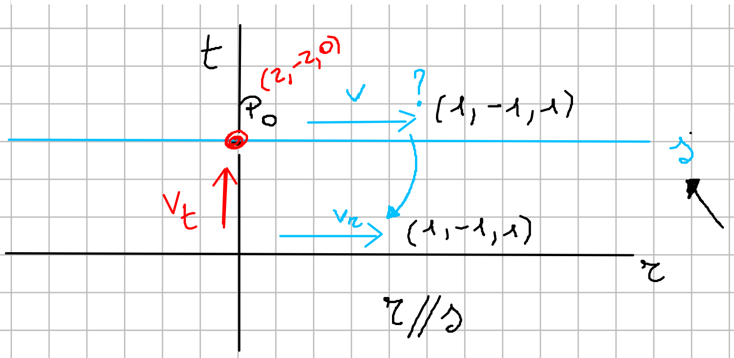
Ricevimento 7-1-22

5) Dato un punto P_0e una retta r, determinare la retta s passante per P_0 e parallela alla retta r e una retta t passante per P_0e ortogonale alla retta s:

a) dato $P_0 = (2,-2,0), r : \begin{cases} x+y & = \cancel{2} \\ x-z & = \cancel{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases} \quad (x,-x,x) \rightarrow \underset{l \quad m \quad n}{(1,-1,1)} = v_r$

b) dato $P_0 = (1,0,-3), r : \begin{cases} 2x+y & = -3 \\ 2x+y+z & = 0 \end{cases}$



$$\frac{x-\overset{2}{x_0}}{\underset{1}{\boxed{l}}} = \frac{y-\overset{(-2)}{y_0}}{\underset{-1}{\boxed{m}}} = \frac{z-\overset{0}{z_0}}{\underset{1}{\boxed{n}}} \Rightarrow x-2 = \frac{y+2}{-1} = z$$

$$\begin{cases} -x+\cancel{2} = y+\cancel{2} \\ y+2 = -z \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x+y=0 \\ y+z+2=0 \end{cases} \quad (s)}$$

LA RETTA t : $\frac{x-\overset{2}{x_0}}{\boxed{l}} = \frac{y-\overset{(-2)}{y_0}}{\boxed{m}} = \frac{z-\overset{0}{z_0}}{\boxed{n}} = v_t \Rightarrow v_t \perp v_s \Rightarrow$ ortogonale

PRODOTTO SCALARE = 0

$(l,m,n)\cdot(1,-1,1)=0 \qquad l-m+n=0 \Rightarrow l=m-n \quad \forall m, \forall n$

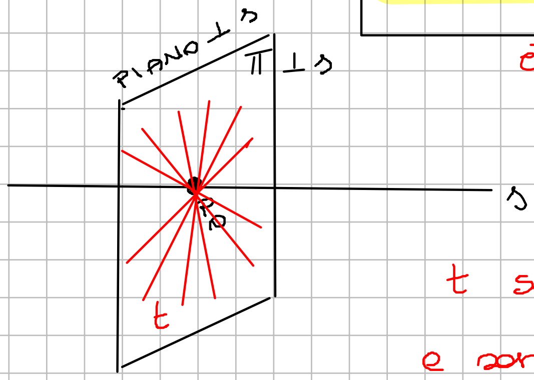
$1\cdot1^{\circ}+2\cdot2^{\circ}+3\cdot3^{\circ}$

$(m-n, m, n)$

2 incognite libere
⇓
infinite rette

$$\boxed{\frac{x-2}{m-n} = \frac{y+2}{m} = \frac{z}{n}}$$

è un fascio



t sono infinite, passano tutte per P_0 e sono ortogonali ad s nello spazio (giacciono tutte sul piano ortogonale)

NOTA: se avessi trovato $\begin{cases} l = m-n \\ n = m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l=0 \\ n=m \end{cases} \quad (0,m,m) = \underline{v}$

$\forall m$

una incognita libera

↓

posso dividere per m $(m \neq 0)$

$\rightarrow \underset{l \quad m \quad n}{(0,1,1)} = \underline{v} \rightarrow$ UNO SPECIFICO!

↓

la retta è UNA

10) Data una retta, un punto e un piano, determinare la retta s parallela al piano, che passa per il punto ed è ortogonale alla retta e il piano π' parallelo alla retta, ortogonale al piano e che passa per il punto

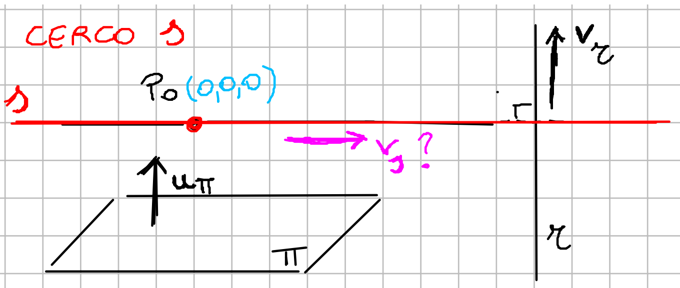
$\pi : ax + by + cz + d = 0$

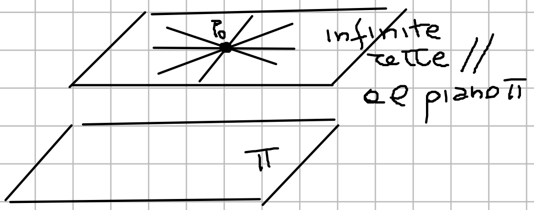
$P_0 \notin \pi$

10a) Data una retta $r : \begin{cases} 4x - y &= 0 \\ y + z - 2 &= 0 \end{cases}$, $P_0 = (0,0,0)$, $\pi : x + y - 1 = 0$ $\rightarrow \underline{u}_\pi = (a,b,c) = (1,1,0)$

10b) Data una retta $r : \begin{cases} y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$, $P_0 = (-1,1,1)$, $\pi : x + 3y - 2 = 0$

CERCO s





$$\frac{x - \cancel{x_0}^{0}}{l} = \frac{y - \cancel{y_0}^{0}}{m} = \frac{z - \cancel{z_0}^{0}}{n} \rightarrow v_s = (l, m, n)$$

2 PRODOTTI SCALARI $= 0$

Osserviamo che: (dal disegno)

- $v_s \perp u_\pi$
- $v_s \perp v_r$

2 condizioni di ortogonalità $\Longrightarrow \begin{cases} v_s \cdot u_\pi = 0 \\ v_s \cdot v_r = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (l, m, n) \cdot (1, 1, 0) = 0 \qquad 1 \cdot 1^\circ + 2 \cdot 2^\circ + 3 \cdot 3^\circ = 0 \\ (l, m, n) \cdot (\ \underline{v}_r \text{ da calcolare}) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow r \begin{cases} 4x - y = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \\ y + z - 2\cancel{t} = 0 \\ t = 0 \end{cases} \begin{cases} x = y/4 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \forall y \quad \overset{v_r}{\left(\frac{y}{4}, y, -y, 0\right)}$

$y = 4$

$(1, 4, -4)$

$$\begin{cases} l + m = 0 \\ (l, m, n) \cdot (1, 4, -4) = \vec{0} \end{cases} \begin{cases} l + m = 0 \\ \underset{-m}{l} + 4m - 4n = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} l = -m \\ 3m - 4n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l = -m \\ +\cancel{4}n = +\frac{3}{4}m \end{cases} \forall m$$

UNA INCOGNITA LIBERA

$\left(-m, m, \frac{3}{4}m\right)$ divido per $m \neq 0$ $\rightarrow \left(-1, 1, \frac{3}{4}\right) =$

$= \boxed{(-4, 4, 3)}$ ← VETTORE DIRETTIVO v_s

UNA RETTA

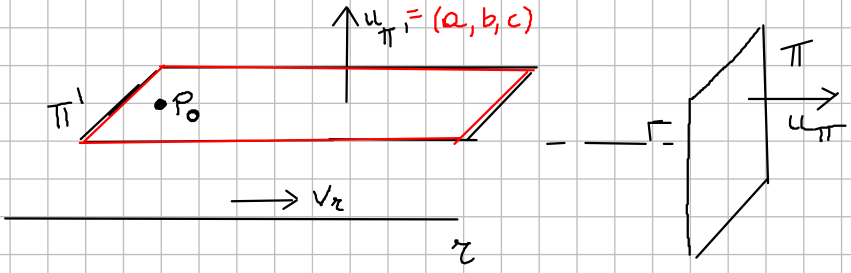
(s):

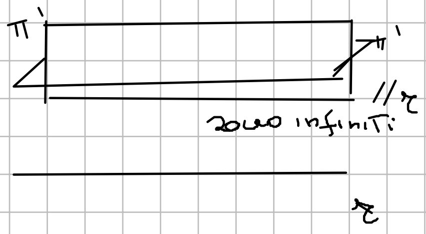
$$\frac{x - \cancel{x_0}^{0}}{l} = \frac{y - \cancel{y_0}^{0}}{m} = \frac{z - \cancel{z_0}^{0}}{n} \rightarrow (-4, 4, 3)$$

$$\frac{x}{-\cancel{4}} = \frac{y}{\cancel{4}} = \frac{z}{3} \rightarrow \begin{cases} -x = y \\ 3y = 4z \end{cases}$$

R.

(s) $\begin{cases} x + y = 0 & \pi_1 \\ 3y - 4z = 0 & \pi_2 \end{cases}$ $\quad s : \pi_1 \cap \pi_2$





π' : $ax + by + cz + d = 0$ TROVARE a, b, c, d

$u_{\pi'} \perp v_r$

$u_{\pi'} \perp u_\pi$

2 CONDIZIONI DI ORTOGONALITA' $\Rightarrow$

già calcolato $(-1, 4, -4)$

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (v_r) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (1,1,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b - 4c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -b + 4b - 4c = 0 \\ a = -b \end{cases} \quad \begin{cases} 3b - 4c = 0 \\ a = -b \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{4}c = \frac{3b}{4} \\ a = -b \end{cases}$$

$$\left(-b,\ b,\ \frac{3}{4}b\right) \rightarrow (b=4) \rightarrow \left(\underset{a}{-4},\ \underset{b}{4},\ \underset{c}{3}\right) = u_{\pi'}$$

$-4x + 4y + 3z + d = 0$ RIMANE DA TROVARE LA $\boxed{d}$

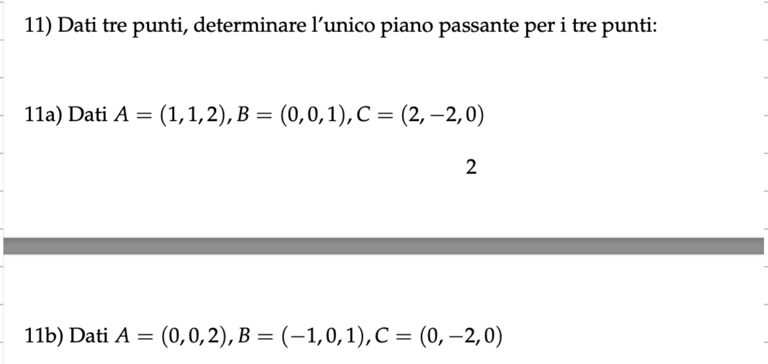
(PASSAGGIO PER $P_0(0,0,0)$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{d=0}}$)

R. π' : $-4x + 4y + 3z = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{4x - 4y - 3z = 0}$

10 b) Completare a casa

11)

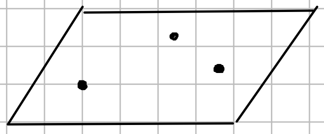


11) Dati tre punti, determinare l'unico piano passante per i tre punti:

11a) Dati $A = (1,1,2)$, $B = (0,0,1)$, $C = (2,-2,0)$

2

11b) Dati $A = (0,0,2)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,-2,0)$



PER 3 PUNTI PASSA UNO E UN SOLO PIANO
(NON ALLINEATI)

π : $ax + by + cz + d = 0$ TROVARE a, b, c, d

Impongo il passaggio per i 3 punti

$A=(\overset{x}{1},\overset{y}{1},\overset{z}{2})$ $B=(\overset{x}{0},\overset{y}{0},\overset{z}{1})$ $C(2,-2,0)$

- per A : $a(1)+b(1)+c(2)+d=0$
- per B : $\cancel{a(0)}+\cancel{b(0)}+c(1)+d=0$
- per C : $a(2)+b(-2)+\cancel{c(0)}+d=0$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b+2c+d=0 \\ c+d=0 \\ 2a-2b+d=0 \end{cases}$$

sist. lineare omogeneo
4 incognite a, b, c, d
3 equazioni
(soluz. proporzionali
una incogn. libera)

$$\begin{cases} a+b+\underline{2c}\,\underline{-c}=0 \\ d=-c \\ 2a-2b-c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \rightarrow a=-b-c \\ d=-c \\ 2(-b-c)-2b-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ \underline{-2b}-2c\,\underline{-2b}-c=0 \quad +4b+3c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-(-\frac{3}{4}c)-c \\ d=-c \\ b=-\frac{3}{4}c \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{3}{4}c-c \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{3c-4c}{4}=-\frac{c}{4} \\ = \end{cases} \quad \forall c$$

$\left(-\frac{\cancel{c}}{4}, -\frac{3}{4}\cancel{c}, \cancel{c}, -\cancel{c}\right)$ divido per c $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 1, -1\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ moltiplico per 4 $\rightarrow$ $(\underset{a}{-1}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{4}, \underset{d}{-4})$

R. $\pi : -x-3y+4z-4=0$

$\rightarrow \boxed{x+3y-4z+4=0}$

11b) Completare a casa

12) Verificare se due rette sono sghembe (cioè determinante diverso da zero)

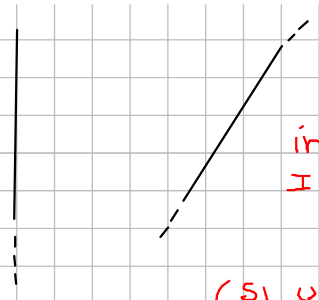
$$A=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 4\times4$$

12a) $r_1 : \begin{cases} 4x-y-z & =0 \\ x-y & =1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} z & =0 \\ x & =0 \end{cases}$,

12b) $r_1 : \begin{cases} x-z & =0 \\ x-y & =1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x+z & =0 \\ z & =0 \end{cases}$

Rette sono sghembe

come si capisce
con l'algebra ?



le equazioni (coefficienti)
in riga portando tutto al
I membro e porre
$\det A_{4\times4} \neq 0$
(SI USA IL TEOR. DI LAPLACE)

Applico Laplace (ultima riga)

$$\det = 1 \cdot A_{\underbrace{41}_{5 = \text{dispari}}} = \underbrace{(-1)^5}_{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{taglio} \\ \text{4 riga} \\ \text{1° colonna} \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(+1) = -1$$

$\neq 0$

→ le rette sono quindi sghembe

12 b) Completare a casa

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Equaz. cartesiana

Riduciamo

$R_2 \to R_2 - xR_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z \end{pmatrix}$$

Adesso è ridotta per righe

⇒ PONIAMO TUTTI GLI ELEMENTI DELL'ULTIMA RIGA $= 0$

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

R. Le equaz. cartesiane sono due: $y-x=0$ e $z=0$

SE IL RANGO È MAX

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Riducendola → ....

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$$

RIDOTTA

$0=0 \quad \forall x$

$0=0 \quad \forall y$

$0=0 \quad \forall z$