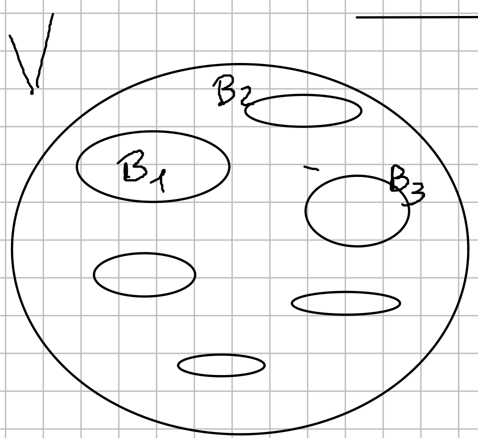
Lezione n° 10 (9-11-21)

Definizione di base

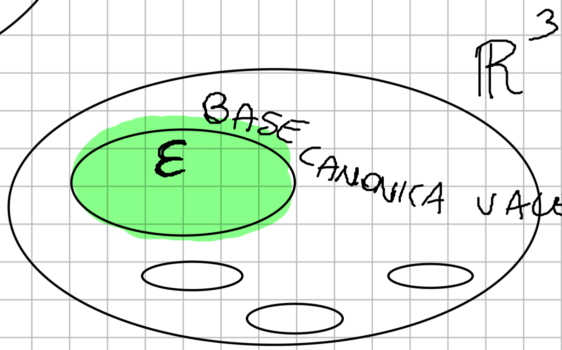
Dato un insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di un K-sp. vettoriale V
Esso si dice $\boxed{\text{BASE}}$ se preso un qualsiasi altro vettore di V che chiameremo $\underline{v} \in V$
esso si può scrivere come comb. lineare di
$v_1, \dots, v_n \Rightarrow \underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_n \underline{v}_n$ $(v_1, \dots, v_n)$ cioè sono "generatori"
e questa scrittura deve essere UNICA

$v_1, \dots, v_n$ equivale a dire che sono L. I.

Per praticità diremo che "UNA BASE È UN INSIEME DI GENERATORI L. I."



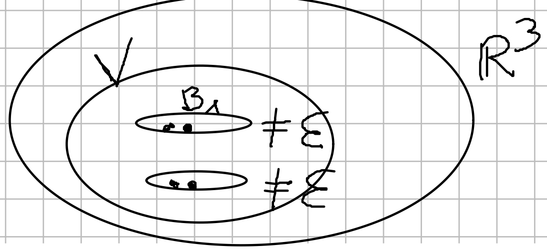
Base è un sottoinsieme di V "SPECIALE" (GENER E L.I.)
$B_1, B_2, \dots$ sono BASI



BASE CANONICA VALE SOLO PER GLI SPAZI EUCLIDEI $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$

NON VALE PER I SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$

$V \subsetneq \mathbb{R}^3$



LE BASI DI V SONO TUTTE DIVERSE DA $\mathcal{E}$

PROPRIETÀ

DATO UNO SP. VETTORIALE V AVENTE $\dim V = n$

$(\dim V = |B_1| = |B_2| = \dots = \underset{\text{nell'esempio}}{2})$

se trovo $\underline{n}$ - vettori l. i. essi formano una BASE

Se so che la $\dim V = 2$ e trovo 2 vettori l. i.
già ho trovato una base per V

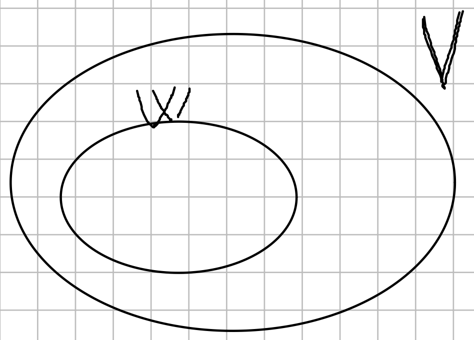
SE LA $\dim V = n \Rightarrow$ AL MAX TROVERÒ n-VETTORI L.I.

$\dim V$ = numero di vettori L. I. = RANGO DELLA MATRICE DOVE LE RIGHE SONO I VETTORI

DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO

V è un K-sp. vettor.

$W \subsetneq V$ $\quad W$ è sottosp. di V



$\dim W < \dim V$

$\Rightarrow$

Se $\dim V = n$
$\dim W = n$
NON È DETTO CHE $V = W$

INFATTI PORTIAMO UN ESEMPIO DI 2 SP. VETTORIALI CHE HANNO LA STESSA DIM. MA NON COINCIDONO

1. $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\quad \mathcal{E}$ = BASE CANONICA $\{(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)\}$

2. $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = 0\} \rightsquigarrow \dim V = 3$

EQU. CARTESIANA

$\Downarrow$

$x = y + t$

$V = \{(\overset{x}{\underline{y+t}}, y, z, t)\}$ = EL. GENERICO

3 incognite INDIPENDENTI O LIBERE

x DIPENDE DA Y E DA t

VADO A SCRIVERE UNA BASE

$(\underline{0+1}, 1, 0, 0) = v_1 = (1, 1, 0, 0)$

$(0, 0, 1, 0) = v_2 = (0, 0, 1, 0)$

$(1, 0, 0, 1) = v_3 = (1, 0, 0, 1)$

HO FINITO

BASE B_1 $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$|B_1| = 3 \Rightarrow \dim V = 3$$

$\mathbb{R}^3$ e V hanno la stessa dimensione ma sono TOTALMENTE DIVERSI

SE AGGIUNGIAMO CHE $W \subseteq V$

AVERE LA STESSA DIMENSIONE IN TAL CASO IMPLICA ESSERE UGUALI

$$\begin{cases} \dim W = n \\ \dim V = n \\ W \subseteq V \end{cases} \Rightarrow W \equiv V$$

CHIUDIAMO IL CERCHIO :

EQUAZ. CARTESIANA

↓

ELEM. GENERICO

↓

BASE

PRIMA CON L'ESEMPIO :

Dato uno spazio vettoriale V fissato con una sua base

$$B_1 = \{v_1 = (1, -1, 0) \quad v_2 = (0, 2, 2)\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$r = \rho = 2$ L.I.

TROVARE L'EQUAZ. CARTESIANA DI V

RISOLUZIONE

$$\begin{array}{c} v_1 \to \\ v_2 \to \\ v \to \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ \boxed{x & y & z} \end{pmatrix} \in V$$

BASE

DEVE ESSERE COMB. LINEARE DELLA BASE

DIPENDENTE

IL RANGO È 2

$\Downarrow$

DETERM.$_{3\times3}$ SARÀ $= 0$

CALCOLIAMO IL DETERMINANTE LO PONIAMO UGALE A ZERO ED ESSO SARÀ L'EQU. CARTES

$$\boxed{\_\,x\_ \quad \_\,y\_ \quad z} = 0$$

quello che stavo cercando

$V \Rightarrow B_1 = \{(0,-1,2,3) \quad (1,1,0,1)\} \subsetneq \mathbb{R}^4$

TROVARE L'EQU. CARTESIANA

RISOLUZIONE

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z^* & t \end{pmatrix}$$

RANGO DEVE ESSERE 2

$r = 2$

LA RIDUCO $\quad R_3 \to R_3 - \frac{z}{2} R_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ x^* & y - \frac{z}{2} & 0 & t - \frac{3z}{2} \end{pmatrix}$$

EL. SPECIALE DELLA 2° RIGA

$R_3 \to R_3 - \frac{x}{1} R_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \underbrace{y-\frac{z}{2}-x}_{=0} & 0 & \underbrace{t-\frac{3z}{2}-x}_{=0} \end{pmatrix}$$

Ridotta

ULTIMA RIGA DEVE ANNULLARSI TUTTA

$$\begin{cases} y-\frac{z}{2}-x=0 \\ t-\frac{3z}{2}-x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y-z-2x=0 \\ 2t-3z-2x=0 \end{cases}$$

$$V=\{(x,y,z,t) \mid 2y-z-2x=2t-3z-2x=0\}$$