# Corso di Algebra Lineare e Geometria
# Geometria lineare

Lucia Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

# Testi consigliati

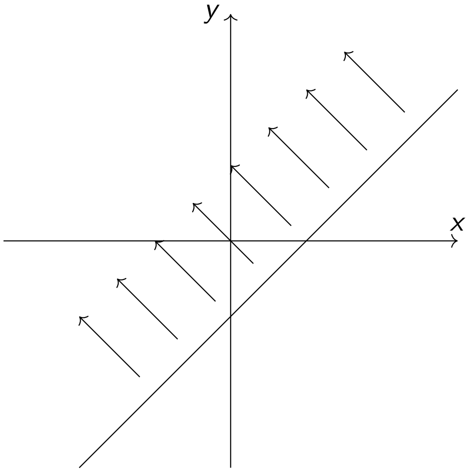
Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

# I tre modi per individuare una retta nel piano

Una retta $r$ nel piano si può individuare geometricamente in tre modi:

- 1) un punto $P_0 \in r$ ed un vettore libero $\vec{u} = (a, b) \neq (0, 0) \perp r$
- 2) un punto $P_0 \in r$ ed un vettore libero $\vec{v} = (l_d, m_d) \neq (0, 0) \parallel r$
- 3) due punti distinti $P_1$,$P_2$ di $r$.

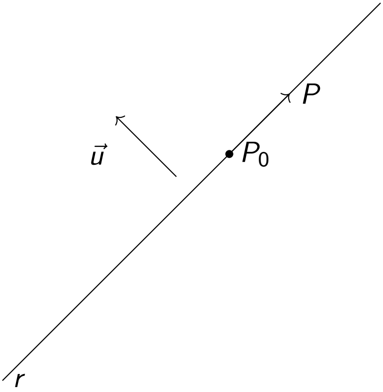
# Una e una sola direzione ortogonale alla retta nel piano



# Modo n.1 per individuare una retta nel piano

$$P_0, \quad \vec{u} \perp r$$

- $\vec{u} = (a, b)$
- $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$



Una retta $r$ nel piano si può individuare geometricamente dando un punto $P_0$ di $r$ ed un vettore libero $\vec{u} = (a, b)$ non nullo ortogonale a $r$
Consideriamo un punto generico $P = (x, y)$ sulla retta $r$.
Avremo il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ che giace sulla retta $r$.

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{PP_0} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow$$

$$(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0 \Rightarrow$$

poniamo $c = -ax_0 - by_0 \Rightarrow$

$$ax + by + c = 0$$

Essa si dice equazione della retta $r$ in forma impilcita o semplicemente equazione cartesiana

# Equazione cartesiana della retta

Si dice equazione cartesiana della retta $r$, la seguente forma

$$ax + by + c = 0$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$

- a) Ogni retta del piano si può rappresentare con una equazione cartesiana e viceversa
- b) Due equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ rappresentano la stessa retta se e solo se esiste un numero reale $k$ tale che la terna $(a, b, c) = k(a', b', c')$.

Conseguenze:
1) Ogni retta ha infinite equazioni cartesiane, che differiscono tra loro per una costante non nulla
2) Data l'equazione della retta in forma cartesiana possiamo ricavare $\vec{u} = (a, b)$, dove $\vec{u} \perp r$.

# Il coefficiente angolare

Sia $r : ax + by + c = 0$. Ricaviamo la y:
$by = -ax - c$. Adesso poichè si deve dividere per $b$, bisogna mettere la condizione $b \neq 0$:

$$r : \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow$$

$$r : y = m_c x + q$$

dove $m_c = -\frac{a}{b}, q = -\frac{c}{b}$. Essa si chiama forma esplicita di $r$ perchè si ha chiaro chi è

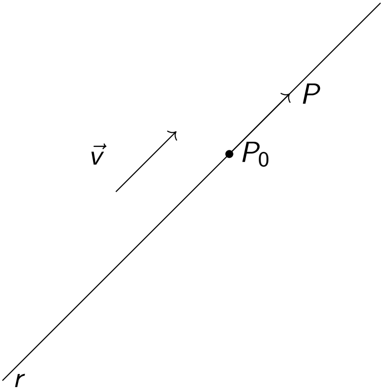
$$m_c = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

Esso è detto coefficiente angolare.
Dove $m = tg\alpha$ dove $\alpha$ è l'angolo formato da $r$ e il verso positivo dell'asse delle $\vec{x}$.
Leviamo la condizione $b = 0$:
$r : \quad ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = k$. Non si può avere esplicitata la $y$ quindi la conseguenza è che le rette parallele all'asse $\vec{y}$ non hanno coefficiente angolare.

# Modo n.2 per individuare una retta nel piano

$$P_0, \quad \vec{v} \parallel r$$

- $\vec{v} = (l_d, m_d)$
- $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$



# Parametri direttori

Una retta $r$ nel piano si può individuare geometricamente dando un punto $P_0$ di $r$ ed un vettore libero $v = (l_d, m_d)$ non nullo parallelo a $r$
Consideriamo un punto generico $P = (x, y)$ sulla retta $r$.
Chiamiamo $(l_d, m_d)$ parametri direttori della retta r Avremo il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ che giace sulla retta $r$.

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{PP_0} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = tv \Rightarrow$$

$$(x - x_0, y - y_0) = t(l_d, m_d)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = l_d t \\ y - y_0 = m_d t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + l_d t \\ y = y_0 + m_d t \end{cases}$$

Esse si dicono equazioni della retta $r$ in forma parametrica

# Equazione della retta passante per un punto $P_0$ e avente p.d. $(l_d, m_d)$

Da cui ricavando $t$ da entrambe le equazioni del sistema e uguagliando, si ottiene: $\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{l_d} \\ t = \frac{y-y_0}{m_d} \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$r: \qquad \frac{x-x_0}{l_d} = \frac{y-y_0}{m_d}$$

Essa è l'equazione della retta passante per un punto $P_0$ e avente vettore parametri direttori $(l_d, m_d)$.
Da cui continuando i passaggi arriviamo ad un'altra formula del coefficiente angolare:

$$r: \; m_d(x-x_0) = l_d(y-y_0) \Leftrightarrow y-y_0 = \frac{m_d}{l_d}(x-x_0) \Rightarrow y-y_0 = m_c(x-x_0)$$

dove

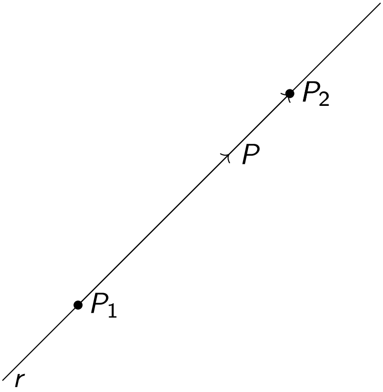
$$m_C = \frac{m_d}{l_d}$$

.

# Modo n.3 per individuare una retta nel piano

$$P_1, P_2 \quad \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$$

- $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1)$
- $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$



Una retta $r$ nel piano si può individuare geometricamente fissando due punti distinti $P_1$,$P_2$ di $r$. Consideriamo un punto generico $P = (x, y)$ sulla retta $r$.
Avremo i vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ che giacciono sulla retta $r$.

$$\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow$$

$$(x - x_1, y - y_1) = t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ t = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Essa si dice equazione della retta r passante per due punti $P_1$ e $P_2$

# Retta passante per due punti con la stessa ascissa o con la stessa ordinata

Consideriamo:
1) Due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_1, y_2)$, aventi la stessa ascissa e determiniamo l'equazione della retta $P_1P_2$:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow x - x_1 = 0$$

2) Due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_1)$, aventi la stessa ordinata e determiniamo l'equazione della retta $P_1P_2$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0} \Rightarrow y - y_1 = 0$$

# I parametri direttori della retta passante per due punti

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, se consideriamo la retta $r$ passante per essi, possiamo notare che il vettore $\vec{v} = (l_d, m_d)$ ad essa parallelo, può essere preso coincidente con il vettore $\overline{P_1 P_2}$, cioè

$$\vec{v} = (l_d, m_d) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

da cui

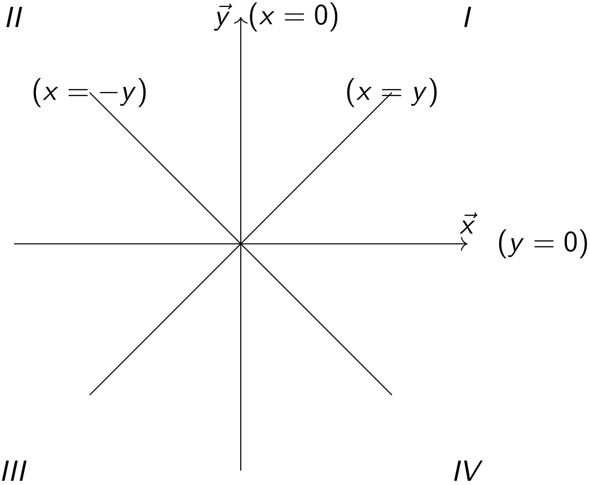
$$m_c = \frac{m_d}{l_d} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

# Alcune rette particolari

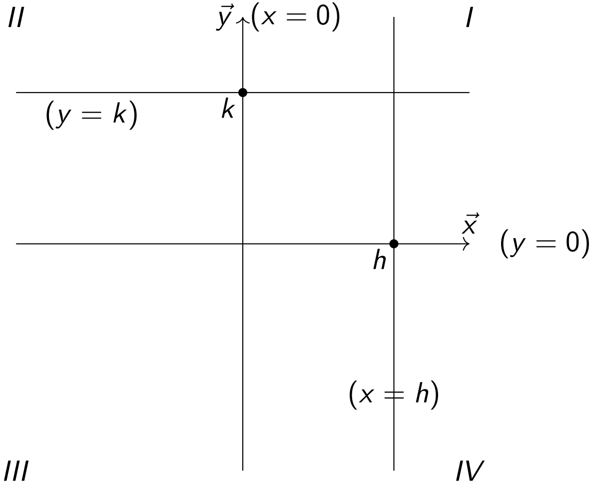
Ripassiamo insieme le equazioni di alcune rette "particolari":

- a) L'asse $\vec{x}$ ha equazione cartesiana $y = 0$
- b) L'asse $\vec{y}$ ha equazione $x = 0$
- c) Le rette parallele all'asse $\vec{x}$ hanno equazione $y = k$
- d) Le rette parallele all'asse $\vec{y}$ , hanno equazione $x = h$
- e) La bisettrice del $I$ e $III$ quadrante ha equazione $x = y$
- f) La bisettrice del $II$ e $IV$ quadrante ha equazione $x = -y$.

# Rette bisettrici



# Rette parallele agli assi



# Come trovare i parametri direttori della retta $r$ nel piano $0\vec{x}\vec{y}$

Partiamo da

$$r: \qquad \frac{x-x_0}{l_d} = \frac{y-y_0}{m_d} \Leftrightarrow m_d(x-x_0) = l_d(y-y_0) \Leftrightarrow$$

$$m_d x - l_d y - m_d x_0 + l_d y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

Ponendo $\begin{cases} m_d = a \\ -l_d = b \end{cases}$ si ottiene $ax + by + c = 0$, quindi

$$\vec{u} = (a, b) = (m_d, -l_d).$$

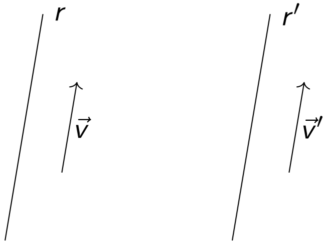
Viceversa $\begin{cases} l_d = -b \\ m_d = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$$\vec{v} = (l_d, m_d) = (-b, a)$$

# Parallelismo tra due rette

$$\vec{v} \parallel \vec{v}'$$

dove $\vec{v} = (l_d, m_d)$ e $\vec{v}' = (l'_d, m'_d)$



# Condizione di parallelismo tra due rette

$$r \parallel r' \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda \vec{v}'$$

Dove $\vec{v} = (l_d, m_d)$ e $\vec{v}' = (l'_d, m'_d)$, quindi

$$(l_d, m_d) = \lambda(l'_d, m'_d) \Rightarrow \begin{cases} l_d = \lambda l'_d \\ m_d = \lambda m'_d \end{cases} \quad \Rightarrow$$

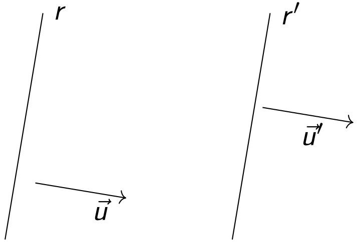
ricavando $\lambda$ da entrambe e uguagliando si ottiene la condizione di parallelismo tra r ed r'

$$\frac{l_d}{m_d} = \frac{l'_d}{m'_d}$$

# Parallelismo tra due rette

$$\vec{u} \parallel \vec{u'}$$

dove $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{u'} = (a', b')$



Notiamo che se $r \parallel r'$ anche i vettori ortogonali saranno tra loro paralleli, cioè $\vec{u} \parallel \vec{u}'$. Quindi la condizione di parallelismo si può scrivere anche come

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

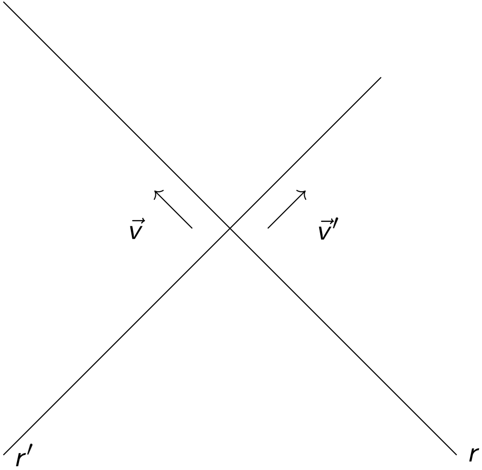
L'affermazione due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare deriva dalla condizione di parallelismo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Rightarrow m_c = m'_c \quad cvd$$

# Ortogonalità tra due rette

$$\vec{v} \perp \vec{v}'$$

dove $\vec{v} = (l_d, m_d)$ e $\vec{v}' = (l'_d, m'_d)$



# Condizione di ortogonalità tra due rette

$$r \perp r' \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$$

Dove $\vec{v} = (l_d, m_d)$ e $\vec{v}' = (l'_d, m'_d)$, quindi

$$(l_d, m_d) \cdot (l'_d, m'_d) = 0 \Rightarrow l_d l'_d + m_d m'_d = 0$$

Essa è la condizione di ortogonalità tra due rette.

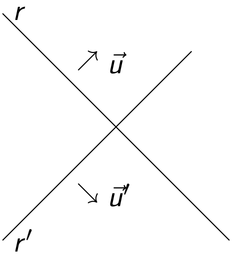
# Ortogonalità tra due rette

L'affermazione due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari, l'uno il reciproco e l'opposto dell'altro deriva dalla condizione di ortogonalità:

$$\vec{u} \perp \vec{u}'$$

dove $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{u}' = (a', b')$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Rightarrow aa' + bb' = 0 \Leftrightarrow m_c = -\frac{1}{m'_c}$$



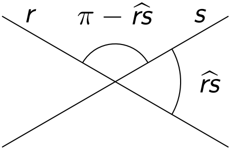
# Angolo tra due rette e coseni direttori di una retta

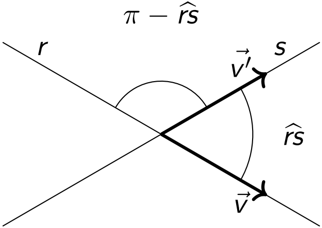
Due rette $r$ e $s$ individuano 4 angoli che sono a due a due uguali e a due a due supplementari; noto, quindi, uno degli angoli sono noti gli altri tre: è, perciò, lecito parlare di angolo $\widehat{rs}$ individuato da due rette $r$ e $s$.

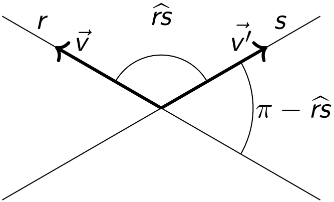
- Siano $r$ ed $s$ due rette ed $\vec{v}, \vec{v}'$ due vettori ad essi paralleli. Allora l'angolo $(r, s)$ coincide con l'angolo formato dai due vettori $\vec{v}, \vec{v}'$
- Pertanto dalla definizione di prodotto scalare tra due vettori:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}'| \cdot cos\widehat{rs}$$

si può agevolmente calcolare la sua funzione trigonometrica $cos\widehat{rs} = \frac{v \cdot v'}{|v| \cdot |v'|} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}$




$\pi - \widehat{rs}$
$r$
$s$
$\vec{v'}$
$\widehat{rs}$
$\vec{v}$


$r$
$\widehat{rs}$
$s$
$\vec{v}$
$\vec{v'}$
$\pi - \widehat{rs}$

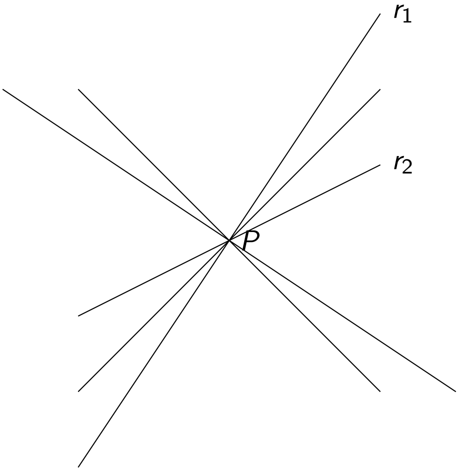
# Intersezione di due rette in forma cartesiana

Date le rette $r$ ed $r'$, le loro eventuali intersezioni si cercano risolvendo il sistema tra le due equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Sistema determinato $\Rightarrow$ le rette sono incidenti
- Sistema impossibile $\Rightarrow$ le rette sono parallele e distinte
- Sistema indeterminato $\Rightarrow$ le rette sono coincidenti

# Fascio di rette



# Fascio di rette per un punto

Sia $P_0$ un punto del piano. Il **fascio di rette** per $P_0$ è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per $P_0$ .
Tutte e sole le rette del fascio per il punto $P_0$ hanno equazioni del tipo

$$\lambda f + \mu g = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

dove con $f$ e con $g$ indichiamo le equazioni di due rette $r_1$ ed $r_2$ rispettivamente.
Adesso dividiamo per $\lambda$, quindi vi è la condizione $\lambda \neq 0 \Rightarrow$:
$f + \frac{\mu}{\lambda} g = 0 \Rightarrow f + kg = 0$
Essa è detta equazione del fascio con un solo parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$
Se $\lambda = 0$ non possiamo dividere per $\lambda$, quindi sostituendo si ottiene:

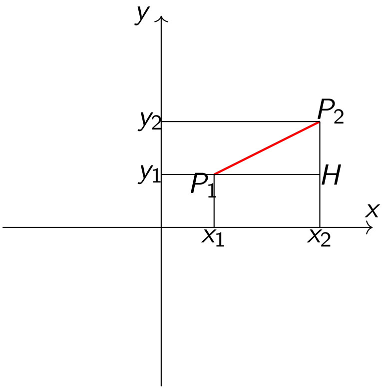
$$\mu g = 0, \quad \lambda = 0, \mu \neq 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow r_2$$

quindi se $\lambda \neq 0$ si è esclusa la seconda retta del fascio $r_2$.

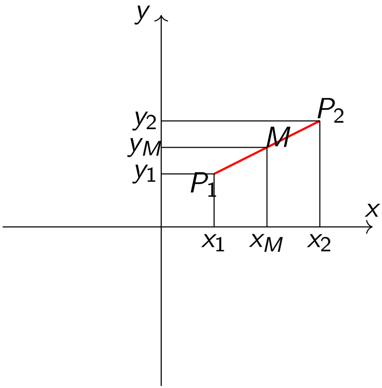
# Distanza tra due punti

La distanza $d(P_1, P_2)$ dei due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è il modulo del vettore $\overrightarrow{P_1 P_2}$, cioè

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(\overline{P_1 H})^2 + (\overline{HP_2})^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



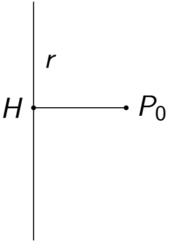
# Punto medio di un segmento $\overline{P_1 P_2}$




Il **Punto medio di un segmento** $\overline{P_1 P_2}$ è il punto $M(x_M, y_M)$ tale che $P_1 M = M P_2$. Quindi, eguagliando le componenti, si ottiene $(x_M - x_1, y_M - y_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M)$ ovvero $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

# Distanza Punto retta nel piano

Sia $r: ax + by + c = 0$ e sia $P_0 = (x_0, y_0)$. La distanza di $P_0$ dalla retta $r$ è la distanza di $P_0$ dalla sua proiezione ortogonale $H$ sulla retta $r$, cioè $d(P_0, r) = \overline{P_0 H}$:



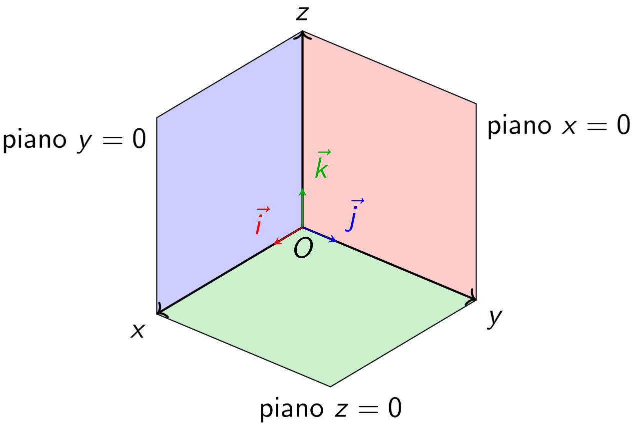

Si vede che:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

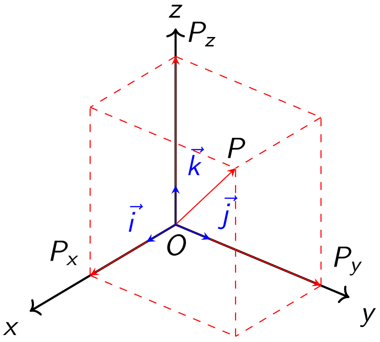
# Cambiamenti di riferimento

- Sia $r: \; ax + by + c = 0$ una retta nel riferimento $O\vec{x}\vec{y}$. Sia $O'\vec{X}\vec{Y}$ un altro riferimento con coordinate maiuscole $X, Y$. La stessa retta $r$ ha equazione $AX + BY + C = 0$ rispetto a quest'ultimo.
- Siano
$$(*) \begin{cases} x = x_0 + Xcos\alpha - Ysin\alpha \\ y = y_0 + Xsin\alpha + Ycos\alpha \end{cases}$$
le equazioni del cambiamento di riferimento. L'equazione $AX + BY + C = 0$ si ottiene allora semplicemente sostituendo le $(*)$ nell'equazioni $ax + by + c = 0$

Piani coordinati: 1) Piano $\vec{x}\vec{y}$ : $z = 0$, 2) Piano $\vec{x}\vec{z}$ : $y = 0$, 3) Piano $\vec{y}\vec{z}$ : $x = 0$



# Le tre componenti di $v = \overrightarrow{OP}$




$\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}$ sono le proiezioni ortogonali di $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ sugli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, per cui:

$$v_x = (\vec{v} \cdot \vec{i})$$

$$v_y = (\vec{v} \cdot \vec{j})$$

$$v_z = (\vec{v} \cdot \vec{k})$$

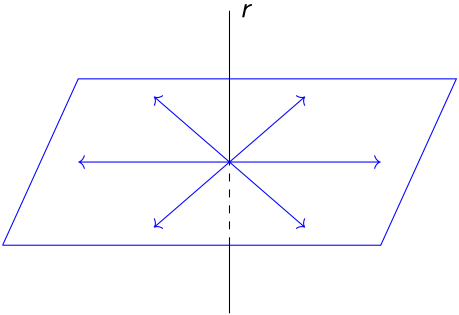
$$\Rightarrow \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

# I due modi per individuare una retta nello spazio

Una retta $r$ nello spazio si può individuare geometricamente in due modi:

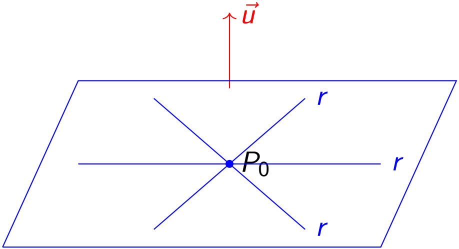
- 1) un punto $P_0 \in r$ ed un vettore libero $\vec{v} = (l_d, m_d, n_d) \neq (0,0,0) \parallel r$
- 2) due punti distinti $P_1$,$P_2$ di $r$.

# Infinite direzioni ortogonali alla retta nello spazio



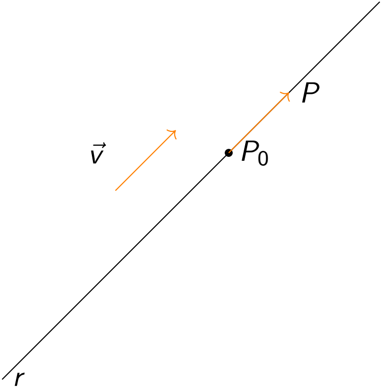
# Oppure immaginiamo così...

Osserviamo quindi che i modi per individuare unanon sono più tre ma due. Diamone una motivazione.
Di rette ortogonali ad $\vec{u}$ e passanti per $P_0$ ce ne sono infinite, come qui mostrato e non più una ed una sola come invece accadeva nel piano.



Una retta $r$ nello spazio si può individuare geometricamente dando un punto $P_0 \in r$ ed un vettore libero

$$\vec{v} = (l_d, m_d, n_d) \neq (0,0,0) \parallel r$$




Per il postulato della parallela esiste una e una sola retta passante per $P_0$ e parallela a $\vec{v} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ con $l, m, n$ non entrambi nulli.

Allora un punto $P$ dello spazio sta sulla retta $r$ se e solo se il vettore $P_0P \parallel \vec{v} \Rightarrow P_0P = t\vec{v}$
da cui

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \\ z - z_0 = nt \end{cases}$$

queste sono dette equazioni parametriche di $r$

# Equazione della retta passante per un punto $P_0$ e avente p.d. $(l, m, n)$

Da cui ricavando $t$ da entrambe le equazioni del sistema e uguagliando, si ottiene: $\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{l} \\ t = \frac{y-y_0}{m} \\ t = \frac{z-z_0}{n} \end{cases} \Rightarrow$

$$r: \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Essa è l'equazione della retta passante per un punto $P_0$ e avente vettore parametri direttori $(l, m, n)$.

# Modo n.2 per individuare una retta nello spazio

Una retta $r$ nello spazio si può individuare geometricamente fissando due punti distinti $P_1$,$P_2$ di $r$. Consideriamo un punto generico $P = (x, y, z)$ sulla retta $r$.
Avremo i vettori $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ che giacciono sulla retta $r$.

$$\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow$$

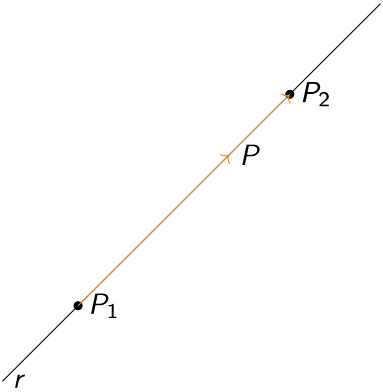
$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = t(z_2 - z_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ t = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ t = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Essa si dice equazione della retta r passante per due punti $P_1$ e $P_2$

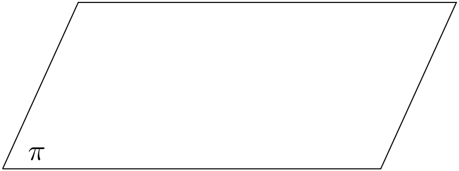
$$\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$$



# Piani

Un piano $\pi$ dello spazio può essere individuato nei due modi seguenti:

- 1) un punto $P_0$ di $\pi$ e un vettore non nullo ortogonale ad $\pi$, detto $\vec{u} = (a, b, c)$.
- 2) tre punti **non allineati** $P_0, P_1, P_2$ di $\pi$



# Modo n.1 per individuare l'equazione del piano

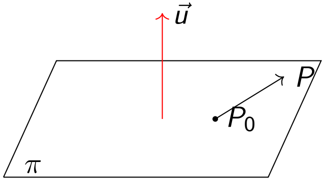
Un piano $\pi$ dello spazio può essere individuato dando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ di $\pi$ e un vettore non nullo ortogonale ad $\pi$, detto $\vec{u} = (a, b, c)$. Dato $P \in \pi$ osserviamo che

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$$

da cui

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

dove $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, si ottiene cosiddetta equazione cartesiana del piano $\pi$.



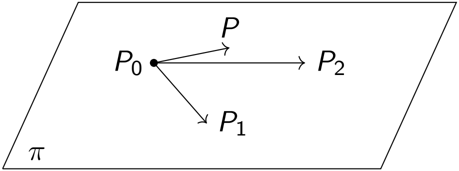
# Modo n.2 per individuare l'equazione del piano

Un piano $\pi$ dello spazio può essere individuato dando tre punti **non allineati** di $\pi$ : $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$P_0P \cdot P_0P_1 \wedge P_0P_2 = 0$$

Esplicitando il prodotto misto in termini di componenti si trova l'equazione cartesiana

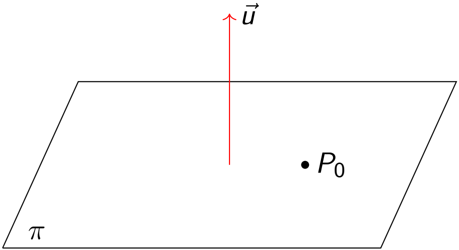
$$det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$



Dato un piano $\pi$ di equazione:

$$ax + by + cz + d = 0$$

chiamiamo parametri direttori del piano $\pi$ le componenti del vettore ortogonale $\vec{u} = (a, b, c)$.

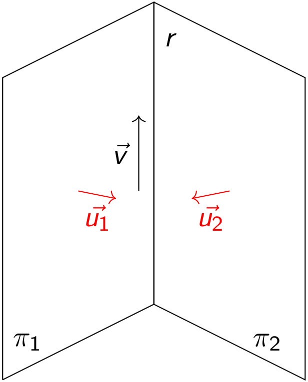


# Retta nello spazio vista come intersezione di due piani

Si vede che una retta passante per un punto $P_0$ e avente p.d. $v = (l, m, n)$ è un sistema di due equazioni lineari nelle variabili $x, y, z$, quindi due piani:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \pi_1 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

con $(a, b, c)$ terna non proporzionale a $(a', b', c')$.

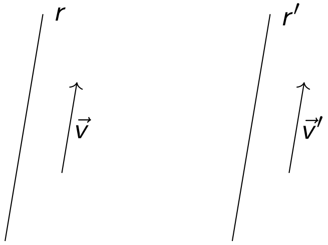


# Condizione di parallelismo tra due rette nello spazio

$r \parallel r' \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{v}' \Rightarrow \vec{v} = \lambda \vec{v}' \Rightarrow$

$$l = \lambda l', m = \lambda m', n = \lambda n' \Rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

condizione di parallelismo tra due rette.

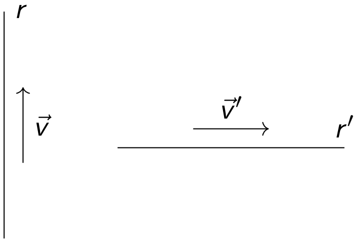


# Condizione di ortogonalità tra due rette nello spazio

$$r \perp r' \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0 \Rightarrow (i, m, n) \cdot (l', m', n') = 0$$

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

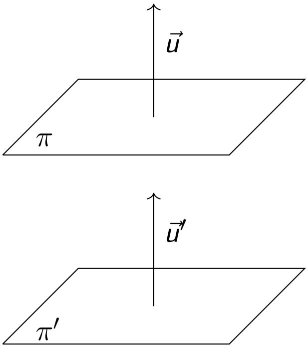
condizione di ortogonalità tra due rette.



# Condizione di parallelismo tra due piani

I piani $\pi$ ed $\pi'$ sono paralleli se e solo se $\vec{u} \parallel \vec{u'}$ sono paralleli, cioè $a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c' \Rightarrow$

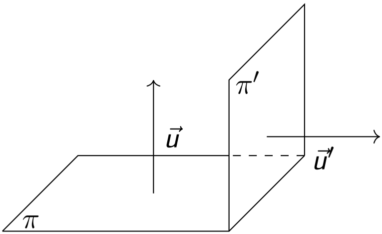
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



# Condizione di ortogonalità tra due piani

Due piani $\pi$ ed $\pi'$ sono ortogonali se esolo se $\vec{u} \perp \vec{u'}$, cioè $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0 \Rightarrow$

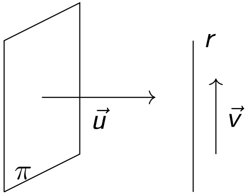
$$aa' + bb' + cc' = 0$$



# Condizione di parallelismo tra una retta e un piano

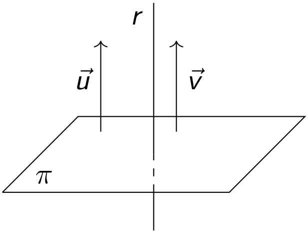
Il piano $\pi$ ed la retta $r$ sono paralleli se e solo se $\vec{u} \perp \vec{v}$, cioè $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$

$$al + bm + cn = 0$$



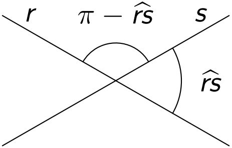
Il piano $\pi$ ed la retta $r$ sono ortogonali se e solo se $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow a = \lambda l$, $b = \lambda m, c = \lambda \Rightarrow$

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$



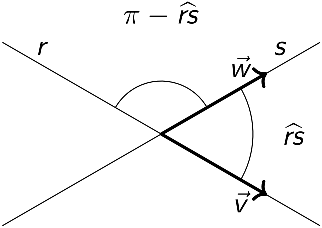
# Angolo tra due rette

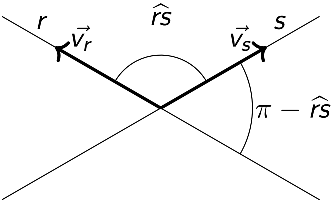
Due rette $r$ e $s$ individuano 4 angoli che sono a due a due uguali e a due a due supplementari; noto, quindi, uno degli angoli sono noti gli altri tre: è, perciò, lecito parlare di angolo $\widehat{rs}$ individuato da due rette $r$ e $s$.



Due rette $r$ ed $s$ dello spazio non necessariamente incidenti formano un angolo $\widehat{rs}$ se esistono un vettore $\vec{v} = (l, m, n)$ parallelo ad $r$ e un vettore $\vec{w} = (l', m', n')$ parallelo ad $s$ formanti un angolo $\widehat{rs}$

$$cos\widehat{rs} = \pm\frac{v \cdot w}{|v||w|} = \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}$$




$r$
$\widehat{rs}$
$s$
$\vec{v_r}$
$\vec{v_s}$
$\pi - \widehat{rs}$

# Rette sghembe

Date due rette $r, s$ esse si dicono sono sghembe se non esiste alcun piano che le contiene. In modo equivalente, due rette sono sghembe se e solo se non sono nè incidenti, nè parallele distinte, nè parallele coincidenti.

# Condizione per rette sghembe

$$\color{red}{r,\ s \quad sghembe} \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \neq 0$$

# Fascio di piani

Chiamiamo **fascio di piani** la seguente equazione:

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

dove con $\pi_1$ e con $\pi_2$ indichiamo le equazioni di due piani.
Adesso dividiamo per $\lambda$, quindi vi è la condizione $\lambda \neq 0 \Rightarrow$:
$\pi_1 + \frac{\mu}{\lambda}\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_1 + k\pi_2 = 0$
Essa è detta equazione del fascio con un solo parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$
Se $\lambda = 0$ non possiamo dividere per $\lambda$, quindi sostituendo si ottiene:

$$\mu\pi_2 = 0, \quad \lambda = 0, \mu \neq 0 \Rightarrow \pi_2 = 0$$

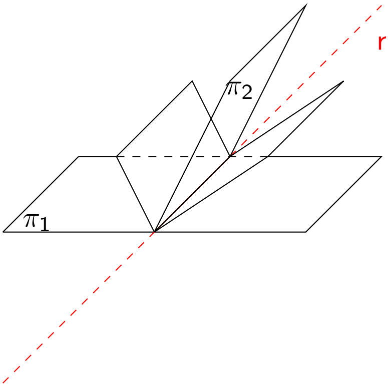
quindi se $\lambda \neq 0$ si è escluso il secondo piano del fascio $\pi_2$.

# Fasci di piani contenenti una retta

Sia data una retta $r : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$ nello spazio. Chiamiamo

$$\mathcal{F} : \ \lambda \cdot \pi_1 + \mu \cdot \pi_2 = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

fascio di piani avente per asse la retta r, gli infiniti piani che contengono la retta $r$.

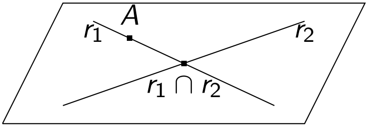


# Il piano contenente due rette

Come trovare il piano contenente due rette $r_1, r_2$, dove $r_1 = \pi_1 \cap \pi_2$:
è sufficiente controllare che le rette non sono sghembe e quindi complanari.
Verificata la complanarità,

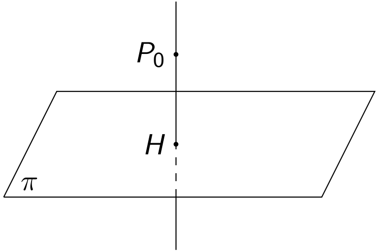
- scrivere il fascio di piani che ha per asse la prima retta, esempio $r_1$, cioè
$$\mathcal{F}' : \; \pi_1 + k \cdot \pi_2 = 0 \quad k = \frac{\mu}{\lambda}, \lambda \neq 0$$
- scegliamo un punto $P_0 \in r_2$, specifico
- imponiamo il passaggio del fascio di piani $\mathcal{F}'$ per $P_0$ per trovare $k$ e sostiuiamo in $\mathcal{F}'$. Esso sarà il piano cercato.
Ovviamente $P_0$ non deve coincidere con il punto di intersezione tra le due rette $r_1, r_2$, cioè $P_0 \neq r_1 \cap r_2$.

# Piano contenente due rette



# Distanza $d(P_0, \pi)$

Sia $\pi: ax + by + cz + d = 0$ un piano e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto. Allora $d(P_0, \pi)$ è la distanza del punto $P_0$ dal piano $\pi$ ed è la distanza del punto $P_0$ dalla sua proiezione ortogonale $H$ sul piano $\pi$:




Dunque, $d(P_0, \pi) = \overline{P_0 H}$ e vale la formula:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

# Proiezione ortogonale di un punto su un piano $\pi$

Dato il piano $\pi$ di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Il suo vettore direttivo è $\vec{u} = (a, b, c)$. La proiezione ortogonale di $P$ su $\pi$ è il punto $K = s \cap \pi$, dove $s$ è la retta passante per $P$ e ortogonale a $\pi$, del tipo $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ da cui $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ , poichè come vettore direttivo di $s$ possiamo scegliere $\vec{u}$ a noi noto.

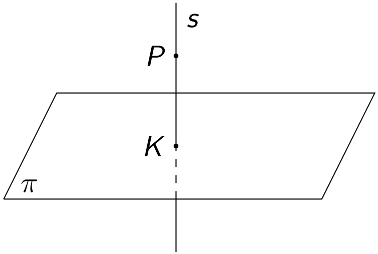
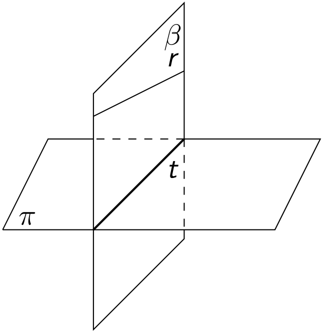



Figura: $K$ è la proiezione ortogonale di $P$ su $\pi$

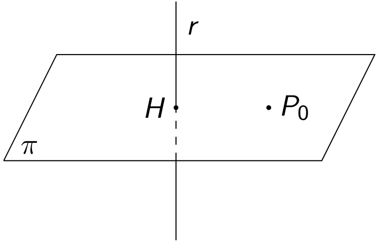
# Proiezione ortogonale di una retta su un piano $\pi$

Sia $r : \pi_1 \cap \pi_2$ e consideriamo il piano $\beta : \pi_1 + k\pi_2 = 0 \quad (\lambda \neq 0)$ contenente $r$ e imponiamo l'ortogonalità con $\pi$, ricordando che il prodotto scalare tra i due vettori direttivi di $\beta$ e quello di $\pi$ deve essere zero. Da qui ricaviamo il valore del parametro $k$ e quindi $\beta$. Allora, la proiezione ortogonale $t$ di $r$ su $\pi$ è $t = \beta \cap \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \\ \pi \end{cases}$



# Distanza $d(P_0, r)$ nello spazio

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto e sia $r$ una retta di p.d. $(l, m, n)$. Costruiamo un piano $\pi$ che passa per $P_0$ ed è ortogonale ad $r$, quindi di equazione: $\pi: \; lx + my + nz + d = 0$. Poi calcolo $H = \pi \cap r$ La distanza di $d(P_0, r) = P_0H = \sqrt{(x_0 - x_H)^2 + (y_0 - y_H)^2 + (z_0 - z_H)^2}$



# Distanza retta-piano incidenti

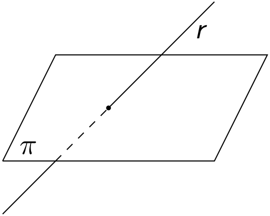



Figura: una retta e un piano incidenti hanno distanza pari a 0

# Distanza retta-piano paralleli

Data una retta $s$ e un piano $\pi$ paralleli, la distanza la calcoliamo, scegliendo noi un punto $P_0 \in s$ e applicando la formula distanza punto-piano $d(s,\pi) = d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

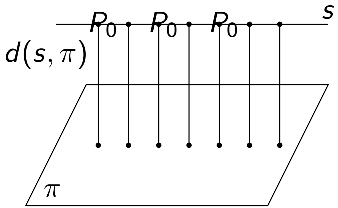



Figura: la distanza tra una retta e un piano paralleli

# Distanza tra due rette incidenti

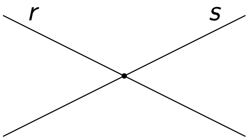



Figura: due rette incidenti hanno distanza nulla

# Distanza tra due rette parallele

Date due rette parallele $r, t$ di parametri direttori $(l, m, n)$, scriviamo l'equazione del piano ortogonale $\pi: \ lx + my + nz + d = 0$ e ne scegliamo uno di questi, ad esempio $d = 0$, quindi $\pi: \ lx + my + nz = 0$. Calcoliamo $R = \pi \cap r$ e $T = \pi \cap T$, dunque $d(r, t) = \overline{RT}$

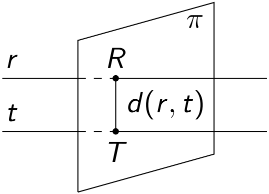



Figura: la distanza tra due rette parallele

# Distanza tra due piani incidenti

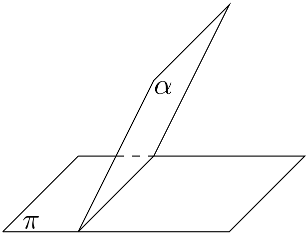



Figura: la distanza tra piani incidenti è 0

# Distanza tra due piani paralleli

Dati due piani paralleli $\pi, \beta$. In tal caso la distanza di $\beta$ da $\pi$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto $P_0 \in \beta$ scelto da noi, da $\pi$

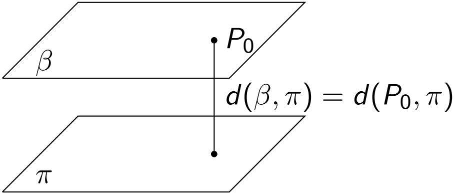
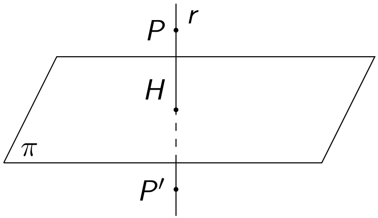



Figura: distanza tra piani paralleli

Naturalmente scambiando i ruoli di $\beta$ e $\pi$ non cambia nulla.

# Simmetrico di un punto rispetto ad un punto

# Simmetrico di un punto rispetto ad un piano



# Simmetrica di una retta rispetto ad un piano