Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k = 1$.

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se det $A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se det $A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se det $A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

stabilire se sono sghembe. Determinare inoltre il piano π contenente la retta r e passante per $A = (1, 0, -1)$.

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione: 1° parte

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k = 1$. 2° parte

Risoluzione

1)

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 4\times4$$

1° Riga

$$\det = 1 \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1+2-1 = 0$$

Teorema di Laplace n° 1.

$$\det A = \cancel{0 \cdot A_{11}} + \cancel{0 \cdot A_{12}} + 1 \cdot \underbrace{A_{13}}_{\text{VA CALCOLATO}} + \cancel{0 \cdot A_{14}}$$

$\det A = 0$

LE RETTE NON SONO SGHEMBE.

PIANO CONTENENTE LA RETTA r

$$z + k(y + z - 1) = 0$$

FASCIO DI PIANI AVENTE PER ASSE LA RETTA r

$$A = (\overset{x}{1}, \overset{y}{0}, \overset{z}{-1})$$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO

$$-1 + k(-1-1) = 0 \rightarrow -1 - 2k = 0 \rightarrow 1 + 2k = 0 \rightarrow 2k = -1$$

$$\rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ sostituiamo nel fascio

$$z - \frac{1}{2}(y + z - 1) = 0$$

$$z - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0$$

$$2z - y - z + 1 = 0$$

$$z - y + 1 = 0 \rightarrow \boxed{y - z - 1 = 0} \; \pi$$

$$-y + z + 1 = 0$$

R.

2)

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -K & 1 \\ -K & K & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \cancel{2K} \cancel{-K} \cancel{-K} - K - 1 - 2K^2 =$$

$$= -2K^2 - K - 1$$

polinomio di 2° grado

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$\det B = 0 \qquad -2K^2 - K - 1 = 0 \qquad \underbrace{2K^2 + K + 1 = 0} \qquad$ MAI

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0 \quad \to$ NON CI SONO SOLUZIONI (o ZERI)

$\nexists^{no}$ CONICHE SPEZZATE

"TUTTE LE CONICHE DEL FASCIO SONO IRRIDUCIBILI"

$\det B \neq 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \qquad \det A = K - K^2$$

polinomio di 2° grado

- $\det A > 0$ $\qquad K - K^2 > 0 \to \overset{\text{ordinati}}{-K^2 + K > 0}$ segni discordi $\to$ V. INT.

$K(1-K) = 0 \qquad K = 0 \qquad K = 1$

$\boxed{0 < K < 1}$ ELLISSI

$\underline{Tr A = 1 + K} \qquad \underline{\det B = -2K^2 - K - 1}$

$\underbrace{(1+K)}\cdot\underbrace{(-2K^2 - K - 1)} < 0 \to$ $1 + K > 0 \to \ldots$; $-2K^2 - K - 1 > 0 \to \ldots$ Moltiplicaz. dei segni $\ominus$

$1+K>0 \to K>-1$

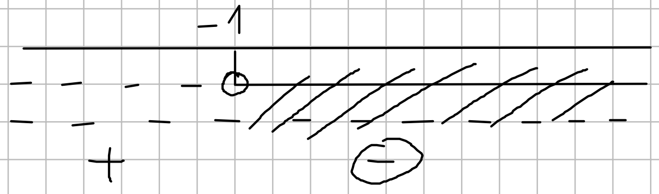
$-2K^2-K-1>0 \to 2K^2+K+1<0$ $\quad \Delta<0 \quad (\Delta=-7)$ → NON CI SONO SOLUZ.

segni discordi + $\Delta<0$ → MAI VERIFICATA

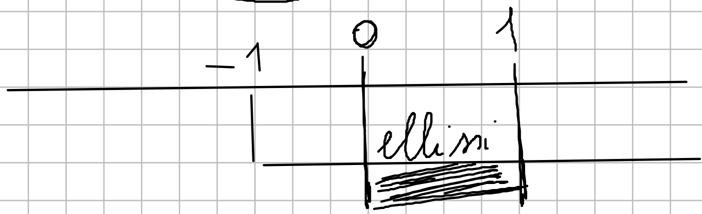
N.B.

(segni concordi + $\Delta<0$ → SEMPRE VERIFICATA)

Moltiplicaz. dei segni e prendiamo il "meno"



R. $K>-1$ ellissi reali



Le ellissi del fascio sono TUTTE REALI

Circonferenze:

$$\begin{cases} a_{11}=a_{22} \\ a_{12}=0 \end{cases} \to \begin{cases} 1=K \\ -K=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K=1 \\ K=0 \end{cases} ??$$

NON CI SONO CIRCONFERENZE

$\det A=0$ $\xrightarrow{\text{fatto}}$ $K=0 \quad K=1$ → 2 PARABOLE

accettabili entrambi

$\det A<0$ $\quad K<0 \vee K>1$ IPERBOLI (solo scrivere)

Iperbole equilatera

$\operatorname{Tr} A=0 \to a_{11}+a_{22}=0 \to 1+K=0 \to K=-1$ cade dentro l'intervallo

⇓

IL VALORE E' ACCETTATO

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k=1$.

PARABOLA

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma, \det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$$

$\beta = ?$ $\gamma = ?$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2, \det A = 0$ Da cui

$$\boxed{\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

PARABOLA PER $K=1$, sostituiamo nel fascio

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0. \quad \text{FASCIO}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 2 = 0 \quad \text{PARABOLA}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$TrA = 1 + 1 = 2 \qquad \beta = TrA = 2$$

$$\det B = -2K^2 - K - 1 \overset{K=1}{=} -2 - 1 - 1 = -4$$

$$\gamma = +\sqrt{-\frac{(-4)}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\beta Y^2 = 2\gamma X$$

R. $\boxed{2Y^2 = 2\sqrt{2}\,X}$ FORMA CANONICA CERCATA

7/12/21

1. È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(1,0,1) = (-2, h, 0) \\ f(0,1,1) = (0, h-1, -1), \end{cases} \to \begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(e_1) + f(e_3) = (-2, h, 0) \\ f(e_2) + f(e_3) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$(-2, h, 0)$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = 1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

$$\downarrow \begin{cases} (-2, h, 0) + f(e_2) = (-1, 2h-1, -1) \\ = \end{cases}$$

METODO STANDARD

$$f(1e_1 + 1e_2 + 1e_3) = f(1 \cdot e_1 + 1e_2 + 1e_3) = \dots$$

$$(1,0,1) = 1e_1 + 1e_3$$

$$(0,1,1) = 1e_2 + 1e_3$$

$$\begin{cases} f(e_2) = (-1, 2h-1, -1) - (-2, h, 0) \\ = \\ = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(e_2) = (1, h-1, -1) \\ f(e_3) = (0, h-1, -1) - (1, h-1, -1) \end{cases}$$

2° colonna

$$\begin{cases} f(e_2) = — \\ f(e_1) = -f(e_3) + (-2, h, 0) = -(-1,0,0) + (-2,h,0) = (-1, h, 0) \\ f(e_3) = (-1, 0, 0) \quad 3^\circ \text{ colonna}\end{cases}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

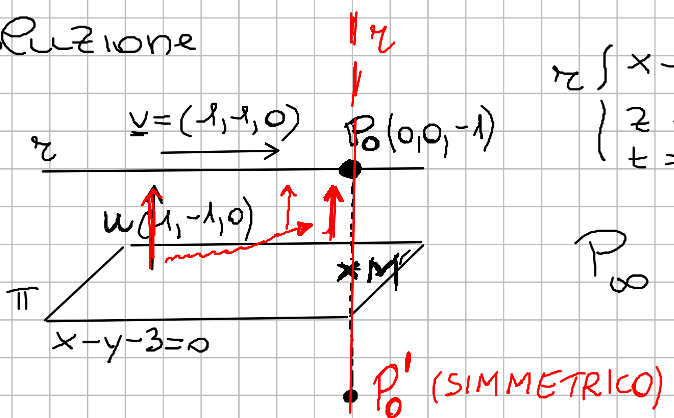
21/6/21

1 Dati la retta:

$$r: \begin{cases} x - y + 3z + 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi : x - y - 3 = 0$, mostrare che r e π sono paralleli e dopo avere scelto un punto P_0 sulla retta r determinare il suo simmetrico P_0' rispetto al piano π.

Risoluzione



$$r \begin{cases} x - y + 3z + \cancel{3t} = 0 \\ z + \cancel{t} = 0 \rightarrow z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \forall y$$

$$P_\infty (y, y, 0, 0) \qquad y = 1 \rightarrow \overset{l\ m\ n}{(1, 1, 0)} = \underline{v}$$

Questi 2 vettori devono essere ortogonali (PROD. SCAL. = 0) affinché r e π siano paralleli

$$\underline{v} \cdot \underline{u} = 0$$

$$(1,1,0) \cdot (1,-1,0) \overset{?}{=} 0$$

$$1 - 1 + 0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

VETTORI DIRETTIVI sono ortogonali

$\Downarrow$

$r \,//\, \pi$

COME SI FA A SCEGLIERE UN PUNTO P_0 SU UNA RETTA?

$$r \begin{cases} x - y + \overset{3(z+1)}{\cancel{3z + 3}} = 0 \\ (z + 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \{(x, x, -1)\} \ \forall x$$

PUNTO GENERICO DI r

OPP $\{(y, y, -1)\} \ \forall y$

P_0, DIAMO UN VALORE SPECIFICO ALL'INCOGNITA LIBERA x

$P_0 \quad \underline{\underline{EX}}\ x=0 \rightarrow P_0 = (\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{0}, \overset{z_0}{-1})$

Retta passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed ortogonale al piano π

$\underline{v}_r = (1, -1, 0)$ (deriva da quello del piano π)

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}}$$

$\underline{u}_\pi = (1, -1, 0)$

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-(-1)}{0}$$

doppia equazione

$$\begin{cases} I = II \\ II = III \end{cases} \quad \begin{cases} -x = y \\ z+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$$

r ortogonale al piano π "rossa"

TROVIAMO M (PUNTO MEDIO TRA P_0 E P_0'):

$$\begin{cases} \text{retta "rossa"} \\ \pi \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y \\ z=-1 \\ +2y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ z=-1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{M = (\underset{x_M}{3/2}, \underset{y_M}{-\tfrac{3}{2}}, \underset{z_M}{-1})}$$

L'esercizio richiedeva il simmetrico di $P_0 \rightarrow P_0'$

FORMULA INVERSA DEL PUNTO MEDIO $M(x_M, y_M, z_M)$

LA SO ? DA RICAVARE LA SO

$$\frac{x_{P_0} + x_{P_0'}}{2} = x_M \qquad \frac{y_{P_0} + y_{P_0'}}{2} = y_M \qquad \frac{z_{P_0} + z_{P_0'}}{2} = z_M$$

$\hookrightarrow x_{P_0'} = 2x_M - \overset{0}{x_{P_0}}$; $y_{P_0'} = 2y_M - \overset{0}{y_{P_0}}$; $z_{P_0'} = 2z_M - \overset{(-1)}{z_{P_0}}$

$x_{P_0'} = \cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) - 0$; $y_{P_0'} = \cancel{2}\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) - 0$; $z_{P_0'} = 2(-1) - (-1)$

$\downarrow$ $\downarrow$

$x_{P_0'} = 3$; $y_{P_0'} = -3$; $z_{P_0'} = -1$

R. $\boxed{P_0' = (3, -3, -1)}$

1) Dati due piani $\pi : x + y - 2z = 0$ e $\alpha : 4x - y - 3z - 2 = 0$ determinare il piano β ortogonale a π e α e passante per $A = (1, 0, 0)$. Inoltre determinare il piano contenente la retta $r : \alpha \cap \beta$ e passante per $O = (0, 0, 0)$

$\downarrow$

$$r \begin{cases} \alpha : 4x - y - 3z - 2 = 0 \\ \beta : \_\_\_ \end{cases}$$