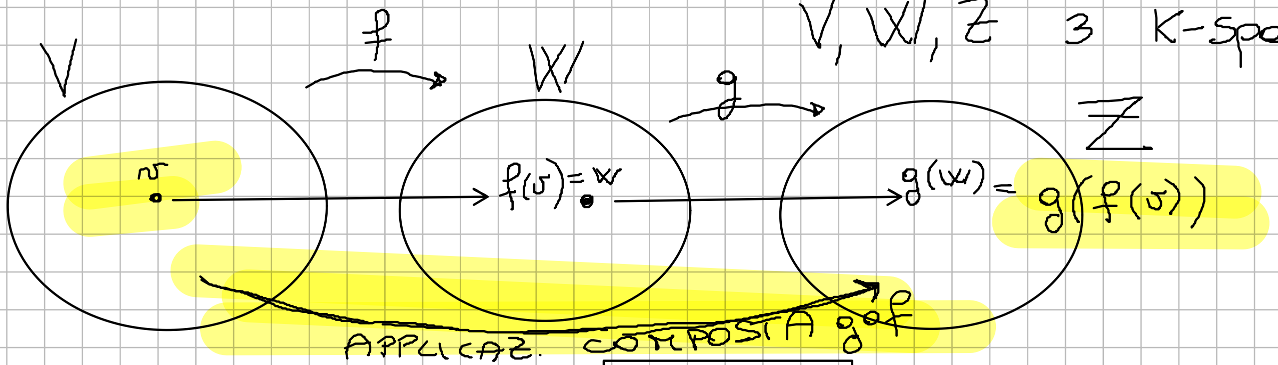
Lezione n° 16 (25-11-21)

APPLICAZIONE COMPOSTA TRA DUE APPLICAZIONI LINEARI

Date due applicazioni lineari

$$f: V \to W \qquad g: W \to Z$$

V, W, Z 3 K-spazi vettoriali



$$v \longmapsto \boxed{g(f(v))}$$

SI SCRIVE $g \circ f$ (PRIMA SI APPLICA f E POI g)

SI LEGGE "g composto f"

$$g \circ f : V \to Z$$

COME CALCOLARE NEI NOSTRI ESERCIZI:

1° MODO:

Dato che ogni applicazione lineare è dotata di una matrice (risp. alle basi canoniche) l'applicazione composta è data dal «PRODOTTO RIGA PER COLONNA» TRA LE DUE MATRICI

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$$

2° MODO:

"MANUALMENTE TRAMITE LE LEGGI DI f E DI g"

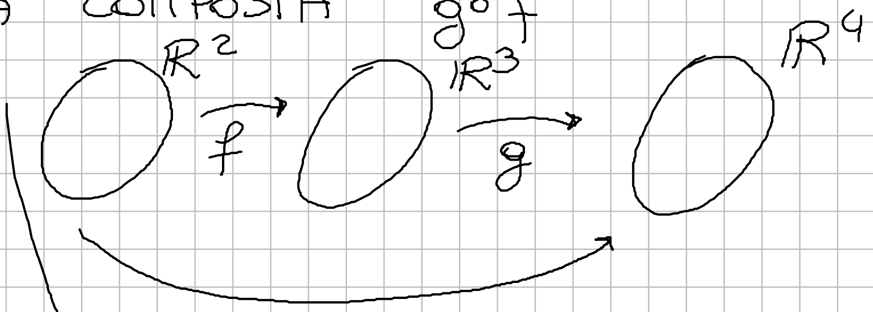
Esempio

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$\boxed{f(x,y) = (2x-y,\ x+y,\ x)} \qquad \boxed{g(x,y,z) = (2x,\ x-z,\ y,\ z)}$$

LA LEGGE DELLA COMPOSTA $g \circ f$

$g \circ f$:



$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$

$$g \circ f(x,y) = g\left(f(x,y)\right) = g\Big(\underbrace{\overset{1°}{2x-y}}_{\text{NUOVA } x},\ \underbrace{\overset{2°}{x+y}}_{\text{NUOVA } y},\ \underbrace{\overset{3°}{x}}_{\text{NUOVA } z}\Big) =$$ dobbiamo applicare la legge della g

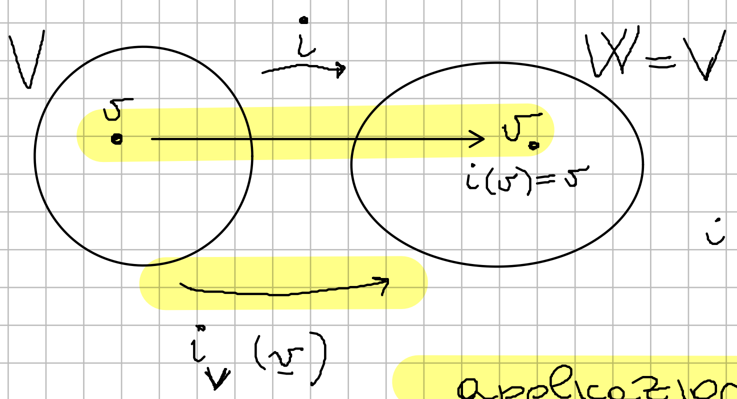
$$\boxed{g(x,y,z) = (2x,\ x-z,\ y,\ z)}$$

doppio della 1° comp. — 1°−3° — 2° — 3°

$$= \left(2(2x-y),\ 2x-y-x,\ x+y,\ x\right)$$

$$\boxed{g \circ f(x,y) = (4x-2y,\ x-y,\ x+y,\ x)}$$ LEGGE DELLA COMPOSTA

APPLICAZIONE IDENTICA (O IDENTITÀ) : $(i : V \to V)$



$i(x,y) = (x,y)$

$i(x,y,z) = (x,y,z)$

etc...

applicazione identica

$f \circ i = f$ $i \circ f = f$

ISOMORFISMO TRA 2 SPAZI VETTORIALI : f

$f : V \to W$ V, W due K-sp. vettoriali

se è iniettiva e suriettiva

$(\ker f = \{0\})$ $(\operatorname{Im} f = W,\ \dim \operatorname{Im} f = \dim W)$

Se è isomorfismo allora f è INVERTIBILE e nasce «APPLICAZ. LINEARE INVERSA f^{-1}»

OVVIAMENTE LA MATRICE DELLA APPL. LIN. INVERSA f^{-1} È LA MATRICE INVERSA DELLA f

$$M(f^{-1}) = A^{-1} = M(f)^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ij}^{T} = \frac{1}{\det A} A_a \quad \text{matrice aggiunta}$$

esiste A^{-1} solo se f è isomorfismo

(solo se $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$)

RANGO È MAX $\Rightarrow \det \neq 0$

COME SI TROVA LA MATRICE ASSOCIATA ALLA f

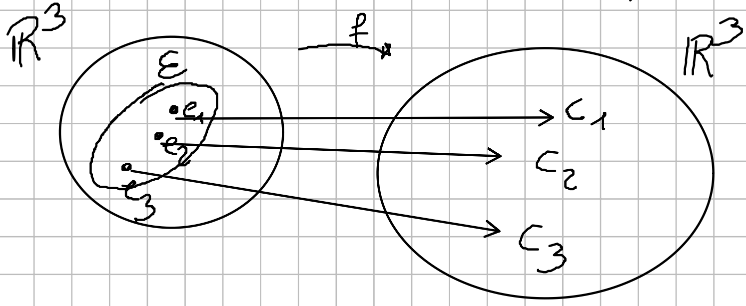
1°) È ASSEGNATA LA LEGGE DELLA f

(es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (2x, y-z, x-z)$)

$M(f) =$ LE COLONNE SONO LE IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE CANONICA del dominio $\mathbb{R}^3$ $\qquad \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n)$

$$M(f) = \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \cancel{f(e_4)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cancel{\downarrow} \end{array}$$

BASE CANONICA $\quad \mathcal{E} = \{ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \}$ $\quad (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$



$f(x,y,z) = (2x, y-z, x-z)$ $\qquad$ legge data nel testo

$C_1 = f(e_1) = f(1,0,0) = (2,0,1)$

$C_2 = f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,0)$

$C_3 = f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,-1)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rho = \dim \operatorname{Im} f$ BASE $\operatorname{Im} f = \{$ COLONNE DEVONO APPARTENERE ALLA MATRICE DI PARTENZA $\}$

Ker f:

$AX = \underline{0}$

$A_r X = \underline{0}$

A_r (anche ridotta per riga)

BASE Ker f $= \{$ SI ESTRAE DALLA SOLUZIONE TROVATA $\}$

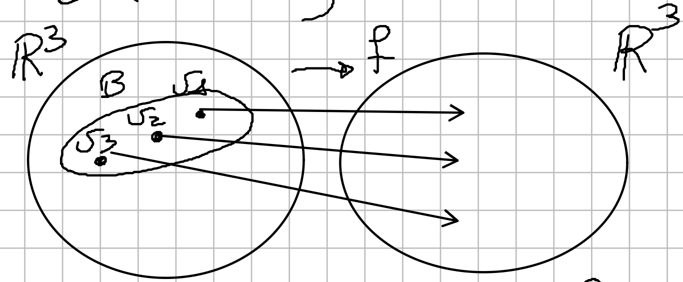
---

2) SONO ASSEGNATE LE IMMAGINI DI ALTRI VETTORI CHE FORMANO UNA BASE ($\neq \mathcal{E}$)

[vd il compito di Giugno 2021]

$B = \{ v_1 = (2,0,0) \quad v_2 = (1,0,-1) \quad v_3 = (0,-1,0) \}$

$$\begin{cases} f(v_1) = \boxed{f(2,0,0)} = (4,0,0) \neq C_1 \\ f(v_2) = f(1,0,-1) = (h,0,h) \neq C_2 \\ f(v_3) = \underline{f(0,-1,0)} = (0,-h,0) \neq C_3 \end{cases}$$



TROVARE LA NOSTRA MATRICE $A = M(f)$?

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$ SONO DA TROVARE

I MEMBRO

$f(2,0,0) = f(2e_1 + \cancel{0e_2} + \cancel{0e_3}) = f(2e_1) \underset{\text{LINEARITÀ 2)}}{=} 2f(e_1)$

$$\boxed{2f(e_1) = (4,0,0)}$$

$f(1,0,-1) = f(1e_1 + \cancel{0e_2} - 1e_3) = f(e_1) - f(e_3)$

$$\boxed{f(e_1) - f(e_3) = (h,0,h)}$$

$$\boxed{-f(e_2) = (0,-h,0)}$$

$$\begin{cases} 2f(e_1) = (4,0,0) \rightarrow f(e_1) = (2,0,0) \quad C_1 \\ f(e_1) - f(e_3) = (h,0,h) \Rightarrow (2,0,0) - f(e_3) = (h,0,h) \end{cases}$$

"METODO STANDARD"

$$\begin{cases} f(e_1) = \_ \\ -f(e_3) = (h,0,h)-(2,0,0) \rightarrow -f(e_3) = (h-2,0,h) \rightarrow \\ \qquad \rightarrow f(e_3) = (2-h,0,-h) \quad C_3 \\ -f(e_2) = (0,-h,0) \rightarrow f(e_2) = (0,h,0) \quad C_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

3°) LA MATRICE È DATA NEL TESTO

DOMANDA: SE HO SOLO LA MATRICE A E MI SERVE LA LEGGE CHE FACCIO?

$\mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = A \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = A \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

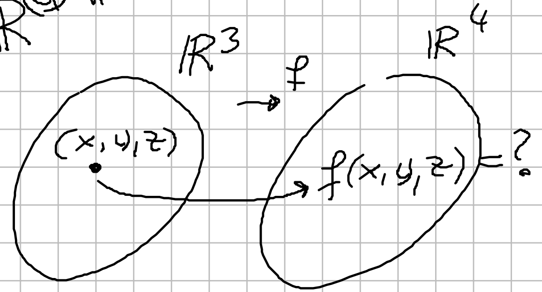
$\mathbb{R}^4 \quad f(x,y,z,t) = A \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

ESEMPIO

Data l'applicaz. lineare $f: \mathbb{R}^{\overset{\#\text{COLONNE}}{3}} \rightarrow \mathbb{R}^{4}$ #RIGHE

con la seguente matrice

$$\underset{4\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & h \\ h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



TROVARE LA LEGGE

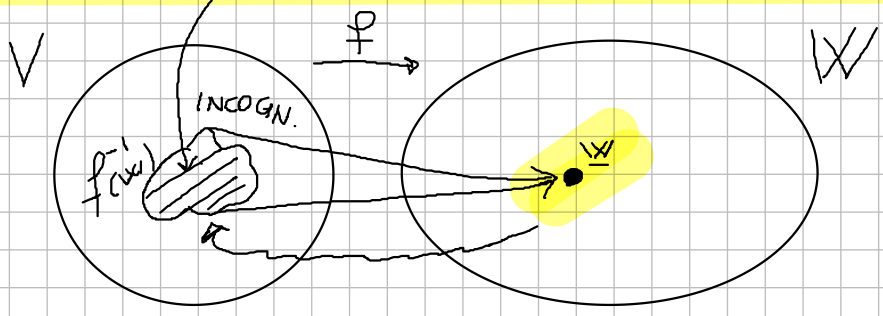
Risoluzione

RIGA PER COLONNA

$$f(x,y,z) = A \cdot \underline{X} = \underset{3\times \cancel{3}}{\begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & h \\ h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\cancel{3}\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x+hy+2z \\ y \\ 2x-y+hz \\ (h+1)x \end{pmatrix}}$$

$$f(x,y,z) = (x+ky+2z,\ y,\ 2x-y+kz,\ (k+1)x)^T \quad V$$

CONTROIMMAGINE DI UN VETTORE $\underline{w} \in W$ (CODOMINIO)



CERCO LA CONTROIMMAGINE DI $\underline{w} \in W$:

SI INDICA CON $\boxed{f^{-1}(\underline{w})}$, sta nel DOMINIO V,

É QUEL SOTTOINSIEME DEL DOMINIO (UNO O PIÚ VETTORI) TALE CHE QUANDO FACCIAMO LA SUA IMMAGINE COSA OTTENIAMO? $\underline{w}$

$\underline{w} = (1,0,3)$ é assegnato nel testo

$\boxed{\text{É NOTO}}$

$$f^{-1}(\underline{w}) = \{ \underset{\text{INCOGNITA}}{\underline{v}} \in V \ / \ f(\underline{v}) = \underline{w} \} =$$

$$\mathbb{R}^3 \quad = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overset{\text{LEGGE}}{\boxed{f(x,y,z) = \underline{w}}} \}$$

$$\mathbb{R}^2 \quad = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) = \underline{w} \}$$

$$\mathbb{R}^4 \quad = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(x,y,z,t) = \underline{w} \}$$

$$A\,\underline{X} = \underline{w} = B$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

COSA É QUINDI?

$AX = B$

SIST. LINEARE

ESEMPIO: DATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3×3 $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

TROVARE $f^{-1}(1,0,3)$ "CONTROIMMAGINE" DI $(1,0,3) = \underline{w}$

RISOLUZIONE

DEF. DI CONTROIMMAGINE

$$f^{-1}(1,0,3) = \{ \underline{v} \in V \mid \underbrace{f(\underline{v})}_{} = (1,0,3) \}$$

$\underline{v} = \underline{x} = (x,y,z)$

$$\underbrace{f(x,y,z)}_{=} = (1,0,3)$$

$$A \, \underline{X} = (1,0,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3×3

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ hx = 0 \rightarrow h \neq 0 \quad x = 0 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

****

DA RISOLVERE

CONSIGLIO

TEOR. DI CRAMER