Lezione n° 24 (18-1-22)

FASCIO DI CONICHE (vd fascio di rette, vd fascio di piani)

Date 2 coniche $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ si dice fascio la seguente equazione:

$$\lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2 = 0 \qquad \forall (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

$\mathcal{C}_2$ perso la conica che ha $\lambda = 0$

Supp. $\lambda \neq 0$, divido per λ → $\frac{\cancel{\lambda} \mathcal{C}_1}{\cancel{\lambda}} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{K} \mathcal{C}_2 = 0$ $\qquad \boxed{\mathcal{C}_1 + K \mathcal{C}_2 = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}}$ condiz. $\lambda \neq 0$

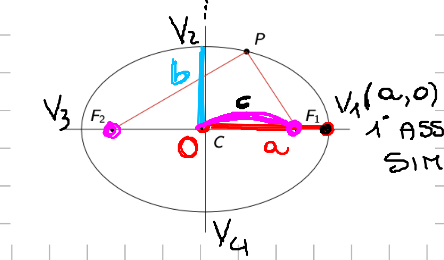
qui si è persa una conica, quella con $\lambda = 0$

Qual è la conica che abbiamo buttato via?

$$\cancel{0 \mathcal{C}_1} + \underset{\neq 0}{\mu} \mathcal{C}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_2 = 0} \quad !!$$

Ripasso di geometria analitica sulle coniche

- Ellisse



4 Vertici = ellisse ∩ assi di simmetria
$$\begin{cases} V_1 = (a, 0) \\ V_2 = (0, b) \\ V_3 = (-a, 0) \\ V_4 = (0, -b) \end{cases}$$

$\overline{OV_1}$ = semiasse maggiore = a

$\overline{V_3V_1}$ = ASSE MAGGIORE = $2a$

$\overline{OV_2}$ = semiasse minore = b

$\overline{V_2V_4}$ = ASSE MINORE = $2b$

Centro di simmetria coincide con l'origine

2 FUOCHI: $\overline{OF_1} = c$ $\qquad F_1 = (c, 0)$ $\qquad \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$

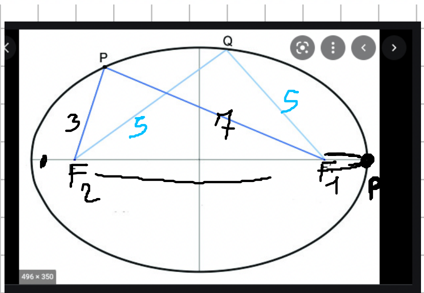
$\overline{F_2F_1} = 2c$ $\qquad F_2 = (-c, 0)$

$\boxed{e = \frac{c}{a} < 1}$ eccentricità ellisse è sempre minore di 1

Definizione di ellisse

Definizione di ellisse: E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$PF_1 + PF_2 = \text{costante} = 2a$$

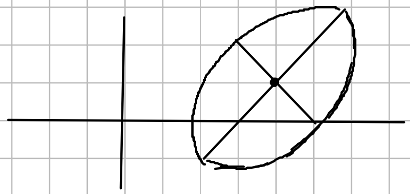


$$\underset{7}{\overline{PF_1}} + \underset{3}{\overline{PF_2}} = 10$$ la somma è costante

$$\underset{5}{QF_1} + \underset{5}{QF_2} = 10$$

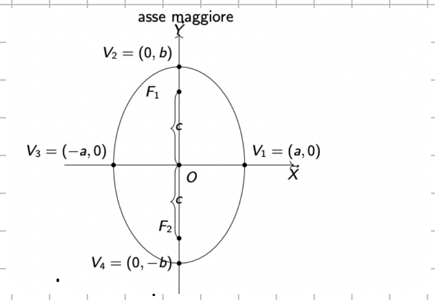
Equazione dell'ellisse "SEMPLICE" o "CENTRATA" è $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

(Centro $\equiv O$; ASSI DI SIMMETRIA SONO GLI ASSI CARTESIANI)



avrà un'equazione diversa dalla precedente

• CASO PARTICOLARE



$a<b$

$c=\sqrt{b^2-a^2}$

l'ellisse è una curva chiusa quindi non ha punti impropri reali ma sono solo complessi e sono 2

P_∞^1 , P_∞^2 sono 2 punti complessi e coniugati

Circonferenza è una particolare ellisse

Definizione di circonferenza: il luogo dei punti P del piano equidistanti da un punto fisso detto centro

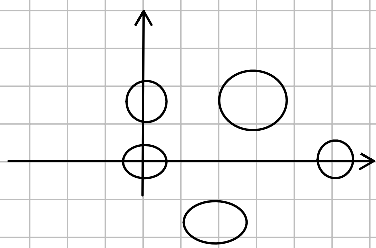
le equazioni della circonferenza sono 2

1° FORMA :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

NON C'È

chi manca? MANCA IL TERMINE MISTO xy



(Ricordiamo : $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y=0$)
CONICA GENERALE

$\Rightarrow$ $\boxed{a_{12}=0}$ inoltre dal confronto con la conica generale segue che

$$\boxed{a_{11}=a_{22}\neq 0}$$

$3x^2+3y^2+5x-6y+2xy=0$ è circonferenza? NO perché c'è xy

$3x^2+3y^2+5x-6y=0$ è circonferenza? SI
inoltre $a_{11}=a_{22}$

divido tutto per 3 $\rightarrow$ $x^2+y^2+\frac{5}{3}x-\frac{6}{3}y=0$

$$\boxed{x^2+y^2+\frac{5}{3}x-2y=0} \rightarrow a=5/3,\ b=-2,\ c=0$$

CIRCONFERZA
FORMA N° 1

$C=\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ $\quad r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

$$C=\left(-\frac{\overset{a}{\frac{5}{3}}}{2_1}, -\frac{-2}{2}\right)=\left(-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}, 1\right)=\left(-\frac{5}{6}, 1\right); \quad r=\sqrt{\frac{25}{36}+1-0}=\sqrt{\frac{61}{36}}=\frac{\sqrt{61}}{6}$$

2° FORMA: conosco il centro $C(x_0, y_0)$ e il raggio r e voglio l'equazione della circonferenza

$C(2,-3)$ $\quad r=4$ $\quad$ equaz. circonf. ?

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} \rightarrow (x-2)^2+(y-(-3))^2=4^2 \rightarrow$$

$\rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=16 \rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9-16=0$

$\rightarrow x^2+y^2-4x+6y-3=0 \leftarrow$ (FORMA 1)

Le condizioni affinché una conica sia circonferenza sono:

$$\begin{cases} a_{11}=a_{22}\neq 0 \\ a_{12}=0 \end{cases}$$

coeff di x^2 = coeff di y^2

$a_{12}=0$ $\leftarrow$ MISTO CHE NON C'È !

Calcoliamo i punti impropri di una circonferenza:

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$ $\quad$ omogenizziamo con il 2° grado

$$\begin{cases} x^2+y^2-\cancel{4xt}+\cancel{6yt}-\cancel{3t^2}=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=-y^2 \\ t=0 \end{cases}$$

$i^2=-1$ $\quad$ $y=1$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{-y^2}=\pm\sqrt{i^2y^2} \\ t=0 \end{cases} \mathbb{C} \rightarrow \begin{cases} x=\pm iy \\ t=0 \\ z=0 \end{cases} \begin{matrix} +iy \\ -iy \end{matrix}$$

$P_\infty^1=(iy, y, \overset{z}{0}, \overset{t}{0})=(i, 1, 0, 0)$

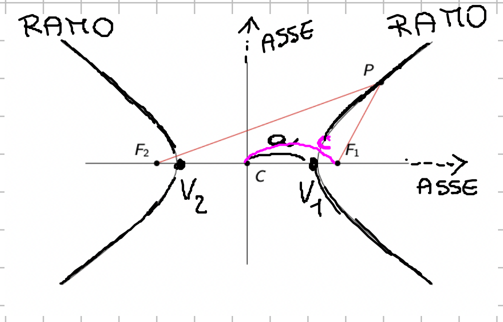
$P_\infty^2=(-iy, y, 0, 0)=(-i, 1, 0, 0)$

sono 2 complessi e coniugati

Se moltiplichiamo i 2 punti impropri per i:

$P_\infty^1 = (i^2, i, 0, 0) = (-1, i, 0, 0) = (1, -i, 0, 0)$; $P_\infty^2 = (-i^2, i, 0, 0) = (1, i, 0, 0)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} P_\infty^1 = (1, i, 0, 0) \\ P_\infty^2 = (1, -i, 0, 0) \end{cases}$

Iperbole (2 RAMI) — 2 ASSI DI SIMMETRIA, CENTRO DI SIMMETRIA C



$\begin{cases} F_1(c, 0) \\ F_2(-c, 0) \end{cases}$ $\boxed{c > a}$

2 VERTICI (anziché 4 come l'ellisse)

$\begin{cases} V_1 = (a, 0) \\ V_2 = (-a, 0) \end{cases}$

ELLISSE ERA LA SOMMA DELLE DISTANZE COSTANTE, QUI C'È LA DIFFERENZA COSTANTE

Definizione di iperbole: E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$|PF_1 - PF_2| = \text{costante} = 2a$$

Se abbiamo l'iperbole "centrata" ($C \equiv O$, assi di simm sono assi cartesiani) allora l'equazione è

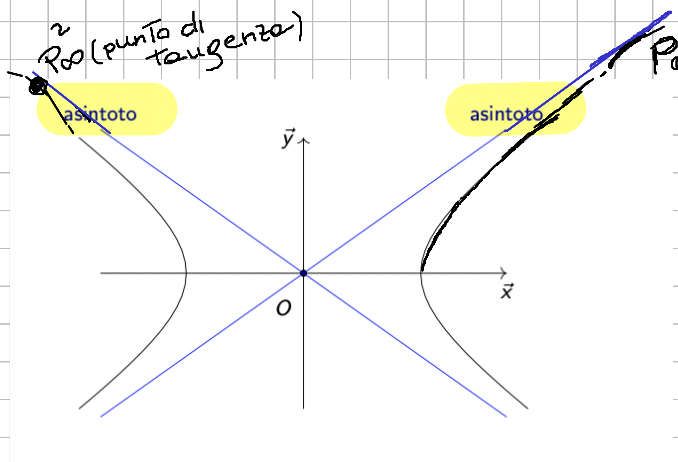
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (somma)

NOVITÀ

NOVITÀ:

Nell'iperbole sono presenti due "ASINTOTI" (rette a cui la curva si avvicina ma non li toccherà MAI, all'infinito vicini ma non si toccano)



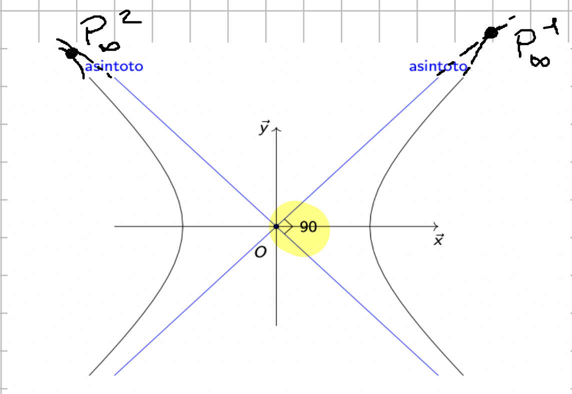
Equazioni degli asintoti

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Eccentricità iperbole $\boxed{e = \frac{c}{a} > 1}$

Quindi l'iperbole ha 2 punti impropri reali e distinti, sono quelli dei suoi asintoti P_∞^1, P_∞^2 (punti di tangenza)

IPERBOLE EQUILATERA : è un'iperbole avente gli asintoti ortogonali



$$\boxed{Tr\, A = 0}$$

$$P_\infty^1 = (l', m', n', 0)$$

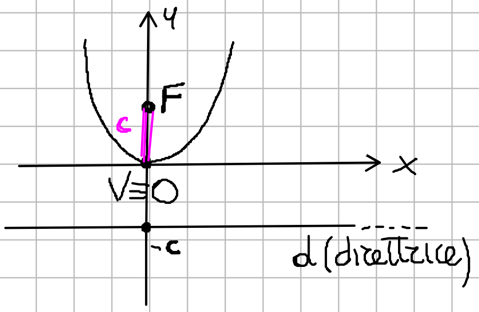
$$P_\infty^2 = (l'', m'', n'', 0)$$

$$P_\infty^1 \perp P_\infty^2$$

$$P_\infty^1 \cdot P_\infty^2 = 0$$

$$l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0$$

PARABOLA



1 ASSE DI SIMMETRIA (coincide con asse y)

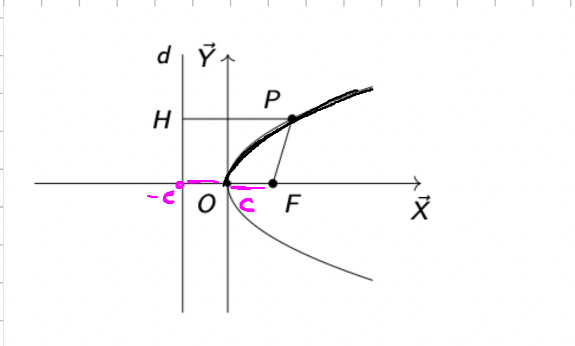
1 vertice V

$$F = (0, c)$$

$$\boxed{y = a x^2}$$

Definizione di parabola: E' il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$PF = PH$$



ASSE DI SIMMETRIA COINCIDENTE CON ASSE $\vec{X}$

$$x = a y^2 \qquad F = (c, 0)$$

$$\Downarrow$$

$$a y^2 = x \rightarrow y^2 = \frac{1}{a} x \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y^2 = 2p\, x}$$

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = 1}$$ PARABOLA

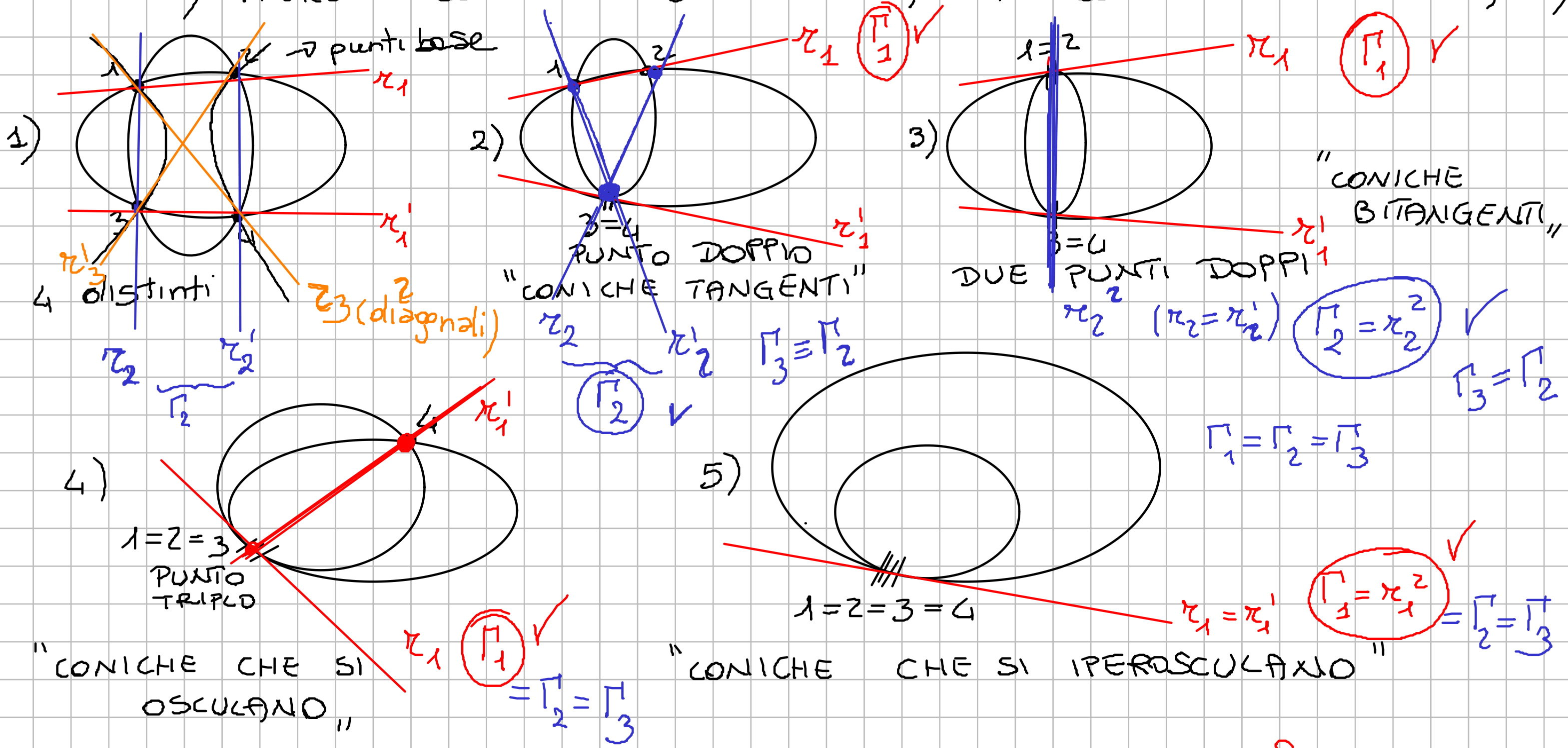
FORMULE DI TRASLAZIONE NON SI DEVONO FARE
" DI ROTAZIONE " " "
" DI ROTOTRASLAZIONE NO

Lezione n. 24 Parte n. 2 (18-1-22)

Dato un fascio di coniche (∞ coniche) andremo a definire i PUNTI BASE, in generale sono 4

$\Rightarrow$ Per 4 PUNTI PASSANO INFINITE CONICHE

PUNTI BASE: SONO I PUNTI PER CUI PASSANO TUTTE LE CONICHE DEL FASCIO E SONO 4 (DISTINTI, COINCIDENTI A DUE A DUE, OPPURE 2 COINCIDENTI E 2 DISTINTI, OPP 3 COINCIDENTI E UNO NO, etc.)

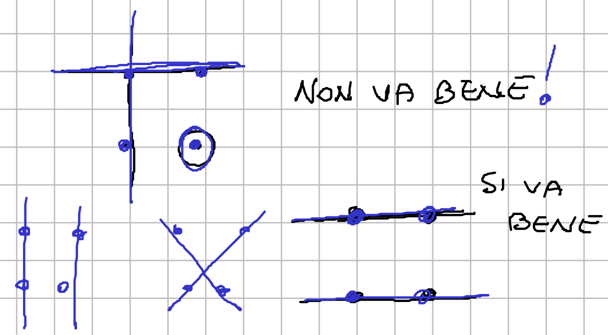


LE CONICHE SPEZZATE COME SONO NEI VARI CASI?

1) Prima conica spezzata • Γ_1: $\overset{12}{r_1} \cdot \overset{34}{r_1'}$

Seconda conica spezzata • Γ_2: $\underset{13}{r_2} \cdot \underset{24}{r_2'}$

Terza conica spezzata • Γ_3: $\underset{14}{r_3} \cdot \underset{23}{r_3'}$



$\Rightarrow$ Teorema: "In un fascio di coniche ci sono sempre 3 coniche spezzate (distinte se siamo nel caso 1)

2) Γ_1 esiste

$\Gamma_2 \equiv \Gamma_3$

3) 4) 5) vedi disegno

Domanda: Dato un fascio di coniche come trovare le coniche spezzate e punti base

Ex: $x^2 - y^2 + Kx^2 + K - 2Kx = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$

$$(K+1)x^2 - y^2 - 2Kx + K = 0$$

Troviamo le coniche spezzate

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta det $B = 0$

- In tal caso la conica si **spezza** in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta det $B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice **irriducibile** e andremo a calcolare il det A:
  a) se det $A > 0$ allora la conica è: **Ellisse reale** se $TrA \cdot \det B < 0$; invece **Ellisse immaginaria** se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo **Circonferenza**;
  b) se det $A = 0$ allora la conica è **Parabola**;
  c) se det $A < 0$ allora la conica è **Iperbole**. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di **iperbole equilatera**

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & xy/2 & x/2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} K+1 & 0 & -K \\ 0 & -1 & 0 \\ -K & 0 & K \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ y/2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$\det B = -K(K+1) + K^2 = \cancel{-K^2} - K + \cancel{K^2} = -K$

$\det B = -K = 0$ per trovare le coniche spezzate

$K = 0$

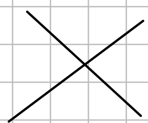
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(B) = 2 \Rightarrow$$ la conica si spezza in 2 rette distinte

Quali sono?

$\underset{0}{(K+1)}x^2 - y^2 - \underset{0}{2K}x + \underset{0}{K} = 0 \rightarrow K = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = 0} \rightarrow$ "differenza di quadrati"

$\Gamma_1 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$

1° conica spezzata del fascio



Serve un'altra conica del fascio per trovare i punti base

Andiamo a studiare C_2 (che ho buttato via, $\lambda = 0$, nel passaggio da due parametri a un parametro)

$$\lambda(\ C_1\ ) + \mu(\ C_2\ ) = 0$$

$$(\quad C_1 \quad) + \underset{\mu/\lambda}{K}(\ \ldots\ ) = 0$$

C_2 è formata dai termini che contengono K

$$x^2 - y^2 + Kx^2 + K - 2Kx = 0$$

$$x^2 - y^2 + K\underbrace{(x^2 + 1 - 2x)}_{C_2} = 0$$

C_2: $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{(x-1)^2 = 0}$ Γ_2

spezzata in 2 rette coincidenti

Punti BASE

Possiamo mettere a sistema 2 coniche dello stesso fascio (utilizziamo le coniche spezzate)

$$\begin{cases} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \to \begin{cases} x-y=0 \\ x=1 \end{cases} \to \begin{cases} x=y \\ x=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \quad A=(1,1)$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=1 \end{cases} \to \begin{cases} x=-y \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \quad B=(1,-1)$$

HO TROVATO 2 PUNTI BASE DISTINTI siamo nel caso 3) opp 4) ma osservando che abbiamo trovato che abbiamo trovato 2 coniche spezz. distinte siamo nel caso 3

Ex

$$\boxed{4x^2-y^2-4kxy+kx+k=0} \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

Coniche spezzate e punti base

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -2k & k/2 \\ -2k & -1 & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & k \end{pmatrix} \quad \det B = -4k+\frac{k^2}{4}-4k^3=0$$

$$-16k+k^2-16k^3=0$$

$$16k^3-k^2+16k=0 \quad k(16k^2-k+16)=0 \quad k=0$$

$$16k^2-k+16=0 \quad k=\frac{1\pm\sqrt{1-1024}}{32}=\frac{1\pm\sqrt{-1023}}{32}=\frac{1\pm i\sqrt{1023}}{3} \quad \nexists\,\mathbb{R}$$

- $\boxed{k=0}$ sostituiamo nel fascio: $\boxed{4x^2-y^2=0}$

$$(2x-y)(2x+y)=0$$

C_2: $\left(\lambda=0 \quad k=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\mu}{0}=\infty\right)$

$$\boxed{4x^2-y^2-4kxy+kx+k=0}$$

$$4x^2-y^2+k\underbrace{(-4xy+x+1)}_{C_2}=0$$

è scomponibile?

C_2: $-4xy+x+1=0$

non sembra spezzata

$$(\quad)(\quad)=0$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det B = -4 \neq 0$$ conica non si spezza

PUNTI BASE

$$\begin{cases} \Gamma_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2x-y)(2x+y)=0 \\ -4xy+x+1=0 \end{cases}$$

$$\text{I}\begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x\underset{=2x}{y}+x+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x \\ -8x^2+x+1=0 \end{cases} \quad 8x^2-x-1=0 \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{16}$$

$$\text{II}\begin{cases} 2x+y=0 \\ - \end{cases}$$

$$\text{I} \quad \begin{cases} \boxed{y=2x} \\ x = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{33}}{16} \\ \frac{1-\sqrt{33}}{16} \end{cases} \end{cases}$$

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{33}}{16}, 2\left(\frac{1+\sqrt{33}}{\cancel{16}\,8}\right)\right)=\left(\frac{1+\sqrt{33}}{16}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$B=\left(\frac{1-\sqrt{33}}{16}, \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} y=-2x \\ -4x(-2x)+x+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ 8x^2+x+1=0 \end{cases} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-32}}{16}=\frac{-1\pm\sqrt{-31}}{16} \quad \nexists \, \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm i\sqrt{31}}{16} \quad \begin{cases} \frac{-1+i\sqrt{31}}{16} \\ \frac{-1-i\sqrt{31}}{16} \end{cases}$$

$\rightarrow$ 1° CASO (TEORIA)

Ellisse

$$x^2+9y^2+1+4xy+4=0$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \cancel{36}-\cancel{36}-16 \neq 0$$

$$\det A = 9-4 = 5 > 0 \rightarrow \text{ellisse}$$

Come trovare una forma canonica?

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \text{ (scuola)} \quad ; \quad \alpha X^2+\beta Y^2=\gamma \text{ (università)}$$

Trovare α, β, γ

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A} = -\frac{(-16)}{5} = \frac{16}{5}$$

α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A.

$$\text{P.C.}(A) = \det\begin{pmatrix} 1-T & 2 \\ 2 & 9-T \end{pmatrix} = (1-T)(9-T)-4=0 \quad \dots \quad T \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$9 - T - 9T + T^2 - 4 = 0$ $\quad T^2 - 10T + 5 = 0$ $\quad T = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-5}}{1}$

$T = 5 \pm \sqrt{20} = 5 \pm 2\sqrt{5}$

$5 + 2\sqrt{5} = \alpha$

$5 - 2\sqrt{5} = \beta$

$\Rightarrow \alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \quad \Rightarrow \boxed{(5+2\sqrt{5})X^2 + (5-2\sqrt{5})Y^2 = 16/5}$ R.

FORMA CANONICA

- Dobbiamo trovare le coordinate del suo centro di simmetria
- ASSI DI SIMMETRIA

COMPLETEREMO LA PROSSIMA LEZIONE