Lezione n. 5 (19-10-21)

DETERM. 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

DETERM. 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

REGOLA DI SARRUS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

$$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

ESEMPIO

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 3×3

calcolare il suo determ.

Risoluzione con SARRUS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

3 DIAG. PRINC.

− LE TRE

DIAG. SECONDARIE

$$|A| = 1(-2)(-3) + (-1)(3)(-1) + \cancel{(0)(2)(0)} - (-1)(2)(-3)$$

$$- \cancel{(1)(3)(0)} - \cancel{(0)(-2)(-1)} =$$

$$= \cancel{6} + 3 + 0 - \cancel{6} = 3$$

R. 3

4 X 4 : LAPLACE N. 1

FA USO DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{Tagliando} \\ \text{la } i\text{-esima} \\ \text{RIGA} \\ \text{e la } j\text{-esima} \\ \text{COLONNA} \end{pmatrix}$$

+ PARI − DISPARI

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A = & \left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

CALCOLARE I SUOI COMPLEMENTI ALGEBRICI:

$$a_{11} \longrightarrow A_{11} = \underbrace{(-1)^{2}}_{+} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{tagliare} \\ 1^\circ \text{ Riga} \\ 1^\circ \text{ Colonna} \end{pmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

PARI

Riga colonna

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 2$$

$$A_{11} = 2$$

$a_{12} \rightarrow A_{\underbrace{12}} = (-1)^{③} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{tagliare} \\ 1^\circ \text{ Riga} \\ 2^\circ \text{ Colonna} \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

DISPARI

$-$

$$= - \left(\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right) = -[-4] = 4$$

$$\boxed{A_{12} = 4}$$

$$a_{13} \rightarrow A_{13} = + \cdot \left| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right. = +6 - 3 = 3$$

$$\boxed{A_{13} = 3}$$

$$a_{14} \rightarrow A_{\underbrace{14}} = - \left| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right. = -[6-2-3-4] = 3$$

$1+4=5$
dispari

$$\boxed{A_{14} = 3}$$

MATRICE AGGIUNTA E SI INDICA CON

A^a = MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$A^a = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \vdots & - & - & - \quad \vdots \\ \vdots & - & - & \cdot \quad \vdots \\ A_{41} & - & - & - \quad A_{44} \end{pmatrix}$$

$$A^{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 \\ \ldots & - & - & \ldots \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

TEOR. DI LAPLACE N°1

DATA UNA MATRICE QUADRATA $m \times m$ IL SUO DETERMINANTE È DATO DALLA SEGUENTE FORMULA

det A => SCEGLIAMO UNA RIGA O UNA COLONNA DELLA MATRICE (consiglio quella che ha più zeri)

AD ESEMPIO LA 1° RIGA SCEGLIAMO

$$\det A = \overset{1}{\cancel{a}}_{11} \cdot A_{11} + \overset{0}{\cancel{a}}_{12} \cdot A_{12} + \overset{1}{\cancel{a}}_{13} \cdot A_{13} + \overset{0}{\cancel{a}}_{14} \cdot A_{14}$$

nel mio esempio $A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{13} = A_{11} + A_{13} = 2 + 3 = 5$$

R. $\det A = 5$

SCEGLIAMO ADESSO L'ULTIMA COLONNA

$$\det A = \cancel{0\, A_{14}} + \cancel{0\, A_{24}} + \cancel{0\, A_{34}} + \underbrace{(-1)}_{-1} \cdot \underbrace{A_{44}}_{+} =$$

$$= -A_{44} = -\underbrace{(-1)^8}_{+} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{matrix} =$$

$\underbrace{44}_{4+4=8 \text{ PARI}}$

$$= -[-2-6+3] = -[-5] = 5$$

$R.\ \det A = 5$

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI

1) SCAMBIANDO 2 RIGHE (2 COLONNE) IL DET. CAMBIA DI SEGNO

$R_1 \to R_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 10 - 12 = -2 \qquad |A| = 12 - 10 = 2$$

2) SE HO DUE RIGHE (O DUE COLONNE) UGUALI $\Rightarrow |A| = 0$

$$\underset{4\times4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = 0$$

SE HO UNA RIGA (O COLONNA) TUTTA NULLA $\Rightarrow \det A = |A| = 0$

3)

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot(-4) & 2\cdot 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

esce fuori il 2

A'

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 2\left[-4-2+12+3\right] =$$

$$= 2\left[9\right] = 18$$

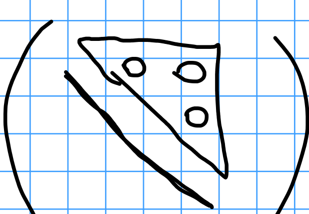
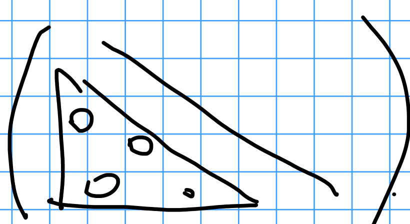
$$\det A = 2\cdot \det A'$$

4) MATRICE TRASPOSTA A^T SI OTTENEVA SCAMBIANDO LE RIGHE CON COLONNE

IL SUO DETERMINANTE È UGUALE A QUELLO DI A

$$|A^T| = |A|$$

5) MATRICE TRIANGOLARE

$A=$  

$$\underset{4\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{44}$$

$$= 1\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot 2 = 12$$

R. $|A| = 12$

6) FACCIAMO UNA TRASFORMAZIONE LINEARE AD UNA RIGA (O COLONNA)

$$R_3 \to R_3 + 3R_1$$

$$\boxed{R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j}$$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ $R_3 \to R_3 + 3R_1$

$$(0, -1, 3) \longmapsto (0, -1, 3) + 3(1, 2, -1)$$
$$= (0, -1, 3) + (3, 6, -3) = (3, 5, 0)$$

NUOVA TERZA RIGA

NUOVA MATRICE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$ ← NEW!

$\det B \equiv \det A$ perché ho eseguito una trasf. lineare