Ricevimento 21-1-22

1) GENNAIO 2021

1) Date due rette

$r: \pi_1 \cap \pi_2$

$$r: \begin{cases} x+y-z+1=0 & \pi_1 \\ z-1=0 & \pi_2 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} 3x+3y-5z+5=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9z+3y-5z+5=0 \\ x=3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y+4z+5=0 \\ x=3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{-4z-5}{3} \\ x=3z \end{cases} \forall z$$

determinare il piano π contenente le due rette.

Il piano contenente due rette

Come trovare il piano contenente due rette r_1, r_2, dove $r_1 = \pi_1 \cap \pi_2$: è sufficiente controllare che le rette non sono sghembe e quindi complanari. Verificata la complanarità,

- scrivere il fascio di piani che ha per asse la prima retta, esempio r_1, cioè
$$\mathcal{F}': \ \pi_1 + k \cdot \pi_2 = 0 \quad k = \frac{\mu}{\lambda}, \lambda \neq 0$$
- scegliamo un punto $P_0 \in r_2$, specifico
- imponiamo il passaggio del fascio di piani $\mathcal{F}'$ per P_0 per trovare k e sostiuiamo in $\mathcal{F}'$. Esso sarà il piano cercato.
Ovviamente P_0 non deve coincidere con il punto di intersezione tra le due rette r_1, r_2, cioè $P_0 \neq r_1 \cap r_2$.

Fascio di piani che contiene la retta r

- $x+y-z+1 + k(z-1) = 0 \quad \mathcal{F}'$

Scelgo $P_0 \in s$, do un valore a z (inc. libera di s)

$z=0$

$P_0 = \left(0, -\frac{5}{3}, 0\right) \in s$ (e $\notin r$) va bene

IMPONIAMO CHE IL FASCIO $\mathcal{F}'$ PASSI PER $P_0\left(0, -\frac{5}{3}, 0\right)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \quad y \quad z$

- $0 - \frac{5}{3} - 0 + 1 + k(0-1) = 0 \rightarrow -\frac{5}{3}+1-k=0$

$k + \frac{5}{3} - 1 = 0 \qquad k = -\frac{5}{3}+1 = \frac{-5+3}{3} = -\frac{2}{3}$

Sostituiamo in $\mathcal{F}'$ il valore di $\boxed{k = -\frac{2}{3}}$

- $x+y-z+1 + k(z-1) = 0 \quad \mathcal{F}'$

$\downarrow$

$x+y-z+1-\frac{2}{3}(z-1)=0$

$\downarrow$

$3x+3y-3z+3-2z+2=0$

$\downarrow$

R. $\boxed{3x+3y-5z+5=0}$ π contenente r ed s

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0, \ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

Risoluzione

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \frac{xy}{2} & \frac{x}{2} \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A = $\begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$

Calcolo det B, det A

$\det B_{3\times3} = -k$

$\det A_{2\times2} = 2k - (k-2)^2 = 2k - (k^2-4k+4) =$

$= 2k - k^2 + 4k - 4 = -k^2 + 6k - 4$

NON VA CAMBIATO IL SEGNO

R. $\det B = -k$
$\det A = -k^2+6k-4$

"Il segno si cambia solo se c'è scritto $=0$, >0, <0"

CLASSIFICAZIONE CONICHE

Iniziamo e calcoliamo il det B. $= -k$
Se risulta $\det B = 0$ $\quad -k=0 \rightarrow k=0$

- In tal caso la conica si **spezza** in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

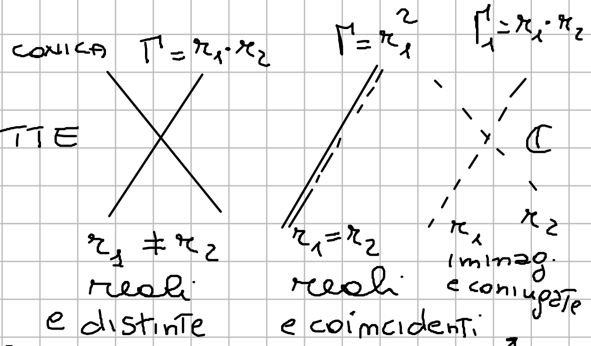
Invece se risulta $\det B \neq 0$ $\quad \det A = -k^2+6k-4$

- In tal caso la conica si dice **irriducibile** e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: **Ellisse reale** se $TrA \cdot \det B < 0$; invece **Ellisse immaginaria** se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo **Circonferenza**;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è **Parabola**;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è **Iperbole**. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di **iperbole equilatera**

- $k=0$ (CONDIZIONE)*****

IN TAL CASO LA CONICA SI SPEZZA IN 2 RETTE

CALCOLIAMO $\rho(B)$ per $k=0$, sostituisco in B

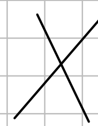


$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix}}_{\neq 0} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(B) = 2$

2 rette distinte

$k=0 \quad F: \; 2y^2 - 4xy + 2y = 0 \rightarrow y^2 - 2xy + y = 0 \quad \underset{r_1}{y} \cdot \underset{r_2}{(y-2x+1)} = 0$

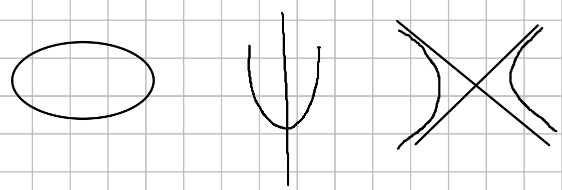


CASO ① rette reali e distinte $\quad \mathbb{R}$

$\left(\text{EX } \; F: \; 2y^2 + x^2 = 0 \quad \underset{r_1}{(2y+ix)}\underset{r_2}{(2y-ix)} = 0 \right)$
$\mathbb{C}$

Togliamo la condizione

$k \neq 0$ $\quad (\det B \neq 0)$ CONICA IRRIDUCIBILE



a) Se $\det A > 0$ $\quad -k^2+6k-4 > 0$

DISEQUAZIONE DI 2° GRADO DA RISOLVERE

$k^2 - 6k + 4 < 0$

VALORI INTERNI

$k^2 - 6k + 4 = 0 \qquad k = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5} \begin{cases} 3+\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} \end{cases}$

$3-\sqrt{5} < k < 3+\sqrt{5}$
ELLISSI

REALI $\qquad\qquad$ IMMAGINARI

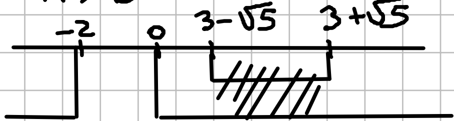
$TrA \cdot \det B < 0 \qquad\qquad TrA \cdot \det B > 0$

$(2+k)(-k) < 0$

$k(k+2) > 0$
$k=0, \; k=-2$

$k < -2 \quad k > 0$

$$\begin{cases} 3-\sqrt{5} < k < 3+\sqrt{5} \\ k < -2 \quad k > 0 \end{cases}$$



TUTTE Reali in questo intervallo

Cerchiamo le circonferenze $\begin{cases} \overset{k}{a_{11}} = \overset{2}{a_{22}} \; (\neq 0) \\ \underset{(k-2)}{a_{12}} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} k=2 \\ k-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=2 \end{cases} \quad k=2 \text{ CIRCONF.}$$

in F sostituiamo $k=2$ $\quad \mathscr{C}:$

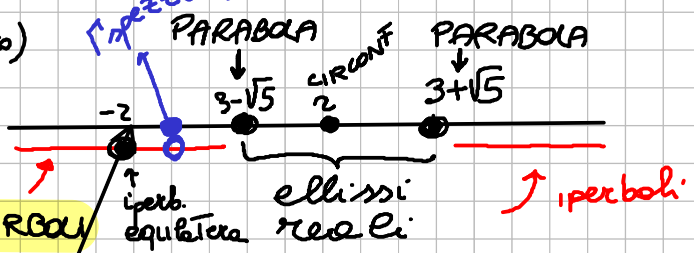
$\mathscr{C}: \; 2x^2+2y^2+2y=0 \rightarrow \boxed{x^2+y^2+y=0}$

R. Ellissi per $3-\sqrt{5} < K < 3+\sqrt{5}$

b) Se $\det A = 0$ $\quad -K^2+6K-4=0$ PARABOLE

$K = 3-\sqrt{5}$ (già fatto)

$K = 3+\sqrt{5}$



c) Se $\det A < 0$ $\quad -K^2+6K-4<0$ IPERBOLI

$K^2-6K+4>0$

valori esterni $\quad K < 3-\sqrt{5} \quad K > 3+\sqrt{5}$

Iperbole equilatera $\quad \mathrm{Tr}\,A = 0 \qquad \mathrm{Tr}\,A = a_{11}+a_{22} = 0$

$2+K=0 \quad \boxed{K=-2}$

CENTRO E RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA

$$1x^2+1y^2+ax+by+c=0 \qquad \boxed{1x^2+y^2+y=0}$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2-c}$

$a=0$ coeff. x
$b=1$ " y
$c=0$ t. noto

R.

$C = (0, -\frac{1}{2}) \qquad r = \sqrt{0^2+(-\frac{1}{2})^2-0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

N. B. $2x^2+2y^2+2y=0 \rightarrow$ PRIMA DIVIDO PER $a_{11} \neq 0 \rightarrow x^2+y^2+\frac{2y}{2}+\dots=0$

e POI APPLICO LE FORMULE DEL CENTRO C e raggio r

Ex $\quad 3x^2+3y^2-4x+6y+1=0$

devo dividere prima per 3 e poi applico le formule, C e r

$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+2y+\frac{1}{3}=0$

$C = (+\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}, -1) = (\frac{2}{3}, -1) \qquad r = \sqrt{\frac{4}{9}+1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4+9-3}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

2) FEBBRAIO 2021

TUTTO AL I MEMBRO

$$\det_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \\ \}s \end{matrix} = \dots$$

1) Date le rette:

$$r: \begin{cases} z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Verificare se due rette sono sghembe (cioè determinante diverso da zero)

stabilire se sono sghembe. Determinare inoltre il piano π contenente la retta r e passante per $A = (1, 0, -1)$.

x y z

$F: z + k(y+z-1) = 0 \rightarrow k \rightarrow \dots$ e poi si sostituisce

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

← vedi esercizio precedente con la classificazione delle coniche

- Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k = 1$.

(forma ridotta)

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma$, $\det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$$

$\beta = ?$ $\gamma = ?$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2$, $\det A = 0$ Da cui

$$\boxed{\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$ che tipo di conica è?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B = \cancel{2} - 1 - 1 - 1 - 1 - \cancel{2} = -4 \neq 0$

$\det A = 1 - 1 = 0 \rightarrow$ PARABOLA

FORMA RIDOTTA DELLA PARABOLA É

$$\beta Y^2 = 2\gamma X$$

$\beta = TrA = 1 + 1 = 2$

$$\gamma = \sqrt{\frac{-|B|}{TrA}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

R. $2Y^2 = 2\sqrt{2}\,X$

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori

- $u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$

e l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definita dalle relazioni:

ho sostituito

METODO STANDARD

$$\begin{cases} f(u_1) = (1,0,0,0) \\ f(u_2) = (h,0,2,0) \\ f(u_3) = (0,h-1,0,h) \\ f(u_4) = (0,0,0,h) \end{cases}$$

$\rightarrow f(1,0,0,0) = (1,0,0,0) \rightarrow f(e_1) = (1,0,0,0)$

$\rightarrow f(1,0,1,0) = (h,0,2,0) \rightarrow f(e_1) + f(e_3) = \_$

$\rightarrow f(0,1,0,0) = (0,h-1,0,h)$ $\quad f(e_2) = \_$

$\rightarrow f(0,0,0,1) = (0,0,0,h)$ $\quad f(e_4) = \_$

con h parametro reale.

Ricevimento del 23/12