Lezione n. 7 (26-10-21)

Definizione di RANGO

1° Definizione: Rango di una matrice $m \times n$ è l'ordine max di un minore non nullo

2° Definizione: Rango di una matrice $m \times n$ ridotta (per righe o per colonna) è il numero di elementi speciali $\neq 0$ (oppure il numero di righe non nulle della matrice ridotta)

L'IDEA È

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{RIDUZIONI}]{} \underset{(\text{ridotta})}{A^R_{m \times n}} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

CONTARE GLI EL. SPEC.

$\Rightarrow r(A) = n^o$ di el. spec.

RANGO

$r(A) = \rho(A) = \#$ el. spec.

RIDUZIONE: $\lambda \in \underset{\text{CAMPO}}{K}$

$$R_i \longrightarrow R_i + \lambda \cdot R_j$$ "operazione di riduzione"

FORMULA PRATICA:

$$R^*_{\text{el. che devo sostituire con lo zero}} \longrightarrow R^*_{\text{el. che devo sost.}} - \frac{\text{el. che devo sost.}}{\text{el. speciale}} \cdot R_{\text{el. spec.}}$$

" $R_2 \to R_2 - \frac{1}{1} R_1$

ESEMPIO 1) EL. SPEC. DI R_1 $\neq 0$

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1^* & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{\text{RIDOTTA}}{A^R} = ?$$

VADO A DEFINIRE PER LA PRIMA RIGA UN EL. SPECIALE $\neq 0$

SOTTO L'ELEM. SPEC. DI R_1 DEVONO COMPARIRE DUE ZERI $\begin{matrix} 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{matrix}$

APPLICO LA FORMULA DELLA RIDUZIONE

$$R_2 \longrightarrow R_2 - \frac{1}{1} \cdot R_1 = R_2 - R_1 \qquad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$R_2 = (1, 1, -2, 2) \xrightarrow[\text{SOSTITUITA}]{\text{VA}} (1, 1, -2, 2) - (-1, 1, 2, 3) =$$

$= (1+1, 1-1, -2-2, 2-3) = (2, 0, -4, -1)$

EL SPEC. DI R_1 — LA NUOVA SECONDA RIGA

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & 1^* & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{1} \cdot R_1 = \underbrace{R_3 - R_1}$

VA SOSTITUITA CON

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -2 \end{pmatrix}$$

$r(A) = \rho(A) = 3$

ESEMPIO 2) TROVARE UNA MATRICE RIDOTTA

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1^* & -1 & 2 \\ 1 & 3^* & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{3\times 4}{A^R} = ?$$

ELEMENTO SPECIALE DI R_1 : $a_{12} = 2 \neq 0$

(da sostituire con lo zero sia a_{22}, sia a_{32})

FORMULA DELLA RIDUZIONE : $R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2} \cdot R_1 = R_2 - \frac{1}{2} R_1$

$(2, 1, -1, 2) \xrightarrow[\text{VA SOSTITUITA}]{} (2, 1, -1, 2) - \frac{1}{2}(0, 2, -2, 3) =$

$= (2, 1, -1, 2) - (0, 1, -1, +\frac{3}{2}) = (2, 0, 0, 2 - \frac{3}{2}) \rightarrow 1/2$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3^* & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

OPERAZIONE DA FARE E' : $R_3 \rightarrow R_3 - \frac{3^*}{2} \cdot R_1$ ($2 \neq 0$)

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 - \frac{3}{2} \cdot 0 & 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = 0 & 2 - \frac{3}{2} \cdot (-2) = 5 & -1 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -1 - \frac{9}{2} = -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 5 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

SCAMBIO LA SECONDA RIGA CON LA TERZA

$R_2 \longleftrightarrow R_3$ (ATTENZIONE A FARE QUESTA OPERAZIONE! NON BISOGNA COINVOLGERE R_1)

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & -2 & 3 \\ 1 & 0 & \boxed{5} & -11/2 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad r(A)=3$$

FARE TANTI ESERCIZI DAL LIBRO RIDUZIONE E CALCOLO DEL RANGO

DATA UNA MATRICE A, $\boxed{m \times m}$

MATRICE INVERSA : $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$ NON E' !!!

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_a^{T}$$

(trasposta)

$\det A$ $(\neq 0)$ CONDIZIONE DI INVERTIBILITA'

A_a aggiunta — MATRICE DEI COMPL. ALGEBRICI

$$A_a = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_a^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & \vdots \\ A_{12} & \vdots & \vdots \\ A_{13} & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{13}}{\det A} & & \end{pmatrix}$$

ESEMPIO SULLA MATRICE INVERSA

Data una matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dire se é invertibile e in caso affermativo determinare A^{-1}

Risoluzione

CALCOLARE $\det A$. Se $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ é invertibile quindi $\exists A^{-1}$

$\det A = |A| = -2 - 2 = -4 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

TROVARE A^{-1} :

BISOGNA CALCOLARE I COMPL. ALGEBRICI DI TUTTI

$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$; $A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \; ; \; A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \; ; \; A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

TRASPOSTA

$$A_a = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{A_a^T}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\det A} & \frac{-1}{\det A} & \frac{0}{\det A} \\ \frac{2}{\det A} & \frac{1}{\det A} & \frac{-4}{\det A} \\ \frac{2}{\det A} & \frac{-1}{\det A} & \frac{0}{\det A} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A_a^T}{\underset{(-4)}{\det A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI LIBRO FINO A PAG. 26

TEOREMA SULLE MATRICI INVERTIBILI

$A \in K^{n,n}$ ($n \times n$ e gli elementi di A appartengono al campo K)

- a) A INVERTIBILE SE E SOLO SE $\iff$ $|A| \neq 0$
- b) SE $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_a^T$
- c) SE A É INVERTIBILE $\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

DIMOSTRAZIONE

- a) Ipotesi: PUNTO DI INIZIO TESI: OBIETTIVO

$\Rightarrow$ CONDIZIONE NECESSARIA

IP. A INVERTIBILE $\qquad$ TS $|A| \neq 0$

$\Downarrow$

$\exists$ LA MATRICE INVERSA A^{-1}

(É QUELLA MATRICE CHE MOLTIPLICATA PER A MI DÁ LA MATRICE IDENTICA $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

3×3

$2\times2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$4\times4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \cancel{A^{-1} \cdot A} = I$$

CALCOLIAMO I DETERMINANTI DI AMBO I MEMBRI

$$\underbrace{|A \cdot A^{-1}|}_{\text{APPLICO BINET}} = |I|$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = \underbrace{|I|}_{=1}$$

$$\underbrace{|A| \cdot |A^{-1}|}_{\text{PRODOTTO FA UNO}} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} |A| \neq 0 \\ |A^{-1}| \neq 0 \end{matrix} \longrightarrow |A| \neq 0$$

$\nexists$

C.V.D.

VICEVERSA $\boxed{\Leftarrow \text{ CONDIZ. SUFFICIENTE }}$:

IP. $|A| \neq 0$ $\qquad$ $\nexists$ A INVERTIBILE

$\Downarrow$ POSSO METTERLO AL DENOMIN

USO LA FORMULA $\dfrac{1}{|A|} A_a^T$ E DIMOSTRO CHE QUESTA

È LA MATRICE INVERSA, MOLTIPLICANDOLA PER A E

FACENDO VEDERE CHE IL PRODOTTO È UGUALE A I

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot A_a^T \right) \overset{?}{=} I$$

SUPP 3x3

RIGA PER COLONNA

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

T. LAPLACE N°1 $\qquad$ LAPLACE N°2

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}}_{=|A|} & \underbrace{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}_{=0} & \underbrace{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}_{=0} \\ \underbrace{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}_{=0} & \underbrace{\boxed{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}}_{=|A|} & \underbrace{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}_{=0} \\ - - & - - & - - \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} & - - \\ - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\nexists$

$\Rightarrow$ ABBIAMO DIMOSTRATO CHE A È INVERTIBILE

E ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\frac{1}{|A|} A_a^T = A^{-1}$

b) È STATA DIMOSTRATA PURE !

c) I_p A INVERTIBILE $(|A| \neq 0)$ $\quad T_s \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$\Downarrow$

$\exists A^{-1} \,/\, A \cdot A^{-1} = I$ $\qquad$ c.v.d.

calcolo il det. di ambo i membri $\hookrightarrow$ $\underbrace{|A \cdot A^{-1}|}_{\text{BINET}} = |I|$

$\underbrace{|A|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{|A^{-1}|}_{} = 1$

PROPRIETÀ DELLA MATRICE INVERSA

- $(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$

INVECE SI HA CHE $(A \cdot B)^{-1} = \underline{B^{-1}} \cdot \underline{A^{-1}}$