

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \cdots, f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

- Modo n.1, Esempio
  Data

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

  con le seguenti immagini:
  $$\begin{cases} f(1,2,1) = (-1,1) \\ f(-1,0,2) = (3,-2) \\ f(0,2,-1) = (0,1) \end{cases}$$

- Modo n.2, Esempio
  Data

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

  con la seguente legge

$$f(x,y) = (2x-y, x+y, 2y)$$

- Modo n.3, Esempio
  Data la matrice
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio. Trattandosi di una matrice 3×3 ne segue che
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
  quindi sia per il dominio che per il codominio si sceglie $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Matrice associata alla applicazione lineare composta

Matrice associata alla **applicazione composta**.
Siano $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m$ tre spazi vettoriali e siano
$f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$,
$g: \ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ con

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Siano poi $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^p}, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^m}$ basi canoniche di $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente.
Allora:

$$M_{g \circ f}^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = M_g^{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$$

o meglio scriviamo direttamente

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$$

Quindi la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è data dal *prodotto righe per colonne delle due matrici associate*.

Esempi di applicazione composta

Esempio 1: Siano date $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che:

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, x - z),\ \ g(x, y, z) = (2x, 2y + z)$$

allora $\varphi = g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è definita
$\varphi = g \circ f(x, y, z) = g(x + y, x - y, x - z) = (2x + 2y, 2x - 2y + x - z) =$
$= (2x + 2y, 3x - 2y - z)$
Inoltre $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi) = M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(g) \cdot M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$.
Esempio 2: Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & h & -1 \\ h+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la **proiezione** definita da

$$p(x, y, z, t) = (y, z, t)$$

determinare $\varphi = p \circ f$.

Controimmagine di un insieme e di un elemento

Riprendiamo il concetto di controimmagine.
Sia $f : A \to B$ una qualunque applicazione (non necessariamente biiettiva) e sia $H \subseteq B$; si chiama **controimmagine** di H rispetto a f e si denota con $f^{-1}(H)$, il sottoinsieme di A costituito dagli elementi la cui immagine sta in H, cioè

$$f^{-1}(H) = \{a \in A \mid f(a) \in H\}$$

La **controimmagine di un elemento** y del codominio B è

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

Si noti f^{-1} è usato anche per indicare l'applicazione inversa di una applicazione biunivoca f. Si noti che se f è biunivoca i due significati di f^{-1} coincidono.

Definizione: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare sia $w \in \mathbb{R}^m$, chiamiamo **controimmagine** di w il sottoinsieme

$$f^{-1}(w) = \{v \in \mathbb{R}^n |\ f(v) = w\}.$$

Nei casi concreti il calcolo della controimmagine di un vettore è agevole. Consideriamo la matrice $M(f)$. Se indichiamo con $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{\mathcal{A}}$ le componenti di un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ e se chiamo $w = (b_1, b_2, \cdots, b_m) = B$ il vettore di cui devo trovare la controimmagine allora

$$f^{-1}(w) \text{è fornito dalle soluzioni } M(f) \cdot X = B$$

Esercizio sulla controimmagine:
Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata alla basi canoniche è

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & 2-h & 2h-2 \\ 2 & -h & 2h-2 \\ 2 & -h-1 & 2h-1 \end{pmatrix}$$

- Dato $u = (0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ trovare

$$f^{-1}(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ f(v) = u\}$$

Definizione di endomorfismo

Sia V un K spazio vettoriale.
Chiamiamo **endomorfismo** di V una applicazione lineare

$$f : V \to V$$

cioè $V = W$.

Definizione di matrici simili

Definizione di matrici simili: Due matrici $A, B \in K^{m,n}$ si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile $P \in K^{n,n}$ tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

Proprietà:
1) Due matrici simili hanno le stesso rango.
2) Due matrici simili hanno lo stesso determinante.