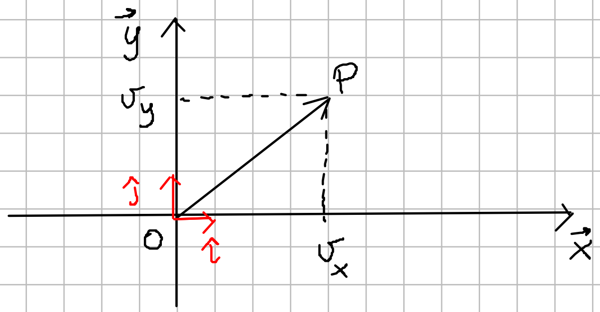
Lezione n° 9 (2-11-21)



$\vec{v} = \vec{OP} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

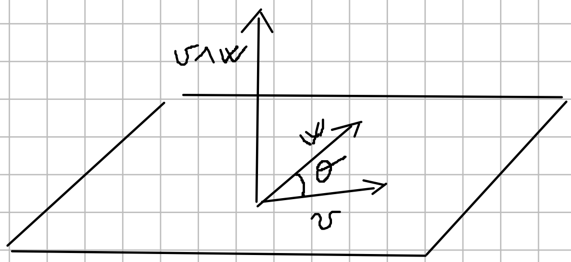
$P = (v_x, v_y)$. Per convenzione v_x, v_y si dicono "componenti" di $\vec{v}$ e si scrive

$v = (v_x, v_y)$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(x, y)

NELLO SPAZIO $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$:
(x, y, z)

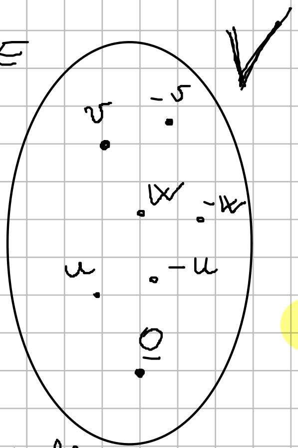
IN QUESTO CASO $v = (v_x, v_y, v_z)$ $\quad v = \vec{OP}$
$P = (v_x, v_y, v_z)$

Prodotto vettoriale



ANDIAMO A DEFINIRE LO SPAZIO VETTORIALE

DATO UN INSIEME



formato da vettori
Consideriamo la somma
$v = (v_x, v_y)$ $\quad w = (w_x, w_y)$

$v + w = (v_x + w_x, v_y + w_y)$

$(V, +)$ gode delle 4 proprietà del GRUPPO ABELIANO

1) ASSOCIATIVA ✓
2) ∃ vettore nullo (EL. NEUTRO) $\underline{0} = (0,0) \in V$ ✓
3) ∃ vettore opposto $(-v) \in V$
4) COMMUTATIVA VALE ✓

SPAZIO VETTORIALE

DICIAMO V un **K - SPAZIO VETTORIALE**

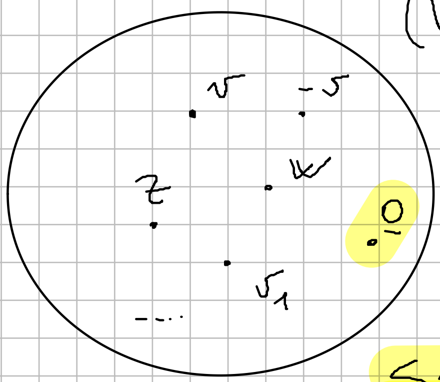
$(V,$ SOMMA, PROD. ESTERNO$)$ $\quad$ $a\vec{v}$ $\quad$ $a \in K$

$$\boxed{(V, +, \cdot)}$$

SE VALGONO 5 PROPRIETÀ:

1) $(V, +)$ GR. ABELIANO
2) ASSOCIATIVA DELLA 2° OPERAZIONE (PROD. EST.)
$$(a b) \cdot v = a \cdot (bv) \qquad a, b \in K$$
3) $1 \cdot v = v$
4) DISTRIBUTIVA N°1 $\quad (a+b) \cdot \underline{v} = a \cdot \underline{v} + b \cdot \underline{v}$
5) // $\quad$ N°2 $\quad a \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = a\underline{v} + a\underline{w}$
$$a, b \in K$$

$$(V, +, \cdot)$$



$$v + w = (v_x + w_x, v_y + w_y)$$
$$a \cdot v = (a v_x, a v_y)$$

SPAZIO VETTORIALE

E SI DIRÀ

"SIA V UN K - SPAZIO VETTORIALE"

ESEMPIO DI SPAZIO VETTORIALE:

1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \qquad (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ VALE TUTTO!

$$v_1 = (x_1, y_1) \qquad v_2 = (x_2, y_2)$$
$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a \cdot v_1 = a(x_1, y_1) = (a x_1, a y_1)$$

2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ $\quad (x, y, z) \quad (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ VALE TUTTO!

3) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ $\quad (x_1, x_2, x_3, x_4)$ CONTINUA A VALERE TUTTO

4) $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-volte}} = \mathbb{R}^n$

n-upla

$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$a \cdot v = a\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a x_1, a x_2, \dots, a x_n)$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ SPAZIO VETTORIALE

UNA MATRICE QUALSIASI É VETTORE "GENERALIZZATO"

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow v = (1, 0, -1, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$$

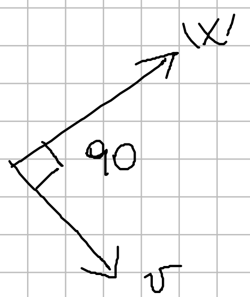
é un vettore a 6 COMPONENTI

TUTTE LE MATRICI SONO VETTORI

$\mathbb{R}^{m,n} = \{ \text{MATRICI } m \times n \}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$ SPAZIO VETTORIALE

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} \qquad a \cdot A = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} & a \cdot a_{12} \\ a \cdot a_{21} & \dots \end{pmatrix}$$



$v \cdot w = 0$

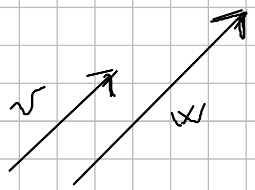
$v_x w_x + v_y w_y = 0$

$v = (1, 3)$ $\quad w = (3, -1)$ $\quad$ sono perpendicolari?

SI

FACCIAMO IL PROD. SCALARE

$\underline{v \cdot w} = (1, 3) \cdot (3, -1) = 3 - 3 = \underline{0}$ $\quad \boxed{v \perp w}$



$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \mid \boxed{\vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}}$

$v = (1, 3)$ $\quad w = (2, 6)$ $\quad$ sono paralleli?

SI

$\exists\ \lambda = \frac{1}{2} \mid \underline{v} = \frac{1}{2}\underline{w}$

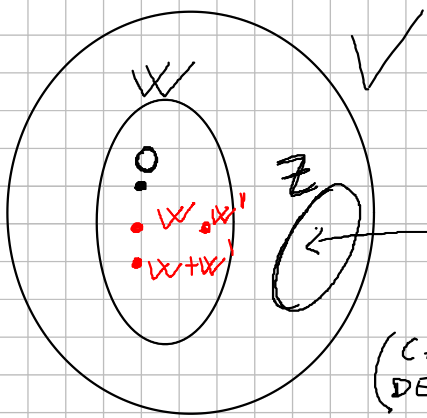
(OPPURE $\underline{w} = \boxed{2}\,\underline{v}$)

W = SOTTOSPAZIO

è uno sp. vettoriale dentro V

$\underline{0} \in V$

$\underline{0} \in W$



$W \subseteq V$

NON C'È IL VETTORE NULLO

(CADE LA PROPR. DEL GR. ABELIANO $(Z, +)$)

$\Downarrow$

Z NON È SOTTOSPAZIO

$(V, +, \cdot)$ $\qquad (W, +, \cdot)$ SP. VETTORIALE DENTRO V

QUINDI "W SOTTOSPAZIO DI V"

CRITERIO PER VERIFICARE SE $W \subseteq V$ È UN SOTTOSPAZIO:

1) CHIUSO RISP. ALLA SOMMA

$\forall\ w \in W,\ w' \in W \Rightarrow (w + w')$ DEVE APPARTENERE A W.

2) CHIUSO RISP AL PROD. ESTERNO

$\forall a \in K, \quad \forall w \in W \Rightarrow a w \in W$

ESEMPIO DATO $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ SPAZIO VETTORIALE

(NEL NOSTRO ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$)

CONSIDERIAMO UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$, CHE CHIAMO

$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \}$

EQU. CARATTERISTICA O EQU. CARTESIANA

$(1,4) \in W$? NO $\quad 2(1) - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad -2 \neq 0 \quad (1,4) \notin W$

$(3,6) \in W$? SI $\quad 2(3) - 6 = 0$ ok ✓ $\quad (3,6) \in W$

CI SONO 2 MODI PER RAPPRESENTARE W:

$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \boxed{2x - y = 0} \}$ 1° MODO CON L'EQU. CARTESIANA

RICAVO UNA INCOGNITA

$-y = -2x$

$y = 2x$

$W = \{ (x, 2x) \}$ 2° MODO CON "ELEMENTO GENERICO"

APPLICHIAMO IL CRITERIO PER VEDERE SE W È UN SOTTOSPAZIO DI V

1. Chiuso rispetto alla somma?

devo prendere due vettori generici di W

$w_1 = (x_1, 2x_1) \qquad w_2 = (x_2, 2x_2) \in W$

CALCOLO LA LORO SOMMA TRAMITE LE COMPONENTI

$w_1 + w_2$ VETTORE SOMMA $= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, \boxed{2(x_1 + x_2)}) \in W$? SI

$2(x_1 + x_2) - (2(x_1 + x_2)) = 0$ SI VERA !!!!

2. Chiuso rispetto al prodotto esterno?

devo prendere

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall w \in W$ vettore generico

$$w = (x, 2x)$$

CALCOLIAMO $a \cdot w = a(x, 2x) = (\underbrace{ax}_{1°}, \underbrace{2ax}_{2°}) \in W$?

SI

EQU. CARTES. DI W

$2x - y = 0$ $\quad 2\cdot(1°) - 2° \overset{?}{=} 0$

$2(ax) - 2ax \overset{?}{=} 0$ SI VERO

$\Rightarrow$ CONCLUSIONE W È SOTTOSPAZIO

ESEMPIO 2: $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$ CON L'EQU. CARTESIANA

$\downarrow$

$-y = 1 - 2x$

$\downarrow$

$y = 2x - 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$Z = \{(x, 2x - 1)\}$ CON L'ELEM. GENERICO

APPLICHIAMO IL CRITERIO PER VEDERE SE Z È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

1. Chiuso rispetto alla somma?

due vettori generici di Z, che indichiamo con z_1, z_2

$z_1 = (x_1, 2x_1 - 1)$

$z_2 = (x_2, 2x_2 - 1)$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, 2x_1 - 1 + 2x_2 - 1) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - 2)$

IL VETTORE SOMMA $z_1+z_2=(\underline{x_1+x_2}, \underline{2x_1+2x_2-2}) \in Z$?

NO

$2x-y=1$

$2(x_1+x_2)-(2x_1+2x_2-2) \overset{?}{=} 1$

$\cancel{2x_1}+\cancel{2x_2}-\cancel{2x_1}-\cancel{2x_2}+2=1$ $\qquad 2=1$ ASSURDO

1. NON VALE $\Longrightarrow$ Z NON È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$

ESEMPIO 3. Sia $V=\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

CONS. $T=\{(x,y,z) \mid x-y=0 \,;\, x+y+z=0\}$

DUE EQU. CARTESIANE

$(x-y=x+y+z=0)$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-2y \end{cases}$$

$\forall y$

ELEMENTO GENERICO DI T:

$T=\{(y, y, -2y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

CRITERIO

1. chiuso risp. alla somma ?

$t_1=(y_1, y_1, -2y_1) \qquad t_2=(y_2, y_2, -2y_2)$

$t_1+t_2=(\underline{y_1+y_2}, \underline{y_1+y_2}, \underline{-2y_1-2y_2}) \in T$? SI

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

VERA $\quad y_1+y_2=y_1+y_2$

$y_1+y_2+y_1+y_2+(-2y_1-2y_2) \overset{?}{=} 0$ VERO

2. Chiuso risp al prodotto esterno?

$a \cdot t_1 = (ay_1, ay_1, -2ay_1) \in T$?

SI

$$\begin{cases} x - y = 0 & \text{VERA} \\ x + y + z = 0 & \text{SI PURE} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ T É SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$