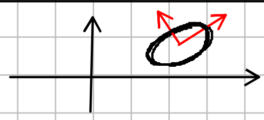
Lezione n. 25 (20-1-22)

CONICHE

Data una conica Γ irriducibile (ellisse, iperbole e parabola)

VECCHIO

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0}$$



non è centrata

NUOVO SIST. DI RIFERIM.

$C \equiv O$

$$\boxed{\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma}$$

FORMA RIDOTTA N°1

ELLISSE O IPERBOLE

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{F. CANONICA} \qquad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} X^2 + \frac{\beta}{\gamma} Y^2 = 1\right)$$

$$\left(\frac{X^2}{\underbrace{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}_{a^2}} + \frac{Y^2}{\underbrace{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)}_{b^2}} = 1\right)$$

$$\boxed{\beta Y^2 = 2\gamma X}$$

FORMA RIDOTTA N. 2

PARABOLA

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma, \det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$$P_A(T) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-T \end{pmatrix} = 0 \dashrightarrow = 0 < \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}$$

Ellisse e iperbole hanno centro di simmetria e 2 assi di simmetria

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x \qquad \beta = ? \quad \gamma = ?$$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2, \det A = 0$ Da cui

$$\boxed{\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

La parabola NON HA CENTRO DI SIMMETRIA e ha un solo asse di simmetria

CENTRO DI SIMMETRIA (Ellisse o Iperbole)

$$\begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases}$$

→ Risolvo

$$\to \begin{cases} x_c = \dots \\ y_c = \dots \end{cases}$$

$C(x_c, y_c)$ centro

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix}^t = 0$$

PROD. RIGA PER COLONNA e otteniamo la formula del centro

∄ CENTRO DI SIMMETRIA (PARABOLA)

→ ∄

ELLISSE O IPERBOLE

ASSI DI SIMMETRIA : SONO 2

se c'è il termine misto seguire qui: ↓

- Se $a_{12} \neq 0$ Dati α, β gli autovalori della sottomatrice A, Per trovare le equazioni dei due **assi** iniziamo a calcolare l'autospazio V_α:

$$V_\alpha = \{(x,y) | \ (a_{11} - \alpha)x + a_{12}y = 0\}$$

dove la sua equazione può essere vista come una retta parallela all'asse di simmetria. Da cui abbiamo la formula del suo coefficiente angolare

$$\boxed{m_1 = -\frac{(a_{11} - \alpha)}{a_{12}}}$$

coeff. ang. del mio asse n°1

Quindi il il primo ASSE ha equazione

$$\boxed{asse_1 : \ y - y_C = m_1(x - x_C)}$$

Equ. ASSE n°1

dove (x_C, y_C) sono le coordinate del centro di simmetria.

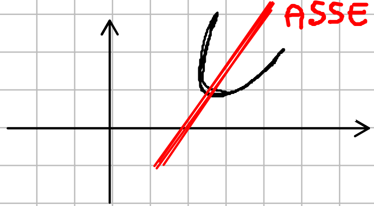
Asse n°2 passa per C ed è ⊥ all'asse n°1

$$\boxed{asse_2 : \quad y - y_c = -\frac{1}{m_1}(x - x_c)}$$

PARABOLA

ASSE DI SIMMETRIA : È UNICO

in questo corso è omesso (non si deve trovare)



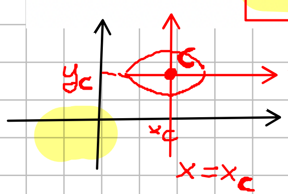
È UNICO

CASO PARTICOLARE: SE MANCA IL TERMINE MISTO NELL'EQU. DI PARTENZA → $a_{12} = 0$

- Se $a_{12} = 0$ gli assi di simmetria a_1, a_2 sono paralleli agli assi cartesiani che passano per il centro quindi le equazioni sono note:

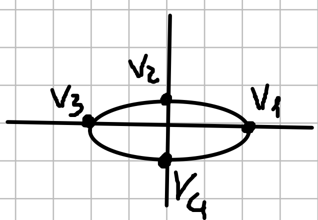
$$\boxed{a_1 : \ x = x_C; \quad a_2 : \ y = y_C}$$

Gli assi n°1 e n°2



$\boxed{y = y_c}$

VERTICI NELL'ELLISSE SONO 4



avendo gli assi di simmetria

$V_1, V_3 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{Asse n°1} \end{cases}$

VERTICE non si deve trovare in generale

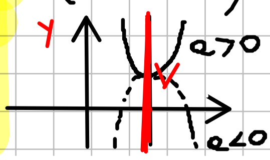
Solo nel caso particolare di parabole aventi asse di simmetria parallelo all'asse y

$$y = ax^2 + bx + c$$

(scuola)

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

ASSE : $x = x_V$



V_2, V_4 : $\begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{Asse n}^\circ 2 \end{cases}$

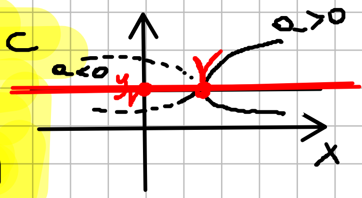
Scambiano x con y

Parabola asse di simmetria parallelo all'asse x

$$x = ay^2 + by + c$$

ASSE : $y = y_V$

$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$



Esercizio di STUDIO ELLISSE o IPERBOLE $\begin{cases}\text{Forma ridotta} \\ \text{Centro e assi} \\ \text{Vertici}\end{cases}$; STUDIO PARABOLA $\begin{cases}\text{Forma ridotta} \\ \text{Vertici solo in alcuni casi particolari} \\ \text{Asse solo in alcuni casi particolari}\end{cases}$

Consideriamo la conica di equazione:

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0.$$

Matrice simmetrica

1ª riga = 1ª colonna

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -16 \neq 0 \text{ e } |A| = 8 > 0$$

sottomatrice 2x2

$\Rightarrow$ ELLISSE

• Forma ridotta n° 1 $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

$\gamma = -\dfrac{\det B}{\det A}$ α, β sono gli autovalori di A

$\gamma = -\dfrac{-16}{8} = 2$; $P(T) = \det\begin{pmatrix} 3-T & 1 \\ 1 & 3-T \end{pmatrix} = (3-T)^2 - 1 = 9 + T^2 - 6T - 1 = 0$

$T^2 - 6T + 8 = 0$ $T = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 <\begin{matrix} 4 \; (\beta) \\ 2 \; (\alpha) \end{matrix}$ $\alpha = 2$ $\beta = 4$

Sostituiamo e la forma ridotta è $\cancel{2}X^2 + \cancel{4}^{2}Y^2 = \cancel{2}^{1} \to \boxed{X^2 + 2Y^2 = 1}$ R.

Centro e assi di simmetria:

$$B_{\{1,2\}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix}^t = 0$$

centro è (Punto proprio)

$\begin{cases} 3x_c + y_c - 2 = 0 \\ x_c + 3y_c - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_c = 2 - 3x_c \\ x_c + 6 - 9x_c - 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_c = 2 - 3x_c \\ -\cancel{8}^{2}x_c + \cancel{4}^{1} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ -2x_c + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 2x_c - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_c = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ x_c = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ R.

ASSI n° 1 : $m_\alpha = -\dfrac{(a_{11} - \alpha)}{a_{12}} = -\dfrac{(3-2)}{1} = -1$

Quindi il il primo ASSE ha equazione

$\text{asse}_1 : \; y - y_C = m_\alpha(x - x_C) \to y - \frac{1}{2} = (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$

$2y - 1 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \cancel{2}x + \cancel{2}y - \cancel{2}_{1} = 0 \rightarrow \boxed{x + y - 1 = 0}$ R. ASSE n° 1

ASSE n° 2 : $y - y_c = -\frac{1}{m_1}(x - x_c) \rightarrow y - \frac{1}{2} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$2y - \cancel{1} = 2x - \cancel{1} \qquad 2x - 2y = 0 \qquad \boxed{x - y = 0}$ R ASSE n° 2

VERTICI

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0. \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3(1-y)^2 + 3y^2 + 2(1-y)y - 4(1-y) - 4y = 0 \\ x = 1 - y \uparrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 + 3y^2 - 6y + 3y^2 + 2y^2 - 2y - 2y^2 - 4 + \cancel{4y} - \cancel{4y} = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \left\langle \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right. \\ x = 1 - y \end{cases} \quad V_1, V_3$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \\ x - y = 0 \qquad x = y \uparrow \end{cases} \quad \text{.....} \quad V_2, V_4 \text{ ---}$$

FINE CORSO

IN BOCCA AL LUPO ! :)