Ricevimento 9-11-21

$W = \{(x, 2x, z, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

TROVARE UNA BASE

W SOTTOSPAZIO 3 MODI
1) EQU. CARTES.
2) ELEM. GENERICO
3) BASE

RISOLUZIONE

y dipende dalla prima (2x)

t è sempre zero

EL. GENERICO È $(x, 2x, z, 0)$

2 INCOGNITE LIBERE O INDIPENDENTI che sono X e Z

METODO STANDARD

$(1, \hat{2}, 0, \hat{0}) = w_1$

$(0, \hat{0}, 1, \hat{0}) = w_2$

BASE $B_1 = \{w_1, w_2\}$

---

5) $W = \mathbb{R}^3$ DETERMINARE UNA SUA BASE

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid \forall x, \forall y, \forall z\}$ NON ESISTE EQU. CARTESIANA

SONO 3 INCOGNITE LIBERE

$(1, 0, 0) = e_1 \rightsquigarrow \hat{i}$

$(0, 1, 0) = e_2 \rightsquigarrow \hat{j}$

$(0, 0, 1) = e_3 \rightsquigarrow \hat{k}$

$\rightarrow$ BASE CANONICA $\mathcal{E}$

6) $W = \mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t) \mid \forall x, \forall y, \forall z, \forall t \in \mathbb{R}\}$

4 INCOGNITE LIBERE

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ = n° di incognite libere

$(1, 0, 0, 0) = e_1$

$(0, 1, 0, 0) = e_2$

$(0, 0, 1, 0) = e_3$

$(0, 0, 0, 1) = e_4$

$\rightarrow$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^4$

④ $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow$ generatori

4) $S = \mathcal{L}\big((-1,0,0,1), (2,0,1,-1), (0,0,0,1)\big) \subseteq \mathbb{R}^4$

v_1 , v_2 , v_3

Sono linearmente indipendenti? da verificare

$$\begin{array}{c} v_1 \to \\ v_2 \to \\ v_3 \to \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ \cancel{0} & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

IL RANGO $r = \rho$ = n° di righe L.I.

$r = 3$

sono 3 vettori L.I.

QUINDI

UNA BASE DI S È FORMATA DA

$B_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \longrightarrow$ TROVARE EQUAZIONE CART. ??

$$\underset{4\times4}{A} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \underline{v} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

BASE B_1

3 RIGHE INDIPENDENTI

di S (SARÀ COMB. LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE B_1) $\Rightarrow$ ULTIMA RIGA DIPENDE DALLE PRECEDENTI

IL RANGO LO SAPPIAMO?

$r = 3$ E RIMANE 3 !!

$\boxed{\text{IL DETERMINANTE DELLA } 4\times4 = 0}$

TEOR. DI LAPLACE ALLA 2° COLONNA

$$\det A = \cancel{0\cdot A_{12}} + \cancel{0\cdot A_{22}} + \cancel{0\cdot A_{32}} + y\cdot A_{42}$$

$$A_{42} = \underbrace{(-1)^6}_{+} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \det A = \boxed{y\cdot(-1) = 0}$$

$4+2=6$
$+$

$\Downarrow$

$\boxed{-y = 0}$

$\Downarrow$

$\boxed{y = 0}$ EQU. CARTESIANA

R.

$S = \{(x, y, z, t) \mid y = 0\}$

IL SOTTOSPAZIO GENERATO DA v_1 E DA v_2

3) $S = \mathcal{L}\left(\underset{v_1}{(-1,0,0,1)}, \underset{v_2}{(2,0,1,-1)} \right) \subseteq \mathbb{R}^4$

sono sicuramente generatori

SONO L.I. ? $\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$ $r=2$ SONO L.I.

QUINDI UNA BASE È $B_1 = \{ v_1, v_2 \}$

TROVIAMO L'EQUAZ. CART. O LE EQUAZIONI CARTESIANE

$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ BASE B_1 L.I. (2 VETTORI L.I.)

v DIPENDE DALLE PRECEDENTI

RETTANGOLARE

IL RANGO LO SAPPIAMO? SI

ED È 2

IMPONIAMO RIDUCENDO

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z^* & t \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 - zR_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ x-2z & y & 0 & (t+z)^* \end{pmatrix}$ EL. SPECIALE DI R_2 SCELGO $a_{24}=1$

$R_3 \to R_3 - (t+z)\cdot R_2$

$x-2z-(t+z)(-1) = x-2z+t+z$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{x-z+t} & \boxed{y} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ LA MATRICE È RIDOTTA

PER MANTENERE IL RANGO 2 E NON FARLO SALIRE A 3 DOBBIAMO PORRE GLI ELEMENTI DELL'ULTIMA RIGA UGUALI A ZERO

$\begin{cases} x-z+t=0 \\ y=0 \end{cases}$ EQUAZIONI CARTESIANE

R. $\left(S = \{ (x,y,z,t) \mid x-z+t = y = 0 \} \right)$

EQUAZ. CARTESIANE

(SI RICAVA UNA (O DUE) INCOGNITA IN BASE ALL'EQUAZ.)

(det=0 OPPURE ULTIMA RIGA =0 DELLA RIDOTTA)

TRAMITE MATRICE CON $\underline{v}=(x,y,z,\dots)$

$\begin{pmatrix} = \\ x \; y \; z \; t \end{pmatrix}$

W

ELEM. GENERICO

(METODO STANDARD) INC. LIBERE

BASE

IN "QUASI" TUTTI I COMPITI D'ESAME C'È SCRITTO DI TROVARE

$\mathrm{Im}\,f$ (IMMAGINE) $\downarrow$ W_1 E $\mathrm{Ker}\,f$ (NUCLEO) $\downarrow$ W_2 — 2 SOTTOSPAZI

PER TROVARE LE LORO EQUAZIONI CARTESIANE UTILIZZEREMO SEMPRE IL METODO DELLA MATRICE AVENTE COME ULTIMA RIGA $\underline{v} = x, y, z, t$ CHE DIPENDE DALLE RIGHE PRECEDENTI

(IMPONIAMO CHE IL RANGO NON DEVE ESSERE MAX)

det=0 OPP. ULTIMA RIGA =0 DELLA MATRICE RIDOTTA PER RIGA