Lezione n° 20 (16-12-21)

Equaz. della retta nel piano Oxy ($\mathbb{R}^2$):
- $\to ax+by+c=0$ (F. IMPL.)
- $\to y=mx+q$ (FORMA ESPLICITA)

~~$m=-\frac{a}{b}$~~ $\longrightarrow$ VETTORE DIRETTIVO DELLA RETTA

$\underline{v} = (\ell_v, m_v)$ $m_v \neq m$ (coeff. ang.)

$\Downarrow$

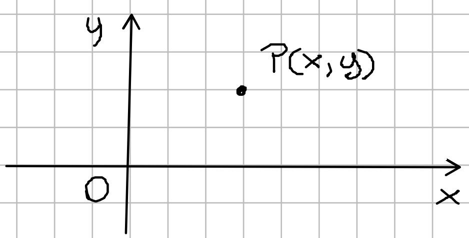
PER COMODITÀ

$\mathbb{R}^2$

$\boxed{\underline{v} = (\ell, m)}$ DÀ LA DIREZIONE ALLA RETTA

PRENDONO IL NOME DI "PARAMETRI DIRETTORI"

AGGIUNGIAMO I PUNTI IMPROPRI



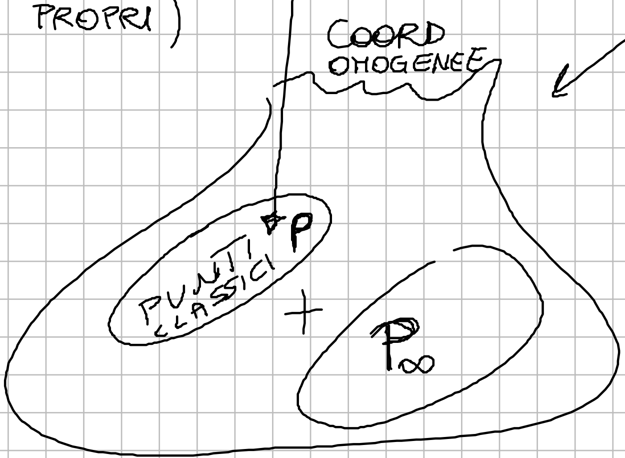
NASCE UN NUOVO SIST. DI RIFERIMENTO

NON SI DISEGNA NULLA

COORD. CARTESIANE $\xrightarrow{\text{ASTRAZIONE}}$ COORD. OMONGENEE

(x, y) (PUNTI PROPRI)

(x', y', t') — t': NON È LA z; $t' \neq 0$ / $t' = 0$



- SE $t' \neq 0$ IL PUNTO È UN PUNTO "DISEGNABILE"
- SE $\boxed{t'=0}$ IL PUNTO NON È DISEGNABILE E SI CHIAMA

«PUNTO ALL'INFINITO»

P_∞

(O PUNTI IMPROPRI)

COME PASSARE DA SISTEMA COORD. CARTESIANE A OMOGENEE (E VICEVERSA)

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{x'}{t'} \\[2ex] y = \dfrac{y'}{t'} \end{cases}}$$

FORMULE DI PASSAGGIO

Esempio :

Dato un punto $\boxed{P(3,4)}$ TROVARE IL CORRISPONDENTE PUNTO IN COORDINATE OMOGENEE :

$P(\overset{x}{3},\overset{y}{4})$ $\quad \begin{cases} 3 = \frac{x'}{t'} \\ 4 = \frac{y'}{t'} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3t' \\ y' = 4t' \end{cases}$ $\quad \left(\frac{3\cancel{t'}}{\cancel{t'}}, \frac{4\cancel{t'}}{\cancel{t'}}, \frac{\cancel{t'}}{\cancel{t'}}\right) = P$

una incognita libera (t')

$\boxed{P(3, 4, 1)}$ PUNTO DISEGNABILE

NOVITÀ : I PUNTI IN COORD. OMOGENEE SONO A MENO DI UN FATTORE DI PROPORZIONALITÀ

$P = (3, 6, 9) = (6, 12, 18) = (1, 2, 3) = etc...$

(INVECE $P = (3,6) \neq (1,2)$ COORD. CARTESIANE)

REGOLA PER PASSARE DA CARTESIANE A OMOGENEE

$P = (2,3) \longrightarrow P(\underset{x'}{2}, \underset{y'}{3}, \underset{t'}{1})$ coord. omogenee

t' = "INDICATORE" (NON È LA Z)

PARTO DA Oxy

" $P(x,y) \longrightarrow P(x,y,1)$ COOR OMOGENEE "

VICEVERSA

- PARTIAMO DA COORDINATE OMOGENEE $P = (\overset{x'}{3}, \overset{y'}{4}, \overset{t' \neq 0}{2})$

DIVIDO TUTTO PER 2 : $(3,4,2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}}, \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2, 1\right)$

$\Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ COORD. CARTESIANE E HO FINITO !

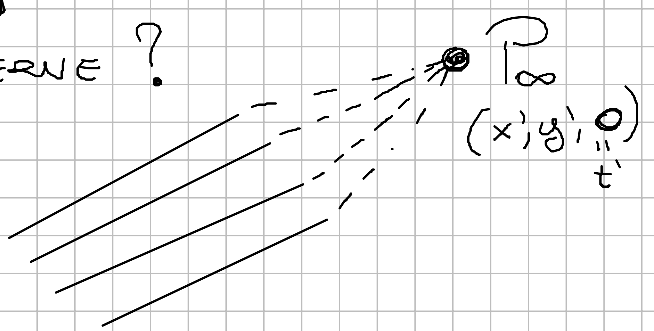
- PARTIAMO DA COORDINATE OMOGENEE $P = (\overset{x'}{2}, \overset{y'}{5}, \overset{t'=0}{0}) = P_\infty$

DOVREI DIVIDERE PER "0" (IN OGNI CASO MAI AVREI 1 ALLA FINE !!!) MA NON È FATTIBILE !

$\Rightarrow$ NON C'È IL PUNTO IN COORD. CARTESIANE

$\nexists$

IL PUNTO ALL'INFINITO A COSA CI SERVE ?

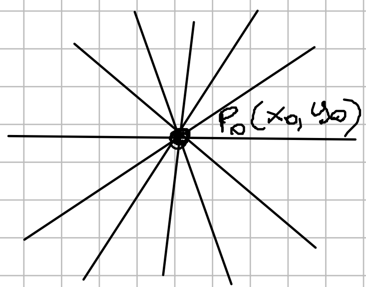


- RETTE PARALLELE SI "INCONTRANO" ALL'INFINITO
- RETTE PARALLELE ABBIAMO SEMPRE DETTO

CHE HANNO LA STESSA "DIREZIONE"

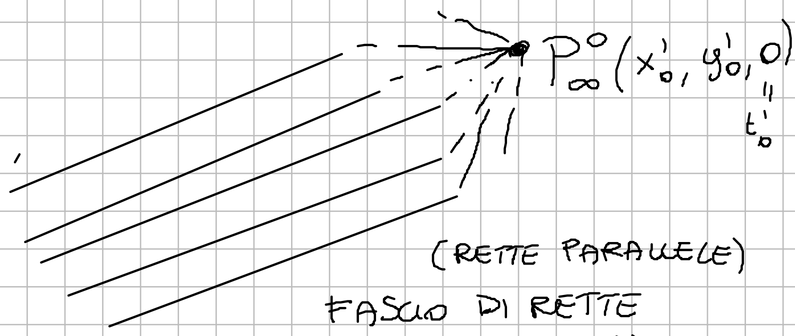
• RETTE PARALLELE HANNO LO STESSO PUNTO P_∞ (IMPROPRIO) $(x', y', 0)$

⇒ SI DICE CHE IL $P_\infty(x', y', 0)$ DÀ LA DIREZIONE ALLA RETTA



FASCIO DI RETTE PROPRIO (STELLA)

CENTRO FASCIO $P_0(x_0, y_0)$



(RETTE PARALLELE)
FASCIO DI RETTE «IMPROPRIO»

CENTRO FASCIO P^0_∞

RISULTATO IMPORTANTISSIMO:

$$P_\infty = (x', y', 0) = (l, m, 0)$$

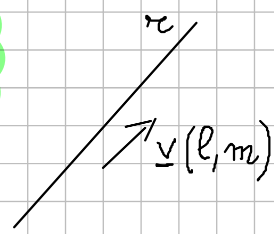
VETTORE DIRETTIVO È

$$\underline{v} = (l, m) = (x', y')$$

(ZERO VIENE TOLTO)

⇒ I PARAMETRI DIRETTORI DELLA RETTA SONO QUINDI LE PRIME DUE COORDINATE DEL SUO PUNTO ALL'INFINITO

$\underline{v} = (l, m) \equiv (x', y')$ VETTORE DIRETTIVO DI r ED È PARALLELO AD r



Quindi data UNA RETTA TROVARE IL SUO PUNTO IMPROPRIO

ESEMPIO: $\boxed{3x - y + 4 = 0}$ nel piano Oxy è una retta.

TROVARE IL SUO PUNTO IMPROPRIO O ALL'INFINITO $P_\infty(x', y', 0)$ $t' = 0$

RISOLUZIONE

SI DEVE TRASFORMARE L'EQUAZ. DELLA RETTA IN COORD. OMOGENEE E DOPO SI PUÒ CERCARE $P_\infty(x', y', 0)$.

FORMULE DI PASSAGGIO
$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{t'} \\ y = \dfrac{y'}{t'} \end{cases}$$

sostituire nell'equazione della retta

$$\rightarrow 3\left(\frac{x'}{t'}\right) - \frac{y'}{t'} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{3x' - y' + 4t' = 0}$$

COORD. OMOGENEE

"OMOGENIZZARE" UN'EQUAZIONE SIGNIFICA RENDERE TUTTI I TERMINI DELLO STESSO GRADO ($2x - 5 = 0 \rightarrow 2x' - 5t' = 0$ tutti i grado 1

$x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x'^2 - 3xt + 4t^2 = 0$) tutti di grado 2

$$\begin{cases} 3x' - y' + \cancel{4t'} = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad (P_\infty)$$

VADO A CERCARE P_∞ con $t' = 0$

STO CERCANDO IL PUNTO IMPROPRIO $\boxed{\text{PONGO } t' = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x' - y' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 3x' \\ t' = 0 \end{cases} \forall x' \quad P_\infty(x', 3x', 0) = (1, 3, 0)$$

R. IL PUNTO IMPROPRIO HA COORDINATE $P_\infty(1, 3, 0)$

$\Rightarrow \underline{v} = (\underset{l}{1}, \underset{m}{3})$ PARAMETRI DIRETTORI

EX

DATA UNA RETTA $3x - 2y + 2 = 0$ TROVARE I PARAMETRI DIRETTORI (SIGNIFICA TROVARE $\underline{v} = (l, m)$) → "COORD. OMOGENEE"

RISOLUZIONE

$3x - 2y + 2 = 0$ "OMOGENIZZO" → $3x' - 2y' + 2t' = 0$ PONGO $t' = 0$

$$\begin{cases} 3x' - 2y' + \cancel{2t'} = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x' = 2y' \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{2}{3}y' \\ t' = 0 \end{cases} \forall y' \rightarrow P_\infty\left(\frac{2}{3}y', y', 0\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) = (2, 3, 0)$$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v} = (2, 3)}$ $l = 2$, $m = 3$

DIVIDIAMO PER IL SECONDO

$$v = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

IL "VECCHIO" COEFFICIENTE ANGOLARE $m = \frac{3}{2}$

SI DIMOSTRA CHE

$$\underline{v} = (l_v, m_v) = \left(1, \frac{m_v}{l_v}\right) \Rightarrow (1, \underset{m}{\text{COEFF. ANGOLARE}})$$

IN GENERALE SI HA QUINDI:

PONGO

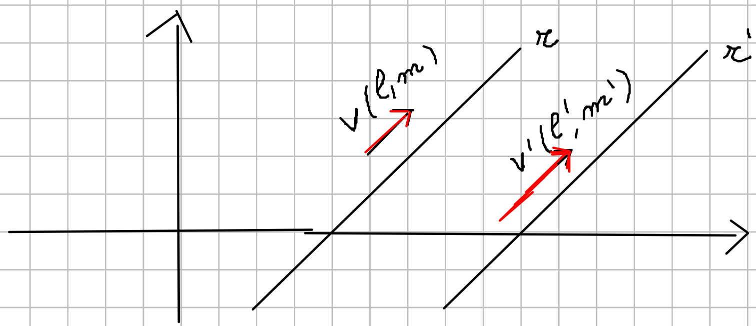
- $ax+by+c=0 \xrightarrow{\text{OMOGENIZZO}} ax'+by'+ct'=0$ $\quad t'=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} ax'+by'+\cancel{ct'}=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'=-\frac{a}{b}x' \\ t'=0 \quad \forall x' \end{cases} \quad P_\infty=\left(x', -\frac{a}{b}x', 0\right)=$$

$$=\left(1, \underbrace{-\frac{a}{b}}_{\text{FORMULA COEFF. ANG.}}, 0\right)=\left(1, \text{COEFF. ANG.}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \underline{v}=\left(1, \text{COEFF. ANG.}\right)=(1, m)$$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA DUE RETTE



$r \parallel r' \Leftrightarrow \underline{v} \parallel \underline{v}'$

Quando due vettore di paralleli?
Quando differiscono per un fattore di proporzionalità λ
$v=\lambda v'$

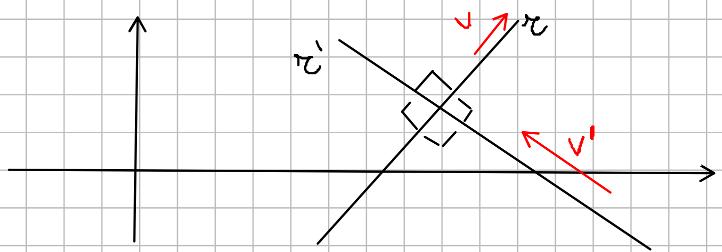
$$(l,m)=\lambda(l',m')$$

$$(l,m)=(\lambda l', \lambda m')$$

$$\begin{cases} l=\lambda l' \\ m=\lambda m' \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda=\frac{l}{l'} \\ \lambda=\frac{m}{m'} \end{cases} \quad \boxed{\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}}$$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA 2 RETTE

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ TRA DUE RETTE $r \perp r'$:



$v \perp v' \Leftrightarrow \boxed{\underline{v}\cdot\underline{v}'=0}$

PROD. SCALARE

$$(l,m)\cdot(l',m')=0 \quad (1^\circ\cdot1^\circ+2^\circ\cdot2^\circ=0)$$

$$\boxed{ll'+mm'=0}$$

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ TRA 2 RETTE

RICEVIMENTO DI OGGI ANNULLATO → LUNEDÌ 20 ORE 15.30

(MARTEDÌ 21 È ANNULLATO)