Lezione n° 18 (2-12-21)

Riprendiamo il POLINOMIO CARATTERISTICO definito nella lezione precedente (n° 17).

Polinomio caratteristico di A $(m \times m)$: è il determinante della matrice $A - TI$, [dove I è la matrice identica $(m \times m)$ del tipo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$] $TI = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ POL. CARATTERISTICO $P(T) = \det(A - TI)$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad A - TI = \begin{pmatrix} a_{11}-T & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-T & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-T \end{pmatrix}$

DETERMINANTE È $P(T)$

TEOREMA (SENZA DIMOSTRAZIONE)

λ è AUTOVALORE (con $\lambda \in K$) $\Longleftrightarrow P(\lambda) = 0$

λ è soluz. del Polinomio caratteristico

Riprendiamo la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ

= indica quante volte l'autovalore è soluz. del Polinomio caratteristico e si indica con m_λ

ES. $P(T) = (T^2 - 2T + 1)(T^2 - 4) = 0$

- $T^2 - 2T + 1 = 0 \rightarrow (T-1)^2 = 0 \rightarrow T = 1$ (λ) 2 volte : $m_1 = 2$
- $T^2 - 4 = 0 \rightarrow (T-2)(T+2) = 0 \rightarrow T = 2$ 1 volta : $m_2 = 1$

  $T = -2$ 1 volta : $m_{-2} = 1$

INTRODUCIAMO LA «MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ» = indica la dimensione dell'autospazio corrispondente $= \dim V_\lambda$ e si indica con g_λ

$g_\lambda = \dim V_\lambda$ = n° di incognite libere = n° di vettori che formano una base

TROVATI GLI AUTOVALORI (COME SOLUZIONE DEL P. CARATTERISTICO)

SAPENDO CHE OGNI AUTOVALORE λ HA UN AUTOSPAZIO

$$V_\lambda = \operatorname{Ker} f_\lambda = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_\lambda = \{(\quad)\}$$

IL NUMERO DI INCOGNITE LIBERE SARÀ LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

$$g_\lambda = \dim V_\lambda$$

TEOREMA (SENZA DIMOSTRAZIONE)

DATO UN ENDOMORFISMO $f: V \to V$ ($\Rightarrow A$ è una $n \times n$)

E TROVATO UN AUTOVALORE $\lambda \in K$ SI HA CHE

$$0 < \underbrace{g_\lambda}_{\text{moltepl. geom.}} \leq \underbrace{m_\lambda}_{\text{moltepl. algebrica}}$$

CASO PARTICOLARE:

SE $\boxed{g_\lambda = m_\lambda}$ PER TUTTI GLI AUTOVALORI DI f (TUTTE LE SOLUZIONI DEL P.C.) $\Rightarrow$ ALLORA L'ENDOMORFISMO SI DICE $\boxed{\text{SEMPLICE}}$

A livello formale la definizione di endomorfismo semplice è:

« $f: V \to V$ SI DICE SEMPLICE SE ESISTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI »

$\downarrow$ $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots$ ERANO LE BASI DEI SINGOLI AUTOSPAZI

SE L'UNIONE DI QUESTE BASI COPRE LA DIMENSIONE DEL DOMINIO ALLORA L'ENDOMORFISMO È SEMPLICE:

cioè se $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim V$

$\Rightarrow f$ è semplice

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Se accade che $m_\lambda = 1$ (autovalore λ contato 1 volta) posso già sapere senza fare conti quanto vale g_λ?

$$0 < g_\lambda \leq m_\lambda$$

$$0 < g_\lambda \leq 1 \Longrightarrow g_\lambda = 1$$

ESEMPIO:

$$P(T) = (T+1)(T-2)(T+3) = 0$$

$T = -1$ $\quad m_{-1} = 1$ volta $\Rightarrow g_\lambda = 1$

$T = 2$ $\quad m_2 = 1$ volte $\Rightarrow g_\lambda = 1$ $\Rightarrow f$ è semplice senza fare conti.

$T = -3$ $\quad m_{-3} = 1$ volte $\Rightarrow g_\lambda = 1$

$$P(T) = (T-3)^2(T+2) = 0 \quad \longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$T = \boxed{3}$ $\quad m_3 = 2$ DA CONTROLLARE CALCOLANDO $V_3 = \mathrm{Ker}\, f_3 =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-3 & & \\ & a_{22}-3 & \\ & & a_{33}-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$T = \boxed{-2}$ $\quad \boxed{m_{-2} = 1} \rightarrow m_{-2} = g_{-2} = 1$ OK ✓

1 autovettore $\Rightarrow V_{-2}$

confrontare

$g_3 = \dim V_3 = n^\circ$ incogn. libere $\Leftarrow V_3 = \{(\text{el. generico})\}$

BASE u_1 u_2 AUTOVETTORI

SE IL N° TOTALE DI AUTOVETTORI COINCIDE CON LA $\dim V$ ALLORA f È SEMPLICE

Definizione di matrice diagonalizzabile

UNA MATRICE $n \times n$ A si dice diagonalizzabile se esiste una matrice $(n \times n)$ invertibile P tale che

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

dove D é una matrice DIAGONALE

$$A \xrightarrow{P^{-1}AP} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} = D$$

Si dimostra che le matrici A degli ENDOMORFISMI SEMPLICI SONO TUTTE DIAGONALIZZABILE

$$A \xrightarrow{P^{-1}AP} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

1° posto

λ_1

GLI AUTOVALORI OGNUNO CON LA SUA MOLTEPLICITÀ

LA MATRICE INVERTIBILE P CHI È?

$n \times n$

P SI CHIAMA MATRICE DIAGONALIZZANTE

$$\underset{n \times n}{P} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \square & \square & & \square \end{pmatrix}$$

1° posto

COLONNE SONO GLI AUTOVETTORI $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, etc...

(« rispettare l'ordine con cui si scrivono gli autovalori nella D)

COMPITO D'ESAME 22/2/21

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente $M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix}$

con $h \in \mathbb{R}$

1) Studiare Im f e Ker f e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$ stabilire se la $M(f)$ è diagonalizzabile

Risoluzione

1) calcoliamo il rango $\rho(M(f))$

$$|M(f)| = \cancel{h(h+1)^2} + \cancel{(h+1)^2} - \cancel{h(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2} = 0$$

$$|M(f)| = 0 \quad \forall h \Rightarrow \rho < 3$$

MINORE DI ORDINE 2 $\begin{vmatrix} h+1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{vmatrix} = (h+1)^2 \neq 0$

$\boxed{h \neq -1}$ $\rho = 2 = \dim \operatorname{Im} f$

BASE Im $f = \{C_1, C_2\} = \{(h+1, 0, h+1), (1, h+1, 1)\}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$$\operatorname{Ker} f: \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ \cancel{(h+1)}y + \cancel{(h+1)}z = 0 \\ (h+1)x + y + hz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (h+1)x - z + hz = 0 \\ y = -z \\ (h+1)x - z + hz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (h+1)x + (h-1)z = 0 \\ y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{(h-1)}{(h+1)} z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \left(\frac{1-h}{h+1} z, -z, z \right) \right\}$$

$$\text{BASE } \operatorname{Ker} f = \left\{ \left(\frac{1-h}{1+h}, -1, 1 \right) \right\}$$

- LEVO LA CONDIZIONE $\boxed{h = -1}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\rho = 1$

$\dim \operatorname{Im} f = 1$

BASE $\operatorname{Im} f = \{ C_2 \} =$

$= \{ (1, 0, 1) \}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = z \\ \forall x \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, y, y) \}$$

$$\text{BASE } \operatorname{Ker} f = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 1) \}$$

EQUAZIONI CARTESIANE :

Se $h \neq -1$ $\quad \operatorname{Im} f$:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} h+1 & 0 & h+1 \\ 1 & h+1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow C_1 \\ \leftarrow C_2 \\ \\ \end{array} \qquad \boxed{\det = 0}$$

$$(h+1)^2 z + \cancel{(h+1)y} - (h+1)^2 x - \cancel{(h+1)y} = 0$$

$$\boxed{z - x = 0} \qquad \boxed{x = z}$$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$

$\ker f$:
$$\begin{cases} x = -\dfrac{(h-1)}{(h+1)} z \\ y = -z \end{cases}$$ già fatto!

$\boxed{\text{Se } h = -1}$

$\mathrm{Im} f$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \leftarrow C_2$

RIDUCO E PONGO L'ULTIMA RIGA DELLA RIDOTTA $= 0$ $= 0$

$R_2 \to R_2 - x R_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\underset{=0}{y}} & \boxed{\underset{=0}{z - x}} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

DUE EQU. CARTESIANE DI $\mathrm{Im} f$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z - x = 0\}$

$\ker f$:
$$\begin{cases} y = z \\ \forall x \end{cases}$$ già fatto!

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$

---

2) Diagonalizzabilità $\Rightarrow$ devo studiare se f è semplice

(Trovare gli autovalori come soluz. del P. caratteristico, scrivere per ognuno le loro molteplicità algebriche m_λ

e poi confrontarle con le loro molteplicità geometriche $g_\lambda = \dim V_\lambda$. Se tutti gli autovalori hanno $m_\lambda = g_\lambda \Rightarrow f$ è semplice $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile)

$h = -1$ $$A = \begin{pmatrix} 0-T & 1 & -1 \\ 0 & 0-T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO IL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P(T) = \text{DET} \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = T^2(-1-T) = 0$$

GLI AUTOVALORI SONO LE SOLUZIONI

$T^2 = 0 \rightarrow T = 0$ $\quad m_0 = 2 \quad g_0 = ?$ DA CALCOLARE

$-1-T = 0 \rightarrow T = -1$ $\quad m_{-1} = 1 \quad g_{-1} = 1$ ✓

MANCA V_{-1}

CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO CORRISPONDENTE ALL'AUTOVALORE ZERO : $V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \begin{pmatrix} a_{11}-0 & & \\ & a_{22}-0 & \\ & & a_{33}-0 \end{pmatrix}$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \forall x \quad \forall z \qquad y = z \qquad V_0 = \{(x, z, z)\}$$

$g_0 = \dim V_0 = 2$ (inc. libere)

$g_0 = m_0 = 2$

$\Rightarrow$ f allora è SEMPLICE

$\Rightarrow$ A È DIAGONALIZZABILE

SCRIVIAMO LA MATRICE D: sulla diagonale gli autovalori

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SCRIVIAMO LA MATRICE P (DIAGONALIZZANTE)

CI SERVONO GLI AUTOVETTORI:

$$V_0 = \{(x, z, z)\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{u}_1 &= (1,0,0) \\ \underline{u}_2 &= (0,1,1) \end{aligned}}$$

AI PRIMI POSTI

MANCA V_{-1} (il secondo autospazio associato a -1)

$$V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 & -1 \\ 0 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 1 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ \cancel{y = 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \qquad V_{-1} = \{(z, 0, z)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{u}_3 = (1, 0, 1)}$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & -1 \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$