Ricevimento 27-1-22

$\boxed{\det B = 0}$ → polinomio di 2° grado → K_1 conica spezzata, K_2 conica spezzata
3×3 — " 1° grado — " 3° grado — in K

SOSTITUISCO LE SOLUZIONI TROVATE NEL FASCIO (A K) (UNO PER VOLTA) → CHE TIPO DI CONICA SPEZZATA E'

$B = \begin{pmatrix} \text{TUTTI} \\ \text{NUMERI} \end{pmatrix}$ $\quad \rho(B) = \dots$ < 2: CON. SPEZZ IN 2 RETTE DISTINTE; 1: CON. SPEZZ. IN 2 RETTE COINCIDENTI (r^2)

$\boxed{\det B \neq 0}$ → $K \neq K_1, K_2$ rientra K nella matrice B

$\det A = \dots$ in funzione di K
2×2
→ polinomio di 2° grado: >0 disequaz. di 2° grado in K (ellissi); =0 equ. di 2° grado; <0
= di 1° grado

"RIPASSARE
TUTTI I CASI PARTICOLARI
DELLE DISEQUAZ. DI 2° GRADO"

"DICE": $\Delta > 0$
CONCORDI: = $\quad \Delta = 0$
DISCORDI: =

Ex

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -K \\ -K & (K+1) \end{vmatrix} = 2(K+1) - K^2 = \boxed{2K + 2 - K^2}$

NON VA CAMBIATO DI SEGNO

discordi → v. interni

$2K + 2 - K^2 > 0 \qquad -K^2 + 2K + 2 > 0 \qquad K^2 - 2K - 2 < 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 \qquad K = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}$

$1 - \sqrt{3} < K < 1 + \sqrt{3}$

Ex

$\det A = \begin{vmatrix} -2 & K \\ K & (K+1) \end{vmatrix} = -2K - 2 - K^2 > 0 \qquad \Delta < 0$

$\to +K^2 + 2K + 2 < 0 \to \frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$

LA DISEQUAZIONE

DISCORDI + $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ È MAI VERA $\det A > 0$ MAI $\nexists$ ellissi

CONCORDI + $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ LA DISEQUAZ. È SEMPRE VERA $\forall K$; $\det A > 0$ SEMPRE

SAREBBERO STATE TUTTE ELLISSI !!!

• $Kx^2 + Ky^2 + 3 + 2Kxy + 2Kx + 2Ky = 0 \quad K \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} K & K & K \\ K & \boxed{K} & \boxed{K} \\ K & \boxed{K} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$\det B = 0 \quad \forall K$

$\rho(B) < 3$ sempre

NASCONO 2 CONDIZIONI

CALCOLARE IL RANGO

Scelgo un minore 2×2 $\quad 3K - K^2 \neq 0 \quad K(3-K) \neq 0 \quad K \neq 0 \quad K \neq 3$

$\Rightarrow \rho(B) = 2$ CONICHE SPEZZ. IN 2 RETTE DIST.

• Se $K = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho(B) = 1$ 2 rette coincident.

• Se $K = 3$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho(B) = 1$ 2 rette coincidenti

COMPITO 7-12-21

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati il piano $\pi: x - z + 2 = 0$ e la retta

$$r: \begin{cases} x - y + z - \cancel{2} = 0 \\ 2x + y - 2z - \cancel{1} = 0. \end{cases} \quad \vec{r}(1,4,3)$$

α: $ax + by + cz + d = 0$

Determinare il piano α parallelo alla retta r, ortogonale al piano π e passante per l'origine O. $d = 0$

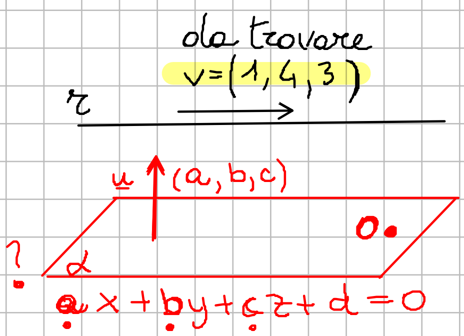
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogoale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

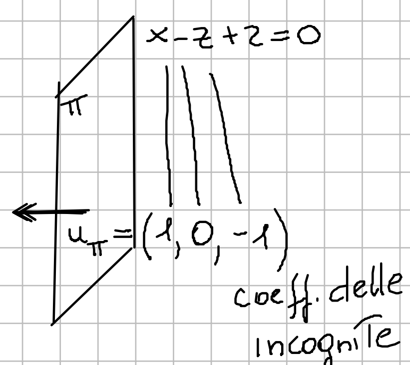
$$x^2 + (2h+2)xy + y^2 + 2x + 2y = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare la natura della conica del fascio tangente alla retta di equazione $x = -2$.

Risoluzione

$\pi: \quad x - z + 2 = 0$





Troviamo i parametri direttori della retta r (o vettore direttivo $\underline{v}$)

$$\begin{cases} x-y+z\cancel{-2t}=0 \\ 2x+y-2z\cancel{-t}=0 \\ t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ 2y-2z+y-2z=0 \\ t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} - \\ 3y-4z=0 \\ t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3}z-z \\ y=\frac{4}{3}z \\ \forall z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z \\ y=\frac{4}{3}z \\ \forall z \end{cases} \qquad P_\infty\left(\frac{z}{3}, \frac{4}{3}z, z, 0\right) \xrightarrow{z=3} \boxed{\underline{v}=(1,4,3)}$$

$$\ell \quad m \quad n$$

$$\left(\begin{cases} x=y-\frac{3}{4}y \\ z=\frac{3}{4}y \\ \forall y \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{y}{4} \\ z=\frac{3}{4}y \\ \forall y \end{cases} \quad P_\infty\left(\frac{y}{4}, y, \frac{3}{4}y, 0\right) \xrightarrow{y=4} \boxed{v=(1,4,3)} \right)$$

$$\boxed{\underline{u}^\alpha \cdot \underline{v}=0} \qquad \underline{u}^\alpha \perp \underline{v}^r \qquad \left(\overset{\text{PIANO}}{\alpha} \,/\!/\, r\right)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,4,3)=0 \rightarrow \boxed{a+4b+3c=0}$$

$$\boxed{\underline{u}^\alpha \cdot \underline{u}^\pi=0} \qquad \underline{u}^\alpha \perp \underline{u}^\pi \qquad \left(\overset{\text{PIANO}}{\alpha} \perp \overset{\text{PIANO}}{\pi}\right)$$

$$(a,b,c)\cdot(1,0,-1)=0 \rightarrow \boxed{a-c=0}$$

PIANO α DEVE INOLTRE PASSARE PER L'ORIGINE $\boxed{d=0}$

$$\begin{cases} c+4b+3c=0 \\ a=c \\ d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{4}c+\cancel{4}b=0 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ a=c \\ d=0 \\ \forall c \end{cases}$$

sostituire nell'equazione di α

$$\alpha: \; ax+by+cz+d=0$$

$$cx-cy+cz+0=0$$

dividendo tutto per $c\neq 0$

R.: α è $\boxed{x-y+z=0}$

2) Studiamo il fascio di coniche

$$x^2 + (2h+2)xy + y^2 + 2x + 2y = 0, \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 \\ h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B = 0$

$\det B = h+1 + h+1 - 1 - 1 = 2h$ polinomio di 1° grado

$\frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}} = \frac{0}{2} \rightarrow h = 0$ CONICA SPEZZATA

SOSTITUIRE IN B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \det = -1 \neq 0$

$\rho(B) = 2$ SPEZZ. IN 2 RETTE DISTINTE

Equ. del fascio è: $h = 0$

$$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{} + \underbrace{2x + 2y}_{} = 0$$

$$(x+y)^2 + 2(x+y) = 0$$

$$\underset{r_1}{(x+y)}\ \underset{r_2}{(x+y+2)} = 0$$

r_2 r_1

$\det B \neq 0$

$\det B \neq 0$

$h \neq 0$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & h+1 \\ h+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (h+1)^2 = \cancel{1} - h^2 - \cancel{1} - 2h$ polin. 2° grado

$\det A > 0$ $\quad -h^2 - 2h > 0 \quad \rightarrow (-1)\ h^2 + 2h < 0$ (spezia)

$h(h+2) = 0 \qquad h = 0 \quad h = -2$

discordi $\rightarrow$ v. interni

$-2 < h < 0$ ellissi

Circonferenze $\begin{cases} \bullet\ a_{11} = a_{22} & 1 = 1 \text{ VERO! } \checkmark \\ \bullet\ a_{12} = 0 & h+1 = 0 \rightarrow h = -1 \end{cases}$

sta dentro l'intervallo delle ellissi

quindi $h = -1$ è ACCETTABILE

CIRCONFERENZA: $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

$\det A = 0$ $\quad \cancel{h=0}$, -2 $\quad h=-2$ PARABOLA

?

VALORE ACCETTATO

NON E' COMPATIBILE CON LA CONDIZIONE DI PRIMA

- $\det A < 0$ $\quad h<-2 \quad h>0$ iperboli

Iperbole equilatera $\quad Tr\, A = 2 \Rightarrow$ MAI

$\nexists$ iperb. equilatera

$$\begin{cases} \text{FASCIO} \\ x=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+(2h+2)xy+y^2+2x+2y=0, \\ 4+(2h+2)(-2y)+y^2-4+2y=0 \end{cases}$$

$$(\quad)y^2+(\quad)y+(\quad)=0$$

$\Delta = 0$ CONDIZ. DI TANGENZA

$h = \ldots$