Corso di Algebra Lineare e Geometria
Matrici, parte N.1: operazioni

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Cosa è una Matrice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cosa vuol dire a_{ij}

$$a_{ij} \in K$$

dove i indica la riga e j indica la colonna.
Indichiamo con il simbolo $K^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti in un campo K
cioè questo simbolo rappresenta tutte le matrici aventi
m-righe
n-colonne.

Se accade che

$$m = n$$

allora la matrice è detta **matrice quadrata di ordine** n.

Somma tra due matrici

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ di tipo $m \times n$ a coefficienti in un campo K

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Chiamiamo **somma** di A e B la matrice $C = (a_{ij} + b_{ij})$
dove $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio di somma tra due matrici

Date due matrici di tipo 3×4 a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & -12 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La **somma** di A e B è la matrice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & -7 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma tra matrici

La somma tra matrici rispetta le seguenti proprietà:

- **associativa**: date tre matrici, la somma $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- **esistenza dell'elemento neutro**: per ogni matrice esiste una matrice Ω, detta **matrice nulla**, tale che $A+\Omega = A$ dove

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- esistenza dell' **elemento inverso** rispetto alla somma. Per ogni matrice $A = [a_{ij}]$ esiste una matrice opposta detta $-A = [-a_{ij}]$ dove $A + (-A) = (-A) + A = \Omega$
- **commutativa**: $A + B = B + A$
- $(K^{m,n}, +)$ è **gruppo abeliano**.
- In particolare : $(K^{n,n}, +)$ è gruppo abeliano.

Prodotto esterno

Data una matrice $A = (a_{ij})$ e $h \in K$ definiamo **prodotto esterno**:

$$h \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha_{11} & ha_{12} & \dots & ha_{1n} \\ ha_{21} & ha_{22} & \dots & ha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ ha_{m1} & ha_{m2} & \dots & ha_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio:
Data la seguente matrice A e $h = 3 \in \mathbb{R}$, il **prodotto esterno** $3 \cdot A$ è:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & -12 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Quando è possibile calcolare il prodotto tra matrici

Siano A e B due matrici a coefficienti in un campo K, quale potrebbe essere o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Possiamo eseguire il prodotto tra A e B a patto che il numero delle colonne della matrice A (prima matrice) sia uguale al numero delle righe di B (seconda matrice).
Il prodotto tra le matrici $A \cdot B$ è una nuova matrice avente tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B.
Date $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ rispettivamente di tipo

$$m \times \mathbf{n} \text{ e } \mathbf{n} \times p$$

allora $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è del tipo

$$m \times p$$

Prodotto tra due matrici

Chiamiamo **Prodotto riga per colonna** di A per B la matrice $A \cdot B = (c_{ij})$ di tipo $m \times p$

- (prima riga) $\cdot$ (prima colonna) $= c_{11}$
- (prima riga) $\cdot$ (seconda colonna) $= c_{12}$
- $\cdots$
- (prima riga) $\cdot$ (p-esima colonna) $= c_{1p}$
- (seconda riga) $\cdot$ (prima colonna) $= c_{21}$
- (seconda riga) $\cdot$ (seconda colonna) $= c_{22}$
- $\cdots$
- (seconda riga) $\cdot$ (p-esima colonna) $= c_{2p}$
- $\cdots$
- (m-esima riga) $\cdot$ (prima colonna) $= c_{m1}$
- $\cdots$
- (m-esima riga) $\cdot$ (p-esima colonna) $= c_{mp}$

Operazione non interna

Osserviamo che il prodotto tra due matrici non può essere considerata un'operazione *interna* su un insieme di matrici poichè il risultato è una matrice ma non è dello stesso tipo.
L'operazione prodotto tra due matrici è quindi una funzione

$$k^{m,n} \times k^{n,p} \longrightarrow k^{m,p}$$

Ovviamente c'è una sola eccezione:
se si moltiplicano due matrici quadrate dello stesso ordine (cioè $n \times n$ entrambe) allora il prodotto tra due matrici diventa operazione (interna) su $K^{n,n}$

Esempio:
Calcolare, se possibile, i prodotti riga per colonna $A \cdot B$ e $B \cdot A$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A è una matrice 4×3 e B è una matrice 3×2. Di conseguenza, è possibile fare il prodotto $A \cdot B$, in quanto il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Questo prodotto $A \cdot B$ si calcola nel modo seguente:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 12 & 10 \\ 1 & -3 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Non esiste $B \cdot A$, in quanto il numero delle colonne di B, che è 2, è diverso dal numero di righe di A, che è 4.

Il prodotto tra due matrici **non gode della proprietà commutativa**:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Infatti basti pensare ad una matrice A di tipo 4×3 e B di tipo 3×2. Di conseguenza, è possibile fare il prodotto $A \cdot B$, in quanto il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B ma non è possibile fare $B \cdot A$.

- Il prodotto tra due matrici **non gode della legge dell'annullamento del prodotto**:

$$A \cdot B = \Omega \nRightarrow A = \Omega \text{ e } B = \Omega$$

Proprietà del prodotto tra due matrici

- Proprietà **associativa**: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Proprietà **distributive** valgono $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Elemento unità (rispetto al prodotto tra due matrici) è la **matrice identica**, detta $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La verifica che $A \cdot I = I \cdot A = A$ è semplice

L' insieme $(K^{n,n}, +, \cdot)$ è quindi un **Anello con unità** dato che $(K^{n,n}, +)$ è gruppo abeliano, e poi vale l'associativa rispetto al prodotto, le distributive, e ha l'elemento neutro rispetto al prodotto.
In generale **non commutativo** perchè il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.
Quindi non rappresenta un campo.

Una matrice quadrata si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata si dice **Triangolare superiore** se $a_{ij} = 0 \forall i > j$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrice Trasposta

Data una matrice $m \times n$ si chiama **trasposta** di A la matrice $n \times m$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne e si indica con

$$A^t = (a_{ji})$$

Esempio: Sia A la seguente matrice, notiamo la sua trasposta A^t:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} ; \mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrice simmetrica

- Proprietà:
  1) $(A^t)^t = A$
  2) $(A + B)^t = A^t + B^t$
  3) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Se una matrice coincide con la sua trasposta

$$\mathbf{A} = \mathbf{A^t}$$

allora A si dice **simmetrica**.
Esempio si matrice simmetrica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 11 \\ -7 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice antisimmetrica

- Se una matrice coincide con l'opposto della sua trasposta

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A^t}$$

allora A si dice **antisimmetrica**.
Esempio si matrice antisimmetrica:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -7 \\ -6 & 3 & 11 \\ 7 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$