Ricevimento oggi h. 15.3

Lezione n. 6 (21-10-21)

T. di Laplace n° 1

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

(riga prima come riga fissata)

VALE PER QUALUNQUE RIGA (O COLONNA)

T. di Laplace n° 2 $(n \times n)$

Presa una riga fissata (o colonna) se moltiplichiamo essa per i compl. algebrici di un'altra riga otteniamo ZERO

Esempio

Data una matrice 3x3 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

FISSIAMO LA SECONDA RIGA $\boxed{i=2}$

e faccio i complementi algebrici di un'altra riga ad esempio della terza $\boxed{j=3}$

compl. algebrici della terza riga

$$a_{21} \cdot A_{31} + a_{22} \cdot A_{32} + a_{23} \cdot A_{33} = 0$$

Per Laplace N° 2

$$1 \cdot A_{31} + 0 \cdot \cancel{A_{32}} + 0 \cancel{A_{33}} \overset{?}{=} 0 \qquad 1 \cdot A_{31} \overset{?}{=} 0$$

CALCOLIAMO

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

$3+1=4$ PARI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ FISSO LA 2° RIGA R_2

$$a_{21} \cdot A_{31} + a_{22} \cdot A_{32} + a_{23} \cdot A_{33} \overset{?}{=} 0$$

LAPLACE N°2

$$-2 \cdot A_{31} + \cancel{0 \cdot A_{32}} + 1 \cdot A_{33} \overset{?}{=} 0$$

$$-2 A_{31} + A_{33} \overset{?}{=} 0$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(-2)(-1) + (-2) \overset{?}{=} 0$$

$$2 - 2 = 0$$ c.v.d.

MINORI DI UNA MATRICE

Data una matrice qualsiasi < rettangolare $m \times n$ ($m \neq n$) o quadrata $n \times n$

3×4
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ ← QUI DENTRO ABBIAMO COME "ORDINE" MASSIMO 3

La 3×3 è la quadrata "PIÙ GRANDE"

Dicesi "ORDINE" di una matrice quadrata il numero di righe o di colonne $= n$

Se dico "ORDINE n" INTENDO $n \times n$

" " "ORDINE 2" " 2×2

" " "ORDINE 3" " 3×3

DATA A UNA MATRICE $m \times n$

MINORE DI ORDINE p È IL **DETERMINANTE** DI UNA MATRICE QUADRATA CHE SI OTTIENE DA A

ESEMPIO

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \end{array}$$

Calcoliamo i suoi **minori**:

INIZIAMO DALLE 3×3 → sono 4 matrici da 3×3

$$A_1^{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

TAGLIO C_1

SI CHIAMA << SOTTOMATRICE >> $A_1^{3\times 3}$

MINORE $= |A_1^{3\times 3}| = -2 + \cancel{3(0)(1)} + \cancel{4(0)(-1)} + -4 - \cancel{(-1)(0)2} - \cancel{(-1)(0)3} =$ **$-6 \neq 0$**

$$A_2^{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

TAGLIO C_2

MINORE $= \det = -\cancel{2} + \cancel{8} - 4 \cancel{-6} = -4$

etc...

Andiamo adesso a calcolare i minori di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$\det A_1^{2\times 2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\det A_2^{2\times 2}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

etc...

MINORE DI ORDINE MASSIMO = DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE MASSIMO CHE SI TROVA DENTRO A

L'IDEA È ANDARE ALLA RICERCA DEL MINORE DI ORDINE MASSIMO NON NULLO

$\downarrow$

RANGO DI UNA MATRICE A

DEFINIZ.

RO

NOSTRO ESEMPIO ERA 3×3, $\det \neq 0$

$r(A) = \rho(A)$ = L'ORDINE MASSIMO DEL MINORE NON NULLO

ESEMPIO

DATA $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tutte le 3×3 hanno $\det = 0 \rightarrow r(A) < 3$

Andiamo alle 2×2 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2=0$

Tutte sono zero $\rightarrow r(A) < 2$

Andiamo alle 1×1 = i singoli elementi $\neq 0$

$\Rightarrow \boxed{r(A) = 1}$

MATRICE NULLA $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(\Omega) = 0$

LIBRO ALGEBRA PAG. 11 – 12

Riduzione e calcolo del rango

Ridurre per righe e per colonne le seguenti matrici:

$A = \begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ INIZIO

RIDUZIONE PER RIGHE

Cosa vuol dire "MATRICE RIDOTTA PER RIGA"?

el. SPECIALE DELLA 1° RIGA

$$\begin{pmatrix} \underset{}{a_{11}}^{\neq 0} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}^{\neq 0} \\ 0 & a_{32}^{\neq 0} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{a_{43}} & 0 \end{pmatrix}$$

FINISCO

el. SPEC.

colonna di zeri

colonna di zeri

a_{11} = EL. SPECIALE

EL. SPECIALE NE PRENDO UNO PER OGNI RIGA (O COLONNA)

DEVONO ESSERE $\neq 0$

Esempi di matrici ridotte per riga:

el. spec.

$$A = \begin{pmatrix} 1^{\neq 0} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5^{\neq 0} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1_{\neq 0} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1^{\neq 0} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Non è ridotta per riga

RIDOTTA PER RIGA

3 el. speciali

$r(A)$ = N° DI EL. SPECIALI

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 el. speciali

SE LA GUARDIAMO PER COLONNA

??

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NON È RIDOTTA PER COLONNA

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ È RIDOTTA $r(A) = 2$

PUÒ CAPITARE L'ULTIMA RIGA NULLA E IL RANGO NON È MAX

TEOREMA DI BINET

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

La dim. è omessa

ASSOCIATIVA: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$