Lezione n° 12 (11-11-21)

SISTEMI LINEARI

↓ elem. comuni (INTERSEZIONE)

↓ 1° GRADO (LINEA o RETTA $ax^1+by^1+c=0$)

$$\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1}$$

n - incognite : $x_1, x_2, \dots, x_n$

2° indice indica l'incognita accanto

1° indice indica l'equazione di appartenenza

Scriviamo insieme la 2° equazione :

$$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2} \leftarrow \text{termine noto}$$

etc...

ULTIMA EQUAZIONE LA INDICHIAMO CON m - equazioni

$$\boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m}$$

LI METTIAMO A SISTEMA E FORMIAMO IL

SISTEMA LINEARE

FORMA ESTESA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad B \iff \boxed{A \cdot X = B}$$

m-equazioni

n incognite

FORMA COMPATTA

S = SOLUZIONE DI UN'EQU. LINEARE A n-incognite è una n-upla di numeri $S=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ che sostituiti alle n-incognite rendono l'equazione una identità

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

m = n° equaz = 2

n = n° incognite = 3

x_1, x_2, x_3

$m \times n \quad (2 \times 3)$

LA SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} x_3 = (3x_1 + 2x_2) \\ x_1 + x_2 + \underbrace{3x_1 + 2x_2}_{} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} = \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \quad \cancel{3}x_2 = \frac{1-4x_1}{3}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3x_1}{1} + \frac{2\cdot(1-4x_1)}{3} = \frac{9x_1 + 2 - 8x_1}{3} = \frac{x_1+2}{3} \\ x_2 = \frac{1-4x_1}{3} \end{cases}$$

R. $\begin{cases} x_3 = \frac{x_1+2}{3} \\ x_2 = \frac{1-4x_1}{3} \end{cases} \forall x_1$ OPP.

$$S = \left\{ \left(\overset{x_1}{x_1}, \overset{x_2}{\frac{1-4x_1}{3}}, \overset{x_3}{\frac{x_1+2}{3}} \right) \right\}$$

LA SOLUZIONE È UNA TERNA CON x_1 INCOGNITA INDIPENDENTE (O LIBERA)

COME USIAMO LE MATRICI NEI SISTEMI

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ogni equazione diventa una riga

$$\begin{array}{c} R_1 \to \\ R_2 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

COLONNA DEI TERMINI NOTI

IL RANGO DI QUESTA MATRICE RAPPRESENTA IL N° DI EQUAZIONI L. I.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ \cancel{(4x_1 - 2x_2 = 6)} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{array}\right) \quad \boxed{\rho = 1}$$

⇓

dividendo per 2
ritrovo la 1° equaz.

$$R_2 = 2R_1$$

MATRICE DEL SISTEMA "COMPLETA" SI INDICA CON LE LETTERE

$$(A, B) = \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{A}}^{\text{INCOGN.}} \;\middle|\; \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ \\ b_m \end{matrix}}_{B}}^{\text{T. NOTI}} \right)$$

ESEMPIO DI
COME RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE
USANDO **LA RIDUZIONE**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3-equ. in 4-inc.
(3×4)

$$(A,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1^* & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

RIDUCIAMO PER RIGA

$$R_3 \to R_3 - R_1 \qquad \left(\begin{array}{c|ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3^* & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad R_3 \to R_3 - 3R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -5 & -7 \end{array}\right)$$

$-2-3(-3) = -2+9$

$-2-3(1) = -5$

$-1-3(2) = -1-6$

SISTEMA RIDOTTO È

$\rho(A,B) = 3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ \underbrace{7x_3 - 5x_4 = -7}_{} \end{cases}$$

AVRÀ LE STESSE SOLUZIONI DEL SIST. DI PARTENZA

PARTO DA QUI

$$\begin{cases} ---- \\ \frac{x_2}{1} - \frac{3\cdot(5x_4-7)}{7} + \frac{x_4}{1} = \frac{2}{1} \\ x_3 = \frac{5x_4-7}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ---- \\ \underline{7x_2} - 15x_4 + 21 + 7x_4 = 14 \\ x_3 = \frac{5x_4-7}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ---- \\ 7x_2 - 8x_4 = -7 \\ x_3 = \frac{5x_4-7}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} ---- \\ \cancel{7}x_2 = \frac{8x_4-7}{7} \\ x_3 = \frac{5x_4-7}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2\,\frac{8x_4-7}{7} + \frac{5x_4-7}{7} + x_4 = 1 \\ x_2 = ... \\ x_3 = ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 - 16x_4 + 14 + 5x_4 - 7 + 7x_4 = 7 \\ x_2 = --- \\ x_3 = --- \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{7}x_1 = \frac{4}{7}x_4 \\ x_2 = --- \\ x_3 = ... \end{cases}$$

$\forall x_4$

R.

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ S = \{(& \frac{4}{7}x_4, & \frac{8}{7}x_4 - 1, & \frac{5x_4-7}{7}, & \underline{x_4} &)\} \end{array}$$

LIBERA

∞ SOLUZIONI

TEOREMA DI ROUCHÈ - CAPELLI n°. 1

UN SISTEMA LINEARE $m \times n$ (m- equ. in n-incognite)

$$\underbrace{A}_{\text{matrice delle incogn.}}\ \overset{\uparrow}{\underset{\text{COLONNA INCOGNITE}}{X}} = \underbrace{B}_{\text{COLONNA DEI T. NOTI}}$$

"UN SIST. LINEARE AMMETTE SOLUZIONI SE E SOLO SE IL RANGO DI A COINCIDE CON IL RANGO DI (A,B) "COMPLETA DI T. NOTI" "

$$\boxed{\text{SIST. AMMETTE SOLUZ.} \iff \rho(A)=\rho(A,B)}$$

Esempio di come applicare R. C. n° 1

PAG. 32 n° 1.21

$$\begin{cases} x+y-2z+3t=1 \\ -x+y+5z+t=2 \\ 3x-y-12z+t=0 \end{cases} \Rightarrow (A,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -12 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

RIDUZIONE ...

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ -2 & 0 & \boxed{7} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{3} \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\rho(A,B)=3}$$

$$\cancel{\begin{cases} 0=3 \end{cases}} \quad \emptyset$$

$$\boxed{\rho(A)=2} \qquad \neq$$

$\Rightarrow$ PER R.C. n°1 IL SISTEMA È IMPOSSIBILE

R. $\emptyset$

ROUCHÉ - CAPELLI N. 1

$$\boxed{\text{SIST. AMMETTE SOLUZ.} \iff \rho(A)=\rho(A,B)}$$

DIMOSTRAZIONE

⇒ COND. NECESSARIA

IP. SIST. AMMETTE SOL. TS $\rho(A)=\rho(A,B)$

NOTAZIONE: MI DEVO RIVOLGERE AI SOTTOSPAZI E INDICO CON $V = \mathcal{L}(\text{COL. MATRICE COMPLETA } (A,B)) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n, B)$

SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE

CHIAMO $W = \mathcal{L}(\text{COL. MATR. INCOMPLETA } A) = \mathcal{L}(C_1, C_2, \ldots, C_m)$

$$W \subseteq V$$

DEVO DIMOSTRARE CHE IL $\rho(A)=\rho(A,B)$ TRADOTTO NEL LINGUAGGIO DEI SOTTOSPAZI DIVENTA

$$\dim W = \dim V$$

(IL RANGO E' n° di vettori L.I. ⇒ n° di vettori BASE ⇒ dim.)

$\begin{cases} \text{SO CHE } \dim W \leq \dim V \\ \text{POI SO } W \subseteq V \end{cases} \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(A,B)$

USIAMO ADESSO L'IPOTESI: SE IL SIST. AMMETTE SOLUZIONI ABBIAMO ALMENO UNA SOLUZIONE

$S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)\}$ CHE SOSTITUITA ALLE INCOGNITE DIVENTA

$$\begin{cases} \overset{C_1}{a_{11}}\alpha_1 + \overset{C_2}{a_{12}}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = \overset{B}{b_1} \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mm}\alpha_m = b_m \end{cases} \Rightarrow$$

⇒ LO POSSO ANCHE SCRIVERE IN FORMA SEMICOMPATTA

$$C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \dots + C_m \alpha_m = B$$

⇒ B É COMB. LINEARE DI $C_1, \dots, C_m$

QUINDI LA COLONNA B DIPENDE DALLE PRECED.

(NON É INDIPENDENTE)

$$V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_m}_{W}, \cancel{B})$$

LO POSSO SCARTARE PERCHÈ DIPENDE DA A

$$\Rightarrow V \equiv W \Rightarrow \boxed{\dim V = \dim W}$$

C V D

$$\boxed{\rho(A) = \rho(A, B)}$$

⇐ COND. SUFFICIENTE (VEDI LEZ. PROX)

ESERCIZI LIBRO PAG. 26