Corso di Algebra Lineare e Geometria
Endomorfismi

Dott.ssa L.Marino

Università Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Definizione di autovalore, autovettore, autospazio

Dato V un K spazio vettoriale. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo.

- Un elemento $\lambda \in K$ si dice **autovalore** per f se esiste un vettore

$$\exists\ v \in V, \text{con } v \neq 0 \text{ tale che } f(v) = \lambda \cdot v.$$

- Un vettore $v \in V$, con $v \neq 0$ si dice **autovettore** per f se

$$\exists\ \lambda \in K \text{ tale che } f(v) = \lambda \cdot v$$

- Sia $\lambda \in K$ un autovalore. Dicesi **autospazio** associato a λ, e sarà denotato con V_λ, l'insieme dei vettori $v \in V$ tali che $f(v) = \lambda v$, cioè

$$V_\lambda = \{v \in V |\ f(v) = \lambda \cdot v\}$$

f_λ: endomorfismo associato a λ

Osservazione importante n.1
L'autospazio si può pensare come

$$V_\lambda = \{\text{autovettori associati all'autovalore } \lambda\} \cup \{0_V\}.$$

V_λ è sottospazio vettoriale di V:
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda \in K$ Definiamo l'applicazione lineare f_λ che chiameremo **endomorfismo associato a** λ

$$f_\lambda : V \to V, \text{con } f_\lambda(v) = f(v) - \lambda \cdot v, \forall v \in V$$

Precisamente,

$$f_\lambda = f - \lambda i_V, \text{con} \lambda \in K$$

Fissata una base $\mathcal{A}$ per V, diventa

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f_\lambda) = M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f - \lambda i_V) = M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) - \lambda M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(i_V) = A - \lambda \cdot I_n.$$

Relazione tra autospazio V_λ e ker f_λ

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo del K spazio vettoriale V f.g.
Sia $\lambda \in K$ un autovalore per f, allora si ha la seguente relazione

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}\, f_\lambda$$

Dimostrazione:
Lo dimostriamo insiemisticamente. Cioè consideriamo un elemento di V_λ e verififichiamo che appartiene a $Kerf_\lambda$ e poi verifichiamo il viceversa.
Infatti dato
$v \in V_\lambda \Leftrightarrow f(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow f(v) - \lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow f_\lambda(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}\, f_\lambda$

Teorema n.1 (Sull' indipendenza lineare degli autospazi)

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e r autovalori distinti che indicheremo con $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in K$.
Siano dati r autovettori con $v_1 \in V_{\lambda_1}, \cdots, v_r \in V_{\lambda_r}$ allora tali r autovettori sono linearmente indipendenti.
Dato un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\dim \mathbb{R}^n = n \Rightarrow f \text{ ammette al massimo n autovalori (distinti)}$$

Polinomio caratteristico di f

Sia A una matrice quadrata di ordine n, si chiama **polinomio caratteristico** di A il determinante

$$|A - T \cdot I_n| = P(T)$$

Infatti se calcoliamo la matrice

$$A - T \cdot I_n$$

dove T è una variabile,

$$(A - T \cdot I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - T & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - T \end{pmatrix}$$. otteniamo che il suo determinante è il nostro polinomio caratteristico.

Teorema n.2 (Sull'autovalore e polinomio caratteristico)

Teorema: Sia $f : V \to V$, con K spazio vettoriale V di dimensione n. Sia $\mathcal{A}$ una base di V, allora

$$\lambda \in K \text{ è autovalore } \Leftrightarrow P(\lambda) = 0.$$

Molteplicità algebrica e geometrica

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo del K spazio vetoriale V e sia $\lambda \in K$ un suo autovalore.
Definizione di m_λ: Diremo **molteplicità algebrica** di λ, e sarà indicata con m_λ, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico di f.
Cioè la molteplicità algebrica è quante volte è contenuto l'autovalore λ come soluzione del polinomio caratteristico.

$$\text{Se } m_\lambda = r \Rightarrow P(T) = (T - \lambda)^r \cdot h(T), \text{con } h(\lambda) \neq 0.$$

Definizione di g_λ: Diremo **molteplicità geometrica** di λ, e sarà indicata con g_λ, la dimensione dell'autospazio V_λ associato a λ, precisamente

$$g_\lambda = \dim V_\lambda$$

Naturalmente, dalla definizione di autospazio $g_\lambda > 0$ sempre, o equivalentemente $g_\lambda \geq 1$

Endomorfismi semplici

Definizione: Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo.
Si dice che
f è **semplice** se esiste una base di V formata da autovettori.

Teorema n.4 (Sulla relazione tra le due molteplicità, algebrica e geometrica, di λ)

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo del K spazio vettoriale V e $\lambda \in K$ un suo autovalore di molteplicità m_λ. Allora vale la seguente relazione:

$$0 < \dim V_\lambda \leq m_\lambda$$

Sia V un K spazio vettoriale ed $f : V \to V$ un suo endomorfismo i cui autovalori distinti sono $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti

1) f è semplice
2) $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_r}$
3) ogni radice di $P(T)$, $\lambda_i \in K$ e

$$\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$$

- Se $K = \mathbb{C}$ la condizione che le radici di $P(T)$ devono appartenere in K ovviamente è sempre verificata.
- Se $K = \mathbb{R}$ e le radici di $P(T)$ non appartengono ad $\mathbb{R}$ ma sono complesse allora f non è semplice.
- Diremo che f è semplice se e solo se le radici di $P(T)$ appartengono a K e per ogni autovalore λ di molteplicità algebrica maggiore di 1 $(m_\lambda > 1)$ deve accadereche $\dim V_\lambda = m_\lambda$

Ricerca autovalori e autospazi associati

Sia data un matrice associata all'endomorfismo $M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ di V

- calcolare il polinomio caratteristico $P(T) = 0$ si trovano gli autovalori
- per ogni autovalore λ trovato si scrive $M^{A,A}(f) - \lambda \cdot I_n$
- calcolare il suo nucleo, $\mathrm{Ker}\, f_\lambda = V_\lambda$
- $\dim V_\lambda = dim\, \mathrm{Ker}\, f_\lambda = n - \rho(M^{A,A}(f) - \lambda I)$
- Base di V_λ è data dal $\mathrm{Ker}\, f_\lambda$.

Ricerca autovalori e autospazi associati, esempio

Cerchiamo autovalori e autospazio del''endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definito:

$$f(x, y, z) = (5x + 2y - 8z, -4x - y + 8z, z)$$

Si consideri una matrice associata all'endomorfismo rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$, scegliendo la **stessa** base nel dominio e nel codominio. Qui possiamo usare la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ essendo spazio euclideo.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) calcolare il polinomio caratteristico $|M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) - TI| = 0$ si trovano gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 5 - T & 2 & -8 \\ -4 & -1 - T & 8 \\ 0 & 0 & 1 - T \end{pmatrix} = (1 - T)(T^2 - 4T + 3)$$

Le radici di questo polinomio che appartengono a k sono autovalori di f

Le radici sono
$T = 1$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$
$T = 3$ con molteplicità algebrica $m_3 = 1$
Determiniamo V_1 e V_3 autospazi associati agli autovalori trovati.

$V_1 = \{$sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $(M(f) - 1 \cdot I)X = 0\}$

$V_3 = \{$sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $(M(f) - 3 \cdot I)X = 0\}$

Troveremo l'elemento generico sia per V_1, sia per V_3, ricaveremo le basi per ciascuno. Queste sono basi di autovettori per i singoli autospazi perchè $M(f)$ è rispetto alla base canonica (altrimenti le soluzioni sono le componenti di autovettori rispetto alla base scelta).

$$V_1 : \begin{pmatrix} 5-1 & 2 & -8 \\ -4 & -1-1 & 8 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} 4x + 2y - 8z = 0 \\ -4x - 2y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\to V_1 = \{(x, 4z - 2x, z)\}$
Quindi $\dim V_1 = 2$. Base di V_1 la indichiamo con
$\mathcal{U} = \{u_1 = (1, -2, 0), u_2 = (0, 4, 1)\}$

$$V_3: \begin{pmatrix} 5-3 & 2 & -8 \\ -4 & -1-3 & 8 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x+2y-8z=0 \\ -4x-4y+8z=0 \\ -2z=0 \end{cases}$$

$\rightarrow V_3 = \{(x,-x,0)\}$
Quindi $\dim V_3 = 1$. Base di V_3 la indichiamo con $\mathcal{U}' = \{u_1' = (1,-1,0)\}$

Osserviamo che la molteplicità algebrica del singolo autovalore coincide con la dimensione dell'autospazio associato, e questo accade per entrambi gli autovalore; ma questo non sempre accade e che unendo le basi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ degli autospazi otteniamo una base del nostro dominio $\mathbb{R}^3$ tutta formata da autovettori. Non sempre accade. Se accade si parla di *endomorfismo semplice*.

Definizione di matrice diagonalizzabile

Una matrice quadrata M si dice **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale. Diagonalizzare A vuol dire: trovare (se esiste) UNA MATRICE P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale e calcolare $P^{-1}AP$.
In tal caso si dice che P DIAGONALIZZA A.
Le matrici diagonalizzabili sono strettamente legate agli endomorfismi semplici, infatti sussiste il seguente teorema:
Sia M una matrice quadrata di ordine n ed sia $f : V \to V$ l'endomorfismo associato ad M mediante una base scelta A di V (cioè $M^{A,A}(f) = M$), allora:

Teorema sulla diagonalizzazione

Una matrice $A \in K^{n,n}$ è diagonalizzabile se e solo se $\varphi_A : K^n \to K^n$ è semplice. Inoltre la matrice diagonalizzata ha sulla diagonale principale gli autovalori, ripetuti con la loro molteplicità e la matrice diagonalizzante ha per colonne una base di autovettori.

a) M è DIAGONALIZZABILE se e solo se f è SEMPLICE
b) Se poi F è una base di autovettori di f allora la matrice P che diagonalizza M è la matrice di passaggio dalla base A alla base di autovettori F e la matrice diagonale che ne viene fuori dal calcolo $P^{-1}AP$ ha sulla diagonale principale gli autovalori trovati, ciascuno con la sua molteplicità.

Metodo pratico per decidere se una matrice è diagonalizzabile

- Si trova il P.C. di $M^{A,A}(f)$ e se ne calcolano le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$
- Se almeno una radice non sta in K allora la matrice non è diagonalizzabile
- Se tutte le radici stanno in K basta verificare se l'endomorfismo è semplice, cioè se $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$ tutte le volte che $m_{\lambda_i} > 1$.
- Se in particolare gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica 1 allora la matrice è diagonalizzabile

Per DIAGONALIZZARE la matrice associata ad un endomorfismo mediante la base canonica si procede così:
si trova una base di autovettori e si costruisce la matrice P avente per colonne gli elementi di questa base;
se la base di autovettori scelta è $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ risulta

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}$$

DOVE μ_1 è L'AUTOVALORE corrispondente a u_1, ecc.