Lezione n. 3 (12-10-21)

STRUTTURE ALGEBRICHE

GRUPPO | ANELLO | CAMPO K

OPERAZIONE :

$2, 3 \xrightarrow{+ \text{ ADDIZIONE}} 5$ $(2,3) \xrightarrow{\cdot \text{ MOLTIPLICAZ}} 6$

$(1, 6) \longrightarrow 7$

ϕ FI $: A \times A \longrightarrow A$

$(a_1, a_2) \longmapsto a_1 + a_2$

"OPERAZIONE" È UNA FUNZIONE

FISSIAMO UN'OPERAZIONE QUALSIASI INTERNA (SIGNIFICA CHE IL RISULTATO DELL'OPERAZ. APPARTIENE ALL'INSIEME A STESSO)

Esempio : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(1, 6) \xrightarrow{+} 7 \in \mathbb{N}$ OPER. + INTERNA

$(1, 6) \xrightarrow{-} -5 \notin \mathbb{N}$ OPER. − NON È INTERNA

$(-5 \in \mathbb{Z})$

DEF. DI GRUPPO. FISSIAMO LA SOMMA +
SI INDICA CON LA LETTERA G ED È UN INSIEME CHE GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ

$$\boxed{(G, +) = \text{GRUPPO}}$$

DEVONO VALERE 3 PROPRIETÀ

1) PROPR. ASSOCIATIVA $(3+5)+2 = 3+(5+2)$

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in G$$

$e \; : \quad a * e = e * a = a$ $\qquad * =$ OPERAZ. QUALS.

2) ESISTE ELEM. NEUTRO DELLA SOMMA ED È LO ZERO

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall a \in G$$

3) ESISTE L'INVERSO DI OGNI ELEMENTO RISP. ALLA SOMMA

$$3 + (-3) = 0 \text{ (el. neutro)}$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \qquad \boxed{(-a) \in G}$$

1) + 2) + 3) = GRUPPO $(G, +)$

1) + 2) + 3) + 4) PROPR. COMMUTATIVA $a + b = b + a$ = GRUPPO ABELIANO $(G, +)$

$(\mathbb{N}, +)$ GRUPPO ?

1) ASSOCIATIVA VALE ✓
2) ESISTE $0 \in \mathbb{N}$ VALE ✓
3) $(-a) \notin \mathbb{N}$ NON VALE

$\Rightarrow (\mathbb{N}, +)$ NON È GRUPPO

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ 1) ✓ 2) ✓ 3) ✓ $\Rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ È GRUPPO $\Rightarrow$

$(\mathbb{Q}, +)$ GRUPPO , $(\mathbb{R}, +)$ GRUPPO , $(\mathbb{C}, +)$ GRUPPO

PASSIAMO ALL'ANELLO CONSIDERANDO UN INSIEME CHE INDICHEREMO CON A

$$(\underbrace{A, +}_{\text{GR ABEL. 1) 2) 3) 4)}}, \cdot) = \text{ANELLO}$$

SE VALGONO 6 PROPRIETÀ

1) 2) 3) 4) = $(A, +)$ GRUPPO ABELIANO RISP. ALLA SOMMA

5) PROPR. ASSOCIATIVA PER LA MOLTIPLIC.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall a, b, c \in A$$

6) PROPR. DISTRIBUTIVE: 1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

2) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

1) 2) 3) 4) 5) 6) $= (A, +, \cdot)$ ANELLO

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) $= (A, +, \cdot)$ ANELLO COMMUTATIVO

PROPR. COMMUT. DELLA MOLTIPLICAZIONE $a \cdot b = b \cdot a$

ESEMPI DI ANELLI

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ANELLO? SONO VALIDE TUTTE

PARLIAMO DI CAMPO K

$(K, +, \cdot)$ ANELLO COMMUTATIVO (7 PROPRIETÁ)

SI DICE CAMPO SE OGNI ELEMENTO $\neq 0$ HA IL SUO INVERSO $1/a$ RISPETTO ALLA SECONDA OPERAZIONE (MOLTIPLICAZIONE) CHE APPARTIENE ALL'INSIEME DI PARTENZA

$\boxed{\frac{1}{a} \in \text{CAMPO } K}$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ É CAMPO?

Anello commutativo ✓

$\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

-3 INVERSO RISP. ALLA MOLTIPL. $\rightarrow -\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$? NO

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ NON POSSIEDE GLI INVERSI $1/a$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ NON É CAMPO

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ CAMPO?

$\frac{2}{3}$ INVERSO È $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$? SI $\Rightarrow \mathbb{Q}$ È CAMPO

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ CAMPO, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ CAMPO

K CAMPO $\begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

$a \in K$ (a è un numero razionale ($\mathbb{Q}$), reale ($\mathbb{R}$) o complesso ($\mathbb{C}$))

"PRESO UNO SCALARE $a \in K$"

MATRICI

TABELLA 3 RIGHE 4 COLONNE

3×4

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & - & - & - \\ a_{31} & - & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

a_{ij} — i: indica la riga; j: indica la colonna

m righe

n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{m \times n}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

OPERAZIONE SOMMA TRA 2 MATRICI

$$\underset{(3\times 4)}{A} + \underset{(3\times 4)}{B} = \underset{(3\times 4)}{C}$$

$$\underset{(3\times 4)}{A} + \underset{(3\times 3)}{B} = \nexists \text{ SOMMA}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

etc.

CALCOLARE $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO ESTERNO

PRESO UNO SCALARE $h \in K$ DEVO CALCOLARE

$h \cdot A \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA 2 MATRICI

$$A \cdot B$$

DETTO PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$A \cdot B$ AFFINCHÉ SI POSSA FARE

DEVE ACCADERE CHE

$$\underset{m \times \cancel{n}}{A} \cdot \underset{\cancel{n} \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

$$\underset{3 \times \cancel{4}}{A} \cdot \underset{\cancel{4} \times 2}{B} = \underset{3 \times 2}{C}$$

$$\underset{3 \times 4}{A} \cdot \underset{3 \times 4}{B} = \nexists \text{ PRODOTTO}$$

$4 \neq 3$