Lezione n. 13 (16-11-21)

CONTINUAZIONE

Teorema di Rouché-Capelli n. 1 (vd lezione n. 12)

Enunciato

"Dato un sist. lineare (m equ. in n incognite)

SISTEMA AMMETTE SOLUZ. $\Leftrightarrow$ $\rho(A) = \rho(A, B)$ "

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ (LEZ. 12) Ip. Sist. ammette soluzioni Ts $\rho(A) = \rho(A, B)$

$$V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n, B}_{\text{colonne di } (A,B)}) \qquad W = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n}_{\text{colonne di } A})$$

Per ipotesi il sistema ammette almeno una soluz. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $\Rightarrow$
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

C_1

$$\begin{cases} a_{11} \alpha_1 + \dots + a_{1n} \alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} \alpha_1 + \dots + a_{mn} \alpha_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{C_1} \alpha_1 + \dots + \underline{C_n} \alpha_n = \underline{B}}$$

$\Rightarrow$ B quindi è comb. lin. delle colonne $C_1, \dots, C_n$

$$\Rightarrow V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n, \cancel{B}}_{\text{colonne di } (A,B)}) \qquad W = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n}_{\text{colonne di } A})$$

si può eliminare

stessa matrice

$\Rightarrow$ $V = W$ $\Rightarrow$ $\dim V = \dim W$ $\Rightarrow$ $\rho(A, B) = \rho(A)$

$\Leftarrow$ COND. SUFFICIENTE (DA QUI È NUOVO)

Ip. $\rho(A,B) = \rho(A)$ Ts. SIST. AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE

① • dim V = dim W ← Ip.

\+ Inoltre per costruzione

② • $W \subseteq V$

$\Rightarrow V \equiv W$

Ricordiamo chi erano

$V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n, B}_{\text{colonne di } (A,B)})$ $W = \mathcal{L}(\underbrace{C_1, \dots, C_n}_{\text{colonne di } A})$

$\Downarrow$

Per avere l'uguaglianza $V = W$ vuol dire che

B si può eliminare $\Rightarrow$ B DEVE ESSERE COMB. LINEARE DELLE COLONNE $C_1, \dots, C_n$

$$\Rightarrow \boxed{B = \beta_1 \cdot C_1 + \beta_2 C_2 + \dots + \beta_n C_n}$$

coeff. della comb. lineare

(è la def. di SOLUZIONE)

$\Downarrow$

$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ è SOLUZIONE

$\Downarrow$

C.V.D. $\square$

Teorema di R. C. n° 2

Dato un sist. lineare possibile (ammette almeno una soluzione) allora possiamo sapere quante incognite libere avremo:

LE INCOGNITE LIBERE SONO $\boxed{n - \rho}$

n° incognite   RANGO

2° MODO DEL T. di R.C. N° 2

IL SISTEMA AMMETTE

$$\infty^{n-\rho} \text{ SOLUZIONI}$$

$\infty^0 \rightsquigarrow$ 1 SOLA SOLUZIONE (SISTEMA DETERMINATO) e nessuna incogn. libera

(SIST. INDETERMINATO)

$\infty^1 \rightsquigarrow \infty$ soluzioni con 1 incognita libera

$\infty^2 \rightsquigarrow \infty$ soluzioni con 2 " libere

⋮

etc...

DIMOSTRAZIONE OMESSA

CASO PARTICOLARE $m = n$ "SIST. QUADRATI"

A É QUADRATA

$(C_1 \dots C_m)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad B$$

3 equazioni in 3 incognite "SIST. QUADRATO"

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice incompleta 3×3

CALCOLO IL $\det A = 1 + 3 + 4 = 8 \neq 0 \to \rho(A) = 3$

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{8}_{\,4}} \quad \text{dove } B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_1 = 2 + 8 = 10$$

$$\boxed{x_1 = 5/4}$$

$$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} \quad \text{dove} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det B_2 = 12$$

$$\boxed{x_2 = \frac{3}{2}}$$

$$x_3 = \frac{\det B_3}{\det A} = -\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}} \quad \text{dove} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B_3 = -6$$

$$\boxed{x_3 = -\frac{3}{4}}$$

R. $S = \left\{ \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$ ZERO INCOGN. LIBERE

$\infty^{n-\rho} = \infty^{3-3} = \infty^{0}$ → 1 SOLA SOLUZIONE (SIST. DETERMINATO)

Se il $\det A \neq 0$ ⟹ LA REGOLA DI CRAMER È APPLICABILE

Se il $\det A = 0$ ⟹ LA REGOLA NON È APPLICABILE

ENUNCIATO DEL TEOREMA DI CRAMER

"Dato un sist. lineare di n equ. in n incognite

il sistema è determinato ⟺ $\det A \neq 0$

e la soluzione è data dalla seguente formula

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|B_1|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{|B_n|}{|A|} \end{cases}$$

$|B_1|$ det B_1, $|A|$ det A, $|B_n|$ det B_n, $|A|$ det A

dove $B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & & a_{nn} \end{pmatrix}$

colonna i-esima

$i = 1, \dots, n$