Lezione n. 8 (28-10-21)

Grandezza **scalare**

⇓

NUMERO

DI SOLITO $a \in \mathbb{R}$

IN GENERALE DIREMO

$a \in K$ (campo)

⇓

a $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Q}$

Grandezza **vettoriale**

⇓

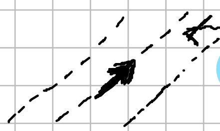
VETTORE

È CARATTERIZZATO DA

si legge "MODULO"

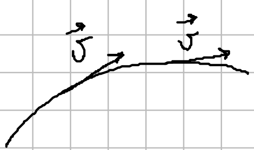
$|\vec{v}|$

- MODULO = N° POSITIVO = LUNGH. DEL VETTORE
- DIREZIONE = RETTA SU CUI GIACE IL VETTORE
- VERSO = ↗ FRECCIA

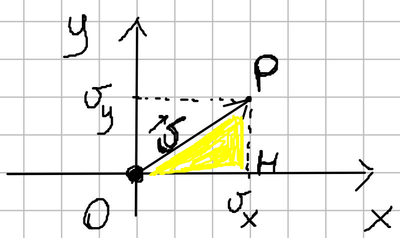


FORZA $\vec{F}$ è un vettore

VELOCITÀ



COME SI CALCOLA IL MODULO DI UN VETTORE:



$O\vec{x}\vec{y}$

$P(v_x, v_y)$ COORDINATE DI P

I QUADRANTE $v_x \geq 0$ $v_y \geq 0$

II Q. $v_x < 0$ $v_y \geq 0$

III Q $v_x \leq 0$ $v_y \leq 0$

IV Q. $v_x \geq 0$ $v_y \leq 0$

$\overset{\triangle}{OPH}$ TRIANGOLO RETTANGOLO ⇒ APPLICHIAMO PITAGORA

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{HP}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ⇒ $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

(ipotenusa $= \sqrt{(\text{cateto}_1)^2 + (\text{cateto}_2)^2}$)

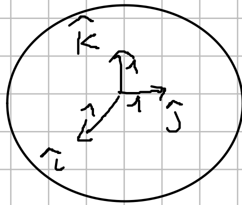
⇓

SI PUÒ GENERALIZZARE in $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$

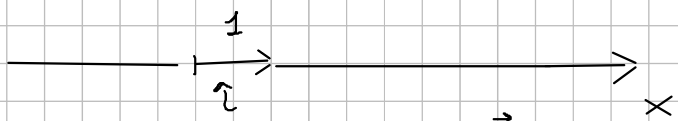
MODULO $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

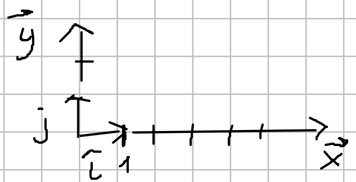
dove $P = (v_x, v_y, v_z)$

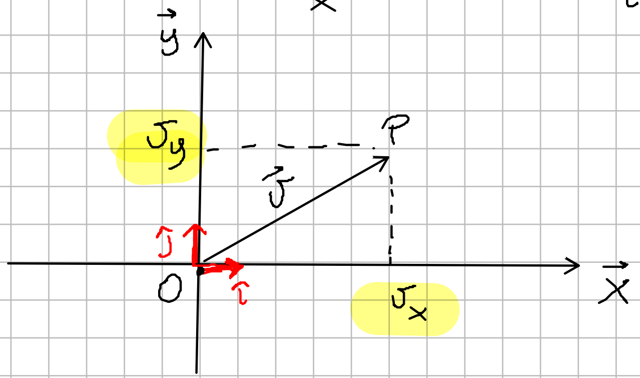
VERSORE $\hat{i}$, VERSORE $\hat{j}$, VERSORE $\hat{k}$



VERSORE = VETTORE UNITARIO (MODULO 1)







$\vec{v} = \vec{OP}$

SE $\boxed{P \equiv O}$

VETTORE NULLO :
- MODULO = NULLO — LUNGHEZZA = 0
- DIREZIONE = NON C'È = NON È DEFINITA
- VERSO = " "

$\vec{O}$ = (PUNTO)

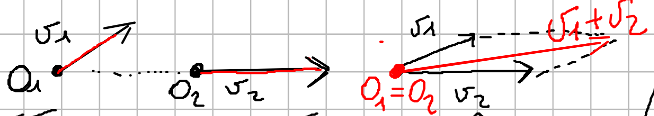
OPERAZIONI CON I VETTORI

1) SOMMA $\Downarrow$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

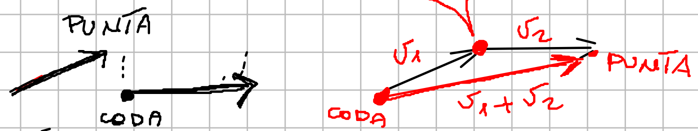
2) DIFFERENZA $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$

3) PROD. DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

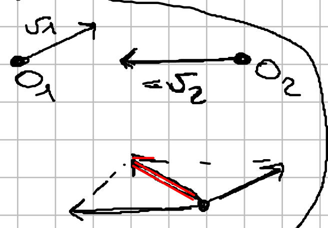
- REGOLA PARALLELOGRAMMO

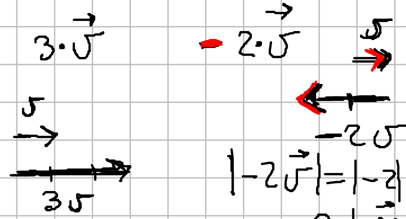


- METODO PUNTA - CODA



- SOMMA TRA COMPONENTI





$3 \cdot \vec{v}$ $-2 \cdot \vec{v}$

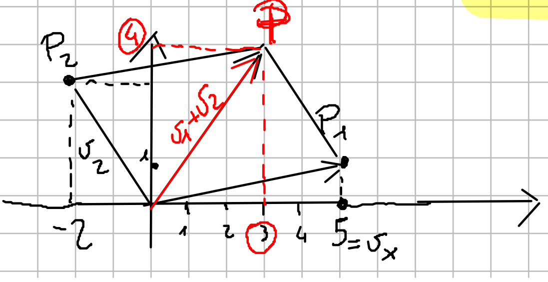
$|-2\vec{v}| = |-2|\,|\vec{v}| = 2\,|\vec{v}|$

vettore = direz. di v se il numero è positivo è lo stesso verso (altrimenti è opposto)

$|3\vec{v}| = |3| \cdot |\vec{v}|$

$\vec{v}_1 = \vec{OP}_1 \Rightarrow P_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ "COMPONENTI DI $\vec{v}_1$" = COORD. DI P_1 (punta)

$\vec{v}_2 = \vec{OP}_2 \Rightarrow P_2 = (v_{2x}, v_{2y})$ "COMPONENTI DI $\vec{v}_2$" = COORD. DI P_2 (punta)



$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x}, v_{1y}) \oplus (v_{2x}, v_{2y}) = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y})$

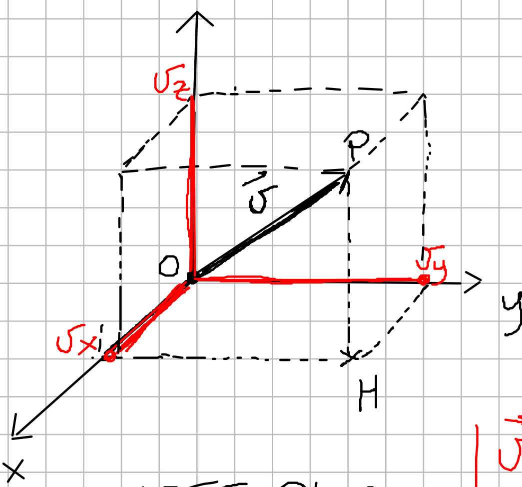
NELL'ESEMPIO RICAVIAMO DAL GRAFICO LE COMPONENTI

$\vec{v}_1 = (5, 1)$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = (-2, 3)$

CALCOLARE $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (5,1) \oplus (-2,3) = (3, 4)$

ADESSO CALCOLIAMO IL MODULO DEL VETTORE SOMMA

$\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{\vec{w}} = (3, 4) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$



$P(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

DATI 2 VETTORI :

$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$

$\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$

LA SOMMA $\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z} + v_{2z})$

(FUNZIONA PURE PER LA DIFFERENZA
$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_{1x} - v_{2x}, v_{1y} - v_{2y}, v_{1z} - v_{2z})$)

3) PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

$a \in K$ $\quad$ $\vec{v} \in V$ (insieme di vettori) $\qquad$ $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$

$a \cdot \vec{v} = a(v_x, v_y) = (a v_x, a v_y)$

In 3 dimensioni

$a \cdot \vec{v} = a(v_x, v_y, v_z) = (a v_x, a v_y, a \cdot v_z)$

ESEMPIO

DATO UNO SCALARE $(\frac{1}{3} = a)$ e UN VETTORE $\vec{v}$ $(\vec{v} = (2, -4))$

CALCOLARE $a \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} \cdot (2, -4) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

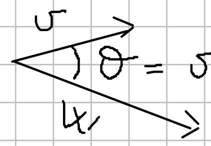
4) PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI

5) PRODOTTO VETTORIALE TRA 2 VETTORI

PRODOTTO SCALARE

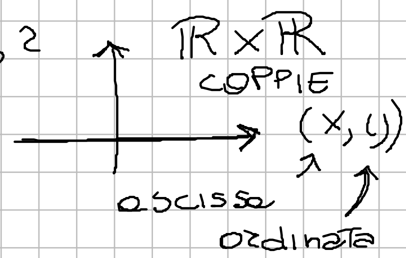
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \underbrace{|\vec{v}|}_{pos.}\cdot\underbrace{|\vec{w}|}_{pos.}\cdot\cos \underbrace{\widehat{vw}}_{\theta\ \pm}$$

NUMERO (prodotto di 3 numeri)



si legge " $\vec{v}$ scalare $\vec{w}$ "

PRODOTTO SCALARE CON LE COMPONENTI IN $\mathbb{R}^2$



$\vec{v} = (v_x, v_y)$ $\qquad$ $\vec{w} = (w_x, w_y)$

CALCOLARE $\vec{v}\cdot\vec{w}$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x, v_y)\cdot(w_x, w_y) = \underline{v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y}$$

ESEMPIO

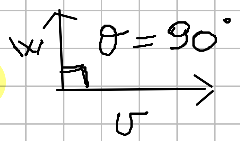
Dati due vettori $\vec{v}, \vec{w}$ calcolare $\vec{v}\cdot\vec{w}$

- $\vec{v} = (1, -2)$ $\qquad$ $\vec{w} = (0, -3)$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (1, -2)\cdot(0, -3) = 1\cdot 0 + (-2)(-3) = +6$$

R. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 6$

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ:



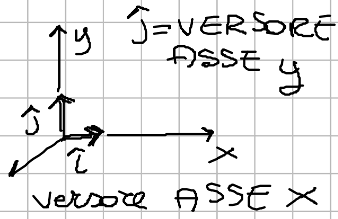
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\underbrace{\cos 90°}_{0} = 0$$

$$\boxed{\text{Se } \vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0}$$

Si dimostra pure il viceversa

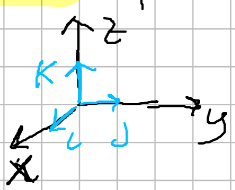
$$v \perp w \iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

FORMULA $\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)$ IN $\mathbb{R}^3$



Prodotto scalare tra 2 versori qualsiasi:

$\hat{i}\cdot\hat{j} = |i|\cdot|j|\cdot\cos 90 = 0$



$\hat{i}\cdot\hat{k} = 0$

$\hat{j}\cdot\hat{k} = 0$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \underset{1}{|\hat{\imath}|}\,\underset{1}{|\hat{\imath}|}\cdot\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \quad ; \quad \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=1 \quad ; \quad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

---

5) PRODOTTO VETTORIALE TRA 2 VETTORI (DÁ UN VETTORE)

$\vec{v} \wedge \vec{w} \longrightarrow$ VETTORE

"si legge $\vec{v}$ vettore $\vec{w}$"

(alcuni lo indicano $\vec{v} \times \vec{w}$)

- MODULO $= |v|\cdot|w|\cdot \operatorname{sen}\theta$
- DIREZ. É PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DAI DUE VETTORI
- VERSO É DATO DALLA MANO DESTRA (POLLICE LUNGO v, INDICE LUNGO w MEDIO MI DÁ IL VERSO)

PRODOTTO VETTORIALE CON LE COMPONENTI

$$\vec{v}\wedge\vec{w} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$