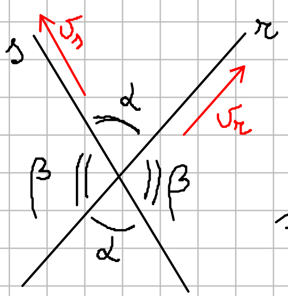
Lezione n° 21 (21-12-21)

9.00 Giovedì 23/12 RICEVIMENTO

15.30 Martedì 4/1/22 RICEVIMENTO (NUOVO ANNO)

ANGOLO TRA DUE RETTE r ed s



- v_r = vettore direttivo di r
- v_s = " " di s

$(\alpha+\beta=180°)$

$\beta = 180 - \alpha = 150°$

PRODOTTO SCALARE tra due vettori:

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \underbrace{|\underline{v}|}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{|w|}_{\text{modulo}} \cdot \cos\alpha$

"si legge v scalare w"

Qui rette e non vettori ??

l'angolo formato dalle due rette $\widehat{rs}$ è lo stesso di quello formato dai due vettori direttivi $\widehat{v_r v_s}$

PROD. SCALARE TRA I VETTORI DIRETTIVI

- $v_r = (\ell, m)$
- $v_s = (\ell', m')$

$\underline{v_r} \cdot \underline{v_s} = \overset{\text{modulo}}{|v_r|} \cdot \overset{\text{modulo}}{|v_s|} \cdot \cos\alpha \Rightarrow |v_r||v_s|\cos\alpha = \underline{v_r} \cdot \underline{v_s}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_r \cdot v_s}{\underbrace{|v_r| \cdot |v_s|}_{\text{modulo}}} = \frac{(\ell, m)\cdot(\ell', m')}{\sqrt{\ell^2+m^2}\cdot\sqrt{\ell'^2+m'^2}} =$$

$1 \cdot 1' + 2 \cdot 2'$

$$= \frac{\ell\ell' + mm'}{\sqrt{\ell^2+m^2}\cdot\sqrt{\ell'^2+m'^2}} \quad ; \quad \hat{\alpha} = \underset{\cos^{-1}}{\arccos}\left(\frac{\ell\ell'+mm'}{\sqrt{\ell^2+m^2}\,\sqrt{\ell'^2+m'^2}}\right)$$

ESEMPIO

Date due rette calcolare l'angolo che esse formano

- $r: \ 2x - y + 3 = 0$ $\qquad s: \ x - y + 5 = 0$

TROVARE $\alpha = ?$

RISOLUZIONE

TROVARE PER PRIMA COSA v_r E v_s (vettori direttivi o par. direttori)

$r \begin{cases} 2x' - y' + \cancel{3t'} = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 2x' \\ t' = 0 \end{cases} \quad P^r_\infty(x', 2x', 0) = (1, 2, 0) \rightarrow v_r = (\overset{\ell}{1}, \overset{m}{2})$

$$s\begin{cases} x'-y'+\cancel{5t'}=0\\ t'=0\end{cases} \qquad \begin{cases} y'=x'\\ t'=0\end{cases} \qquad P_\infty^{s}(x',x',0)=(1,1,0)\to v_s=(\underset{l'}{1},\underset{m'}{1})$$

FORMULA DEL

$$\cos\alpha=\frac{l\,l'+m\,m'}{\sqrt{l^2+m^2}\cdot\sqrt{l'^2+m'^2}}=\frac{1\cdot 1+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\;\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt5\,\sqrt2}$$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$; RAZIONALIZZIAMO $\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=0{,}0948$

$\boxed{\alpha=\arccos(0{,}0948)}=\underline{\underline{84{,}5}}$

- $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ (ANG. NOTEVOLI) $\to\ \alpha=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$
- $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt3}{2}$ " $\to\ \alpha=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$
- $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt2}{2}$ " $\to\ \alpha=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$
- $\cos\alpha=1$ " $\to\ \alpha=0^\circ$
- $\cos\alpha=0$ " $\to\ \alpha=90^\circ$

Ripassiamo insieme alcune formule utili

- DISTANZA TRA DUE PUNTI:

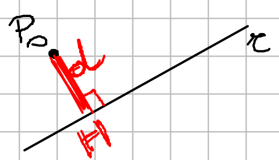
$P_1(x_1,y_1)\qquad P_2(x_2,y_2)\qquad \overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

- PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

- DISTANZA PUNTO-RETTA: d

Data la retta di equazione: $ax+by+c=0$; dato $P_0(x_0,y_0)\notin r$



$$d=\overline{PH}=\frac{|a x_0+b y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(slide 36 x10)

FASCIO DI RETTE

Definizione "Generale": date due rette r ed s si dice FASCIO GENERATO DA r E DA s LA COMBINAZIONE LINEARE TRA LE DUE RETTE, CIOÈ

$$\underset{\text{fascio}}{\mathcal{F}} : \boxed{\lambda \cdot r + \mu \cdot s = 0}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

significa che λ e μ contemporan. zero non possono essere (Se $\lambda = 0$ $\mu \neq 0$ e viceversa)

$\lambda = 0$ $\mu = 0$ NON SI VERIFICHERÀ MAI!

EX:

$r: x - y + 4 = 0$

$s: x + y = 0$

$$\mathcal{F}: \lambda(x-y+4) + \mu(x+y) = 0$$

λ, μ PARAMETRI SONO DUE (TROPPO COMPLICATO)

PASSIAMO AD UN PARAMETRO SOLO

COME ???

DIVIDO TUTTO PER λ (ovviamente devo fare la CONDIZIONE $\lambda \neq 0$ ********)

$$\frac{\cancel{\lambda}(x-y+4)}{\cancel{\lambda}} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{K}(x+y) = 0$$

(chiamo $K = \frac{\mu}{\lambda}$)

$$(x-y+4) + K(x+y) = 0$$

$K \in \mathbb{R}$ (UN PARAMETRO SOLO)

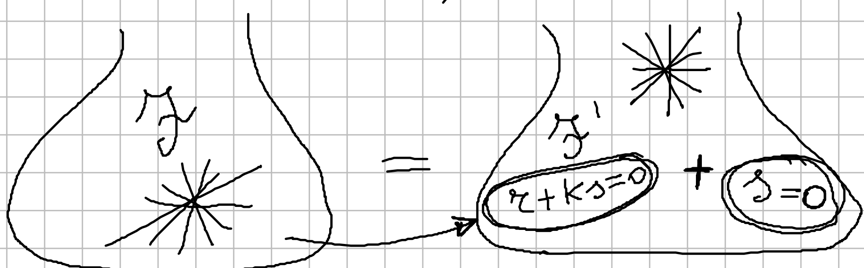
$$\mathcal{F}: \lambda(x-y+4) + \mu(x+y) = 0 \xrightarrow{\lambda \neq 0} \mathcal{F}' \quad x-y+4+K(x+y) = 0$$

Levo la condizione

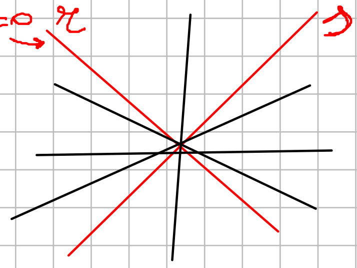
$\lambda = 0$ sostituiamo: $\cancel{0(x-y+4)} + \underset{\neq 0}{\mu}(x+y) = 0$ DIVIDO PER μ $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\mu}(x+y)}{\cancel{\mu}} = 0 \rightarrow (x+y) = 0$$

È LA SECONDA RETTA GENERATRICE DEL FASCIO $\mathcal{F}$



$$\overbrace{x - y + 4}^{r} + k\,(\overbrace{x + y}^{s}) = 0 \qquad \lambda \neq 0$$



AL VARIARE DI K TROVIAMO UNA RETTA DIVERSA

$k=0 \quad x - y + 4 + 0\cancel{(x+y)} = 0 \rightarrow r$

$k=1 \quad x - \cancel{y} + 4 + x + \cancel{y} = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \quad \neq s$

$\nexists$ K CHE MI RESTITUISCE s

IL FASCIO CON UN PARAMETRO NON POSSIEDE LA RETTA s

PERCHÉ SI OTTIENE PER $\lambda = 0$

TROVARE LA RETTA DEL FASCIO CHE PASSA PER IL PUNTO

$A = (1, 3)$

$$x - y + 4 + k(x+y) = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$1 - 3 + 4 + k(1+3) = 0$$

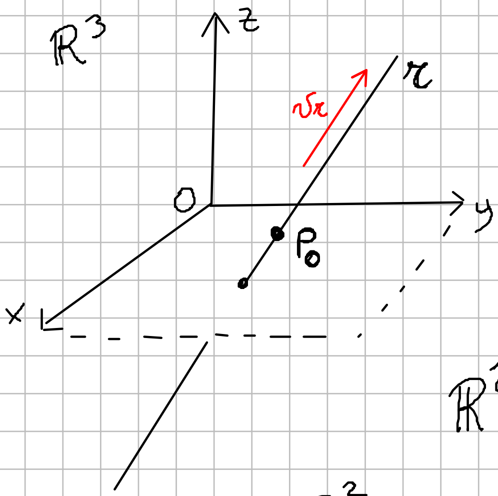
$$2 + 4k = 0 \rightarrow 4k = -2 \qquad k = -\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{k = -\frac{1}{2}} \rightarrow \quad x - y + 4 - \frac{1}{2}(x+y) = 0 \qquad x - y + 4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$

$\rightarrow 2x - 2y + 8 - x - y = 0 \rightarrow \boxed{x - 3y + 8 = 0}$ R.

NOTA BENE: SE PER QUALCHE MOTIVO NON TROVO K (ok=3) POTREBBE AVERE I REQUISITI CERCATI LA 2° GENERATRICE $(x+y)=0$ DATO CHE ESSA NEL FASCIO NON C'È!

RETTA NELLO SPAZIO E NON PIÙ SUL PIANO



• VETTORE DIRETTIVO $v_r = (l, m, n)$

Generalizziamo quello detto sul piano del PIANO $\mathbb{R}^2$

le 3 tecniche della retta diventano 2 NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$
1. Retta per 2 punti
2. Vettore direttivo PARALLELO v_r, P_0
3. ~~VETTORE ORTOGONALE u, P_0~~ SPARISCE!

$\mathbb{R}^3$
1. Retta per 2 punti
2. Vettore DIRETTIVO v_r, P_0

$\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ 1. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$; $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

2. $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$; $P_0(x_0, y_0, z_0)$; $v_r = (l, m, n)$.

$1°$ FORMULA: È LA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI IN $\mathbb{R}^3$

$2°$ FORMULA: È LA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO P_0 E AVENTE PARAMETRI DIRETTORI $\underline{v}_r = (l, m, n)$ IN $\mathbb{R}^3$

PER CASA SCRIVERE LA DIMOSTRAZ. SIA DELLA $1°$ CHE DELLA $2°$ FORMULA IN $\mathbb{R}^3$ (SISTEMARE CON LA z QUELLA FATTA IN $\mathbb{R}^2$)

ESEMPIO: DATO UN PUNTO $A = (\overset{x_0}{1}, \overset{y_0}{0}, \overset{z_0}{-2})$ SCRIVERE LA RETTA PASSANTE PER "A" E AVENTE PARAMETRI DIRETTORI $\underline{v} = (\underset{l}{2}, \underset{m}{0}, \underset{n}{3})$

$2°$ $$\frac{x-x_0}{l = 2} = \frac{y-y_0}{m = 0} = \frac{z-z_0}{n = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{x-1}{2}}_{I} = \underbrace{\frac{y-0}{0}}_{II} = \underbrace{\frac{z-(-2)}{3}}_{III}} \Rightarrow \begin{cases} I = II \\ II = III \end{cases} \quad \left(\text{OPP} \begin{cases} I = II \\ I = III \end{cases} \right)$$

SISTEMA EQUIVALENTE
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} \to 0 = 2y \to \cancel{2}y = 0 \to y = 0 \\ \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3} \end{cases}$$
RITROVO $y=0$ E NON VA BENE! → OPTARE PER L'ALTRO SIST. $\begin{cases} I = II \\ I = III \end{cases}$

$2°$ SISTEMA EQUIVALENTE
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ 3(x-1) = 2(z+2) \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ 3x - 3 = 2z + 4 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

R. $r \begin{cases} y = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$ 2 equazioni e non più una sola!!! $\mathbb{R}^3$

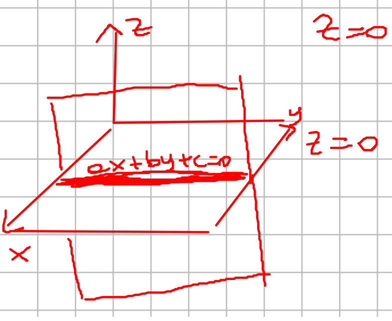
PERCHÉ?

LA RETTA HA SEMPRE AVUTO 2 EQUAZIONI

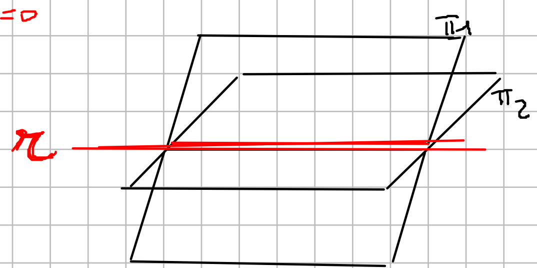
r $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} ax + by + c = 0 & \text{nel piano } Oxy \\ z = 0 \end{cases}$

2 equazioni

r $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$



$z = 0 \cap ax + by + c = 0$



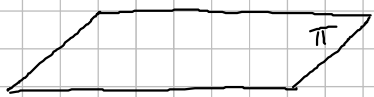
- π_1 piano
- π_2 piano

$\pi_1 \cap \pi_2 =$ RETTA r

PIANO : $ax+by+cz+d=0$

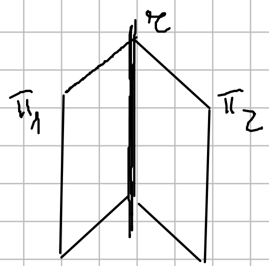
Esempio:

$x-y+z-3=0$ (è un piano)



(non è retta!!!)

La retta nello spazio è data dall'intersezione di 2 piani $r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \pi_1 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \pi_2 \end{cases}$

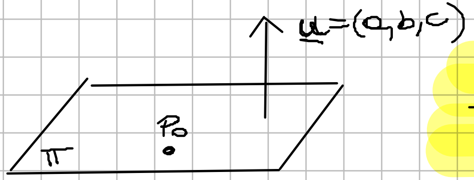


I PARAMETRI DIRETTORI DEL PIANO SONO DATI DALLA FORMULA $\underline{u}=(a,b,c)$

coeff. delle incognite

$\pi: \underset{a}{1}x-\underset{b}{1}y+\underset{c}{1}z-3=0 \rightarrow \underline{u}=(1,-1,1)$

$\pi': x-2y+3z=0 \rightarrow \underline{u}=(1,-2,3)$



$\underline{u}$ È ORTOGONALE AL PIANO π

VETTORE "PARAMETRI DIRETTORI"

"Quindi dato un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e un vettore $\underline{u}=(a,b,c)$ esiste uno e un solo piano passante per P_0 e ortogonale ad $\underline{u}=(a,b,c)$"

DIMOSTRIAMO PERCHÉ IL PIANO HA EQUAZIONE $ax+by+cz+d=0$ DOPO LE VACANZE...

BUONE FESTE!